UNIVERSIDADE ESTADUAL DO MARANHÃO - UEMA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO - PPG
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

LUIS RICARDO JOSINO SOARES

O USO DA HOMOTETIA NO ENSINO DE FENÔMENOS ÓPTICOS

São Luís
2022

LUIS RICARDO JOSINO SOARES

O USO DA HOMOTETIA NO ENSINO DE FENÔMENOS ÓPTICOS

Dissertação apresentada à Universidade Estadual do Maranhão, no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientação: Professora Dra. Celina Amélia da Silva

São Luís
2022

Soares, Luís Ricardo Josino.
O uso da homotetia no ensino de fenômenos ópticos / Luís Ricardo Josino Soares. – São Luís, 2022
62 f

Dissertação (Mestrado Profissional) – Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Universidade Estadual do Maranhão, 2022.

Orientadora: Profa. Dra. Celina Amélia da Silva.

1.Homotetia. 2.Geometria. 3.Ensino. I.Título.

CDU: 51-7:[37:535]

Elaborado por Giselle Frazão Tavares - CRB 13/665

LUIS RICARDO JOSINO SOARES

O USO DA HOMOTETIA NO ENSINO DE FENÔMENOS ÓPTICOS

Dissertação apresentada à Universidade Estadual do Maranhão, no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 31 de maio de 2022

BANCA EXAMINADORA

Celina Amélia da Silva

Dra. Celina Amélia da Silva (Orientadora)
Universidade Estadual do Maranhão

Sergio Noleto Turibus

Dr. Sérgio Noleto Turibus (Avaliador Interno)
Universidade Estadual do Maranhão

Ediomar Costa Serra

Dr. Ediomar Costa Serra (Avaliador Externo)
CESC / Universidade Estadual do Maranhão

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar, a Deus, pois foi nele que busquei força e inspiração para concluir este curso. Pelo momento turbulento após a pandemia que iniciou no ano de 2020, tudo se tornou mais difícil.

Aos meus pais João Bosco Xavier Soares e Josimeuba Josino Soares, que sempre me incentivaram a estudar, me ensinando o caminho correto de seguir a vida, pelo exemplo de moral honestidade, que ajudaram a construir minha personalidade.

Agradecimento especial à minha esposa Sandra Fernandes da Silva e aos meus filhos Gabriel Fernandes Josino e João Pedro Fernandes Josino, que me apoiam incondicionalmente e me dão motivação para nunca desistir, a buscar sempre o melhor de mim. Por eles busco fazer o que é certo, pois espero servir de exemplo. Procuro me superar para nunca os decepcionar.

Aos meus irmãos Aline Josino Soares, João Luis Josino Soares e Denise Josino Soares, por sermos unidos até hoje, compartilhando momentos de amor, raiva, alegria, tristeza, medo e surpresas.

À minha sogra Hilda Fernandes da Silva, que é minha segunda mãe, por todo apoio prestado. Pela paciência, confiança, consideração e dedicação.

Durante o período de mestrado tive muitos coordenadores e diretores, dos quais sou muito grato, pois todos me apoiaram. Graça Santana, Zila Maria, Mauricea Patriota, Tereza Cristina, Lucinete, Helenilde, Amanda Barbosa, Edna Santos, Arlete Sandra, Ricardo Sérgio, Rita de Cássia, Acádio Lima. Todos, além de motivar, dedicaram tempo ou recursos para o meu desenvolvimento.

Agradeço imensamente aos meus amigos do mestrado. É uma turma que trocou muito conhecimento, principalmente nos nossos intervalos. Aprendi muita matemática com todos. Sou eternamente grato por isso.

A todos os professores da Universidade Estadual do Maranhão, que ajudaram a evoluir neste curso. Foram muito importantes na minha vida acadêmica. Em especial, agradeço a professora Celina, pela confiança e incentivo, sem sua motivação este trabalho não teria sido concluído.

“A Matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o Universo.”

(Galileu Galilei)

“As leis da natureza nada mais são que pensamentos matemáticos de Deus.”

(Johannes Kepler)

“Entre dois espíritos iguais, postos nas mesmas condições, aquele que sabe geometria é superior ao outro e adquire um vigor especial.”

(Blaise Pascal)

RESUMO

O Ensino de Matemática e Física requer do professor conhecimento científico e uma boa didática, com alternativas para despertar interesse no aprendizado. A Geometria é de grande utilidade neste sentido, já que possui diversas aplicações na vida do aluno. Este trabalho tem como objetivo geral ajudar os alunos do ensino médio a compreender os fenômenos ópticos de reflexão e refração através da homotetia. Os objetivos específicos são investigar como ocorrem as práticas de ensino dos fenômenos ópticos, utilizar a homotetia para o estudo da propagação da luz, propor o uso de aplicativo de geometria para o ensino de fenômenos ópticos, discutir as aplicações de óptica no cotidiano. Para isto, foi realizado levantamento em livros de Matemática sobre a abordagem sobre homotetia e em livros de física sobre como é sugerido o ensino de óptica geométrica. Em seguida, foi realizado pesquisa com professores das duas disciplinas sobre o ensino de homotetia e óptica geométrica. Podemos concluir que a maioria dos professores não ensina homotetia, parte por não conhecer e outra por não ser um assunto abordado na maioria dos livros didáticos. Na formação inicial, a maioria dos professores não estudaram o assunto. A pesquisa com os alunos relaciona o interesse dos discentes por Matemática e Física, a familiaridade destes com os assuntos propostos e a sua visão em relação a situações cotidianas. A maioria relatou dificuldade com o assunto. O aluno teve contato com uma breve explicação de cinco minutos sobre o que é homotetia e foi convidado a responder três questões. A maioria conseguiu acertar pelo menos duas questões, apesar da dificuldade inicial.

Palavras-chave: Homotetia. Geometria. Ensino.

ABSTRACT

The learning of mathematics and physics requires from the teacher scientific knowledge and good didactics, with alternatives to arouse interest in learning. Geometry is very useful in this sense, since it has several applications in the student's life. This work has the general objective of basic education students to understand the optical phenomena of reflection and refraction through homothety. The specific objectives are investigated as teaching practices of optical phenomena, used for the study of the geometry of light, the teaching of optical phenomena, defined as applications of optics in everyday life. A survey was carried out in mathematics books on a mathematics book on a physics book as the teaching of optics on geometry is suggested. Then, a survey was carried out with teachers of both subjects on the teaching of homothety and geometric optics. because it is not possible for most teachers to know and most books not to know. In initial training, most teachers do not study the subject. Relational research with students: the student's interest in mathematics and physics, familiarity with proponents, and their view of everyday situations. The biggest possibility with the subject. The student had contact with a brief five-minute explanation about what homothetia is and was invited to answer three questions. Most managed to get at least two questions right, despite the initial difficulty.

Key-words: Homothety. Geometry. Education.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Geometria é uma parte importante do currículo de Matemática, pois permite ao aluno compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. As noções geométricas contribuem para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula o aluno a perceber semelhanças e diferenças e identificar regularidades. De acordo com Maciel (2004), o estudo das transformações geométricas (isometrias, homotetias), visam no aluno o desenvolvimento de habilidades de percepção espacial.

Carneiro (2015) diz que dados um ponto O e um número real k, chama-se homotetia de centro O e razão k a transformação geométrica no plano que faz corresponder a cada ponto P um ponto P' tal que $\overline{\mathrm{OP}}' = \mathrm{k}.\overline{\mathrm{OP}}$. Definindo em outras palavras, a homotetia é uma transformação geométrica que multiplica por um fator constante a distância de um ponto qualquer do espaço a um ponto fixo, deslocando-o sobre a reta definida por estes dois pontos. Assim, é possível conseguir ampliação ou redução de imagens.

Ramalho, Nicolau e Toledo (2017) destacam que certos fenômenos luminosos podem ser estudados sem que se conheça previamente a natureza da luz, bastando conhecer a noção de raio de luz, alguns princípios fundamentais e considerações de Geometria. A óptica é a parte da Física que estuda a luz e os fenômenos luminosos associados. Seu estudo pode ser dividido em duas partes: óptica geométrica e óptica ondulatória. Para Young e Freedman (2016), a primeira estuda o comportamento da luz e a sua propagação em diferentes meios, fundamentadas pela reflexão e refração. A segunda estuda fenômenos ligados à natureza ondulatória da luz como emissão, absorção, polarização, difração, interferência, dispersão, entre outros.

Esta pesquisa aborda o conteúdo de óptica geométrica, partindo de um estudo histórico até os fundamentos que são aceitos atualmente a respeito dos fenômenos luminosos de reflexão e refração, aprofundando-se na aplicação da homotetia. Dessa forma, busca-se, por meio dos princípios físicos e análises geométricas, melhorar a percepção dos alunos sobre o assunto. Como ferramenta complementar, será utilizado o aplicativo de desenhos geométricos para computador, com versões também para dispositivos móveis GeoGebra.

Sabendo que os fenômenos luminosos estão presentes em situações cotidianas e conhecendo a dificuldade de muitos alunos em compreender a Física e a

Matemática ensinadas na escola, procuramos analisar como os professores podem ajudar o aluno a compreender os fenômenos associados à óptica geométrica.

Ao levar para sala de aula situações cotidianas sobre os fenômenos luminosos e induzindo o aluno a pensar matematicamente sobre o assunto, o professor faz com que ele deixe de ser um simples receptor de informações, tornando-o protagonista no processo de aprendizagem, capaz analisar e tirar suas próprias conclusões a respeito destas situações.

O reforço dos conceitos básicos da geometria como ângulo, reta, segmento, semelhança de triângulos, associados ao uso da homotetia, ajuda o aluno a conseguir compreender os fenômenos associados à luz. Além disso, ele se sente mais motivado ao utilizarmos recursos complementares como simuladores e aplicativos.

O objetivo geral deste trabalho é ajudar os alunos do ensino médio a compreender os fenômenos ópticos de reflexão e refração através da homotetia. Os objetivos específicos são investigar como ocorrem as práticas de ensino dos fenômenos ópticos, utilizar a homotetia para o estudo da propagação da luz, propor o uso de aplicativo de geometria para o ensino de fenômenos ópticos, discutir as aplicações de óptica no cotidiano.

O professor enfrenta muitos desafios em sala de aula, sendo que um deles é conseguir manter o interesse e a motivação do aluno pelo conteúdo. A maioria dos estudantes não apresentam interesse pelas matérias exatas, o que leva a vários problemas no ensino. Isto se torna ainda mais difícil para os professores de matemática e física. Portanto, é necessário um esforço maior para conseguir a atenção do aluno, tornando o conteúdo mais atrativo. Uma das formas de conseguir alcançar isso é associando o conteúdo a situações que façam parte da rotina do aluno. Assim, o estudante consegue entender vários fenômenos que ocorrem no dia a dia a partir dos conceitos físicos e com o uso da interpretação matemática sobre estes fenômenos.

O estudo da óptica geométrica é muito importante, pois é um conteúdo muito cobrado em exames de seleção. Também envolve a interdisciplinaridade entre a Matemática e a Física e tem diversas aplicações no cotidiano. Por exemplo, a correção de defeitos de visão através de cirurgia ou o uso de lentes ou óculos para amenizar estes defeitos. Gaspar (2013) destaca os defeitos de visão miopia (alongamento do olho em relação ao comprimento normal) e hipermetropia (encurtamento do olho em relação ao comprimento normal).

O uso de fibra óptica, instrumentos ópticos, lanternas, farol veicular, refletores, espelhos, são mais exemplos de aplicações presentes no dia a dia. Gaspar (2013) destaca instrumentos ópticos de aumento (lupa, microscópio, luneta e telescópio refletor) e projeção (retroprojetor, projetor multimídia e projetor de cinema 3D).

Esta é uma pesquisa importante para a compreensão dos fenômenos ópticos através da aplicação da homotetia. Com ela, espera-se melhorar a integração entre as disciplinas de Matemática e Física e, assim, melhorar o processo de ensino e aprendizagem de óptica geométrica com os alunos do ensino médio. Esperamos também que, com uma abordagem do conteúdo a partir de figuras geométricas, e com o uso de aplicativo, mostrando a relação do conteúdo com aplicações no cotidiano, os alunos possam melhorar suas percepções acerca do conteúdo, aumentando também a sua motivação ao estudo de Matemática e Física.

2 ÓPTICA GEOMÉTRICA

Energia eletromagnética radiante, a luz é o agente físico que, atuando no sistema ocular, permite que os objetos sejam visíveis. Ramalho, Nicolau e Toledo (2017) admitem que, atualmente, considera-se que a luz apresenta dupla natureza: ondulatória e corpuscular, comportando-se como onda eletromagnética ou como fluxo de partículas. Young e Freedman (2016) nos mostram que o estudo da óptica foi dividido em duas partes: óptica física (natureza ondulatória) e óptica geométrica (natureza corpuscular).

Esse estudo está direcionado a aplicação de um tipo de transformação geométrica, que é conhecida como homotetia, no ensino dos fenômenos da propagação da luz: a reflexão e a refração. Logo, só iremos trabalhar com os princípios da óptica geométrica e seus fenômenos.

Teixeira (2015) define óptica geométrica como parte da Física responsável pelo estudo da luz e dos fenômenos associados a ela, considerando que sua propagação ocorre por meio de raios de luz.

Através do estudo da óptica geométrica, podemos compreender vários fenômenos físicos. Bôas (2018), mostra alguns destes como a visão, formação de imagem em espelhos planos e esféricos, uso de lentes, instrumentos ópticos, leitura óptica, sensores ópticos, prismas, formação de sombra, penumbra e eclipse.

Buscando atrair o interesse do aluno, é importante que ele perceba que o conteúdo estudado explica muitos fenômenos vivenciados por ele. Para Libâneo (1990), os conhecimentos sistematizados devem ser confrontados com as experiências socioculturais e a vida concreta dos alunos, para melhor solidez na assimilação dos conteúdos.

Libâneo (1990), também afirma que os alunos se empenham quando percebem a necessidade e a importância do estudo, quando sentem que estão progredindo, quando as tarefas escolares lhes dão satisfação.

2.1 Histórico do estudo sobre óptica geométrica

Desde a antiguidade já eram observados alguns fenômenos luminosos e há muitos estudos a respeito. A figura 1 mostra um espelho de bronze polido, feito no Egito entre 1539-1292 a.C.

Figura 1: Esquema dos meios de propagação

Fonte: Gaspar, 2013

Em abordagem histórica, Pietrocola (2016, p. 189) relata que o filósofo grego Leucipo de Mileto, 480-420 a.C., acreditava que nossa visão se dava devido a pequenas partículas chamadas de eidola, que eram emitidas pelos objetos e atingiam nossos olhos. Empédocles, 490-430 a.C, acreditava que podemos enxergar devido a feixes visuais emitidos pelo olho em interação com os objetos. Mas, as mais significativas práticas teóricas e experimentais foram realizadas a partir do início do século XVII.

> Já na Antiguidade, era sabido que a luz se refletia ao encontrar superfícies polidas, que alguns objetos são atravessados pela luz e outros não, que os objetos opacos projetavam sombras, que alguns corpos possuíam luz própria (corpos luminosos), enquanto outros só podiam ser vistos quando sobre eles incidissem luz. A propagação da luz era retilínea. Sabia-se, igualmente, da refração da luz, mas a formação de imagens por lentes era bastante precária para permitir avanços significativos nessa área. (ROSA, 2012, p. 160)

Segundo Rosa (2012, p. 161), em 1601, Thomas Harriot teria descoberto a lei do seno da refração da luz, mas não publicou seus trabalhos. Em 1604, Johannes Kepler publicou seu livro sobre óptica, dando a primeira explicação sobre o funcionamento do olho humano. Em 1609, Galileu Galilei apresentou o primeiro telescópio. Em 1611, Kepler publicou sua obra sobre a refração.

Durante o século XVII vários outros cientistas publicaram obras a respeito de estudos sobre óptica, como Willebrord Snell, Christiaan Huygens, Isaac Voss, Francesco Maria Grimaldi, Erasmus Bartholin e Isaac Newton. Este último publicou em 1704 sua famosa obra *Opticks*, onde descreve sua teoria sobre a natureza corpuscular da luz. A quarta e última edição desta obra foi publicada em 1730.

Ainda no final do século XVII, Huygens publicou sobre a teoria ondulatória. Mas, durante o século XVIII, predominou a teoria corpuscular da luz, criada por Newton. A descoberta da “onda eletromagnética” por James Clerk Maxwell, em 1864, teve influência na aceitação da teoria ondulatória.

Para Helerbrock (2009), a dualidade onda-partícula passou a ser questionada depois que os experimentos do físico Heinrich Hertz, em 1886, referentes ao efeito fotoelétrico entraram em contradição com aquilo que era esperado para o comportamento da luz.

Em 1905, o cientista Albert Einstein explica o efeito fotoelétrico, mostrando que que a luz tinha o comportamento quantizado. Anos antes essa ideia havia sido aplicada à radiação térmica pelo físico alemão Max Planck, na explicação do fenômeno da emissão de corpo negro. Após as teorias de Planck e Einstein, foi revisado esta concepção e, atualmente, acredita-se na natureza dual da luz, onde a mesma se propaga como onda eletromagnética e é emitida ou absorvida como partícula.

