UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Departamento de Ciências Exatas

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Dissertação de Mestrado

SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS PARA ENSINO DE DEMONSTRAÇÕES EM TEORIA DOS NÚMEROS PARA O OITAVO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Cristiano dos Santos

Orientador: Prof. Dr. Kisnney Emiliano de Almeida

Feira de Santana
julho de 2022

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Departamento de Ciências Exatas

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS PARA ENSINO DE DEMONSTRAÇÕES EM TEORIA DOS NÚMEROS PARA O OITAVO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Cristiano dos Santos

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Ciências Exatas, UEFS, como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre**.

Orientador: Prof. Dr. Kisnney Emiliano de Almeida

Feira de Santana
julho de 2022

Ficha Catalográfica - Biblioteca Central Julieta Carteado - UEFS

Santos, Cristiano dos
S234s Sequências didáticas para ensino de demonstrações em Teoria dos Números para o oitavo ano do Ensino Fundamental./ Cristiano dos Santos. – 2022.
116 f.: il.

.

Orientador: Kisnney Emiliano de Almeida
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Feira de Santana, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Feira de Santana, 2022.

1.Demonstração Matemática. 2.Teoria dos Números. 3.Sequência didática 4.Matemática - Ensino fundamental. I.Almeida, Kisnney Emiliano de, orient. II. Universidade Estadual de Feira de Santana. III. Título.

CDU: 511.2

Maria de Fátima de Jesus Moreira - Bibliotecária - CRB-5/1120

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

PROFMAT

ATA DA SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DO DISCENTE CRISTIANO DOS SANTOS DO PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Aos cinco dias do mês de julho de dois mil e vinte e dois, às 15 horas, ocorreu a defesa pública não presencial, através da plataforma Google Meet, link: https://meet.google.com /mty-pqse-com, da dissertação apresentada sob o título **"SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS PARA ENSINO DE DEMONSTRAÇÕES EM TEORIA DOS NÚMEROS PARA O OITAVO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL"**, do discente **Cristiano dos Santos**, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual de Feira de Santana, para obtenção do título de MESTRE. A Banca Examinadora foi composta pelos professores: Kisnney Emiliano de Almeida (Orientador, UEFS), Francismar Ferreira Lima (UTFPR) e Joilma Silva Carneiro (UEFS). A sessão de defesa constou da apresentação do trabalho pelo discente e das arguições dos examinadores.

Em seguida, a Banca Examinadora se reuniu em sessão secreta para julgamento final do trabalho e atribuiu o conceito: APROVADO.

Sem mais a tratar, foi lavrada a presente ata, que segue assinada pelos membros da Banca Examinadora e pelo Coordenador Acadêmico Institucional do PROFMAT.

Feira de Santana, 05 de julho de 2022.

Kisnney E. de Almeida

Prof. Dr. Kisnney Emiliano de Almeida (Orientador, UEFS)

Francismar Ferreira Lima

Prof. Dr. Francismar Ferreira Lima (UTFPR)

Joilma Silva Carneiro.

Prof.ª Ma. Joilma Silva Carneiro (UEFS)

Visto do Coordenador:

Dedico este estudo aos professores de Matemática do Ensino Fundamental e aos estudantes que impulsionam a prática pedagógica com seus raciocínios lógicos e desafiadores, sem os quais a sala de aula torna-se sem vida.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, pela capacidade de ensinar e aprender Matemática dentro da dinâmica da sala de aula e ter me concedido a benção de me tornar professor.

A minha esposa Silvania Maria Batista pelo amor, dedicação e parceria em toda a trajetória de vida conjunta e por todo apoio na construção deste trabalho e por influenciar a minha identidade profissional.

À meus pais pela insistência na ideia de que a "Educação muda a vida para melhor"; aos meus irmãos e irmãs pela força e incentivo, em especial a minha irmã Selma dos Santos, companhia sempre presente nas vivências da infância, do escotismo até a vida acadêmica.

Ao professor orientador, Prof. Dr. Kisnney Emiliano de Almeida por descortinar uma Aritmética possível e empolgante dando base para boas práticas de sala de aula.

A minha professora primária Maria Helena por me fazer gostar de escola e por me mostrar como o afeto educa, ao professor Wilson Pereira de Jesus por suas reflexões filosóficas em Matemática me mostrarem as belezas do estudo da disciplina, a Maria Hildete França pelo seu exemplo incansável na busca do sucesso acadêmico do estudante.

Aos professores examinadores: Prof. Dr. Francismar Ferreira Lima, Profa. Ma. Joilma Silva Carneiro pelas contribuições.

Aos colegas e professores do PROFMAT, pela convivência sadia, momentos de superação e apoio mútuo.

A professora e amiga Nadja Silva Brasil Santos pelo cuidado amoroso ao rever os caminhos da linguagem neste trabalho.

A todos que contribuíram na construção de cada passo este trabalho direta ou indiretamente e em especial aos jovens estudantes que passaram pela minha história nos vários Grupos de Estudos em Matemática (GEPCEN) e mantiveram meu ânimo na busca de novas propostas de ensinar/aprender.

"A matemática não é uma caminhada cuidadosa através de uma estrada bem conhecida, é uma jornada por uma terra selvagem e estranha, onde os exploradores frequentemente se perdem. A exatidão deve ser um sinal aos historiadores de que os mapas já foram feitos e os exploradores se foram para outras terras." W. S. Anglin

Resumo

Nas aulas de Matemática do Ensino Fundamental, pouco se demonstra, usa-se uma Matemática empírica para resolver problemas práticos do cotidiano, e o pensar abstrato raramente está relacionado a comprovações de proposições ou teoremas, o que minimiza a importância da Matemática enquanto ciência abstrata e complexa. O presente trabalho tem como objetivo discutir a introdução de Demonstrações Matemáticas em Teoria dos Números, para turmas do oitavo ano do Ensino Fundamental, por meio de listas de demonstrações, jogos e dinâmicas presentes em três Sequências Didáticas, as quais são apresentadas como instrumento metodológico para abordar os seguintes temas: raciocínio lógico, paridade e divisibilidade.

Palavras-chaves: Demonstração Matemática. 8º ano do Ensino Fundamental. Teoria dos Números. Sequência didática. Ensino da Matemática.

Abstract

In Mathematics classes from Elementary School , little is demonstrated, empirical Mathematics is used to solve everyday problems, and abstract thoughts are rarely related to the proof of propositions or theorems, which minimizes the importance of Mathematics as an abstract and complex science. The aim of this paper is to discuss the introduction of Mathematical Demonstrations in Theory of Numbers , for eighth grade classes from Elementary School, through demonstration lists, games and dynamics, that are present in three Didactic Sequences, they are presented as methodological instrument, addressing the following themes: logical reasoning, parity and divisibility.

Keywords: Mathematical Demonstration. 8th grade from Elementary School. Theory of Numbers. Didactic Sequence. Teaching Mathematics.

Lista de Figuras

2.1 Organização da Sequência sobre Raciocínio lógico. 34
2.2 Cartaz “Enigma das portas” 52
2.3 Organização da Sequência sobre Paridade. 60
2.4 Modelo do Jogo “O dobro ou nada” 65
2.5 Tabela produto com fator dois 67
2.6 Esquema da paridade da soma e do produto. 69
2.7 Tabela com soma de pares e ímpares 78
2.8 Organização da Sequência sobre Divisibilidade 80
2.9 Divisão exata 85
2.10 Jogo Múltiplos e Divisores 87
2.11 Tabela Divisibilidade de números 88
2.12 Mosaico com divisibilidade 93
2.13 Tabela Stop da divisão 96
2.14 Modelo para impressão 98
2.15 Tabela do Stop da divisão para impressão 99
2.16 Mapa dos divisores 100
2.17 Mapa do mosaico com cores 100
2.18 Árvore de possibilidades 102

Conteúdo

Lista de Figuras **10**

INTRODUÇÃO **12**

1 DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS E SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS **15**

1.1 Demonstrações Matemáticas 16

1.2 Sobre o ambiente de aprendizagem 21

1.3 Sequências Didáticas 25

1.4 Passos para o desenvolvimento do trabalho 28

2 SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS PARA O ENSINO DE DEMONSTRAÇÕES **30**

2.1 Estrutura das Sequências Didáticas 30

2.2 Sequências didáticas 34

2.2.1 Sequência 01: Raciocínio lógico 34

2.2.2 Sequência 02: Paridade 60

2.2.3 Sequência 03: Divisibilidade 80

3 CONCLUSÃO **106**

BIBLIOGRAFIA **108**

A APÊNDICE A - CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE **114**

INTRODUÇÃO

A matemática ocidental enquanto ciência foi desenvolvida, em grande parte, por mentes e pessoas privilegiadas que podiam debruçar-se sobre seus estudos sem o envolvimento com as atividades manuais extenuantes.

Socialmente, o trabalho intelectual era tido como mais importante que o manual, creditando aos não praticantes da ação intelectual um preconceito quanto ao seu intelecto. Esse preceito ainda perdura em nossa sociedade até os dias de hoje.

Aqueles que não alcançam um nível de conhecimento tido como apropriado no ensino de matemática têm suas chances diminuídas em aprovações nos concursos, instituições públicas de ensino ou exames nacionais.

Há uma crescente necessidade de desenvolver o raciocínio lógico e matemático desde cedo para formarmos uma geração mais afeita à matemática. O uso de demonstrações é uma das possibilidades de reduzir o déficit de aprendizado da linguagem matemática. (MATHEUS; CÂNDIDO, 2013[44], p. 14)

Quando se pensa que os estudantes em seus anos finais do Ensino Fundamental são incapazes de realizar demonstrações sobre conhecimento matemático sem sequer serem apresentados a eles, reproduzimos a ideia de iluminação, de que a matemática enquanto ciência não é para todos.

O ensino de matemática ainda preza pelas verdades prontas e acabadas para a execução de um resultado exato, pensado/respondido por todos da mesma maneira. Essa tende a ser uma régua padrão para o alcance ou não do sucesso escolar e por consequência na progressão para anos escolares seguintes, sendo que, na escola, a matemática ainda é a disciplina que mais reprova.

Acreditamos ser a matemática mais que isso! Ela é por natureza uma disciplina que estrutura o raciocínio lógico e a organização dos processos de resolução de problemas que podem ser úteis nas diversas áreas do conhecimento e da vida do indivíduo.

É imprescindível refletir: "para que mundo estamos preparando nossos estudantes que hoje têm acesso a uma infinidade de informações, porém carecem de modos a serem aplicados para a vida cotidiana?" Vemos um número crescente de pessoas que reproduzem informações e conhecimentos sem ter noções das bases e sua construção, e com isso as escolas vão perdendo espaço como centros de produção do saber e do conhecimento.

As reflexões e as práticas pedagógicas em grupo de estudos, que desenvolvemos com os estudantes do 8º ano, têm instigado o desejo de aprofundamento sobre Demonstrações

Matemáticas como proposta do fazer Matemática e na evolução do raciocínio lógico dos estudantes do Ensino Fundamental.

Ao pesquisar nos títulos das dissertações as palavras "demonstração" ou "demonstrações" nos seis mil, quatrocentos e quarenta e dois (6.442) [1] trabalhos depositados no banco de dissertações do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), há cinquenta e três (53) ocorrências sendo que, em nenhuma delas aborda Teoria dos números no ensino fundamental em seu título.

A proposta é não apresentar as demonstrações de forma excessivamente técnica, mas também lúdica, na qual os estudantes possam utilizar os conhecimentos prévios adquiridos ao longo dos anos escolares com a intenção de demonstrar proposições simples em matemática e perceber nessa dinâmica que é uma atividade rica e motivadora para aquisição de conhecimento.

Diante desse quadro, cabe-nos indagar enquanto questões de pesquisa: Por que ensinar a Demonstração Matemática no Ensino Fundamental? Como viabilizar no ensino de matemática do 8º ano demonstrações em Teoria dos Números?

Nosso **Objeto de estudo** são as Demonstrações Matemáticas em Teoria dos Números no ensino de matemática do 8º ano do Ensino Fundamental.

O **Objetivo geral** deste trabalho é discutir a introdução de Demonstrações Matemáticas em Teoria dos Números através do recurso de listas de demonstrações à estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental.

Os **Objetivos específicos** são: Apresentar Sequências didáticas estabelecendo um elo entre os conceitos matemáticos e a necessidade de se fazer demonstrações; Descrever sequências didáticas para o ensino de demonstração discutindo as possibilidades de realizações das demonstrações matemáticas no 8º ano do Ensino Fundamental.

Nosso pressuposto é que se as aulas de Matemática contemplassem demonstrações, de acordo o nível de escolaridade, contribuiriam para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática e do pensamento matemático.

Para proporcionar aos estudantes uma melhoria na sua relação com Matemática e nas relações sociais com seus colegas, serão propostas atividades que despertem o raciocínio lógico matemático individual e coletivamente. Esse despertar de novas imagens e símbolos trarão a identificação de termos da linguagem matemática para próximo dos estudantes.

Este estudo está organizado em dois capítulos: O primeiro capítulo apresenta conceitualmente as Demonstrações Matemáticas e sequências didáticas. Versa sobre a importância destas na Educação Básica, especialmente para o ensino e aprendizagem da Matemática no 8º ano do Ensino Fundamental a partir dos autores Almouloud (2007)[3], Borges(2006)[13], Morais Filho (2010)[46]; e sobre sequência didática, Zabala (1998)[69]. No que tange as definições, proposições e teoremas, utilizamos os textos de Paterlini (2012)[51], Almeida (2022)[2] e as salas de estudos das Olimpíadas Brasileira de Ma-

[1] Números obtidos no site https://profmat-sbm.org.br/dissertacoes/?pag=45, acessado em 11/07/2022 por Cristiano dos Santos.

temática das Escolas Públicas - OBMEP[23] sobre a aritmética dos números inteiros.

O segundo capítulo descreve as sequências didáticas para o ensino de demonstração através da estrutura e aplicabilidade, apresentando as listas de exercícios e discutindo as possibilidades de realizações das demonstrações matemáticas no 8º ano do Ensino Fundamental. Utilizaremos no total três sequências didáticas que versarão sobre os temas raciocínio lógico, paridade e divisibilidade. Para cada uma será apresentada uma breve discussão da temática e das questões, a intencionalidade pedagógica; algumas sugestões de como aplicar e possíveis estratégias para explorar o tema, bem como avaliar o aprendizado do estudante.

Na conclusão, retomamos os objetivos da pesquisa e consideramos vantagens e limites das Demonstrações Matemáticas no Ensino Fundamental a partir do 8º ano.

Capítulo 1

DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS E SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS

Inserir o uso de Demonstrações Matemáticas na Educação Básica tem sido um desafio aos professores de matemática, destacado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's, 1997[17]) e mais recentemente reiterado pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2018[18]). Nos dois casos destaca-se a importância de desenvolver no estudante a capacidade de raciocínio formal e dedutivo, mas a proposta não encontra ressonância na prática de sala de aula por diversos fatores, dentre eles: a defasada estrutura educacional, a falta de investimentos em educação e a desmotivação da comunidade escolar.

Adiamos então a construção da linguagem matemática e o desenvolvimento do raciocínio dedutivo o máximo que pudermos e, dentro de alguns contextos, ela serve para indicar a distância entre os estudantes e o saber matemático. Segundo Silva e Sales (2010),

> [...]A atividade de demonstrar, sem uma compreensão do processo e apenas como quesito para a nota, produziu um desgaste no conceito.
>
> Em consequência o desenvolvimento do raciocínio dedutivo que é um dos objetivos do ensino da matemática no nível da educação básica não chega ser estimulado. Porém, o mais grave de tudo isso é que o profissional que é formado nessa perspectiva não sai preparado para ensinar demonstração aos alunos do ensino fundamental tanto pelo desgaste ocorrido como por considerá-la fora do alcance do aluno. (SILVA; SALES, 2010[65], p. 5)

Para os autores, tanto o professor quanto os estudantes necessitam ser apresentados a uma forma de construção do raciocínio dedutivo (e indutivo também), no intuito de termos uma boa base matemática.

Sabemos que na sala de aula as demonstrações empíricas são mais valorizadas e executadas na rotina escolar. Fazer a prova real, checar casos verdadeiros ou falsos e verificar raízes de equações são exemplos de provas mais próximas de nosso cotidiano escolar.

No entanto, demonstrar uma verdade, mesmo que simples, com o uso de algum método axiomático encontra-se fora da realidade de muitas escolas.

Os PCN's sugerem que por volta do 8º e 9º ano os alunos poderão utilizar axiomas e teoremas, tendo em vista que esse conhecimento e a manipulação desses conceitos matemáticos abrem espaço para a elaboração de conjecturas.

Diante da distância entre a necessidade e a prática, o presente trabalho indica possibilidades de aproximar professor e estudante de uma prática significativa visando o desenvolvimento da competência de demonstrar utilizando estratégias, métodos e exercícios dentro de Sequências Didáticas.

Vejamos alguns conceitos e considerações a respeito de demonstrações, para embasar as sequências didáticas.

1.1 Demonstrações Matemáticas

Historicamente, o uso de demonstrações remonta ao século V a. C., tendo sido o povo grego o primeiro a realizar Demonstrações Matemáticas, como Tales, Eudoxo, Teeteto, Aristóteles e Euclides. Este último revolucionou a prova com seu método axiomático e seu livro “Os Elementos” que chegou a ser lido por qualquer pessoa que se alfabetizava, até o início do século XX, e ser considerado um dos mais lidos pela humanidade ficando atrás apenas da Bíblia. (EVES, 1997[28], p. 167, 168).

A prova envolvia argumentação lógica, raciocínios abstratos, axiomatização e formalização rigorosa. Os gregos propuseram que toda verdade matemática deveria ser comprovada ou demonstrada (DOMINGUES, 2002[27]). Os gregos perceberam que a Matemática era mais que verdades prontas e conclusões empíricas; e que essas verdades precisavam ser validadas. Portanto, é esse processo de demonstração que analisaremos.

Em matemática, uma prova é uma demonstração de que, dados certos axiomas, algum enunciado de interesse é necessariamente verdadeiro. Utiliza como base premissas intrínsecas a um modelo conceitual e um silogismo que, a partir de uma série de operações, chega ao resultado. Essa definição de prova Matemática irá servir para o estudo que faremos à frente.

Observemos que há semelhanças entre os elementos que compõem a prova e uma demonstração, como podemos ver no trabalho de Morais Filho (2010)

> Numa demonstração, prova-se que todo objeto matemático que satisfaz as condições das hipóteses, cumpre necessariamente o que afirma a tese. [...]
>
> Cada passo de uma demonstração é provado por meio de argumentações válidas, usando-se hipóteses, axiomas, definições, outros resultados anteriormente provados e os passos precedentes, formando uma cadeia dedutiva de raciocínio. (MORAIS FILHO, 2010 [46], p. 94.)

Logo, para nosso entendimento neste trabalho usaremos as palavras prova matemática e demonstração matemática como sinônimos [1] de um mesmo processo evitando confusão ao leitor.

Há muita discussão sobre o conceito de demonstração. Por exemplo,

> A natureza e o significado de uma demonstração matemática! Não é possível dar aqui e agora uma descrição precisa do que seja uma demonstração e nisto reside um dos maiores fantasmas para os principiantes em Matemática. Se a natureza de uma demonstração não pode ser descrita ou formulada em detalhes, como pode alguém aprender a fazer demonstrações? Para usar uma analogia super simplificada: aprende-se a fazer demonstrações do mesmo modo pelo qual uma criança aprende identificar cores, isto é, observado alguém identificar coisas verdes, azuis etc. e imitando então o que se acabou de observar. (NIVEN, 1984[48], p. 8.)

Para Borges (2006, p. 145), Demonstração é definida apoiando-se na lógica

> Dentro de uma teoria $\mathcal{T}$, a elaboração de um enunciado verdadeiro a partir de outro suposto verdadeiro $\mathcal{H}$, é chamada de dedução. Sempre que de $\mathcal{H}$ pode-se deduzir $\mathcal{T}$, anota-se $\mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{T}$. Isto significa dizer que a implicação $\mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{T}$ é verdadeira. Para chegar a $\mathcal{T}$, usando $\mathcal{H}$, empregamos o chamado raciocínio lógico, isto é, aquele que é justificado pelas regras da lógica usual. (BORGES, 2006[13], p. 145)

Esta definição nos aponta um ponto de partida (axioma), o raciocínio lógico e a dedução como bases para a formulação de demonstrações. Apesar de definirmos o termo e o processo, Bicudo (2002) nos passa uma visão a respeito da relação entre as certezas e a Demonstração Matemática, quando indica a dificuldade em explicar com exatidão os termos

> Em suma, quando se trata de discorrer sobre a Demonstração Matemática, o matemático parece estar na mesma posição de Santo Agostinho em relação ao tempo e, talvez, a única coisa sensata a fazer seja responder como o Santo. Demonstração Matemática - se não me perguntam o que é, eu sei; se me perguntam, e eu queira explicar, não sei. (BICUDO, 2002[10], p. 7)

Diante da observação, focaremos na utilização das demonstrações em Matemática, por nos permitir a garantia de um grau maior de segurança quanto a seus resultados. A confiabilidade nesses resultados é a base para muitas descobertas em diversas áreas do conhecimento e proporcionando condições para mover a sociedade na melhoria da qualidade

[1] Uma discussão mais detalhada é feita por Almouloud (2007[3], p. 2 e 3), onde diferencia os termos: explicação, prova e demonstração cada termo tem seu significado e importância.

de vida através dos avanços tecnológicos tais como: carros elétricos, computadores caseiros; satélites; programação de viagens a estações espaciais ou ao planeta Marte; apenas para citar alguns dos resultados embasados nos cálculos.

No tocante ao seu ensino na Educação Básica, tem sido uma prática não recorrente nas escolas ou currículos de matemática no Ensino Fundamental. Vemos que os conceitos são apresentados de forma assertiva e sem espaço para dúvidas de suas bases ou necessidade de prova dos seus teoremas e proposições; assim nos é apresentada uma Matemática escolar distante de seu papel enquanto Ciência viva, deixando transparecer para o estudante a ideia de que nesta disciplina só se ensina certezas, sem a necessidade de provas. Pensamentos como "$2+2=4$", não se pode questionar e nem exigir provas . (GUIMARÃES, 2003[36], p. 152; SOARES, 2012[66])

Faz-se necessário ampliar nosso conceito sobre Demonstração matemática acrescentando as noções de axioma, hipótese e Teorema. Bicudo apresenta uma explicação lógica sobre a construção da ideia de Demonstração

> Seja, agora, F um sistema formal em que todas as regras sejam finitas. Então, uma Demonstração em F é uma sequência finita de fórmulas, em que cada uma seja ou um axioma ou seja conclusão de uma regra cujas hipóteses precedam essa fórmula na sequência dada. Se A for a última fórmula em uma demonstração P, diremos que P é uma Demonstração de A. Uma fórmula A de F será um teorema de F se existir uma demonstração de A. (BICUDO, 2002[10], p. 3).

Assim, vemos que para haver uma demonstração em um sistema formal, os axiomas (verdades inicialmente aceitas) dão possibilidades para o levantamento de hipóteses (suposição de algo pelo qual pode se extrair uma conclusão), essas por sua vez, levam a um veredito final, Teorema. Para fins didáticos, chamamos a atenção aos conceitos expressos por Mota e Carvalho a respeito de Proposições e Teoremas

> **Proposições** - são frases afirmativas em forma de oração, com sujeito, verbo e predicado, podendo ser verdadeira ou falsa, não admitindo uma terceira opção (principio lógico do terceiro excluído). [...] **Teoremas** - são proposições verdadeiras que podem ser verificadas mediante uma demonstração. Podem ser validados partindo-se da hipótese (o que possuímos como verdade), objetivando chegar à tese (o que queremos demonstrar).(MOTA; CARVALHO, 2011[47], p. 2)

Tanto as proposições quanto os teoremas precisam ser provados quanto à sua veracidade, sendo que as proposições são tidas como provas mais simples enquanto os Teoremas são provas com mais impacto na matemática.

Em muitos casos, tão importante quanto conseguir verificar se uma proposição ou teorema são verdadeiros, são as descobertas feitas durante as tentativas da prova e o raciocínio desenvolvido no processo. A tentativa de demonstrar uma proposição abre novas possibilidades para a Matemática conduzindo a novos resultados ou conjecturas.

No ensino da Matemática da Educação Básica, especialmente no Ensino Fundamental a partir do 8º ano, os estudantes devem começar a ensaiar na aprendizagem matemática a prática de justificar, provar e demonstrar aguçando a construção de novas formas de percepção sobre a Matemática. É relevante que os estudantes possam aprender a construir seu raciocínio lógico, verificar a verdade de seus resultados, comunicar ideias matemáticas, repensar suas atitudes frente a disciplina e se apropriar do saber matemático autônomo. Para isso, é necessário ser colocado diante do desafio de estruturar o seu raciocínio através do indagar, analisar, comparar, verificar e sintetizar suas ideias e conclusões de maneira plausível.

Segundo a Teoria de Van Hiele, os estágios cognitivos com relação ao raciocínio lógico são quatro(4):

1. No primeiro nível (visual) - O julgamento é baseado na observação;

2. No segundo nível (raciocínio analítico) - Observa propriedades e elementos da figura, mas não estabelece relações entre elas;

3. No terceiro nível - O aluno percebe quando uma propriedade é consequência de outra;

4. No quarto nível - O processo dedutivo é dominado, conseguem compreender uma prova formal. (MATHEUS e CÂNDIDO, 2013[44], p. 11)

A introdução do ensino das Demonstrações Matemáticas é urgente no Ensino Fundamental 8º ano, pois contribuirá para a valorização da criatividade e do desenvolvimento do terceiro e quarto nível do raciocínio dedutivo dos estudantes, a partir do exercício da heurística[2].

Assim, conceber situações que necessitem justificar, provar, argumentar e demonstrar matematicamente é uma postura que deve ter o professor de Matemática ao ensinar (ALMOULOUD, 2007[3]). Precisamos preparar os estudantes para pensar, comunicar ou explicar seus resultados através de questionamentos advindos dos conteúdos básicos da Matemática.

A falta do uso das Demonstrações Matemáticas na Educação Básica pode advir da insegurança ocasionada durante a formação na graduação, uma vez que muitos professores a viram de forma técnica e distante do pensar reflexivo. Segundo Borges (2006), “os alunos de Matemática, na sua maioria, detestam demonstrações e aqueles que as fazem, fazemnas com grande insegurança, pois não têm certeza se elas estão certas e, até mesmo se chegaram até o final.”

[2]Heurística é um procedimento mental simples que ajuda a encontrar respostas adequadas, embora várias vezes imperfeitas, para perguntas difíceis. https://pwikipedia.org/wiki/heurística

Mas os professores da Educação Básica, especialmente a partir do Ensino Fundamental, podem alicerçar sua prática pedagógica com Demonstrações, entendendo-as como o pilar para o saber matemático. E, também como uma valorização do ponto de vista do estudante e do nível de racionalidade (tomada de decisão, elaboração de critérios e regras, discussão, construção de provas matemáticas).

A BNCC faz uma leitura atualizada do que já traziam os PCN's sobre o uso das Demonstrações Matemáticas, porém as direcionam para o ensino de Geometria e as colocam como um objetivo a ser buscado em sala de aula

> [...] nessa fase do Ensino Fundamental, de modo que os alunos sejam capazes de reconhecer as condições necessárias e suficientes para obter triângulos congruentes ou semelhantes e que saibam aplicar esse conhecimento para realizar demonstrações simples, contribuindo para a formação de um tipo de raciocínio importante para a Matemática, o raciocínio hipotético-dedutivo. (BRASIL, 2018[18], p. 272)

Vale ressaltar, que nos PCN's de Matemática a visão de demonstração em Matemática fica aberta para além da geometria e lança a luz à utilização de demonstrações nos anos finais do Ensino Fundamental ainda no bloco de "Números e Operações"

> Embora nas séries iniciais já se possa desenvolver uma pré-álgebra, é especialmente nas séries finais do ensino fundamental que os trabalhos algébricos serão ampliados; trabalhando com situações-problema, o aluno reconhecerá diferentes funções da álgebra (como modelizar, resolver problemas aritmeticamente insolúveis, demonstrar), [...]. (BRASIL, 1997[17], p. 23, 39)

Nossa proposta foca a utilização de Demonstrações de Teoria dos Números para estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental por entender ser nesta fase que o estudante já conhece na aritmética conceitos como pares e ímpares, máximo divisor comum (MDC), mínimo múltiplo comum, números primos, entre outros, e já foi introduzido aos primeiros fundamentos de álgebra.

