



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - UFBA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA - IM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA - SBM
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

TRABALHANDO COM GEOMETRIA NÃO-EUCLIDIANA, COM ÊNFASE
PARA A GEOMETRIA DO GLOBO TERRESTRE NA EDUCAÇÃO BÁSICA -
PROPOSTA DE NOVAS ATIVIDADES

ANDRÉ LUIZ MENDES SANTANA

Salvador - Bahia
ABRIL DE 2013

TRABALHANDO COM GEOMETRIA NÃO-EUCLIDIANA, COM ÊNFASE
PARA A GEOMETRIA DO GLOBO TERRESTRE NA EDUCAÇÃO BÁSICA -
PROPOSTA DE NOVAS ATIVIDADES

ANDRÉ LUIZ MENDES SANTANA

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Rita de Cássia de Jesus Silva.

Salvador - Bahia

Abril de 2013

Santana, André Luiz Mendes

Trabalhando com Geometria Não-Euclidiana, com ênfase para a Geometria do Globo Terrestre na Educação Básica - Proposta de Novas Atividades

66 f.

Orientadora: Prof^a Dr^a Rita de Cássia de Jesus Silva.

Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática da Universidade Federal da Bahia. Departamento de Matemática.

1. Ensino de Matemática. 2. Geometria Não-Euclidiana.
3. Geometria-História 4. Geometria do Globo Terrestre. 5. Navegação Marítima. 6. Movimentos da Terra.

I. Universidade Federal da Bahia. Instituto de Matemática. Departamento de Matemática.

CDU: xxx.xxx.x

TRABALHANDO COM GEOMETRIA NÃO-EUCLIDIANA, COM ÊNFASE
PARA A GEOMETRIA DO GLOBO TERRESTRE NA EDUCAÇÃO BÁSICA -
PROPOSTA DE NOVAS ATIVIDADES

ANDRÉ LUIZ MENDES SANTANA

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 05 de abril de 2013.

Banca Examinadora:

Prof^ª. Dr^ª. Rita de Cássia de Jesus Silva (Orientadora)
UFBA

Prof. Dr. Marco Antônio Nogueira Fernandes
UFBA

Prof. Dr. Sérgio Mota Alves
UESC

*Aos meus pais Angelino (In Memoriam) e Lourdes,
à minha esposa Ildi e à minha filha Andressa.*

Agradecimentos

Neste momento, em que completo mais uma importante etapa da minha vida, gostaria de agradecer a Deus, pela minha existência.

Aos meus pais Angelino e Maria de Lourdes, pelo carinho, dedicação e por terem investido na minha educação, mesmo com todas as restrições financeiras, tendo acreditado no sucesso de seus filhos, fazendo de mim o homem que sou hoje. Essa dívida para com eles é eterna, não tenho como pagar.

À minha esposa Ildineide e a minha filha Andressa, pela compreensão em aceitar os momentos em que tive que dedicar-me quase por inteiro ao mestrado, privando-nos dos momentos de lazer em família e suportando, por vezes, o meu mau humor e irritação.

À minha orientadora Prof^a Dr^a Rita de Cássia, não somente pela sua valiosíssima orientação para este trabalho, mas também por nos ter passado a sua experiência como docente e, principalmente, por mostrar-nos de forma simples e serena a sua experiência de vida. A sua contribuição durante os 02 (dois) anos de curso e a forma que encontrou para motivar os alunos foi simplesmente espetacular.

Ao professor Joseph Yartey, pela sua competência, dedicação e humildade. É um verdadeiro professor, no sentido estrito da palavra. Aprendi muito com ele.

Aos professores Marco Antônio, Enaldo, Ana Lúcia, Paulo Varandas, Isaac, Evandro, José Nelson, Bahiano, Graça, Vinícius e Perfilino, pela enorme contribuição na minha formação, visto que todos eles foram nossos professores.

Aos meus colegas Zé Luiz, David, Fábio, Zé Roberto, Rogério, Josias, Paulo, Jackson, Alécio, Acélio, Humberto, Elaine, Andréia, Lise, Magali, Ian e Ziul pois, sem a contribuição deles, dificilmente concluiria este curso.

Enfim, gostaria de agradecer a todos que torceram por mim, parentes, amigos e colegas de trabalho. Eles acompanharam a minha trajetória durante todo o período do Profmat. Por isso sabem que foi muito difícil conciliar o trabalho com o Mestrado. Acho que essa foi a pior parte, pois em virtude das atividades que exerço na Instituição de Ensino onde leciono, não havia tempo suficiente para dedicar-me como pretendia e, por isso, tive que faltar as aulas, encontros e palestras do curso por algumas vezes.

A Matemática é o alfabeto com o
qual Deus escreveu o universo.
(Galileu Galilei)

Resumo

O objetivo desta dissertação é o de propor novas atividades (exercícios) de Matemática para a Educação Básica. Tais atividades possuem caráter inovador, haja vista que são muito pouco ou nada exploradas durante as aulas de Matemática, inclusive por autores de livros didáticos ou até nos mais variados concursos vestibulares que ocorrem neste país. Trataremos, portanto, das Geometrias Não-Euclidianas, com ênfase para a Geometria do Globo Terrestre. Os exercícios propostos referem-se ao cálculo da distância entre duas cidades utilizando apenas as suas coordenadas geográficas (latitude e longitude), fusos-horários, Intensidade da Radiação Solar nos Solstícios e Equinócios, Navegação Marítima, dentre outras. A parte teórica já é abordada pela Geografia, na Educação Básica, entretanto há a necessidade do aprofundamento da parte numérica. Por isso, é essencial que o professor de Matemática conheça as consequências dos principais movimentos do planeta Terra (translação e rotação), além das suas coordenadas geográficas. As atividades aqui propostas são contextualizadas, bem como possuem o caráter interdisciplinar, como preconizam os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN).

Palavras-chave: Ensino de Matemática; Geometria Não-Euclidiana; Geometria – História; Geometria do Globo Terrestre; Navegação Marítima; Movimentos da Terra.

Abstract

The goal of this dissertation is to propose new activities (exercises) Math for Basic Education. Such activities have innovative character, given that very little or nothing are explored during math lessons, authors of textbooks in various contests or vestibular occurring in this country. We will, therefore, of the Non-Euclidean geometries, with emphasis on the geometry of the Earth Globe. The proposed exercises refer to the calculation of the distance between two cities using only their geographic coordinates (latitude and longitude), time zones, Intensity of Solar Radiation in the Solstices and Equinoxes, Maritime, among others. The theoretical part is already addressed by Geography in Elementary Education, however there is a need to deepen the numeric part. Therefore, it is necessary that the math teacher know the consequences of the movements of the Earth, beyond their geographic coordinates. The proposed activities are contextualized and have the interdisciplinary character, as recommended by the National Curriculum Parameters (PCN).

Keywords: Teaching of Mathematics, Non-Euclidean Geometry, Geometry - History; Geometry of the Earth globe; Seagoing; Movements of the Earth.

Sumário

1	Introdução	1
2	Exposição	3
2.1	Surgimento da Geometria Não-Euclidiana	3
2.2	A Geometria Hiperbólica	11
2.3	A Geometria Elíptica	16
2.4	A Geometria Esférica e a Navegação Marítima	17
2.5	Formato do Planeta Terra	21
2.6	O ângulo de Elevação do Sol e suas Consequências	30
2.7	Coordenadas Cartesianas da Superfície Esférica	37
2.8	Distâncias em Superfícies Esféricas	43
3	Atividades Propostas	47
3.1	A Geometria Esférica e a Navegação Marítima	47
3.2	Formato do Planeta Terra	47
3.3	O Ângulo de Elevação do Sol e suas Consequências	53
3.4	Distância em Superfícies Esféricas	55
4	Dados Estatísticos	56
5	Conclusão	64
	Bibliografia	66

Capítulo 1

Introdução

O presente trabalho tem o objetivo de propor atividades relacionadas à *Geometria Não-Euclidiana* na Educação Básica, ou seja, Ensino Fundamental e médio. Não se pretende aqui sugerir novos conteúdos através da reformulação de currículos, e sim, adequar os programas já existentes a situações nada ou pouco exploradas durante as nossas aulas.

Os exercícios relacionados à Geometria do Globo Terrestre são ideais para que isso ocorra, visto que não há a necessidade do aluno possuir conhecimento prévio acerca de postulados e teoremas da *Geometria Elíptica* para a resolução dos exercícios que aqui são propostos.

Isso ocorre porque a Esfera, sendo o modelo didaticamente aproximado do Planeta Terra, apresenta *retas que são círculos máximos ou geodésicas* e, para calcular a distância entre dois pontos na sua superfície, basta então determinar a distância entre dois pontos que se localizam sobre um arco de círculo, em devida consonância com as regras da geometria euclidiana, previamente conhecidas pelos alunos.

Obviamente, os exercícios devem ser bem selecionadas, visto que, em alguns casos, podemos verificar que o nosso discente do ensino fundamental e médio não possui conhecimento prévio para a sua resolução. Como já disse, não iremos propor reformulação de currículos, e sim incluir alguns modelos de exercícios pouco explorados.

De início, será abordado o histórico de como surgiram as geometrias não-euclidianas. Enfatizando algumas frustradas tentativas de demonstração do *5º Postulado de Euclides* e o motivo pelo qual os matemáticos não lograram êxito em seus objetivos, sendo entretanto muito importantes para a descoberta de um *“novo mundo”*.

Será mostrada a trajetória dos pioneiros *Gauss*, *Bolyai* e *Lobatchevsky*, até desenvolverem a *Geometria Hiperbólica* um dos tipos clássicos das *Geometrias Não-euclidianas*. Sendo que, um pouco mais tarde, *Riemann* revelou para o mundo a *Geometria Elíptica*, o que teria despertado a desconfiança de muitos matemáticos pela violação de alguns conceitos e postulados euclidianos.

Serão descritos alguns postulados e teoremas das geometrias hiperbólica e elíptica, os quais possuem a pseudoesfera e a esfera, respectivamente, como melhores representantes tridimensionais para tais modelagens. Na geometria hiperbólica, os modelos enfatizados são os de *Poincaré* e *Klein*. Mostra-se,

também, de maneira geral, como são as *retas*, *triângulos*, *quadriláteros*, bem como as demais *curvas* nessas geometrias. No caso da geometria elíptica, as retas são os *círculos máximos* na superfície esférica, o que exigiu a quebra não somente do 5º, mas também do 2º postulado de Euclides.

Uma aplicação prática da geometria elíptica que será discutida neste trabalho é a *Navegação Marítima*. Ela utiliza os postulados e teoremas segundo a navegação na superfície aproximadamente esférica da Terra. Para se ter uma idéia, na *geometria hiperbólica*, a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor que 180° , enquanto que na *geometria elíptica* essa mesma soma é maior que 180° .

Após isso, pretendemos desenvolver o estudo da esfera e seus elementos explorando sua associação com o globo terrestre. Conceitos geográficos como paralelos, meridianos, latitudes, longitudes e fusos horários estão baseados em importantes ideias geométricas que, quando trabalhadas neste contexto, conduzem o aluno a uma melhor compreensão e aprendizagem do tema.

Veremos como se dá os principais movimentos da Terra, com ênfase para a translação, pois o seu conhecimento nos permite não apenas entender as quatro estações do ano com seus equinócios e solstícios, mas também o motivo pelo qual o Trópico de Capricórnio ou o Círculo Polar Ártico são paralelos notáveis. Veremos ainda as relações entre longitude e fusos horários, bem como entre latitude e o ângulo de elevação do Sol.

Apesar de não ser um objetivo prioritário, o presente estudo também poderá servir como trabalho interdisciplinar entre a Matemática e a Geografia, utilizando-se questões que envolvam, por exemplo, cálculo de distâncias e ângulos sobre a esfera e confecção de mapas por meio de diversas projeções, assuntos esses que, da forma em que serão vistos aqui, são muito pouco explorados por ambas as disciplinas.

Capítulo 2

Exposição

2.1 Surgimento da Geometria Não-Euclidiana

2.1.1 O 5º Postulado de Euclides

Euclides viveu no Egito, mais precisamente na cidade de *Alexandria* por volta de 300 a.C. Além de ter dado nova abordagem à Filosofia e de ter definido a natureza da Matemática até o século XIX, a obra de Euclides integrou a educação superior por durante a maior parte desse tempo e continua assim até os dias atuais.

Euclides fundou uma escola em Alexandria que possuía alunos brilhantes, tendo escrito pelo menos dois livros. **Os Elementos**, sua obra mais famosa, é um dos livros mais amplamente lidos de todos os tempos, visto que depois da Bíblia é aquele que possui o maior número de edições. Não se pode considerar *Os elementos* como sendo basicamente um livro, mas sim uma série de treze rolos de pergaminhos, dos quais nenhum dos originais sobreviveu. No entanto, os mesmos foram transmitidos posteriormente através de uma série de cópias que desapareceram quase que completamente na *Idade das Trevas*.

Apesar de ter demonstrado em sua obra muitos dos teoremas ali especificados, *Euclides* em momento algum teria reivindicado a sua originalidade. Ele tinha consciência que, antes de qualquer coisa, o seu principal papel era o de organizar e sistematizar todo o conhecimento geométrico da forma em que era compreendida pelo padrão da ciência grega, tanto que a mais importante contribuição de *Os Elementos* foi a sua metodologia lógica e inovadora ao tornar explícitos os termos, formulando definições precisas, garantindo assim a compreensão mútua de todas as palavras e símbolos. Posteriormente, tornou explícitos os conceitos, apresentando de forma clara os axiomas e postulados de forma a rechaçar entendimentos ou pressuposições não anteriormente declarados. Finalmente, havia a dedução das consequências lógicas do sistema pelo emprego exclusivo de regras logicamente aceitáveis, com base nos axiomas e teoremas previamente demonstrados.

Euclides teria formulado 23 (vinte e três) definições, 05 (cinco) postulados geométricos e 05 (cinco) postulados adicionais que chamou de **noções comuns**. Com base nisso, teria demonstrado 465 (quatrocentos e sessenta e cinco) *proposições*, que hoje chamamos de *teoremas*, os quais representam essencialmente todo o conhecimento geométrico do seu tempo. É importante afirmar que *Os Elementos* não tratava de conteúdos exclusivamente geométricos, mas também relativos à aritmética e à álgebra,

embora a sua apresentação seja feita numa linguagem pesadamente geométrica. Para se ter uma noção exata, há cerca de duzentos anos, as escolas ainda utilizavam esse tipo de linguagem.

As *noções comuns* de Euclides eram proposições lógicas não geométricas, elaboradas como sendo o senso comum, enquanto que os *postulados* eram específicos à geometria. Esse tipo de distinção foi previamente elaborado por **Aristóteles**. Especifiquemos agora as noções comuns elaboradas por Euclides:

1. *Coisas iguais a uma terceira são iguais entre si;*
2. *Se quantidades iguais são adicionadas a iguais, os totais são iguais;*
3. *Se quantidades iguais são subtraídas de iguais, os restos são iguais;*
4. *Coisas que coincidem umas com as outras são iguais;*
5. *O todo é maior que qualquer de suas partes.*

Já o fundamento da geometria de Euclides reside nos 05 (cinco) postulados abaixo especificados em linguagem moderna:

1. *Dados quaisquer dois pontos, pode ser traçada uma linha reta tendo esses pontos como suas extremidades;*
2. *Qualquer linha reta pode ser prolongada indefinidamente em qualquer direção;*
3. *Dado qualquer ponto, pode ser desenhado um círculo com qualquer raio, com aquele ponto ao centro;*
4. *Todos os ângulos retos são iguais;*
5. *Dada uma linha reta que cruze duas outras linhas retas, de forma que a soma dos ângulos internos do mesmo lado seja menor que dois ângulos retos, então as duas linhas, quando prolongadas, acabarão por se encontrar.*

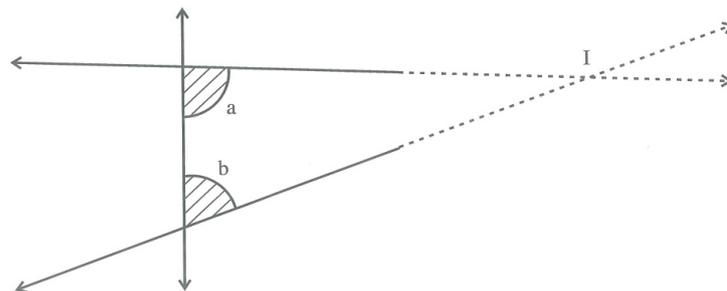


Figura 2.1: Visualização do 5º Postulado de Euclides

Observa-se que o **5º postulado de Euclides** não possui a mesma concisão dos quatro primeiros, bem como parece não ter a evidência suficiente para ser aceito sem demonstração, razão pela qual sempre foi criticado. O próprio Euclides parece ter sempre evitado a sua utilização, haja vista a sua não observância na demonstração dos seus vinte e oito primeiros teoremas, fato esse que somente aconteceu com a demonstração do seu vigésimo nono teorema que diz:

Teorema 1. *Duas paralelas cortadas por uma transversal formam ângulos alternos internos iguais.*

O próprio recíproco do 5º postulado foi provado por Euclides como sendo um teorema. Eis:

Teorema 2. *A soma de dois ângulos de um triângulo é menor que dois ângulos retos.*

Por isso supunha-se que o 5º postulado também seria suscetível de prova.

De todas as formulações distintas, mas equivalentes do 5º postulado, aquela que ficou mais conhecida por possuir uma linguagem mais simples foi o denominado **Postulado ou Axioma das paralelas**, que diz o seguinte:

Por um ponto fora de uma reta passa uma única paralela a essa reta.

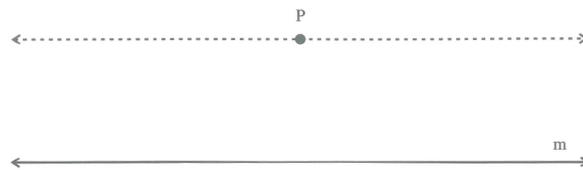


Figura 2.2: Visualização do Postulado das Paralelas

Vale ressaltar que entende-se por **paralelas** duas retas de um plano que não se encontram em qualquer direção.

Assim sendo, o *Axioma das Paralelas* poderia ser “violado” de duas maneiras: *poderia não existir reta paralela* ou então, *mais de uma reta paralela* que passe por um ponto externo a determinada reta.

2.1.2 Tentativas de demonstração do 5º Postulado

Diante do que foi anteriormente citado, uma gama de matemáticos passaram a procurar uma demonstração plausível para o *5º postulado de Euclides*. No entanto, as várias tentativas realizadas recaíram em axiomas equivalentes, como é o caso do já citado *Axioma das Paralelas*. Contudo, o que restou de mais importante foi o progressivo avanço e conseqüente preparação do caminho para o encontro das *Geometrias Não-Euclidianas*.

O nome de **Ptolomeu**, no século 2º d.C., é encontrado em diversas obras como sendo o primeiro a tentar demonstrar o *5º postulado*. Apesar do seu raciocínio ser bastante complicado, a essência do seu método era simples, pois assumiu uma forma alternativa do postulado (*o Axioma das Paralelas*) e então deduziu a sua forma original. Veremos que esse tipo de redundância cometida por Ptolomeu não ficou restrito à sua pessoa, tornando-se bastante comum entre os matemáticos que posteriormente tentaram demonstrar o postulado.

Proclus (410-485 d.C.) utilizou, de forma menos técnica, um postulado escrito em um dos livros do matemático Escocês **John Playfair** (1748-1819) que dizia o seguinte:

Por um ponto fora de uma reta não se pode traçar mais que uma reta paralela à reta dada

Este postulado ficou conhecido como **Postulado de Playfair**. Observe que há uma distinção entre o *Postulado de Playfair* e o *Axioma das Paralelas*, pois enquanto o primeiro diz que *não se pode traçar mais que uma reta paralela*, ou seja, nenhuma ou apenas uma, o segundo atesta a *unicidade* dessa reta. Já a *proposição 27* de Euclides afirma que:

“Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma reta paralela à reta dada.”

Baseado em experiências meramente visuais, *Proclus* imaginou duas ruas como sendo retas paralelas e uma outra rua diagonal que partia de uma das paralelas com destino à outra. Assim sendo, uma pessoa que percorre a rua diagonal vai cada vez mais se afastando de uma e conseqüentemente se aproximando da outra. Ele imaginou um triângulo retângulo cujos vértices eram:

1. O ponto onde a pessoa se encontrava na diagonal;
2. O ponto de encontro da “rua diagonal” com a “rua paralela de destino”;
3. O ponto de projeção da pessoa sobre a “rua paralela de destino” (ângulo reto).

Proclus concebeu que as dimensões dos triângulos retângulos que iam se formando, de acordo com o deslocamento de uma pessoa que partia de uma das paralelas em direção à outra, através da diagonal, estavam sempre diminuindo e chegariam a ponto de se encontrar. Estava alcançada a distância máxima entre as paralelas. Concluiu, então, que *a rua diagonal deve cruzar a rua paralela de destino*, que era o que devia ser demonstrado.

Para contestar o que foi citado por *Proclus*, vamos citar os termos da série harmônica ($\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$). Nessa sequência o número seguinte será sempre menor que o anterior, porém jamais chegará a zero. O erro de *Proclus*, apesar de não ter admitido, foi o de especificar que a distância entre as “ruas paralelas” é sempre constante, empregando, dessa forma, o *Axioma das Paralelas*, que é equivalente ao próprio postulado.

