

Produto de números negativos: aplicações  
de estratégias para tratar um obstáculo  
epistemológico

por

Carlos Gustavo da Mota Figueiredo

Preprint PROFMAT 2 (2013)

15 de agosto, 2013

Disponível via INTERNET:  
<http://www.mat.ufpr.br>

# Produto de números negativos: aplicações de estratégias para tratar um obstáculo epistemológico

*Carlos Gustavo da Mota Figueiredo*

Curitiba, PR Brasil

gustavomota@pop.com.br

15 de agosto de 2013

## Resumo

Esse trabalho representa a parte de um artigo maior tratando de Números negativos, obstáculos e estratégias de ensino. A construção do conceito de número negativo deparou-se com vários obstáculos. O que se pretende aqui é apresentar duas propostas de atividades elaboradas com estratégias apresentadas para uso em sala, com o intuito de facilitar a compreensão, pelos alunos, da multiplicação entre números negativos.

**Palavras-chave:** Números negativos; Estratégias de Ensino; Regra de Sinais

Nos processos didático-pedagógicos muitos obstáculos necessitam ser ultrapassados. Debruçando-se sobre a história dos números negativos, observa-se que o processo de consolidação do conceito de número negativo foi lento e muito marcante. As dificuldades encontradas por séculos de tentativas para demonstrações de operações com números negativos, em especial o produto entre eles, traduzem-se em obstáculo didático na prática docente. Sabe-se que, através do modelo metafórico, o aluno consegue compreender que se ele possui dez reais (+10) e deve sete reais (-7), ao pagar o que deve, restarão três reais (+3). Todavia, será difícil convencê-lo que  $(-1) \times (-1) = +1$ . De que forma uma dívida multiplicada por outra dívida pode tornar-se um ganho? Diante desse obstáculo didático e motivador para a pesquisa e para o estudo de estratégias de ensino que venham melhorar as práticas pedagógicas do professor, são apresentadas nesse excerto<sup>1</sup>, como sugestões para o docente, duas atividades didático-pedagógicas elaboradas para a sala de aula com o uso e aplicação de estratégias de ensino elencadas na segunda parte desse artigo, com o objetivo de melhorar a compreensão da multiplicação entre números negativos pelos alunos.

---

<sup>1</sup>Arquivo completo disponível online em <http://www.mat.ufpr.br/departamento/ensino.html>

# 1 O ensino da multiplicação $(-1) \times (-1) = +1$

Durante o ensino fundamental, os educadores se deparam com dois obstáculos: a introdução do conceito do número negativo e a compreensão das regras dos sinais na multiplicação. Geralmente os alunos nesse nível de escolaridade, já apresentam total compreensão da operação  $a - b$ , pois faz parte do seu dia-a-dia perder ou ganhar objetos, pontos em jogos, guloseimas, etc. Em todos esses casos percebe-se que a operação  $a - b$  é realizada sempre com o  $a$  maior do que o  $b$ . Agora, porém, deve-se ampliar o conceito de subtração. O aluno precisa entender que o sinal “-” não significa apenas retirar ou subtrair alguma coisa de outra e é muito importante essa compreensão, sem a qual ele jamais entenderá como é possível retirar uma quantia de outra menor. Grande parte dos professores, diante desse primeiro obstáculo, utiliza-se dos exemplos do dinheiro (ganho  $\times$  perdas), da temperatura (graus positivos e negativos) ou ainda, da reta numérica (números à direita ou à esquerda do zero), para ampliar esse conceito do número negativo. Pode-se concluir que esses exemplos fazem parte do cotidiano escolar de qualquer criança nessa faixa etária e, portanto, são bem compreendidos e assimilados depois de um mínimo de prática. Geralmente essa prática acontece por meios de expressões numéricas e problemas simples envolvendo apenas a adição e a subtração.

O segundo obstáculo acontece quando o professor chega ao conteúdo da multiplicação de números negativos, onde aplica-se as “regras dos sinais” da multiplicação. Uma bifurcação de opções aparece diante do professor fazendo com que ele tenha que optar em simplesmente ditar a regra dos sinais e fazer com que seus alunos aprendam por meio de exercícios repetitivos ou, tentar fazer com que seus alunos compreendam o porquê das “regras dos sinais”.