Afinal, o que vem a ser Teoria dos Números? Segundo Hefez (HEFEZ, 2016[37]) a Aritmética é "parte elementar da Teoria dos Números, teve como principal marco inicial a obra *Os Elementos*, de Euclides (aprox. 300 a.C).", tendo recebido valiosas contribuições de Pierre de Fermat (1601-1665), Leonhard Euler (1707-1783) e Carl Frederich Gauss (1777-1855), onde a Aritmética transformou-se em Teoria dos Números e tornou-se um dos principais pilares da Matemática. (HEFEZ, 2016[37], p. VII)

Por que não usamos aqui simplesmente o termo Aritmética? Apesar de também apropriado, a escolha do termo Teoria dos Números busca destacar seu uso mais específico de tratar dos aspectos abstratos do estudos dos números, conforme podemos ver na evolução histórica de seu estudo:

> Os gregos antigos faziam distinção entre o estudo das relações abstratas envolvendo os números e a arte prática de calcular com números. Esta era conhecida como logística e aquele como aritmética. Essa distinção atravessou a Idade Média chegando até por volta do final do século XV, quando surgiram textos que tratavam as facetas teórica e prática da abordagem dos números sob a designação única de aritmética. É interessante que hoje aritmética tenha seu significado original na Europa Continental, ao passo que na Inglaterra e nos Estados Unidos o significado popular de aritmética corresponde à logística grega. Nos dois países citados usa-se a expressão teoria dos números para designar a faceta abstrata do estudo dos números. Admite-se geralmente que os primeiros passos no sentido do desenvolvimento da teoria dos números e, ao mesmo tempo, do lançamento das bases do futuro misticismo numérico, foram dados por Pitágoras e seus seguidores movidos pela filosofia da fraternidade. (EVES, 1997[28], p. 98)

Propomos que no estudo da aritmética escolar, oportunizemos desenvolver conceitos, argumentações e demonstrações em Teoria dos Números, proporcionando aos estudantes uma maior proximidade à linguagem, métodos e descobertas da Matemática Ciência na Matemática Escolar. Mas como criar este ambiente de ensino?

1.2 Sobre o ambiente de aprendizagem

Fazer o ensino da Matemática usando apenas métodos educacionais tradicionais, carentes de significado, acentuam as dificuldades no aprendizado da leitura, do cálculo e da escrita dos estudantes que na maior parte das vezes tentam reproduzir o que lhe foi ensinado, o que impede uma compreensão das sentenças fundamentais para a resolução de problemas nas diversas áreas do conhecimento. A exemplo disso, Polya (1995), falando sobre os exercícios rotineiros [3], menciona que

> No ensino da Matemática, podem fazer-se necessários problemas rotineiros, até mesmo muitos deles, mas deixar que os alunos nada mais façam e indesculpável. O ensino que se reduz ao desempenho mecânico de operações matemáticas rotineiras fica bem abaixo do nível do livro de cozinha, pois as receitas culinárias sempre deixam alguma coisa à imaginação e ao discernimento do cozinheiro, mas as receitas matemáticas não deixam nada disso a ninguém. (POLYA, 1995[55]. p. 124)

Longe disso, nossa discussão irá utilizar-se de listas de exercícios baseadas nos problemas de demonstrações encontradas na Teoria dos Números, buscando ressignificar seu papel, através da análise, do fazer pensar mediante o levantamento de conjecturas, hipóteses,

[3]... um problema será rotineiro se ele puder ser solucionado pela substituição de dados específicos no problema genérico resolvido antes, ou pelo seguimento, passo-a-passo de algum exemplo muito batido.

de argumentos lógicos e da confirmação da tese. As listas de demonstrações trarão conceitos básicos presentes no currículo da Educação Básica e já estudados nos primeiros sete (7) anos escolares do Ensino Fundamental, com o objetivo de apresentar às diversas relações entre a matemática e as demonstrações dos conceitos que eles já aprenderam e são aceitos como verdade.

O motivo da escolha da Teoria dos Números como parte da matemática a ser estudada é por ela dedicar-se ao estudo dos números naturais e inteiros (conhecimento já adquirido até o 7º ano) e a resolução de seus problemas requererem "para a solução a utilização simultânea de métodos algébricos, analíticos, topológicos, geométricos e combinatórios, além de uma boa dose de imaginação!", conforme prefácio da obra de Martinez (MARTINEZ, 2018[43]).

Traçar um caminho que proponha atividades significativas e que agucem a inteligência, passa longe das tentativas de preparar materiais mais fáceis para o estudante, é necessário desafiá-los: as demonstrações cumprem esse papel, pois para fazer-se provadas verdadeiras, atuam como um problema que requer o conhecimento e o desenvolvimento de técnicas próprias da Matemática (Demonstrações diretas, por absurdo, indução, contra-exemplo ou pela contra-positiva).

Segundo Pozo (1998)

> [...] a aprendizagem da solução de problemas somente se transformará autônoma e espontânea se transportada para o âmbito do cotidiano, for gerada no aluno a atitude de procurar respostas para suas próprias perguntas/problemas, se ele se habituar a questionar-se ao invés de receber somente respostas já elaboradas por outros, seja pelo livro texto, pelo professor ou pela televisão. O verdadeiro objetivo final da aprendizagem da solução de problemas é fazer com que o aluno adquira o hábito de propor-se problemas e resolvê-los como forma de aprender. (POZO, 1998[57], p. 15)

Logo, saber demonstrar envolve um novo conjunto de competências que permitam ao estudante sair do âmbito do cotidiano e buscar respostas as questões que se encontram dentro do campo da Teoria dos Números. Como exemplo, a definição "Um número par é divisível por dois" é muitas vezes, vista como uma propriedade a ser memorizada e não compreendida.

É importante darmos à memorização seu devido valor na simplificação de processos até que venha a ser desenvolvida a aprendizagem com o devido entendimento, porém, a memorização de curto prazo[4] precisa ser progressivamente substituída pela memorização de longo prazo[5].

[4]Através dela, armazenamos informações essenciais para a resolução de problemas, para uso do raciocínio rápido ou elaboração de comportamentos (que podem ser esquecidos a seguir). Ex.: Lugar onde estacionamos o carro.

[5]É responsável por armazenar todo o conhecimento de uma pessoa. O tempo de acesso para recuperação de informações é muito maior. Podendo durar dias, semanas ou até mesmo anos.

A educação formal é um campo de atuação onde a intencionalidade por parte do educador é uma característica desejada, precisa-se perceber como o estudante aprende, toma decisões a partir dessas considerações e, diante das opções metodológicas, qual o modelo de ensino decidir e quais as considerações frente a modelos de ensino, metodologias e currículo são adequados a seu tempo, comunidade e espaço. (Freire, 1997[33])

Na falta de tal intencionalidade na educação ministrada, surgem questões disciplinares, desmotivação e conflitos que dificultam o aprender a aprender. Fazer o estabelecimento de relações entre o que se pretende ensinar, o que o estudante já sabe e o que ele precisa de fato saber, deve ser uma meta a ser alcançada pelo professor de qualquer disciplina e também é para o docente de matemática.

Para termos o uso de demonstrações de forma efetiva em sala de aula, precisamos tornar a sala de aula de matemática um lugar propício para o aprendizado, capaz de mobilizar os estudantes no seu processo de aprendizagem. Para Abrantes (ABRANTES, 1999[1]), a aprendizagem requer o envolvimento das crianças em atividades significativas, visando a apropriação de novas ideias e novos conhecimentos mediante seu envolvimento num processo de reflexão sobre essas atividades

> Se queremos valorizar as capacidades de pensamento dos alunos, teremos de criar condições para que eles se envolvam em atividades adequadas ao desenvolvimento dessas capacidades [...] A aprendizagem é um processo gradual de compreensão e aperfeiçoamento [...] também as concepções que os alunos têm sobre a matemática e sobre o seu papel como alunos de matemática desempenham um papel crucial na aprendizagem. [...] Todos estes aspectos - cognitivo, afectivos, do domínio das concepções - estão muito estreitamente ligados ao ambiente de aprendizagem que se vive no interior das aulas. Se a "norma" é valorizar o envolvimento em processos de pensamento, assim como o raciocínio e a argumentação lógica, pode criar-se uma "cultura da aula de Matemática" muito diferente daquela que valoriza as respostas rápidas e certas. (ABRANTES, 1999[1], p. 23 - 28)

Aqui faremos uma importante demarcação: Para ensinar boa matemática é necessário competência técnica, conhecer os conteúdos curriculares e saber aplicá-los a diferentes contextos. Para alcançar tal objetivo nós, professores, devemos lançar mão da experiência formativa desde o ensino básico até a graduação, na qual a tríade ensino-pesquisa-extensão, deve ter produzido a autonomia intelectual e da elaboração de suas práticas docentes, sendo "protagonistas de nossa formação técnica, no processo de obtenção de competências necessárias à atuação profissional, de uma formação cidadã, garantindo o processo que lhe permite reconhecer-se como agente de garantia de direitos e deveres e de transformação social" (POLÍTICA NACIONAL DE EXTENSÃO UNIVERSITÁRIA, 2012[54], p. 50).

Uma outra ideia de vital importância é que estamos trabalhando com indivíduos complexos por natureza (o ser humano), que na maioria das vezes não escolheram estar naquela escola ou sala, com aquele professor, debaixo de determinadas regras (especialmente na Educação Básica). É aí onde a Metodologia e Prática do Ensino de Matemática com Demostrações Matemáticas pode atuar, no sentido de dirimir os gargalos e entraves para a boa formação do estudante.

Levando em consideração os conhecimentos prévios dos estudantes, o professor pode usá-los como pontos de partida para novos conhecimentos, sem perder a oportunidade de instigar, provocando o querer conhecer e perceber que a Matemática é uma ciência viva e em evolução (FREIRE, 1986[30]). É importante trabalharmos com cuidado e intencionalidade, gerando a curiosidade necessária para introduzir as Demonstrações Matemáticas nas práticas de sala de aula.

No 8º ano, o professor de Matemática deve estabelecer o elo entre o conhecimento matemático e o estudante, e transpô-lo para um nível de abstração cada vez maior, especialmente no tocante à introdução da álgebra. Professor e estudante, juntos, de forma dialógica e crítica, devem construir o conhecimento matemático através da realidade como início de seus estudos, buscando tornar o aprendizado matemático mais significativo.

Vemos então que as práticas e fazeres pedagógicos, o trabalho da Matemática a partir da experiência do/com o estudante, aprendendo e ensinando numa via de mão dupla, são tarefas possíveis de serem implementadas pelo professor de matemática.

Algumas práticas que buscam estimular o aprendiz a se apropriar do conhecimento matemático através da formação de um bom ambiente para o aprendizado utilizando jogos, quebra-cabeças, diário reflexivo de Matemática, avisos de avaliação, certificação de mérito acadêmico, atividades lúdicas etc., podem ser inseridos nas aulas para criar a experiência necessária para uma boa relação com a disciplina. (Algumas dessas experiências podem ser vistas em SANTOS, 2020 [60] ou no blog[61])

Por que mencionei essas práticas antes mesmo de falar do uso de listas de exercícios de demonstrações em Teoria dos números? Uma razão é que nenhuma sequência, por si só, dará conta da complexidade da sala de aula. Assim, nosso objetivo é mostrar primeiro a necessidade da criação de um ambiente de desafio, busca e de superação das dificuldades, onde o(a) estudante se sente mais confiante de expor suas ideias, fragilidades, recalcular suas rotas, assumir a autonomia pelo que está desenvolvendo em matemática e no seu aprendizado.

> Não parece razoável esperar que, ao nível da educação básica, os alunos entendam com alguma profundidade o caráter axiomático da matemática. No entanto, compreender as noções de conjectura e teorema, e distingui-las, assim como compreender o que é uma demonstração, faz parte de uma competência matemática básica. (ABRANTES, 1999[1], p. 36)

Fazer uso das Demonstrações matemáticas sem sobrecarregar os estudantes com informações excessivas a respeito da linguagem formal da matemática é a tônica das sequências didáticas presentes neste trabalho.Veremos mais adiante os passos que antecederam a construção das sequências didáticas com algumas práticas que conduzem à experimentação de atividades de aprofundamento.

1.3 Sequências Didáticas

Ao construirmos uma organização de atividades que mostrem o desenvolvimento de uma temática a bem do aprendizado do estudante, estamos estabelecendo uma organização lógica entre os conteúdos, a forma de aplicá-lo e as diversas relações implícitas no estudo de qualquer tema. Chamamos esse tipo de organização de Sequência Didática. .

Uma Sequência Didática prima pela organização metodológica dos conteúdos, evidenciando uma continuidade lógica: elaboração, construção, questionamentos, conjecturas, desafios e execução das atividades. Dentre os objetivos a serem alcançados nas Sequências Didáticas estão: ajudar a melhorar a prática educativa desenvolvida pela escola e pelo professor, melhorar o ambiente de aprendizagem e das relações entre os pares da comunidade escolar e buscar uma melhor formalização em relação aos conteúdos propostos. (LEGEY, 2021[41])

Na perspectiva de Zabala (1998), as atividades nas Sequências Didáticas precisam permitir que detectemos e determinemos os conhecimentos prévios que o estudante tem em relação aos conteúdos que serão aprendidos; os conteúdos propostos sejam significativos para os estudantes; sejam adequados ao nível de desenvolvimento do estudante; o aprendiz perceba-se capaz de mobilizar seus conhecimentos na busca de alcançar a solução de um problema ou desafio, mobilizando suas competências atuais e desenvolvendo novas; haja o conflito cognitivo entre seus conhecimentos prévios e os novos conteúdos, sendo ele capaz de estabelecer relações entre eles; promovam uma atitude favorável em relação à aprendizagem dos novos conteúdos; estimule o desenvolvimento da autoestima e o autoconceito em relação às aprendizagens atribuindo sentido ao que aprendeu e tenhamos estudantes autônomos em suas diversas formas de aprender. (ZABALA, 1998[69], p. 63, 64)

Saber o que o estudante já aprendeu e domina dos conceitos de matemática é importante, por isso fazem-se necessárias as atividades diagnósticas como passo inicial do aprendizado. Essas visam conhecê-los e facilitam a estruturação de uma sequência que possa servir para auxiliar os estudantes em questão. O professor, por sua vez, precisa ter claro o objetivo e os conteúdos que serão ensinados/aprendidos.

Feito o levantamento do que os estudantes já sabem, o que queremos ensinar e o que precisamos ensinar, a partir do diagnóstico das fragilidades conceituais dos estudantes, passamos a organizar as atividades dentro da carga horária disponibilizada para a disciplina.

Na prática escolar atual, precisamos introduzir o planejamento dos conteúdos antes mesmo do diagnóstico o que faz com que o professor distribua os conteúdos dentro das unidades didáticas, a despeito do conhecimento de suas turmas. Na elaboração da sequência didática, podemos ter por rotina fazer o diagnóstico e redirecionar nossos conteúdos sempre que necessário, sem perder de vista o currículo do ano escolar em questão.

A metodologia de ensino utilizada em sala de aula é uma das queixas dos estudantes, por não conseguirem relacionar o que aprendem na escola com as suas vivências e necessidades diárias. O que se ensina tende a ter significado em si mesmo ou fica restrito a atender às exigências do currículo escolar, ficando distante do entendimento e das possíveis relações trazidas pelo estudante, ou seja, não há uma aprendizagem significativa.

Ao elaborar uma sequência didática, o professor deve levar em consideração as formas e métodos que aproximem estudantes e a matemática para que essência e forma possam se aproximar.

Existem diversas metodologias de ensino na sala de aula, como por exemplo a modelagem matemática (BARBOSA, 2003, 2004[7] [8]; BASSANEZI, 2002[9]; BIEMBENGUT, 2002[11], etnomatemática (D'AMBROSIO, 2002[26]); resolução de problemas (MIGUEL, MIORIM, 2011[45]; FOSSA, GIRALDO, 2008[32]), tecnologia da informação e comunicação (TICs) (BORBA, PENTEADO, 2001[12]), a história da Matemática, jogos e os materiais concretos (BRASIL, 1997[17]). Essas metodologias servem como alternativas pedagógicas para o professor tornar as aulas mais motivadoras, desafiantes e buscam atender a heterogeneidade existente nas classes de matemática do Ensino Fundamental no nosso país.

A escolha de uma ou mais metodologias para o ensino de matemática na sala de aula perpassa pelo olhar do professor frente à necessidade de ensino de suas turmas. Essa escolha leva à adoção de estratégias diversas que venham a favorecer o protagonismo do estudante [6] no encontro com a matemática que seja significativa, seja no campo da aplicação, seja no campo abstrato. O pluralismo de ideias e de concepções pedagógicas devem ser o norteador de toda e qualquer ação do professor.

A mera transmissão de conteúdos matemáticos realizada por nós, professores, é considerada por alguns autores como um dos motivos da falta de interesse e da consequente evasão escolar por parte dos estudantes que não obtêm sucesso na disciplina (D'AMBROSIO, 1989[25]; ANGELUCCI; et al, 2004[4]; CARDIM, 2011[19]). Por conta disso, a qualidade do ensino precisa, urgentemente, ser melhorada e para que isto aconteça é necessário que haja um constante revisitar da *práxis* pedagógica adotada pelo professor nas turmas da Educação Básica, não só oportunizando o pensar a matemática enquanto uma necessidade do cotidiano, mas também como uma ciência viva que pode ser aplicada a várias situações, sendo fruto de descoberta e pesquisa intensa.

A extenuante carga horária de trabalho do professor e a redução do tempo de sala de aula têm tornado difícil a construção de um ambiente matematizador, que proporcione ao estudante um período para maturar as dúvidas, testar novo caminhos e se lançar no estudo mais aprofundado da disciplina, nos deixando, na maioria das vezes, apegados aos conteúdos e propostas dos livros didáticos. Projetar o tempo necessário para as atividades

[6] Para conhecer algumas sugestões de práticas de ensino, sugiro leitura do artigo "Perspectivas metodológicas para o ensino de matemática: práticas na Educação Básica"de SANTOS,2000[60]

e conteúdos é parte integrante de uma boa Sequência Didática.

Ainda há outros aspectos que precisam ser levados em consideração na dificuldade de criação de um ambiente, como: problemas emocionais e de aprendizagem do estudante; afastamento da família dos deveres escolares; competência técnica do professor; inadequação institucional e falta de materiais básicos até mesmo para rodar uma lista de exercícios; questões de política educacional (WEBER, 2013[67]).

Apesar de importantes, centraremos nas questões pedagógicas que constituirão o cerne da proposta deste trabalho, sem desperceber que estamos trabalhando na escola real com todas suas mazelas.

É salutar trazer princípios para a formação e a prática pedagógica do professor de Matemática na sua formação superior, concedendo-lhe inúmeras possibilidades do fazer pedagógico para que a escolha não fique presa à repetição e memorização de fórmulas desconexas do entendimento e a explicações superficiais, que, às vezes, dão a aparência de que houve aprendizado, mas limita o estudante a apenas uma das facetas do conceito estudado.

A proposta das Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura (2001) no que se refere às competências e habilidades próprias do educador matemático, aponta a necessidade da autonomia intelectual no exercício da docência, pois o licenciado em Matemática deverá ter as capacidades de:

(a) Elaborar propostas de ensino/aprendizagem de Matemática para a educação básica;

(b) Analisar, selecionar e produzir materiais didáticos;

(c) Analisar criticamente propostas curriculares de Matemática para a educação básica;

(d) Desenvolver estratégias de ensino que favoreçam a criatividade, a autonomia e a flexibilidade do pensamento matemático dos educandos, buscando trabalhar com mais ênfase nos conceitos do que nas técnicas, fórmulas e algoritmos;

(e) Perceber a prática docente de Matemática como um processo dinâmico, carregado de incertezas e conflitos, um espaço de criação e reflexão, onde novos conhecimentos são gerados e modificados continuamente;

(f) Contribuir para a realização de projetos coletivos dentro da escola básica.(BRASIL, 2001[15], p.4)

É essencial que o professor, em sua prática de ensino, exerça a competência de elaborar suas propostas de ensino, construir e participar de projetos educacionais e possa desenvolver Sequências Didáticas que espelhem essa competência numa perspectiva de reconhecer que a educação é um agente transformador da sociedade.

1.4 Passos para o desenvolvimento do trabalho

O instrumento metodológico - Sequência Didática - como elemento construtivo por meio da elaboração de uma lógica interna necessária para preservar o rigor e o significado do processo científico pode ser visto a partir da dimensão histórico-crítica.

A dimensão histórico-crítica estabelece uma relação dinâmica com um objeto que se constrói com o instrumental teórico-metodológico, no qual o professor é estimulado a lançar mão de seus conhecimentos e práticas e estabelecer diálogo com os estudantes, levar em conta suas experiências históricas e sociais sem desperceber a sistematização do conhecimento. Essa construção do objeto (Sequência Didática) gera também um processo de transformação no sujeito (professor/estudante) que se enriquece e se realiza como tal. O resultado desse processo de inter-relação e de mútua elucidação é o conhecimento, entendido como "o concreto no pensamento"[7]. (GAMBOA, 1995[34]).

As categorias de explicação e compreensão pretendidas na aplicação das Sequências Didáticas implicam-se mutuamente dando-se como resultado dos processos de análise, síntese e do movimento: da passagem do real empírico ao abstrato e deste ao concreto (processo e categorias que se articulam na dinâmica do processo do conhecimento). As duas categorias de explicação e compreensão "se inter-relacionam como duas fases do real num movimento cumulativo e transformador". (GAMBOA, 1995[34], p. 105).

A investigação de que as Demonstrações Matemáticas em Teoria de Números são possíveis no 8º ano desemboca na ideia de coerência lógica que desenvolve axiomatização[8]. O papel da axiomática é precisamente explicitar, reduzir e fundar o sistema dessas premissas destacando as condições de possibilidade "sob forma de axiomas" do sistema de hipóteses que pertence à teoria. E, ao mesmo tempo, abrir discussão sobre a explicação dos processos de busca de Demonstração.

Para que se desenvolvesse e chegasse a explicação de uma Demonstração, foram desenvolvidas os seguintes passos:

- Avaliação da própria prática pedagógica do pesquisador no Ensino Fundamental - 6º ao 9º ano;
- Análise e observação do desempenho dos estudantes do 8º ano durante o momento de grupo de estudos coordenados pelo pesquisador na Educação Básica;
- Análise de atividades de Matemática do 6º ao 9º de duas escolas públicas de Feira de Santana para ver se contemplavam questões referentes à Demonstração Matemática;

[7] *Pensamento concreto*: Que se forma a partir da percepção sensível, ou seja, da representação de objetos reais, e é imediato, sensível e intuitivo. *Pensamento abstrato*: Que estabelece reações, que cria os conceitos e as noções gerais e abstratas, é mediato e racional

[8] Todas as verdades matemáticas devem ser demonstradas baseadas em outras afirmativas aceitas como "proposições de partida" e denominadas axiomas. (BORGES, 2006[13], p. 176) [...] O método axiomático é um método organizador que deve ser empregado com parcimônia no Ensino Fundamental e Médio.(BORGES, 2006[13], p. 181)

- Uma consulta ao banco de dissertações do PROFMAT/UEFS buscando conhecer se as produções contemplavam as temáticas consideradas;
- Escolha da temática para investigação;
- Leitura de autores para construção da fundamentação teórica;
- Elaboração de sequência didática com Demonstração Matemática baseada na Teoria dos Números, com Raciocínio lógico, com Paridade e com Divisibilidade;
- Reflexão sobre a sequência didática a partir da fundamentação teórica;
- Indicativos de atividades com conceitos matemáticos que podem contribuir para o aprendizado de Demonstração Matemática;

A partir dos passos mencionados acima, o processo da sequência didática elaborada traz a perspectiva de tê-la como um instrumento metodológico.

Capítulo 2

SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS PARA O ENSINO DE DEMONSTRAÇÕES

As sequências didáticas sobre demonstrações presentes neste capítulo tratam da introdução, aplicação e discussão em Teoria dos Números para estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental através do uso de listas de exercícios.

Indicamos caminhos para tratar os conteúdos Raciocínio lógico, Paridade e Divisibilidade com a intenção de um aprendizado significativo.

O capítulo está dividido em duas seções: Estrutura das Sequências Didáticas e Sequências Didáticas.

Na seção Estrutura das sequências didáticas serão abordados como cada sequência foi pensada, a distribuição das aulas, a organização e tópicos de cada sequência.

Na seção Sequências didáticas apresentamos três (3) sugestões de sequências didáticas que trazem discussão e aplicação de atividades, jogos e listas de exercícios sobre os temas raciocínio lógico, paridade e divisibilidade.

2.1 Estrutura das Sequências Didáticas

As Sequências Didáticas estão estruturadas em quatro (4) aulas com 50 minutos para cada temática (Raciocínio lógico, Paridade e Divisibilidade) a serem implementadas na rotina escolar durante o ano letivo.

Cada Sequência didática será explorada a partir de uma lista de exercícios apresentada em aula. As aulas estão estruturadas, da seguinte forma:

Aula 01 - Provocação do tema, elementos conceituais introdutórios e levantamento de conhecimentos prévios sobre a temática;

Aula 02 - Abordagem de elementos conceituais relacionados necessários para a resolução da lista, ampliação dos conhecimentos e apresentação da lista;

Aula 03 - Aprofundamento e prática de questões relacionadas ao tema e estudo em grupos;

Aula 04 - Apresentação de questões, esclarecimento de dúvidas e avaliação do processo.

A visão geral que se tem das aulas é que as mesmas proporcionem aos estudantes uma boa base matemática e aprofundamento dos conceitos elementares estudados em sala durante os anos anteriores, para o entendimento de relações mais sutis entre raciocínio lógico, números naturais e operações matemáticas com o intuito de a partir das mesmas produzir formalizações.

Para que as aulas fluam com êxito, um cuidado é importante ser tomado na construção das listas no tocante à ordem, sua complexidade e pertinência ao nível de ensino. Podem também ser feitos alguns questionamentos, como: Estavam em um nível de problematização que não forçasse ou desdenhasse das capacidades intelectuais dos estudantes presentes? Quanto à ordem, estão as questões em um nível de gradação das dificuldades? As primeiras questões ajudam ou interagem com as respostas das subsequentes? É possível fazer pesquisa e encontrá-las em vídeo aulas, canais de ensino ou páginas de portais Olímpicos de matemática? Ou seja, a busca pode se enveredar por diversos recursos de pesquisa, até ser equacionada?

Diante desses cuidados e questionamentos, as sequências didáticas estão estruturadas em 03 (três) tópicos: intencionalidades pedagógicas, aplicação e avaliação.

No tópico **Intencionalidade pedagógica** destacamos os elementos conceituais envolvidos na aplicação da lista de exercícios, as definições, os objetivos a serem alcançados, os conteúdos e os pré-requisitos esperados para a exploração do tema.

No tópico **Aplicação**, discorremos sobre a metodologia utilizada, apresentamos cada uma das quatro (4) aulas, a escolha, a distribuição e a organização das questões de estudo, modelo de lista e de atividades lúdicas e o gabarito de possíveis resoluções para a lista. Indicamos ainda alguns pontos de transposição didática que devem enriquecer as discussões.

Este tópico contém atividades específicas que receberam uma denominação diferenciada das resoluções de exercícios, a saber: Título da atividade, Apresentação, Objetivos, Desenvolvimento e Avaliação. O objetivo chamar a atenção ao desenvolvimento de um jogo, estratégias didáticas especificas ou introdução de um dado novo.

No que diz respeito ao tópico **Avaliação**, a explanação é sobre os objetivos esperados, formas de verificação do entendimento dos conceitos através de estratégias, como perguntas diretas ou por propostas de atividades menos convencionais.

Optamos não fazer nenhum instrumento de avaliação como teste e prova, por entender que este momento é particularmente sensível para o aprendizado, sem a perspectiva de ter que alcançar uma nota específica. A ideia é trazer os estudantes para um momento onde encontram sentido nos conteúdos estudados em Teoria dos Números.

Na Teoria dos Números há diversos conteúdos que podem ser usados na nossa discussão: Números Naturais e Inteiros, sistemas de numeração, paridade, números primos, MMC (mínimo múltiplo comum) e MDC (máximo divisor comum), divisibilidade, divisão euclidiana, etc. Escolhemos iniciar as sequências a partir dos temas: **Raciocínio lógico**, dada a necessidade de formarmos estudantes mais cientes de como estruturar o pensamento de forma organizada, de entender de maneira apropriada a construção das ideias matemáticas; a temática **Paridade** para a introdução de demonstrações cujo sentido estejam mais próximo do estudante, já que a ideia de par e ímpar o acompanha desde o 1º ano da Educação Básica, e espera-se já ser do domínio dos estudantes do 8º ano; e **Divisibilidade**, visto que no Ensino Fundamental é corriqueira a necessidade de saber algumas das regras de divisão exata; por isso, tratamos dos critérios de divisibilidade e propomos demonstrações simples na busca de atender à necessidade elementar de aplicabilidade nos conteúdos escolares e a de estabelecer a rotina de demonstrar.

Para estes conteúdos, trabalhamos as demonstrações com as técnicas de contraexemplo, demonstração direta e contrapositiva, visando deixar os estudantes mais à vontade nas tentativas de provar afirmações que podem ser facilmente percebidas com a utilização dos números.

Para a lista ter sentido é necessário garantirmos que esses conhecimentos façam parte do repertório matemático dos estudantes; estes saberes atuam como **pré-requisitos** obrigatórios que devemos nos certificar sobre o nível de compreensão os estudantes. Antes de continuar a explorar a lista de exercícios, se torna necessário resgatar conceitos anteriores para cada sequência.