Nasir Eddin al-Tusi teria influenciado o matemático inglês **John Wallis** em sua tentativa demonstração do 5º postulado de Euclides. *Wallis* teve a idéia de substituir o *desagradável 5º postulado* por outro intuitivamente óbvio. Elaborou, então, o *Axioma de Wallis*, que diz o seguinte:

“Dado qualquer lado de qualquer triângulo, esse triângulo pode ser aumentado ou diminuído, de modo que o lado escolhido tenha qualquer tamanho que você queira, mas mantendo os ângulos dos triângulos inalterados”.

Wallis não obteve o reconhecimento dos matemáticos da época, pelo fato de ter substituído um postulado por outro, entretanto se essa regra não for válida seria correto afirmar que não existem triângulos semelhantes? Podemos observar, então, que por mais que se negue, a visualização geométrica exercia uma enorme influência sobre os matemáticos.

O jesuíta italiano **Girolamo Saccheri** produziu em 1733 uma importantíssima contribuição para o tema, pois tomou um quadrilátero no qual dois lados opostos *AD* e *BC* são iguais e perpendiculares ao

lado AB. Ele demonstrou que os ângulos em C e D são necessariamente iguais, tendo considerado três possibilidades:

1. Os ângulos em C e D são obtusos;
2. Os ângulos em C e D são retos;
3. Os ângulos em C e D são agudos.

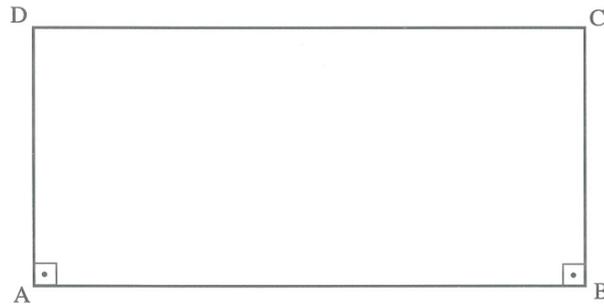


Figura 2.3: Quadrilátero de Saccheri

Provou que se uma das hipóteses vale para um quadrilátero valerá para qualquer outro quadrilátero; provou também que a soma dos ângulos C e D vale mais que 2 retos, 2 retos e menos que 2 retos, respectivamente, nos casos (1), (2) e (3). O trabalho de *Saccheri* permaneceu pouco conhecido, porém vários outros matemáticos obtiveram resultados a ele relacionados, especialmente **Legendre**, **Lambert**, **D’alembert** e **Laplace**. O próprio *Saccheri* bem como *Legendre* rejeitaram a hipótese dos ângulos obtusos porque, segundo eles, elas conduziam a “absurdos” quando se supunha que retas tivessem comprimentos infinitos; eles também tinham objeções à hipótese dos ângulos agudos e daí concluíram que o *quinto postulado* é equivalente à proposição que diz que “a soma dos ângulos de um triângulo é igual a 2 retos”.

Observe que se *Saccheri* estivesse mais “aberto” a aceitar as outras duas hipóteses, ao invés de considerá-las um absurdo, teria descoberto mais cedo as geometrias não-euclidianas. No entanto, o que o teria levado não somente a ele, mas também aos demais matemáticos a falharem na tentativa de dar validade ao *5º postulado*, os fazendo desprezar tudo aquilo que achavam estranho, absurdo ou sem sentido? Eles incorreram naquilo que os lógicos chamam de *círculo vicioso* e que consiste em *supor verdadeiro aquilo mesmo que se deseja provar*. O que, na verdade, se observou foi o emprego de propriedades das retas paralelas que são equivalentes ao próprio postulado.

É certo que a *vizualização geométrica* causou falsas impressões pré-definidas e, de certo ponto, ora intuitivas, para o universo da geometria euclidiana. Basta ver o que diz as *definições IV e XXXV do livro I de “Elementos de Geometria”*, versão latina de *Commandino*:

1. *Definição IV* - “Linha reta é aquela que está posta igualmente entre as suas extremidades”
2. *Definição XXXV* - “Linhas paralelas, ou equidistantes são linhas retas, que existindo no mesmo plano, e sendo produzidas de ambas as partes, nunca se chegam a tocar”.

Dessa forma, o primeiro que se desvencilhasse desse tipo de conceito, meramente ligado ao único tipo de geometria que conheciam, estaria pronto para descobrir os caminhos de uma nova geometria. É o que veremos na próxima subseção.

2.1.3 O descobrimento de uma nova geometria



Johann Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855)

Figura 2.4: Johann Carl Friedrich Gauss

Johan Carl Friedrich Gauss, que chegou a Göttingen em 1795 como estudante, demonstrou um grande interesse pela questão do *5º postulado de Euclides*. **Abraham Kaestner**, um dos seus professores, até colecionava escritos acerca da história do postulado, tanto que teria influenciado **Georg Kluegel**, um de seus alunos, a escrever como tese de doutorado uma análise de 28 (vinte e oito) tentativas fracassadas de sua demonstração. Entretanto, ninguém estava “aberto” ou devidamente preparado para o que *Gauss* mais suspeitava: *que o postulado poderia não valer*. Embora tenha guardado seus pensamentos consigo próprio, *Gaus* escreveu suas idéias em um diário científico que somente foi descoberto após 43 (quarenta e três) anos da sua morte.

Foi somente entre 1813 e 1816, quando era professor de Astronomia-Matemática na Universidade de Göttingen que *Gauss* desenvolveu equações que relacionavam as partes de um triângulo, cuja estrutura denominamos hoje de **Geometria Hiperbólica**. Tudo indica que por volta de 1824 ele já possuía uma teoria completa sobre o assunto, tanto que no dia 06 de novembro daquele ano, *Gauss* escreveu uma carta para **F. A. Taurinos**, um advogado admirador da Matemática, que em sua nova geometria, especial, consistente, e bem diferente da Euclidiana, *a soma dos ângulos internos de um triângulo valia menos que 180º*. Vale ressaltar que *Gauss* também teria se correspondido com **Bessel** a respeito do assunto, e que somente não teria publicado os resultados de seus trabalhos por recear os “*clamores dos beócios*”, divulgando-os apenas para as pessoas em quem confiava. Essa atitude de *Gauss* até hoje desperta a desconfiança de muitos pesquisadores quanto a sua veracidade.

Embora *Gauss* não os tenha publicado, dois outros matemáticos, que tinham um constante contato com ele, publicaram trabalhos semelhantes, quase ao mesmo tempo. **Janos Bolyai**, filho de **Wolfgang Bolyai**, um amigo antigo de *Gauss*, teria escrito em 23 de novembro de 1823 uma carta a seu pai, na qual dizia que teria encontrado um espaço não-euclidiano. No mesmo ano, na cidade de Kazan, na Rússia, um aluno de **Johann Bartels**, também amigo de *Gauss*, chamado **Nicolay Ivanovich Lobachevsky** explorava as consequências da violação do *5º postulado* num livro que não chegou a ser

publicado.



János Bolyai (1802 - 1860)

Figura 2.5: Janos Bolyai

Tanto *Wolfgang* quanto *Bartels* mantinham discussões com *Gauss* acerca de espaços não-euclidianos, o que também despertou a desconfiança da comunidade Matemática acerca da originalidade das obras anteriormente citadas. *Lobachevsky* divulgou o seu trabalho ao público no ano de 1826, o tendo publicado em 1829 em uma desconhecida revista russa chamada *O Mensageiro de Kazan*. Já *Bolyai*, o publicou em um dos apêndices de um dos livros do seu pai chamado *Tentamen*. *Bolyai* não mais publicou qualquer outro trabalho diverso sobre Matemática. *Lobachevsky*, apesar de ter obtido de *Gauss* a resposta de que já teria encontrado resultados análogos, foi indicado pelo mesmo para que fosse aceito como membro correspondente da *Sociedade Real de Ciência*, em Göttingen, o que de fato aconteceu em 1842, além de ter se tornado um administrador bem sucedido, levando-o a sagrar-se Reitor da Universidade de Kazan.



Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792 - 1856)

Figura 2.6: Nicolay Ivanovich Lobatchevsky

Em 1867, após a morte de *Gauss*, os artigos de *Bolyai* e *Lobachevsky* foram incluídos na segunda edição do influente livro de *Richard Baltzer* *Elemente der Mathematik*, o que os tornou referência entre os trabalhos da nova geometria. No entanto, o que encerrou de vez com a questão da prova do 5º postulado de *Euclides* foi o trabalho do matemático italiano **Eugênio Beltrami**. Ele teria demonstrado

que se a Geometria euclidiana forma uma estrutura matemática consistente, então o mesmo deve ocorrer com os espaços não-euclidianos recém descobertos.



Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866)

Figura 2.7: Georg Bernard Riemann

Georg Bernard Riemann nasceu em 1826, em Breselenz, próximo à cidade natal de *Gauss*. Assim como *Gauss*, *Riemann* era genial. Em 1846, ainda com 19 anos de idade, matriculou-se na Universidade de Göttingen, onde *Gauss* era professor, para o curso de Teologia, mas tendo mudado logo para a Matemática. Após um curto período em Berlim, *Riemann* voltou para Göttingen em 1849 para finalizar o seu doutorado. Em 1851, sua tese foi analisada, dentre outros, por *Gauss*, que ficou bastante impressionado com o seu trabalho, o adjectivando como “*mente criativa, ativa, verdadeiramente matemática e uma imaginação gloriosamente fértil*”. Como nos casos de *Bolyai* e *Lobachevsky*, *Gauss* ainda teria lido o dito que já havia feito trabalho semelhante antes, mas não o publicara, o que realmente foi confirmado após a sua morte.

Em 1853, aos 27 anos de idade, *Riemann* desejava muito ser conferencista de Göttingen e, para tanto, teria que fazer uma conferência como teste. Ele entregou três temas para a escolha dos professores da faculdade e estava muito bem preparado para o primeiro e segundo. *Gauss* escolheu o terceiro tema, justamente aquele em que *Riemann* não tinha tanto conhecimento, mas aquele que *Gauss* tinha interesse por toda a sua vida, que era “*Sobre as hipóteses em que a geometria se baseia*”. Sendo assim, elaborou uma palestra em sete semanas e, no dia 10 de junho de 1854 a apresentou. *Riemann* expôs a sua palestra no contexto da *Geometria Diferencial*, focalizando-se sobre as propriedades das regiões infinitamente pequenas de uma superfície.

Em nenhum momento, *Riemann* mencionou o nome “*geometria não-euclidiana*”, mas claramente explicou como a *esfera* poderia ser interpretada como um *espaço elíptico bidimensional*. Ele escolheu a *superfície esférica* como plano; seus pontos eram as coordenadas, ou seja, a *latitude* e a *longitude* do ponto; suas retas eram os *círculos máximos* ou *geodésicas*, sobre a esfera. Ele declarou também que o 2º *postulado de Euclides* não era necessário para fazer os segmentos de reta arbitrariamente longos, mas somente para garantir que as retas não tivessem limites.

Diante de tantas violações, a comunidade Matemática observou as inovações do jovem talento

com muita desconfiança, pois não viam muita consistência na sua geometria. *Riemann* também não deu explicações para o fato dos círculos máximos se cruzarem nos dois pólos, ou seja, até então, duas retas somente poderiam se cruzar em um único ponto, o que não acontece com as geodésicas esféricas.

Apesar dessas questões abertas, a palestra de *Riemann* foi considerada uma das obras primas da Matemática. Inclusive *Gauss*, em uma das cartas que escrevera para *Wolfgang*, em 1832, já teria previsto esta gama de imprecisões que nem ele foi capaz de sustentar.

Em 1857, aos 31 anos, *Riemann* conquistou o grau de Professor-Assistente. Após a morte de *Dirichlet*, *Riemann* foi promovido para o lugar de *Gauss* na faculdade. Aos 39 anos de idade, após se casar e ter uma filha, *Riemann* faleceu de tuberculose. A obra de *Riemann* sobre *Geometria Diferencial* tornou-se mais tarde a pedra angular da *Teoria da Relatividade Geral de Einstein*, entretanto a contribuição de *Riemann* foi muito mais ampla que o imaginável, pois se percebeu que a necessidade de alterar postulados, além do *Postulado das Paralelas*, era necessária para libertar não somente a geometria mas toda a Matemática. Em 1871, o matemático Prussiano **Félix Klein** mostrou como corrigir as aparentes contradições do modelo esférico de *Riemann* para o *Espaço Elíptico*.

2.2 A Geometria Hiperbólica

Violando-se o 5º *Postulado de Euclides*, existem 02 (dois) tipos clássicos de geometrias não-euclidianas: **A Geometria Hiperbólica** e a **A Geometria Elíptica**.

Gauss, *Bolyai* e *Lobachevsky* descobriram o *Espaço Hiperbólico*. Nesse tipo de geometria, o 5º *postulado* é substituído pelo seguinte:

“Para qualquer reta, existe mais de uma reta paralela que passa por qualquer ponto externo dado”.

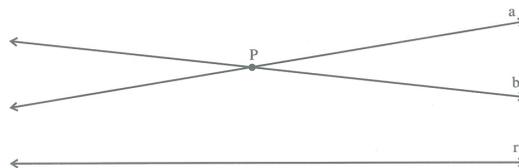


Figura 2.8: Violação do 5º Postulado de Euclides na Geometria Hiperbólica

Na superfície da *Pseudoesfera*, encontra-se a possibilidade da afirmação do postulado acima citado, mais conhecido como *Postulado de Lobachevsky*. Determinam-se as retas *a* e *b* marcando uma distância arbitrária *KQ* sobre a reta *r*. Com centro em *P* e um raio *s* qualquer, traça-se o arco de círculo que intercepta a perpendicular *TQ* a *r* nos pontos *S*₁ e *S*₂. Estes dois pontos com o ponto *P* determinam as retas *a* e *b* (Ver figura 2.9).

Uma das consequências desse novo postulado é que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre menor que 180°. A diferença entre 180° e essa soma é chamada de *deficiência*, *defeito* ou *diferença angular*. Triângulos muito maiores possuem *deficiência* muito maior, enquanto que triângulos

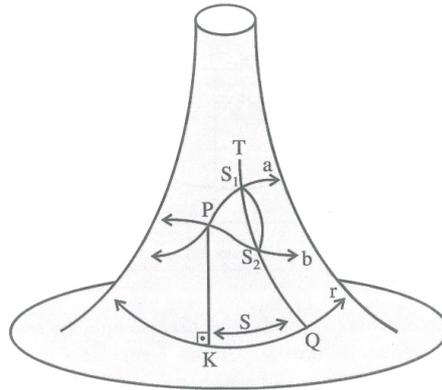


Figura 2.9: Pseudoesfera

menores estão mais próximos do *espaço euclidiano*, sem no entanto, esta última possibilidade ser atingida. Pode-se concluir que *triângulos que possuem a mesma deficiência têm áreas iguais e viceversa*.

Os primeiros a criarem um modelo visualizável para este tipo de geometria foram **Eugênio Beltrami** e, de uma forma mais simples, **Henri Poincaré**.

2.2.1 O Modelo de Poincaré

Neste modelo, as retas são arcos de círculos perpendiculares ao círculo que representa o plano hiperbólico. AB e EF são as retas que se cortam, enquanto AM e BN são retas paralelas à reta AB .

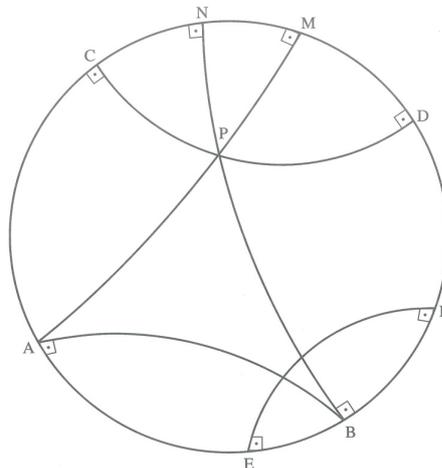


Figura 2.10: Modelo de Poincaré

O *Modelo de Poincaré* para o espaço hiperbólico é um laboratório que facilita a visualização de alguns dos teoremas e propriedades incomuns que os matemáticos haviam trabalhado arduamente para descobrir. Vamos, por exemplo, tentar desenhar um retângulo. Para tanto, desenha-se primeiro uma reta de *Poincaré*. No mesmo lado da base, desenha-se dois segmentos de reta de *Poincaré*, que sejam perpendiculares a ela. Finalmente, conecte os dois segmentos que, tal como a base, seja perpendicular a ambos. Concluímos então, que é impossível haver retângulos no modelo de *Poincaré*, fato esse extensível

à toda geometria hiperbólica.

O *Modelo de Poincaré* não é apenas um modelo do espaço hiperbólico, e sim, o próprio espaço hiperbólico em duas dimensões. Com isso, os matemáticos conseguiram provar que todas as descrições matemáticas possíveis do plano hiperbólico são isomórficas (iguais).

2.2.2 O Modelo de Klein

O matemático **Félix Klein** apresentou um modelo, também plano, de geometria hiperbólica. No entanto, difere do modelo de *Poincaré* no tocante às retas. Toma-se em um plano euclidiano um círculo. As retas do plano são cordas do círculo, excluindo-se suas extremidades.

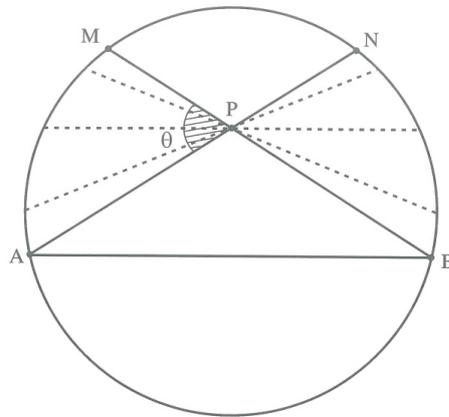


Figura 2.11: Modelo de Klein

Por P traçam-se as retas PA e PB , paralelas à reta AB . As infinitas retas que passam por P e estão situadas no interior do ângulo θ são as retas *não-secantes*. Para complementar o modelo é preciso que as retas tenham extensão infinita dentro de uma área finita. vence-se esta dificuldade ao se introduzir uma unidade de medida variável, ou seja, seu tamanho diminui na proporção que se aproxima da fronteira do plano. Dessa forma, a extensão de uma reta torna-se infinita, pois se insistirmos em medi-la, não conseguiremos atingir a extremidade da corda. Imagine uma pessoa andando, com a intenção de cobrir uma certa distância, mas que, a medida que vai se aproximando do fim os seus passos vão diminuindo de tamanho, de modo que por mais que se caminhe, não consegue atingir o seu objetivo.

2.2.3 Quadriláteros e Triângulos na Geometria Hiperbólica

Vimos anteriormente que o jesuíta italiano *Girolamo Saccheri*, em sua tentativa de demonstrar o *5º Postulado de Euclides*, criou um quadrilátero que ficou conhecido como *Quadrilátero de Saccheri*. Este quadrilátero tem dois ângulos retos e dois ângulos congruentes. No entanto, diferentemente da geometria euclidiana, o *Quadrilátero de Saccheri na geometria hiperbólica* não possui os ângulos retos em C e D , pois são congruentes e agudos.

Assim como *Saccheri*, **Johann Heinrich Lambert**, um suíço-alemão, tentou provar o *5º postulado* por um argumento indireto. Ele começou com um quadrilátero com três ângulos retos, agora

chamado de *Quadrilátero de Lambert*. Para a geometria hiperbólica, o quarto ângulo do *Quadrilátero de Lambert* também é agudo. A sua demonstração reside no fato de que todo *Quadrilátero de Saccheri* pode ser dividido em dois *Quadriláteros de Lambert*.

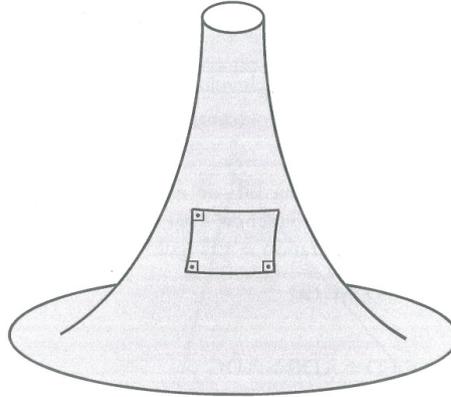


Figura 2.12: Quadrilátero hiperbólico de Lambert

Na geometria hiperbólica, se os ângulos de dois triângulos são congruentes dois a dois, esses triângulos não são semelhantes como na geometria euclidiana, mas sim congruentes. Outro fato interessante é que o tamanho e a forma dos triângulos não são independentes, contudo todos os triângulos de mesma forma possuem, necessariamente, a mesma área. Não existem figuras semelhantes na geometria hiperbólica e, dois triângulos são equivalentes se, e somente se, possuem a mesma deficiência.

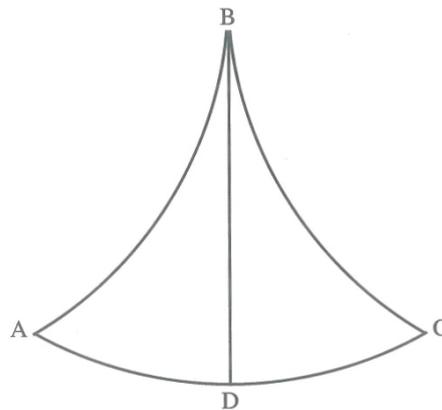


Figura 2.13: Triângulo hiperbólico na Pseudoesfera

2.2.4 Curvas na Geometria Hiperbólica

Continua válida a proposição que diz que o raio de um círculo é perpendicular a qualquer tangente desse círculo, no seu devido ponto de tangência. Na geometria hiperbólica existem dois tipos de curva: a *limitante*, também chamada de *orociclo* e a *equidistante*, também chamada de *hiperciclo*.