Helerbrock (2009) também informa que, em 1923, Louis De Broglie sugeriu que as partículas também fossem capazes de se comportar como ondas, ideia confirmada em 1928 pelo experimento de Davisson-Germer.

2.2 A luz

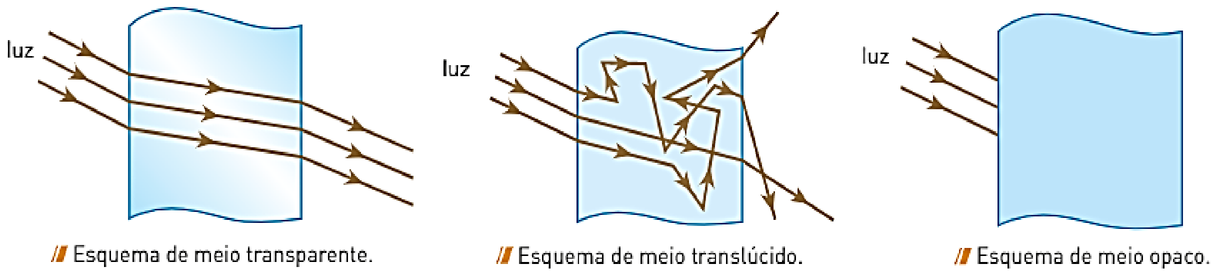
Conforme Gaspar (2013, p.71), a luz, é um conceito humano dado à forma como o nosso cérebro interpreta os sinais recebidos da retina, quando nela incidem radiações eletromagnéticas de determinada faixa de frequências.

Young e Freedman (2016) definem a luz como um tipo de onda eletromagnética visível, de natureza ondulatória e corpuscular, que possuem como fontes fundamentais cargas aceleradas.

Para Gaspar (2013), os meios de propagação são classificados em transparentes, translúcidos e opacos. No primeiro, a luz atravessa descrevendo trajetórias regulares e bem definidas. No segundo, descreve trajetórias irregulares. Enquanto no último a luz não se propaga.

A velocidade de propagação da luz varia de acordo com o meio de propagação. De acordo com Bôas (2018), o vácuo é o único meio considerado absolutamente transparente, nele essa velocidade é de 3.10^8 m/s. A figura 2 mostra esquemas que utilizam desenhos geométricos, representando cada um desses meios, para facilitar a compreensão sobre os meios de propagação.

Figura 2: Esquema dos meios de propagação



Fonte: Bôas, 2018

2.3 Princípios da Óptica Geométrica

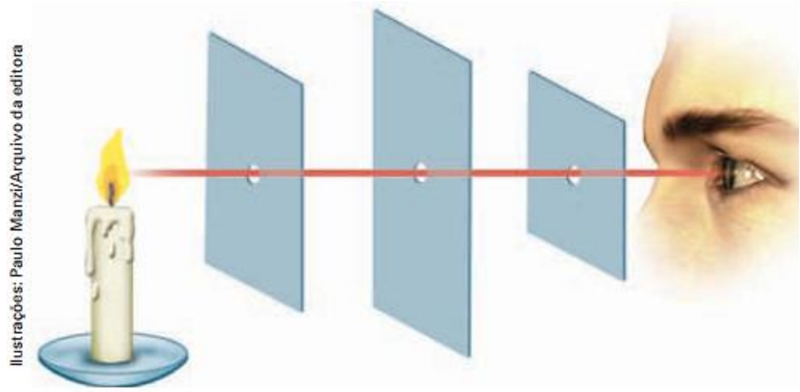
São três os princípios que fundamentam a óptica geométrica, para explicar o traçado dos raios de luz.

2.3.1 Princípio da propagação retilínea

Em meios transparentes e homogêneos a luz se propaga em linha reta.

A figura 3 mostra um exemplo em que a luz atravessa os anteparos e chega ao olho humano. Para que isto ocorra, é necessário que todos os orifícios estejam na mesma reta.

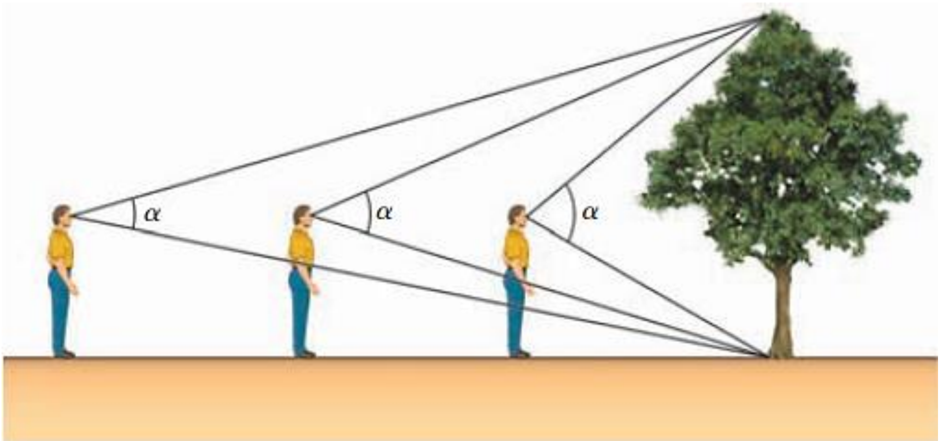
Figura 3: Propagação retilínea da luz



Fonte: Gaspar, 2013

Uma outra evidência do princípio da propagação retilínea é o ângulo visual, representado na figura 4 por α. Gaspar (2013) define ângulo visual como o ângulo segundo o qual um objeto é visto em relação a um ponto (observador). Esse princípio explica a sensação de vermos um objeto aumentar o tamanho à medida que nos aproximamos. Quanto maior o ângulo, maior o objeto parece para o observador.

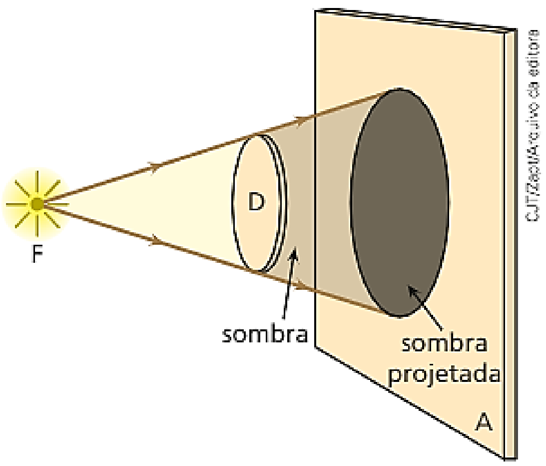
Figura 4: Ângulo visual



Fonte: Gaspar, 2013

Bôas (2018) diz que a explicação dos eclipses está relacionada ao fato de a luz propagar-se em linha reta. No eclipse solar a lua fica posicionada entre o planeta Terra e o sol, ocultando sua luz total ou parcialmente em uma faixa da superfície terrestre. A figura 5 mostra uma situação em que, a partir de uma fonte de energia puntiforme F, é projetado a sombra do objeto D em uma superfície A.

Figura 5: Sombra



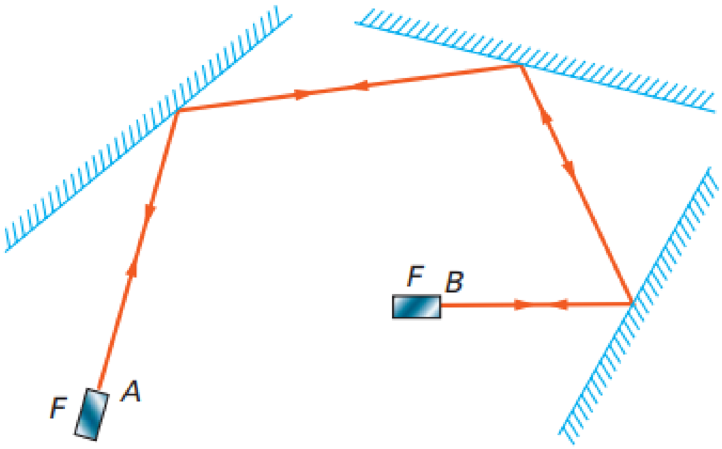
Fonte: Bôas, 2018

2.3.2 Princípio da reversibilidade

A trajetória dos raios não depende do sentido da propagação.

A figura 6 simula uma situação em que vemos as fontes luminosas A e B. Neste exemplo, em qualquer fonte utilizada, a trajetória dos raios de luz será a mesma, não importando o sentido.

Figura 6: Princípio da reversibilidade da luz



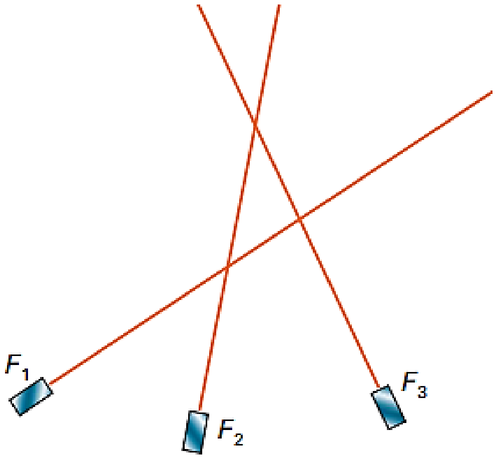
Fonte: Gaspar, 2013.

2.3.3 Princípio da independência dos raios de luz

A propagação de raios luminosos não é perturbada pela propagação de outros, ou seja, cada raio de luz se propaga independente dos demais.

Este princípio está representado na figura 7.

Figura 7: Princípio da independência dos raios de luz



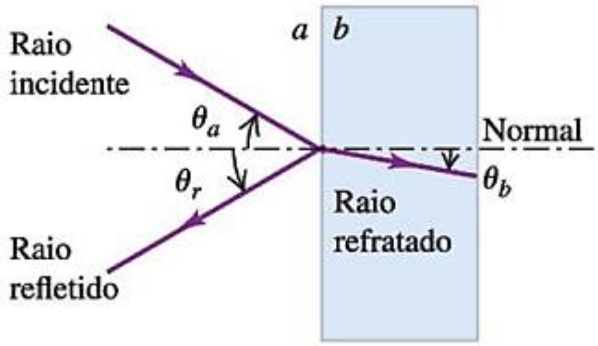
Fonte: Gaspar, 2013.

2.4 Fenômenos Físicos na Óptica Geométrica

Já vimos que a óptica geométrica estuda os fenômenos físicos decorrentes da trajetória da luz em sua propagação. Tais fenômenos são conhecidos como reflexão e refração.

Antes de mostrar os conceitos, verifiquemos a figura 8. Esta ilustra a reflexão e a refração que podem ocorrer com raios de luz, ao incidir de um meio a para um meio b.

Figura 8: Raios refletido e refratado



Fonte: Young e Freedman, 2016

2.4.1 Reflexão

É o fenômeno no qual a luz volta a se propagar no meio de origem, após incidir na superfície que separa este com outro meio.

Ferraro (2012, p. 357) mostra duas leis da reflexão. A primeira lei diz que o raio incidente, a reta normal e o raio refletido estão contidos no mesmo plano. A segunda lei diz que o ângulo de incidência do raio luminoso é igual ao ângulo de reflexão do mesmo. De acordo com esta lei, na figura 8, os ângulos θ_a e θ_r são iguais.

Os espelhos planos e esféricos são assuntos muito abordados, utilizando os princípios da óptica geométrica para a formação desenhos geométricos.

2.4.2 Refração

Ocorre quando a luz atravessa a superfície de separação de meios em que a velocidade de propagação da onda é diferente. Neste caso, ocorre o desvio na trajetória dos raios luminosos.

É definido como índice de refração (*n*), a razão entre a velocidade da luz no vácuo e a velocidade da luz no meio considerado.

$$n = \frac{c}{v} \quad \text{(Equação 1)}$$

Bôas (2018, p. 499) mostra as duas leis da refração. A primeira lei diz que o raio incidente, a reta normal no ponto de incidência e o raio refratado estão contidos no mesmo plano. A segunda lei é conhecida como lei de Snell diz que o seno do ângulo de incidência é diretamente proporcional ao ângulo de refração. A mesma pode ser representada abaixo:

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_a}{v_a} = \frac{\operatorname{sen}\theta_b}{v_b}$$

Utilizando a equação 1 para substituir os valores v_a e v_b, temos:

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_a}{\frac{c}{n_a}} = \frac{\operatorname{sen}\theta_b}{\frac{c}{n_b}}$$

Logo, chegamos à equação 2:

$$n_a . \operatorname{sen}\theta_a = n_b . \operatorname{sen}\theta_b \quad \text{(Equação 2)}$$

De acordo com a lei de Snell, descrita na equação 2, se a luz passa de um meio para outro em que o índice de refração é igual, não ocorre desvio em sua trajetória. Se os índices de refração são diferentes, então ocorre desvio.

3 GEOMETRIA

A geometria é uma área da matemática que estuda as formas geométricas, preocupando-se com comprimento, área, volume, posição. A palavra corresponde a união dos termos “geo” (terra) e “metron” (medir). É dividida em três categorias: geometria analítica, geometria plana e geometria espacial. A geometria já era utilizada para medições de terrenos e projeções de pirâmides, por exemplo. Apesar disso, o matemático Euclides, que viveu por volta de 300 a.C., ficou conhecido como o pai da geometria, devido às grandes contribuições ao estudo deste ramo da matemática. Antes de falar sobre homotetia, iremos apresentar o conteúdo visto na educação básica sobre proporcionalidade.

3.1 Elementos da semelhança

Para iniciarmos o conteúdo, é importante saber que a ideia de semelhança na matemática não se resume a uma simples conferência visual para verificar se dois ou mais objetos tem formas parecidas.

> A palavra semelhança é de uso cotidiano e para muitos expressa a ideia de objetos parecidos, cujo critério seja apenas o aspecto visual. Já na Matemática, o conceito de semelhança é bem definido através de propriedades e características específicas, sem deixar margens a dúvidas ou falsos conceitos. (CARNEIRO, 2015, p.50)

Para Andrini (2012), duas figuras são semelhantes quando todos os comprimentos de uma delas são iguais aos da outra, multiplicados por um número constante. Se há ângulos, os ângulos correspondentes de duas figuras semelhantes devem ser congruentes.

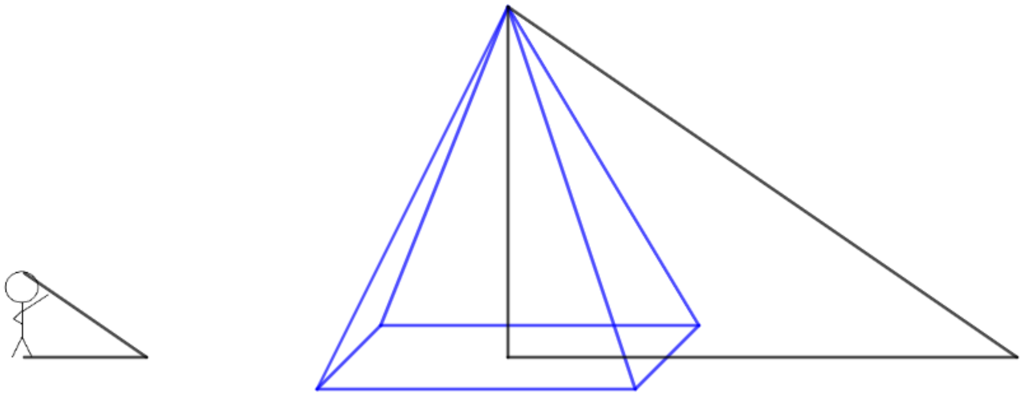
3.1.1 Proporcionalidade de segmentos

O conceito de proporcionalidade é muito abordado no ensino básico desde as séries finais do ensino fundamental até o ensino médio, com usos diversificados na matemática, física, química, geografia e de várias aplicações no cotidiano.

Além da geometria, a proporcionalidade pode ser utilizada, em outras áreas da matemática, como porcentagem, juros simples e função afim. Na física, é usado em escalas termométricas, em movimento retilíneo uniforme. Em química, nos cálculos estequiométricos. Na geografia, ao trabalhar com densidade demográfica ou escalas em mapas cartográficos. No cotidiano, usamos em aplicações como na compra de produtos ou comparação de preços, dosagem de medicação, tempo para chegar ao destino usando a velocidade e a distância. Estes são apenas alguns exemplos.

No contexto histórico, de acordo com Da Silva Júnior (2020), por volta de 600 a.C., Tales de Mileto foi convidado a medir a altura da pirâmide de Quéops e conseguiu por meio do comprimento de sua sombra, usando a ideia de proporcionalidade entre segmentos de reta. A figura 9 é uma representação disso.

Figura 9: Tales mede a altura da pirâmide de Quéops



Fonte: Próprio autor

A razão entre dois segmentos é a divisão entre os números que expressam suas medidas, tomadas na mesma unidade. Já a proporção, é a igualdade entre razões.