É interessante manter a observação no desempenho dos estudantes durante o momento de grupo de estudos de matemática e nas atividades desenvolvidas em sala de aula, objetivando:

- Atiçar a curiosidade e a vontade de saber mais;
- Colocar o estudante como protagonista, alguém capaz de dar soluções seja individualmente ou coletivamente;
- Mostrar a importância de levantar hipóteses, testá-las e retomar novos caminhos na resolução de problemas;
- Ter um estudante disposto a errar e acertar junto com o professor e juntos fazer boa matemática.

Por sua vez, as atividades propostas incentivam os estudantes a apresentarem suas conclusões e/ou dúvidas para que, no grupo maior, possamos perceber que argumentos são válidos e quais não são. Esses momentos podem ser lúdicos, competitivos, em parcerias e monitorias.

É fundamental a partir das necessidades observadas por falta de pré-requisitos, que os direcionemos a uma matemática possível, isso é, os estudantes sabem das dificuldades de entender a disciplina, toma isso como desafio e não se paralisam diante das resoluções.

Eles passam a entender que alguns problemas que não forem respondidos podem carecer de outro nível de compreensão, leituras adicionais ou bases matemáticas que eles temporariamente não têm, e que é necessário ampliar o seu repertório de conceitos, definições e de repetições (exercícios). Neste aspecto, cabe ao professor orientar o processo de aprendizado, desmistificando a pura iluminação nas resoluções de problemas; é imperativo que o estudante entenda que as dificuldades são inerentes a elas.

As sequências foram montadas pensando também no estudante que reluta em participar no quadro, por timidez, medo ou receio de errar; que às vezes não tenta fazer os exercícios propostos em sala de aula ou copia respostas prontas do final do livro; que não consegue frequentar as aulas regularmente [1] e perde definições e propriedades fundamentais para a compreensão dos conteúdos ensinados em sala de aula.

Foram escolhidas atividades para estabelecer um ambiente de estudo matemático prazeroso e desafiador. Cabe a nós professores a função de guiar o enfrentamento dos problemas e demonstrações, disponibilizar o maior número possível de estratégias que tornem a matemática compreensível para o estudante que possam estabelecer relações entre o conteúdo a ser apreendido com os conhecimentos já internalizados por ele.

Encontraremos nas sequências exemplos semelhantes e/ou interdependentes, a ludicidade e os exercícios. As diversas metodologias atuam sobre a compreensão do estudante sobre os signos e significados e não somente sobre a Matemática. É necessário o mínimo de elementos conceituais, por isso a importância de resgatar o que o estudante já sabe.

> [...] é essencial levar-se em consideração as complexidades provenientes da situação de classe de aula, estes por sua vez, incluem a presença de muitos alunos de motivação, prontidão e aptidões desiguais; as dificuldades de comunicação entre professor e aluno; as características particulares de cada disciplina que está sendo ensinada; e as características das idades dos alunos. (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980[6], p. 5).

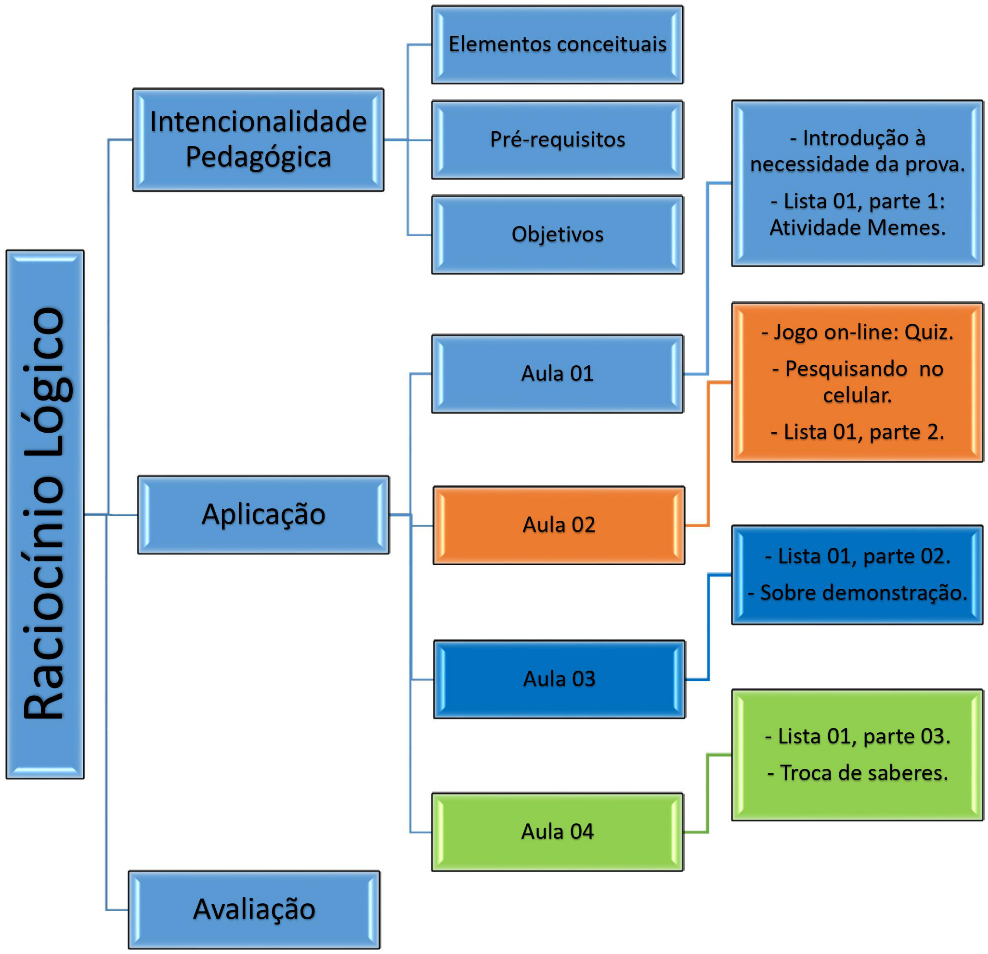
As sequências didáticas nascem simples, com questões e atividades de dificuldade gradual, buscam familiaridade com o cotidiano conhecido pelos estudantes e se propõe a trazer na sua proposta os processos de construção do saber matemático e dos termos que envolvem as demonstrações matemáticas. Na próxima seção as apresentaremos.

[1] Essa realidade foi bastante agravada durante a pandemia de 2020 até a presente data onde os estudantes tiveram carga horária do ano letivo reduzida, aulas presenciais em dias alternados e um contato esporádico com o professor

2.2 Sequências didáticas

2.2.1 Sequência 01: Raciocínio lógico

Figura 2.1: Organização da Sequência sobre Raciocínio lógico.



Em todos os estágios da vida, e da vida escolar, a utilização do raciocínio lógico é uma necessidade inquestionável que pode ser incentivada, desenvolvida e estruturada durante a formação acadêmica ofertada na Educação Básica. Tal ação deve levar os estudantes a desenvolver sua capacidade de interpretar, levantar hipóteses, produzir conjecturas, criar e testar seus argumentos, explicar, responder, provar e elaborar situações problemas envolvendo conceitos matemáticos.

Nessa perspectiva, devemos priorizar um ensino de matemática que favoreça o desenvolvimento do raciocínio lógico. Nesse intuito, desenvolveremos nesta sequência a ideia de como sistematizar uma proposta que utilize o raciocínio lógico dedutivo como foco para trabalhar a capacidade argumentativa.

Um aspecto importante sobre argumentação é que ela é o cerne da lógica e deve ser incentivada e praticada no cotidiano escolar por todas as áreas, e especialmente pelos professores de matemática, dado o caráter de sua disciplina.

A Sequência Didática apresentada a seguir destaca aspectos da lógica que podem ser introduzidos do trabalho com estudantes do 8º ano da Educação Básica.

Intencionalidade Pedagógica

Elementos conceituais: a importância do desenvolvimento da argumentação; o estudo do argumento enquanto encadeamento lógico entre premissa e conclusões; argumentos dedutivos e indutivos, o que é um teorema e como podem ser demonstrados.

Pré-requisitos:

- Saber diferenciar números pares e ímpares;
- Saber o que é um múltiplo/divisor de um número natural;
- Ser capaz de escrever sentenças matemáticas simples com o uso da álgebra;
- Saber generalizar sentenças usando expressões algébricas;
- Saber o que é definir;
- Ter disposição para leitura e interpretação de texto.

Objetivos:

- Entender o uso de termos matemáticos, como por exemplo: "prove que", "Demonstre", "se, e somente se", esses e outros termos;
- Estimular os estudantes a perceber a real necessidade de provar aquilo que parece ser evidente na experiência prática, talvez até indicando premissas falsas para fazer um contra-ponto;
- Instaurar a necessidade da prova, ou seja, nem toda afirmativa que parece ser verdadeira para diversos exemplos e operações matemáticas, são necessariamente verdadeiros para todo o conjunto $\mathbb{N}$;
- Conceituar, explorar e desenvolver argumentos válidos com o uso da lógica;
- Introduzir a noção de prova matemática e de demonstrações;
- Discutir sobre a existência das várias formas de demonstrar afirmações matemáticas;
- Utilizar demonstrações diretas mediante as noções mais elementares de álgebra;
- Desenvolver competências básicas para realizar demonstrações matemáticas através de exemplos.

A seguir apresentaremos a lista de exercícios e algumas possibilidades para trabalhar o tema através de atividades que têm um apelo à curiosidade do estudante e mostram a necessidade de construir hipóteses e testar as proposições para validar os argumentos, desenvolvendo uma interação mais significativa com o conhecimento.

Lista de exercícios

A lista está dividida em três partes: Na **parte 01** da lista utilizaremos memes que podem ser encontrados facilmente na internet numa pesquisa de imagens sob o verbete: "desafio de raciocínio lógico matemático"; esses são usuais nas redes sociais, o que traz familiaridade entre o exercício e o estudante; na **parte 02** da lista usamos problemas gerais que independem diretamente de conceitos matemáticos *a priori*, mas pautados em conhecimentos iniciais de lógica; na **parte 03** da lista focamos em desafios que trazem conceitos matemáticos a serem aplicados direta ou indiretamente e que conduzem a necessidade de explicar, justificar ou provar, buscando estabelecer os primeiros lampejos de demonstração por parte dos estudantes.

Escola:	Trimestre:
Estudante:	
Professor(a):	
Disciplina:	Data:
Ano escolar/Turma:	

Lista 01 - Raciocínio lógico (parte 01)

Desafio 01

A é irmã de **B**.
C é mãe de **B**.
D é pai de **C**.
E é mãe de **D**.
Então, qual é a relação de **A** com **D**?

Desafio 02

1 mãe é 3 vezes mais velha que a filha. Se juntas têm 48 anos, qual é a idade de cada uma?

A) 34 E 14
B) 30 E 18
C) 36 E 12
D) 32 E 16
E) 33 E 15

Desafio 03

Qual é o sucessor do dobro de antecessor do sucessor do triplo de 2?

A) 6 B) 12 C) 13
D) 15 E) 17

Desafio 04

QUE NÚMERO ESTÁ FALTANDO?

Desafio 05

Adivinhe o código de 3 dígitos

Dicas

6 8 2	Um número correto e no lugar certo.
6 1 4	Um número correto mas no lugar errado.
2 0 6	Dois números corretos mas no lugar errado.
7 3 8	Nada está correto.
7 8 0	Um número correto, mas no lugar errado.

Desafio 06

O matemático Augustus Morgan nasceu e morreu no século 19. Ele dizia:

Eu tinha **x** anos no ano **x²**.

Em que ano ele nasceu?

Desafio 07

TESTE DE QI

$2 + 3 = 10$
$7 + 2 = 63$
$6 + 5 = 66$
$8 + 4 = 96$
então:
$9 + 7 = ?$

Desafio 08

Descubra a regra!

72496 é 1315
62134 é 97
85316 é 167
28439 é ?

Desafio 09

PARA GÊNIOS:

$1 + 4 = 5$
$2 + 5 = 12$
$3 + 6 = 21$
$5 + 8 = ?$

Desafio 10

ADIÇÃO ESTRANHA

$9 + 2 = 711$
$8 + 5 = 313$
$5 + 2 = 37$
$7 + 6 = 113$
$9 + 8 = 117$
$10 + 6 = 416$
$15 + 3 = ?$

Atividades extraídas de:
http://matematicagenial.com
http://matematicatec.blogspot.com/2016/09/desafio-matematico-186.html acesso 25/03/2022
Mãe e filha cozihando - imagem - https://www.gratispng.com/png-851alv/download.html
Adaptado por Cristiano dos Santos

Para a montagem da lista de exercícios (**parte 01**) foram evitados problemas e enigmas que são conhecidos como pegadinhas: nesses exercícios, o raciocínio lógico matemático é surpreendido por pequenos detalhes na estrutura do texto. Como exemplo: "Quantas vezes se pode subtrair o número 1 do número 1.111?" (CORREA, 2017[24], p. 3). Essa pergunta remete a conceitos matemáticos à primeira vista, porém o desfecho dela visa levar o estudante por outro caminho, mais inusitado. A solução sugerida pelo autor é a seguinte: "Apenas uma vez, já que nas contas seguintes estaríamos subtraindo 1 do número 1.110, 1.109, 1.108, etc". Apesar de válido, o argumento mostrado, podemos deixar esses tipos de questões ou enigmas para momentos onde esteja evidente a intenção de recreação na aula.

Assim, a seleção dos enigmas na forma de meme teve como critérios:

(a) Se estabelece uma linha de argumentação válida e sustentada na aritmética;

(b) Se o meme provoca hipóteses e dá espaço para argumentação;

(c) Se traz no seu bojo aspectos de aritmética e de álgebra básica já conhecido pelos estudantes.

Os memes 1 e 2 são desafios onde podemos explorar a ideia de transitividade e equações de 1º grau; o meme 3 brinca com o conceito de antecessor e sucessor de um número; nos memes 4 e 5 somos conduzidos a estabelecer várias relações entre as dicas dadas, o levantamento de hipóteses, a eliminação de argumentos errados e as operações fundamentais; o meme 6 vai direto ao conteúdo matemático e usa o conhecimento histórico dos séculos para resolvê-lo e nos memes de 7 a 10, vemos a sugestão de operações matemáticas fundamentais serem substituídas por ideias que utilizam as mesmas operações só que criando novos contextos.

Essa lista serve como ponto de partida para fazer os estudantes pensarem produtivamente e "entrarem no clima" de insistir na resolução de questões através do levantamento de hipóteses, ficar desinibido para argumentar em favor do que pensa ser a solução de uma questão.

A partir dessa lista pensamos a parte 02, abaixo.

Escola:	Trimestre:
Estudante:	
Professor(a):	
Disciplina:	Data:
Ano escolar/Turma:	

Lista 01 - Raciocínio lógico (parte 02)

Usando contraexemplo

1. Forneça contraexemplos para as seguintes sentenças:
   (a) Todos os animais que vivem nos oceanos são peixes.
   (b) Toda figura geométrica com quatro ângulos retos é um quadrado.
   (c) Se um número inteiro não é positivo, então ele deve ser negativo.
   (d) Todo número primo é ímpar.
2. Prove ou apresente um contraexemplo: Para um inteiro positivo x, $x + \frac{1}{x} \geq 2$.
3. Prove ou apresente um contraexemplo: Para todo número primo n, $n + 4$ é primo.

Argumentação lógica

4. Verifique se é válido o argumento $x^y = 16$ e $y^x = 16$, então $x = y$.
5. (Recíproca) A gata do Pedrinho sempre espirra antes de uma chuva. Ela espirrou hoje. Pedrinho pensou: "Isto significa que vai chover". Ele está certo?
6. Identifique a hipótese e a tese no caso abaixo.
   - Se um número é múltiplo de 3 e de 5, então esse número é múltiplo de 15.
7. Discuta com seu grupo como as diferenças entre os enunciados modificam a atividade.
   (a) Se $\frac{p}{q} = 1$, então $p - q =$ ...., porque...
   (b) O quociente de dois números naturais é 1. Qual é a diferença entre eles? Justifique.
8. Leia as afirmações:
   - Se n é um número natural par, então n^2 também é par.
   - Se n^2 é um número natural par, então n também é par.

Existe diferença entre essas afirmações? Qual é a hipótese e qual é a tese em cada uma delas? (discutiremos a demostração na Seção sobre paridade)

Na segunda parte da lista (**parte 02**) foram colocadas questões que pensamos fazer a transição entre o que já conhecem (memes, pegadinhas e enigmas) e os conhecimentos de lógica que serão úteis para desenvolver segurança nas várias tentativas de dar desenvolvimento a demonstrações matemáticas. Destacamos termos como contraexemplo, argumento válido, hipótese e tese.

Nas questões 1 a 3 o estudante é provocado a apresentar prova e/ou contraexemplos às sentenças; as questões de 4 a 6 falam sobre argumentação lógica e identificação de erro lógico, hipótese e tese e nas questões 7 e 8 vemos como ordenar as sentenças de forma que mude ou não o sentido do que estamos dizendo ou querendo provar.

Partimos para a parte 03 da lista com o propósito de apresentação das argumentações conceituais.

Escola:	Trimestre:
Estudante:	
Professor(a):	
Disciplina:	Data:
Ano escolar/Turma:	

Lista 01 - Raciocínio lógico (parte 03)

1. Prove que se $x^2 + 2x - 3 = 0$, então $x \neq 2$.
2. Verifique se a seguinte afirmativa é verdadeira ou falsa e justifique sua resposta:
   (a) Quando você soma dois números pares, o resultado é sempre um número par. Verdadeiro ou falso? Justifique.
   (b) Num conjunto de três números inteiros consecutivos, sempre haverá um múltiplo de três.
   (c) $n^2 + n + 41$ resulta em um número primo para qualquer valor natural de n.
3. Prove que o produto dos quadrados de dois inteiros é um quadrado perfeito.
4. Mostre que "Se n for um número inteiro e $2 \leq n \leq 7$, então $q = n^2+2$ não é divisível por 4".

Calote no museu - Quatro amigos vão visitar um museu e um deles resolve entrar sem pagar o ingresso. Mas o guarda do museu descobre que um dos quatro amigos não pagou sua entrada e, quando ele pergunta quem foi, recebe as seguintes respostas:

- Eu não fui, diz Benjamim.
- Foi o Pedro, diz o Carlos.
- Foi o Carlos, diz o Mário.
- O Mário não tem razão, diz Pedro.

Só um deles mentiu. Quem não pagou bilhete?

Enigma das duas portas - No antigo Egito, havia um prisioneiro numa cela com duas saídas, cada uma guardadas por um soldado. Cada saída dava para um corredor diferente em que um dava para a liberdade e o outro para um fosso cheio de crocodilos. Só os guardas sabiam qual a saída certa, mas um deles dizia sempre a verdade e outro mentia sempre. Os guardas se conheciam, isto é, o mentiroso sabia que o outro era verdadeiro e vice-versa. O prisioneiro não sabia nem qual a saída certa nem qual o guarda verdadeiro. Qual a pergunta, e uma só pergunta, que o prisioneiro deveria fazer a um dos guardas ao acaso, para saber qual a porta certa?

A terceira parte da lista (**parte 03**) mostra algumas proposições que exigem conhecimento de alguns conceitos matemáticos de aritmética já ofertados do 6º ao 8º ano e orienta-se ao professor fazer essas demonstrações coletivamente, com o professor orientando o passo a passo da construção através das dicas, sugestões e ideias que surgirão na argumentação dos estudantes. Nessa parte, a ideia de hipótese, definição e tese serão fundamentais.

Aplicação

Aula 01 - 50 minutos

25 minutos - *Introdução à necessidade da prova.*

Vamos dedicar este primeiro momento para fazer uma exposição participada e discutir com os estudantes a necessidade de provar certas afirmativas, conclusões ou intuições que muitas vezes utilizamos ao estudar Matemática.

Podemos introduzir falando sobre o processo de como é que se faz matemática, como ela é historicamente construída, desmistificar a ideia de que é através de pura e simples inspiração, mas sim que vem de transpiração na busca de resultados. Um dos exemplos pode ser a lista de problemas do século XXI [38] que discute sobre problemas e conjecturas ainda em aberto no campo da matemática, alguns com mais de 300 anos, para podermos traçar uma discussão sobre a temática: A matemática é uma ciência viva ou já descobrimos tudo que precisamos sobre ela?

Para aguçar a mente, podemos mencionar um desses problemas, a conjectura de Goldbach, cujo enunciado parece mostrar uma questão simples: "Qualquer número inteiro par maior que 3 pode ser escrito como a soma de dois números primos", mas que encontra-se sem solução até os dias de hoje.

Na discussão é interessante mostrar que os avanços matemáticos não vêm de uma única mente privilegiada, precisam de muitas pessoas e vários anos ou décadas para que uma ideia seja confirmada.

Um exemplo disso é a resolução do teorema que ficou conhecido como o último teorema de Fermat, que trata de uma generalização do famoso Teorema de Pitágoras, que diz "a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa": $x^2 + y^2 = z^2$. Ao propor seu teorema, Fermat alegava que se o expoente fosse um número natural maior do que 2, $x^n + y^n = z^n$, nesse caso, a equação não tem solução, se n for um inteiro maior do que 2 e x, y e z pertencem aos números naturais não nulos.

Essa conjectura, que foi elaborada em 1637 por Pierre de Fermat, foi resolvida apenas em 1995 por Andrew Wiles, mais de três séculos depois. No processo, cada matemático, em sua época, fez avanços na resolução, conforme mostra Martinez (MARTINEZ, 2018[43], p. 158).

Os avanços da Matemática que chegam à rotina escolar do ensino da disciplina muitas vezes fazem transparecer uma ideia de simplicidade, perdendo de vista todo o processo histórico e sua relação com um mundo imerso em conceitos matemáticos, seja nos anúncios de produtos, propagandas, pontuação de jogos eletrônicos, entre outros.

Podemos então introduzir o modo de pensar matemático, através da necessidade de prova, da noção do que são conjecturas, teoremas, definições, entre outros termos que permeiam a matemática e a teoria dos números. Faremos uma breve abordagem de alguns termos usuais, como por exemplo:

1. O que é lógica? E o que é raciocínio lógico? O que é raciocínio lógico matemático?

2. O que são premissas, argumento, hipótese e tese?

3. O que é e como se constrói uma demonstração?

Os termos elencados acima podem fazer parte de uma apresentação feita com recurso multimídia para orientar a discussão. Tomando, como exemplo alguns verbetes como:

O que é **raciocínio lógico?** É uma organização ou estruturação de raciocínios que nos permite, de acordo com determinadas normas, chegar a uma conclusão ou resolver um problema.

O que é **lógica matemática**? Consiste em um sistema dedutivo de enunciados que tem como objetivo criar um grupo de leis e regras para determinar a validade dos raciocínios.

O que é **premissa**? Significa a proposição, o conteúdo, as informações essenciais que servem de base para um raciocínio, para um estudo que levará a uma conclusão

Orientações quanto a discussão sobre o tema podem ser encontrados no trabalho de Matheus e Cândido, 2013 [44], que nos ajudará na formalização e estruturação lógica dos argumentos, hipóteses e teses.

Como se trata de uma discussão introdutória não pretendemos aprofundar no estudo de lógica neste nível de ensino, já que nosso proposito está em desenvolver a habilidade de demonstrar matematicamente proposições.

25 minutos - *Introdução ao raciocínio lógico. Apresentação da lista.*

Introduziremos a lista número 01 (parte 01) sobre raciocínio lógico matemático através do uso de memes muitos comuns na internet e frequentemente usados nas redes sociais com o objetivo de divertimento.

Atividade: Memes

Objetivo: Trabalhar o raciocínio lógico sobre atividades que exigem o encadeamento de ideias, o levantamento de hipóteses, testagem das hipóteses e o estabelecimento de uma conclusão lógica válida.

Desenvolvimento: Com a sala dividida em grupos de 4 (quatro) estudantes, o professor entrega a lista aos grupos para resolução conjunta. Determinando 15 minutos para resolver o maior número de questões, investigando:

- Qual o melhor argumento para solucionar a questão;

- Se é possível obter a solução usando estratégias matemáticas, desenhos, gráficos;

- Se o problema exige conhecimentos matemáticos. Quais?

Após o tempo determinado, o professor abre a discussão para que os grupos indiquem quais os problemas foram solucionados e quais não foram; quais deles utilizaram raciocínio semelhantes; quais necessitaram de matemática básica e quais precisaram pensar exclusivamente dentro dos limites dos conceitos da matemática e quais não.

Avaliação da atividade: O professor observará a capacidade de expressar oralmente e por escrito o raciocínio lógico da questão, o estabelecimento de um encadeamento lógico construindo a argumentação necessária para as resoluções e se as conclusões foram coerentes.

No encerramento da aula o professor avisará da necessidade do uso do celular ou outro aparelho conectado à internet para procedermos com algumas pesquisas no decorrer da próxima aula.

Sugestão didática: Neste momento o professor pode direcionar os estudantes para um dos jogos no site do wordwall, que apresenta jogos virtuais simples, entre eles alguns que exploram o raciocínio lógico e lógico matemático desenvolvidos colaborativamente por diversos professores, como o encontrado no jogo [50] para eles praticarem em casa (caso o leitor deseje, veja online esse jogo e tente seu melhor tempo). O jogo pode ser um momento para quebrar a rotina e ao mesmo tempo perceber os que têm mais dificuldade em fazer a classificação dos números.

Aula 02 - 50 minutos

10 minutos - *Caminhos para boa argumentação.*

Atividade: Jogo online: Raciocínio lógico

Apresentação Trata-se de um quiz com 10 perguntas que utilizam o raciocínio lógico matemático. O professor pode acompanhar o rendimento individual do estudante e da sua turma.

Objetivos: Fazer os estudantes pensarem questões e raciocínio lógico matemático através de jogos. Criar um ambiente descontraído para o início das discussões.

Desenvolvimento: O professor disponibiliza para os estudantes o link do quiz [50] e pede para que tentem responder no menor tempo possível. Os estudantes sem aparelhos podem formar duplas ou trios para as respostas. Ao final, o professor pode indicar o resumo do desempenho de cada um.[2]

Avaliação: Será observado o resumo dos resultados da turma através do site.

30 minutos - *Pesquisando no celular.*

É importante dar uma noção do que são teoremas, definições e proposições. Antecedendo a isso podemos partir de conceitos mais elementares, como Lógica, raciocínio lógico,

[2]Para acessar o desempenho o professor precisa estar cadastrado no site.

raciocínio lógico matemático, premissa, proposição, argumentação, conclusão lógica, hipótese e tese por serem termos pouco usuais para os estudantes.

Atividade: Pesquisando no celular

Apresentação: Os estudantes pesquisarão em seus aparelhos ou em aparelhos cedidos pela escola os verbetes indicados abaixo pelo professor.

Objetivo: traçar uma discussão sobre como são formados os argumentos e as demonstrações matemáticas.

Desenvolvimento: O professor divide a turma em 6 grandes grupos, que , durante 10 minutos, ficarão responsáveis por buscarem e explicarem para os colegas o que encontraram na internet sobre os verbetes:

1. Lógica, raciocínio indutivo e raciocínio dedutivo;
2. Raciocínio lógico matemático e contraexemplo;
3. Premissa, proposição, argumentação e conclusão lógica;
4. Hipótese, definição, teorema e tese;
5. Aritmética e álgebra;
6. Conjectura e demonstração matemática.

Após esse tempo, discutiremos os termos com um ou dois participantes explanando o conteúdo. O professor faz as inferências necessárias para desfazer quaisquer dúvidas nos conceitos.

Aqui o professor pode incentivar a busca na internet ou compêndios que apresentem uma definição formal fazendo um comparativo dos termos e do que se entendeu. É importante caminhar junto com os estudantes e estar atentos as dúvidas já que, o que é corriqueiro para um matemático, dificilmente o será para um estudante da Educação Básica.

Avaliação: Espera-se nessa atividade que os estudantes possam fazer uso das tecnologias para ampliar seu conhecimento. Exercitem a escuta, a argumentação e a oralidade na troca de ideias e conceitos.

10 minutos - *Fazendo exercícios (parte 02).*

Neste momento, entrega-se a lista de exercícios 01 (parte 02) e fazemos a leitura compartilhada das questões. O que cada questão pede? Quais são as ferramentas ou representações que já possuímos para identificar e dar solução ao que se pede em cada item?

É interessante que o estudante consiga identificar:

- Quais questões exigem raciocínio lógico usual e quais exigem raciocínio lógico matemático;

- Que habilidades ou conhecimentos eles precisarão mover para dar solução a questões;
- As diferenças e semelhanças entre contraexemplo e prova;
- A hipótese e a tese em uma sentença.

A correção da lista fica para a aula seguinte onde o professor pode pedir a voluntários que apresentem as questões à turma.

Aula 03 - 50 minutos

20 minutos - *Discussão da lista 01 (parte 02).*

Começaremos resgatando a importância da prova, do contraexemplo e da boa argumentação através da discussão dos exercícios apresentados na parte 02 da lista de Raciocínio lógico em um grande círculo onde as perguntas podem ser feitas pelo professor e respondida por estudantes previamente combinados ou não, fica a critério da dinâmica do professor.

É interessante fazer os estudantes perceberem quais dos exercícios da lista necessitam de conhecimento e raciocínio matemático e quais usam lógica usual e que poderiam fazer parte de exercícios em outras disciplinas.