A curva *limitante* é aquela descrita por um vetor, cuja direção é sempre perpendicular a cada

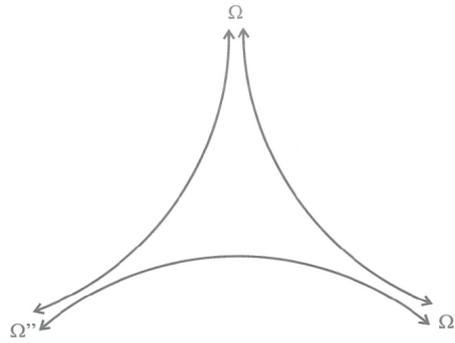


Figura 2.14: Triângulo hiperbólico cujos vértices são *pontos ideais*

uma das infinitas retas do feixe, e cujo vértice é o *ponto ideal* Ω . Diz-se que *ponto ideal* é aquele em que ambas as retas paralelas tendem a se encontrar, apesar de não haver pontos comuns entre as retas paralelas. Na figura abaixo, $ABCD$ é curva *limitante*.

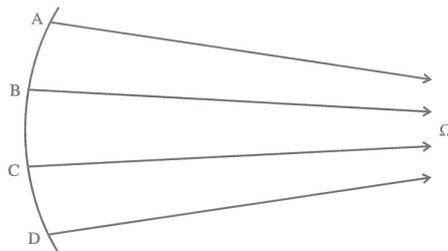


Figura 2.15: Curva Limitante ou orociclo

A curva *equidistante* é a trajetória dada por um vetor cuja direção é sempre perpendicular a cada uma das retas do feixe e a mesma distância da perpendicular comum a essas retas. Na figura abaixo, $ABCD$ é um dos ramos dessa curva, enquanto EF é a sua linha de base.

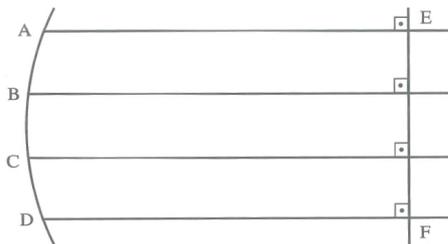


Figura 2.16: Curva equidistante ou hiperciclo

Na geometria hiperbólica, as curvas *limitante*, *equidistante* e mais o *círculo* propriamente dito, podem todos ser chamados de *círculos*. Logo, *três pontos não alinhados, no plano hiperbólico, podem pertencer a um círculo, a uma curva limitante ou a um dos ramos de uma curva equidistante*.

2.3 A Geometria Elíptica

Riemann postulou que, em sua geometria, *as retas são fechadas e finitas, mas sim ilimitadas*. Dessa forma, o 5º Postulado de Euclides cede espaço para o Postulado de Riemann, que diz o seguinte:

”Todas as retas que passam por um ponto P , fora de uma reta r de um plano, cortam a reta r ”.

Na Geometria Elíptica, *as retas são os círculos máximos ou geodésicas* de uma superfície esférica. Ao contrário da geometria hiperbólica, *a soma dos ângulos de um triângulo na geometria elíptica é superior a 180°* e sua curvatura é *constante positiva*, enquanto na primeira a curvatura é *constante negativa*. Na geometria euclidiana a curvatura é *nula*.

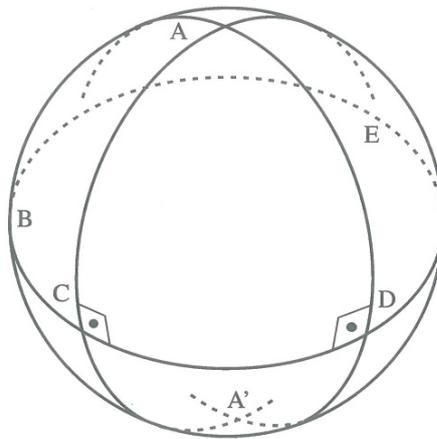


Figura 2.17: Na geometria elíptica as retas são círculos máximos

Na geometria elíptica, *a distância de qualquer reta a seu pólo é uma constante igual para todas as retas*. Logo, *uma reta tem comprimento finito, que é quatro vezes a distância polar*. Não há como dar a volta em torno de um círculo máximo sem interceptá-lo. Assim sendo, na geometria elíptica, além de não haver retas paralelas, também não existem retas não-secantes, visto que duas retas sempre se encontram.

É de se admirar que o *Espaço Elíptico Bidimensional* já era conhecido e estudado, num contexto diferente, pelos gregos e até por *Gauss*. No entanto, eles não perceberam a sua importância como um exemplo de espaço elíptico.

2.3.1 Quadriláteros e Triângulos na Geometria Elíptica

Os ângulos do topo do *Quadrilátero de Saccheri*, para a geometria elíptica, são *congruentes e obtusos*. Observe que o conceito de ângulo, tanto na geometria elíptica quanto na hiperbólica, está diretamente ligado ao ângulo formado pelas *tangentes* às curvas no ponto considerado.

Ao contrário da geometria hiperbólica, o *Quadrilátero de Lambert* para a geometria elíptica possui o seu quarto ângulo obtuso, sendo que a sua demonstração é análoga àquela da geometria hiperbólica,

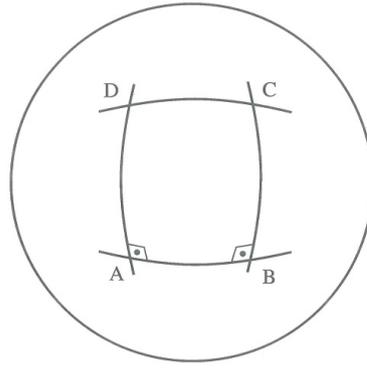


Figura 2.18: Quadrilátero de Saccheri elíptico

pois todo o *Quadrilátero de Saccheri* aqui também poderá ser dividido em dois *Quadriláteros de Lambert*.

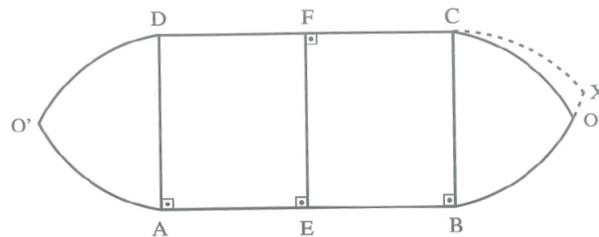


Figura 2.19: Os ângulos do topo do Quadrilátero de Saccheri elíptico são obtusos

Sabe-se que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo elíptico é maior que 180° . Como todo quadrilátero elíptico pode ser dividido em dois triângulos elípticos, pode-se concluir que *a soma dos ângulos internos de um quadrilátero elíptico vale mais que 360°* .

2.4 A Geometria Esférica e a Navegação Marítima

2.4.1 Definições básicas

Definição 1. (Superfície Esférica) Seja O um ponto e r um número real positivo. A **superfície esférica de centro O e raio r** é o conjunto de todos os pontos P do espaço cuja distância a O é igual a r .

Definição 2. (Pontos Interiores e Exteriores) Os pontos do espaço cuja distância a O é menor que r são **interiores** à superfície esférica e aqueles cuja distância a O é maior que r são **exteriores** a ela.

Definição 3. (Esfera) A reunião da superfície esférica de centro O e raio r com seus pontos interiores é chamada a **esfera de centro O e raio r** .

Definição 4. (Raio e Corda) O segmento que une o centro a um ponto qualquer da superfície esférica é denominado um **raio** da superfície esférica, enquanto que o segmento que une dois pontos distintos da superfície esférica é chamado uma **corda** da superfície esférica.

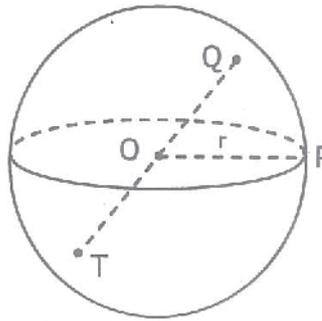


Figura 2.20: Elementos da Esfera

Definição 5. (Diâmetro) Uma corda que contém o centro é chamada **um diâmetro** da superfície esférica.

Evidentemente o comprimento de qualquer diâmetro é o número $2r$ que é chamado o diâmetro.

Observamos que a palavra raio é usada com dois sentidos: pode ser o número r ou um segmento \overline{OP} . Isto, porém, não causa confusão uma vez que é sempre claro qual o significado utilizado. Um comentário análogo vale para a palavra **diâmetro**.

Neste texto a notação \overline{PQ} representa o segmento de extremos P e Q enquanto que PQ indica o seu comprimento.

Na figura anterior r é o raio da superfície esférica, \overline{OP} , \overline{OQ} e \overline{OT} são raios, \overline{PQ} e \overline{PT} são cordas, \overline{QT} é um diâmetro e $2r = QT$ é o diâmetro da superfície esférica.

Definição 6. (Ângulo Esférico) Sabendo que os **círculos máximos** são as retas da superfície esférica, o **ângulo esférico** é definido como a **interseção de dois círculos máximos**, e sua medida é a mesma do ângulo plano formado pelas **tangentes do ponto de interseção**.

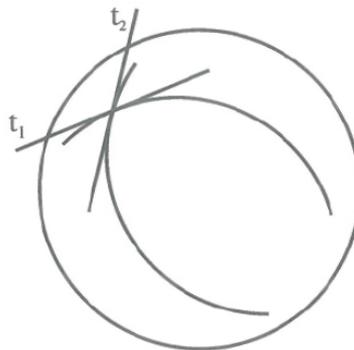


Figura 2.21: Ângulo esférico

Definição 7. (Circunferência Máxima) A interseção da superfície esférica com um plano passando pelo seu centro é chamada uma **circunferência máxima** da superfície esférica.

Há uma forte razão para esse nome: as circunferências máximas são as circunferências de maior raio contidas na superfície esférica. Veremos adiante que o Equador é uma circunferência máxima, mas os outros paralelos no globo terrestre não o são. Eles são menores que o Equador, tornando-se muito pequenos perto dos Polos Norte e Sul.

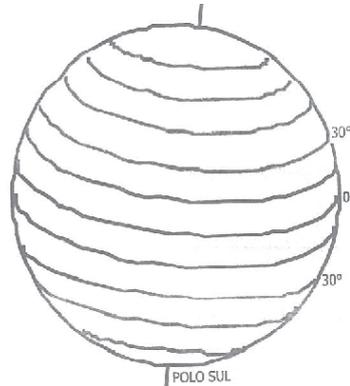


Figura 2.22: Paralelos

Definição 8. (Triângulo Esférico) *Sejam A , B e C três pontos distintos sobre uma esfera e não pertencentes a um mesmo círculo máximo. A figura formada pelos arcos de círculos máximos que unem tais pontos, dois a dois, chama-se **triângulo esférico**.*

Os arcos de círculo máximo, opostos a cada um dos pontos considerados, ou seja, os *lados do triângulo esférico*, são nomeados como acontece na geometria plana. Dessa forma, os vértices são letras maiúsculas e os lados de acordo com a respectiva letra minúscula do ângulo oposto.

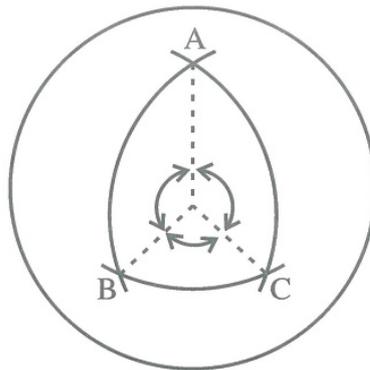


Figura 2.23: Triângulo esférico

Além dos lados e ângulos, os triângulos esféricos possuem três alturas, três bissetrizes, três medianas, dentre outras, as quais são definidas da mesma forma que os triângulos planos. Os *lados do triângulo esférico* subentendem ângulos com vértices no centro da Terra. Por isso podem ser *medidos em graus ou radianos*. Na navegação marítima a unidade de medida padrão é a *Milha Marítima* e a velocidade é medida em *Nós*, ou seja, *Milhas por Hora*.

A geometria esférica, sendo um modelo da geometria elíptica, impõe que a soma dos ângulos de qualquer dos seus triângulos seja maior que 180° e menor que 540° . A soma dos lados de um triângulo esférico deve ser maior que 180° e menor que 360° , sendo que nenhum dos lados pode ser maior que 180° . Vale destacar, mais uma vez, que os lados são medidos em graus devido ao conceito de ângulo esférico, pois os arcos de círculo máximo podem ser medidos tanto em graus quanto em radianos. Não existe triângulo esférico cuja soma dos lados seja igual a 360° , pois se assim fosse possível, configurar-se-ia um círculo máximo que, por definição, não pode conter os três pontos considerados.

Os triângulos esféricos classificam-se:

I - Quanto aos ângulos:

- a) Retângulo - um ângulo reto;
- b) Birretângulo - dois ângulos reos;
- c) Trirretângulo - três ângulos retos.

II - Quanto aos lados:

- a) Retilátero - um lado medindo 90° ;
- b) Birretilátero - dois lados medindo 90° , cada um;
- c) Trirretilátero - cada um dos lados medindo 90° .

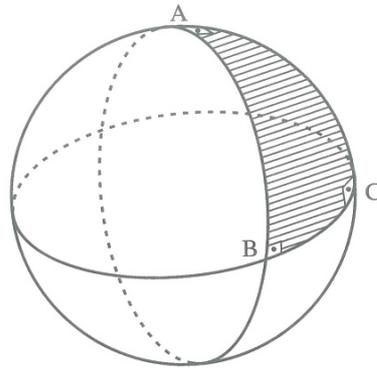


Figura 2.24: Triângulo trirretângulo e trirretilátero

Percebe-se que se um triângulo esférico é trirretângulo será também trirretilátero e viceversa. trata-se, então, de um triângulo que cobre exatamente a oitava parte de uma superfície esférica.

2.4.2 A Navegação Marítima

A navegação marítima é uma aplicação prática da geometria não-euclidiana, mais particularmente da geometria elíptica. Quando se faz a navegação seguindo uma reta, o navegador emprega os seus conhecimentos da geometria do triângulo plano. Quando porém, a navegação é sobre um arco de círculo máximo, é preciso que se conheçam as fórmulas que relacionam os lados e os ângulos dos triângulos esféricos, os quais são modelos para os triângulos da geometria elíptica de *Riemann*.

A milha marítima foi criada de forma a facilitar os cálculos de navegação, visto que corresponde ao comprimento do *arco de meridiano de um minuto*. Dessa forma, quando um navio se desloca ao longo de um meridiano (que é um círculo máximo) por uma distância de 1° (um grau), o mesmo percorreu 60 (sessenta) milhas marítimas. No entanto, a Terra não possui a forma perfeita de uma esfera, acarretando que seus meridianos se assemelhem a uma elipse com curvatura variável em cada um de seus pontos. Se for medido nas proximidades de um dos pólos, onde o meridiano é menos “curvo”, o seu comprimento não é o mesmo que quando medido nas proximidades da *linha do Equador*. Por isso, foi criada a *Milha Marítima Internacional*, que vem a ser a média das milhas marítimas medidas no pólo e no Equador, possuindo comprimento de *1852 metros*. Mas, para efeito de cálculos, sempre se utiliza a correspondência de 1° (um grau) de círculo máximo para cada 60 (sessenta) milhas marítimas. Essa diferença torna-se desprezível em relação aos imprevistos e incertezas da navegação.

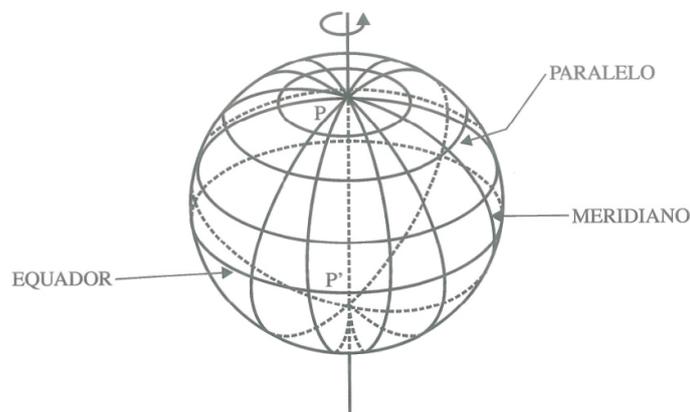


Figura 2.25: Paralelos e Meridianos

2.4.3 Alternativas de Rotas para um Navio

Uma rota é *ortodrômica* se seguir um *arco de círculo máximo da Terra* e *loxodrômica* se não for o caso. Os Comandantes de navios, durante uma travessia oceânica, deparam-se comumente em optar por uma rota ortodrômica ou a loxodrômica. Se escolher a primeira, não obstante ser a mais curta, dependendo das coordenadas geográficas e da estação do ano, poderá alcançar icebergs em altas latitudes, enquanto que a loxodrômica evitaria esse inconveniente. Porém, pelo fato dessa última não ser uma geodésica, a distância percorrida é maior que no primeiro caso. O que se ganha em tempo e combustível poderá não justificar o risco do encontro com gelo e fortes temporais, comuns nas proximidades dos pólos, o que pode exigir uma grande experiência por parte do Comandante.

2.5 Formato do Planeta Terra

A Terra não é uma esfera perfeita, uma vez que é achatada nos polos. Na verdade, a Terra é aproximadamente um **elipsoide**.

A figura (2.27) mostra uma secção da superfície terrestre através de um plano que contém a reta que liga os Polos Norte e Sul. Esta secção aproxima-se de uma elipse cujo semieixo maior a é a metade

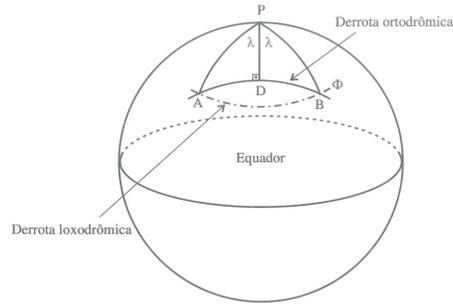


Figura 2.26: Rotas ortodrômica e loxodrômica

do diâmetro do Equador e o semieixo menor b é a metade da distância entre os polos.

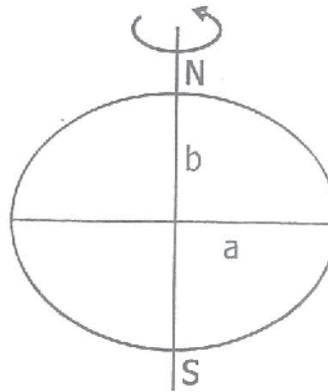


Figura 2.27: Seção aproximada da Terra

A superfície terrestre é a superfície de revolução gerada por essa elipse quando esta gira em torno da reta que passa pelos polos.

A razão $\varepsilon = \frac{a-b}{b}$ chama-se **achatamento** da Terra.

A tabela seguinte mostra valores dos semieixos a e b e do correspondente achatamento da Terra, obtidos por alguns pesquisadores.

	a (metros)	b (metros)	ε
Bessel (1841)	6.377.397	6.356.078	0,0033541
Clark (1880)	6.378.249	6.356.515	0,0034191
Helmert (1906)	6.378.200	6.356.949	0,0033443
Hayford (1924)	6.378.388	6.356.911	0,0033785
Krassovski (1940)	6.378.245	6.356.863	0,0033636

Tabela 2.1: Achatamento da Terra

O valor extremamente pequeno de ε nos permite, para efeitos didáticos, desprezar esse achata-

mento e considerar a Terra como se fosse uma esfera.

A superfície da Terra passa a ser considerada daqui por diante como um globo: o globo terrestre. O globo terrestre é ainda o nome do instrumento didático que representa a Terra como uma esfera.

Iniciamos estabelecendo a nomenclatura apropriada. A figura a seguir ilustra um globo terrestre.

O ponto N representa o **Polo Norte** e o ponto S o **Polo Sul**. A reta determinada por N e S é chamada o **eixo polar**. Ela é a reta em torno da qual a Terra efetua seu movimento de rotação.

O plano que passa pelo centro da superfície esférica e é perpendicular ao eixo polar chama-se o **plano do Equador**.

O **Equador** é a intersecção do plano do Equador com a superfície esférica. O Equador é, portanto, uma circunferência máxima.

Um plano que passa pelo centro da superfície esférica divide-a em duas partes chamadas hemisférios.

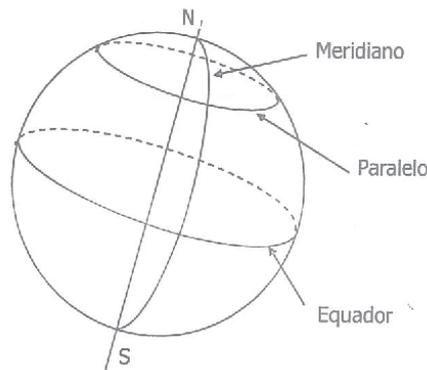


Figura 2.28: Meridianos e Paralelos

O plano do Equador divide a superfície terrestre em dois hemisférios: o **Hemisfério Norte** (que contém o Polo Norte) e o **Hemisfério Sul** (que contém o Polo Sul).