Da Silva Júnior (2020) define da seguinte forma: $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$ são, nesta ordem, proporcionais se, e somente se,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{GH}}$$

Ao considerar que os segmentos de medidas a, b, c, d são proporcionais, para os cálculos, podemos usar a propriedade fundamental da proporção:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a.d = b.c$$

Também podemos usar a propriedade da soma ou diferença dos termos de uma proporção:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$$

Ou,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{c}$$

3.1.2 Teorema de Tales

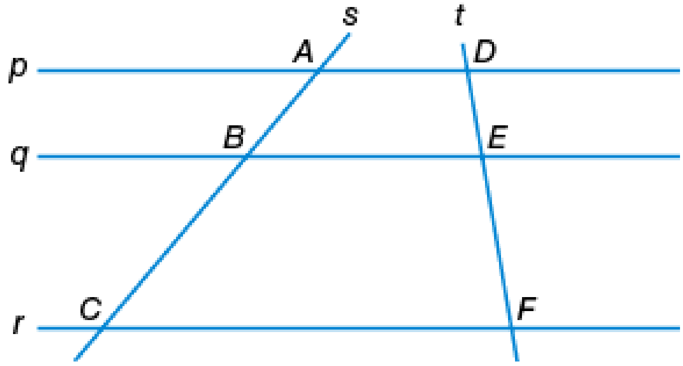
Tales de Mileto viveu de 624 a.C. até 548 a.C. Conforme Paiva (2015), ele é considerado o primeiro filósofo grego e o primeiro pensador da história a quem se atribuem descobertas matemáticas específicas, embora antes a humanidade já tivesse acumulado conhecimento matemático.

Um dos teoremas associados ao nome deste cientista, o famoso teorema de Tales, é usado no cálculo de distâncias inacessíveis e nas relações de semelhança de triângulos. Por exemplo, nas cidades percebemos várias ruas organizadas de forma paralela, enquanto outras ruas transversais a estas nem sempre são paralelas. É possível medir o comprimento de um quarteirão a partir de medidas de proporcionalidade. Geometricamente, definimos isto como feixe de retas paralelas intersectado por retas transversais.

Na definição do teorema de Tales, Iezzi et at. (2018) diz que, se duas retas são transversais a um feixe de retas paralelas, então a razão entre as medidas de dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre as medidas dos segmentos correspondentes da outra.

A figura 10 ilustra uma situação em que consideramos três retas paralelas p, q, r, passando por essas retas duas transversais s, t.

Figura 10: Teorema de Tales usado para 3 retas paralelas e 2 transversais



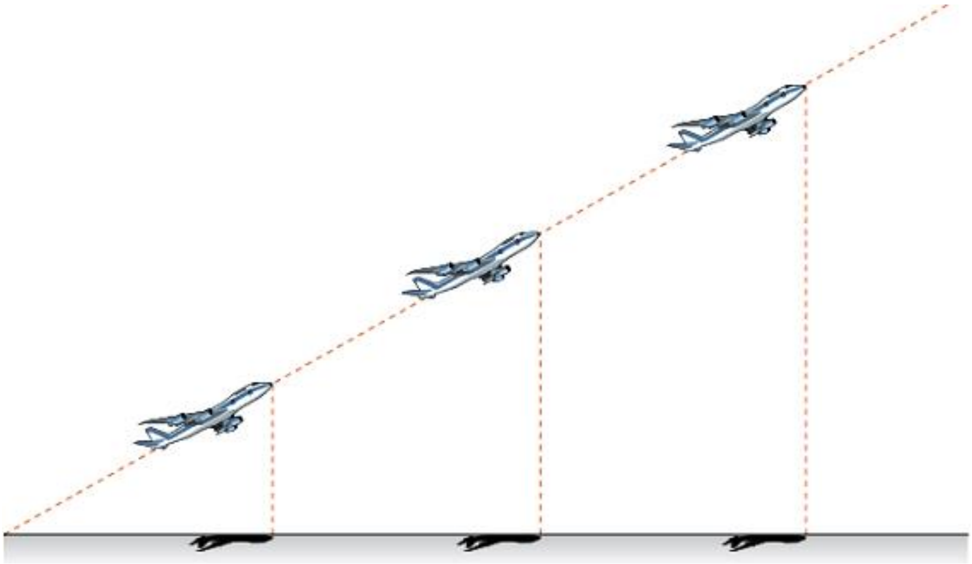
Fonte: Paiva, 2015

De acordo com o teorema, temos a seguinte razão entre os segmentos da reta transversal:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}$$

Paiva (2015) utiliza como exemplo um avião que, se decolar em linha reta, projeta uma sombra sobre a pista. É intuitivo perceber que existe proporcionalidade entre a distância percorrida pelo avião e a distância percorrida pela sombra. A figura 11 ilustra essa situação.

Figura 11: Teorema de Tales (exemplo do avião decolando)



Fonte: Paiva, 2015

No livro de matemática do 9° ano, Andrini (2012) lista duas propriedades para o teorema de Tales:

- Se um feixe de paralelas determina segmentos congruentes sobre uma transversal, então determina segmentos congruentes sobre qualquer outra transversal;
- Um feixe de paralelas determina, sobre transversais, segmentos que são proporcionais.

3.1.3 Semelhança de polígonos

Na Matemática, duas figuras são consideradas semelhantes quando têm a mesma forma, podendo ter tamanhos diferentes, de modo que uma delas é a ampliação ou a redução da outra (DA SILVA JÚNIOR, 2021, p. 95).

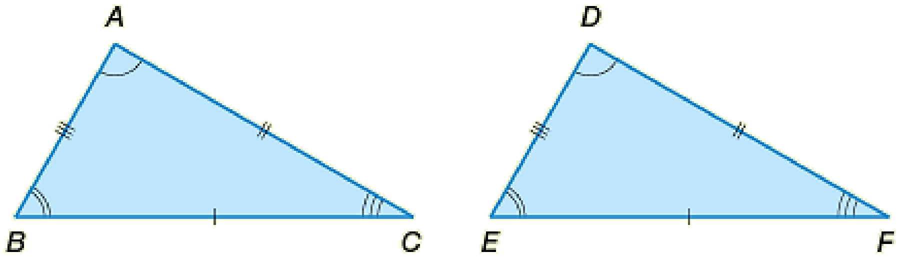
Quando falamos de polígonos, para considerá-los semelhantes, basta verificar se os ângulos correspondentes são congruentes e os lados são proporcionais. Usamos o símbolo ~ para indicar semelhança.

3.1.4 Semelhança de triângulos

Paiva (2015) diz que dois triângulos são semelhantes se, e somente se, existe uma correspondência biunívoca que associa os três vértices de um triângulo aos três vértices de outro, tal que:

- Ângulos com vértices correspondentes são congruentes
- Lados opostos a vértices correspondentes são semelhantes

Figura 12: Semelhança de triângulos



Fonte: Paiva, 2015

Ou seja,

$$\Delta ABC \cong \Delta DEF \iff \begin{cases} \hat{A} \cong \hat{D} \\ \hat{B} \cong \hat{E} \\ \hat{C} \cong \hat{F} \end{cases} \text{e} \begin{matrix} \overline{AB} \cong \overline{DE} \\ \overline{AC} \cong \overline{DF} \\ \overline{BC} \cong \overline{EF} \end{matrix}$$

Para verificar se dois triângulos são semelhantes, não é necessário verificar todos os ângulos e lados. Existem alguns critérios mínimos, que chamamos de casos de semelhança, que permitem reconhecer a semelhança entre dois triângulos. São eles:

- Ângulo - Ângulo (A.A.): dois triângulos possuem dois ângulos correspondentes congruentes.
- Lado - Ângulo - Lado (L.A.L.): dois triângulos têm dois lados correspondentes proporcionais e os ângulos entre eles congruentes.
- Lado - Lado - Lado (L.L.L.): dois triângulos têm os três lados correspondentes proporcionais.

Utilizando os critérios de semelhança, de acordo com Iezzi (2018), as consequências da semelhança de triângulos é a razão entre duas alturas homólogas é k, a razão entre duas medianas homólogas é k, a razão entre duas bissetrizes homólogas é k e a razão entre as áreas é k^2.

Além disso Iezzi (2018), inclui como segunda consequência que se um segmento une os pontos médios de dois lados de um triângulo, então ele é paralelo ao terceiro lado e é metade do terceiro lado.

.

3.2 Homotetias e suas propriedades

As transformações geométricas no plano são aplicações bijetoras entre duas figuras. Por meio delas, a figura original se forma outra geometricamente igual ou semelhante à primeira. São exemplos de transformações geométricas: isometria (reflexão, rotação, translação, reflexão deslizante) e homotetia. Mas, nosso estudo é somente sobre a última.

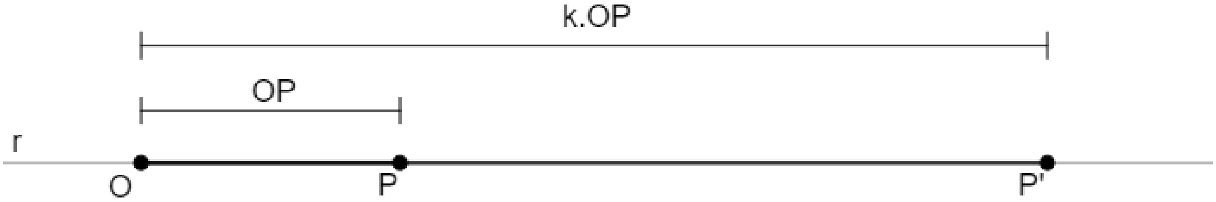
O ensino de transformações geométricas é escasso no Brasil, especialmente em escolas da rede pública. A omissão se dá, as vezes por falta de domínio do assunto pelo professor e, em outras situações, por falta de recursos didáticos. Não é fácil trabalhar com transformações geométricas no quadro e, para desenhá-las, o professor leva muito tempo. Se torna mais viável para professores que podem trabalhar com projeção ou com aulas virtuais.

3.2.1 Definição

Carneiro (2015) diz que dados um ponto O e um número real k, chama-se homotetia de centro O e razão k a transformação geométrica no plano que faz corresponder a cada ponto P um ponto P' tal que $\overline{\mathrm{OP}}' = \mathrm{k}.\overline{\mathrm{OP}}$.

A figura 13 foi feita utilizando o aplicativo GeoGebra para representar a definição de homotetia proposta por Carneiro.

Figura 13: Definição de homotetia



Fonte: Próprio autor

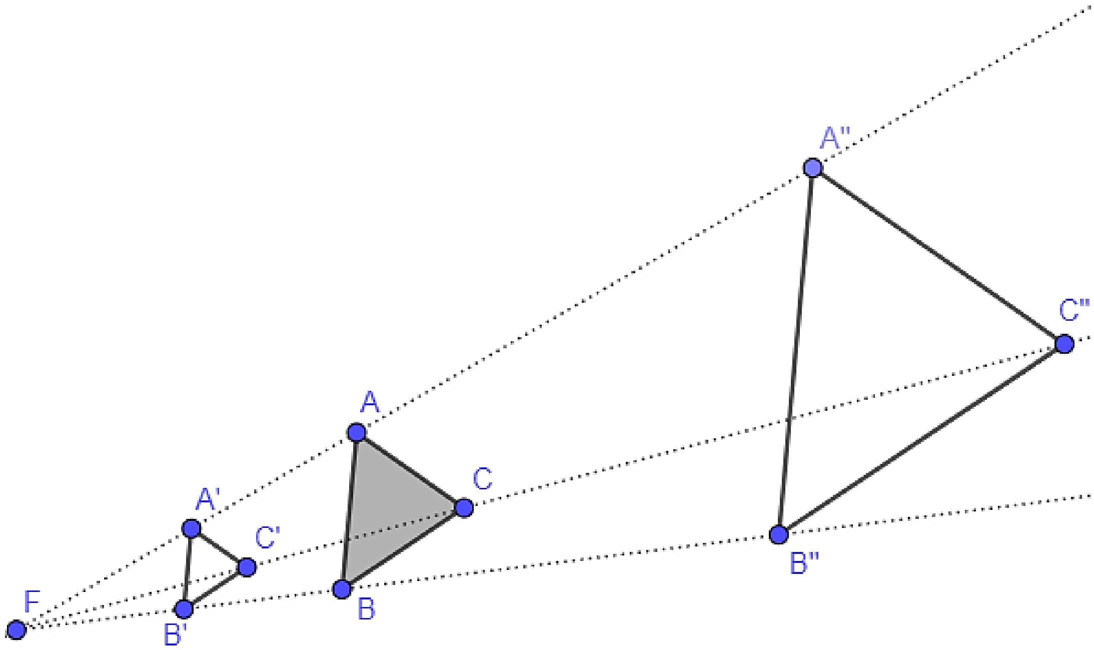
Maciel (2004) e Carneiro (2015), informam também que os pontos O, P e P' são colineares e que, se $\mathrm{k} > 0$, P' está na semirreta OP e, se $\mathrm{k} < 0$, P' está na semirreta oposta de OP.

Definindo em outras palavras, a homotetia é uma transformação geométrica que multiplica por um fator constante a distância de um ponto qualquer do espaço a um ponto fixo, deslocando-o sobre a reta definida por estes dois pontos. Por meio da homotetia é possível conseguir ampliação ou redução de imagens. Este é o princípio utilizado, por exemplo, para ampliação de fotos.

Reis e Melo (2019) informam que a palavra homotetia deriva do grego, em que homós significa similar e tetia, posição, portanto, as figuras homotéticas são colocadas a uma distância igual a “algo”

A simulação de homotetia para figuras no plano cartesiano também pode ser feita usando o aplicativo GeoGebra. Um exemplo é o desenho da figura 14, representando um triângulo ABC. Neste exemplo, o triângulo A’B’C’ é uma redução positiva, pois se aproxima da fonte F, enquanto que A”B”C” é uma ampliação positiva, pois se distancia da mesma fonte.

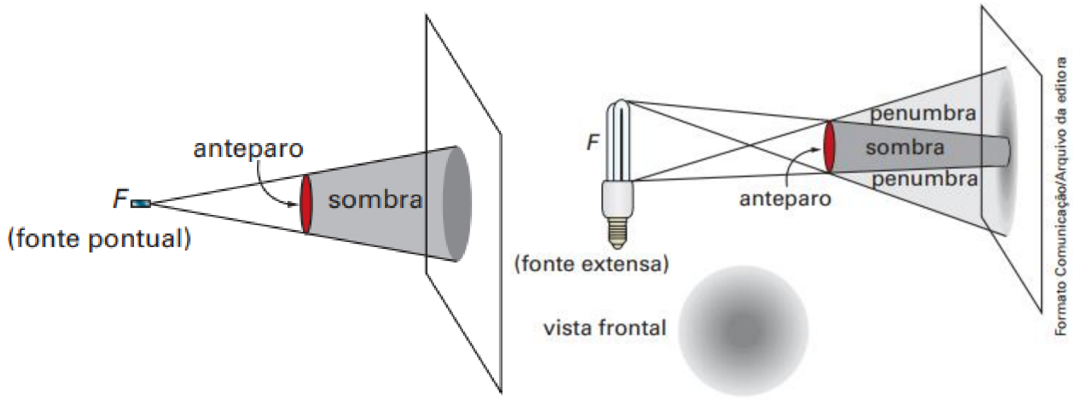
Figura 14: Exemplo de homotetia no triângulo ABC



Fonte: Próprio autor

Percebemos que, como a luz se propaga em linha reta, a homotetia pode ser facilmente utilizada no estudo de fenômenos luminosos. Um exemplo está na figura 15, que representa a formação de sombra e penumbra a partir de uma fonte pontual e outra extensa.

Figura 15: Sombra e penumbra



Fonte: Gaspar, 2013

3.2.2 Homotetia direta

A posição do centro da homotetia irá indicar se ela é direta ou inversa. Para Reis e Melo (2019), a homotetia é considerada direta quando o centro é exterior ao segmento que une os pontos, sendo a razão k positiva.

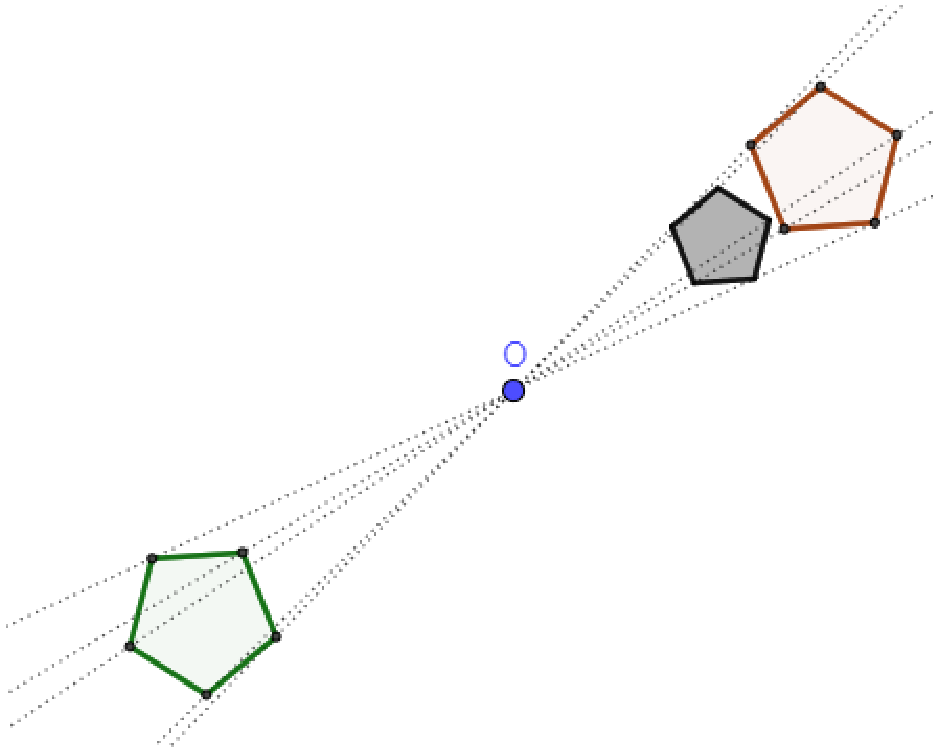
3.2.3 Homotetia inversa

Reis e Melo (2019) afirmam que a homotetia é considerada inversa quando é interior ao segmento que une os pontos, sendo a razão k negativa.