É importante o professor conduzir as discussões para destacar a importância de explicar, justificar, provar e demonstrar; que o raciocínio indutivo é usado para formular uma conjectura baseada em experiência; que o raciocínio dedutivo é usado tanto para refutar uma conjectura, encontrando um contra-exemplo, como para prová-la.

30 minutos - *Sobre Demonstrações.*

Através de aula expositiva participada o professor deve agora se fixar no uso de demonstrações. Para demonstrar uma conjectura podemos lançar mão de premissas, fatos lógicos ou particulares; se não podemos demonstrar diretamente uma conjectura, podemos tentar demonstrá-la por contraposição ou por contradição (ideia a ser explorada em outra etapa escolar). Apesar de não aprofundarmos em toda a explanação do que vem a ser cada tipo de demonstração, é importante para o estudante saber de sua existência e as maneiras que as utilizamos. O professor deve decidir o nível de profundidade que apresentará para sua turma, sempre levando em conta a imensa capacidade da mente de absorver novas ideias.

Para exercitar vamos detectar acertos e falhas em proposições cotidianas pedindo que os estudantes analisem conosco sua composição e quando necessário, fazer uso de contraexemplos para provar que não estão corretas.

(a) Produtos importados são caros.

O café "*In natura*" é um produto caro.

Logo, o café "*In natura*" é importado.

(b) Em todos os meus aniversários, como bolo de chocolate.

Ontem comi bolo de chocolate.

Ontem foi meu aniversário.

(c) Todos os pássaros voam.

Os pássaros são aves.

Logo, toda ave voa.

(d) Todos que nascem na Bahia são brasileiros.

Maria nasceu na Bahia.

Logo, Maria é brasileira.

Observe que para cada item acima é possível verificar a existência de premissa, argumentação e a conclusão, porém nem sempre será possível deduzir a veracidade do argumento lógico, em especial quando a estrutura lógica está comprometida. Tomemos os exemplos (a) e (b):

- No argumento do exemplo (a) as premissas não estão subordinadas permitindo falha lógica na obtenção da conclusão e consequentemente impossibilitando atribuir um valor verdade.
- A argumentação do exemplo (b) também apresenta falha lógica por não derivar diretamente da premissa inicial.

Nesses dois execícios a premissa pode ser verdadeira, porém a argumentação pode não levar a conclusão lógica obtida e haveria como o estudante argumentar para refutá-la.

Iremos nos ater as proposições cujo valor lógico possa ser definido frisando a utilização de uma poderosa arma lógica usada no cotidiano e na matemática, o contraexemplo.

A proposição (c) está estruturada de forma que se possa atribuir valor lógico. Nela a conclusão pode ser verificada como falsa, pois podemos encontrar contraexemplos que negam a afirmativa, ou seja, o pinguim, a ema e o avestruz são aves mas não voam.

O que dizer da argumentação do exemplo (d)? Neste caso o encadeamento lógico é válido pois as premissas estão subordinadas e levam a conclusão válida.

Na demonstração matemática é possível usarmos os contraexemplos para negar uma proposição, como no caso abaixo:

- A soma de três números consecutivos é sempre par.

Para demonstrar a falsidade da afirmação basta indicar um conjunto de números consecutivos que não corresponde à afirmativa, como por exemplo: $2+3+4 = 9$.

Logo, vemos o uso de contraexemplos tanto no dia a dia como na matemática como uma ferramenta útil. Saindo das situações cotidianas para as proposições matemáticas nem sempre é tão simples encontrar contraexemplos, por isso precisamos de procedimentos mais eficientes para demonstrar.

Adiante falaremos sobre alguns tipos de demonstrações, com exemplos em forma de proposições.

1. **Demonstração direta**: Assumimos a hipótese P como verdadeira e deduz-se a tese Q ($P \Rightarrow Q$).

   Exemplo 2.1. Proposição: "Se um natural é divisível por 6, então ele também é divisível por 3."

   Definindo a hipótese: x é divisível por 6

   Desenvolvendo a demonstração passo-a-passo

   Demonstração. $x = 6 \cdot k$ para algum natural k

   Podemos escrever $6 = 2 \cdot 3$

   $x = (2 \cdot 3) \cdot k$

   $x = 3 \cdot (2 \cdot k)$

   $2 \cdot k \in \mathbb{N}$

   Conclusão: x é divisível por 3. □

2. **Demonstração por Exaustão**: Este tipo de prova consiste em verificar caso a caso, o valor verdade de cada assertiva.

   Fazendo juntos a questão 04 da lista

   Exemplo 2.2. Proposição: "Se n for um número inteiro e $2 \leq n \leq 7$, então $q = n^2 + 2$ não é divisível por 4".

   Demonstração. Definindo a hipótese: n é um número inteiro e $2 \leq n \leq 7$

   Desenvolvendo a demonstração passo-a-passo

   Observe que existem 6 (seis) casos a serem provados.

   Casos: substituindo os valores de n em q teremos:

   - Para $n = 2$, temos $q = n^2 + 2 \Rightarrow q = 2^2 + 2 = 6 \Rightarrow q = 6 \therefore 4 \nmid q$
   - Para $n = 3$, temos $q = n^2 + 2 \Rightarrow q = 3^2 + 2 = 11 \Rightarrow q = 11 \therefore 4 \nmid q$
   - Para $n = 4$, temos $q = n^2 + 2 \Rightarrow q = 4^2 + 2 = 18 \Rightarrow q = 18 \therefore 4 \nmid q$
   - Para $n = 5$, temos $q = n^2 + 2 \Rightarrow q = 5^2 + 2 = 27 \Rightarrow q = 27 \therefore 4 \nmid q$
   - Para $n = 6$, temos $q = n^2 + 2 \Rightarrow q = 6^2 + 2 = 38 \Rightarrow q = 38 \therefore 4 \nmid q$
   - Para $n = 7$, temos $q = n^2 + 2 \Rightarrow q = 7^2 + 2 = 51 \Rightarrow q = 51 \therefore 4 \nmid q$

Conclusão: $q = n^2 + 2$ não é divisível por 4 (definição de divisibilidade) $\square$

3. **Demonstrações por Contraposição**: Consiste na negação da tese, não é a tese que se deseja provar, e sim a negação da hipótese.

   Para entender melhor, imagine um número $x \in \mathbb{N}$ e que nós queremos provar que:

   Se x^2 é par, então x é par.

   Podemos escolher provar esta afirmação por contraposição. Ou seja, partimos da negação da tese e provaremos a negão da hipótese. Pela contrapositiva a declaração acima passa a ser:

   Se x não é par, então x^2 não é par.

   Essa última afirmação pode ser comprovada da seguinte forma: suponha que x não é par, então x é ímpar. O produto de dois números ímpares é ímpar, portanto, $x^2 = x \cdot x$ é um numero ímpar, assim ao se confirmar a veracidade da negação da tese, concluímos que x^2 não é par.

   Tendo provado a contrapositiva, podemos inferir que a sentença original é verdadeira

4. **Demonstrações por Contradição ou Redução ao Absurdo**: Durante a prova nós assumimos a validade da hipótese e supomos que a nossa tese é falsa. Usando as duas informações anteriores, concluímos um "absurdo", ao chegar a uma proposição que contradiz uma suposição levantada anteriormente.

   Exemplo 2.3. Proposição: "Se um número natural somado a ele próprio resulta no próprio número, então este número é zero (0)".

   Chamaremos de x um número natural qualquer.

   Definindo a hipótese: $x + x = x$.

   Desenvolvendo a demonstração passo-a-passo

   Demonstração. Assumamos que $x + x = x$ e que $x \neq 0$.

   $x + x = 2x$

   $2x = x$

   Como x é inteiro, podemos dividir ambos os lados da equação $2x = x$ por x, pois, por hipótese $x \neq 0$
   $\frac{2x}{x} = \frac{x}{x}$
   o que resulta em $2 = 1$ (contradição)

   Portanto, um número natural somado a ele próprio resulta no próprio número, então o número é 0 (zero). $\square$

Observamos que ao partir de uma hipótese verdadeira para chegarmos a negativa da tese, encontramos uma situação absurda $(2 = 1)$, vemos então que x não pode ser diferente de zero, por nos levar a essa situação, logo $x = 0$.

Para o próximo método de demonstração deixaremos apenas uma ideia central e incutiremos nos estudantes que ainda é cedo para que eles desenvolvam provas com esse nível de complexidade. Após as resoluções da seção, deixaremos uma demonstração para o reavivar a memória de como proceder com as demonstrações por indução finita.

5. **Demonstrações por Indução Finita**: A indução matemática ou indução finita serve para provar que uma sequência de proposições denotadas por $P(1), P(2), ..., P(n)$ é verdadeira, sem a necessidade de realizar a prova para cada uma delas. O princípio é mostrar que $P(1)$ é verdadeira, e supondo verdade uma quantidade $P(n)$, mostrar que $P(n+1)$ é verdadeira. $P(n)$ é denominada Hipótese de Indução (H.I.). (Veja demonstração 2.2.1 no final da seção)

Após discorrer sobre esses temas, apresentaremos a lista com os exercícios para construir juntos as primeiras ideias de como demonstrar. Nesse momento, é importante a crença do professor de ser possível e estimular as ideias, conduzindo e afunilando as ideias mais coerentes para a estruturação da argumentação esperada.

É muito comum nas primeiras demonstrações, e por algum tempo, o estudante não saber por onde começar. Podemos usar a estratégia de elaborarmos juntos a demonstração da questão 1 e incentivá-los a fazer a questão 2 da lista a partir da questão 1. Fazermos juntos a questão 3 usando a substituição do valor de x na equação e verificando a validade da tese; na questão 4 e 5, há três níveis de dificuldade, saindo do mais simples ao difícil e que possivelmente ainda não esteja no poder de argumentação dos estudantes, daí entra a pequisa na internet e a leitura simples e busca do entendimento (especialmente a letra (c) da questão 4). Como sempre , há uma questão extra para fazer os estudantes pensarem "fora da caixa".

Aula 04 - 50 minutos

10 minutos - *O que conseguimos aprender.*

Resgatamos os avanços até este momento, através de um breve resumo lembrando que é sempre possível não conseguirmos resolver todas as demonstrações. E já vimos que na história da Matemática também é assim.

40 minutos - *Troca de saberes.*

Partindo da ideia de troca de saberes, formaremos uma grande roda para fazer um bate-papo e registrar as respostas e pensamentos gerados pelas atividades da lista, onde o papel do professor como mediador é fundamental, pois ficará atento a avanços na estrutura da generalização e formalização das ideias apresentadas pelos estudantes para a resolução de cada demonstração ou apresentação de contraexemplos.

A grande roda proporcionará a escuta atenta à forma de pensar, construir e desenvolver matemática através da estruturação lógica do pensamento.

Conforme os estudantes encaminharem corretamente as questões (ver parte final desta seção para soluções), o professor registra no quadro as inferências feitas traduzindo para a linguagem matemática.

Ao apresentar oralmente na grande roda ou no quadro as suas resoluções, o estudante poderá obter ajuda de seus companheiros, do professor e das suas anotações e buscaremos fazer com que cada um possa colocar uma parte da argumentação ou possa pensar sobre.

Propositalmente, algumas das demonstrações podem ser resolvidas pelo uso de contraexemplos ou por demonstração direta. Na maioria das atividades, direcionaremos os estudantes a demonstrações mais simples e desafiadoras, para não aumentar o distanciamento com a matemática e gerar uma atitude positiva nas tentativas de demonstrar.

Sugestões de atividades orientadas

Entre uma aula e outra o professor pode considerar ter uma pequena caixa com uma abertura para colocação de bilhetes feitos pelos estudantes com resolução de questões de raciocínio lógico. Próximo a esta caixa, pode ser deixado semanalmente um problema lógico como os que seguem abaixo, publicando a solução na última aula da semana. Caso disponha de parcerias externas a escola ou apoio pedagógico, pode premiar os estudantes que mais ou melhor argumentaram durante um período estipulado (exemplo: um (1) mês).

No exemplo sugeri, disponibilizei uma folha para que os estudantes colocassem seus nomes na porta que achassem ser a certa e explicassem o porquê colocaram dentro da caixa.

Figura 2.2: Cartaz “Enigma das portas”

Onde está o leão?

Um leão está atrás de uma destas portas.Das sentenças escritas nas placas fixas nas portas, apenas uma é verdadeira. Em qual porta está o leão?

Coloque seu nome na porta onde acha que está o leão.

Porta 1	Porta 2	Porta 3

https://www.matematicagenial.com. Acesso em 23 de março de 2022. Adaptado por Cristiano dos Santos

Fonte: Adaptado pelo autor

Avaliação

Para avaliar os estudantes, o professor pode pedir para que eles utilizem a lista parte 3 para descrever a hipótese e a tese em cada uma das questões. Verificar se sabem quais definições ou conceitos foram utilizados como parte do argumento da resolução, entre outros.

Possíveis resoluções para os exercícios

Lista 1 - Parte 1

Desafio 01

A é irmã de B. C é mãe de B.

Se A e B são irmãs e C é mãe de B, podemos concluir que C é também mãe de A.

D é pai de C.

Se D é pai de C e C é mãe de B e A, concluímos que D é avô de A.

E é mãe de D.

Não tem utilidade para o que queremos descobrir. Sendo assim, já temos a resposta.

Resposta: A é neta de D

Desafio 02

Chamaremos de x a idade da filha e $3x$ a idade da mãe. Sabemos que juntas têm 48 anos:

$$x + 3x = 48$$

Agora é só resolver esta equação:

$$4x = 48$$

$$x = 48/4$$

$$x = 12$$

Isso significa que a filha tem 12 anos e a mãe, 36.

Resposta: Letra C

Desafio 03

Para resolver este exercício vamos fazer um pequeno esquema:

Sucessor (Dobro Antecessor [Sucessor (Triplo de 2)])

O triplo de 2 é 6

Sucessor (Dobro Antecessor [Sucessor 6])

O sucessor de 6 é 7

Sucessor (Dobro Antecessor 7)

O antecessor de 7 é 6

Sucessor (Dobro 6)

O dobro de 6 é 12, então:

Sucessor 12

O sucessor de 12 é 13.

Resposta: Letra C: 13

Desafio 04

Observe no primeiro triângulo que as bordas são 3,9 e 5, fazendo um pequeno cálculo, $3 \cdot 9 + 5$ obtemos o centro que é 32.

No segundo também, temos suas bordas, 8,6 e 7, $8 \cdot 6 + 7$, tem-se como resultado 55, que é o centro.

Seguindo essa mesma lógica, obtemos o centro do último triângulo.

Suas bordas são: 7,5 e 9, fazendo o cálculo: $7 \cdot 5 + 9$, obtemos 44.

Resposta: 44.

Desafio 05

1. O quarto bloco (7,3,8), como está falando que nada está correto, então podemos concluir que o 7,3,8 não fazem parte do código;
2. Como o 7 e 8 não fazem parte do código, concluímos pelo último bloco que ZERO faz parte do código, porém no lugar errado.
3. Agora como no último bloco o zero tá lugar errado, ou seja, ele não pode ser na última posição, agora olhado o terceiro bloco, (2,0,6) temos dois números corretos um já sabemos que é o ZERO, porém a informação diz que também está no lugar errado, logo o ZERO só pode estar na primeira posição do código.
4. Agora analisando o primeiro e segundo bloco, o número 6 não pode fazer parte do código, porque se ele fizesse parte do código no primeiro diz que estaria no lugar certo, mas vejam que no segundo, a informação diz que tá no lugar errado, logo o número 6 não faz parte do código.
5. Como já vimos que o 6 e 8 não fazem parte do código, olhando primeiro bloco sabemos que o 2 está na última posição.
6. Já sabemos que o zero está na primeira e o 2 na última, então resta descobrir que tá no meio, e olhando no segundo bloco concluímos que o número 1 não pode ser, porque a informação diz que o número tá lugar errado, então só sobra o número 4 para a posição do meio.

Resposta: O código é (0, 4, 2)

Desafio 06

Vamos raciocinar:

Se ele viveu no século XIX, ele viveu entre os anos 1801 e 1900.

E quanto a sua afirmação: "Eu tinha x anos no ano x^2". Podemos procurar potências que estejam neste intervalo de tempo:

42^2 é 1764, século XVIII;

43^2 é 1849, século XIX;

44^2 é 1936, século XX.

O único número que corresponde é o 43. Ou seja, no ano 1849 ele tinha 43 anos.

Calculando o ano de seu nascimento, faremos $1849 - 43 = 1806$.

Sendo assim, ele nasceu no ano 1806.

Resposta: Ele nasceu no ano 1806.

Desafio 07

Vamos descobrir a sua lógica:

2+3 = 10: 2+3 = 5 e $5 \cdot 2 = 10$ (sempre multiplicamos pela primeira parcela da soma)

$$7 + 2 = 63 : 7 + 2 = 9 \text{ e } 9 \cdot 7 = 63$$

$$6 + 5 = 66 : 6 + 5 = 11 \text{ e } 11 \cdot 6 = 66$$

$$8 + 4 = 96 : 8 + 4 = 12 \text{ e } 12 \cdot 8 = 96$$

Assim, $9 + 7 = 144$, pois $9 + 7 = 16$ e $16 \cdot 9 = 144$.

Desafio 08

Soma-se os três primeiros números e se obtém um resultado. Em seguida, soma-se os dois últimos números e se obtém um segundo resultado, colocando os dois resultados lado a lado teremos o novo número.

Desafio 09

Vamos lá:

$$1 + 4 = 5$$

• Até aí não vemos segredos, somando 1 e 4, obtemos 5.

$$2 + 5 = 12$$

• Aí é que começa o desafio.

Somando 2 e 5 obtemos 7. O que foi feito então, para que resultasse em 12?

Ao somar $2 + 5 + 5$ (do resultado anterior) obtemos 12.

$$3 + 6 = 21$$

• $3 + 6 = 9$, mas somando 9 com o 12 do resultado anterior obtemos 21.

$$5 + 8 =?$$

• Para resolvermos esta última parte, ainda falta observar um detalhe.

Olhando os números das somas no sentido vertical, note que eles formam uma sequência:

1, 2 e 3
e
4, 5 e 6

Isso nos dá a entender que antes de $5 + 8$ havia outra soma: $4 + 7$

Desta forma:

$$1 + 4 = 5$$

$$2+5=12$$

$$3+6=21$$

$$4+7=$$

$$5+8=$$

• Resolvendo, $4+7=11, 11+21=32$. Então:

$$4+7=32$$

•$5+8=13+32=45$ Resposta: 45.

Outra forma de pensar seria:

$$1+4 \rightarrow 1 \cdot 4+1=5$$

$$2+5 \rightarrow 2 \cdot 5+2=12$$

$$3+6 \rightarrow 3 \cdot 6+3=21$$

$$5+8 \rightarrow 5 \cdot 8+5=4$$

Desafio 10

Vamos resolver:

$$9+2=711$$

Analisando, percebemos que:

$$9+2=711$$

$$9-2=7$$

$$9+2=11$$

Juntando: 711

E o mesmo com as operações seguintes:

$$8+5=313$$

$$8-5=3$$

$$8+5=13$$

Juntos, 313

E por fim, $5+2$ com este mesmo raciocínio:

$$5+2=37$$

$$5-2=3$$

$$5 + 2 = 7$$

Juntos dá 37.

Pela mesma lógica:

$$15 + 3 = ?$$

$$15 - 3 = 12$$

$$15 + 3 = 18$$

Resposta: 1218

Lista 1 - Parte 2

Questão 01

(a) Falso; Há vários mamíferos, répteis, insetos, anfíbios, moluscos e até aves que vivem nos oceanos.

(b) Falso; O retângulo tem quatro ângulos retos e não é quadrado.

(c) Falso; O zero (0) é um número inteiro , mas não é negativo.

(d) Falso; O número dois (2) é primo e par.

Questão 02

$$x \geq 1$$

Adicionando - 1 aos dois membros da equação.

$$x - 1 \geq 0$$

Elevando ao quadrado ambos os membros da equação, temos

$$(x - 1)^2 \geq 0$$

Escrevemos então

$$x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

Por hipótese $x \geq 1$, então podemos adicionar $2x$ de ambos os lados da equação

$$x^2 + 1 \geq 2x$$

Multiplicando ambos os lados da equação por $\frac{1}{x}$

$$(x^2 + 1) \cdot \frac{1}{x} \geq 2x \cdot \frac{1}{x}$$

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

Portanto, qualquer valor de $x \geq 1$, satisfará a equação $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$

Questão 03

Falso; tomando $n = 2$ primo, $n + 4 = 6$ não é primo (contraexemplo)

Questão 04

Não é válido, pois, $2^4 = 16$ e $4^2 = 16$, porém $4 \neq 2$.

Questão 05

A gata espirrar toda vez antes de uma chuva não significa que toda vez que ela espirrar irá chover, já que outros fatores podem contribuir para o espirro da gata.

Questão 06

Hipótese:um número é múltiplo de 3 e de 5

Tese: o número é múltiplo de 15.

Questão 07

Observamos que nesta questão há o uso direto da linguagem matemática no item (a) e no item (b) existe o uso da língua materna que é mais familiar. Ambas expressam a mesma sentença matemática.

Questão 08

No item (a) Hipótese: n é natural par e a Tese: n^2 é par.

No item (a) Hipótese: n é natural par e a Tese: n^2 é par.

Lista 1 - Parte 3

Questão 01

Seja $x^2 + 2x - 3 = 0$.

Suponha por contradição que $x = 2$

Substituindo $x = 2$ na equação temos que que $2^2 + 2 \cdot (2) - 3 = 0$.

Assim, temos que $5 = 0$ o que é absurdo!

Portanto, $x \neq 2$.

Questão 02

(a) Verdadeiro; Tomando, $a = 2p$ e $b = 2q$, $a, b \in \mathbb{N}$, $a + b = 2p + 2q = 2 \cdot (p + q)$ (será melhor detalhado no exercício 02 da lista sobre paridade).

(b) Verdadeiro; Sendo $n, k \in \mathbb{N}$, pela divisão euclidiana, os restos possíveis da divisão de n por 3 são 0, 1 e 2.

Caso 01 - Se n=3k (resto 0), nada precisa ser provado.

Caso 02 - Se $n = 3k + 1$ (resto 1) então, $n + 1 = 3k + 2$, $n + 2 = 3k + 1 + 2 = 3k + 3 = 3(k + 1)$ que é múltiplo de 3.

Caso 03 - Se $n = 3k + 2$ (resto 2) então, $n + 1 = 3k + 3 = 3(k + 1)$, que é múltiplo de 3.

(c) Falso; Para $n = 41$ essa afirmação não é válida.

Questão 03

Tomando $p, q \in \mathbb{N}$, o produto de seus quadrados são expressos por $p^2 \cdot q^2 = (pq)^2$ que também é quadrado (propriedade de potência).

Questão 04

Veja solução apresentada na seção 2.2.1, Aula 03 [2].

RESPOSTA - Calote no museu

Pedro não pagou!

Mário e Carlos não podem ambos ter dito a verdade, pois somente um entrou sem pagar.

Se Mário não falou a verdade, então o que os outros três afirmaram é correto. Conclui-se que Pedro entrou sem pagar. Se Mário tivesse dito a verdade, teríamos uma contradição: a afirmação de Pedro seria verdadeira, mas a de Carlos seria falsa.

RESPOSTA - Enigma das duas portas

Pergunta:"Se eu perguntar ao seu colega, qual a porta certa, qual é a que ele me indica?" Seja qual for o guarda inquirido, a resposta indica sempre a porta errada. Se perguntasse ao guarda verdadeiro, ele indicaria a porta errada pois o mentiroso não indica a porta certa. Se perguntasse ao guarda mentiroso, ele indicaria a porta errada pois o verdadeiro indica a porta certa.

Exemplo de demonstração por indução finita

(Prova por Indução Matemática). Seja $P(n)$ uma sentença aberta sobre $\mathbb{N}$. Suponha que

(i) $P(1)$ é verdadeira; e

(ii) qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, sempre que $P(n)$ é verdadeira, segue que $P(n+1)$ é verdadeira.

Então, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2.4. Proposição: "A soma dos n primeiros números ímpares é igual a n^2."

Vamos traduzir a proposição para sua forma algébrica

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

. Observe que, para $n = 1$, $P(1)$ é verdadeira, pois fica

$$1 = 1^2 \text{ (verdadeiro)}$$

Como é válida para n = 1, vamos supor que, para algum n natural, $P(n)$ seja verdadeira de tal forma que

$$1 + 3 + ... + (2n - 1) = n^2$$

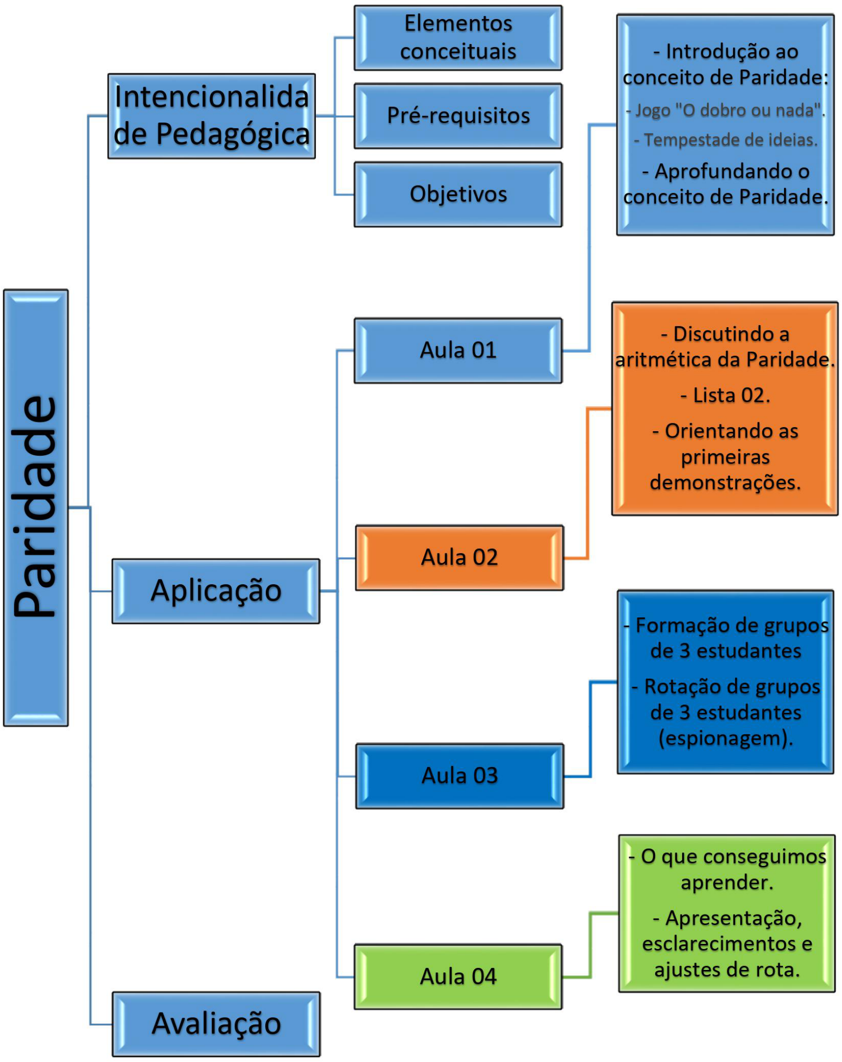
Queremos provar que $P(n + 1)$ também é verdadeira.

Somando $2n + 1$, que é o próximo número ímpar após $2n - 1$, a ambos os lados da igualdade, obtemos a igualdade também verdadeira: $1 + 3 + ... + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1)$

$n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$ (produto notável)
$1 + 3 + ... + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2$ (por transitividade)
$P(n + 1)$ é verdadeira.
Conclusão: $P(n)$ é verdadeira para todo número natural n.

2.2.2 Sequência 02: Paridade

Figura 2.3: Organização da Sequência sobre Paridade.



No nosso próximo tema, estudaremos sobre paridade e faremos o resgate dos conhecimentos já adquiridos nos primeiros anos do Ensino Fundamental sobre números naturais pares e ímpares.

Intencionalidade Pedagógica

Elementos conceituais: a ideia de Paridade, o que são números pares e ímpares, os resultados das operações entre pares e ímpares, o uso de termos gerais para representar valores pares e ímpares, como provar afirmativas em matemática usando demonstrações diretas.

Pré-requisitos:

- conhecer alguma definição de números pares e ímpares,como por exemplo: Números pares são aqueles que podem ser divididos em duas partes iguais, e o números ímpares são aqueles que não podem (definição que vem desde os tempos de Pitágoras); ou que números pares são números terminados em 0, 2, 4, 6 e 8 e números ímpares são números terminados em 1, 3, 5, 7 e 9;
- O domínio das operações fundamentais e dos termos relacionados a elas (soma, diferença, produto, quociente, ...);
- Noção do que são números naturais e inteiros.
- Saber o que é o quadrado de um número, o cubo de um número, números consecutivos, entre outros.