Os **paralelos** são as secções da superfície terrestre através de planos paralelos (ou coincidentes) ao plano do Equador. São então circunferências. Os paralelos notáveis são:

- o Equador
- o Trópico de Câncer
- o Trópico de Capricórnio

- o Círculo Polar Ártico
- o Círculo Polar Antártico

Os **meridianos** são semicircunferências que ligam os Polos Norte e Sul por meio de arcos máximos, isto é, arcos contidos em circunferências máximas que passam pelos polos. Convém ressaltar que os meridianos, ao contrário dos paralelos, não são circunferências. Além disso, eles estão contidos em planos perpendiculares ao plano do Equador. O meridiano mais notável é o de **Greenwich**, nome de uma localidade próxima a Londres, onde está instalado um observatório astronômico.

Observação. *Os livros de Geografia utilizam com muita frequência a palavra “círculo” para designar a circunferência. Em particular, descrevem o Equador como um círculo máximo e utilizam nomes como círculo polar. Isto é, na verdade, um abuso de linguagem consagrado pelo uso sistemático ao longo do tempo. A nomenclatura utilizada por profissionais não matemáticos, no caso os geógrafos, não precisa coincidir necessariamente com a usada pelos matemáticos.*

2.5.1 Coordenadas Geográficas da Terra

O globo terrestre serve para localizar um determinado ponto ou região da Terra. O aluno deve ter acesso a um mapa para efetuar esta localização.

Há razões práticas para se ultrapassar o estágio da localização ingênua (isto é, apontar o dedo para o lugar e dizer: é aqui!) sendo necessário criar um sistema de coordenadas para dar a localização precisa de um ponto no globo.

Para isto utilizamos as chamadas **coordenadas geográficas**: latitude e longitude.

A **latitude** de um ponto P é a medida do arco de meridiano que passa por P situado entre o paralelo que contém P e o Equador. A latitude é expressa em graus, minutos e segundos e se mede de 0° a 90° N (norte) ou de 0° a 90° S (sul).

A **longitude** de um ponto P é a medida do arco de paralelo que passa por P situado entre o meridiano que contém P e o meridiano de Greenwich. A longitude é expressa em graus, minutos e segundos e se mede de 0° a 180° E (leste) ou de 0° a 180° W (oeste).

Na figura a seguir temos que $\theta = m(\angle EOP)$ é a latitude de P enquanto que $\varphi = m(\angle GMP)$ é a longitude de P. Pontos sobre um mesmo paralelo possuem latitudes iguais e pontos sobre um mesmo meridiano possuem longitudes iguais.

2.5.2 Os Movimentos da Terra

A Terra possui dois movimentos principais: o de **rotação**, em torno de seu eixo polar, e o de **translação**, em torno do Sol. As consequências destes dois movimentos são muito importantes em nosso

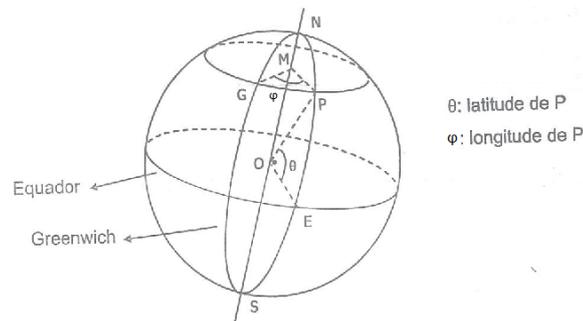


Figura 2.29: Coordenadas geográficas

dia-a-dia.

Para dar uma volta completa em torno de seu eixo polar, a Terra leva **24 horas** ou **um dia**. Durante esta rotação, uma metade da Terra está voltada para o Sol, do qual recebe luz e calor: nela então é dia. A outra metade não recebe os raios solares: nela é então noite. Assim, a sucessão dos dias e das noites é uma consequência da rotação da Terra.

Sob a hipótese de que os raios solares são paralelos temos que, em cada instante, a curva sobre o globo terrestre que separa o dia da noite é uma circunferência máxima.

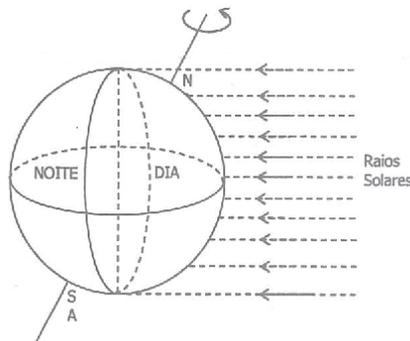


Figura 2.30: Raios solares

Todos os dias vemos o Sol aparecer no **nascente**, também chamado oriente ou **leste**, subir no céu e se deitar no **poente**, também chamado **ocidente** ou **oeste**. Temos a impressão de que é o Sol que caminha no céu. Na realidade, não é isso que acontece. A Terra é que gira em torno de seu eixo polar da esquerda para direita, isto é, do oeste para leste, causando a impressão do movimento do Sol. Chamamos a isto **movimento aparente do Sol**.

O momento em que o Sol, em sua trajetória aparente, está mais alto no céu é o **meio-dia solar**. Neste momento a sombra projetada de uma haste vertical tem o menor comprimento possível. O meio-dia solar para uma particular localidade ocorre quando o meridiano que a contém corta a reta imaginária determinada pelos centros da Terra e do Sol.

Além de girar em torno de seu eixo, a Terra gira também em torno do Sol. Nesta **translação** em torno do Sol, a Terra descreve uma curva elíptica denominada **órbita**. A trajetória da órbita da Terra é chamada **eclíptica** e o plano que a contém é referido como o **plano da eclíptica**. Para dar uma volta completa em torno do Sol, a Terra leva 365 dias e 6 horas, isto é, pouco mais que um ano. Para corrigir esta diferença, foi necessário aumentar um dia no ano, a cada período de quatro anos. Nesses anos, chamados bissextos, o mês de fevereiro tem 29 dias.

Um fato extremamente importante deve ser observado: em sua translação em torno do Sol, o eixo da Terra não é perpendicular ao plano da eclíptica, mas **inclinado**, sempre na mesma direção, formando um ângulo de $23^{\circ}27'$ com esta perpendicular.

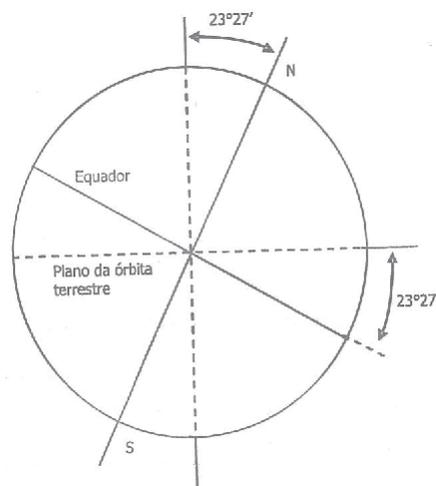


Figura 2.31: Inclinação do eixo da Terra

Se o eixo da Terra fosse perpendicular ao plano da órbita, durante qualquer dia do ano, o Hemisfério Norte receberia a mesma quantidade de luz e calor que o Hemisfério Sul. Mas, como o eixo é inclinado, os dias e as noites não têm a mesma duração em todos os lugares da Terra. Vejamos por que.

Observe a figura abaixo atentamente. Ela mostra as posições da Terra em relação ao Sol ao longo do ano. Como você pode ver, a posição da Terra não é a mesma em todos os meses do ano.

Apenas em duas ocasiões a circunferência máxima que separa a zona iluminada daquela que está no escuro passa rigorosamente pelos polos. Aproximadamente em **21 de março** e em **23 de setembro** a noite e o dia duram, em todos os lugares da Terra, cerca de 12 horas cada um: são os **equinócios** (noites iguais).

Nestas datas a reta imaginária determinada pelos centros da Terra e do Sol corta o globo terrestre num ponto do paralelo de latitude 0° , isto é, **os raios solares incidem perpendicularmente sobre a linha do Equador**, que recebe então mais calor. Para o norte ou para o sul do Equador, o calor vai diminuindo em direção aos polos e os dois hemisférios são igualmente iluminados e aquecidos.

No dia 21 de março começa para nós (no Hemisfério Sul) o **outono**, enquanto que para os habi-

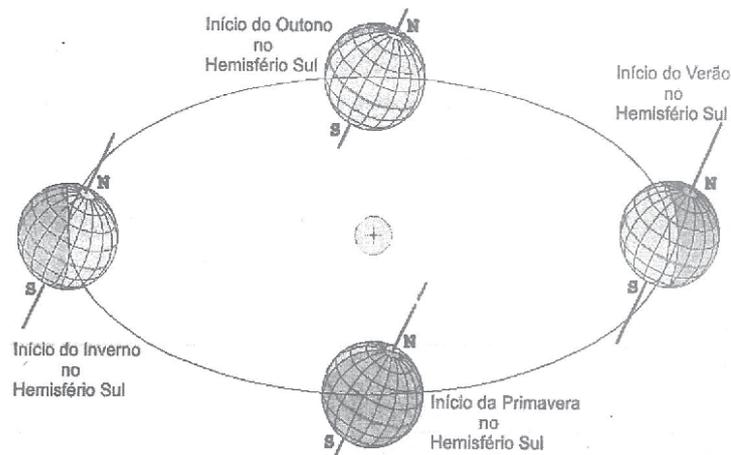


Figura 2.32: Posições da Terra em relação ao Sol durante o ano

tantes do Hemisfério Norte é a **primavera** que tem início.

O dia 23 de setembro marca o começo da primavera no Hemisfério Sul e o do outono no Hemisfério Norte.

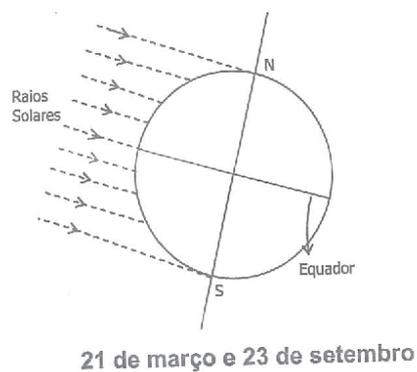


Figura 2.33: Equinócio

Vejamos agora o que acontece de setembro a dezembro no Hemisfério Sul, de acordo com o movimento que a Terra faz em torno do Sol.

Durante esta época, os dias vão ficando mais longos e as noites mais curtas, até que, por volta de **21 de dezembro**, temos o dia mais longo e a noite mais curta: é o que chamamos de **solstício de verão**. A Terra inclina o Polo Sul na direção mais próxima do Sol. Nesse dia, começa no Hemisfério Sul o **verão**.

O que se passa no Hemisfério Norte nessa época? Aí a situação se inverte: os dias vão ficando mais curtos e as noites mais longas. A 21 de dezembro, os habitantes daquele hemisfério têm a noite mais longa do ano e o dia mais curto: é o **solstício de inverno**. Para eles, começa o **inverno**.

Vejamos agora o que acontece de setembro a dezembro no Hemisfério Sul, de acordo com o movimento que a Terra faz em torno do Sol.

Durante esta época, os dias vão ficando mais longos e as noites mais curtas, até que, por volta de 21 de dezembro, temos o dia mais longo e a noite mais curta: é o que chamamos de solstício de verão. A Terra inclina o Polo Sul na direção mais próxima do Sol. Nesse dia, começa no Hemisfério Sul o verão.

O que se passa no Hemisfério Norte nessa época? Aí a situação se inverte: os dias vão ficando mais curtos e as noites mais longas. A 21 de dezembro, os habitantes daquele hemisfério têm a noite mais longa do ano e o dia mais curto: é o solstício de inverno. Para eles, começa o inverno.

Você já entendeu por que isso acontece? Observe a figura abaixo. Qual hemisfério está mais exposto aos raios solares em 21 de dezembro? Nessa data a reta imaginária determinada pelos centros da Terra e do Sol corta o globo terrestre num ponto do paralelo de latitude $23^{\circ}27'$ S, chamado Trópico de Capricórnio. Assim, no solstício de dezembro, **os raios solares incidem perpendicularmente sobre o Trópico de Capricórnio** que recebe então mais luz e calor fazendo com que o Hemisfério Sul seja mais iluminado e mais quente que o Hemisfério Norte.

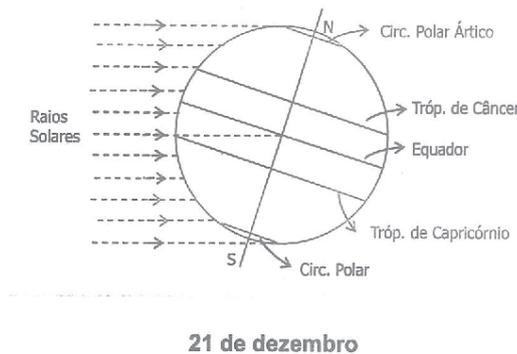


Figura 2.34: Solstício de verão no hemisfério Sul

Você já percebeu o que acontece nas regiões polares em 21 de dezembro? Nesse dia, os raios solares não ultrapassam o limite do paralelo de latitude $66^{\circ}33'N$ chamado **Círculo Polar Ártico**. Os pontos situados entre o Círculo Polar Ártico e o Polo Norte ficam inteiramente no escuro, independentemente da sua longitude. Não há assim dia, e a noite tem duração de 24 horas.

Enquanto isso, no Hemisfério Sul, a zona situada entre o **Círculo Polar Antártico**, paralelo $66^{\circ}33'S$, e o Polo Sul fica iluminada durante 24 horas. Não há assim noite, e o dia tem duração de 24 horas.

Vamos acompanhar agora o movimento da Terra de março até junho. Nessa época, o Hemisfério Sul vai ficando cada vez menos exposto aos raios solares, ao contrário do Hemisfério Norte. Assim, no Hemisfério Sul onde moramos, os dias vão ficando mais curtos e as noites mais longas até que, por volta de **21 de junho**, temos a noite mais longa do ano: **é o nosso solstício de inverno**. Nessa data tem início para nós o **inverno**.

No Hemisfério Norte, a data 21 de junho marca o dia mais longo do ano: é o **solstício de verão**, ou início do **verão**. A Terra inclina seu Polo Norte na direção mais próxima do Sol. A reta imaginária determinada pelos centros da Terra e do Sol corta o globo terrestre num ponto do paralelo de latitude $23^{\circ}27'N$, chamado Trópico de Câncer. Logo, no solstício de junho, **os raios solares incidem perpendicularmente sobre o Trópico de Câncer** e o Hemisfério Norte é, portanto, mais iluminado e mais quente que o Hemisfério Sul.

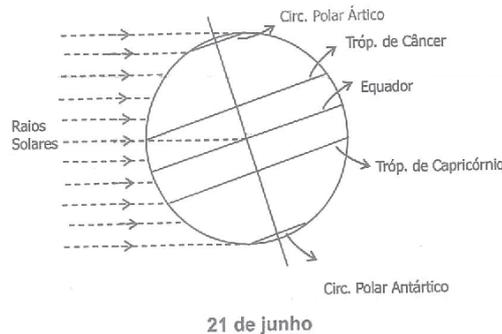


Figura 2.35: Solstício de verão no hemisfério Norte

Vejamos o que ocorre nas regiões polares nesta época. A zona situada entre o Círculo Polar Antártico e o polo Sul não é atingida pelos raios solares e a noite duras 24 horas, enquanto que a situada entre o Círculo Polar Ártico e o polo Norte permanece iluminada durante 24 horas. Não há noite e o dia tem duração de 24 horas.

2.5.3 Os Fusos Horários

No momento em que for meio-dia em São Paulo, será também meio-dia em todos os lugares situados ao longo do meridiano que passa por São Paulo: é o que chamamos **hora verdadeira**. Todas as localidades situadas sobre um mesmo meridiano têm a mesma hora verdadeira.

Assim, se é meio-dia em Belo Horizonte, isto é, se o Sol sobre Belo Horizonte está em seu ponto mais alto no céu, o mesmo não acontecerá em Brasília. Isso ocorre porque Belo Horizonte está no meridiano de longitude $44^{\circ}W$, enquanto Brasília encontra-se no meridiano de longitude $48^{\circ}W$. Portanto, meio-dia em Brasília ocorrerá um pouco depois do meio-dia em Belo Horizonte (lembre-se que a Terra gira em torno de seu eixo polar da esquerda para direita). Afinal, se em Belo Horizonte é exatamente meio-dia, qual será a hora verdadeira em Brasília?

Assim, a hora verdadeira não é a mesma em Belo Horizonte, Brasília ou São Paulo. Você já imaginou a confusão que seria se cada lugar tivesse uma hora diferente, mesmo se tratando de lugares próximos uns dos outros? Cada vez que viajássemos para Leste ou para Oeste teríamos que mudar várias vezes os ponteiros do relógio.

Para tornar as coisas mais simples, foi necessário dividir o globo em 24 partes aproximadamente iguais, uma vez que a Terra leva 24 horas para efetuar seu movimento de rotação. Resultou assim o que chamamos de **fusos horários**. Cada fuso horário corresponde a uma faixa limitada por dois meridianos, distantes 15° um do outro (observe que $360^\circ : 24 = 15^\circ$). Dessa forma, embora haja diferença na hora verdadeira das localidades situadas dentro de um mesmo fuso horário, a hora marcada nos relógios será a mesma para todas essas localidades. É o que chamamos de **hora oficial**. Assim, Rio de Janeiro, Brasília, Belo Horizonte, São Paulo, embora sejam cidades situadas em meridianos diferentes, por encontrarem-se no mesmo fuso horário têm a mesma hora oficial.

Conforme mostra a figura abaixo, países pouco extensos no sentido da longitude, como a Itália e o Paraguai, têm um único fuso horário. Mas países muito extensos possuem vários fusos horários: os Estados Unidos, por exemplo, possuem quatro fusos.

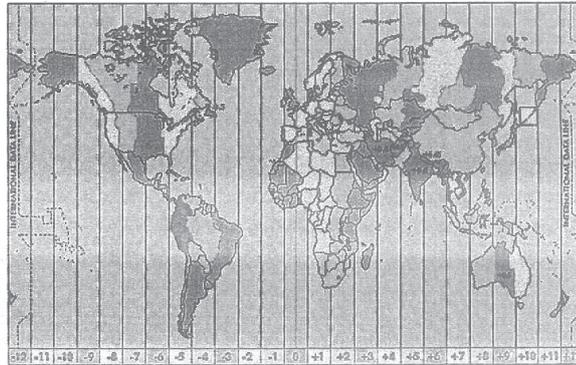


Figura 2.36: Mapa de fusos horários

2.6 O ângulo de Elevação do Sol e suas Consequências

Vimos anteriormente que as estações do ano são consequência da inclinação do eixo da Terra em relação à perpendicular ao plano da eclíptica. A relação entre esta inclinação e a quantidade relativa de energia solar recebida por localidades com diferentes latitudes é uma questão do mundo real que será agora analisada.

A grande maioria da energia solar nunca alcança a superfície da Terra. Porém, a intensidade de radiação que a alcança varia de acordo com o chamado ângulo de elevação do Sol.

Na figura (2.37), a circunferência C contém o meridiano que passa por uma localidade P do globo terrestre e t é a reta tangente a C em P . O menor ângulo formado pelos raios solares e pela reta t é chamado o **ângulo de elevação do Sol ao meio-dia solar** em P .

O nosso objetivo agora é o de calcular a intensidade relativa solar que alcança a superfície da Terra em diferentes localidades do mundo e em diferentes épocas do ano. Para esse propósito, intensidade relativa é definida como a razão da intensidade de radiação solar incidente na superfície pela intensidade de radiação se os raios incidissem perpendicularmente à superfície (ângulo de elevação com medida igual

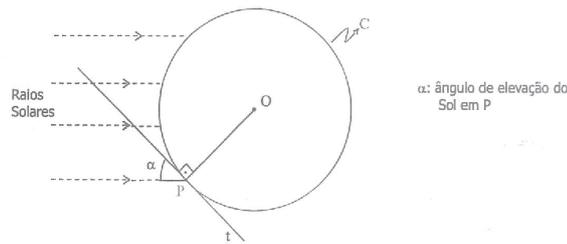


Figura 2.37: Ângulo de elevação do Sol

a 90°).

Você já reparou que a luz solar parece mais quente quando o Sol está “mais alto”? Você é capaz de explicar por que ao meio-dia de um dia claro de verão é muito mais quente que a noite ou a manhã do mesmo dia? O que faz o inverno frio e o verão quente? As respostas a todas estas perguntas estão relacionadas com o ângulo de elevação do Sol. Veremos a seguir que quanto mais próximo de 90° a medida deste ângulo estiver, maior a intensidade da radiação solar. Apesar disso, muitas vezes é mais quente às 15h que ao meio-dia, pois, embora a superfície da Terra receba mais energia solar ao meio-dia, a energia acumulada na atmosfera, desde manhã até este horário, frequentemente torna estas horas as mais quentes do dia.

A atividade seguinte oferece um bom modelo para quantificar a relação entre a medida do ângulo de elevação do Sol e a intensidade relativa da radiação solar recebida por uma particular cidade. Escureça a sala e acenda uma lanterna sobre um pedaço de papel branco *A*. Toda a área do papel será iluminada pela posição perpendicular da lanterna. Coloque outro pedaço de papel idêntico na frente de *A*, mas incline-o de maneira como mostrada por *B*. Discuta qual posição do papel, *A* ou *B*,

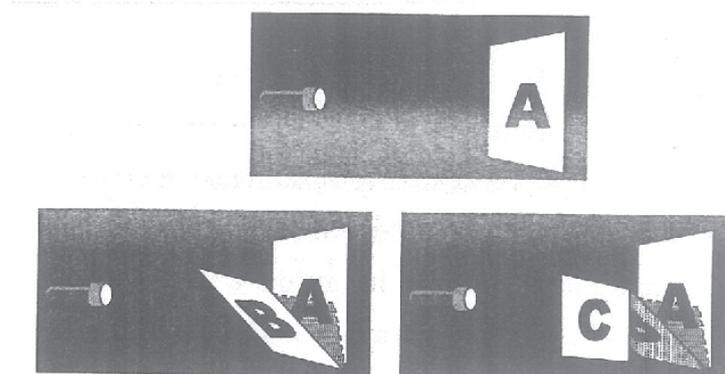


Figura 2.38: Experiência com a intensidade da radiação solar - I

recebe mais energia luminosa. Observe a sombra que *B* projeta em *A*, quando *B* é mais e mais inclinado. Note que a diminuição da sombra indica que a quantidade de luz sobre *B* está diminuindo. A quantidade de energia luminosa recebida pelo papel inclinado é a mesma recebida por *C*, onde *C* é paralelo a *A*.