A figura 16 mostra um exemplo de homotetia direta e inversa. O objeto é um pentágono que está na cor cinza. Para homotetia direta foi usada a razão k = 1,5 e para a homotetia inversa foi usada k = -1,5.

Podemos observar que na homotetia direta (imagem avermelhada) o centro P é exterior ao segmento que une os pontos do objeto e da transformação geométrica, enquanto na homotetia inversa (imagem esverdeada) o centro fica entre o objeto e a transformação geométrica. Também observamos que o objeto de tom avermelhado é uma ampliação direta, pois k > 1. Enquanto isso, o objeto esverdeado também é uma ampliação, mas a figura é apresentada de forma inversa (a imagem aparece de cabeça para baixo). Isto porque o valor adotado para k no aplicativo GeoGebra foi menor que -1.

Figura 16: Exemplo de homotetia direta e inversa



Fonte: Próprio autor

3.3 Simulações no GeoGebra

GeoGebra é um aplicativo de matemática dinâmica descrito em linguagem Java, disponível para os sistemas operacionais iOS, Android, Windows, Mac, Chromebook e Linux. É um excelente recurso para trabalhar conceitos de geometria plana, espacial e analítica, também é uma ótima opção para trabalhar com diversos tipos de função como, por exemplo, afim, 2° grau, modular, exponencial, logarítmica e trigonométrica. Pode ser uma ferramenta muito útil também para uso em matemática financeira e em assuntos diversificados na física, com interpretação gráfica e, para nosso objetivo, na óptica geométrica.

Após verificar alguns aplicativos para computador e celular, ele foi escolhido para uso na simulação, pois além de ser gratuito, é de fácil manuseio e combina conceitos de geometria e álgebra. No site oficial, existe opção dos seguintes aplicativos: Calculadora, Calculadora Gráfica, Calculadora 3D, Geometria, GeoGebra Clássico 6, GeoGebra Clássico 5 e Calculadora CAS. Para as simulações, foi utilizado o GeoGebra Clássico 6.

As imagens deste trabalho criadas pelo próprio autor foram por meio deste aplicativo. Uma simulação foi feita para polígonos regulares de até vinte lados, este limite pode ser alterado, por meio do controle deslizante n da figura 17, que será apresentada após a explicação do procedimento.

Inicialmente criamos uma fonte luminosa pontual, localizada na origem do plano cartesiano e identificada pelo ponto P(0, 0). Em seguida, determinamos dois pontos aleatórios que chamados de A_1 e A_2 que, experimentalmente, adotamos A_1 = (25, 10) e A_2 = (30, 5). Como todos os parâmetros no GeoGebra, esses valores experimentais podem ser alterados. Em seguida, criamos um controle deslizante para n (lados do polígono) e outro controle deslizante para k (razão de crescimento ou decrescimento). Como temos polígonos a partir de 3 lados e, polígonos regulares com mais 20 lados visualizados na tela de um celular ou computador assume a forma aproximada de uma circunferência, adotamos:

$$3 \leq \mathrm{n} \leq 20$$

Durante a simulação, o professor ou aluno poderá escolher o número de lados do polígono regular utilizando o controle ou permitir a alteração automática, com incremento de 1, já que n deve ser um número natural.

Para efeito didático, também limitamos o valor de k, sendo que este foi configurado para incremento 0,1, mas isso também pode ser alterado durante a simulação. Assim,

$$0 \leq \mathrm{k} \leq 10$$

Para trabalhar com homotetia inversa, os limites máximo e mínimo de k podem ser alterados para valores negativos, mas esse não é o nosso objetivo com o estudo de óptica geométrica.

Como a luz se propaga em linha reta, criamos vinte retas no aplicativo usando o ponto P como origem e cada um dos vértices do polígono criado como referência. Neste caso, não houve a necessidade de calcular a equação de cada reta, pois o aplicativo faz o cálculo automaticamente a partir da escolha de dois pontos quaisquer pertencentes à reta.

Ficaram visíveis semirretas a partir da origem, para que possamos verificar a projeção de cada ponto e observar o caminho percorrido pela luz. Ao definimos o valor de k, estamos mostrando a razão de crescimento ($k > 1$) ou decrescimento ($0 < k < 1$) do objeto em relação ao original. Essa razão de proporcionalidade foi utilizada para calcular a distância dos pontos que irão originar o novo polígono em relação à fonte luminosa por meio da homotetia.

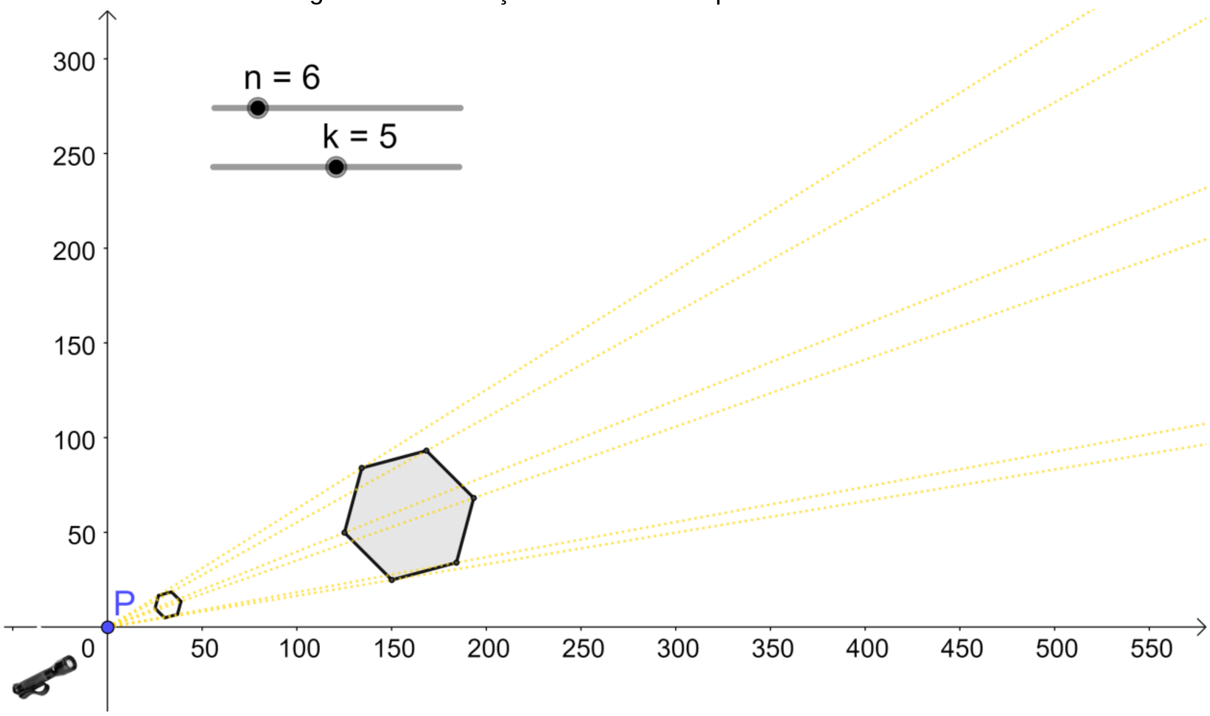
Sabemos da geometria analítica que a distância entre dois pontos no sistema cartesiano ortogonal é dada por:

$$d = \sqrt{(x_B - x_P)^2 + (x_B - x_P)^2}$$

O cálculo foi simplificado, pois utilizamos a fonte na origem do sistema de coordenadas cartesianas, ficando $x_P = 0$ e $y_P = 0$. Iremos mostrar dois exemplos feitos utilizando a simulação no GeoGebra.

A figura 17 mostra um exemplo, para n = 6 (hexágono) e a razão de ampliação k = 5. Nela, podemos observar que, como a constante k é a razão, a distância da projeção homotética (polígono cinza) em relação à fonte luminosa é o quíntuplo da distância do objeto em relação ao mesmo ponto. O mesmo acontece com as medidas dos lados do polígono.

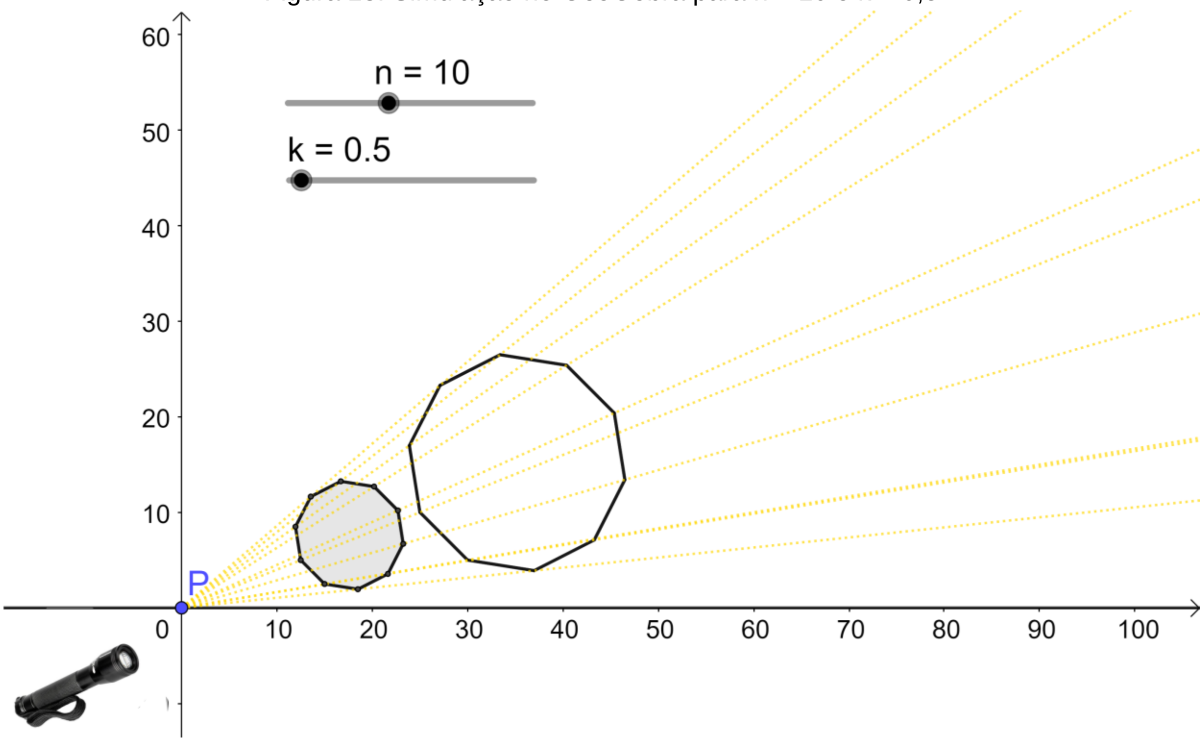
Figura 17: Simulação no GeoGebra para n = 6 e k = 5



Fonte: Próprio autor

A figura 18 foi feita para n = 10 (decágono) e a razão de redução k = 0,5. Neste caso, observamos que o polígono cinza está mais próximo da fonte e em tamanho reduzido.

Figura 18: Simulação no GeoGebra para n = 10 e k = 0,5



Fonte: Próprio autor

4 HOMOTETIA COMO OBJETO DE ENSINO

Muitos alunos acham que a Matemática aprendida na escola é difícil de ser compreendida e possui pouca utilidade prática. Por não perceber a importância dos objetos de conhecimento, muitas vezes o aluno despreza o aprendizado e se afasta do conhecimento matemático. Isto é motivo de preocupação de profissionais da área e, por este motivo, muito trabalho está sendo feito por professores e pesquisadores para mudar essa realidade, mas ainda há muito a fazer.

Brasil (1996), na Lei de Diretrizes e Bases da Educação, artigo 26 determina a obrigatoriedade de estudos da Língua Portuguesa e da Matemática, o conhecimento do mundo físico e natural e da realidade social e política, especialmente do Brasil.

Aqui destacamos o estudo da Matemática e o conhecimento do mundo físico e natural. Para aplicação deste objeto de ensino, foi pesquisado a relação dos Parâmetros Curriculares Nacionais, Base Nacional Comum Curricular e o que tratam os livros didáticos a respeito deste assunto.

4.1 Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)

Os PCN norteiam os educadores sobre o que fazer para sanar os problemas que dificultam a aprendizagem dos alunos. De acordo com as bases legais do ensino médio, por Brasil (2000), os parâmetros cumprem o duplo papel de difundir os princípios da reforma curricular e orientar o professor, na busca de novas abordagens e metodologias.

É importante lembrar que a matemática é uma ciência que auxilia outras na interpretação e na quantificação de determinados eventos. Sem ela, muitos eventos ainda não teriam explicação lógica.

A Matemática no Ensino Médio não possui apenas o caráter formativo ou instrumental, mas também deve ser vista como ciência, com suas características estruturais específicas. (BRASIL, p.40, 2000)

No PCN do ensino médio, em sua parte III (Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias), Brasil (2000) diz que para desenvolver a capacidade de comunicação, o aluno precisa identificar, representar e utilizar o conhecimento geométrico para aperfeiçoamento da leitura, da compreensão e da ação sobre a realidade.

A Geometria está presente nas formas naturais e construídas e, como parte da Matemática, ajuda o aluno a perceber as formas e as propriedades geométricas em fenômenos que ocorrem em situações rotineiras. Ajuda na compreensão do espaço e nas representações planas de desenho, mapas, formas planas e espaciais, facilitando sua percepção do mundo. Vista no ensino médio, trata das formas planas e espaciais e suas representações em desenhos, planificações, projeções, modelos e objetos do mundo concreto.

> As habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas podem ser desenvolvidas com um trabalho adequado de Geometria, para que o aluno possa usar as formas e propriedades geométricas na representação e visualização de partes do mundo que o cerca. (BRASIL, 2000, p. 44)

Ainda no PCN, parte III ao falar de conhecimentos de Física, de acordo com Brasil (2000), é preciso identificar questões e problemas a serem resolvidos, estimular a observação, classificação e organização dos fatos e fenômenos à nossa volta segundo os aspectos físicos e funcionais relevantes.

Dentre as competências e habilidades a serem desenvolvidas em Física, Brasil (2000) cita duas que merecem destaque para nosso estudo:

- Utilizar e compreender tabelas, gráficos e relações matemáticas gráficas para a expressão do saber físico. Ser capaz de discriminar e traduzir as linguagens matemática e discursiva entre si.
- Articular o conhecimento físico com conhecimentos de outras áreas do saber científico.

4.2 Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

A educação, direito de todos e dever do Estado e da família, será promovida e incentivada com a colaboração da sociedade, visando ao pleno desenvolvimento da pessoa, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho (BRASIL, 1988)

Assim, a Constituição Federal de 1988, em seu Artigo 205, reconhece a educação como um direito para todo cidadão e um dever compartilhado entre Estado e família, devendo ser promovido pela sociedade.

A BNCC estabelece conhecimentos, competências e habilidades esperados para o desenvolvimento de todos os estudantes. Este documento não é uma Lei, mas suas funções foram definidas pela lei nº 9.394/1996, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB). De acordo com essa lei, a BNCC deve nortear os currículos dos sistemas e redes de ensino das Unidades Federativas e as propostas pedagógicas de todas as escolas públicas e privadas de Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio.

> A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE). (BRASIL, 2018, p. 7)

Vale destacar que na BNCC, trabalhamos por competência que, podemos definir de acordo com Brasil (2018), como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas da vida cotidiana, no exercício da cidadania e do mundo do trabalho.

Dentre as competências gerais da educação básica, iremos destacar uma que reforça a ideia deste trabalho.

- Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

A BNCC surgiu em um período em que a competitividade para se manter no mercado de trabalho vem aumentando. E, para conseguir tal feito, é necessário que o jovem seja criativo, crítico, colaborativo e saiba comunicar-se. Também é preciso ser produtivo, ético e responsável. O desenvolvimento das competências pode ajudar o jovem a saber trabalhar com as informações disponíveis, ter discernimento para saber quais as informações úteis.

Um ponto positivo na BNCC é que ela determina as aprendizagens essenciais que todos os estudantes precisam ter, promovendo assim direito igualitário no acesso à educação entre alunos de diferentes regiões do país, etnias, religião, gênero e condições socioeconômicas. É perceptível que a desigualdade não terminou e que é muito difícil resolver esse problema que envolve tantos outros fatores, mas a Base é um passo importante.