A premissa básica é fazer a transposição do conceito elementar de números pares e ímpares para sua representação algébrica geral e, a partir daí, fazermos demonstrações de afirmações que são óbvias na prática direta dos exercícios com números, mas que poderiam não resistir à infinitude dos conjuntos numéricos $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$, necessitando ser provadas. [3]

Objetivos:

- Fazer a generalização dos conceitos de paridade através do uso da linguagem algébrica;
- Introdução da noção de prova matemática e de demonstrações a partir do conceito de paridade;
- Discutir sobre a existência das várias formas de demonstrar afirmações matemáticas;
- Utilizar demonstrações diretas nas proposições sobre paridade através de noções mais elementares de álgebra;
- Fazer com que o estudantes obtenham competências de realizar demonstrações matemáticas através de exemplos, questionamentos, levantamento e comprovação de hipóteses sobre as definições estudadas;
- Oferecer ao estudante a oportunidade de desenvolver a pesquisa dos temas propostos através de diversos meios de apreensão dos conceitos (internet, livros, apontamentos, entre outros).

[3] Uma observação importante é que, apesar de muito comum no estudo da Matemática, a ideia da prova de uma afirmação não é tão comum nos compêndios didáticos de matemática da Educação Básica e, na maioria das vezes, os estudantes trabalham com as certezas já demonstradas e aceitas, cabendo a eles reproduzí-las.

Lista de Exercícios:

Para a construção da lista utilizamos como base as definições e proposições relacionadas ao tema como por exemplo a Proposição 2.5

Proposição 2.5. *A soma (ou diferença) de dois números naturais de mesma paridade é par. A soma (ou diferença) de dois números naturais de paridade oposta é ímpar.*

que está relacionada às questões 1 e 2 da lista. Neste momento, é importante que as demonstrações não sejam tão fáceis ao ponto de criar a falsa ideia de algo desinteressante, nem tão difíceis ao ponto de criar o desânimo na busca de resultados; deve haver pistas e caminhos suficientes para que os estudantes possam tatear os fragmentos da solução esperada.

Assim, foi distribuído da seguinte forma:

- A questão 01 está diretamente ligada à definição de paridade;
- As questões 02 a 04 estão diretamente ligadas a Proposição 2.5 (que será apresentada à turma dentro das sequências), espera-se que eles possam ser capazes de perceber a relação entre a proposição e os exercícios;
- As questões 05 a 07 envolvem o produto de números de mesma paridade ou de paridade oposta, sendo que no caso da questão 6 é solicitado que o estudante justifique uma operação lógica bicondicional (se e somente se) com ida e volta, o que requer participação ativa do professor;
- As questões 08 a 11 utilizam o conhecimento de potenciação e de números quadrados perfeitos, já estudados no 6º e 7º anos, e busca uma ligação com o conceito de números múltiplos de quatro (4);
- As questões 12 a 14 buscam fazer o estudante buscar resultados possíveis, contraexemplos, leva a mobilizar várias capacidades, dentre elas a pesquisa do tema.

Escola:	Trimestre:
Estudante:	
Professor(a):	
Disciplina:	Data:
Ano escolar/Turma:	

Lista 02 - Paridade

1. Prove que números consecutivos têm paridade oposta.
2. Prove que a soma de dois inteiros pares é sempre par.
3. Prove que a soma de dois inteiros ímpares é sempre par.
4. Prove que a soma de dois números naturais de paridade oposta é sempre ímpar.
5. Prove que o produto de dois números inteiros pares é um número par.
6. Prove que, para quaisquer números naturais a e b, se a for ímpar então b e $a \cdot b$ têm a mesma paridade.
7. Qual é a paridade da soma dos números naturais de 1 a 10? E de seu produto?
8. Prove que todo número natural e seu quadrado têm a mesma paridade.
9. Prove que o quadrado de um número par é divisível por 4.
10. Prove que um número natural e seu cubo têm a mesma paridade.
11. Prove ou apresente um contraexemplo: O produto de quaisquer dois inteiros consecutivos é par.
12. Quando que a soma de três números é par? Quando é ímpar? E a soma de 37 números, quando é par ou ímpar?
13. Prove ou apresente um contraexemplo: A soma de um inteiro com o seu cubo é ímpar.
14. Prove que o quadrado de um inteiro ímpar pode ser escrito como $8k + 1$ para algum inteiro k.

As atividades que irão explorar esta lista de demonstrações, serão distribuídas em quatro (4) aulas, privilegiando introdução do tema, a evolução histórica, os conceitos envolvidos e os tipos de demonstrações, a forma de avaliar e resultados pensados para além da sequência didática.

Aplicação

Desenvolveremos esta atividade privilegiando introdução ao tema, a evolução histórica, os conceitos envolvidos e os tipos de demonstrações, a forma de avaliar e resultados pensados para além da sequência didática.

Aula 01 - 50 minutos

20 minutos - *Introdução ao conceito de paridade - Tempestade de ideias.*
Começaremos a atividade usando como elemento disparador o jogo "O dobro ou nada".

Atividade 01: O dobro ou nada
Apresentação: Consiste em escrever em uma tabela o dobro do número sorteado pelo professor.
Objetivo: Trabalhar os produtos dos números por 2 e perceber que todos são pares; exercitar o cálculo mental e a interação com seus colegas.
Desenvolvimento:

1. Dividimos a sala em grupos compostos por 5 (cinco) pessoas cada;

2. Fixamos no quadro uma tabela impressa (Figura 2.4) para cada grupo formado;

3. Colocamos cada grupo enfileirado em frente à sua tabela e entregamos um piloto (caneta) para o primeiro estudante de cada grupo;

4. Sorteamos um dos valores da tabela e o primeiro estudante parte para preencher o dobro do número sorteado na linha correspondente;

5. Na sequência, ele corre de volta até seu grupo e entrega o piloto ao segundo colega, que escreverá o dobro do número deixado pelo colega anterior e assim sucessivamente até que toda a linha do número sorteado esteja completa;

6. A equipe que completar a linha primeiro marca cinco (5) pontos e para cada acerto, também serão atribuídos cinco (5) pontos e escrito o total na última coluna.

   Exemplo: Sorteou o número 3 (três) o primeiro aluno que está com o piloto,corre até a tabela e escreve o 6 (seis), o segundo aluno colocará o dobro do valor colocado pelo primeiro (no caso 12) e assim por diante.

7. Revesamos o primeiro estudante que vai para o final da fila e deixa o piloto com o segundo que irá iniciar a segunda rodada, e assim por diante;

8. Ganha a equipe que marcar o maior número de pontos.

Avaliação: Será avaliado: se os estudantes conseguiram desenvolver os cálculos para obtenção do dobro de cada número, se conseguiram interagir na construção dos resultados, se perceberam que todos os valores gerados por eles foram pares.

Figura 2.4: Modelo do Jogo "O dobro ou nada"

O dobro ou nada						
Número sorteado	Dobro	Dobra de novo	Dobra de novo	Dobra de novo	Dobra de novo	Pontos da Rodada
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						
20						

Fonte: Elaborada pelo autor.

Partindo dessa atividade, chamamos atenção ao fato de que todos os números escritos na tabela pelos estudantes são pares e múltiplos de 2.

Para orientarmos o trabalho com os estudantes usaremos a noção de sequência dos múltiplos naturais de 2 e indicaremos por $M(2)$, sejam eles

$$M(2) = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ...\}$$

Essa sequência de números representa a categoria de números naturais, definida como números pares.

Definição 2.6. Um número natural n é dito par se n for um múltiplo de 2. Todo número natural que não é par é chamado de ímpar.

Baseado no que foi visto até aqui, podemos propor uma tempestade de ideias.

Atividade 02: Tempestade de ideias

Apresentação: consiste em lançar perguntas à turma e ouvir (ou escrever) as diversas ideias que foram geradas para daí construir uma ideia, definição ou conceito com as várias contribuições.

Desenvolvimento: O professor fala ou escreve no quadro as seguintes perguntas: Quais características podem ser observadas nos múltiplos de 2? Existe algum número ímpar entre eles? E se continuarmos a sequência dos $M(2)$, podemos encontrar algum número ímpar? Se os números pares são múltiplos de 2, os números ímpares são múltiplos de algum número natural?

O professor anota (ou destaca) as principais ideias advindas do grupo e algumas características importantes elencadas na tempestade de ideias, entre elas:

- Número par é o número que pode ser dividido em duas partes iguais [4];
- Todo número natural ou é par ou é ímpar;
- Todo número par termina em 0, 2, 4, 6 ou 8, que também são divididos por 2;
- Todo número ímpar termina em 1, 3, 5, 7 ou 9;
- A diferença entre dois pares consecutivos é sempre igual a dois;
- Os valores da sequência crescem de 2 em 2;
- Os números ímpares não são múltiplos de nenhum número específico.

O professor pode escrever no quadro as conclusões que mais se aproximaram das definições de pares e ímpares e solicitar o registro no caderno. A partir dessas conclusões, podemos apresentar as seguintes definições:

Definição 2.7. Dizemos que um número natural tem paridade par, se o número for par ou paridade ímpar, se o número for ímpar.

Definição 2.8. Dizemos que os números naturais a e b têm a mesma paridade se forem ambos pares ou ambos ímpares. Caso contrário, dizemos que têm paridade oposta.

Avaliação: A partir das discussões e das proposições feitas pelos estudantes o professor pode perceber o domínio do conceito e as relações observadas pelos estudantes entre números pares e ímpares.

30 minutos - *aprofundando o conceito de paridade.*

Após as discussões introdutórias e sensibilização sobre a ideia e definição do conceito de paridade, faremos uma exposição participada introduzindo o Teorema 2.9, onde faremos uso de elementos de álgebra na formalização de conceitos sobre paridade e que usaremos doravante em muitas das resoluções dos exercícios propostos neste trabalho.

Teorema 2.9. *Todo número natural n se escreve em uma e apenas uma das formas*

$$n = 2q \;\; ou \;\; n = 2q + 1,$$

sendo q um número natural.

[4]Essa classificação remonta à Escola Pitagórica, por volta de 500 anos a.C. É interessante o professor chamar a atenção deste fato, por ser uma definição que remonta aos primórdios da matemática.

Dado que os estudantes já sabem da existência do conjunto dos números naturais, o teorema acima divide o conjunto dos naturais ($\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$) em dois subconjuntos, os números de formato $n = 2q$ e os números de formato $n = 2q + 1$.

O professor pode sugerir uma atividade simples, como por exemplo preencher a tabela abaixo, onde 2 é um dos fatores e explorar os resultados, que nos levarão às formas mencionadas no teorema.

Figura 2.5: Tabela produto com fator dois

Número	Fatores			Resto	Produto + Resto
	2	x	n		
12					
15					
21					
34					
44					
47					
52					
55					
número par					
número ímpar					

Fonte: elaborada pelo autor.

Na realidade, trabalharemos as conclusões de que os números do formato $n = 2q$ são todos pares, e os números no formato $n = 2q + 1$ são todos ímpares. Essa definição será utilizada a partir daqui, sempre que precisarmos trabalhar com a paridade de números quaisquer e podemos formalizá-la conforme a Definição 2.10 :

Definição 2.10. Chamamos de par a todo número natural da forma $2q$, e de ímpar a todo número $2q + 1$, para todo q natural.

Tenhamos em mente que, neste caso, a busca é mais em fazer o estudante relacionar a representação dos números na sua forma algébrica com as noções de par e ímpar do que propriamente defini-la, já que é um assunto corriqueiro no Ensino Fundamental.

Após essa análise, trazemos à luz o conceito de paridade (Definição 2.8), onde podemos fixar a ideia e a necessidade de classificar os números por seu subconjunto.

Sugestão didática - Podemos sugerir aos estudantes que eles acessem e treinem os conceitos abordados na aula através de jogos no celular, usando poucos minutos da aula ou no seu momento de lazer. Alguns dos jogos no site do wordwall, proporciona ao professor acompanhar o aproveitamento dos acertos e do tempo gasto pelo estudante durante o uso do jogo. Separei um jogo virtual [62] simples, que explora a noção de par e ímpar desenvolvidos colaborativamente por diversos professores, encontrado no site (caso o leitor deseje, veja online esse jogo e tente seu melhor tempo). Durante o jogo, pode ser um momento para uma quebra na rotina e ao mesmo tempo perceber os que têm mais dificuldade em fazer a classificação dos números.

Aula 02 - 50 minutos

15 minutos - *Discutindo a aritmética da paridade.*

Partindo das discussões traçadas na aula anterior, espera-se que algumas conclusões possam aparecer e ser evidenciadas sobre as características da paridade. A partir delas, iniciamos a discussão do comportamento da paridade junto às operações de adição e multiplicação e podemos utilizar as propriedades abaixo como referência para uma exposição participada [23] e solicitar que os estudantes dêem exemplos a cada tópico:

- Todo número natural ou é par ou é ímpar.
- Paridade da soma e do produto em $\mathbb{N}$:

Propriedades da paridade da soma:

Proposição 2.11. *A soma de dois números naturais de mesma paridade é par.*

Proposição 2.12. *A soma de dois números naturais de paridade oposta é ímpar.*

Propriedade da paridade do produto:

Proposição 2.13. *O produto de dois números naturais será ímpar se, e somente se os dois números forem ímpares.*

Faremos essa demonstração para aplicação em outros exercícios.

Demonstração. (a) Sejam a e b números naturais ímpares. Assim, existem números naturais k e p tais que $a = 2k + 1$ e $b = 2p + 1$. Então:

$$\begin{aligned} a \cdot b &= (2k+1) \cdot (2p+1) \\ a \cdot b &= 4(k \cdot p) + 2k + 2p + 1 \\ a \cdot b &= 2(2(k \cdot p) + k + p) + 1. \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Tomando $m = 2(k \cdot p) + k + p$, temos que $m \in \mathbb{N}$; logo, segue de (2.2.1) que $a \cdot b = 2m + 1$, com $m \in \mathbb{N}$.

Concluímos que $a \cdot b$ é ímpar.

(b) Suponhamos, agora, que a e b sejam números naturais, com a par. Note que, o que importa é garantir que ambos não sejam ímpares.

Como a é par, existe um $k \in \mathbb{N}$ tal que $a = 2k$. Assim,

$$a \cdot b = 2k \cdot b = 2(k \cdot b). \tag{2.2.2}$$

Tomando $m = k \cdot b, m \in \mathbb{N}$. Portanto, de (2.2.2), concluímos que $a \cdot b = 2m$. Logo, $a \cdot b$ é par, independente de b ser par ou ímpar.

Portanto, produto de dois números naturais será ímpar se, e somente se os dois números forem ímpares □

Observe na figura abaixo o resumo dessas propriedades:

Figura 2.6: Esquema da paridade da soma e do produto.

+	Par	Ímpar
Par	Par	Ímpar
Ímpar	Ímpar	Par

X	Par	Ímpar
Par	Par	Par
Ímpar	Par	Ímpar

Fonte; Elaborado pelo autor

Outras conclusões que podem ser obtidas:

- A soma de qualquer quantidade de números naturais pares é par.
- A soma de uma quantidade par de números naturais todos ímpares é par.
- A soma de uma quantidade ímpar de números naturais todos ímpares é um inteiro ímpar.
- A soma de uma mistura de números naturais pares e ímpares tem a mesma paridade que a quantidade de parcelas ímpares que foram somadas.

15 minutos - *Conhecendo a lista.*

Neste momento, entrega-se a lista de exercícios e fazemos a leitura compartilhada das questões. O que cada questão pede? Quais são as ferramentas ou representações que já possuímos para provar cada item?

É interessante fazer os estudantes perceberem quais dos exercícios da lista nascem das proposições e teoremas apresentados e qual o papel das definições apresentadas na aula anterior que estão relacionadas com a lista sobre paridade.

20 minutos - *Orientando as primeiras demonstrações.* Cabe agora demonstrar juntamente com a turma cada passo para uma demonstração direta da proposições. De forma dialógica interpelamos os estudantes a cada passo dado, como faremos aqui para as primeiras questões.

Fazendo juntos a questão 02

• Prove que a soma de dois inteiros pares é sempre par.

Demonstração. Sejam a e b números naturais pares.

Sendo a e b pares, já vimos que podem ser escritos na forma 2n. Ou seja, existem valores naturais p e q de forma que

$$a = 2p \text{ e } b = 2q.$$

Sendo assim, adicionar $a + b$ equivale a adicionar $2p + 2q$, dessa forma

$$a + b = 2p + 2q.$$

Como 2 multiplica p e q, podemos colocá-lo em evidência, dessa forma

$$a + b = 2p + 2q = 2 \cdot (p + q).$$

A soma $p + q$ resulta em um número natural que chamaremos de m, então $p + q = m$ e daí segue

$$a + b = 2p + 2q = 2 \cdot (p + q) = 2 \cdot m.$$

Portanto, a soma de dois inteiros pares é par. □

Baseado na solução da questão 02, incentivaremos a resolução das questões 03 e 04, atribuindo tempo de acordo com o desenvolvimento da turma. As questões 06 e 07 introduzem a resolução em duas etapas e o uso de proposições para justificar as demonstrações.

Fazendo juntos a questão 06

• Prove que, para quaisquer números naturais a e b, se a for ímpar então b e $a \cdot b$ têm a mesma paridade.

Faremos esta resolução justificando através da Proposição 2.13, já demonstrada.

Demonstração. Tome dois números naturais a e b, com a ímpar; assim $a = 2k + 1$, com $k \in \mathbb{N}$. Separemos em dois casos:

• Suponhamos b par.

  Assim, pela proposição 2.13, $a \cdot b$ é par, que é a paridade de b.

  Temos (ímpar) $\cdot$ (par) = par

• Suponhamos b ímpar.

  Assim, pela Proposição 2.13, $a \cdot b$ é ímpar, que é a paridade de b.

  Temos (ímpar) $\cdot$ (ímpar) = ímpar

Portanto, b e $a \cdot b$ têm mesma paridade. □

Fazendo juntos a questão 07

• Qual é a paridade da soma dos números naturais de 1 a 10? E de seu produto?

Demonstração. Nessa questão, percebemos a necessidade de conhecer as proposições ou saber deduzi-las e prová-las. A soma dos números de um 1 a 10 é igual a

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10.$$

Substituindo os números pares por P e os números ímpares por I, temos então:

$$\begin{aligned} I + P + I + P + I + P + I + P + I + P &= \\ = (I + P) + (I + P) + (I + P) + (I + P) + (I + P) &= \end{aligned}$$

Agrupando dois a dois e aplicado a Proposição 2.12

$$\begin{aligned} = I + I + I + I + I &= \\ = (I + I) + (I + I) + I &= \end{aligned}$$

Agrupando dois a dois e aplicado a Proposição 2.11

$$\begin{aligned} = (P + P) + I &= \\ = P + I &= I \end{aligned}$$

Portanto, a soma dos números de 1 a 10 é ímpar.

Quanto ao produto dos números de um 1 a 10, é igual a

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$$

Substituindoos números pares por P e os números ímpares por I, temos:

$$\begin{aligned} I \cdot P \cdot I \cdot P \cdot I \cdot P \cdot I \cdot P \cdot I \cdot P &= \\ = (I \cdot P) \cdot (I \cdot P) \cdot (I \cdot P) \cdot (I \cdot P) \cdot (I \cdot P) &= \end{aligned}$$

Agrupando dois a dois e aplicado a Proposição 2.13

$$= P \cdot P \cdot P \cdot P \cdot P = P$$

Como o produto de números pares é um número par, concluímos que o produto $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$ é par.

Portanto o produto dos números de 1 a 10 é par. □

Essas demonstrações servirão para dar o pontapé inicial para as elaborações das hipóteses de como comprovar cada questão. Ao final desta sessão deixaremos sugestões de resoluções para as outras questões.

Aula 03 - 50 minutos

30 minutos - *Formação de grupos com 3 estudantes.*

Após os estudantes serem apresentados à lista com os exercícios, chegou a hora de construir as primeiras ideias de como demonstrar. O professor pode dividir a turma em trios e pedir que discutam a lista de exercícios. Nesse momento, é importante a crença do professor de ser possível que eles consigam alcançar seus primeiros ensaios em demonstração e estimular as ideias, conduzindo o raciocínio e argumentações e afunilando as ideias mais coerentes para a estruturação esperada. Podemos sugerir um roteiro de argumentos para orientar as tentativas, por exemplo:

(a) Qual o possível ponto de partida?

(b) Que generalizações podem ser necessárias utilizar?

(c) Qual é a hipótese e a tese?

(d) Qual o melhor argumento para traduzirmos esses termos?

(e) Existe alguma questão que nos dê algum parâmetro ou sirva de modelo?

(f) Algum exemplo anteriormente demonstrado pode ser utilizado?

É muito comum nas primeiras demonstrações o estudante nem saberem por onde começar. Como já mostramos, podemos usar a estratégia de elaborarmos juntos a demonstração da questão 01 e incentivá-los a fazer a questão 02 a 04, com seus pares.

Assim, será dado os primeiros 20 minutos para que eles discutam em como fazer cada uma das questões e tentem identificar quais questões podem ser resolvidas usando os recursos já discutidos. Os 10 minutos restantes, pedimos para que os estudantes que se sentirem à vontade, proponha sua argumentação para a demonstração das questões da lista que ainda estão em aberto.

É o momento apropriado para incentivá-los a vir ao quadro e podemos discutir mais duas das questões e percebermos onde cada um avançou e onde pode melhorar sua demonstração.

20 minutos - *Rotação de grupos com 3 estudantes.*

Atividade 03: Rotação em grupos.

Apresentação: A dinâmica seguinte será feita ao trocar pelo menos um elemento de cada trio de estudantes cuja divisão foi feita previamente.

Objetivo: Favorecer as trocas de conhecimento, melhorar as relações e ampliar o número de estudantes dispostos ajudar os colegas.

Desenvolvimento: O professor divide a turma em grupos compostos por três estudantes usando o melhor critério para o momento (escolha livre). Após um aviso previamente combinado, o professor irá pedir que os estudantes façam uma rotação de elementos do grupo, destinando para a cada troca cerca de 5 minutos, sendo que nesses 5 minutos o estudante consiga passar em pelo menos 2 grupos diferentes. Cada grupo pode ceder um de seus componentes para outro grupo e verificar em que o outro grupo conseguiu avançar e mostrar o que seu grupo já conquistou. Este elemento deve retornar a seu grupo de origem nos 5 minutos finais e buscar transmitir as ideias que conseguiu captar.

Funciona como uma espionagem autorizada, onde o componente que se dirigir ao outro grupo deve tentar colher o máximo de informações possíveis para trazer para seu grupo. Ao mesmo tempo, o professor incentiva aos grupos a fornecer o máximo de informações ao estudante do outro grupo.

Avaliação: De posse das informações, os estudantes buscarão fazer os ajustes nas questões que já conseguiram resolver. Uma situação recorrente é perceber alguns estudantes não querendo sair de seus grupos por estarem com os "mais fortes" da sala, ou ainda por terem muitas fragilidades em matemática. O professor pode auxiliar nas trocas e acompanhar o progresso dos mais tímidos.

Aula 04 - 50 minutos

10 minutos - *O que conseguimos aprender?.*

Resgatamos os avanços até este momento colocando no quadro o que cada grupo conseguiu resolver, sabendo que é possível não conseguirmos resolver todas as demonstrações. Solicitamos voluntários para apresentar as questões solucionadas por eles e pelo seu grupo.

40 minutos - *Apresentação, esclarecimentos e ajustes de rota.*

O papel do professor é fundamental também neste momento, pois ficará atento a avanços na estrutura da generalização e formalização das ideias.

Ao estudante apresentador cabe:

- Apresentar uma das questões que seu grupo tenha feito e esteja disposto a demonstrá-la;
- Manter o seu próprio grupo atento para possíveis deslizes nas ideias apresentadas;
- Utilizar o máximo de ideias matemáticas e simbologia apropriada;
- Mostrar domínio do conteúdo paridade (definições, teoremas e propriedades, por exemplo).
- Saber estabelecer argumentos, identificar teses e hipóteses;
- Encontrar uma demonstração satisfatória, para o grupo; para o professor e para a matemática.

Ao apresentar, o estudante poderá obter ajuda de seus companheiros e do professor que fará as correções de rumo nas ideias apresentadas.

Nas questões em que não se obteve demonstrações, o professor poderá construí-las com o envolvimento de toda a turma.

Sugestões de atividades orientadas

Podemos sugerir a turma a assistir o vídeo sobre paridade dividido em duas partes, disponível no no canal Youtube “Pólos olímpicos de Treinamento intensivo”, nos endereços [52] e [53] e trocarem ideias entre si e na sala de aula.

Avaliação

Verificamos se após a resolução da lista, o estudante consegue:

- Classificar os números naturais em dois subgrupos: $2n$ e $2n + 1$, e defini-los como pares e ímpares;
- Entender que para definir a paridade precisamos saber se o número natural é par ou ímpar;
- Ser capaz de generalizar através do uso de noções de álgebra os conceitos de paridade relacionando com as operações fundamentais de soma e multiplicação;
- Traduzir sentenças na língua materna sobre paridade em sentenças matemáticas;
- Saber utilizar demonstrações diretas para provas simples; buscar ajuda para superar obstáculos, persistir nas tentativas de elucidar uma questão.
- Saber trabalhar em grupo.

Estes pontos podem ser observados durante as apresentações, já que várias das competências e habilidades precisam ser movidas para concluirmos a lista na sua totalidade.

Possíveis resoluções para os exercícios

Questão 01

Demonstração. Considere dois números consecutivos n e $n+1$ naturais. Por definição de paridade, tem-se que ou n é par ou n é ímpar.

Caso 01 - n é par.

Neste caso, $n = 2k$ para algum inteiro k e, assim, $n + 1 = 2k + 1$, o que é ímpar.

Logo, n é par e $n + 1$ é ímpar.

Caso 02 - n é ímpar.

Temos que,pela definição de número ímpar, $n = 2k + 1$ para algum inteiro k e, assim, $n + 1 = (2k + 1) + 1 = 2k + 2 = 2(k + 1)$. Fazendo $k + 1 = t$, $t \in \mathbb{N}$, teremos $n + 1 = 2t$, que é par. Logo, n é ímpar e $n + 1$ é par.

Portanto, pode-se concluir que independente de qual caso ocorra para valores específicos de n e $n + 1$, um dos números é par e o outro é ímpar. □

Questão 02

Resolvido na seção 2.2.2.

Questão 03

Demonstração. Sejam a e b números naturais ímpares.

Sendo a e b ímpares, já vimos que podem ser escritos na forma 2n+1. Ou seja, existem valores naturais p e q de forma que

$$a = 2p + 1 \text{ e } b = 2q + 1$$

Sendo assim, adicionar $a + b$ equivale a adicionar $(2p + 1) + (2q + 1)$, dessa forma

$$a + b = 2p + 2q + 2$$

. Como 2 é fator comum a p, q e 2, podemos colocá-lo em evidência, dessa forma

$$a + b = 2p + 2q + 2 = 2 \cdot (p + q + 1)$$

A soma $p + q + 1$ resulta em um número natural que chamaremos de m, onde $m \in \mathbb{N}$, logo $p + q + 1 = m$ e daí segue

$$a + b = 2p + 2q + 2 = 2 \cdot (p + q + 1) = 2 \cdot m$$

.

Portanto, $a + b$ é par. □

Questão 04

Demonstração. Sejam a e b números naturais de paridade oposta. Ou seja, quando um dos números for par e o outro será ímpar.

Suponha, sem perda de generalidade, que a seja ímpar e b seja par. Dessa forma, existem números naturais p e q tais que $a = 2p + 1$ e $b = 2q$.

$$a + b = 2p + 1 + 2q = 2p + 2q + 1$$

Colocando em evidência,

$$2 \cdot (p + q) + 1. \tag{2.2.3}$$

Se $m = p + q$, então $m \in \mathbb{N}$. Aplicando m em (2.2.3), teremos $a + b = 2m + 1$, com $m \in \mathbb{N}$.

Portanto, $a + b$ é ímpar. □

Questão 05

Demonstração. Sendo a e b pares, já vimos que podem ser escritos na forma 2n. Ou seja, existem valores naturais p e q de forma que

$$a = 2p \text{ e } b = 2q$$

Sendo assim, o produto $a \cdot b$ equivale a multiplicar $(2p)$ e $(2q)$, ou seja,

$$a \cdot b = 2p \cdot 2q.$$

Como 2 é fator comum a p, q, podemos colocá-lo em evidência, dessa forma

$$\begin{aligned} a \cdot b &= 2p \cdot 2q \\ a \cdot b &= 2(2pq). \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

Chamaremos de m o produto $2 \cdot p \cdot q \in \mathbb{N}$, onde $m \in \mathbb{N}$. Temos

$$\begin{aligned} a \cdot b &= 2p \cdot 2q \\ a \cdot b &= 2(2pq) \\ a \cdot b &= 2 \cdot m. \end{aligned}$$

Portanto, $a \cdot b$ é par. □

Questão 06

Resolvido no Seção 2.2.2.

Questão 07

Resolvido no Seção 2.2.2.

Questão 08

Demonstração. Existem dois casos:

Caso 01 - Considere um número $a \in \mathbb{N}$ ímpar.

Então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $a = 2k + 1$. Temos

$$a^2 = (2k+1)^2 = (2k+1) \cdot (2k+1) = 4k^2 + 4k + 1$$

Colocaremos como nos casos passados, 2 em evidência

$$a^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$

Fazendo $m = 2k^2 + 2k, m \in \mathbb{N}$, segue que

$$a^2 = 2m + 1. \tag{2.2.5}$$

Logo, a e a^2 são ímpares. Portanto, têm a mesma paridade.