Na figura a seguir, a ilustração da esquerda mostra a visão lateral quando os raios solares atingem A verticalmente, ou perpendicularmente à superfície. As ilustrações do meio e da direita mostram a quantidade relativamente menor de energia que a folha de papel recebe quando o ângulo de elevação do Sol é reduzido.

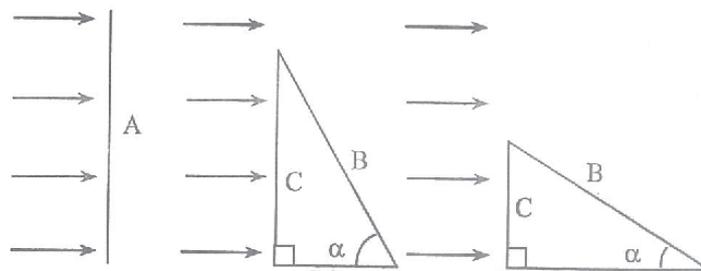


Figura 2.39: Experiência com a intensidade da radiação solar - II

Quanto mais o papel é inclinado, menos energia luminosa ele recebe. Nas ilustrações anteriores, A e B são na realidade áreas retangulares, mas como as larguras destas áreas são as mesmas, podemos desconsiderá-las e levar em conta apenas os comprimentos mostrados na figura acima.

O comprimento de B é a medida da hipotenusa do triângulo retângulo, α é a medida do ângulo de elevação do Sol e o comprimento de C é a medida do lado oposto a α . A razão entre o comprimento de C e o comprimento de B , que depende do ângulo de elevação e é igual a $\text{sen}\alpha$, nos dá uma medida para a intensidade relativa da luz solar. Se o comprimento de B é tomado como 1, então $\text{sen}\alpha = C/1 = C$. Por exemplo, se o ângulo do papel B mede 90° , isto é, B é perpendicular à direção da luz solar, então $\text{sen } 90^\circ = 1$ e a intensidade relativa da luz solar é 1 ou, em porcentagem, 100%. Como $\text{sen } 80^\circ \approx 0,9848$, temos que quando o ângulo de elevação mede 80° , o papel recebe aproximadamente 98% da radiação solar disponível.

Neste modelo, o pedaço de papel representa uma área da Terra e o ângulo do papel representa o ângulo de elevação do Sol. Quando o Sol se torna visível pela primeira vez de manhã, certa área recebe a luz solar sob um ângulo extremamente pequeno e a intensidade relativa da radiação solar é pequena nesta área. Quando é meio-dia a luz solar é inclinada ao mínimo, ou está perto de se tornar vertical. Ao fim do dia, os raios solares incidem na Terra novamente com o menor ângulo possível. Isto explica por que a luz solar pela manhã ou pela tarde não é tão quente quanto ao meio-dia.

2.6.1 O ângulo de Elevação do Sol nos Equinócios

Vamos calcular a medida desse ângulo ao meio-dia solar nos dias de equinócios de primavera e outono. Como vimos anteriormente, nesses dias os raios solares incidem perpendicularmente sobre o Equador. Tomemos, por exemplo, a cidade de Porto Alegre localizada a 30° de latitude sul.

Na figura (2.40), a reta \overleftrightarrow{PB} é tangente a Terra no ponto P , que representa Porto Alegre, O é o centro da Terra e C é um ponto da reta \overleftrightarrow{OP} com P entre C e O . Como $m(\angle BOP) = 30^\circ$ temos

$m(\angle APC) = 30^\circ$ (são ângulos correspondentes no contexto de retas paralelas – note que \overleftrightarrow{AP} e \overleftrightarrow{BO} são paralelas aos raios solares). Logo $m(\angle APB) = 60^\circ$ uma vez que $\angle BPC$ é reto.

O ângulo de elevação do Sol ao meio-dia solar mede então 60° durante os equinócios de primavera e outono em Porto Alegre e também em todas as localidades que estão situadas a 30° de latitude sul. Note que o ângulo de elevação do Sol nesses dias e a latitude são ângulos complementares. Para calcular a intensidade relativa da radiação solar encontre $\sin 60^\circ$. Uma calculadora mostrará aproximadamente 0,8660,

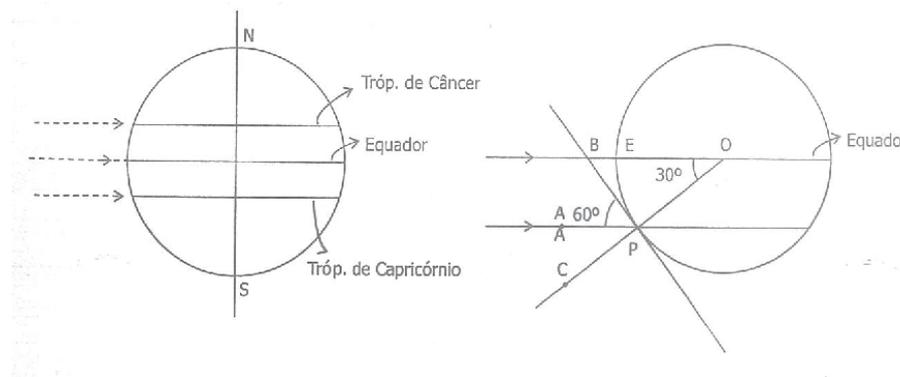


Figura 2.40: Ângulo de elevação do Sol nos equinócios

indicando que a intensidade do Sol em Porto Alegre nos dias de equinócios é cerca de 86% da que seria se os raios solares incidissem perpendicularmente à superfície, ou ainda, 86% da intensidade do Sol que atinge o ponto E localizado sobre o Equador e que tem a mesma longitude de Porto Alegre.

Pelo mesmo método, podemos calcular a intensidade relativa da radiação solar recebida por qualquer cidade cuja latitude seja conhecida. Por exemplo, Santa Cruz, Argentina, está localizada a 50° de latitude sul. Portanto, o ângulo de elevação do Sol ao meio-dia solar nos dias de equinócios mede $90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$.

Para calcular a intensidade relativa da radiação solar que a cidade recebe nesses dias, encontre $\sin 40^\circ$. A calculadora mostrará aproximadamente 0,6427. A intensidade relativa da radiação solar é cerca de 64% ao meio-dia solar em Santa Cruz, nos equinócios de primavera e outono.

2.6.2 O ângulo de Elevação do Sol nos Solstícios

Vamos agora calcular a medida do ângulo de elevação do Sol ao meio-dia solar no dia de solstício de junho. Sabemos que nesse dia os raios solares incidem perpendicularmente sobre o Trópico de Câncer, que está aproximadamente a $23^\circ 30'$ de latitude norte.

A ilustração da esquerda na figura seguinte mostra o ângulo de elevação do Sol em Cleveland (EUA) localizada a 41° de latitude norte. A reta \overleftrightarrow{PB} é tangente a Terra no ponto P que representa Cleveland, O é o centro da Terra e C é um ponto da reta \overleftrightarrow{OP} , com P entre C e O . Como \overleftrightarrow{AP} e \overleftrightarrow{BO} são paralelas aos raios solares temos

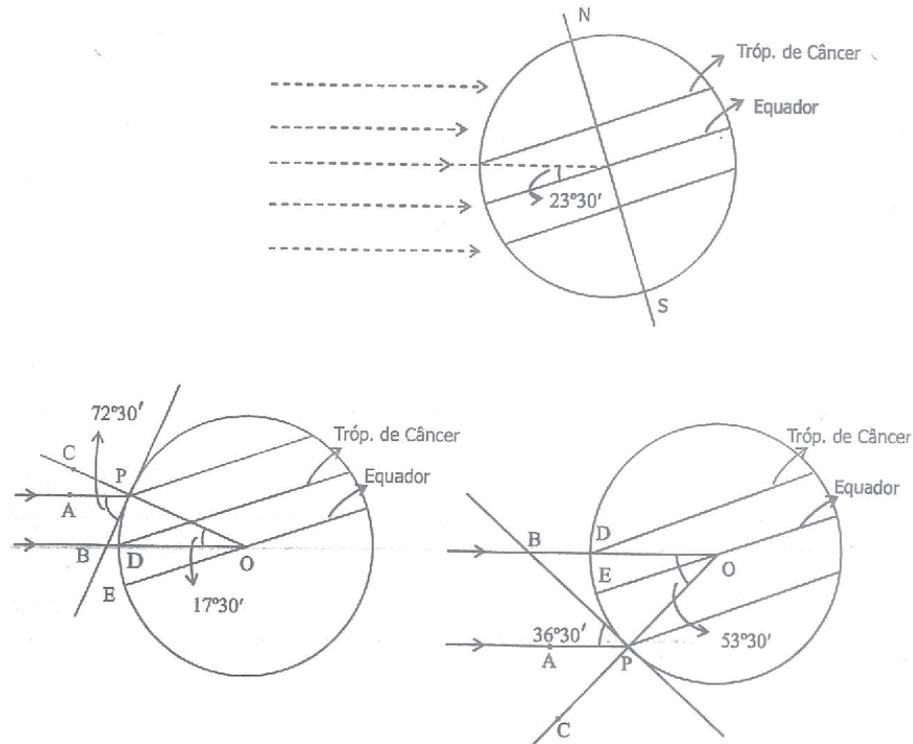


Figura 2.41: Ângulo de elevação do Sol nos solstícios - I

$$\begin{aligned}
 m(\angle APC) &= m(\angle BOP) \\
 &= m(\angle EOP) - m(\angle EOB) \\
 &= 41^\circ - 23^\circ 30' \\
 &= 17^\circ 30'
 \end{aligned}$$

Uma vez que o ângulo BPC é reto segue que APB , que é o ângulo de elevação do Sol ao meio-dia solar, tem medida

$$90^\circ - 17^\circ 30' = 72^\circ 30'$$

Cleveland e outras cidades localizadas a 41° de latitude norte recebem o maior brilho solar direto do ano durante o dia de solstício de junho, quando o ângulo de elevação do Sol mede $72^\circ 30'$ ao meio-dia solar. Para obter a intensidade relativa da radiação solar que atinge Cleveland nesta hora encontre $\sin 72^\circ 30'$. A calculadora mostrará aproximadamente 0,9537 indicando que Cleveland recebe cerca de 95% da radiação solar que incidiria se o ângulo fosse de 90° ao meio-dia no solstício de junho, ou ainda, 95% da intensidade do Sol que atinge o ponto D localizado sobre o Trópico de Câncer e que tem a mesma longitude de Cleveland.

A ilustração da direita na figura anterior mostra o ângulo de elevação do Sol em Porto Alegre. A reta é tangente a Terra no ponto P que representa Porto Alegre, P está C e O com e sendo paralelas

aos raios solares. Como P está no Hemisfério Sul, a medida do ângulo BOP é igual a

$$m(\angle EOP) + m(\angle EOB) = 30^\circ + 23^\circ 30' = 53^\circ 30'$$

e, pela congruência de ângulos correspondentes no paralelismo, $m(\angle APC) = 53^\circ 30'$. Portanto, $\angle APB$, que é o ângulo de elevação do Sol ao meio-dia solar, tem medida

$$90^\circ - 53^\circ 30' = 36^\circ 30'$$

Porto Alegre e outras cidades localizadas a 30° de latitude sul recebem o menor brilho solar direto do ano durante o dia de solstício de junho, quando o ângulo de elevação do Sol mede $36^\circ 30'$ ao meio-dia solar. Para obter a intensidade relativa da radiação solar que atinge Porto Alegre nesta hora encontre $\sin 36^\circ 30'$. A calculadora mostrará aproximadamente 0,5948 indicando que Porto Alegre recebe cerca de 59% da radiação solar que incidiria se o ângulo fosse de 90° ao meio-dia no solstício de junho, isto é, 59% da intensidade do Sol que atinge o ponto D localizado sobre o Trópico de Câncer e que tem a mesma longitude de Porto Alegre.

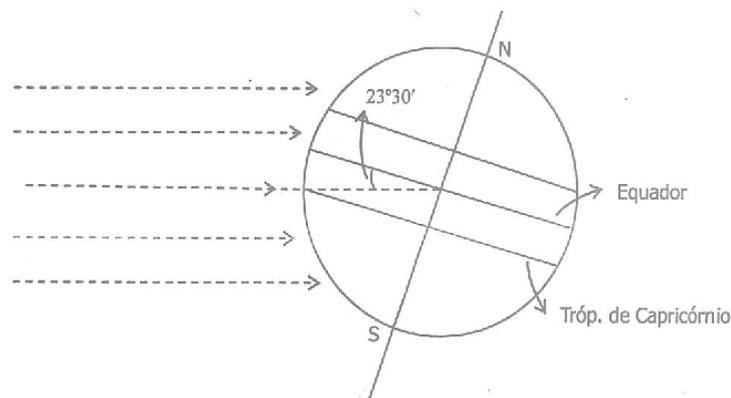


Figura 2.42: Ângulo de elevação do Sol nos solstícios - II

Analogamente podemos calcular a medida do ângulo de elevação do Sol ao meio-dia solar no dia de solstício de dezembro. Nesse dia os raios solares incidem perpendicularmente sobre o Trópico de Capricórnio, que está aproximadamente a $23^\circ 30'$ de latitude sul.

A figura a seguir mostra o ângulo de elevação do Sol novamente em Cleveland. A reta \overleftrightarrow{PB} é tangente a Terra no ponto P que representa Cleveland, P está entre C e O com \overleftrightarrow{AP} e \overleftrightarrow{BO} sendo paralelas aos raios solares. Como P está no Hemisfério Norte, a medida do ângulo $\angle BOP$ é igual a

$$m(\angle EOP) + m(\angle EOB) = 41^\circ + 23^\circ 30' = 64^\circ 30'$$

e, pela congruência de ângulos correspondentes no paralelismo, $m(\angle APC) = 64^\circ 30'$. Portanto, $\angle APB$, que é o ângulo de elevação do Sol ao meio-dia solar, tem medida

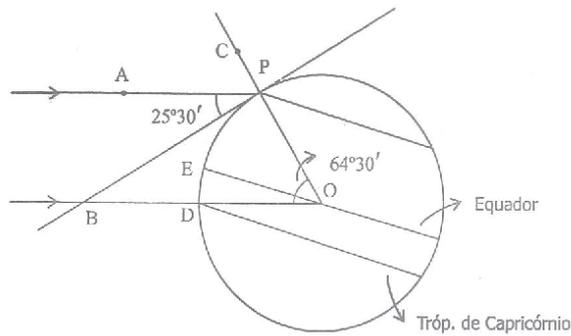


Figura 2.43: Ângulo de elevação do Sol nos solstícios - III

$$90^\circ - 64^\circ 30' = 25^\circ 30'$$

Cleveland e outras cidades localizadas a 41° de latitude norte recebem o menor brilho solar direto do ano durante o dia de solstício de dezembro, quando o ângulo de elevação do Sol mede $25^\circ 30'$ ao meio-dia solar. Para obter a intensidade relativa da radiação solar que atinge Cleveland nesta hora encontre $\sin 25^\circ 30'$. A calculadora mostrará aproximadamente 0,4305 indicando que Cleveland recebe cerca de 43% da radiação solar que incidiria se o ângulo fosse de 90° ao meio-dia no solstício de dezembro, ou ainda, 43% da intensidade do Sol que atinge o ponto D localizado sobre o Trópico de Capricórnio e que tem a mesma longitude de Cleveland.

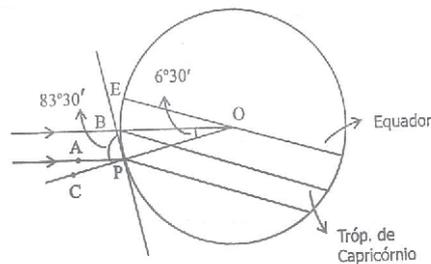


Figura 2.44: Ângulo de elevação do Sol nos solstícios - IV

A figura anterior mostra o ângulo de elevação do Sol em Porto Alegre. A reta \overleftrightarrow{PB} é tangente a Terra no ponto P que representa Porto Alegre, P está entre C e O com \overleftrightarrow{AP} e \overleftrightarrow{BO} sendo paralelas aos raios solares. Como P está no Hemisfério Sul, a medida do ângulo $\angle BOP$ é igual a

$$m(\angle EOP) - m(\angle EOB) = 30^\circ - 23^\circ 30' = 6^\circ 30'$$

e, pela congruência de ângulos correspondentes no paralelismo, $m(\angle APC) = 6^\circ 30'$. Portanto, $\angle APB$, que é o ângulo de elevação do Sol ao meio-dia solar, tem medida

$$90^\circ - 6^\circ 30' = 83^\circ 30'$$

Porto Alegre e outras cidades localizadas a 30° de latitude sul recebem o maior brilho solar direto do ano durante o dia de solstício de dezembro, quando o ângulo de elevação do Sol mede $83^\circ 30'$ ao meio-dia solar. Para obter a intensidade relativa da radiação solar que atinge Porto Alegre nesta hora encontre $\sin 83^\circ 30'$. A calculadora mostrará aproximadamente 0,9935 indicando que Porto Alegre recebe cerca de 99% da radiação solar que incidiria se o ângulo fosse de 90° ao meio-dia no solstício de dezembro, isto é, 99% da intensidade do Sol que atinge o ponto localizado sobre Trópico de Capricórnio e que tem a mesma longitude de Porto Alegre.

Vimos nessa seção de que maneira a latitude de um ponto pode ser usada para calcular o ângulo de elevação do Sol ao meio-dia solar naquele ponto em determinadas épocas do ano. Sob certas condições, esse processo pode ser invertido obtendo-se a latitude a partir do ângulo de elevação do Sol.

2.7 Coordenadas Cartesianas da Superfície Esférica

A partir desta seção trabalharemos num sistema ortogonal de coordenadas cartesianas com origem O . Dado um ponto $P = (x, y, z)$ do espaço, uma dupla aplicação do teorema de Pitágoras mostra que a distância de P a O é expressa por

$$d(P, O) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

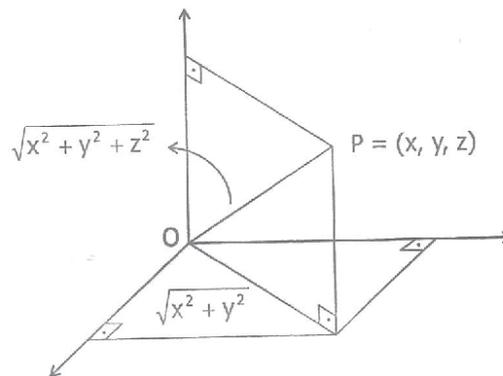


Figura 2.45: Sistema ortogonal de coordenadas cartesianas - I

Mais geralmente, a distância entre os pontos $P = (x, y, z)$ e $C = (u, v, w)$ é dada pela fórmula

$$d(P, C) = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2 + (z - w)^2}.$$

Seja r um número real positivo, a superfície esférica S de centro $C = (u, v, w)$ e raio r é o conjunto dos pontos $P = (x, y, z)$ tais que:

$$(x - u)^2 + (y - v)^2 + (z - w)^2 = r^2. \quad (2.1)$$

A equação (2.1) acima é denominada equação reduzida de S . Assim, por exemplo, $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 4$ é a equação reduzida da superfície esférica de centro $C = (-1; 2; 0)$ e raio $r = \sqrt{4} = 2$. Desenvolvendo os quadrados em (2.1), obtemos:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xu - 2yv - 2zw + u^2 + v^2 + w^2 - r^2 = 0 \quad (2.2)$$

que é uma equação da forma

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0 \quad (2.3)$$

onde a, b, c, d são números reais.

A equação (2.2) é chamada **equação geral** de S . Assim, a superfície esférica de centro $C = (-1; 2; 0)$ e raio $r = 2$ tem como equação geral $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 1 = 0$.

Dada uma equação da forma (2.3) como decidir se ela é a equação geral de alguma superfície esférica S ? Em caso afirmativo, quais as coordenadas do centro e qual o raio de S ?

Considerando, por exemplo, a equação

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 6z + 8 = 0$$

;

a ideia é **completar os quadrados** e colocar (2.3) na forma (2.1). Assim:

- $x^2 + 4x = x^2 + 2 \cdot 2x = x^2 + 2 \cdot 2x + 2^2 - 2^2 = (x + 2)^2 - 4$
- $y^2 - 2y = y^2 - 2y + 1^2 - 1^2 = (y - 1)^2 - 1$
- $z^2 - 6z = z^2 - 2 \cdot 3z = z^2 - 2 \cdot 3z + 3^2 - 3^2 = (z - 3)^2 - 9$

Substituindo na equação dada obtemos

$$(x + 2)^2 - 4 + (y - 1)^2 - 1 + (z - 3)^2 - 9 + 8 = 0,$$

$$\text{ou seja, } (x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 6.$$

Trata-se, portanto, de uma superfície esférica de centro $C = (-2, 1, 3)$ e raio $r = \sqrt{6}$.