Neste trabalho, pretendemos que os alunos consigam utilizar os conhecimentos na resolução de problemas, conseguir identificar os dados disponíveis e conseguir buscar soluções para os problemas propostos.

A BNCC considera que a aprendizagem se materializa mediante um conjunto de decisões. Entre estas, destacamos:

- contextualizar os conteúdos dos componentes curriculares, identificando estratégias para apresentá-los, representá-los, exemplificá-los, conectá-los e torná-los significativos, com base na realidade do lugar e do tempo nos quais as aprendizagens estão situadas;
- decidir sobre formas de organização interdisciplinar dos componentes curriculares e fortalecer a competência pedagógica das equipes escolares para adotar estratégias mais dinâmicas, interativas e colaborativas em relação à gestão do ensino e da aprendizagem;
- conceber e pôr em prática situações e procedimentos para motivar e engajar os alunos nas aprendizagens;

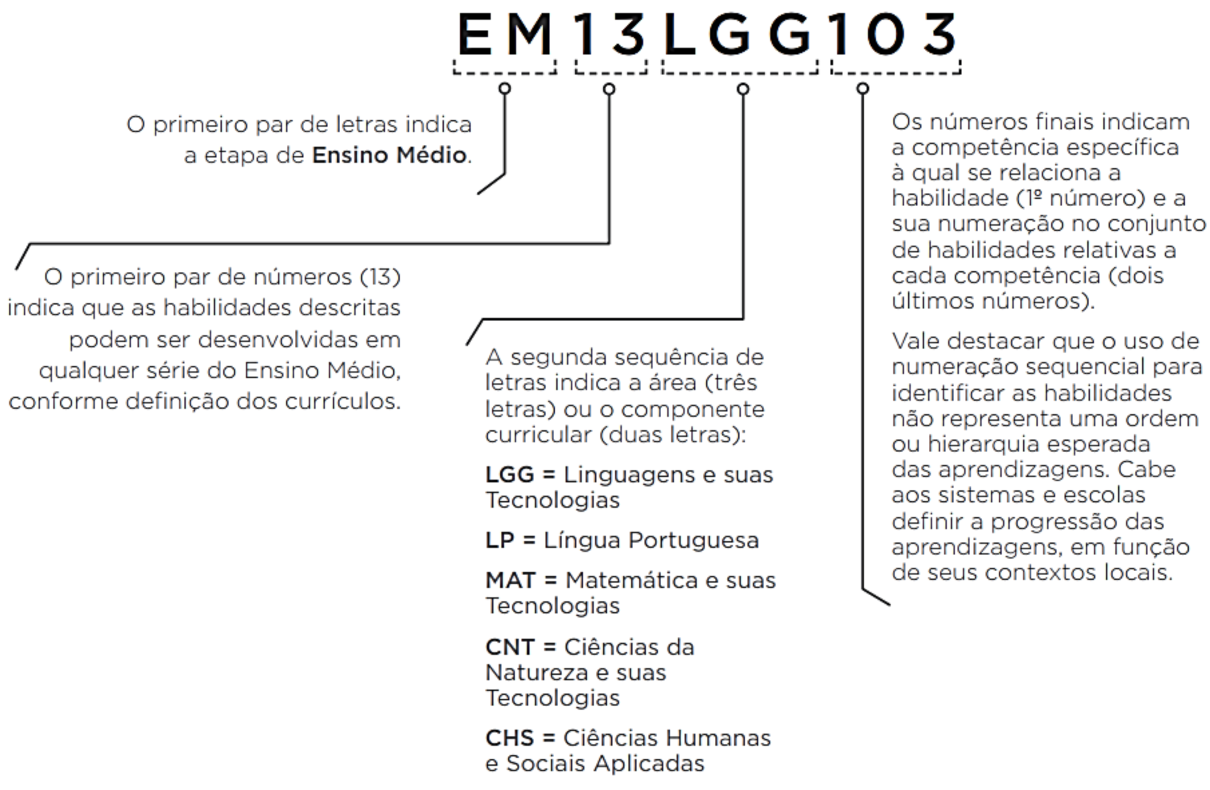
- selecionar, produzir, aplicar e avaliar recursos didáticos e tecnológicos para apoiar o processo de ensinar e aprender.

Neste trabalho estamos procurando materializar a aprendizagem por meio destas decisões. Desde a contextualização dos conteúdos, trabalhando com a organização interdisciplinar da matemática e da física, buscando engajar os alunos na aprendizagem, selecionando recursos didáticos e pedagógicos para apoiar o processo de aprendizagem.

A educação básica é dividida em três etapas: Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio. Iremos falar somente do último. A BNCC organiza o ensino médio em quatro áreas do conhecimento: Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias, Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Para assegurar o desenvolvimento das competências específicas de área, a cada uma delas é relacionado um conjunto de habilidades, que respeita um código alfanumérico, cuja composição é apresentada na figura 19.

Figura 19: Código alfanumérico (BNCC)



Fonte: Brasil (2018)

A identificação destes códigos será necessária, pois iremos mostrar algumas habilidades relacionadas ao nosso trabalho.

> No Ensino Médio, na área de Matemática e suas Tecnologias, os estudantes devem utilizar conceitos, procedimentos e estratégias não apenas para resolver problemas, mas também para formulá-los, descrever dados, selecionar modelos matemáticos e desenvolver o pensamento computacional, por meio da utilização de diferentes recursos da área. (BRASIL, 2018, p. 470)

Neste trabalho iremos utilizar conceitos matemáticos para resolver e formular problemas, descrever fenômenos físicos, incluindo o uso de recursos computacionais para facilitar a compreensão.

No Ensino Fundamental, as habilidades estão organizadas segundo unidades de conhecimento da própria área (Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística).

> Em relação ao pensamento geométrico, eles desenvolvem habilidades para interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano, identificar transformações isométricas e produzir ampliações e reduções de figuras. Além disso, são solicitados a formular e resolver problemas em contextos diversos, aplicando os conceitos de congruência e semelhança. (BRASIL, 2018, p. 517)

Se os alunos do ensino fundamental são capazes de identificar transformações isométricas e produzir ampliação e redução de figuras, aplicar conceitos de congruência e semelhança, então os alunos do ensino médio também tem essa capacidade.

No ensino médio, iremos listar as competências específicas e habilidades que estão relacionadas ao uso da homotetia no ensino de fenômenos ópticos.

- Competência específica 1 (Matemática e suas Tecnologias): Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, ou ainda questões econômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a consolidar uma formação científica geral.
    - ➢ Habilidade: (EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para analisar diferentes produções humanas como construções civis, obras de arte, entre outras.

- Competência específica 3 (Matemática e suas Tecnologias): Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos - Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística -, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
  - Habilidade: (EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, incluindo ou não tecnologias digitais.
  - Habilidade: (EM13MAT308) Resolver e elaborar problemas em variados contextos, envolvendo triângulos nos quais se aplicam as relações métricas ou as noções de congruência e semelhança.
- Competência específica 2 (Ciências da Natureza e suas Tecnologias): Construir e utilizar interpretações sobre a dinâmica da Vida, da Terra e do Cosmos para elaborar argumentos, realizar previsões sobre o funcionamento e a evolução dos seres vivos e do Universo, e fundamentar decisões éticas e responsáveis.

  - Habilidade: (EF03CI02) Experimentar e relatar o que ocorre com a passagem da luz através de objetos transparentes (copos, janelas de vidro, lentes, prismas, água etc.), no contato com superfícies polidas (espelhos) e na intersecção com objetos opacos (paredes, pratos, pessoas e outros objetos de uso cotidiano).

4.3 Livros didáticos

Ao analisar os livros do ensino médio, percebemos que nenhum dos livros de física verificados faz menção à homotetia para falar de fenômenos ópticos. No geral, possuem ótima didática, falam dos conceitos fundamentais, mostram exemplos com imagens, falam sobre a luz e em seguida falam dos fenômenos ópticos. Foram lidos os livros: Compreendendo a Física, Física em Contextos, Os Fundamentos da Física e Tópicos de Física.

Também foram verificados os livros de ensino superior de física e constatado que nenhum dos livros analisados fala de homotetia para explicar os fenômenos ópticos. O assunto é trabalhado de forma parecida aos livros de ensino médio. Foram consultados os livros: Curso de Física Básica, Física IV - Ótica e Física Moderna e Fundamentos da Física.

Os livros de matemática analisados trabalham com transformações geométricas (isometrias e homotetias) a partir do livro do 9° ano: Praticando a Matemática, Matemática do Cotidiano, Matemática: Ciências e Aplicações, Geometria, Matemática (Coleção Moderna Plus), Matemática (Coleção SAS)

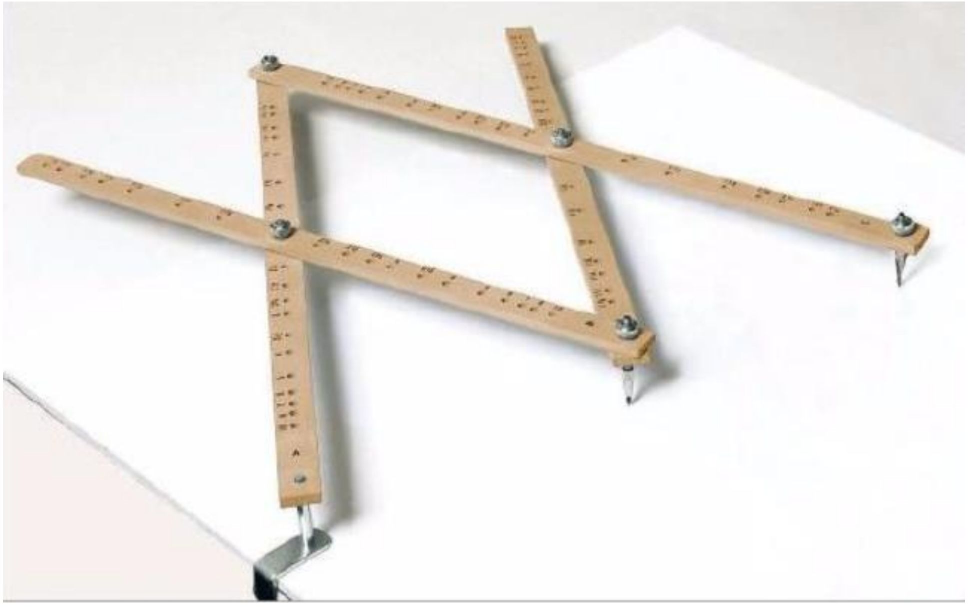
4.3.1 Aplicações de semelhança e homotetia

A homotetia é uma excelente ferramenta para ser utilizada em ampliação e redução de imagens. Bigode (2015) fala de alguns exemplos de aplicações: impressoras comuns e impressoras 3D, máquinas copiadoras, projetores de imagens. Neste trabalho também usamos conceitos de homotetia em fenômenos ópticos como propagação da luz, formação de sombra e penumbra, aproximação e distanciamento de objetos.

Bigode (2015) diz que, antes de popularizar a computação gráfica, um sistema de hastes articuladas era muito utilizado para transferir, fazer a ampliação ou redução de figuras, o pantógrafo. Foi usado por arquitetos e desenhistas por muito tempo.

O instrumento mencionado por Bigode tem um funcionamento simples e pode ser visto na figura 20.

Figura 20: Pantógrafo



Fonte: Bigode (2015)

4.4 Metodologia

O trabalho teve início através de pesquisa em livros de matemática e física do ensino médio, sondando se os alunos estudam homotetia e conseguem associar aos fenômenos ópticos. Também é utilizado como meio de pesquisa os PCN e a BNCC. Em seguida, foram realizados questionários com professores e alunos e exposto exemplos de aplicação dos conceitos de homotetia para verificar o progresso no aprendizado dos alunos.

4.5 Pesquisa

Os objetos principais de pesquisa foram os livros do ensino médio, mas também foi realizado pesquisa em livros de ensino fundamental e ensino superior. Além de verificar como o aluno recebe o conteúdo, percebemos a importância de saber como o professor está sendo preparado desde a sua formação inicial.

4.5.1 Público-alvo

A pesquisa foi realizada com alunos do ensino médio de uma escola privada no município de Santa Inês e questionário foi feito para professores da rede privada e pública.

4.5.2 Análise pré-teste

O assunto homotetia praticamente não é trabalhado na educação básica. Os livros de Matemática que possuem a explicação, tratam o assunto em menos de uma página. Os livros de Física, apesar de possuírem explicações bem elaboradas, algumas imagens e exemplos práticos para auxiliar na compreensão, usam alguns conceitos, mas não falam que o assunto trabalhado tem relação à homotetia.

Também foi verificado que o assunto também não é abordado nos livros de ensino superior. Como o professor não verifica o conteúdo em sua formação inicial, também não repassa para o aluno.

4.5.3 Questionário do professor

Antes do teste com os alunos, foi realizada uma investigação com base em um questionário com 20 professores das áreas de Matemática e Física. As perguntas estão no apêndice A e o resultado da pesquisa será apresentado a seguir.

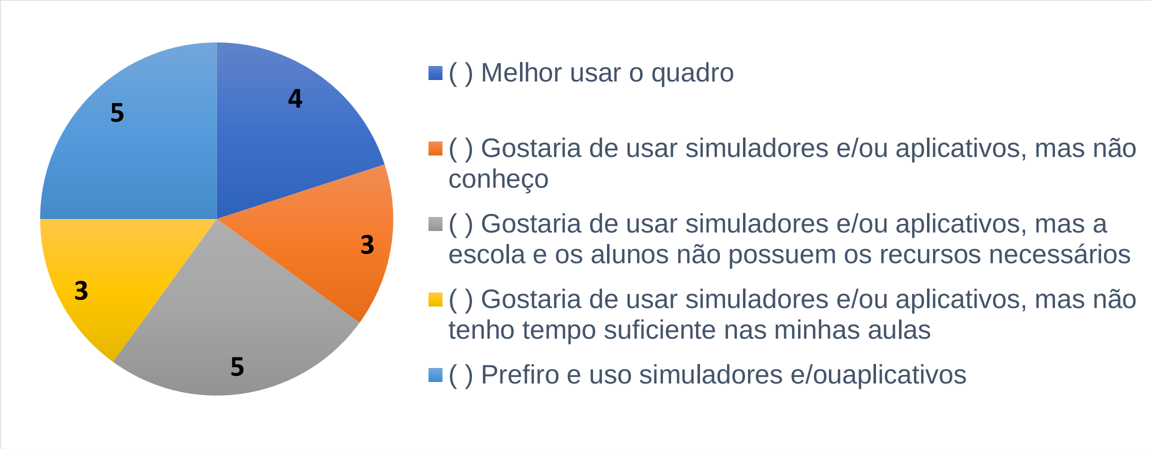
Dos professores que participaram deste levantamento, 15 trabalham somente na rede pública, 3 nas redes pública e privada e apenas 1 não está lecionando no momento. Dentre o grupo de entrevistados, 4 são mestres, 10 estão cursando mestrado, 5 possuem especialização e 7 possuem apenas licenciatura (os valores superam a quantidade de entrevistados, pois alguns professores possuem mais de uma pós-graduação).

Em relação à atuação em sala de aula nas disciplinas exatas, 10 deles já trabalharam como professor de Matemática e Física, 9 lecionaram somente Matemática e 1 apenas Física. Também foi questionado o tempo de experiência dos professores. Apenas 2 possui entre um e cinco anos de experiência, 5 estão atuando em sala de aula entre cinco e dez anos, 6 possuem entre dez e quinze anos, 6 estão entre quinze e vinte anos na profissão e apenas 1 possui mais de vinte anos de experiência como professor da área.

Dos professores que responderam ao questionário, apenas 4 demonstraram dominar o assunto homotetia e utilizar em suas aulas, 10 tem o conhecimento e nunca utilizaram em suas aulas, 2 apenas ouviram falar e 4 nunca ouviram falar sobre homotetia. É importante destacar que, dos 20 professores questionados, apenas 4 confirmaram que tiveram disciplina que contemplasse homotetia em sua formação inicial, os demais que conhecem o conteúdo, aprenderam depois.

Após as perguntas iniciais, apresentamos uma breve explicação sobre o que é homotetia para que, mesmo os que nunca ouviram falar, pudessem opinar nos demais questionamentos. Em relação ao ensino de fenômenos luminosos, 4 consideram melhor usar o quadro, 3 gostariam de usar simuladores ou aplicativos, mas não conhecem, 5 gostariam de usar simuladores e/ou aplicativos, mas a escola e os alunos não possuem os recursos necessários. 3 gostariam de usar simuladores ou aplicativos, mas não tem tempo suficiente para isso nas suas aulas, 5 preferem e usam simuladores ou aplicativos em suas aulas. Estes dados são apresentados no gráfico da figura 21.

Figura 21: Questionário do professor - Como considera melhor o ensino dos fenômenos luminosos?



Fonte: Próprio autor

Japiassu (1976) afirma que a interdisciplinaridade se caracteriza pela intensidade de trocas entre os especialistas e pelo grau de integração das disciplinas no interior de um mesmo projeto de pesquisa. Chas (2016) complementa que é um processo dinâmico das relações, visando um enriquecimento por ambas as partes, permitindo a abertura de espaços de diálogo entre as áreas do conhecimento.