Caso 02 - Seja $a \in \mathbb{N}$ um número par.

Então, existe um número natural k tal que $a = 2k$ e, portanto,

$$a^2 = (2k)^2 = (2k) \cdot (2k) = 4k^2 = 2 \cdot (2k^2). \tag{2.2.6}$$

Sendo $m = 2k^2, m \in \mathbb{N}$, podemos então concluir que

$$a^2 = 2 \cdot m. \tag{2.2.7}$$

Logo, se a é par, então a^2 é par. Portanto, têm a mesma paridade.

Portanto, das Equações (2.2.5) e (2.2.7) concluímos que todo número natural e seu quadrado têm a mesma paridade. □

Questão 09

Demonstração. Seja x um número inteiro par. Então $x = 2k$, com $k \in \mathbb{N}$. Assim, $x^2 = (2k)^2 = 4k^2$

Como k é natural, k^2 também é natural, com isso vemos que $4k^2$ é múltiplo de 4.

Portanto, x^2 é um número divisível por 4.

Questão 10

Podemos utilizar resultados já obtidos em demonstrações passadas nesse exercício.

(i) Seja a um número natural par.

Observe pelo Problema 08 que a^2 também é par.

Como $a^3 = a^2 \cdot a$, então a^3 é o produto de dois números inteiros pares. Já vimos no exercício 05 que vale a proposição "o produto de dois números inteiros pares é par".

Conclusão: a^3 é par.

(ii) Seja a um número natural ímpar.

Observe pelo Problema 08 que a^2 também é ímpar.

Como $a^3 = a^2 \cdot a$, então a^3 é o produto de dois números inteiros ímpares. Já provamos na Proposição 2.13 que vale a afirmativa "o produto de dois números inteiros ímpares é ímpar".

Logo, a^3 é ímpar.

Portanto, a^3 tem a mesma paridade que a. $\square$

Questão 11

Demonstração. Tomando n um número natural qualquer, o seu consecutivo será expresso por $n+1$

Caso 01 - Suponha $n = 2k$, com $k \in \mathbb{N}$ e por sua vez $n+1 = 2k+1$. O produto será expresso por números de paridade oposta. Logo, $n \cdot (n+1)$, pela Proposição 2.13 é par.

Caso 02 - Suponha $n = 2k+1$, com $k \in \mathbb{N}$ e por sua vez $n+1 = (2k+1)+1 = 2k+2 = 2(k+1)$. Fazendo $k+1 = t, t \in \mathbb{N}$. Então $n+1 = 2t$. O produto será expresso por números de paridade oposta. Logo, $n \cdot (n+1)$, pela Proposição 2.13 é par.

Portanto, o produto de um número e seu consecutivo é par. $\square$

Questão 12

Demonstração. Faremos a primeira parte do exercício por exaustão.

Figura 2.7: Tabela com soma de pares e ímpares

PARCELAS			SOMA
PAR	PAR	PAR	PAR
PAR	PAR	ÍMPAR	ÍMPAR
PAR	ÍMPAR	ÍMPAR	PAR
ÍMPAR	ÍMPAR	ÍMPAR	ÍMPAR

Fonte: Elaborada pelo autor

Pela tabela podemos ver que:

(i) Para a soma de 3 números resultar num número par é necessário que os 3 números sejam pares ou que exatamente um deles seja par.

(ii) Para a soma de 3 números resultar num número ímpar, é preciso que os três números sejam ímpares ou que apenas um seja ímpar.

$\square$

Como fazer com 37 números? Observe que:

Demonstração. A adição de números pares não altera a paridade da soma, ou seja, só importa a quantidade de parcelas ímpares.

Caso 01 - Quantidade par de parcelas ímpares. Sendo par a quantidade de números ímpares, podemos dispô-los dois a dois (ímpar + ímpar) e pela Proposição 2.11 "a soma de números de mesma paridade é par". Logo, com quantidade de parcelas pares de números ímpares, a soma é par.

Caso 02 - Quantidade ímpar de parcelas ímpares. Podemos dispô-los dois a dois (ímpar +ímpar) e teremos sempre sobrando uma parcela ímpar a ser adicionada, pelo Caso 01, a soma dos n pares de parcelas ímpares é par e se adicionarmos a parcela ímpar restante, pela Proposição 2.12 "a soma de números de paridade oposta é sempre ímpar", temos que a soma é ímpar

Portanto, para a soma de 37 números seja par, a quantidade de parcelas ímpares precisa ser par e para que seja ímpar, a quantidade de parcelas ímpares precisa ser ímpar. □

Questão 13

Falso. Vejamos através de dois contraexemplos: $2 + 2^3 = 2 + 8 = 10$ a soma é par ou $3 + 3^3 = 3 + 27 = 30$ a soma é par.

Questão 14

Demonstração. Seja $n \in \mathbb{N}$ um número ímpar, sabemos que é da forma $2t+1$, com $t \in \mathbb{N}$. Utilizaremos demonstração direta:

$$\begin{aligned} n^2 = (2t+1)^2 &= 4t^2 + 4t + 1 \\ n^2 &= 4 \cdot (t^2 + t) + 1 \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

Observemos que $t^2+t = t\cdot(t+1)$, ou seja o produto de um número pelo seu consecutivo, que é sempre par, conforme provamos no Exercício 10. Logo, $t^2 + t = 2 \cdot k$, com $k \in \mathbb{N}$.

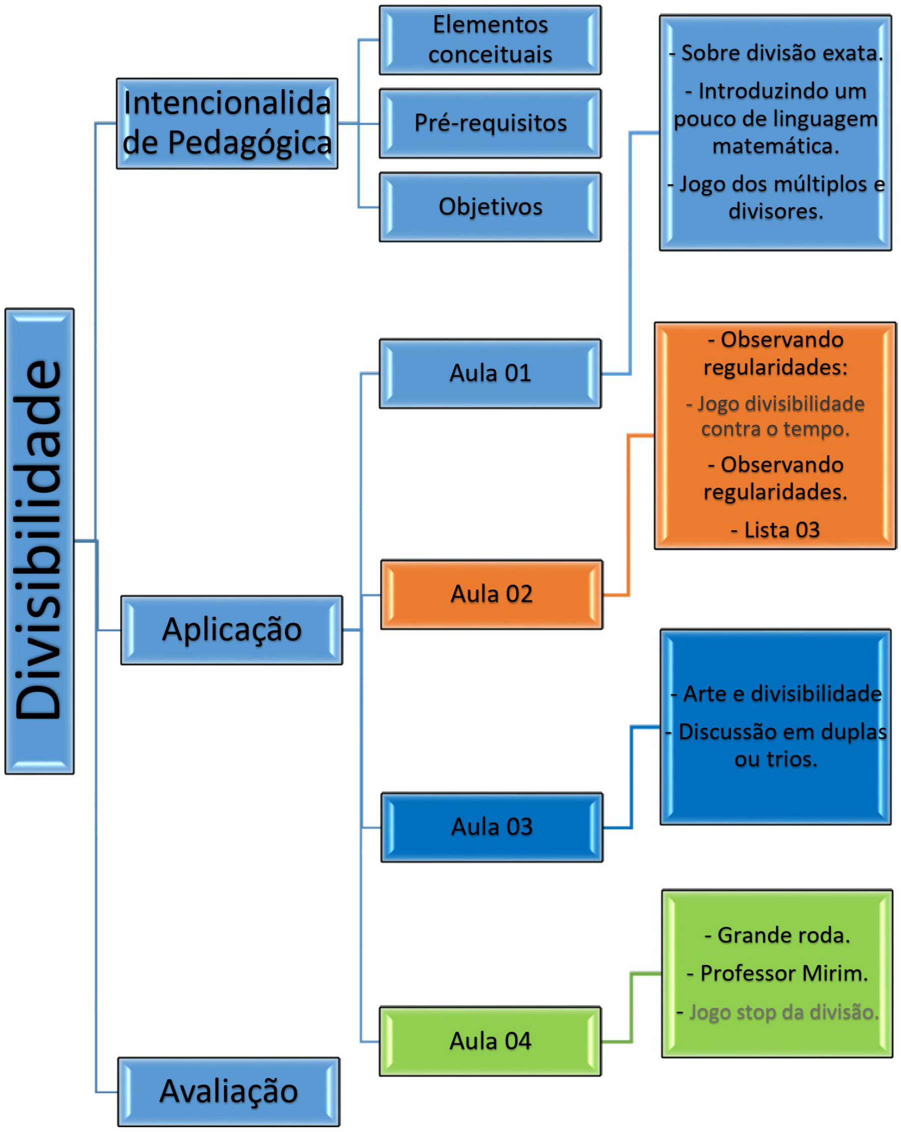
Voltando na equação (2.2.8) temos

$$\begin{aligned} n^2 &= 4 \cdot (t^2 + t) + 1 \\ n^2 &= 4 \cdot 2 \cdot k + 1 \\ n^2 &= 8k + 1 \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

Portanto, $n^2 = 8k + 1$ para algum $k \in \mathbb{N}$. □

2.2.3 Sequência 03: Divisibilidade

Figura 2.8: Organização da Sequência sobre Divisibilidade



Dentre os conteúdos já estudados a esta altura do Ensino Fundamental, a divisão exata entre números naturais se destaca na aplicação de seus resultados ao estudo de aritmética e da álgebra. Partindo da ideia de divisão exata conduziremos aos Critérios de divisibilidade explorando exemplos numéricos e, a partir destes, são feitos exercícios de aplicação direta das conclusões gerais.

Intencionalidade Pedagógica

Elementos conceituais: divisão exata, múltiplos e divisores de números naturais e critérios de divisibilidade estudadas desde o $6^{\underline{o}}$ ano de escolaridade.

Pré-requisitos:

- Entender o que são números naturais e inteiros;

- Compreender o conhecimento das ordens decimais;
- Ter clareza do que é, e saber fazer uma divisão exata;
- Saber o que é um múltiplo e um divisor de um número natural;
- Diferenciar o conceito de"números" e de "algarismos";
- Saber dividir números na casa das dezenas por números na ordem das unidades simples.
- Conhecer a relação entre os zeros no final de um produto e a multiplicação por fatores 10, 100 ou 1.000.

Objetivos:

- Aguçar a curiosidade com relação a origem e comprovação de cada um dos critérios de divisibilidade;
- Entender como podemos deduzir as regras de divisibilidade através da observação, prática e repetição;
- Adquirir conhecimento sobre algumas simbologias próprias da linguagem matemática $\{\neq, \nmid, \in, \leq, \geq, ...\}$
- Saber traduzir para linguagem matemática expressões algébricas que envolvam relações com divisibilidade;
- Operar com expressões algébricas básicas (adição, subtração, multiplicação, potenciação).
- Fazer o estudante refletir sobre as conclusões presentes nos critérios de divisibilidade expandindo suas aplicações mediante o uso de demonstrações matemáticas.
- Desenvolver a capacidade de usar demonstrações matemáticas de forma direta ou por contraexemplo no estudo de noções de divisão, múltiplos e divisores e nos critérios de divisibilidade.

Lista de exercícios

Na lista sobre divisibilidade fizemos duas partes independentes, uma com atividades de demonstração direta e a outra como proposta interdisciplinar usando os critérios de divisibilidade e a pintura de um mosaico.

Exploramos a temática divisibilidade na primeira parte traçando uma sequência lógica com nove (9) exercícios para a discussão e resolução das demonstrações.

Introduzimos as questões de 01 a 03 relacionadas à divisão exata e à definição dos termos de uma divisão. A ideia é fazer o estudante pensar sobre a divisão de resto zero, definição de múltiplos e divisores e explorar a sua representação algébrica. Mais uma vez, usamos o recurso de auxiliar a resolução das questões baseadas nos resultados de questões anteriores.

As questões de 04 a 06 usam o conhecimento sobre múltiplos de um número e já fazem uma ligação com os critérios de divisibilidade. Foi incluído um exemplo numérico que pode facilitar para os estudantes as representações de números e atuar como elemento familiar ao estudante.

Nas Questões de 07 e 09, são destacados alguns dos critérios de divisibilidade que são mais evidentes aos estudantes com o auxílio da decomposição em potências de base dez (10). A questão 08 é uma releitura de uma questão vista na seção anterior e buscamos fazer o estudante repensar outra forma de resolução e a Questão 09 utilizamos números de cinco (5) algarismos para usarmos nas provas solicitadas.

Escola:	Trimestre:
Estudante:	
Professor(a):	
Disciplina:	Data:
Ano escolar/Turma:	

Lista 03 - Divisibilidade

1. Observe a proposição "*Sejam* $a, n \in \mathbb{N}$ *tais que* $a|n$ *e* $a \neq 0$*. Então existe único* $x \in \mathbb{Z}$ *tal que* $ax = n$", mostre que existe um único valor x, tal que $a \cdot x = n$.

2. Demonstre a seguinte propriedade: Se $a|b$ e $b|a$, então $a = b$. (Dica: Faça $b = at$ e $a = bk$)

3. Se $a|b$ e $b|m$, então $a|m$.

4. Prove que para todo número natural n exatamente um dos números n, $n + 2$ ou $n + 4$ é múltiplo de três (3).

5. Quantos múltiplos de três (3), com três algarismos distintos, podem ser formados com $2, 3, 6$ e 7?

6. Determinar todos os números naturais de três (3) algarismos que são múltiplos de 5 e cuja soma dá 19.

7. Dado um número de dois algarismos $n = AB$, mostrar que $AB + BA$ é múltiplo de 11. (Dica: utilize a decomposição em potências de base dez)

8. Dê uma demonstração direta ao teorema "Se um inteiro é divisível por 6, então duas vezes esse inteiro é divisível por 4".

9. Demonstre os seguintes critérios de divisibilidade no sistema decimal.

   a) Critério de divisibilidade por 2: um número natural $ABCDE$ é múltiplo de 2 se e somente se $E = \{0, 2, 4, 6, 8\}$.

   b) Critério de divisibilidade por 10: um número natural $ABCDE$ é múltiplo de 10 se e somente se $E = 0$.

   c) Critério de divisibilidade por 5: um número natural $ABCDE$ é múltiplo de 5 se e somente se $E = 0$ ou $E = 5$.

   d) Critério de divisibilidade por 4: um número natural $ABCDE$ é múltiplo de 4 se e somente se DE o for.

   e) Critério de divisibilidade por 3: um número natural $ABCDE$ é múltiplo de 3 se e somente se $A + B + C + D + E = 3n$.

Já a parte 02, pode ser usada como uma segunda lista ou como complemento da primeira. Foi pensada para explorar os aspectos cognitivos da relação com o tema estudado e o uso de arte com mosaico.

É uma atividade que diversifica a forma de apresentar matemática e procura trazer leveza com o uso das habilidades manuais, sem perder de vista o conteúdo estudado.

Esta segunda lista colocamos dentro do tópico "Aplicação" junto com a descrição da atividade.

Aplicação

Aula 01 - 50 minutos

20 minutos - *Sobre divisão exata*

Começamos com o resgate do estudo do tema já feito nos conteúdos do 6º ano do Ensino Fundamental, introduzindo um pouco mais de linguagem matemática para conduzir os estudantes do 8º ano a repensarem o que há por trás de cada um dos critérios utilizados para identificar uma divisão exata.

Apresentaremos resumo elencando os principais critérios de divisibilidade já estudados e colocando à disposição dos estudantes através de página impressa, no ambiente virtual (google classroom por exemplo) ou copiando-os no quadro, de forma que fiquem de fácil acesso. Deixamos no apêndice uma sugestão de impresso com diversos critérios de divisibilidade acrescidos de exemplos numéricos que podem ser usados pelo professor no resgate dos estudos do 6º ano (Veja Apêndice A - Critérios de Divisibilidade). Neste momento desenvolvemos uma discussão sobre como chegar a cada uma das conclusões, quais exemplos os estudantes recordam ou podem dar sobre os principais critérios estudados.

No resgate de conhecimentos já adquiridos podemos discutir a demonstração do exercício 9.a sobre a divisibilidade por 2, por já termos discutido sobre paridade.

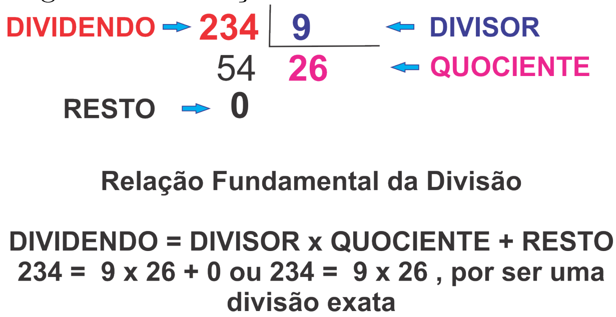
30 minutos - *Introduzindo um pouco de linguagem Matemática*

Começaremos este segundo momento levantando uma situação-problema para relembrar a ideia de divisão exata e buscar a relação entre a divisão exata e as ideias de múltiplos e divisores de um número natural.

Exemplo 2.14. Uma companhia militar deseja distribuir seus soldados em fileiras de modo que cada fileira tenha o mesmo número de soldados. Sabendo que o número total de soldados é de 234 e que serão formados 9 fileiras, quantos soldados estarão em cada fileira?

Pode-se indicar ao estudante que neste caso a divisão é exata, ou seja, não tem resto e é possível agrupar os 234 soldados nas 9 fileiras do seguinte modo

Figura 2.9: Relação fundamental da divisão



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na sequência estendemos a noção de divisão exata e sua relação com as definições de múltiplos e divisores de um número, como a seguir:

Definição 2.15. Dados dois números inteiros a e $n \in \mathbb{N}$, dizemos que a **divide** n, ou que n é **múltiplo** de a, ou que n é **divisível** por a, se existe $x \in \mathbb{N}$ tal que

$$a \cdot x = n$$

e utilizamos a seguinte notação: $a|n$ (a divide n). Caso contrário, se a não divide n, escrevemos $a \nmid n$.

A relação entre esses dois números naturais definida acima é denominada divisibilidade em $\mathbb{N}$.

Exemplo 2.16.

$$3 \cdot 4 = 12 \quad \Rightarrow \quad 3|12, \quad 4|12;$$

$$(2) \cdot (7) \neq 18 \quad \text{pois} \quad 2|18, \text{porém} 7 \nmid 18, \text{pois não existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } 7 \cdot n = 18$$

Pela sua utilidade resgataremos dois conceitos: o de conjuntos de divisores e o de números primos.

Definição 2.17. Indicamos por $\mathcal{D}(n)$ o conjunto dos divisores de n. Exemplo: $\mathcal{D}(8) = \{1, 2, 4, 8\}$

Definição 2.18. Denominamos **primos** a todo número natural $n > 1$ que não tem divisor diferente de 1 e dele mesmo (1 e n são chamados de divisores triviais). Chamamos de **composto** a todo número natural que possui divisores além dos divisores triviais.

Propriedade 2.19. Se p é primo então $\mathcal{D}(p) = \{1, p\}$.

Podemos convidar os estudantes para juntos concluir a aula fazendo o "Jogo dos Múltiplos e Divisores" conforme descrito a seguir.

Atividade Lúdica 01 - Jogo dos Múltiplos e Divisores[5].

Apresentação: O jogo é feito com a turma dividida em duplas ou em dois grandes grupos com a cartela exposta no quadro. Trata-se de um jogo onde os estudantes utilizam cálculo mental e em grupo descobrem quais números são múltiplos, quais são divisores de um natural e quais não tem divisores no universo de 1 a 100

Objetivos:

- Exercitar as noções de múltiplos e divisores de um número;
- Trabalhar o desenvolvimento do cálculo mental;
- Mostrar a necessidade de formas de cálculos mais rápidas e eficientes;
- Trabalhar a percepção de números primos menores que 100.

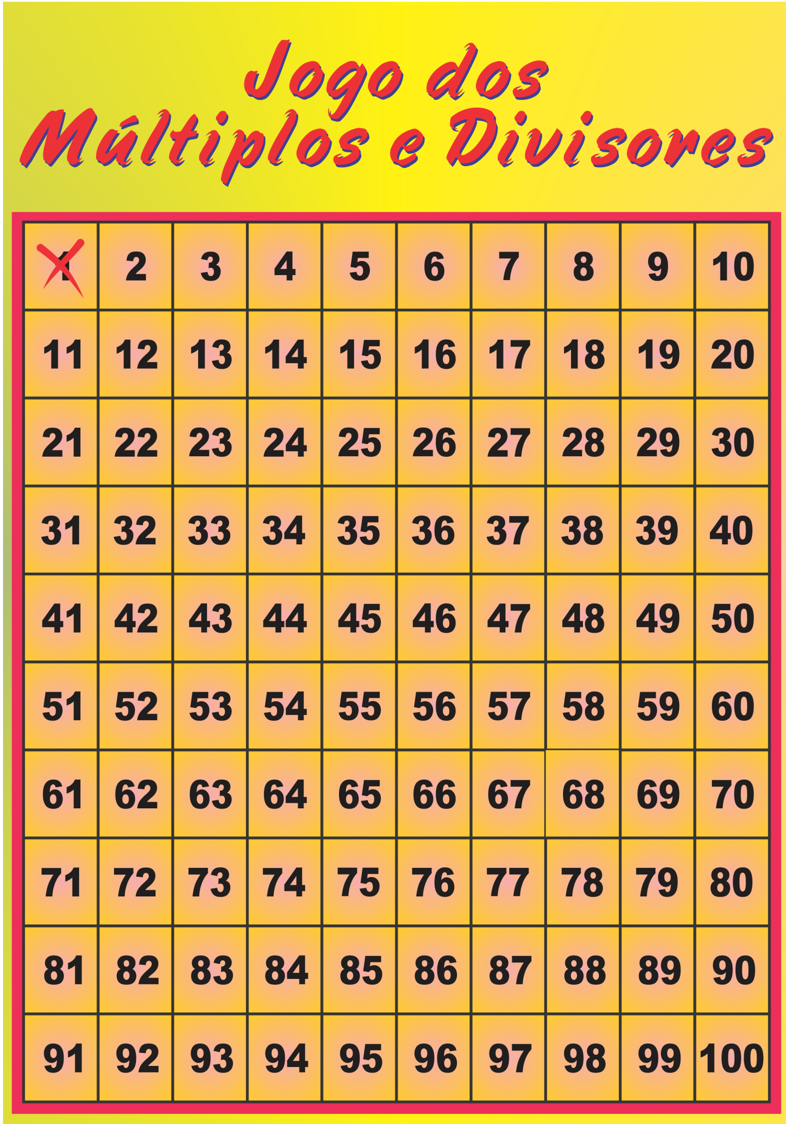
Desenvolvimento

1. Usar uma tabela numerada de 1 a 100 como a que esta abaixo para cada dupla de jogadores. O número 1 (um) já está fora do jogo.
2. Escolhemos quem irá sair o jogo (usando par ou ímpar, cara coroa, ...) o jogador que sairá a partida deve obrigatoriamente fazer um X sobre o número 2 (dois) (eliminar o 2) para dar a saída;
3. Na sequência o jogador adversário deverá riscar qualquer múltiplo de 2 (por exemplo o 26) e a vez volta para o aluno que deu a saída do jogo. Esse por sua vez, deve eliminar um múltiplo ou divisor de 26 (exemplo: Divisores de 26: 2, 13 ou os múltiplos de 26: 52, 78) ;
4. Se ele eliminar por exemplo o número 52 da lista de números, o próximo jogador terá que eliminar um múltiplo ou divisor de 52 (exemplo: Divisores de 52 possíveis de serem eliminados: 4 ou 13 já que o 1,26 e o 52 já foram eliminados e não há múltiplos de 52 na tabela, o primeiro maior que 52 seria 104).
5. O jogo continuará alternando os jogadores até que um dos jogadores não consiga mais eliminar nenhum número. Será declarado campeão aquele que deixar o adversário sem possibilidade de continuar o jogo.

Concluímos a aula solicitando aos estudantes que estudem as regras de divisibilidade e tragam calculadora ou o celular com o aplicativo de calculadora para a próxima aula.

[5]Adaptado de JARANDILHA, (2005[39], p. 26) pelo autor.

Figura 2.10: Jogo Múltiplos e Divisores



Fonte: Elaborada pelo autor.

Aula 02 - 50 minutos

15 minutos - *Observando regularidades.*

Atividade Lúdica 02 - Jogo divisibilidade contra o tempo

Apresentação: Esta atividade visa proporcionar aos estudantes a necessidade de memorizar alguns fatos matemáticos de relevância para utilização no dia a dia.

Objetivos:

- Revisar os critérios de divisibilidade;
- Trabalhar a interação do grupo e ajuda mútua;

- Manter um clima favorável ao aprendizado.

Desenvolvimento:

- Iniciamos a aula solicitando que os estudantes que formem grupos de quatro (4) ou cinco (5) componentes, através de escolha livre e definam quem representará o grupo como líder;
- Em seguida, orientamos os grupos que peguem suas calculadoras ou celulares para fazerem a atividade;
- Todos os estudantes do grupo receberão uma tabela como da Figura 2.11, com números que devem ser identificados como divisíveis por 2, 3, 4, 5, 6, 9 e 10 (Os divisores 7 e 8 foram retirados visando agilizar a atividade), voltadas para baixo. (Veja modelo para impressão no final da seção na Figura 2.14);
- Orientamos os estudantes escolhidos como líderes a não usarem a calculadora e nos primeiros cinco (5) minutos eles não podes orientar seus companheiros;
- Nos cinco (5) minutos posteriores os líderes poderão orientar os colegas que estão usando a calculadora como recurso;
- O grupo que terminar primeiro marca dez (10) pontos e mais dez (10) pontos a acada tabela concluída corretamente; e perde dois (2) pontos por cada marcação errada de um de seus componentes.
- Ganha o jogo o grupo que somar a maior quantidade de pontos.

Uma observação sobre essa atividade é que a calculadora entra como fator complicador, já que demanda mais tempo fazer a verificação número a número de cada um dos divisores.

Figura 2.11: Tabela Divisibilidade de números

	DIVISIBILIDADE							
	Número / Divisores	2	3	4	5	6	9	10
a.	3.144							
b.	52.215							
c.	152.316							
d.	2.102.454							
e.	40.152.361							
f.	587.152.355							
g.	2.315.112.030							
h.	12.255.050.340							

Fonte: Elaborada pelo autor.

15 minutos - *Observando regularidades.*

Começaremos a aula ampliando a noção de generalização de números na base decimal visando recorrer a ela nas demonstrações.

Algumas regularidades são importantes para introduzirmos os critérios de divisibilidade. Uma delas é o fato de usarmos o sistema decimal na escrita e representação numérica.

Ao decompormos um número na base dez, podemos escrevê-lo na forma multiplicativa usando potências de base dez, assim

$$
\begin{aligned}
6.234 &= 6.000 + 200 + 30 + 4 \\
6.234 &= 6 \cdot 1.000 + 2 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 1 \\
6.234 &= 6 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 \qquad (2.2.10)
\end{aligned}
$$

Observamos pelo nosso sistema de numeração que cada algarismo de um número qualquer tem seu valor posicional de acordo a casa decimal que ocupa, ou seja, representam múltiplos de potências de dez, como pode ser visto na igualdade (2.2.10).

Imaginemos então um número com no máximo três (3) dígitos para efeito introdutório das noções de demonstração (é importante atentar com os estudantes que nossa argumentação não incluirá o termo geral por questões didáticas), onde seus algarismos são representados pelas letras A, B e C sem que ABC represente o produto $A \cdot B \cdot C$, mas, sim um número qualquer com A, B e C sendo números dentre os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.

Teremos $ABC = A \cdot 10^2 + B \cdot 10^1 + C \cdot 10^0$, com A, B e C $\in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Agora é a hora do estudante resolver alguns exemplos antes de partirmos para a lista propriamente dita. O professor convida alguns estudantes ao quadro e escreve o seguinte exemplo como exercício:

Exemplo 2.20. Mostre como podem ser escritas as decomposições dos números abaixo usando potências de base dez:

a. 534 =

b. 7.654 =

c. BD =

d. ABCDE =

Espera-se que os estudantes concluam as seguintes decomposições:

a. $534 = 5 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$

b. $7.658 = 7 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$

c. $BD = B \cdot 10^1 + D \cdot 10^0$

d. $ABCDE = A \cdot 10^4 + B \cdot 10^3 + C \cdot 10^2 + D \cdot 10^1 + E \cdot 10^0$.

Após esta discussão passamos a explorar a lista de exercícios.

20 minutos - *Apresentação da lista.*

Apresentamos a lista de exercícios indicando aos estudantes que nele há aplicação dos conhecimentos já estudados como: divisões exatas, múltiplos e divisores e critérios de divisibilidade.

A ideia é fazermos dois ou mais exercícios de forma dialógica com a interação, argumentação e sugestões de construção feitas com os estudantes. Na sequência, dar tempo para que tentem resolver em duplas ou trios os exercícios propostos.

Como sugestão, o professor pode escolher os Exercícios 01, o item (e) da questão 09 (que usaremos na Questão 05) para serem feitos junto com os estudantes e solucioná-los passo a passo. Estes servirão como pontapé inicial para as outras demonstrações. Colocamos no final da seção possíveis resoluções para a lista. Faremos aqui a demonstração da questões 01 e 09 item (e).