Repetindo-se o mesmo argumento para a equação $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 10 = 0$, obtemos $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = -5$.

Como uma soma de quadrados nunca é um número negativo concluímos que nenhum ponto do espaço tem coordenadas (x, y, z) satisfazendo a equação acima. Trata-se, portanto, do **conjunto vazio**.

Já a equação $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 14 = 0$ pode ser escrita como $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 0$, cuja única solução é o ponto de coordenadas $(x, y, z) = (1, 2, 3)$.

O resultado a seguir desempenhará um papel importante no próximo parágrafo onde discutiremos a fundamentação matemática do funcionamento do GPS.

Teorema 3. *Se quatro superfícies esféricas se intersectam e seus centros são não coplanares então essa intersecção consiste de um único ponto.*

Demonstração. Sejam S_1, S_2, S_3 e S_4 superfícies esféricas de centros C_1, C_2, C_3 e C_4 , respectivamente. Mostraremos que se $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 \neq \emptyset$ e C_1, C_2, C_3, C_4 são não coplanares então $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 = P$.

Sendo $x^2 + y^2 + z^2 + a_j x + b_j y + c_j z + d_j = 0$ as equações gerais de S_j , onde $j = 1, 2, 3, 4$, ao subtrairmos essas equações duas a duas obtemos equações lineares em x, y e z uma vez que os termos x^2, y^2 e z^2 são eliminados.

Tal equação linear determina o plano que contém a correspondente intersecção. Por exemplo, subtraindo as equações de S_1 e S_2 obtém-se uma equação do plano que contém $S_1 \cap S_2$.

Considerando-se os planos que contém $S_1 \cap S_2, S_1 \cap S_3$ e $S_1 \cap S_4$ temos que se $P = (x, y, z)$ está em $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4$ então (x, y, z) é a solução do sistema linear

$$(a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + (c_1 - c_2)z + (d_1 - d_2) = 0$$

(*)

$$(a_1 - a_3)x + (b_1 - b_3)y + (c_1 - c_3)z + (d_1 - d_3) = 0$$

$$(a_1 - a_4)x + (b_1 - b_4)y + (c_1 - c_4)z + (d_1 - d_4) = 0$$

A prova do teorema estará terminada se mostrarmos que o sistema (*) tem uma única solução, pois a existência de dois pontos distintos em $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4$ acarretariam duas soluções distintas do sistema linear (*).

Sendo $C_j = (u_j, v_j, w_j)$ o centro de S_j , $j = 1, 2, 3, 4$, comparando as equações (2.2) e (2.3) acima temos $a_j = -2u_j$, $b_j = -2v_j$,
 $c_j = -2w_j$ de modo que

$$\begin{vmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 & c_1 - c_2 \\ a_1 - a_3 & b_1 - b_3 & c_1 - c_3 \\ a_1 - a_4 & b_1 - b_4 & c_1 - c_4 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} u_2 - u_1 & v_2 - v_1 & w_2 - w_1 \\ u_3 - u_1 & v_3 - v_1 & w_3 - w_1 \\ u_4 - u_1 & v_4 - v_1 & w_4 - w_1 \end{vmatrix}$$

Como C_1, C_2, C_3, C_4 são não-coplanares segue que o determinante à direita não é nulo e, portanto, (*) é um sistema linear com determinante não nulo tendo assim uma única solução.

Evidentemente o simples fato do sistema linear (*) ter uma única solução, significando que os centros são não-coplanares, não acarreta necessariamente que a intersecção das quatro superfícies esféricas consiste de um único ponto P . Em outras palavras, a hipótese $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 \neq \emptyset$ é essencial para a validade do teorema.

A eventual solução de (*) nos dará o procurado ponto P desde que pertença simultaneamente às quatro superfícies esféricas S_1, S_2, S_3 e S_4 .

Considere, por exemplo, as superfícies esféricas abaixo.

$$S_1 : \text{centro } (0, 0, 1) \text{ e raio } \sqrt{2}$$

$$S_2 : \text{centro } (0, 3, 0) \text{ e raio } \sqrt{10}$$

$$S_3 : \text{centro } (2, 0, 0) \text{ e raio } 1$$

$$S_4 : \text{centro } (0, 0, 0) \text{ e raio } 1$$

Seus centros são não-coplanares e o sistema linear (*), neste caso dado por

$$6y - 2z = 0$$

$$4x - 2z - 4 = 0$$

$$-2z = 0,$$

tem como única solução $x = 1, y = 0$ e $z = 0$. Uma verificação simples mostra que o ponto $P = (1, 0, 0)$ pertence simultaneamente à S_1, S_2, S_3 e S_4 de modo que $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 = \{(1, 0, 0)\}$.

Vejamos agora, a relação entre as coordenadas geográficas e as coordenadas cartesianas.

Para tanto consideramos um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas com origem O no centro da Terra, o eixo Oz positivo apontando na direção do Polo Norte N , o plano Oxy sendo o plano do Equador com o eixo Ox positivo cortando o meridiano de Greenwich e o eixo Oy positivo cortando o meridiano de longitude 90° E.

Dado um ponto $P = (x, y, z)$ do espaço, sejam θ e φ os ângulos assinalados na figura abaixo.

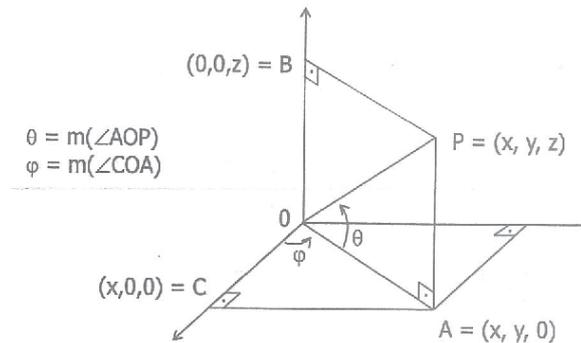


Figura 2.46: Elevação ou altitude OP

Quando P está sobre a superfície terrestre os ângulos θ e φ acima indicados correspondem exatamente à latitude e longitude do ponto P como anteriormente definidos. A diferença entre $OP = x^2 + y^2 + z^2$ e o raio da Terra é chamada de **elevação** (ou **altitude**) de $P = (x, y, z)$.

No triângulo retângulo $\triangle OPB$ da figura acima temos

$$\cos(90^\circ - \theta) = \frac{OB}{OP} = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2}$$

e, como $\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$, segue que $\sin \theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

Esta expressão atribui a θ um único valor entre 0 e 90 quando $z > 0$ e um único valor entre -90 e 0 quando $z < 0$. No primeiro caso dizemos que a latitude de P é θ° N enquanto que no segundo a latitude de P é $(-\theta)^\circ$ S.

Por outro lado, no triângulo retângulo $\triangle OAC$ temos

$$\sin \varphi = \frac{AC}{OA} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ e } \cos \varphi = \frac{OC}{OA} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Estas expressões definem um único valor entre 0 e 180 quando $y > 0$ e dizemos que a longitude de P é φ° E. Quando $y < 0$, assume um único valor entre -180 e 0 e, neste caso, a longitude de P é $(-\varphi)^\circ$ W.

Como exemplo, vamos determinar as coordenadas geográficas do ponto P cujas coordenadas cartesianas são dadas por $P = (3\sqrt{3} \times 10^6, -3 \times 10^6, 6\sqrt{3} \times 10^6)$. Considere como unidade de medida o metro.

Temos

$$x^2 + y^2 + z^2 = 27 \times 10^{12} + 9 \times 10^{12} + 108 \times 10^{12} = 144 \times 10^{12}$$

e

$$x^2 + y^2 = 27 \times 10^{12} + 9 \times 10^{12} = 36 \times 10^{12}$$

Logo, $\text{sen } \theta = \frac{6\sqrt{3} \times 10^6}{12 \times 10^6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e, portanto, $\theta = 60^\circ$.

Como $\text{sen } \varphi = -\frac{3 \times 10^6}{6 \times 10^6} = -\frac{1}{2}$ e $\text{cos } \varphi = \frac{3\sqrt{3} \times 10^6}{6 \times 10^6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, obtemos $\varphi = -30^\circ$.

Assim as coordenadas geográficas de P são $\theta = 60^\circ$ N e $\varphi = 30^\circ$ W. Supondo o raio da Terra igual a $6,4 \times 10^6$ metros temos que a elevação de P mede $12 \times 10^6 - 6,4 \times 10^6 = 5,6 \times 10^6$ metros.

O processo acima pode ser invertido: conhecendo-se a latitude θ , a longitude φ e a elevação de um ponto P , podemos determinar suas coordenadas cartesianas x , y e z .

Como antes interpretamos as designações N/S para θ e E/W para φ como positivas/negativas, respectivamente. Por exemplo, um ponto com latitude 40° N e longitude 70° W terá $\theta = 40^\circ$ e $\varphi = -70^\circ$ enquanto que um ponto com latitude 40° S e longitude 70° E terá $\theta = -40^\circ$ e $\varphi = 70^\circ$.

A partir da elevação de P obtemos o valor de $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ que denotaremos por r . Logo $\text{sen } \theta = \frac{z}{r}$ e, portanto, $z = r \text{sen } \theta$.

Por outro lado, como $\text{cos } \theta = \text{sen}(90 - \theta) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r}$, segue que $x = \sqrt{x^2 + y^2} \text{cos } \varphi = r \text{cos } \theta \text{cos } \varphi$ e $y = \sqrt{x^2 + y^2} \text{sen } \varphi = r \text{cos } \theta \text{sen } \varphi$.

Para referência futura repetimos no quadro abaixo as relações entre as coordenadas geográficas e as coordenadas cartesianas.

$$\begin{aligned} x &= r \text{cos } \theta \text{cos } \varphi \\ y &= r \text{cos } \theta \text{sen } \varphi \\ z &= r \text{sen } \theta \end{aligned}$$

2.8 Distâncias em Superfícies Esféricas

A distância $d(A, B)$ entre dois pontos A e B é, essencialmente, o menor dos comprimentos das trajetórias ligando A a B . No plano, a trajetória de menor comprimento é o segmento de linha reta \overline{AB} e seu comprimento AB é a distância entre A e B . Sobre uma superfície esférica, no entanto, não existe um segmento de linha reta uma vez que ela é curvada em todas as direções e túneis através da Terra não são permitidos. Como medir a distância entre dois pontos A e B neste caso?

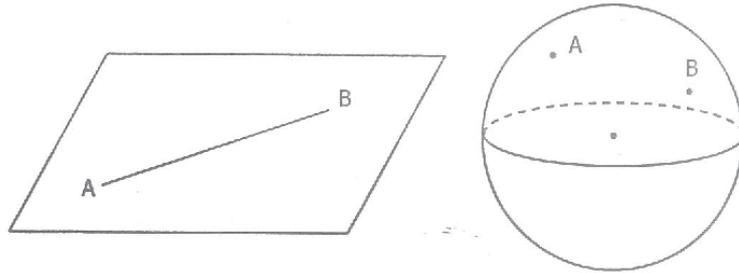


Figura 2.47: Distâncias no plano euclidiano e na superfície esférica

Quanto maior o raio de uma circunferência, mais ela se aproxima de ser uma reta. Como as circunferências de maior raio contidas numa superfície esférica S são as circunferências máximas, é razoável esperar que a distância (em S) entre dois pontos A e B seja o comprimento do arco menor \widehat{AB} da circunferência máxima que passa por A e B . Uma prova formal desta afirmação será dada adiante.

O cálculo desse comprimento pode ser feito a partir do conhecimento da medida α do ângulo $\angle AOB$ onde O é o centro da superfície esférica S . Como o comprimento do arco é proporcional à medida do ângulo central correspondente, uma regra de três simples nos dá o valor procurado.

Sendo r o raio da superfície esférica temos:

$$\begin{array}{l} 360^\circ \dots\dots 2\pi r \\ \alpha^\circ \dots\dots d(A, B) \end{array}$$

de modo que $d(A, B) = (\alpha/360) \cdot (2\pi) \cdot r$

Todos os meridianos estão contidos em circunferências máximas enquanto que, entre os paralelos, apenas o Equador é uma circunferência máxima. Logo quando A e B possuem a mesma longitude, a diferença entre as latitudes pode ser usada para achar a medida α . Analogamente quando A e B estão sobre o Equador é a diferença entre as longitudes que nos permite calcular α . Vejamos como.

As cidades de Curitiba e Goiânia estão sobre o mesmo meridiano (49° W) e suas latitudes são 26° S e 17° S, respectivamente. Estão assim separadas por 9° de latitude e, tomando o raio da Terra como 6 400 km, segue que a distância entre elas é dada por

$$(9/360) : (2\pi) \cdot 6400 \approx 1005 \text{ km.}$$

As cidades de Quito, no Equador, e Entebe, em Uganda, estão ambas sobre o Equador. A longitude de Quito é 79° W enquanto que a de Entebe é 32° E. Logo a diferença entre suas longitudes é de 111° de modo que a distância entre elas é igual a

$$(111/360) \cdot (2\pi) \cdot 6400 \approx 12399 \text{ km}.$$

Quando duas cidades A e B estão sobre um mesmo paralelo, que não seja o Equador, o caminho mais curto possível entre elas, ao contrário do que diz nossa intuição, não é o comprimento do arco menor \widehat{AB} daquele paralelo e sim o comprimento do arco menor \widehat{AB} da circunferência máxima que passa por A e B .

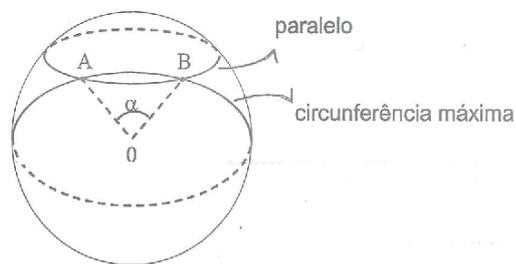


Figura 2.48: Distância entre as cidades A e B

Por exemplo, as cidades de Nova York e Nápoles estão praticamente sobre o mesmo paralelo (41° N) e suas longitudes são 74° W e 14° E, respectivamente. O comprimento do arco menor do paralelo entre as duas cidades é cerca de 7 419 km (verifique).

Se A e B representam as cidades de Nova York e Nápoles, respectivamente, vejamos como calcular neste caso o comprimento do arco menor \widehat{AB} da circunferência máxima que passa por A e B , ou seja, como calcular $\alpha = m(\angle AOB)$.

Considerando-se um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas como descrito no capítulo anterior e supondo, como de costume, o raio da Terra medindo 6 400 km, podemos escrever

$$A = 6400(\cos 41^\circ \cos(-74^\circ), \cos 41^\circ \sin(-74^\circ), \sin 41^\circ) \quad (2.4)$$

$$B = 6400(\cos 41^\circ \cos 14^\circ, \cos 41^\circ \sin 14^\circ, \sin 41^\circ), \quad (2.5)$$

ou seja,

$$A = 6400(0, 20802, -0, 72547, 0, 65606) \quad (2.6)$$

$$B = 6400(0, 73229, 0, 18257, 0, 65606). \quad (2.7)$$

A medida procurada α será obtida por meio da relação $\langle \vec{OA}, \vec{OB} \rangle = \|\vec{OA}\| \cdot \|\vec{OB}\| \cos \alpha$, onde \langle, \rangle indica o produto interno usual entre os vetores \vec{OA} e \vec{OB} enquanto que $\|\vec{OA}\|$, $\|\vec{OB}\|$ são os módulos

desses vetores, neste caso ambos iguais as 6 400.

Como

$$\langle \vec{OA}, \vec{OB} \rangle = 6400^2 [0,15233 - 0,13244 + 0,43041] = 6400^2 \cdot 0,4503,$$

segue que $\cos \alpha = 0,4503$ e, portanto, $\alpha = 63^\circ$.

O comprimento do arco menor \widehat{AB} da circunferência máxima que passa por A e B , que é a distância entre A e B , é então dada por $(63/360) \cdot 2\pi \cdot 6400 \approx 7037 \text{ km}$. Note como esta distância é menor do que aquela calculada ao longo do paralelo.

O argumento acima pode ser utilizado para calcular a distância entre dois pontos quaisquer A e B do globo terrestre. Dadas suas coordenadas geográficas, obtemos suas coordenadas cartesianas e, usando o produto interno $\langle \vec{OA}, \vec{OB} \rangle$, determinamos $\alpha = m(\angle AOB)$. A distância procurada $d(A, B)$ é então dada por $d(A, B) = (\alpha/360) \cdot (2\pi) \cdot 6400$.

Encerramos a seção apresentando uma prova formal do fato que $d(A, B)$ é o comprimento do arco menor \widehat{AB} da circunferência máxima que passa por A e B . Isso pode ser feito com umas poucas simplificações e a ajuda do cálculo diferencial e integral.

Primeiro, podemos supor sem perda de generalidade que a superfície esférica que estamos trabalhando tem raio igual a 1 unidade (a que você quiser) e que seu centro é a origem do sistema ortogonal de coordenadas cartesianas.

Segundo, pela simetria da superfície esférica podemos assumir que o ponto A é o Polo Norte. O outro ponto, B , será dado pelas suas coordenadas geográficas que vamos supor medidas em **radianos**. Digamos que a latitude de B é θ_1 enquanto que sua longitude é φ_1 .

A circunferência máxima que passa por A e B contém o meridiano por B de modo que o arco menor \widehat{AB} tem por comprimento $\frac{\pi}{2} - \theta_1$. (lembre-se que o raio da superfície esférica é 1).

Devemos agora considerar uma trajetória arbitrária ligando A e B e mostrar que seu comprimento é maior ou igual a $\frac{\pi}{2} - \theta_1$.

Se nos imaginarmos viajando de A até B , em cada instante t , estaremos num ponto do globo terrestre com uma latitude $\theta(t)$ e uma longitude $\varphi(t)$. Iniciando nossa viagem no instante $t = 0$ e a finalizando no instante t_1 teremos $\theta(0) = \frac{\pi}{2}$, $\theta(t_1) = \theta_1$ e $\varphi(t_1) = \varphi_1$.

Uma trajetória arbitrária ligando A e B é então descrita por um vetor posição $\vec{r}(t)$ dado por $\vec{r}(t) = (\cos \theta(t) \cdot \cos \varphi(t), \cos \theta(t) \cdot \sin \varphi(t), \sin \theta(t))$, $0 \leq t \leq t_1$:

Derivando-se essa função vetorial em relação ao tempo t obtemos o vetor velocidade $\vec{r}'(t)$ da trajetória e conseqüentemente sua velocidade $\|\vec{r}'(t)\|$ no instante t .

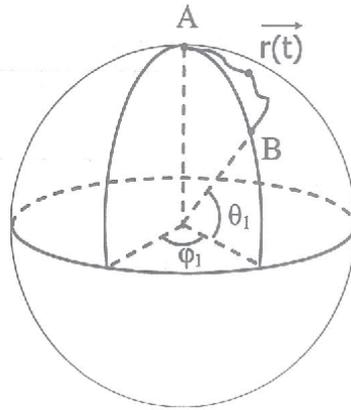


Figura 2.49: A distância arbitrária é maior que o arco de círculo máximo

Cálculos rotineiros nos dão que

$$\vec{r}'(t) = \sqrt{\theta'(t)^2 + \varphi'(t)^2 \cdot \cos^2 \theta(t)} \geq \sqrt{\theta'(t)^2} = |\theta'(t)| \geq -\theta'(t)$$

Lembrando que o comprimento da trajetória é calculado pela expressão $L = \int_0^{t_1} [-\theta'(t)] dt$, concluímos que

$$L \geq \int_0^{t_1} [-\theta'(t)] dt = -[\theta(t_1) - \theta(0)] = \frac{\pi}{2} - \theta_1$$

e temos assim provado o resultado desejado.

Capítulo 3

Atividades Propostas

3.1 A Geometria Esférica e a Navegação Marítima

Atividades

1) Na regata *Ocean Race* uma determinada embarcação pretende realizar uma rota ortodrômica (arco de círculo máximo) ao navegar seguindo o Meridiano de longitude 30° W. Sabendo que as latitudes dos pontos de partida e chegada são, respectivamente, 10° S e 20° N, determine a distância, em milhas marítimas, percorrida pela citada embarcação. **Admita o raio da Terra $R = 6400$ km e considere $\pi = 3,1$.**

2) Um navio deixa Sidney, Austrália, no dia 1º de março, às 10:00hs e leva 10 dias e 03 horas na travessia para a Ilha de Trindade e Martin Vaz no Brasil. Se Sidney está na longitude 150° E e a Ilha de Trindade e Martin Vaz na longitude 30° W, determine a data e a hora de chegada do navio.

3) Dois navios *A* e *B* navegam ao longo dos paralelos de latitude 48° N e 15° S, respectivamente, de tal maneira que, a cada instante, ambos estão no mesmo meridiano. Se a velocidade de *A* é de 15 nós, determine:

- a) a velocidade de *B*.
- b) a distância, em milhas marítimas, percorrida por *A* e *B*.

Admita o raio da Terra $R = 6400$ km e considere $\pi = 3,1$.

3.2 Formato do Planeta Terra

Atividades

1) Qual é o comprimento do Equador, supondo que o raio da Terra meça 6 400 km? Considere $\pi = 3,14159$.