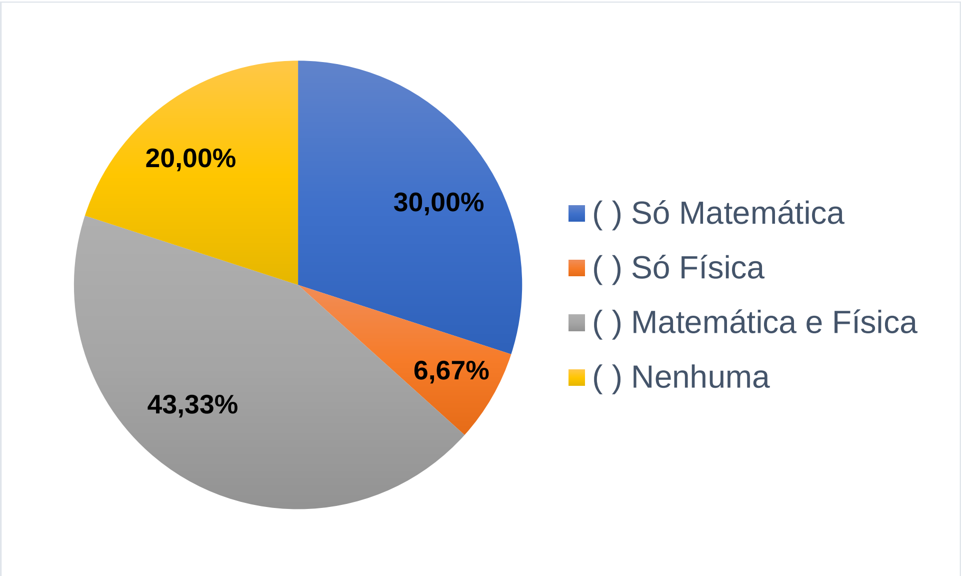
Pensando na interdisciplinaridade, perguntamos aos professores que lecionam Matemática sobre a importância desta interdisciplinaridade no ensino de homotetia. Apenas 2 não consideram importante relacionar conceitos de óptica geométrica nas aulas de geometria. O motivo de não concordarem é que consideram que precisaria de mais tempo de aula. Os demais professores consideram importante e destacam a facilidade no entendimento, a interdisciplinaridade, ampliação da visão matemática no cotidiano, podendo trabalhar não somente com projeção de retas, demonstrando a importância da matemática na prática. Também dá dinâmica na explicação do conteúdo. Como sugestão, um professor relatou que seria interessante apresentar os conceitos, associando com a modelagem matemática.

Todos os professores de Física que opinaram, consideraram importante o uso de homotetia em suas aulas de óptica geométrica, pois ajuda a esclarecer melhor os fenômenos físicos e reforça a interdisciplinaridade.

4.5.4 Questionário do aluno

Este questionário foi realizado com 30 alunos do ensino médio, todos de uma escola particular de Santa Inês. Foi lançado o desafio aos alunos, solicitando que séries diferentes estivessem contempladas. Então, foram escolhidos 10 alunos que estão cursando a 1ª série, 11 que estão na 2ª série e 9 que estão na 3ª série do ensino médio. Uma pergunta interessante para iniciar o questionário é saber se o aluno gosta das matérias. O número de alunos que demonstraram gostar de Física é menor que os alunos que gostam de Matemática. Os dados estão apresentados no gráfico da figura 22.

Figura 22: Questionário do aluno - Você gosta de Matemática e Física?



Fonte: Próprio autor

Solicitamos explicações em relação às respostas. Estas foram bem diversificadas. Poucos alunos responderam que gostam de fazer cálculos e compreender as leis da Física. Uma pessoa respondeu que gosta de ver aplicação prática. Outros acham os conceitos físicos muito complicados, enquanto vê na matemática assuntos mais fáceis de entender. Há relato de um aluno que afirmou que consegue entender o conteúdo de Física na escola e resolver as questões propostas, mas não consegue entender a aplicação na prática. Isto mostra uma dificuldade de associar a prática com a teoria.

Alguns alunos relataram que a ansiedade atrapalha o aprendizado em matérias exatas. Chamou muita atenção um relato de uma aluna que informa que passou por um trauma com as exatas, desde a infância. Ela entrava em pânico na arguição da tabuada. Mesmo com esse problema, tinha ótimas notas. Após mudança de escola, a cobrança foi aumentando e a ansiedade também, fazendo com que o nível reduzisse. É comum ver alunos afirmarem que Matemática já foi sua matéria favorita e, em seguida, deixou de ser, pois aumenta a cobrança e ele não consegue enxergar aplicações para o que é estudado.

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB), no seu Artigo 35, Inciso IV, diz que é essencial a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina. Vilela (2016) diz que para muitos estudantes é difícil fazer uma conexão entre a teoria e a prática. Por isso, um dos grandes desafios enfrentados pelos professores de Física ou Matemática é fazer o estudante associar o conteúdo teórico a situações práticas. Portanto, os alunos foram questionados se conseguem vincular o assunto que é tratado nas aulas com situações problema que relacionam Ciência, Tecnologia e Sociedade. Destes, 86,67% responderam à pesquisa informando que sim e 13,33% relataram que não conseguem.

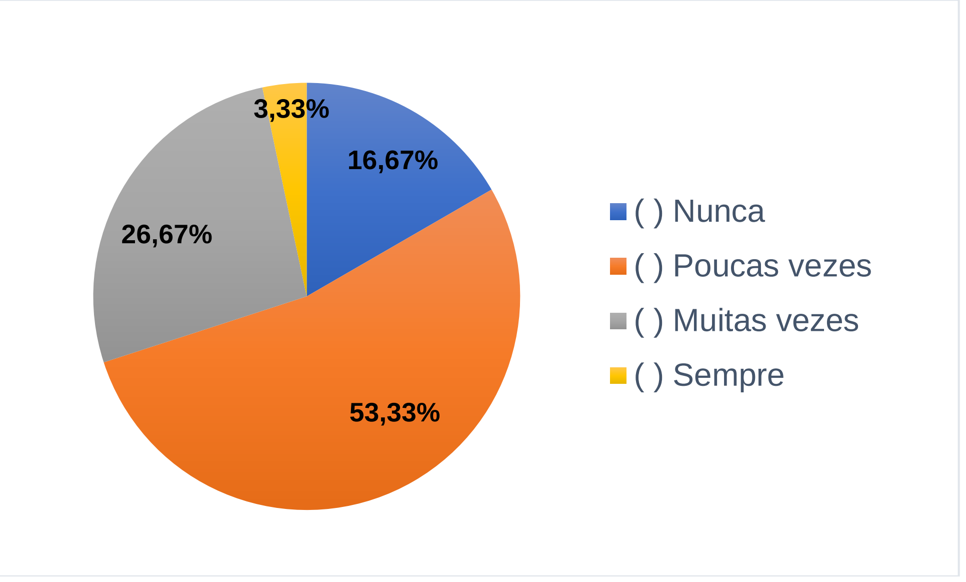
Segundo Freire (1987), a interdisciplinaridade é o processo metodológico de construção do conhecimento pelo sujeito com base em sua relação com o contexto, com a realidade, com sua cultura.

Perguntamos se os alunos consideram a matemática como uma importante ferramenta para a compreensão de fenômenos físicos. Destes, 96,67% consideram que sim e 3,33% respondeu que não. A justificativa da única resposta negativa foi que a pessoa não consegue ver sentido nas explicações matemáticas para os fenômenos da física. Dentre as justificativas para as respostas positivas, há algumas relações em que a maioria percebe claramente a matemática como ferramenta para compreensão dos fenômenos como movimento retilíneo, movimento circular, lançamento oblíquo, assuntos relacionados à astronomia, força etc. Alguns alunos responderam que conseguiram compreender ou justificar os fenômenos físicos através da matemática.

Para Freire (1987), busca-se a expressão da interdisciplinaridade pela caracterização de dois movimentos dialéticos: a problematização da situação pela qual se desvela a realidade e a sistematização dos conhecimentos de forma integrada.

Sobre o conceito de homotetia, 36,67% já passou por situações cotidianas em que percebeu se tratar de uma aplicação de homotetia. Em relação a resolução de questões, uma pessoa (3,33%) relatou que sempre consegue resolver questões de óptica geométrica, 26,67% disseram conseguir muitas vezes, 53,33% conseguem resolver questões poucas vezes e 16,67% disseram que nunca conseguem. Para facilitar a compreensão, apresentamos no gráfico de setor da figura 23.

Figura 23: Questionário do aluno - Consegue resolver questões de óptica geométrica?



Fonte: Próprio autor

A percepção dos alunos em relação a situações cotidianas em que perceberam se tratar de uma aplicação de óptica geométrica é maior que a percepção que eles têm sobre homotetia. Em relação a óptica, 60% têm essa percepção física, enquanto 40% não têm.

Antes de continuar o questionário, passamos uma apresentação e, em 5 minutos apenas, foi feito a identificação do professor como mestrando de matemática pelo programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Então, mostramos a definição de homotetia, revisando os princípios de óptica geométrica, com ênfase no princípio de propagação retilínea da luz. Em seguida foi usando a figura 15 deste trabalho como exemplo, para explicar a formação de sombra e penumbra. Então, o aluno visualizou uma simulação de homotetia com polígonos no aplicativo GeoGebra, mostrando o que ocorre com a movimentação da figura original e o que acontece com a alteração da figura.

Sousa e Fontenele (2021) dizem que o GeoGebra é um recurso tecnológico que auxilia o professor no processo de ensino de Matemática, por ser dinâmico, faz com que o aluno se interesse mais pelo conteúdo.

Poderia ser uma aula mais demorada com muitos exemplos, utilizando pelo menos 50 minutos. Porém, como sabemos que professores de Matemática e Física enfrentam muitas dificuldades dos alunos, queremos verificar se é possível melhorar o desempenho dos alunos em óptica geométrica reservando o menor tempo possível de aula para mostrar os conceitos de homotetia associado a ela.

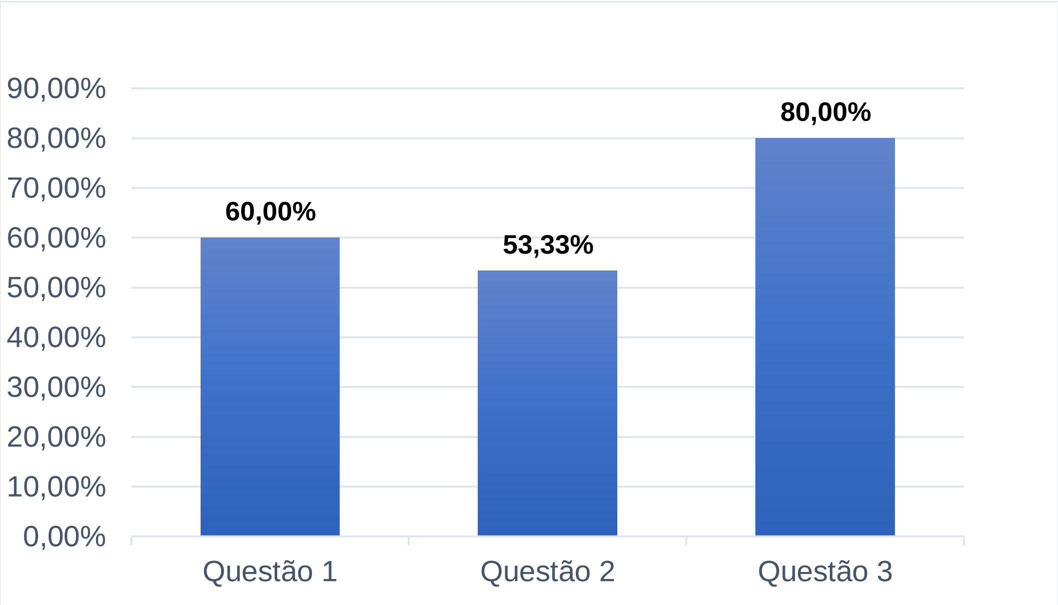
4.6 Análise a posteriori

Antes de analisar os resultados, gostaríamos de lembrar que, de acordo com o levantamento feito anteriormente e identificado na figura 23, podemos identificar que 70% dos alunos entrevistados não se sentiam seguros ao se deparar com questões de óptica geométrica. Estes responderam que nunca ou poucas vezes conseguem resolver esse tipo de atividade.

4.6.1 Análise geral

Após o pré-teste, os alunos responderam três questões de óptica geométrica e homotetia, sendo todas de múltipla escolha. Estas questões estão no apêndice B deste trabalho. Concluímos que, apesar da dificuldade de alguns alunos em relação à matemática e à física, o resultado foi considerado satisfatório, pois destes trinta alunos que participaram, 73,33% acertaram pelo menos duas, das três questões, o que mostra que o resultado está acima das suas próprias expectativas. Agora vamos identificar onde estão os erros. Para isso, o percentual de acerto por questão será apresentado no gráfico da figura 24.

Figura 24: Percentual de acertos por questão



Fonte: Próprio autor

Então, vamos analisar cada questão do apêndice B e verificar o motivo de ter uma questão com a quantidade de acertos maior que as demais.

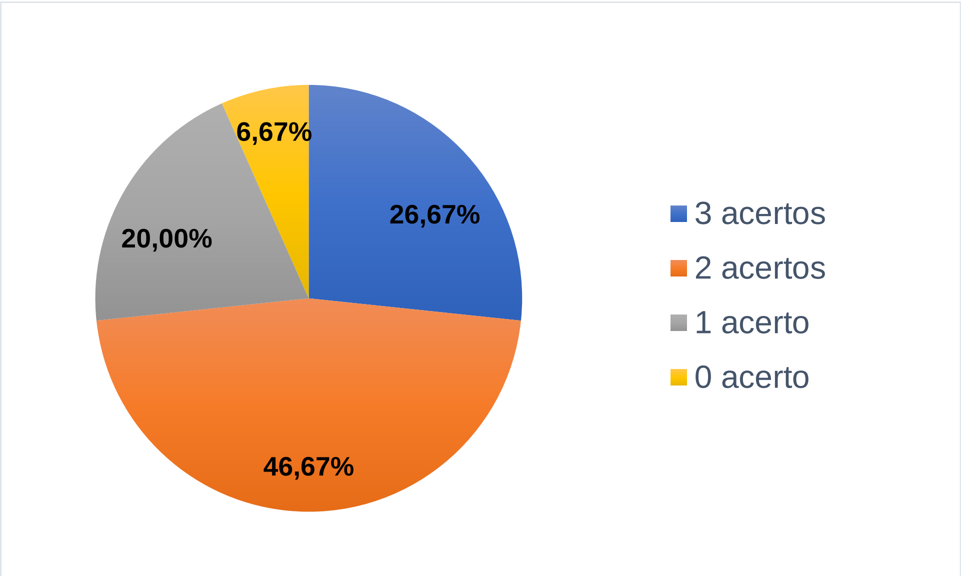
A questão 1 é uma aplicação direta dos conceitos de homotetia. Nela, o aluno deveria encontrar a razão de ampliação do triângulo A”B”C” em relação ao triângulo ABC. De posse dessa razão, basta igualá-lo à razão entre as distâncias de cada uma das figuras ao centro da homotetia (ponto F). Como eles não tinham familiaridade com o conteúdo, que foi visto em pouco tempo, existiu uma quantidade razoável de erro, mas acima da própria expectativa deles.

Para resolver a questão 2, os alunos não precisaram realizar cálculos, mesmo assim foi a questão que teve o menor percentual de acertos. Nesta, o aluno precisava entender o conceito de sombra e penumbra e perceber a propagação linear da luz. Além disso, precisou imaginar em que lado o sol iria aparecer para cada observador durante o eclipse em diferentes pontos.

A questão 3 era menos trabalhosa e teve o maior percentual de acertos, pois apesar de ser possível compreender e responder a questão a partir dos conceitos de homotetia, usando a razão de ampliação para a sombra e as alturas, muitos alunos associaram à semelhança de triângulos.

Também foi realizado o levantamento da quantidade de alunos por número de acertos. Apesar de não serem muitos os que acertaram todas, mas superou as próprias expectativas, já que apenas 1 aluno respondeu que consegue responder as questões de óptica geométrica sempre que precisa. Os dados foram apresentados em forma de porcentagem no gráfico da figura 25.