Fazendo juntos a Questão 01

• Observe a proposição "*Sejam $a, n \in \mathbb{N}$ tais que $a|n$ e $a \neq 0$. Então existe único $x \in \mathbb{Z}$ tal que $ax = n$*", mostre que existe um único valor x, tal que $a \cdot x = n$.

Demonstração. Supondo que existam x_1 e $x_2 \in \mathbb{N}$ com $x_1 \neq x_2$ tais que $n = a \cdot x_1$ e da mesma forma $n = a \cdot x_2$. Teríamos então que

$$\begin{aligned} a \cdot x_1 = n &= a \cdot x_2 \\ a \cdot x_1 &= a \cdot x_2 \\ a \cdot x_1 - a \cdot x_2 &= 0 \\ a \cdot (x_1 - x_2) &= 0 \end{aligned}$$

Ou $a = 0$ ou $x_1 - x_2 = 0$.

Como $a \neq 0$ então $x_1 - x_2 = 0$, ou seja, $x_1 = x_2$.

Portanto, existe um único x tal que $n = ax$. □

Fazendo juntos a Questão 09 item (e)

• Demonstre os seguintes critérios de divisibilidade no sistema decimal.

Proposição 2.21. *Critério de divisibilidade por 3: um número natural $ABCDE$ é múltiplo de 3 se e somente se $A + B + C + D + E = 3n$.*

Demonstração. Considere n o número natural de cinco algarismos ABCDE.

$$n = A \cdot 10^4 + B \cdot 10^3 + C \cdot 10^2 + D \cdot 10^1 + E \cdot 10^0, \text{com } A \neq 0.$$

Escreveremos as potências e base 10 da seguinte forma

$$\begin{aligned} 10^4 &= 10.000 = 9.999 + 1; \\ 10^3 &= 1.000 = 999 + 1; \\ 10^2 &= 100 = 99 + 1; \\ 10^1 &= 10 = 9 + 1 \end{aligned}$$

Reescreveremos n como:

$$\begin{aligned} n &= A \cdot (9.999 + 1) + B \cdot (999 + 1) + C \cdot (99 + 1) + D \cdot (9 + 1) + E \\ n &= 9.999 \cdot A + A + 999 \cdot B + B + 99 \cdot C + C + 9 \cdot D + D + E \\ n &= (9.999 \cdot A + 999 \cdot B + 99 \cdot C + 9 \cdot D) + (A + B + C + D + E) \end{aligned}$$

Agrupando os números divisíveis por 3 podemos reorganizar da seguinte forma

$$n = 3 \cdot (3.333 \cdot A + 333 \cdot B + 33 \cdot C + 3 \cdot D) + (A + B + C + D + E)$$

Fazendo $k = (3.333 \cdot A + 333 \cdot B + 33 \cdot C + 3 \cdot D),\ k \in \mathbb{N}$ e $t = (A + B + C + D + E),\ t \in \mathbb{N}$, teremos então

$$n = 3 \cdot k + t;\ k, t \in \mathbb{N}. \tag{2.2.11}$$

a)($\Longrightarrow$) Supondo que n seja divisível por 3.

Temos $n = 3 \cdot x$, para algum número natural x e dessa forma, pela Equação (2.2.11),

$$\begin{aligned} n &= 3 \cdot k + t \\ 3 \cdot x &= 3 \cdot k + t \\ t &= 3 \cdot x - 3 \cdot k \\ t &= 3 \cdot (x - k) \end{aligned} \tag{2.2.12}$$

Observe que $n \geq 3 \cdot k \Rightarrow 3 \cdot x \geq 3 \cdot k \Rightarrow x \geq k$, onde $(x - k)$ é um número natural e representaremos por z. Logo, $t = 3 \cdot (x - k) = 3 \cdot z$ é divisível por 3.

Portanto, como $t = A + B + C + D + E$, representa a soma dos algarismos de n, essa soma é divisível por 3.

b)($\Longleftarrow$) Supondo que soma dos algarismos de n seja divisível por 3. Então, pela Equação (2.2.11) $t = A + B + C + D + E$ é divisível por 3, ou seja, $t = 3 \cdot x$, para algum número natural x.

Temos então,

$$n = 3 \cdot k + 3 \cdot x = 3 \cdot (k + x). \tag{2.2.13}$$

Fazendo $k + x = z;\ z \in \mathbb{N}$, temos $n = 3 \cdot z$.

Logo, n divisível por 3.

Portanto, por pelas demostrações (a) e (b), o critério é válido, ou seja: "um número natural $ABCDE$ é múltiplo de 3 se e somente se $A + B + C + D + E = 3n$". □

Na próxima aula será dado tempo para verificar o que foi feito e promovermos uma troca de ideias entre os estudantes.

Aula 03 - 50 minutos

15 minutos - *Arte e divisibilidade*

Atividade 03: Arte e divisibilidade

Apresentação: A atividade consiste em utilizar a pintura de um mosaico que utiliza números múltiplos de 3, 4, 5, 7 e 11 para obter o resultado final. É uma atividade que pode ser feita também de forma interdisciplinar com o professor de artes.

Objetivos:

- Fixar a necessidade de saber os critérios de divisibilidade para facilitar o cálculo de divisões exatas;
- Proporcionar um momento de partilhar de conhecimentos sobre o tema divisibilidade;
- Exercitar outras capacidades como a motora e a artística.

Desenvolvimento

1. Distribua a turma em grupos de duas ou três pessoas;
2. Para cada grupo, entregue a cópia da folha com a atividade "Mosaico das divisibilidades" e lápis de cor, lápis de cera ou hidrocor com as cores sugeridas(pode ser pedido aos estudantes que tragam seus lápis também);
3. Os estudantes terão 10 minutos para concluir a pintura, podendo usar a lista com os critérios de divisibilidade, porém sem fazer uso da calculadora;
4. O professor pode, após verificar a exatidão dos cálculos e da pintura, orientar par que os estudantes fixem seus mosaicos na parede da sala e discutir as divergências entre os mesmos.

Na folha seguinte, colocamos um modelo de folha de exercício para o professor utilizar em sala e no final da seção, colocamos solução esperada da pintura na Figura 2.17.

Avaliação: Será avaliado a capacidade de atribuir a cada valor expresso no mosaico a correspondência correta entre os divisores dispostos na figura.

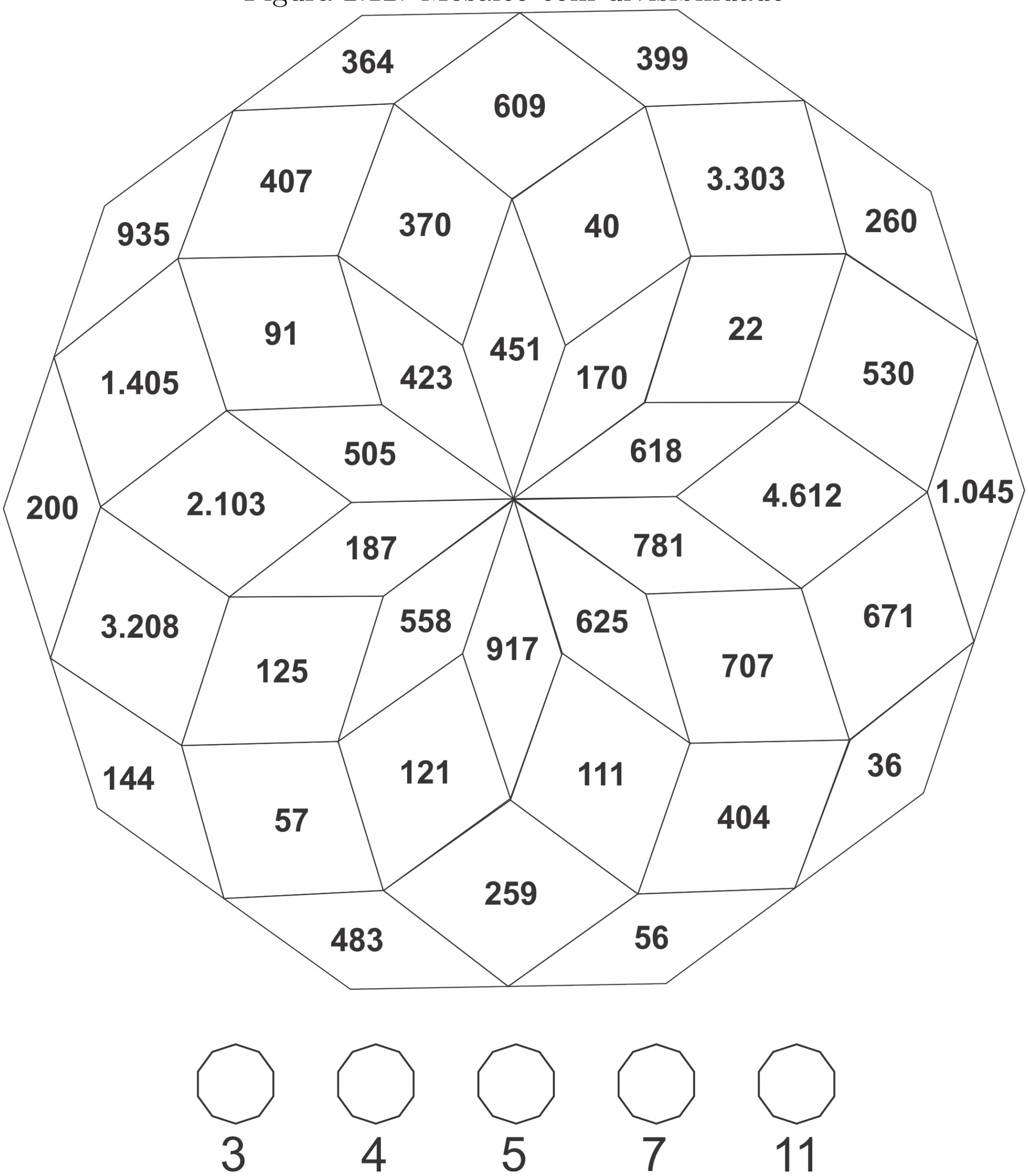
É importante que o professor fique atento à interação na troca de conhecimentos e intervenha caso necessário para corrigir possíveis equívocos na interpretação dos critérios de divisibilidade.

Escola:	**Trimestre:**
Estudante:	
Professor(a):	
Disciplina:	**Data:**
Ano escolar/Turma:	

Mosaico das Divisibilidades

Utilize seus conhecimentos sobre divisibilidade no mosaico abaixo: Primeiro escolha uma cor para cada divisor {3, 4, 5, 7 e 11}. Em seguida pinte cada polígono com a cor correspondente ao divisor do número dentro dele. Para os números com mais de um divisor, libere sua criatividade e preencha com as cores escolhidas para os dois divisores.

Figura 2.12: Mosaico com divisibilidade



Fonte: Elaborado por Cristiano dos Santos e Kisnney E. Almeida.

35 minutos - *Discussão em duplas ou trios*

Faremos a manutenção dos grupos da atividade anterior e pegaremos a lista de exercícios para que os estudantes, a partir dos exemplos utilizados na aula anterior, procurem responder às questões restantes.

É importante chamar atenção às dicas colocadas em algumas das questões e que algumas questões podem ser utilizadas para a resolução de outras.

Aula 04 - 50 minutos

10 minutos - *Grande roda*

A retomada da aula anterior será feita com a turma formando um semicírculo aonde o professor dirigirá perguntas do tipo:

- Qual questão pareceu mais difícil?
- Qual delas você precisou da ajuda direta do professor?
- Em que a ajuda de seus colegas foi essencial para conclusão da tarefa?
- Qual a demonstração mais fácil no seu ponto de vista?
- Qual delas você se sente à vontade para partilhar a sua resolução para a turma?

40 minutos - *Professor mirim*

Incentivaremos os estudantes a participar explicando no quadro as questões escolhidas por eles. Podemos sugerir que os dois colegas do grupo intervenham sempre que sentirem que o colega esqueceu um detalhe ou que se sinta inseguro na informação.

O professor incentivará os que estão apresentando suas conclusões a pensarem que nesse momento são professores honorários e têm que não só transmitir o que fez no exercício mas também assegurar que a sua explicação está sendo entendida pelo restante da turma.

Conforme os estudantes se revezam do quadro, o professor deve congratular a atitude de se expor para a turma e apoiar os casos de possíveis insucessos, destacando o erro como parte do processo de construção matemática.

Podemos escolher uma das questões já resolvidas na aula anterior e modificar sua demonstração para que fique errada, de modo que os estudantes tentem indicar por que a alteração fez com que a tese deixasse de ser aceita.

Discutindo os erros em uma demonstração

Usaremos para exemplo a questão 01 da Lista de exercícios onde modificamos trechos da demonstração de modo que ela ficou errada e apresentamos aos estudantes da forma que segue:

Demonstração. Supondo que existam x_1 e $x_2 \in \mathbb{N}$ com $x_1 \neq x_2$ tais que $n = a \cdot x_1$ e da mesma forma $n = a \cdot x_2$. Teríamos então que

$$\begin{aligned} a \cdot x_1 = n = a \cdot x_2 \\ a \cdot x_1 - n = 0 = a \cdot x_2 \\ \text{Como } x_1 - n = 0 \text{ temos que } a \cdot x_2 = 0 \\ \text{E sendo, } a \cdot x_1 = a \cdot x_2 \\ \text{Então, } a \cdot x_1 = 0 \end{aligned}$$

Ora, $a \cdot x_1 = 0$ ou $a \cdot x_2 = 0$.

Como $a \neq 0$ então $x_1 = x_2 = 0 \longleftrightarrow x_1 = x_2$.

Portanto, existe um único x tal que $n = ax$. □

Agora, peça que os estudantes comparem com a resolução feita anteriormente, identifiquem os erros nos argumentos, justifiquem onde e por quê está errado e de que outra forma poderia ser reescrito.

Sugestões de atividades orientadas

Visando o exercício do cálculo mental, o professor pode disponibilizar a tabela do jogo "Stop da divisão" junto com suas regras para que os estudantes pratiquem a divisão exata de números naturais.

Stop da divisão[39]

Esta atividade auxilia:

- A desenvolver a habilidade de cálculo mental para a divisão.

Você vai precisar de:

- Papel sulfite para construção das tabelas;
- Cartolina para as fichas;
- Um saquinho.

Procedimento:

1. Construir com os alunos uma tabela como esta:

Figura 2.13: Tabela Stop da divisão

Stop da Divisão					
Número sorteado	: 2	: 3	: 4	: 6	Pontos da Rodada
12					
24					
36					
48					
60					
72					

Fonte: Elaborada pelo autor.

2. Providenciar também um saquinho com fichas de números que possam ser divididos exatamente por aqueles da tabela. Exemplos: 12 24 48 36 48

3. Retirar um número do saquinho e pedir aos participantes que preencham a tabela anotando todos os quocientes desse número (conforme pedido na tabela):

4. Explicar aos alunos que quem preencher primeiro diz “stop” e todos devem parar.

5. Corrigir as divisões no quadro, atribuindo cinco pontos a cada acerto.

Este é um momento para trabalhar múltiplos e divisores e critérios de divisibilidade.

Avaliação

A avaliação será feita de forma processual, durante as atividades desenvolvidas e tendo o professor estado atento às seguintes características:

- Consegue diferenciar uma divisão exata de uma não-exata;
- Sabe estabelecer a relações entre: divisão exata; divisor de um número; múltiplo de um número; divisível por;
- Faz generalização de um número natural e seus múltiplos e divisores;
- Memorizou e sabe aplicar maioria dos critérios de divisibilidade para números naturais;
- Consegue distinguir os vários critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11;
- Demonstra de forma direta ou com exemplos numéricos os fatos por traz dos critérios de divisibilidade.

Essas características podem ser observadas no transcorrer das aulas e pontuadas para o estudante no sentido de fazê-lo direcionar seus esforços na obtenção de maior arcabouço matemático.

Figura 2.14: Modelo para impressão

	DIVISIBILIDADE							
	Número / Divisores	2	3	4	5	6	9	10
a.	3.144							
b.	52.215							
c.	152.316							
d.	2.102.454							
e.	40.152.361							
f.	587.152.355							
g.	2.315.112.030							
h.	12.255.050.340							

	DIVISIBILIDADE							
	Número / Divisores	2	3	4	5	6	9	10
a.	3.144							
b.	52.215							
c.	152.316							
d.	2.102.454							
e.	40.152.361							
f.	587.152.355							
g.	2.315.112.030							
h.	12.255.050.340							

	DIVISIBILIDADE							
	Número / Divisores	2	3	4	5	6	9	10
a.	3.144							
b.	52.215							
c.	152.316							
d.	2.102.454							
e.	40.152.361							
f.	587.152.355							
g.	2.315.112.030							
h.	12.255.050.340							

	DIVISIBILIDADE							
	Número / Divisores	2	3	4	5	6	9	10
a.	3.144							
b.	52.215							
c.	152.316							
d.	2.102.454							
e.	40.152.361							
f.	587.152.355							
g.	2.315.112.030							
h.	12.255.050.340							

	DIVISIBILIDADE							
	Número / Divisores	2	3	4	5	6	9	10
a.	3.144							
b.	52.215							
c.	152.316							
d.	2.102.454							
e.	40.152.361							
f.	587.152.355							
g.	2.315.112.030							
h.	12.255.050.340							

	DIVISIBILIDADE							
	Número / Divisores	2	3	4	5	6	9	10
a.	3.144							
b.	52.215							
c.	152.316							
d.	2.102.454							
e.	40.152.361							
f.	587.152.355							
g.	2.315.112.030							
h.	12.255.050.340							

	DIVISIBILIDADE							
	Número / Divisores	2	3	4	5	6	9	10
a.	3.144							
b.	52.215							
c.	152.316							
d.	2.102.454							
e.	40.152.361							
f.	587.152.355							
g.	2.315.112.030							
h.	12.255.050.340							

	DIVISIBILIDADE							
	Número / Divisores	2	3	4	5	6	9	10
a.	3.144							
b.	52.215							
c.	152.316							
d.	2.102.454							
e.	40.152.361							
f.	587.152.355							
g.	2.315.112.030							
h.	12.255.050.340							

	DIVISIBILIDADE							
	Número / Divisores	2	3	4	5	6	9	10
a.	3.144							
b.	52.215							
c.	152.316							
d.	2.102.454							
e.	40.152.361							
f.	587.152.355							
g.	2.315.112.030							
h.	12.255.050.340							

	DIVISIBILIDADE							
	Número / Divisores	2	3	4	5	6	9	10
a.	3.144							
b.	52.215							
c.	152.316							
d.	2.102.454							
e.	40.152.361							
f.	587.152.355							
g.	2.315.112.030							
h.	12.255.050.340							

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 2.15: Tabela do Stop da divisão para impressão

Stop da Divisão					
Número sorteado	: 2	: 3	: 4	: 6	Pontos da Rodada
12					
24					
36					
48					
60					
72					

Stop da Divisão					
Número sorteado	: 2	: 3	: 4	: 6	Pontos da Rodada
12					
24					
36					
48					
60					
72					

Stop da Divisão					
Número sorteado	: 2	: 3	: 4	: 6	Pontos da Rodada
12					
24					
36					
48					
60					
72					

Stop da Divisão					
Número sorteado	: 2	: 3	: 4	: 6	Pontos da Rodada
12					
24					
36					
48					
60					
72					

Stop da Divisão					
Número sorteado	: 2	: 3	: 4	: 6	Pontos da Rodada
12					
24					
36					
48					
60					
72					

Stop da Divisão					
Número sorteado	: 2	: 3	: 4	: 6	Pontos da Rodada
12					
24					
36					
48					
60					
72					

Stop da Divisão					
Número sorteado	: 2	: 3	: 4	: 6	Pontos da Rodada
12					
24					
36					
48					
60					
72					

Stop da Divisão					
Número sorteado	: 2	: 3	: 4	: 6	Pontos da Rodada
12					
24					
36					
48					
60					
72					

Stop da Divisão					
Número sorteado	: 2	: 3	: 4	: 6	Pontos da Rodada
12					
24					
36					
48					
60					
72					

Stop da Divisão					
Número sorteado	: 2	: 3	: 4	: 6	Pontos da Rodada
12					
24					
36					
48					
60					
72					

Fonte: Elaborada pelo autor.

RESOLUÇÃO DO MOSAICO

Figura 2.16: Mapa dos divisores

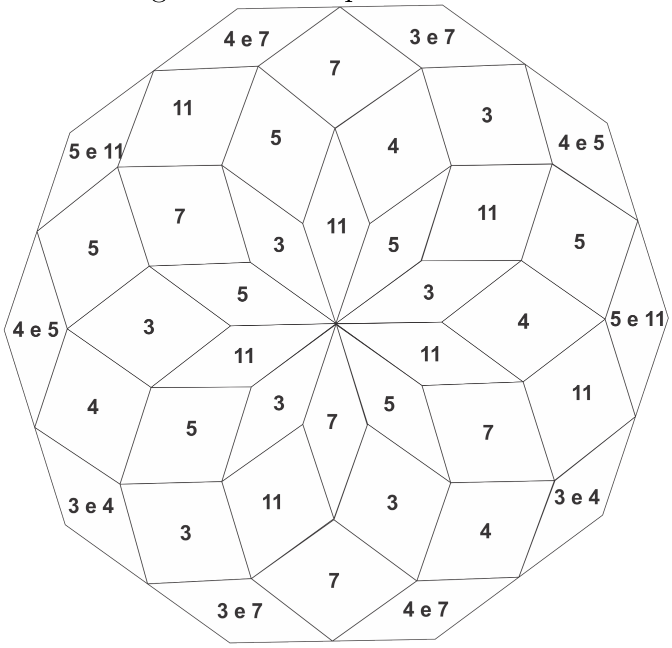
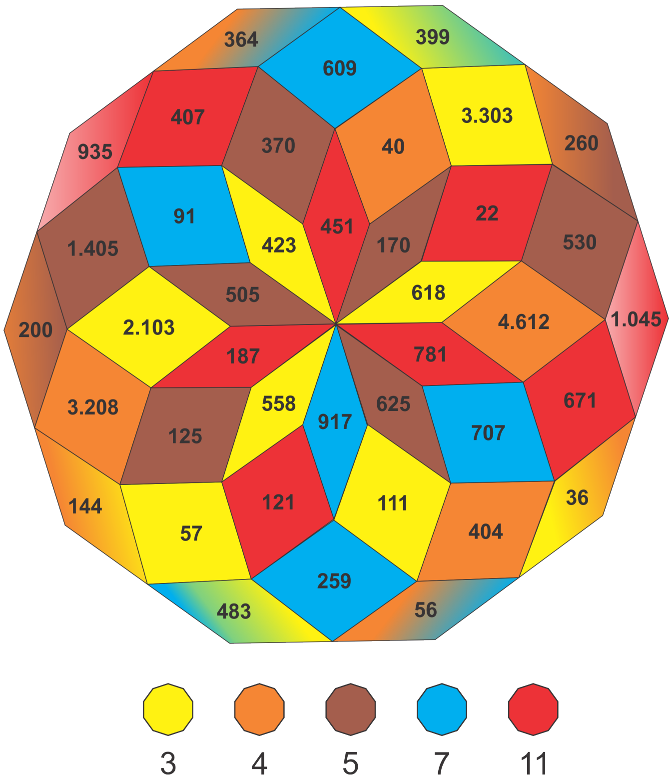


Figura 2.17: Mapa do mosaico com cores

Uma possibilidade



Fonte: Elaboradas pelo autor.

Observação: Lembre-se que as cores serão escolhidas livremente por cada estudante, o esquema acima é apenas ilustrativo.

Possíveis resoluções para os exercícios

Questão 01

Resolvido na Seção 2.2.3

Questão 02

Demonstração. Temos que, se $a \mid b$ e $b \mid a$, então sabemos por definição que existem naturais t e k tais que $b = at$ e $a = bk$. Substituindo o valor de b na igualdade $a = bk$, temos, $a = (at)k = (kt)a$. Porém, teremos que $kt = 1$, para que a igualdade seja verdadeira. No entanto, t e k são números naturais, portanto, $kt = 1$ só é possível se $k = t = 1$ e, assim, de $b = at$ ou $a = bk$ segue que $a = b$. □

Questão 03

Demonstração. Se $a|b$ e $b|m$, então, por definição, existem números naturais t e k de modo que $b = at$ e $m = bk$.

Temos que $m = (at)k = a(kt)$. Mas, como t e k são números naturais, então proporemos um $x = kt$, $x \in \mathbb{N}$, já que o produto de dois números naturais kt também é um número natural.

Dessa forma, temos que $m = ax$, com $x \in \mathbb{N}$. Pela definição, concluímos que $a|m$. □

Questão 04

Demonstração. Um número múltiplo de 3 pode ser escrito como $3 \cdot k$, com $n \in \mathbb{N}$.

Caso 01 - Supondo que n seja múltiplo de 3

Teremos então que $n + 2 = 3k + 2$ que é um múltiplo de 3 mais 2 unidades, não é múltiplo de 3.

Com relação a $n+4 = 3k+4 = 3k+3+1 = 3(k+1)+1$ como $k+1$ é natural iremos substituir por um número $t \in \mathbb{N}$ e teremos $n + 4 = 3t + 1$, que também não é múltiplo de 3.

Caso 2 - Supondo que $n = 3k + 1$

Teremos então que $n+2 = 3k+1+2 = 3k+3 = 3(k+1)$. Fazendo $k+1 = t$, $t \in \mathbb{N}$, temos $n + 2 = 3t$ que é múltiplo de 3.

Com relação a $n + 4 = 3k + 1 + 4 = 3k + 3 + 2 = 3(k + 1) + 2$. Fazendo $k + 1 = t$, $t \in \mathbb{N}$, temos $n + 4 = 3t + 2$ que não é múltiplo de 3.

caso 03 - Supondo que $n = 3k + 2$

Teremos então que $n+2 = 3k+2+2 = 3k+3+1 = 3(k+1)+1$. Fazendo $k+1 = t$, $t \in \mathbb{N}$, temos $n + 2 = 3t + 1$ que não é múltiplo de 3.

Com relação a $n + 4 = 3k + 2 + 4 = 3k + 6 = 3(k + 2)$. Fazendo $k + 2 = t$, $t \in \mathbb{N}$, temos $n + 4 = 3t$ que é múltiplo de 3.

Portanto, há exatamente um múltiplo de 3 entre os números $n, n + 2$ e $n + 4$ simultaneamente. □

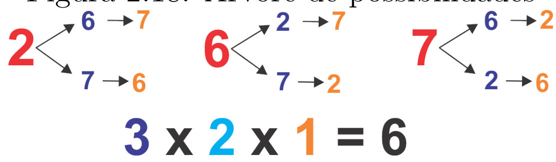
Questão 05

Demonstração. Como já vimos "Um número é divisível por 3 se, e somente se, a soma de seus algarismos é um número múltiplo de 3".

Observe que a soma dos quatro algarismos dados resulta em um múltiplo de 3, ou seja, a soma $2 + 3 + 6 + 7 = 18$. Como queremos números com quatro algarismos, devemos eliminar um dos algarismos de modo que a soma continue sendo múltiplo de 3. Assim, só podemos retirar 3 ou 6, totalizando dois casos possíveis.

Caso (I): Retirando o algarismo 3. É possível formar 6 números de três algarismos distintos com 2,6 e 7. Como podemos observar na figura abaixo:

Figura 2.18: Árvore de possibilidades



Fonte: Elaborada pelo autor.

Caso (II): Retirando o algarismo 6.

Usaremos o mesmo raciocínio anterior e encontraremos 6 números.

Conclusão: podemos formar $6+6 = 12$ números de três algarismos distintos múltiplos de três com $2, 3, 6$ e 7. □

Questão 06

Como já vimos "Um número é divisível por 5 se, e somente se, seu algarismo da unidade for zero (0) ou cinco (5)".

Sabemos que a soma dos três algarismos do número resulta em um múltiplo de 5 e que a soma desses algarismos é 19.

Caso (I): O número terminado em 0

Tomemos um número $AB0$, onde A e B são algarismos $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Vemos que não existe nenhum número terminado em zero cuja soma $A + B$ seja igual a 19.

Logo, vejamos o próximo caso.

Caso (II): O número terminado em 5

Tomemos um número $AB5$, onde A e B são algarismos $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Como cinco (5) é um dos algarismos, obtemos a soma $A + B = 14$.

A soma $A + B$ pode ser expressa da seguinte forma: $14 = 7 + 7$, $14 = 5 + 9$, $14 = 9 + 5$, $14 = 8 + 6$ e $14 = 6 + 8$.

Portanto os números procurados são: 775, 595, 955, 865 e 685.

Questão 07

Demonstração. Sabemos que $AB = A \cdot 10^1 + B \cdot 10^0$ e $BA = B \cdot 10^1 + A \cdot 10^0$. Teremos então

$$AB + BA = A \cdot 10^1 + B \cdot 10^0 + B \cdot 10^1 + A \cdot 10^0$$

$$AB + BA = 10 \cdot A + B + 10 \cdot B + A$$

$$AB + BA = 10 \cdot A + A + B + 10 \cdot B$$

$$AB + BA = 11 \cdot A + 11 \cdot B$$

$$AB + BA = 11 \cdot (A + B).$$

Como $A+B$ são naturais podemos fazer $k = A+B, k \in \mathbb{N}$. Temos então, $AB+BA = 11k$.