2) Como se mede o raio da Terra? Uma das maneiras é escalar o topo de uma montanha cuja altitude acima do mar seja conhecida e medir o ângulo entre a vertical e a linha do horizonte. A altura do monte Shasta na Califórnia é 4,3 km. Do seu topo, o horizonte sobre o Oceano Pacífico faz um ângulo de $87^\circ 53'$ com a vertical. Utilize estes dados para estimar o raio da Terra em quilômetros. Considere sen

$$87^{\circ}53' = 0,99932.$$

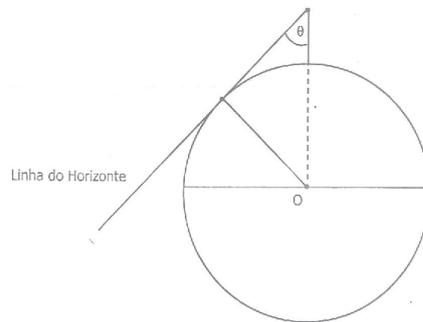


Figura 3.1: Ilustração da questão 2

3) O cálculo do raio da Terra mais célebre da Antiguidade foi realizado pelo grego Eratóstenes (276-196 a.C.). Consultando as observações astronômicas acumuladas durante séculos na biblioteca de Alexandria, Eratóstenes soube que em Siena, 5 000 estádios (medida grega de comprimento) ao sul de Alexandria e situada aproximadamente no mesmo meridiano, o Sol se refletia no fundo de um poço ao meio-dia de um determinado dia de cada ano. Ao meio-dia deste tal dia, Eratóstenes mediu o ângulo que o raio do Sol fazia com a vertical de Alexandria, achando aproximadamente $7^{\circ}12'$.

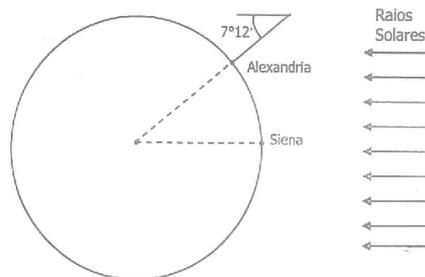


Figura 3.2: Ilustração da Questão 3

Admitindo que os raios solares cheguem ao nosso planeta praticamente paralelos, mostre como obter para o raio da Terra o valor aproximado de $250000/2$ estádios. Supondo que a medida de um estádio utilizada por Eratóstenes era de aproximadamente 185 metros, calcule o valor acima em quilômetros.

4) Na ponte de um navio em alto-mar, o capitão pediu a um jovem oficial que estava ao seu lado que determinasse a distância ao horizonte. O oficial pegou papel e lápis e, em poucos instantes, deu uma resposta. No papel ele havia escrito a fórmula $d = \frac{8}{5}\sqrt{5h}$. Admitindo-se que o raio da Terra meça 6 400 km, mostre que essa fórmula é uma boa aproximação da distância d , em quilômetros, ao horizonte onde h é a altura, em metros, do observador acima da água. Se a ponte do navio está a 30 metros acima da água, qual é a distância ao horizonte?

5) Em um dia claro, até de que distância se poderia enxergar um edifício de 150 metros de altura,

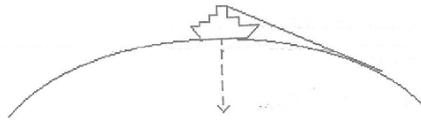


Figura 3.3: Ilustração da questão 4

supondo-se que não haja obstruções no meio? Utilize a fórmula do exercício anterior.

Respostas

- 1) Cerca de 40 212 km.
- 2) Cerca de 6 319 km.
- 3) Cerca de 7 360 km.
- 4) Cerca de 19 km.
- 5) Cerca de 43 km.

Atividades sobre Coordenadas Geográficas da Terra

1) Observando um globo terrestre ou um mapa apropriado estabeleça as coordenadas geográficas de cada uma das cidades abaixo.

Cidade	Latitude	Longitude
São Paulo		
Maceió		
Belo Horizonte		
Nova Orleans		
Chicago		
Roma		
Nova York		
Buenos Aires		
Londres		
Moscou		
Cairo		
Tóquio		
Quito		
Los Angeles		

Tabela 3.1: Coordenadas geográficas

2) Qual a relação entre o raio da superfície terrestre, o raio de um paralelo e a sua respectiva latitude?

3) Verifique que a longitude de um ponto P é a medida do arco do Equador situado entre o meridiano que passa P e o meridiano de Greenwich.

4) Um dos primeiros fatos que um estudante de astronomia aprende é que a latitude de um ponto da Terra localizado no Hemisfério Norte é igual à medida do ângulo que Polaris (a Estrela do Norte) forma com a linha do horizonte, quando observada daquele ponto. Geometricamente, esta afirmação pode ser interpretada da seguinte maneira. A reta \overleftrightarrow{NS} é o eixo polar da Terra, a circunferência C contém um meridiano, E está no Equador, P é o observador, a reta \overleftrightarrow{PH} é a linha do horizonte e $m(\angle XPH)$ é a elevação de Polaris onde \overleftrightarrow{PX} é paralela a \overleftrightarrow{NS} .

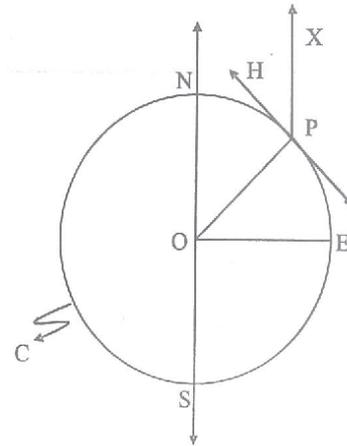


Figura 3.4: Ilustração da questão 4

O fato acima equivale a dizer que $m(\angle EOP) = m(\angle XPH)$. Mostre porque isto é verdadeiro.

5) A aceleração da gravidade, frequentemente denotada por g , é considerada constante para movimentos próximos da superfície terrestre. Na verdade, porém, g não é constante, variando ligeiramente com a latitude θ . Uma boa aproximação para g , ao nível do mar, é dada pela expressão $g = 9,78049(1 + 0,005288 \text{ sen}^2 \theta - 0,000006 \text{ sen}^2 \theta)m/s^2$

- Utilizando uma calculadora, determine g para a latitude do lugar onde você mora.
- Expresse g apenas em função de $\text{sen } \theta$, isto é, elimine o ângulo duplo.
- Em que lugar da Terra o valor de g é máximo? E mínimo?

6) Supondo que o raio da Terra meça 6400 km, qual o comprimento de um grau de longitude em uma latitude arbitrária θ ? Em particular, qual o comprimento numa latitude de 30° N (aproximadamente a latitude de Nova Orleans), 10° S (aproximadamente a latitude de Maceió) e 20° S (aproximadamente a latitude de Belo Horizonte)?

7) A que latitude um grau de longitude tem comprimento igual a 48 km? A que latitude um paralelo mede 16 000 km?

8) Qual a altura mínima para que um satélite consiga fotografar o Brasil inteiro? Admita que

Oiapoque e Chuí estejam sobre o mesmo meridiano, mas em paralelos diferentes: a latitude de Oiapoque é 6° N e a de Chuí é 34° S. Suponha que o raio da Terra meça 6400 km.

9) Um astronauta encontra-se numa nave espacial que gira numa órbita em torno da Terra. No momento em que a nave está 160 km acima da superfície da Terra, que fração da superfície da Terra é visível para o astronauta? (Esta fração é chamada calota esférica e sua área é dada por $2\pi rh$, onde $r = 6400$ km é o raio da Terra e h é a altura da calota). Qual seria a fração visível se a nave estivesse a 20200 km acima da superfície da Terra? Neste caso, quanto mede o ângulo de visualização sobre a Terra?

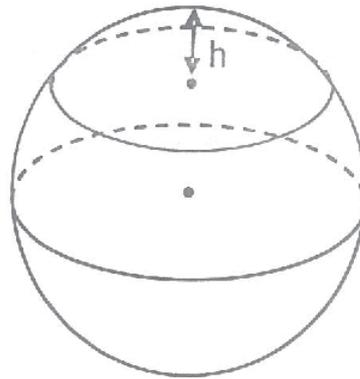


Figura 3.5: Ilustração da questão 9

10) **Zona** é a região da superfície terrestre compreendida entre dois paralelos. Utilize a expressão da área da calota esférica para deduzir que a área da zona delimitada por um paralelo de latitude e o Equador é dada por $2\pi rd = 2\pi r^2 \sin \theta$, onde r é o raio da Terra e d é a distância entre o plano que contém o paralelo e o plano do Equador. Conclua daí o surpreendente fato: cortando-se uma superfície esférica em fatias de igual espessura, as áreas das zonas são iguais, sendo indiferente que o corte tenha sido feito perto do Equador ou perto do polo.

11) Um ponto P do globo terrestre tem latitude θ e longitude φ . Quais são as coordenadas geográficas do ponto Q diametralmente oposto a P ? Discuta cada uma das possibilidades N/S para θ e E/W para φ .

Respostas

2) $r_{paralelo} = r_{terra} \cos \theta$.

5) (c) máximo nos polos e mínimo no Equador.

6) Aproximadamente $111,7 \cos \theta$ km; 96,7 km; 110 km; 104,9 km.

7) 65° (N ou S) e 67° (N ou S), ambas aproximadamente.

8) Aproximadamente 410 km.

9) Na figura abaixo temos $x = r \operatorname{sen} \alpha$ e, portanto, a área A da calota esférica é dada por

$$A = 2\pi r h = 2\pi r(r - x) = 2\pi r^2(1 - \operatorname{sen} \alpha):$$

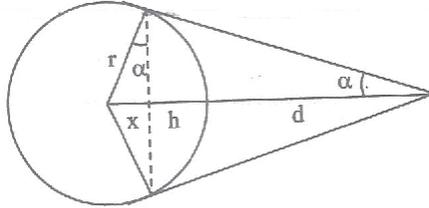


Figura 3.6: Ilustração da resolução da questão 9

Seja F a fração visível temos

$$F = \frac{2\pi r^2(1 - \operatorname{sen} \alpha)}{4\pi r^2} = \frac{1 - \operatorname{sen} \alpha}{2}.$$

Por outro lado, como $\operatorname{sen} \alpha = \frac{r}{r+d}$ segue que $F = \frac{1}{2} \frac{d}{r+d}$. Para $r = 6400$ e $d = 160$ obtemos $F = 0,012$ de modo que a fração visível é cerca de 1,2%. Para $d = 20200$ obtemos $F = 0,379$ e a fração visível é cerca de 37,9%. Neste caso, a medida 2α do ângulo de visualização é aproximadamente 28° .

Atividades sobre os Movimentos da Terra

1) A Terra gira 360° em torno de seu eixo em 24 horas. Quantos graus de longitude a reta determinada pelos centros da Terra e do Sol cruza a cada hora? E a cada minuto?

2) Você está numa localidade cujo meio-dia solar ocorreu 6 horas e 8 minutos depois do meio-dia solar em Greenwich. Qual é a sua longitude?

3) Quanto tempo depois do meio-dia solar em Greenwich ocorre o meio-dia solar em São Paulo? Qual a diferença de tempo entre o meio-dia solar em São Paulo e em Roma?

4) A variação sazonal no tempo de duração do dia pode ser modelada por uma senóide. O dia em Nova Orleans tem cerca de 14 horas no solstício de verão (21 de junho) e cerca de 9 horas e 20 minutos no solstício de inverno (21 de dezembro). Nos itens abaixo desconsidere a possibilidade de um ano bissexto.

(a) Esboce o gráfico do número h de horas dos dias de Nova Orleans como função do número x de dias a partir de 21 de março.

(b) Encontre uma expressão para h como função de x , determinando A , B e ω de modo que $h(x) = A + B \operatorname{sen}(\omega x)$.

(Sugestão: Calcule ω sabendo que h é uma função periódica de período 365. A seguir, obtenha B usando os valores máximos e mínimos da função h .)

(c) Seja y o número de dias após 1 de janeiro. Encontre uma expressão para h como função de y .

(d) Que dias do ano tem duração aproximada de 13 horas em Nova Orleans?

Respostas

- 1) 15° ; $0,25^\circ$.
- 2) 92°W .
- 3) 3 horas e 8 minutos; 3 horas e 56 minutos.
- 4) (b) $h(x) = 12 + \frac{7}{3} \sin\left(\frac{2\pi x}{365}\right)$

Atividades envolvendo Fuso-Horário

1) **Fuso** é a região da superfície terrestre compreendida entre dois meridianos. Calcule a área do fuso limitado pelos meridianos de longitude 20°E e 40°W . (Sugestão: A área de um fuso é proporcional à sua abertura.)

2) Indo-se de Oeste para Leste, deve-se adiantar o relógio de uma hora cada vez que se ultrapassa um limite de fuso horário. Utilizando-se um avião bastante rápido, pode-se partir de Greenwich a zero hora do sábado, e chegar ao seu meridiano oposto às 24 horas (tempo local). Nessa altura, serão 12 horas do sábado em Greenwich. Continuando com a mesma velocidade, o viajante completará a volta, podendo chegar a Greenwich às 24 horas do sábado; mas seu relógio, modificado somente em função dos fusos horários marcará 24 horas de domingo! Como resolver este problema?

3) Um piloto sai de uma cidade A de latitude 40°N às 12 horas e 15 minutos (hora local verdadeira). Ele voa no rumo Leste a uma velocidade média de 1000 km/h permanecendo o tempo todo na mesma latitude. Seu destino B é alcançado após percorrer $3\,000\text{ km}$. Supondo que o raio da Terra meça $6\,400\text{ km}$, qual a hora local verdadeira em B?

Respostas

- 1) $\frac{2\pi r^2}{3}$, onde r é o raio da Terra.
- 2) Pesquise sobre a “linha internacional de data.”
- 3) 17 horas e 35 minutos.

3.3 O Ângulo de Elevação do Sol e suas Consequências

Atividade

1) Seja α a medida do ângulo de elevação do Sol ao meio-dia solar em P e β a medida do ângulo de elevação do Sol ao meio-dia solar no Equador, ambas consideradas num mesmo dia. Quais as expressões relacionando α , β e a latitude θ de P ? Existem duas possíveis respostas conforme P seja um ponto do Hemisfério Norte ou Sul.

Atividade envolvendo o Ângulo de Elevação do Sol nos Equinócios

1) Complete a tabela a seguir, obtendo a intensidade relativa da radiação solar ao meio-dia solar nos dias de equinócio:

Atividades envolvendo o Ângulo de Elevação do Sol nos Solstícios

Cidade	Latitude	Ângulo de Elevação do Sol	Intensidade Relativa
Recife, Brasil	8° S		
Cuiabá, Brasil	16° S		
São Paulo, Brasil	23° S		
Melbourne, Austrália	38° S		
Quito, Equador	0°		
Miami, EUA	26° N		
Madrid, Espanha	41° N		
Oslo, Noruega	60° N		
Barrow, Alaska	71° N		

Tabela 3.2: Intensidade Relativa de Radiação Solar

Cidade	Latitude	Solstício de Junho		Solstício de Dezembro	
		Ângulo de Elevação do Sol	Intensidade Relativa	Ângulo de Elevação do Sol	Intensidade Relativa
Rio Branco, Brasil	10° S				
São Paulo, Brasil	23° S				
Melbourne, Austrália	38° S				
Santa Cruz, Argentina	50° S				
Quito, Equador	0°				
São José, Costa Rica	10° N				
Miami, EUA	26° N				
Paris, França	49° N				
Forel, Groelândia	66° N				

1) Complete a tabela abaixo, obtendo a intensidade relativa da radiação solar ao meio-dia solar nos dias de solstícios:

2) No dia 26 de janeiro de 2004 as seguintes medidas foram tomadas numa localidade desconhecida P da região sul do Brasil.

- Altura de uma haste vertical = 35 cm
- Comprimento da menor sombra projetada = 5,4 cm
- Horário local da menor sombra = 12 horas 25 minutos 56 segundos

Consultando um almanaque sabe-se que nesse dia os raios solares incidem perpendicularmente sobre o paralelo de latitude $18^{\circ}45'S$ e que o meio-dia solar em Greenwich ocorre às 12 horas 12 minutos 36 segundos. Sabe-se ainda que o horário na localidade P é o de Greenwich diminuído de 3 horas.

- Determine o tempo decorrido entre o meio-dia solar em Greenwich e o meio-dia solar em P .
- Calcule a longitude de P .
- Determine a medida do ângulo de elevação do Sol ao meio-dia solar naquele dia.

- (d) Calcule a latitude de P .
- (e) Consulte um globo terrestre ou um atlas geográfico para identificar a localidade desconhecida P .

3.4 Distância em Superfícies Esféricas

Atividades

1) As cidades de Macapá (Brasil) e Pontianak (Indonésia) estão ambas situadas sobre o Equador. Consulte um atlas geográfico para achar a longitude de cada uma dessas localidades e determine a distância entre elas.

2) Qual a distância de Salvador ao Polo Sul? E ao Polo Norte? E a Fortaleza? (Sugestão: Salvador e Fortaleza estão sobre um mesmo meridiano.)

3) Chicago e Roma situam-se na mesma latitude (42° N), mas em longitudes diferentes: a de Chicago é aproximadamente 88° W e a de Roma aproximadamente 12° E.

(a) Suponha que um piloto tenha ido de Chicago a Roma em voo no rumo leste, permanecendo o tempo todo na mesma latitude. (Muita gente acha que esse é o caminho mais curto possível.) Que distância o piloto teve de voar?

(b) Qual a distância de Chicago a Roma por circunferência máxima?

(c) Quanto tempo se economizaria voando em uma circunferência máxima num avião a jato capaz de fazer uma velocidade média de 900 km/h?

4) Qual é a distância entre Nova York ($40^\circ 40'$ N, 74° W) e Buenos Aires ($34^\circ 30'$ S, $58^\circ 30'$ W)?

Respostas

3)

(a) Cerca de 8 300 km.

(b) Cerca de 7 752 km.

(c) Aproximadamente 36 minutos.

4) Cerca de 8 545 km.

Capítulo 4

Dados Estatísticos

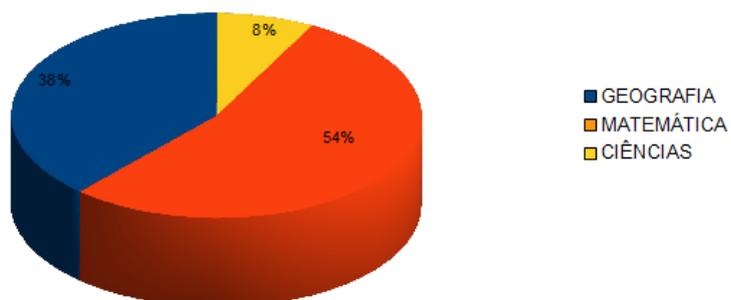
No mês de janeiro de 2013 foi elaborado um questionário destinado aos professores de Geografia, Matemática e Ciências. 12 (doze) dos professores pertencem ao Colégio Militar de Salvador e 01 (um) professor do Colégio Militar do Rio de Janeiro. Eis as questões com os seguintes resultados:

1. Você é professor de:

- Geografia
- Matemática
- Ciências

QUESTÃO 1	
DISCIPLINA	TOTAL
GEOGRAFIA	5
MATEMÁTICA	7
CIÊNCIAS	1
TOTAL	13

PROFESSORES PESQUISADOS

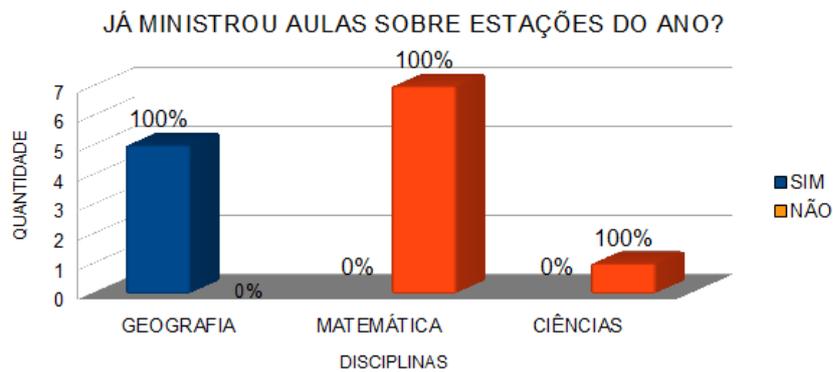


2. Você já ministrou aulas sobre Estações do Ano para alunos da Educação Básica?

Sim

Não

QUESTÃO 2		
DISCIPLINA	SIM	NÃO
GEOGRAFIA	5	0
MATEMÁTICA	0	7
CIÊNCIAS	0	1
TOTAL	5	8

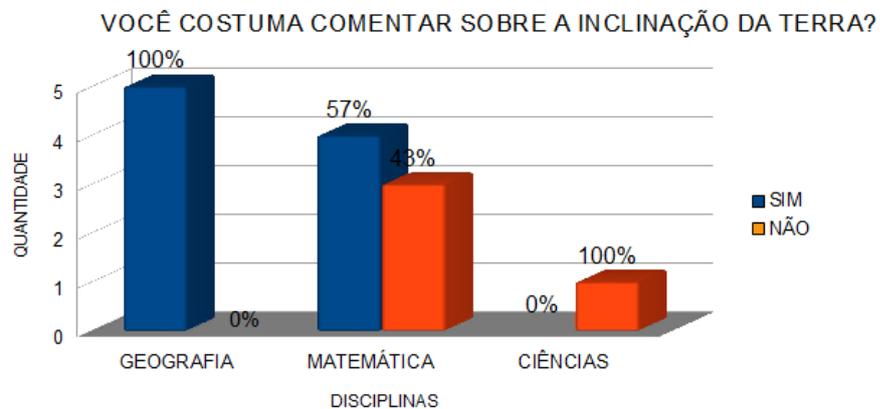


3. Você costuma comentar com seus alunos que a Terra é inclinada em relação ao eixo do Sol?

Sim

Não

QUESTÃO 3		
DISCIPLINA	SIM	NÃO
GEOGRAFIA	5	0
MATEMÁTICA	4	3
CIÊNCIAS	0	1
TOTAL	9	4

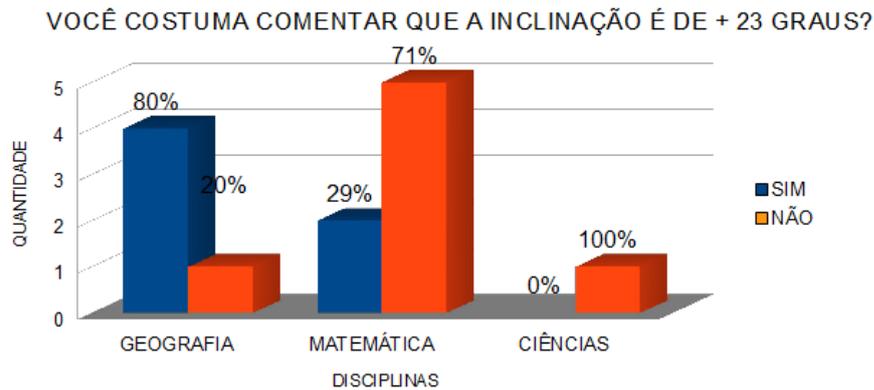


4. Você costuma comentar que a medida do ângulo de inclinação é de pouco mais de 23°?

Sim

Não

QUESTÃO 4		
DISCIPLINA	SIM	NÃO
GEOGRAFIA	4	1
MATEMATICA	2	5
CIÊNCIAS	0	1
TOTAL	6	7



5. As informações das questões 3 e 4 constam de algum livro didático? Quais anos?

Sim

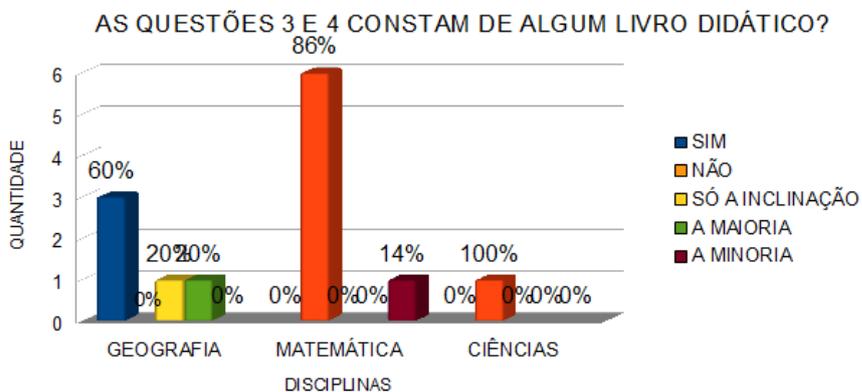
Não

Somente a inclinação, mas não o ângulo

A maioria dos livros

A minoria dos livros

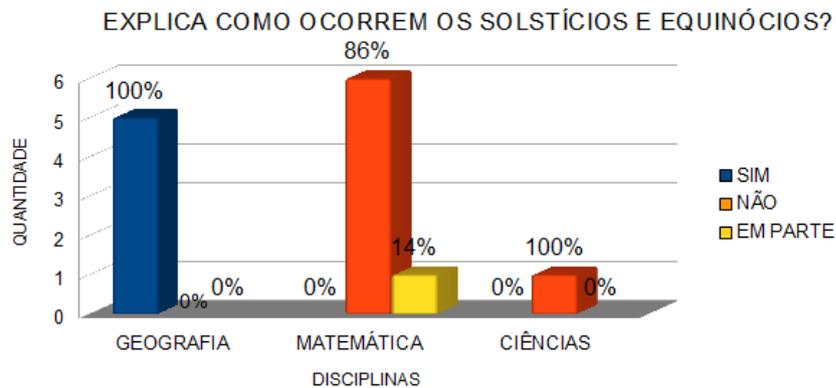
QUESTÃO 5					
DISCIPLINA	SIM	NÃO	SÓ A INCLINAÇÃO	A MAIORIA	A MINORIA
GEOGRAFIA	3	0	1	1	0
MATEMATICA	0	6	0	0	1
CIÊNCIAS	0	1	0	0	0
TOTAL	3	7	1	1	1



6. Você explica, com detalhes, como ocorrem os solstícios e equinócios?

- Sim
 Não
 Em parte. Justifique:

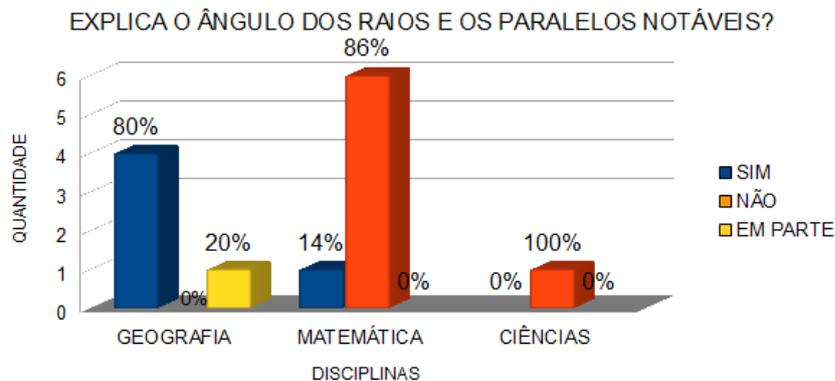
QUESTÃO 6			
DISCIPLINA	SIM	NÃO	EM PARTE
GEOGRAFIA	5	0	0
MATEMÁTICA	0	6	1
CIÊNCIAS	0	1	0
TOTAL	5	7	1



7. Costuma explicar a relação entre o ângulo de incidência dos raios solares sobre o planeta Terra e os paralelos mais notáveis (Círculo Polar Ártico, Círculo Polar Antártico, Trópico de Câncer, Trópico de Capricórnio e o Equador), ou seja, o porquê das suas latitudes?

- Sim
 Não
 Em parte. Justifique:

QUESTÃO 7			
DISCIPLINA	SIM	NÃO	EM PARTE
GEOGRAFIA	4	0	1
MATEMÁTICA	1	6	0
CIÊNCIAS	0	1	0
TOTAL	5	7	1

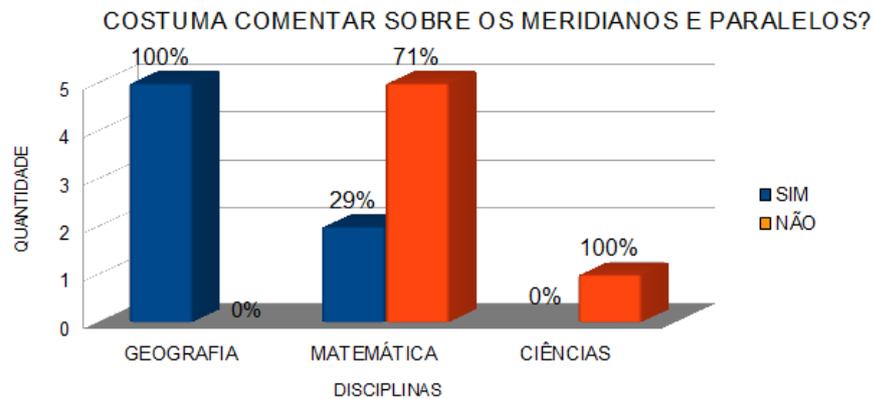


8. Você costuma comentar com seus alunos da Educação Básica sobre os Meridianos e Paralelos da Terra?

Sim

Não

QUESTÃO 8		
DISCIPLINA	SIM	NÃO
GEOGRAFIA	5	0
MATEMÁTICA	2	5
CIÊNCIAS	0	1
TOTAL	7	6

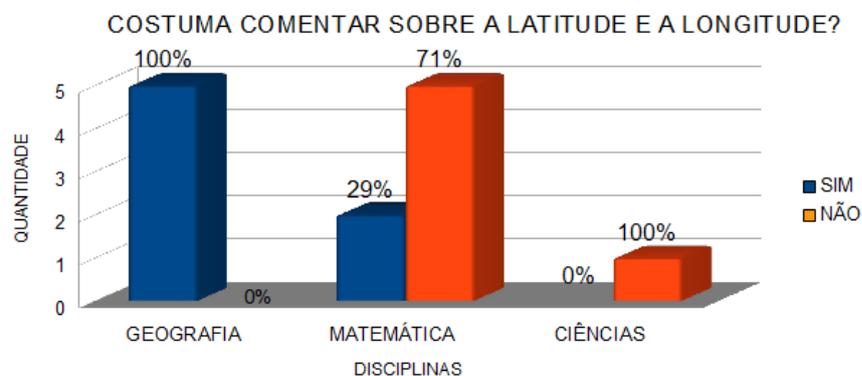


9. Você costuma comentar em sala de aula sobre as coordenadas do globo terrestre (latitude e longitude)?

Sim

Não

QUESTÃO 9		
DISCIPLINA	SIM	NÃO
GEOGRAFIA	5	0
MATEMÁTICA	2	5
CIÊNCIAS	0	1
TOTAL	7	6



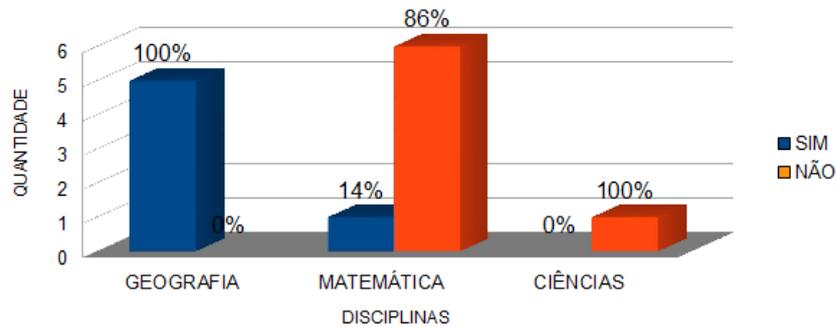
10. Você costuma comentar em sala de aula sobre o porquê de uma determinada cidade se localizar em tal latitude e tal longitude?

Sim

Não

QUESTÃO 10		
DISCIPLINA	SIM	NÃO
GEOGRAFIA	5	0
MATEMÁTICA	1	6
CIÊNCIAS	0	1
TOTAL	6	7

COSTUMA COMENTAR O PORQUÊ DA LATITUDE E LONGITUDE DE UMA CIDADE?



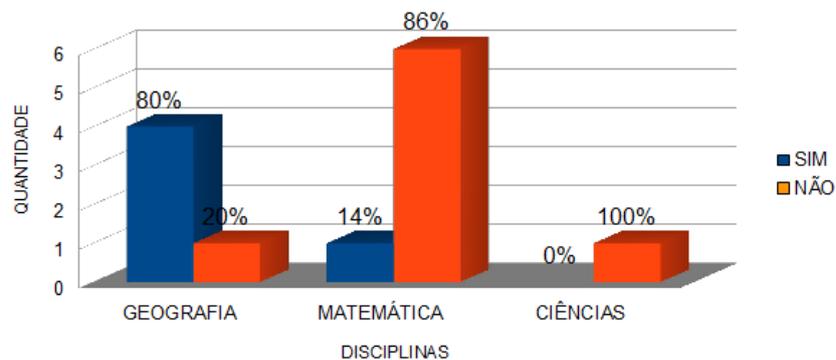
11. Você costuma comentar em sala de aula sobre qual seria o valor, em graus, da longitude, para se obter a diferença de um hora, excluindo-se as questões políticas de padronização de horários?

Sim

Não

QUESTÃO 11		
DISCIPLINA	SIM	NÃO
GEOGRAFIA	4	1
MATEMÁTICA	1	6
CIÊNCIAS	0	1
TOTAL	5	8

COSTUMA COMENTAR QUAL O VALOR DE 1 HORA EM GRAU DE LONGITUDE?



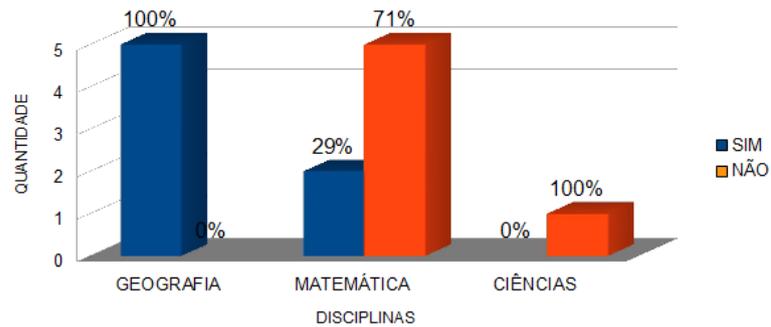
12. Você costuma comentar em sala de aula qual o sentido do movimento de rotação da Terra (horário ou anti-horário)?

Sim

Não

QUESTÃO 12		
DISCIPLINA	SIM	NÃO
GEOGRAFIA	5	0
MATEMÁTICA	2	5
CIÊNCIAS	0	1
TOTAL	7	6

COSTUMA COMENTAR QUAL O SENTIDO DE ROTAÇÃO DA TERRA?



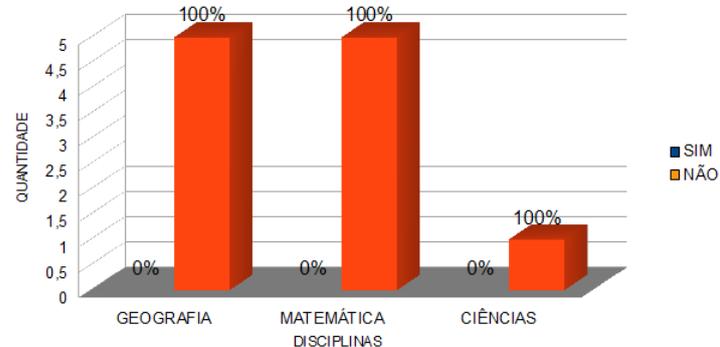
13. Você costuma trabalhar com seus alunos o cálculo da distância entre duas cidades que estão aproximadamente sobre um mesmo meridiano ou sobre o Equador, utilizando apenas as suas latitudes ou longitudes, respectivamente?

Sim

Não

QUESTÃO 13		
DISCIPLINA	SIM	NÃO
GEOGRAFIA	0	5
MATEMÁTICA	0	5
CIÊNCIAS	0	1
TOTAL	0	11

COSTUMA TRABALHAR O CÁLCULO DA DISTÂNCIA UTILIZANDO APENAS A LATITUDE?



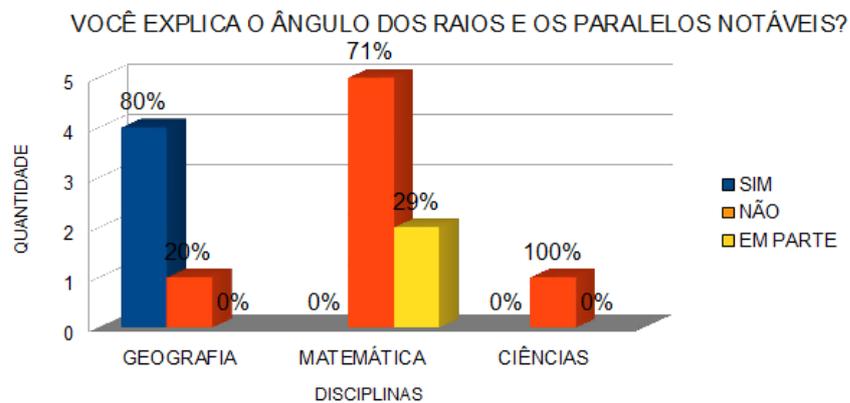
14. As informações das questões 8 a 13 constam de algum livro didático? Em quais anos?

Sim

Não

Em parte. Justifique:

QUESTÃO 14			
DISCIPLINA	SIM	NÃO	EM PARTE
GEOGRAFIA	4	1	0
MATEMÁTICA	0	5	2
CIÊNCIAS	0	1	0
TOTAL	4	7	2



Obs: Houve um campo extra para o professor informar quaisquer outras observações gerais.

Outras observações importantes

1. 20% dos professores de Geografia alegaram, por conta própria, ter dificuldade com números, mesmo sem haver qualquer questionamento nesse sentido.
2. O conteúdo abordado não faz parte do currículo da disciplina Ciências, do 6º ano do ensino fundamental ao 3º ano do ensino médio.
3. 100% dos professores de Geografia alegaram que o assunto *Estações do Ano* é visto no 6º ano do ensino fundamental e, com maior profundidade, no 1º ano do ensino médio.

Capítulo 5

Conclusão

De acordo com a pesquisa distribuída aos professores de Geografia, Matemática e Ciências da Educação Básica, podemos constatar que existe uma lacuna que pode perfeitamente ser preenchida pelos currículos de Matemática da Educação Básica. Basta observarmos o gráfico da *Questão 13* do questionário. Lá podemos comprovar que nenhuma área cognitiva trabalha com questões que envolvam o cálculo da distância entre duas cidades utilizando apenas as suas Coordenadas Geográficas.

Como os exercícios propostos envolvem basicamente o cálculo da distância entre dois pontos da superfície esférica localizados no mesmo meridiano, no Equador ou no mesmo paralelo, estas atividades poderão ser implementadas a partir do 9º ano do Ensino Fundamental, visto que neste nível os discentes já começam a trabalhar com comprimento de arcos. Contudo, o ideal é que as atividades aqui propostas sejam implementadas em uma série que contemple o conteúdo **Esfera**, o que ocorre normalmente no 2º ou 3º ano do Ensino Médio, dependendo do estabelecimento de ensino.

No que tange à disciplina *Geografia*, os assuntos referente às estações do ano (incluindo os solstícios e equinócios), coordenadas geográficas (latitude e longitude), fusos-horários e sistema solar são abordados normalmente no 6º ano do Ensino Fundamental e, com maior profundidade, no 1º ano do Ensino Médio, conforme também constatado no questionário destinado aos professores da Educação Básica. Esta confirmação reforça o que foi dito no parágrafo anterior, no tocante a abordagem das questões propostas preferencialmente no Ensino Médio.

As atividades envolvendo fuso-horário já são abordadas na Geografia, contudo não é dada a ênfase para a parte numérica. Como podemos verificar no questionário, 20% dos professores de Geografia alegaram possuir problemas com os números, mesmo sem ter havido uma pergunta direta nesse sentido. Da mesma forma, muitos professores de Matemática teriam a mesma dificuldade em aprender os movimentos do Planeta Terra e suas consequências.

No que tange a *Intensidade da Radiação Solar*, tanto nos solstícios quanto nos Equinócios, as atividades propostas, que envolvem trigonometria, são de uma beleza espetacular e juntamente com aquelas referentes à *Navegação Marítima*, podem ser contextualizadas até com certa facilidade, entretanto nada existe de semelhante em nossos livros didáticos.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) estabelecem como um dos seus objetivos gerais

para a educação básica:

”Estabelecer conexões entre temas matemáticos de diferentes campos e entre esses temas e conhecimentos de outras áreas curriculares”.

Sendo assim, podemos destacar a ocorrência da interdisciplinaridade entre a Geografia e a Matemática, unindo professores de ambas as áreas, em torno de atividades propostas que fazem ou podem perfeitamente fazer parte do cotidiano dos nossos discentes, e que são, inacreditavelmente, pouco ou nada abordados na Educação Básica, inclusive sem exemplos nos nossos livros didáticos ou até mesmo nos mais variados concursos vestibulares.

Referências Bibliográficas

- [1] Alves, Sérgio (2004) *Programa de Iniciação Científica OBMEP, Vol 6. A Geometria do Globo Terrestre*. Sociedade Brasileira de Matemática
- [2] Avila, Geraldo (1993) *Revista do Professor de Matemática, nº 22. Legendre e o Postulado das Paralelas*. Sociedade Brasileira de Matemática
- [3] Barbosa, João Lucas Marques (1995) *Geometria Euclidiana Plana*. Sociedade Brasileira de Matemática
- [4] Boyer, Carl B. (1968) *História da Matemática*. John Wiley e Sons
- [5] Coutinho, Lázaro (2001) *Convite às Geometrias Não-Euclidianas*. Interciência
- [6] Euclides (1944) *Elementos de Geometria, Livro I-VI. Versão Latina de Frederico Commandino*. Edições Cultura
- [7] Euclides (2009) *Os Elementos, Vol I - XIII. Tradução de Irineu Bicudo. Original em Grego*. Editora Unesp
- [8] Eves, Howard (1964) *Introdução à História da Matemática*. Holt, Rinehart & Winston
- [9] Eves, Howard (2002) *Tópicos de História da Matemática Para Uso em Sala de Aula*. Atual
- [10] Coelho, Celso de Amorim & Terra, Lígia (2003) *Geografia Geral e do Brasil. Volume Único*. Moderna
- [11] Mlodinov, Leonard (2004) *A Janela de Euclides. A História da Geometria, das Linhas Paralelas ao Hiperespaço. Tradução de Enézio E. de Almeida Filho*. Geração Editorial
- [12] Oliva, W. M. (1983) *Revista do Professor de Matemática, nº 02. A Independência do Axioma das Paralelas e as Geometrias Não-Euclidianas*. Sociedade Brasileira de Matemática
- [13] Silva, Marcelo Reis da (2013) *Revista do Professor de Matemática, nº 80. Painel IV, Prostaferese: Motivação e Conceito*. Sociedade Brasileira de Matemática