Figura 25: Gráfico de alunos por número de acertos



Fonte: Próprio autor

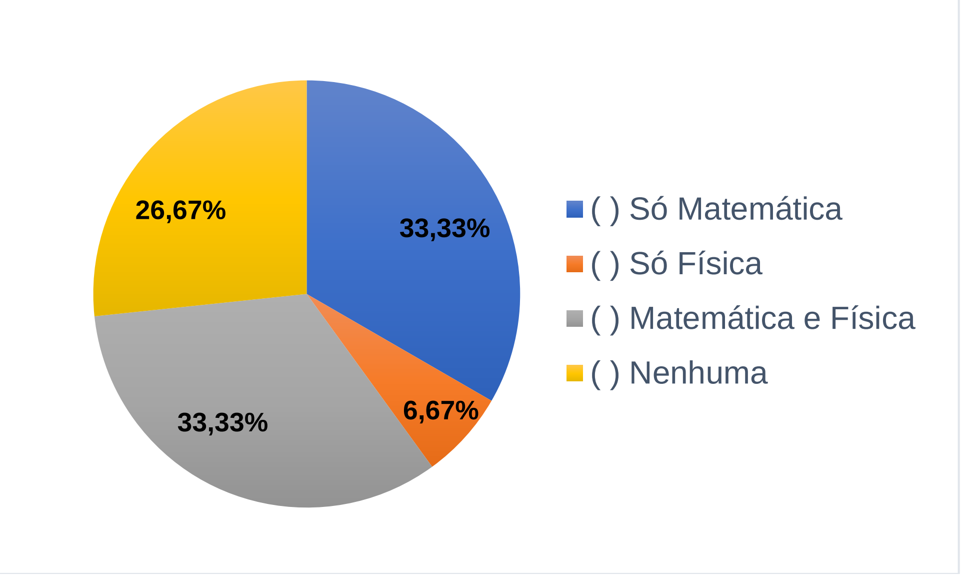
4.6.2 Ações pós-análise

Após a análise dos resultados, percebemos que os alunos superaram suas próprias expectativas e que 73,33% poderiam se considerar acima da média na resolução de questões de óptica geométrica, mas consideramos que essa análise não foi suficiente para garantir que o resultado positivo teve como motivo a breve aplicação dos conceitos de homotetia antes do teste. Uma hipótese é que os acertos podem ter vindo ao acaso, já que as questões eram subjetivas ou o aluno tinha conhecimento prévio que, mesmo não demonstrando muita confiança, já era o necessário para a resolução destas questões.

Por esse motivo, resolvemos aplicar a mesma resolução de questões com um outro grupo de alunos, usando a mesma quantidade do teste anterior. Portanto, foram convidados para o novo teste alunos do ensino médio, limitando a quantidade de participantes a 10 alunos que estão cursando a 1ª série, 11 que estão na 2ª série e 9 que estão na 3ª série.

Para iniciar o teste, a única pergunta feita previamente aos alunos desta segunda turma foi se eles gostam de matemática e física. O resultado está no gráfico da figura 26.

Figura 26: Questionário do aluno (turma 2) - Você gosta de Matemática e Física?

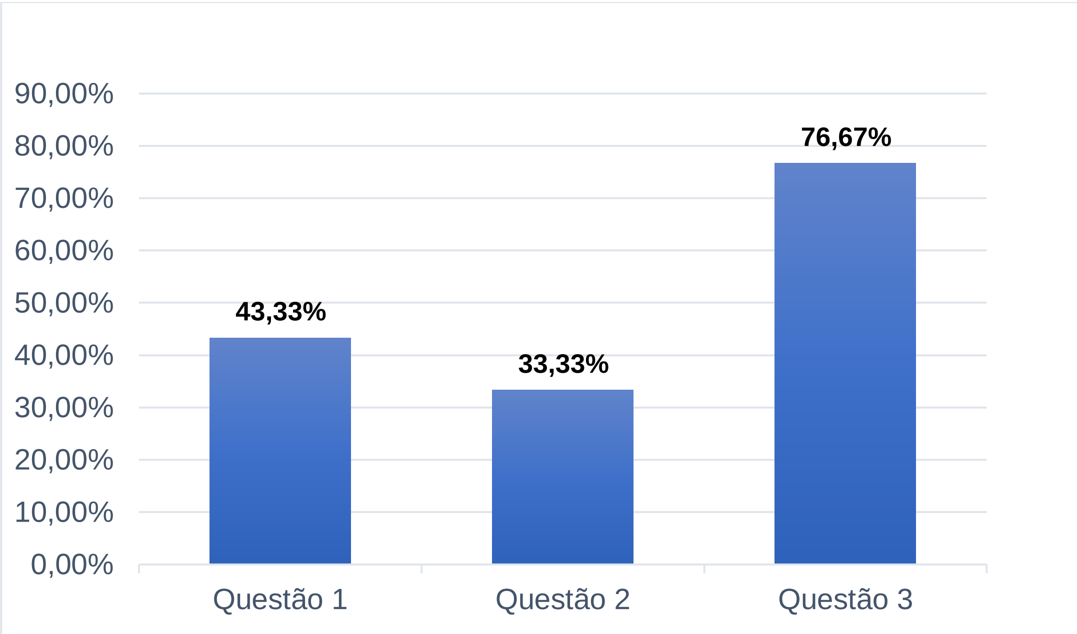


Fonte: Próprio autor

Depois desta pergunta, os alunos responderam as mesmas três questões da turma anterior, sem passar por explicações sobre homotetia, óptica geométrica e sem os demais questionamentos sobre conhecimentos prévios ou noções de aplicabilidade desses conceitos. O objetivo de não fazer a sondagem e não passar a explicação antes é comparar os resultados da primeira turma, que viu o conceito de homotetia associado ao ensino de óptica geométrica e a segunda turma que não viu.

Para iniciar a análise, vamos observar a figura 27, onde mostra-se o levantamento percentual de acertos por questão desta nova turma.

Figura 27: Percentual de acertos por questão (turma 2)



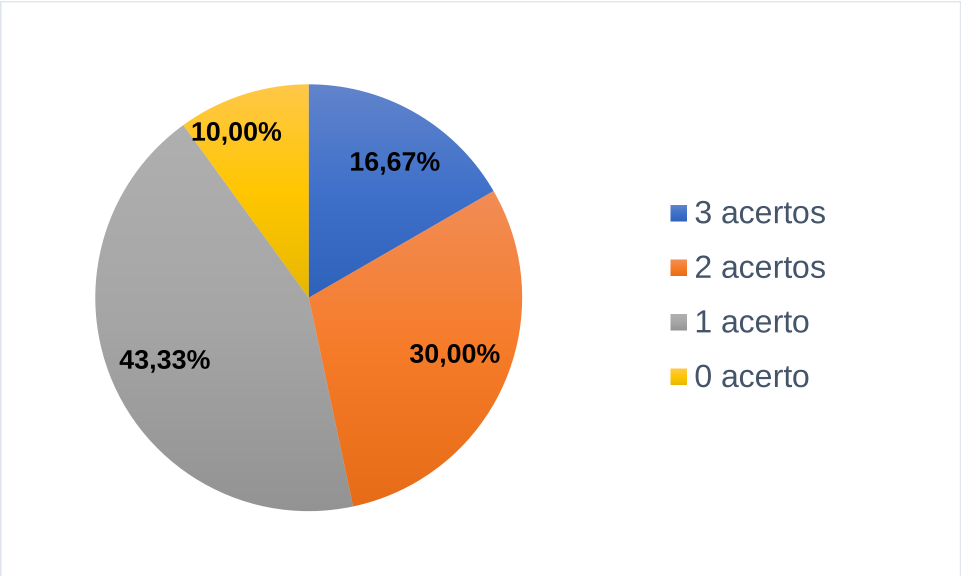
Fonte: Próprio autor

Observamos que o número de acertos nas questões 1 e 2 diminuíram. O percentual de acerto na questão que envolve aplicação direta de homotetia caiu 16,67%, enquanto a questão que fala do eclipse solar e usa princípio de óptica geométrica caiu 20%. Pela proximidade no valor da queda, percebemos que há uma relação entre os alunos que não conseguiram associar a homotetia por falta de instruções iniciais.

A questão 3, que pode ser respondida usando a razão homotética de ampliação, também pode ser resolvida por semelhança de triângulos e, por isso, não teve mudança significativa no percentual de acertos. Portanto, não requer análise aprofundada.

Observamos no gráfico da figura 28 o percentual de alunos da turma 2 distribuídos por número de acertos.

Figura 28: Gráfico de alunos por número de acertos (turma 2)



Fonte: Próprio autor

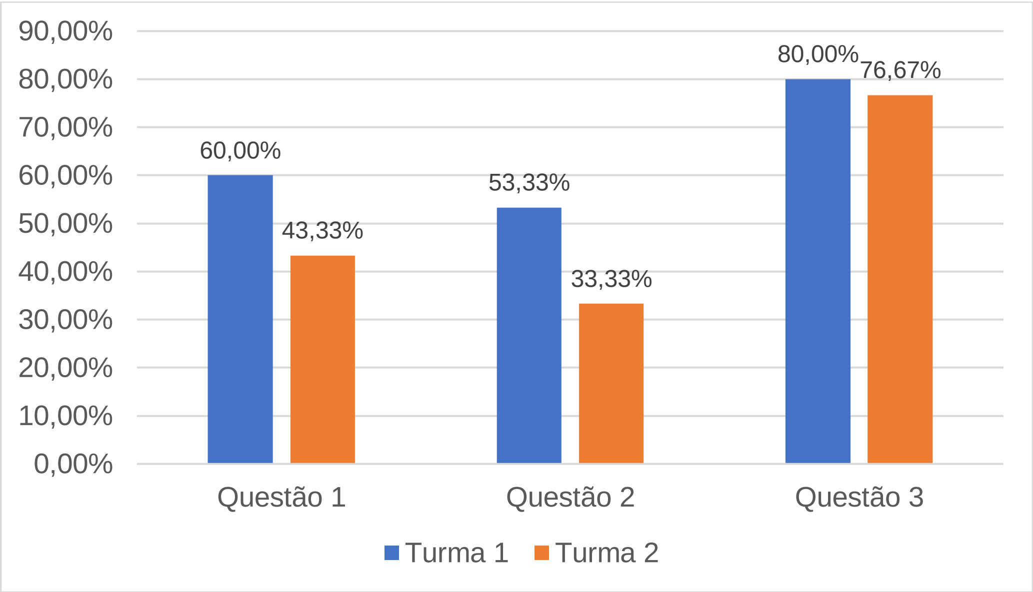
O percentual de alunos que acertaram pelo menos duas, das três questões propostas também teve uma queda significativa em relação à outra turma. Apenas 46,67% dos alunos conseguiram.

Entendemos assim que a intervenção didática surtiu efeito aos alunos que aprenderam a usar os conceitos de homotetia para a resolução de problemas de óptica geométrica.

As figuras 29 e 30, a seguir são gráficos que mostram o comparativo entre os dois testes. Nessas imagens percebemos que os valores caíram para a quantidade de acertos maior (2 ou 3 questões) e aumentaram para a quantidade de acertos menor (0 ou 1 questão).

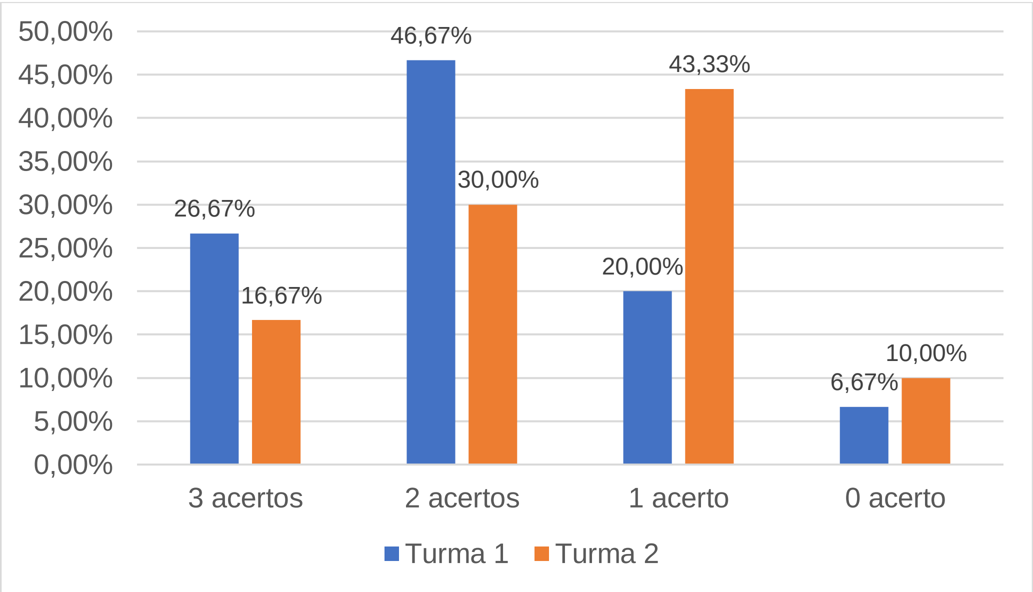
Em consequência dessa redução no percentual de acertos a partir de 2 questões, o somatório percentual também reduziu. A turma que 70% afirmaram que nunca respondia questões de óptica geométrica ou conseguia responder as vezes, conseguiu se superar, pois 73,33% responderam acima da metade. Na outra turma, 46,67% conseguiram.

Figura 29: Comparativo de questões certas (turmas 1 e 2)



Fonte: Próprio autor

Figura 30: Comparativo de número de acertos (turmas 1 e 2)



Fonte: Próprio autor

Segundo Fazenda (1996), a interdisciplinaridade é uma atitude de abertura, não preconceituosa, em que todo o conhecimento é igualmente importante. Pressupõe o anonimato, pois o conhecimento pessoal anula-se frente ao saber universal.

Consideramos relevante o uso de homotetia e óptica geométrica nas aulas de Matemática e Física, buscando a interdisciplinaridade. Após o levantamento e análise dos resultados, concluímos a nossa pesquisa de forma satisfatória.

5 CONCLUSÃO

Sempre buscamos formas de melhorar o trabalho em sala de aula. O tempo é curto, o conteúdo é extenso, os jovens de hoje não conseguem mais aprender como em outras gerações. Temos muitos conteúdos que não são atrativos aos adolescentes e precisamos melhorar a nossa didática. Pensando em um assunto muito presente no cotidiano de todo adolescente, de fácil abordagem e que não está atrativo para os alunos, pensamos em óptica geométrica.

Consideramos o aplicativo GeoGebra ideal para o ensino de óptica geométrica por ser gratuito e de fácil manuseio. Além disso, pode ser instalado em qualquer computador, mas o usuário pode fazer a opção de não instalar, já que pode também ser acessado pelo navegador. Aos usuários que não tem computador, também existe a versão para celular.

Percebemos que muitos alunos não sabem o que é homotetia e não percebe as aplicações no cotidiano. Isto porque, no ensino de óptica geométrica, não é falado sobre o assunto e, na geometria, a homotetia é tratada como um assunto de pouca relevância. Em geral, os livros dedicam menos de uma página para este assunto.

Após o teste com a primeira turma, percebemos a importância de fazer outra aplicação. Na primeira foi dito o que é homotetia e que ele pode ser usado na óptica geométrica, mas na segunda turma nada foi dito a respeito disso, foi apenas proposto a resolução de questões. Os resultados mais significativos foram da primeira turma, o que reforça a ideia de que o ensino de homotetia contribui para o aluno perceber melhor os fenômenos ópticos.

REFERÊNCIAS

ANDRINI, Álvaro. **Praticando a Matemática, 8** / Álvaro Andrini, Maria José Vasconcellos - 3. ed. renovada - São Paulo: Editora do Brasil, 2012.

ANDRINI, Álvaro. **Praticando a Matemática, 9** / Álvaro Andrini, Maria José Vasconcellos - 3. ed. renovada - São Paulo: Editora do Brasil, 2012.

ARAÚJO, Ronielson Francisco Gonçalves. **A utilização de material paradidático no ensino dos conceitos iniciais de Óptica Geométrica** - Dissertação (mestrado profissional em ensino de física), Universidade de Brasília, Brasília, 2018.

BIGODE, Antônio José Lopes. **Matemática do Cotidiano**: 9° ano - 1. ed. - São Paulo: Scipione, 2015.

BÔAS, Newton Villas. **Tópicos de Física 2**: Conect Live / Newton Vilas Bôas, Ricardo Helou Doca, Ronaldo Fogo - 3. Ed. - São Paulo: Saraiva, 2018.

BRASIL. (1988). Brasília, DF: Senado Federal, 1988 **Constituição da República Federativa do Brasil**.

BRASIL. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, **LDB**. 9394/1996. BRASIL.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)**: Ensino Médio - Parte I: Bases Legais. Brasília, 2000.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)**: Ensino Médio - Parte III: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, 2000.

CARNEIRO, Francisco da Silva Saraiva. **Isometrias e Homotetias no Plano** - Dissertação (mestrado profissional em matemática), Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza, 2015.

CHAS, Dijalmary Matos Prates. **Matemática e interdisciplinaridade: um estudo sobre os materiais didáticos** - Estação Científica (UNIFAP), v. 6, n. 3, p. 97-109. Macapá, 2016.

DA SILVA JÚNIOR, Francisco Ribeiro. **Matemática**: 9° ano - 2ª ed. revista e atualizada para 2021 - Fortaleza: Sistema Ari de Sá de Ensino, 2020 (coleção ASAS).

FAZENDA, Ivani Catarina Arantes. **Integração e interdisciplinaridade no ensino brasileiro:** efetividade ou ideologia - 6ª ed. São Paulo: Edições Loyola, 2011 (1979)

FERRARO, Nicolau Gilberto. **Física**, único volume / Nicolau Gilberto Ferraro, Carlos Magno A. Torres, Paulo César M. Penteado - 1. ed. - São Paulo: Moderna, 2012.

FILHO, Edson Soares. **Homotetia e Semelhança de Triângulos:** Uma Proposta de Ensino Utilizando Materiais Concretos e Manipuláveis - Dissertação (mestrado profissional em matemática), Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2014.