Portanto, $AB + BA$ é múltiplo de 11. □

Questão 08

Demonstração. Sabemos que $6 \mid n$. Logo, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = 6k$. Temos então

$$\begin{aligned} n = 6k \Leftrightarrow 2 \cdot n &= 2 \cdot 6k \\ 2 \cdot n &= 2 \cdot (2 \cdot 3)k \\ 2 \cdot n &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot k \\ 2 \cdot n &= 4 \cdot 3k \end{aligned}$$

Fazendo $3k = t, t \in \mathbb{N}$, concluímos que $2 \cdot n = 4 \cdot t$, portanto, divisível por 4. □

Questão 09

Observação: Nestas questões optamos por manter a demonstração até cinco(5) casas decimais, para posteriormente acrescentar a noção de n casas decimais

Resposta Item a

Demonstração. Considere n o número natural de cinco algarismos ABCDE.

$$n = A \cdot 10^4 + B \cdot 10^3 + C \cdot 10^2 + D \cdot 10^1 + E \cdot 10^0, \text{com } A \neq 0.$$

Reescreveremos n como:

$$\begin{aligned} n &= 10 \cdot A \cdot 10^3 + 10 \cdot B \cdot 10^2 + 10 \cdot C \cdot 10 + 10 \cdot D + E \\ n &= 10 \cdot (A \cdot 10^3 + B \cdot 10^2 + C \cdot 10 + D) + E \\ n &= 2 \cdot [5 \cdot (A \cdot 10^3 + B \cdot 10^2 + C \cdot 10 + D)] + E \end{aligned}$$

Sendo $k = 5 \cdot (A \cdot 10^3 + B \cdot 10^2 + C \cdot 10 + D)$ um número natural, teremos então

$$n = 2k + E \tag{2.2.14}$$

a)($\Longrightarrow$) Supondo que n seja divisível por 2.

Temos $n = 2 \cdot x$, para algum número natural x e, dessa forma, pela Equação (2.2.14),

$$\begin{aligned} n &= 2 \cdot k + E \\ 2 \cdot x &= 2 \cdot k + E \\ E &= 2 \cdot x - 2 \cdot k \\ E &= 2 \cdot (x - k) \end{aligned} \tag{2.2.15}$$

Observe que $n \geq 2 \cdot k \Rightarrow 2 \cdot x \geq 2 \cdot k \Rightarrow x \geq k$, onde (x-k) é um número natural e representaremos por z. Logo, $E = 2 \cdot (x - k) = 2 \cdot z$ é divisível por 2.

Portanto, como E é um algarismo par, $E \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$.

b)($\Longleftarrow$) Supondo que o algarismo das unidades seja par, $E \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$.

Então, E é divisível por 2, $E = 2 \cdot x$, para algum número natural x.

Temos pela Equação (2.2.14),

$$n = 2 \cdot k + 2 \cdot x = 2 \cdot (k + x). \tag{2.2.16}$$

Fazendo $k + x = z$; $z \in \mathbb{N}$, temos $n = 2 \cdot z$.

Logo, n divisível por 2.

Portanto, por pelas demonstrações (a) e (b), o critério é válido, ou seja: " um número natural $ABCDE$ é múltiplo de 2 se e somente se $E = \{0, 2, 4, 6, 8\}$". □

Resposta Item b

Demonstração. Esta justificativa é idêntica a outras já feitas. Seja, então, n um número natural da forma

$$\begin{aligned} n &= A \cdot 10^4 + B \cdot 10^3 + C \cdot 10^2 + D \cdot 10^1 + E \cdot 10^0 \\ n &= 10 \cdot (A \cdot 10^3 + B \cdot 10^2 + C \cdot 10 + D) + E \end{aligned}$$

Fazendo $A \cdot 10^3 + B \cdot 10^2 + C \cdot 10 + D = k, k \in \mathbb{N}$ Assim, como 10 é divisível por 10, então n será divisível por 10 se, e somente se, E for divisível por 10. O único algarismo que satisfaz essa condição é o zero(0). Temos que E é divisível por 10 se, e somente se, n terminar em 0. □

Resposta Item c

Demonstração. Sendo n um número natural, ele é da forma

$$\begin{aligned} n &= A \cdot 10^4 + B \cdot 10^3 + C \cdot 10^2 + D \cdot 10^1 + E \cdot 10^0 \\ n &= 10 \cdot (A \cdot 10^3 + B \cdot 10^2 + C \cdot 10 + D) + E \end{aligned}$$

Fazendo $A \cdot 10^3 + B \cdot 10^2 + C \cdot 10 + D = k, k \in \mathbb{N}$ podemos reescrever n como

$$n = 10 \cdot k + E, \text{com} k \in \mathbb{N}$$

Como 10 é divisível por 5, então n será divisível por 5 se, e somente se, E for divisível por 5. Sendo E o algarismo da unidade, então E é divisível por 5 se, e somente se, $E = 0$ ou $E = 5$. Então, n será divisível por 5 se, e somente se, n terminar em 0 ou 5. □

Resposta Item d

Demonstração. Sendo n um número natural, ele é da forma

$$n = A \cdot 10^4 + B \cdot 10^3 + C \cdot 10^2 + D \cdot 10^1 + E \cdot 10^0$$
$$n = 100 \cdot (A \cdot 10^2 + B \cdot 10^1 + C) + D \cdot 10^1 + E \cdot 10^0$$

Fazendo $A \cdot 10^2 + B \cdot 10^1 + C = k, k \in \mathbb{N}$, podemos reescrever n como

$$n = 100 \cdot k + (D \cdot 10 + E), \text{com} k \in \mathbb{N}$$

Como 100 é divisível por 4, teremos que $100k$ é divisível por 4, então n será divisível por 4 se, e somente se, $10 \cdot D + E$ for divisível por 4. Mas, $10 \cdot D + E = DE$, ou seja, o número cujo algarismo das unidades é E e o das dezenas é D. Com isso, n será divisível por 4 se, e somente se, o número formado por seus dois últimos algarismos for divisível por 4. □

Resposta Item e

Resolvido na seção 2.2.3

Capítulo 3

CONCLUSÃO

Como vimos, atualmente as propostas oficiais de renovação curricular e metodológicas do ensino de matemática vêm tomando espaços no currículo de formação de professores e é perceptível que as demonstrações no campo da Teoria dos números têm figurado fora do Ensino Básico, quando muito o direcionamento para o trabalho docente é feito com alguns modelos e Teoremas da Geometria.

A formação docente ainda tem produzido pouca segurança quanto ao desenvolvimento das demonstrações como temática de sala de aula ou como ferramenta para o ensino e estruturação do raciocínio lógico nos estudantes do Ensino Fundamental, fato observado até mesmo nos livros didáticos de matemática.

Apesar de tendências metodológicas possíveis no ensino de matemática avançarem em despertar o desejo de aprender a fazer cálculos estabelecendo seu vínculo com a história da matemática, modelos e aspectos étnicos, trazer o estudo de demonstrações e linguagem matemática melhora o poder de argumentação dos estudantes, mediante a criação de hipóteses e testando possíveis conclusões lógicas advindas de premissas básicas.

Poucos trabalhos focam a atenção em demonstrações de temas de Teoria dos Números para estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental. A indicação de estratégias de ensino e caminhos que possam ser testados pelo professor em suas turmas ainda é pequena, por isso as atividades presentes nas três Sequências Didáticas deste trabalho se fazem necessárias.

A abordagem feita nas três propostas de sequências didáticas com os tópicos Raciocínio Lógico, Paridade e Divisibilidade, visou fazer uma breve introdução aos temas e propõe possibilidades do uso da Teoria dos Números. Perguntas como: O que e como ensinar? Quais conteúdos são apropriados para cada faixa etária? Quais as metodologias e estratégias usaremos para estreitar a relação do estudante com o conhecimento matemático? foram perseguidas na busca de trazer referenciais sempre com um viés de que é possível desenvolver atividades que permitam desenvolvimento do raciocínio lógico e do entendimento e reconhecimento de Demonstrações Matemáticas.

A diversidade de propostas incluídas em cada sequência dá-nos possibilidades de desenvolvimento da capacidade de enfrentar situações novas e fazer a construção de novos conhecimentos, vencendo a primeira tendência de rejeição à disciplina. Como observou

Polya no prefácio de sua obra[55] sobre um estudo publicado em 1956,

> "...a Matemática tem a duvidosa honra de ser a matéria menos apreciada do curso... Os futuros professores passam pelas escolas elementares a aprender a detestar a Matemática... Depois, voltam à escola elementar para ensinar uma nova geração a detestá-la ". (Educational Testing Service, Princeton, N. J. cf.Time, 18 de junho de 1956.)

A formação de uma geração que não tenha tanta aversão à Matemática já seria de grande ganho para o estudo da Matemática. Fazer essa geração conhecer a linguagem matemática desde cedo, dominando suas bases, é uma meta a ser perseguida por nós professores.

Nas palavras de Chevallard

> Não é possível, nem para o matemático profissional nem para os alunos de uma série do ensino fundamental, atuar matematicamente com verdadeira eficácia sem entender o que está fazendo. Mas também não se pode entender em profundidade uma organização matemática determinada se, simultaneamente, não for realizada uma prática matematicamente eficaz. Não há *práxis* sem *logos*, mas também não há *logos* sem *práxis*. (CHEVALLARD[20], 2001, p. 275)

Devemos propor ações no sentido de produzir uma Matemática escolar voltada para a valorização intencional da construção das conjecturas, das argumentações, dos teoremas e dos meios de prova dos estudantes, criando a cultura de "sala de aula de Matemática", e as demonstrações podem ser uma das portas para essa cultura escolar renovada.

Bibliografia

[1] ABRANTES, Paulo; SERRAZINA, Lurdes; OLIVEIRA, Isolina. A matemática na educação básica. Lisboa: Ministério da Educação, 1999.

[2] ALMEIDA, Kisnney Emiliano de. *Notas de aula- EXA 820 Teoria dos números*. Feira de Santana: UEFS, 2022.

[3] ALMOULOUD, Saddo Ag. Prova e demonstração em matemática: problemática de seus processos de ensino e aprendizagem. *In: Reunião anual Associação Nacional de Pós-graduação e pesquisa em Educação*,2007, Caxambu. *Anais eletrônicos.* Caxambu: ANPEd, 2007. Disponível em `https://shre.ink/NGc`. Acessado em 13 de janeiro de 2022.

[4] ANGELUCCI, Carla Biancha; KALMUS, Jaqueline; PAPARELLI, Renata; PATTO, Maria Helena Souza. *O estado da arte da pesquisa sobre o fracasso escolar (1991-2002)*: um estudo introdutório. São Paulo,V.30, jan/abr.2004.

[5] ASSUMPÇÃO, André Luiz Monsores de; OLIVEIRA, Poliana Alves de. *O ensino da matemática e o desenvolvimento do raciocínio lógico: um estudo introdutório.* XII Conferência Interamericana de Educação Matemática - CIAEM. Recife, 2011

[6] AUSUBEL, D. P; NOVAK, J. D.; HANESIAN, H. *Psicologia Educacional.* Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

[7] BARBOSA, Jonei Cerqueira. Modelagem Matemática na sala de aula.In: Perspectiva, Erechim (RS), v. 27, n. 98, p. 65-74, junho/2003.

[8] BARBOSA, Jonei Cerqueira. Modelagem Matemática: O que é? Por que? Como? In: Veritati, n. 4, p. 73- 80, 2004.

[9] BASSANEZI, Rodney Carlos. Modelagem matemática - um método científico de pesquisa ou uma estratégia de ensino e aprendizagem? In: BASSANEZI, Rodney Carlos. Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002. p. 15-41.

[10] BICUDO, Irineu. Demonstração em matemática. *Revista Bolema.* Rio Claro - SP: Bolema, v. 15, n. 18, set. 2002

[11] BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. *Modelagem matemática no ensino*. São Paulo: Contexto, 2000.

[12] BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. *Informática e educação matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

[13] BORGES, Carloman Carlos. *A matemática para todos*. (Org. Inácio S. Fadigas)Feira de Santana: Universidade Estadual de Feira de Santana, 2006. v.1:il.

[14] BRAGUIM, Ronaldo Antonio. *Abordagens metodológicas no ensino da matemática*: perímetros e áreas. Universidade Cruzeiro do Sul ? UNICSUL, São Paulo, 2006. Dissertação. 155 f. Mestrado no Ensino Profissional de Ciências e Matemática do Programa de Pós-Graduação, 2006.

[15] BRASIL. *Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura (2001)*. Disponível em: `http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf`. Acesso em: 13 abr. 2018.

[16] BRASIL. *Lei n. 9394 de 20 dezembro de 1996*. Estabelece as Diretrizes e Bases da Educação Nacional. 5. ed. Brasília: Câmara dos Deputados, Coordenação Edições Câmara, 2010.

[17] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais*: matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997. 142p.

[18] BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, 2018.

[19] CARDIM, P. A. G. *O professor como elo entre a escola e o estudante: como evitar a Evasão*. In: COLOMBO, Sonia Simões; RODRIGUES, Gabriel Mario (orgs.). Desafios da gestão universitária contemporânea. Porto Alegre, RS: Artmed, 2011.

[20] CHEVALLARD, Yves; BOSCH, Mariana; GASCÓN, Josep. *Estudar Matemáticas*: O elo perdido entre ensino e a aprendizagem. Trad. Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

[21] CHAGAS, Emiliano Augusto (coord.) et all. *Clubes de Matemática OBMEP*. Disponível em: `http://clubes.obmep.org.br`. Acessado em 03 de março de 2022.

[22] CHAGAS, Emiliano Augusto (coord.) et all. *Clubes de Matemática OBMEP: divisibilidade*. Disponível em: `http://clubes.obmep.org.br/blog/teoria-dos-numeros-um-pouco-sobre-divisibilidade-parte-2/`. Acessado em 03 de março de 2022.

[23] CHAGAS, Emiliano Augusto (coord.) et all. *Clubes de Matemática OBMEP: pares e ímpares*. Disponível em `http://clubes.obmep.org.br/blog/numeros-especiais-pares-e-impares/`. Acessado em 03 de março de 2022.

[24] CORREA, Thiago. *79 jogos e enigmas lógicos com resposta*: Jogos de lógica e inteligência para treinar o pensamento lógico, matemático e o pensamento lateral. Postado por Thiago Correa em CreateSpace, Ebook: 2017.

[25] D'AMBROSIO, Beatriz S. *Como ensinar matemática hoje?* (Coleção Temas e Debates). ano II. n. 2. SBEM: Brasília, 1989. p. 15-19

[26] D'AMBROSIO, Ubiratan. *Etnomatemática*: elo entre as tradições e a modernidade. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

[27] DOMINGUES, Hygino H. A Demonstração ao longo dos Séculos. *In: Boletim de Educação Matemática*, Rio Claro, SP: Bolema, 2002, ano 15, nº18, 55-67.

[28] EVES, Howard. *Introdução à história da Matemática*. trad. Hygino H. Domingues. 2ª ed. Campinas: Unicamp, 1997. (Coleção Repertório)

[29] FIORENTINI, Dario.*Alguns modos de ver e conceber o ensino de matemática no Brasil*. In: ZETETIKÉ. Campinas: UNICAMP, ano 3, n. 4, 1-36 p., 1995.

[30] FREIRE, Paulo. *Educação e mudança*. 11. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1986.

[31] FOMIN, Dmitri; GENKIN, sergey; ITENBERG, Ilia *Círculos Matemáticos. A Experiência Russa*. Trad. valéria de Magalhães Iório. Rio de Janeiro: IMPA, 2019. 362 p.

[32] FOSSA, John A.; GIRALDO, Victor (orgs). *História e tecnologia no Ensino da matemática*. v. 2. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2008.

[33] FREIRE, Paulo. *Pedagogia do Oprimido*. 17. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1997.

[34] GAMBOA, Silvio Sánchez. Quantidade-qualidade: para além de um dualismo técnico e de uma dicotomia epistemológica. In: SANTOS FILHO, José Camilo dos; GAMBOA, Silvio Sánchez (org.). *Pesquisa educacional*: quantidade-qualidade. São Paulo: Cortez, 1995. (Questões da nossa época, v. 42)

[35] GERSTING, Judith L.; FIALHO, Lúcio Leão; MARTINS FILHO, Manoel. *Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação*. 3ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 1995.

[36] Guimarães, Henrique M. *Concepções sobre a Matemática e a actividade matemática* (tese de doutorado). Lisboa: Universidade de Lisboa, 2003.

[37] HEFEZ, Abramo. *Aritmética*Rio de Janeiro: SBM, 2016. 298 p. (Coleção PROFMAT; 08)

[38] IFBA. *Problemas matemáticos do século XXI.* Disponível em http://www.ifba.edu.br/dca/Corpo_Docente/MAT/EJS/PROBLEMAS_MATEMATICOS_DO_SECULO_XXI.pdf. Acesso em 20/11/2021.

[39] JARANDILHA, Daniela; SPLENDORE, Leila. Matemática já não é problema. São Paulo: Cortez, 2005.

[40] KAMII, Constance; DECLARK, Georgia. *Reinventando a Aritmética*: implicações da teoria de Piaget. 9. ed. Campinas, SP: Papirus, 1994.

[41] LEGEY, Ana Paula;MÓL, Antônio Carlos de Abreu;BRANDÃO, Fernanda *Você sabe o que é uma sequência didática?*. Rio de Janeiro: UNICARIOCA, 2021. https://www.unicarioca.edu.br/acontece/noticias/voce-sabe-o-que-e-uma-sequencia-didatica. Acesso em: 20 de fevereiro de 2022.

[42] MACHADO, Sílvia; SANTOS, Leonor. A demonstração matemática no 8º ano no contexto de utilizção do GEOMETER'S SKETCHPAD. *In: Revista de Educação*, Vol. XVIII, nº 1, 2011. 49 - 82

[43] MARTINEZ, Fabio Brochero; et al. *Teoria dos números*: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro. 4 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2018. 500 p. (Coleção Projeto Euclides)

[44] MATHEUS, Aline dos Anjos; CÂNDIDO, Claúdia Cueva. *A Matemática e o desenvolvimento do raciocínio lógico.* Rio de Janeiro: SBM, 2013 https://rpm.org.br/rpm/img/conteudo/files/6_mc11.pdf. Acesso em: 17 de fevereiro de 2022.

[45] MIGUEL, Antônio; MIORIM, Maria Ângela. *História da matemática*: propostas e desafios. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

[46] MORAIS FILHO, Daniel Cordeiro de. *Um convite à matemática*: fundamentos lógicos com técnicas de demonstração, notas históricas e curiosidades. 3. ed. Campinas Grande: Fábrica de Ensino, 2010. Disponível em: https://docero.com.br/doc/5055c1. Acesso em: 18 jan. 2022.

[47] MOTA, Marcos C.; CARVALHO, Marcos Pavani de. Os diferentes tipos de demonstações:uma reflexão para os cursos de Licenciatura em Matemática. In: Revista da Educação Matemática da UFOP, Vol I, 2011 - XI Semana da Matemática e III Semana da Estatística, Minas Gerais: UFOP, 2011. Disponível em https://periodicos.ufop.br/redumat/issue/view/153,acesso em 19 de jan.de 2022.

[48] NIVEN, Ivan Morton. *Números Racionais e Irracionais*. Trad. Renate Watanabe. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984. 216 p.

[49] NOÉ, Marcos. *Raciocínio Lógico*. Disponível em https://educador.brasilescola.uol.com.br/estrategias-ensino/raciocinio-logico.htm Acessado em 20 de fevereiro de 2022.

[50] PAIVA. Joice N. *Questionário raciocínio lógico matemático*. Disponível em https://wordwall.net/pt/resource/15235452/racioc%C3%ADnio-l%C3%B3gico-matem%C3%A1tico. Acessado em 03 de junho de 2022.

[51] PATERLINI, Roberto Ribeiro. *Aritmética dos números*: um texto para licenciados e professores de Matemática. São Carlos: UFSCar, 2012.

[52] POTI, Polos olímpicos de Treinamento intensivo. *Paidade I*. Youtube, 25/03/2019. Disponível em https://www.youtube.com/watch?v=l0WdKdtRr9g. Acessado em 20 de fevereiro de 2022.

[53] POTI, Polos olímpicos de Treinamento intensivo. *Paidade II*. Youtube, 25/03/2019 https://www.youtube.com/watch?v=SvV8weEtXwM. Acessado em 21 de fevereiro de 2022.

[54] FORPROEX, Fórum de Pró-reitores de Extensão Universitária. *Política nacional de extensão*. Porto Alegre, RS: Gráfica da UFRGS, 2012.

[55] POLYA, George. *A arte de resolver problemas*: um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: Interciência, 1995. 196 p.

[56] PONTE, J. P., MATA-PEREIRA, J., and HENRIQUES, A. *O raciocínio matemático nos alunos do ensino básico e do ensino superior*. Praxis Educativa 7, 2 (2012), 355-377.

[57] POZO, Juan Ignacio(org.). *A solução de problemas*: aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

[58] RATIER, Rodrigo, ALMEIDA, Carla e VICHESSI, Beatriz. A lista de fixação ainda ajuda? In: *Revista Nova Escola*. Ed. 304. Rio de Janeiro: Abril, 2017.

[59] RIBENBOIM, Paulo. *Números primos*: Velho mistérios e novos recordes. 1 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. 328 p. (Coleção matemática universitária)

[60] SANTOS, Cristiano dos. Perspectivas metodológicas para o ensino de matemática: práticas na educação básica. in *Revista Educação e Ciências Sociais* (ISSN: 2595-9980), Salvador, v.3, n.4, 2020. p. 144-166

[61] SANTOS, Cristiano dos. *Blog Professor Cristino dos Santos*. Blogger, 2013. Disponível em: http://profcristianosantos.blogspot.com/.Acessado em 01 de março de 2022.

[62] SANTOS, Cristiano dos. *Jogo par e ímpar*. Disponível em: https://wordwall.net/pt/resource/28148265/pares-e-%c3%admpares. Acessado em 03 de junho de 2022.

[63] SANTOS, Lorranny Cruz. *Uma abordagem Histórica, demonstrativa e investigativa de tópicos de Matemática no Ensino Básico*. Dissertação de Mestrado PROFMAT. Brasília, 2019.

[64] SAVIANI, Dermeval. *Sobre a natureza e especificidade da educação*. In: SAVIANI, Dermeval. Pedagogia histórico-crítica: primeiras aproximações. 10. ed. rev. Campinas: Autores Associados, 2008. (Coleção educação contemporânea)

[65] SILVA, Marcilene Moreira dos Santos; SALES, Antônio. *O professor do ensino fundamental e a formação em Matemática*. V. 4, ed. 1, 4º Seminário Sul-Mato-Grossense de Educação Matemática. UFMS, 2010. Disponível em https://periodicos.ufms.br/index.php/sesemat/issue/view/249. Acessado em 18 de maio de 2022.

[66] SOARES, Luís Havelange et all. *Demonstrações matemáticas na Educação Básica*: com a palavra os professores de matemática. (Artigo) Ceará: Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (3ª SIPEMAT), 2012. p.13. Disponível em file:///C:/Users/Cristiano/Documents/MESTRADO/DISSERTA%C3%87%C3%83O/p%20Capes/ARTIGOFINAL.pdf. Acessado em 12 de julho de 2022.

[67] WEBER, Tamitsa Menezes, LOPES, Anemari Roesler Luersen Vieira. *Educação matemática escolar*: o fracasso do aluno ou do sistema? Curitiba: EDUCERE, 2013

[68] WIKIPEDIA. *Prova matemática* (Verbete). Disponível em https://pt.wikipedia.org/wiki/Prova_matem%C3%A1tica. Acessado em 20 de março de 2022.

[69] ZABALA, Antoni. *A prática educativa*: como ensinar. Porto Alegre, ArtMed, 1998.

Apêndice A

APÊNDICE A - CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE

Escola:	Trimestre:
Estudante:	
Professor(a):	
Disciplina:	Data:
Ano escolar/Turma:	

Critérios de Divisibilidade

Um inteiro qualquer diferente de zero, segui os seguintes critérios:

DIVISIBILIDADE POR 1
Todo número natural é divisível por 1.

DIVISIBILIDADE POR 2
Já vimos que os números divisíveis por 2 são: 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, ...
Observamos que:
Em todo número divisível por 2, o algarismo das unidades é 0, 2, 4, 6, 8(sempre par).

DIVISIBILIDADE POR 3
Um número natural é divisível por 3 quando a soma dos valores absolutos dos algarismos que o formam for divisível por 3.
Exemplos:
6 135 é divisível por 3, pois 6 + + 1 + 3 + 5 = 15 e 15 é divisível por 3.
700 não é divisível por 3, pois 7 + 0 + 0 = 7 e 7 não é divisível por 3.
Justificando: 542 é divisível por 3?
A divisibilidade de 542 por 3 vai depender da soma 5 + 4 + 2, que é 11 e não é divisível por 3. Logo, 542 também não é divisível por 3.

DIVISIBILIDADE POR 4
Os múltiplos de 4 são {0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, ..., 1**00**, 1**04**, 1**08**, 1**12**, 1**16**, 1**20**, 1**24**, 1**28**, ...
Em todo número divisível por 4, os algarismos das dezenas e das unidades juntos são um múltiplo de 4 ou termina em 00.
Exemplo:
4 1**24** é divisível por 4, pois 24 é divisível por 4.
7**00** é divisível por 4, pois termina em 00.
51**26** não é divisível por 4, pois 26 não divisível por 4.

DIVISIBILIDADE POR 5
Já vimos que os números divisíveis por 5 são: 0, 5, 10, 15, 20, 25, ...
Observamos que:
Em todo número divisível por 5, o algarismo das unidades é 0 ou 5.

DIVISIBILIDADE POR 6
Todo número divisível por 6, é também divisível por 2 e 3 ao mesmo tempo (ou é múltiplo de 3 par).

DIVISIBILIDADE POR 7
Um número é divisível por 7 se o dobro do último algarismo, subtraído do número sem o último algarismo, resultar um número divisível por 7. Se o número obtido ainda for grande, repete-se o processo até que se possa verificar a divisão por 7. Repete-se o processo com este último número.
Verifique a divisibilidade por 7 do número 7203"

7203
Último algarismo: **3**
Multiplicar o último algarismo por 2: 2 x **3** = **6**
subtrair este resultado pelo número inicial sem seu último algarismo: 720 - **6** = 714
Repetir o processo: número atual; 714
Últtimo algarismo: **4**
Multiplicar o último algarismo por 2: 2 x **4** = **8**
Subtrair: 71 - **8** = 63

DIVISIBILIDADE POR 8
Os múltiplos de 8 são {0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, ..., **100**, **108**, **116**, **124**, ...,1 **000**, 1 **008**, 1**016**, 1 **024**, 1 **032**, ... , 1 **368,** 1 **376**, ...
Observamos que:
Em todo número divisível por 8, os algarismo das centenas, dezenas e das unidades juntos são um múltiplo de 8 ou termina em 000.
Exemplo:
5 **240** é divisível por 8, pois 240 é divisível por 8.
9 **000** é divisível por 8, pois termina em 000.
5 **111** não é divisível por 8, pois 111 não divisível por 8.

DIVISIBILIDADE POR 9
Analogamente ao que fizemos para a divisibilidade por 3, podemos mostrar que:
Um número natural é divisível por 9 quando a soma dos valores absolutos dos algarismos que o formam for divisível por 9.

DIVISIBILIDADE POR 10
Em todo número divisível por 10, o algarismo das unidades é 0.

DIVISIBILIDADE POR 100
Um número natural será divisível por 100, o algarismo das unidades é 00.

DIVISIBILIDADE POR 1.000
Um número natural será divisível por 1.000, quando terminar em 000.

DIVISIBILIDADE POR 11
Para todo número natural divisível por 11, a soma dos algarismos de ordem ímpar menos a soma dos algarismos de ordem par for um número divisível por 11.
Exemplo: **72.897**
72.897 [fazemos (7+8+7) - (2+9) = 22 – 11 = 11]

DIVISIBILIDADE POR 12
Se o número natural é divisível por 12, ele será divisível simultaneamente por 3 e 4.
Exemplo: **11.580**

DIVISIBILIDADE POR 13
Qualquer número natural divisível por 13, podemos retirar o último algarismo da direita, em seguida adiciona-se ao número que restou o quádruplo do algarismo retirado. Essa soma tem que ser divisível por 13.
Exemplo: **11.661**; Obs.: Não sendo notável a soma, pode-se seguir várias vezes o mesmo processo.

DIVISIBILIDADE POR 14
Um número natural será divisível por 14, se for divisível simultaneamente por 2 e 7.
Exemplo: **3.612**

DIVISIBILIDADE POR 15
Um número natural será divisível por 15, se for divisível simultaneamente por 3 e 5.
Exemplo: **13.455**

DIVISIBILIDADE POR 21
Um número natural será divisível por 21, se for divisível simultaneamente por 3 e 7.
Exemplo: **16.548**

DIVISIBILIDADE POR 22
Se ao mesmo tempo for divisível por 2 e 11.
Exemplo: **19.536**

DIVISIBILIDADE POR 25
Um número natural será divisível por 25, quando terminar 00, 25, 50 ou 75.
Exemplo: **121.345.725**.