FONTENELE, F. C. F., Sousa, M. T. A. **O uso do GeoGebra nas aulas remotas**: uma abordagem do conteúdo de função quadrática - I Encontro Cearense de Educação Matemática, v. 08, n. 23, p. 752-767. Sobral, 2021.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia do Oprimido**. 17ª ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1987.

GASPAR, Alberto. **Compreendendo a Física 2**: Ondas, Óptica e Termodinâmica / Alberto Gaspar - 2. ed. - São Paulo: Ática, 2013.

GASPAR, Alberto. **Experiências de Ciências** - 2. Ed. - São Paulo: Editora Livraria da Física, 2014.

HALLIDAY, David. **Fundamentos de Física**: Óptica e Física Moderna - vol. 4 / David Halliday, Robert Resnick, Jearl Walker; tradução Ronaldo Sérgio de Biasi, 10. ed. - Rio de Janeiro: LTC, 2016.

HELERBROCK, Rafael. **Dualidade onda-partícula** - Brasil Escola, 2009. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/fisica/a-natureza-dual-luz.htm>. Acesso em 17 de julho de 2021.

IEZZI, Gelson. et al. **Matemática**: Ciência e aplicações - 3ª ed. - Pinheiros: Editora Saraiva, 2018.

JAPIASSU, Hilton. **Interdisciplinaridade e patologia do saber** - Rio de Janeiro: Imago, 1976.

LIBÂNEO, José Carlos. **Didática** - São Paulo: Cortez, 1990.

MACIEL, Alexsandra Camara. **O conceito de semelhança:** uma proposta de ensino - Dissertação (mestrado em educação matemática), Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2004.

NETO, Antonio Caminha Muniz. **Geometria** - 1. ed. - Rio de Janeiro: SBM, 2013

NOGUEIRA, Francisco Romero Araújo. **Uma proposta pedagógica para o ensino de ótica na EJA - nível médio** - Dissertação (mestrado profissional em ensino de física), Universidade de Brasília, Brasília, 2015.

NUSSENZVEING, Herch Moysés. **Curso de Física Básica** - vol. 4, 1. ed. - São Paulo: Editora Blucher, 1998.

PAIVA, Manoel. **Matemática 2** - 3. ed. - São Paulo: Moderna, 2015 (coleção Moderna Plus).

PIETROCOLA, Maurício et al. **Física em Contextos 2**: ensino médio - 1. ed. - São Paulo: Editora do Brasil, 2016.

PINHATA, João Eduardo Watanabe. **Matemática**: Pré-Universitário 3ª série - 13ª ed. - Fortaleza: Sistema Ari de Sá de Ensino, 2021 (coleção Pré-Universitário).

PIRES, Clayton Antônio Pereira. **Uma proposta de ensino sobre a luz para o 9o ano do ensino fundamental:** sua natureza, propagação e interação com a matéria - Dissertação (mestrado profissional em ensino de física), Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2017.

RAMALHO, F.; NICOLAU, G. F.; TOLEDO, P. A. **Os Fundamentos da Física 2**. 1ª ed., Vol. 3. São Paulo, Editora Moderna, 2007

REIS, Sara Jemima Carneiro dos, MELO, Gilberto Francisco Alves de. **Transformação Geométrica - Homotetia:** Atividades Investigativas - Dissertação (mestrado em profissional em ensino de ciências e matemática), Universidade Federal do Acre, Rio Branco, 2019.

ROBERTO, Edson Valentim. **Aprendizagem Ativa em Óptica Geométrica**: Experimentos e Demonstrações Investigativas - Dissertação (mestrado em ciências), Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.

ROSA, Carlos Augusto de Proença. **História da Ciência**: A Ciência Moderna - vol II, tomo I - 2. ed. - Brasília: Fundação Alexandre de Gusmão, 2012.

SENA, Diarlley Emanuel Lacerda de Almeida Loiola. **Da Geometria Euclidiana à Geometria Projetiva:** algumas aplicações de homotetias e de construções projetivas - Dissertação (mestrado profissional em matemática), Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza, 2017.

TEIXEIRA, Mariane Mendes. **O que é Óptica Geométrica?** - Brasil Escola, 2015. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/o-que-e/fisica/o-que-e-optica-geometrica.htm>. Acesso em 17 de julho de 2021.

VILELA, Jean Louis Landim. **Laboratório de Óptica para Alunos do Ensino Médio das Escolas Públicas**: Montagem e Avaliação de Aprendizagem - Dissertação (mestrado profissional em ensino de física), Universidade Federal de Alfenas, Alfenas, 2016.

YOUNG, Hugh D. Física IV: **Ótica e Física Moderna** / Hugh D. Young, Roger A. Freedman; colaborador A. Lewis Ford, tradução Sonia Midori Yamamoto; revisão técnica Aldir Moysés Luiz- 14. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2016.

APÊNDICE A: QUESTIONÁRIO DO PROFESSOR

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE):

Prezado(a) professor(a), sou mestrando do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, pela Universidade Estadual do Maranhão. Este questionário é uma das partes integrantes de uma pesquisa acadêmica que fundamentará a elaboração do Trabalho de Conclusão de Curso. Você está sendo convidado(a) a colaborar com a pesquisa. O consentimento para a participação é uma escolha livre e voluntária. Para responder às questões, marque a opção SIM na pergunta a seguir. Caso contrário marque a opção não.

Para a garantia de sua privacidade, será mantido o sigilo em relação a quaisquer informações sobre sua identificação e da instituição a qual pertence. Os dados produzidos com a pesquisa proposta, serão usados apenas com fins acadêmicos na escrita da dissertação de conclusão do curso e outros textos acadêmicos científicos para participação em eventos científicos, publicação em anais e revistas. Em caso de dúvidas sobre os procedimentos da pesquisa, você pode esclarecê-las com o pesquisador responsável: Luis Ricardo Josino Soares (ricardo.josino7@gmail.com).

Desde já, agradeço sua atenção e possível cooperação!

Você aceita participar da pesquisa na condição de voluntário, respondendo às questões que constituem este formulário?
( ) Sim
( ) Não

1. Qual o tipo de instituição você leciona?

( ) Pública
( ) Privada
( ) Pública e Privada
( ) Autônomo
( ) Atualmente não estou lecionando

2. Qual sua formação acadêmica? (pode escolher mais de uma)

( ) Licenciado
( ) Bacharelado
( ) Especialista
( ) Cursando Mestrado
( ) Mestre
( ) Cursando Doutorado
( ) Doutor

3. Ensina ou já ensinou alguma destas disciplinas?

( ) Matemática
( ) Física
( ) Matemática e Física
( ) Nem Matemática nem Física

4. A quanto tempo trabalha como professor de matemática ou física?

( ) de 1 a 5 anos
( ) de 5 a 10 anos
( ) de 10 a 15 anos
( ) de 15 a 20 anos
( ) mais de 20 anos

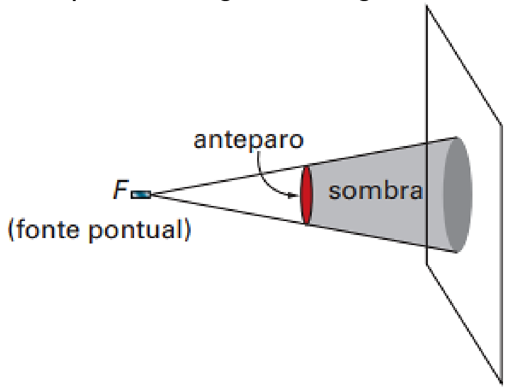
5. Como avalia seu conhecimento e uso dos conceitos de homotetia?

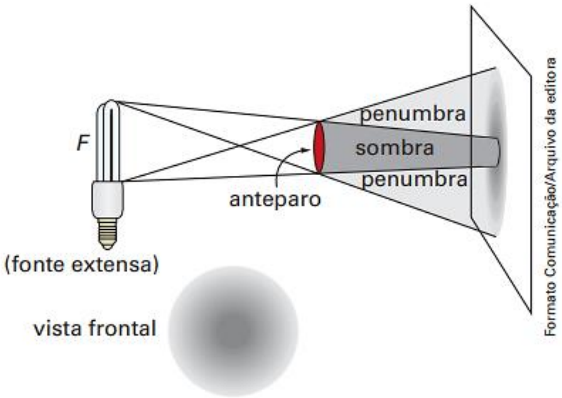
( ) Conheço e utilizo em minhas aulas
( ) Conheço, mas nunca precisei usar em minhas aulas
( ) Apenas ouvi falar
( ) Nunca ouvi falar

6. No decorrer de sua formação inicial, você teve alguma disciplina que contemplasse o estudo de homotetia?

( ) Sim
( ) Não

A homotetia é a transformação geométrica que multiplica por um fator constante a distância de um ponto qualquer do espaço a um ponto fixo, deslocando-o sobre a reta definida por estes dois pontos. Como a luz se propaga em linha reta, a homotetia pode ser facilmente utilizada no estudo de fenômenos luminosos. Como exemplo, verifique as imagens a seguir.





Fonte: Gaspar, 2013

7. Como considera melhor o ensino dos fenômenos luminosos?

( ) Melhor usar o quadro
( ) Gostaria de usar simuladores e/ou aplicativos, mas não conheço
( ) Gostaria de usar simuladores e/ou aplicativos, mas a escola e os alunos não possuem os recursos necessários
( ) Gostaria de usar simuladores e/ou aplicativos, mas não tenho tempo suficiente nas minhas aulas
( ) Prefiro e uso simuladores e/ou aplicativos

8. (Para professor de Matemática) Sabendo do conceito de homotetia, considera importante relacionar conceitos de óptica geométrica nas aulas de Geometria (semelhança / homotetia)?

( ) Sim
( ) Não

Justifique sua resposta:

____

____

____

9. (Para professor de Física) Sabendo do conceito de homotetia, considera importante seu uso para as aulas de óptica geométrica?

( ) Sim
( ) Não

Justifique sua resposta:

____

____

____

APÊNDICE B: QUESTIONÁRIO DO ALUNO

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE):

Prezado(a) aluno(a), sou mestrando do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, pela Universidade Estadual do Maranhão. Este questionário é uma das partes integrantes de uma pesquisa acadêmica que fundamentará a elaboração do Trabalho de Conclusão de Curso. Você está sendo convidado(a) a colaborar com a pesquisa. O consentimento para a participação é uma escolha livre e voluntária. Para responder às questões, marque a opção SIM na pergunta a seguir. Caso contrário marque a opção não.

Para a garantia de sua privacidade, será mantido o sigilo em relação a quaisquer informações sobre sua identificação e da instituição a qual pertence. Os dados produzidos com a pesquisa proposta, serão usados apenas com fins acadêmicos na escrita da dissertação de conclusão do curso e outros textos acadêmicos científicos para participação em eventos científicos, publicação em anais e revistas. Em caso de dúvidas sobre os procedimentos da pesquisa, você pode esclarecê-las com o pesquisador responsável: Luis Ricardo Josino Soares (ricardo.josino7@gmail.com).

Desde já, agradeço sua atenção e possível cooperação!

Você aceita participar da pesquisa na condição de voluntário, respondendo às questões que constituem este formulário?
( ) Sim
( ) Não

1. Em qual tipo de instituição você cursou no ensino médio?

( ) Pública
( ) Privada
( ) Pública e Privada

2. Qual ano do ensino médio você está cursando em 2022?

( ) 1° ano
( ) 2° ano
( ) 3° ano

3. Você gosta de Matemática e Física?

( ) Só Matemática
( ) Só Física
( ) Matemática e Física
( ) Nenhuma

Explique em poucas palavras o motivo da resposta anterior.

____

____

____

4. Você consegue vincular o que é tratado nas aulas de Matemática e Física com situações problemas que relacionam Ciência, Tecnologia e Sociedade?

( ) Sim
( ) Não

5. Considera a matemática como uma importante ferramenta para a compreensão de fenômenos físicos?

( ) Sim
( ) Não

Justifique a resposta anterior.

____

____

6. Descreva em poucas palavras o que você sabe sobre homotetia.

____

____

7. Passou por situações cotidianas em que percebeu se tratar de uma aplicação de homotetia?

( ) Sim
( ) Não

8. Consegue resolver questões de óptica geométrica?
( ) Nunca
( ) Poucas vezes
( ) Muitas vezes
( ) Sempre

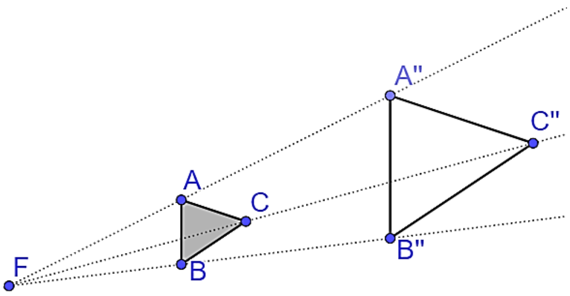
9. Passou por situações cotidianas em que percebeu se tratar de uma aplicação de óptica geométrica?

( ) Sim
( ) Não

O aluno deve assistir uma breve aula sobre o conceito de homotetia.

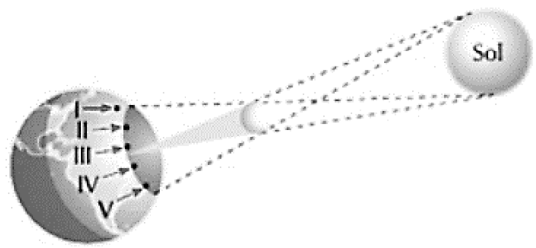
Responda as questões propostas:

1. Na figura abaixo, o triângulo equilátero ABC, de lado 2 cm, está distante x cm da fonte luminosa F. Sabendo que o triângulo equilátero A"B"C", de lado 5 cm está a uma distância (x + 1,5) cm da fonte luminosa, determine a distância x.



a) 1 cm
b) 1,5 cm
c) 2 cm
d) 2,5 cm
e) 3 cm

2. (Enem) A figura abaixo mostra um eclipse solar no instante em que é fotografado em cinco diferentes pontos do planeta.



Três dessas fotografias estão reproduzidas abaixo.

As fotos poderiam corresponder, respectivamente, aos pontos:

a) III, V e II.
b) II, III e V.
c) II, IV e III.
d) I, II e III.
e) I, II e V.

3. (Enem) A sombra de uma pessoa que tem 1,80 m de altura mede 60 cm. No mesmo momento, a seu lado, a sombra projetada de um poste mede 2,0 m. Se, mais tarde, a sombra do poste diminuiu 50 cm, a sombra da pessoa passou a medir:
a) 30 cm.
b) 45 cm.
c) 50 cm.
d) 80 cm.
e) 90 cm.

APÊNDICE C: APRESENTAÇÃO PARA A TURMA 1

HOMOTETIA

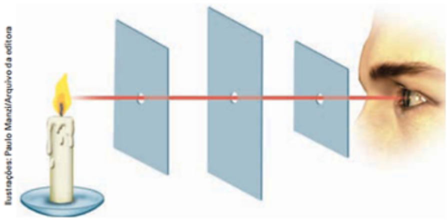
Luis Ricardo

Homotetia

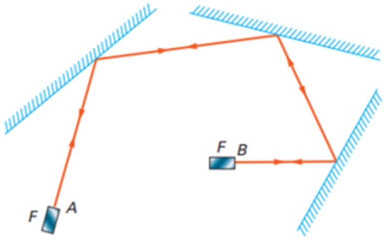
- É a transformação geométrica que multiplica por um fator constante a distância de um ponto qualquer do espaço a um ponto fixo, deslocando-o sobre a reta definida por estes dois pontos.

Óptica Geométrica

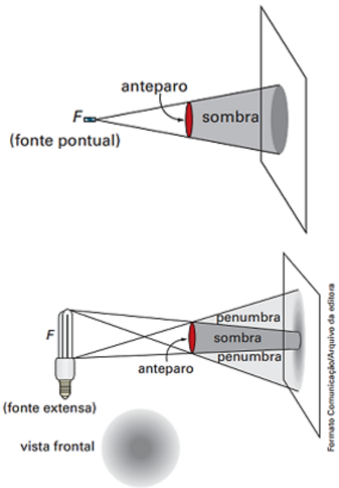
- Princípio da propagação retilínea
  - Em meios transparentes e homogêneos a luz se propaga em linha reta.
- Princípio da reversibilidade
  - A trajetória dos raios não depende do sentido da propagação.



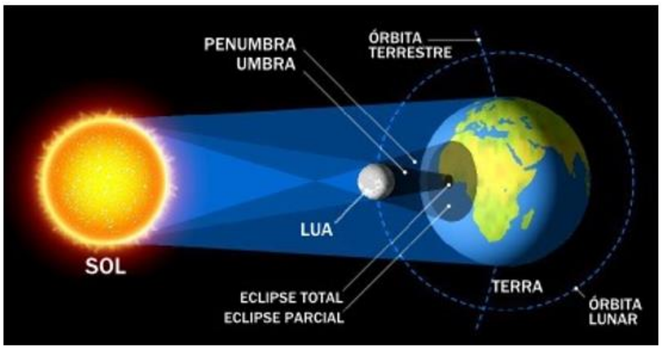
Fonte: Compreendendo a Física 2, 2013



Fonte: Compreendendo a Física 2, 2013.



Fonte: Compreendendo a Física 2, 2013



Fonte: Brasil Escola