Apesar de já existirem obras didáticas mais atuais incluídas no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) do Ministério da Educação (MEC) que trazem algumas estratégias para a aprendizagem da multiplicação entre números negativos, são poucos os professores que fazem uso desse saber escolar como material para o planejamento de suas aulas. Acredita-se que, o uso da regra dos sinais como única estratégia de ensino para a multiplicação entre negativos, origina-se do fato do docente planejar a sua aula com o apoio de livros didáticos desatualizados; por ter aprendido dessa forma, ou ainda, por considerar que somente a regra dos sinais é uma boa estratégia para a compreensão desse conteúdo.

Talvez esse fato justifique o conhecimento apenas superficial e deficitário da utilização dessa regra por parte dos alunos, quando chegam às séries posteriores. Percebe-se que a grande maioria dos alunos responde corretamente quando o professor pergunta “menos com menos dá ...”, “mais com menos dá ...”, e mesmo assim continuam usando as regras de maneira equivocada e apresentando dificuldades na utilização das mesmas.

Destacam-se as palavras do filósofo e psicólogo francês, Raymond Duval, preocupado com a educação focada no processo de ensino aprendizagem dos alunos.

Segundo Duval [1]

Como compreender dificuldades muitas vezes insuperáveis que muitos alunos têm na compreensão da Matemática? Qual é a natureza dessas dificuldades? Onde elas se encontram?

Essas questões passaram a ter uma amplitude e uma importância particulares com a recente exigência de uma maior formação Matemática inicial para todos os alunos, a fim de prepará-los para enfrentar um ambiente informático e tecnológico cada vez mais complexo. Mas, para responder a essas questões, não podemos nos restringir ao campo matemático ou à sua história. É necessária uma abordagem cognitiva, pois o objetivo do ensino da Matemática, em formação inicial, não é nem formar futuros matemáticos, nem dar aos alunos instrumentos que só lhes serão eventualmente úteis muito mais tarde, e sim contribuir para o desenvolvimento geral de suas capacidades de raciocínio, de análise de visualização. (2003, p. 11)

## 1.1 Utilizando duas estratégias em sala de aula

Diante da opção de aumentar ainda mais o nível de compreensão da multiplicação dos números inteiros dos seus alunos e transpor a barreira didática de  $(-1) \times (-1) = +1$ , o professor pode utilizar, como exemplo, a ideia da estratégia “Office boy” em sala de aula, citada por Peterson em [2], que segue abaixo:

Suponha que o aluno seja dono de uma empresa e, como todo diretor e dono de empresa, possui uma sala com uma grande mesa. Essa mesa possui duas gavetas principais onde numa delas, ele coloca todos os cheques e dinheiro que sua empresa ganha dos clientes e na outra, todas as contas e boletos que precisa pagar para manter a sua empresa funcionando (água, luz, telefone, salários, impostos, etc...).

Além disso, ele possui uma pessoa que lhe presta o serviço de office boy e todos os dias visita a sua sala trazendo cheques (dinheiro) ou contas para pagar. É ele quem abastece as duas gavetas. Por ser um homem muito atarefado e pouco organizado, esse office boy vive se atrapalhando e às vezes confunde as contas e cheques da sua empresa com as contas e cheques de outra empresa que ele também presta serviço.

Todo cheque (dinheiro) que entra na gaveta, aumenta o patrimônio da empresa e por isso será chamado de positivo usando sempre o sinal “+” ao se fazer referência a ele. Por outro lado as contas e boletos depositados na outra gaveta fazem com que o patrimônio da sua empresa diminua e por isso será chamado de negativo usando o sinal “-” quando se fizer referência a ele. Chama-se também de “+” o ato de o office boy trazer (ou somar) algo nas gavetas, e de “-” sempre que ele precisar retirar (ou subtrair) algo que tenha depositado por engano em uma das gavetas. Agora, diante dessas condições, as seguintes situações multiplicativas são apresentadas aos alunos:

1ª) O office boy depositou na gaveta dois cheques de R\$300,00.

Resposta esperada: “O patrimônio aumentou R\$600,00, pois  $2 \times 300 = 600$ .”

Nesse momento é importante chamar a atenção para os sinais que acompanham cada número da operação, explicando que, como o office boy somou 2 cheques na gaveta, então o número utilizado é +2 e, como ele depositou um cheque de R\$300,00 então há correspondência ao valor +300. Sendo assim a operação fica:

$$(+2) \times (+300) = +600$$

2ª) O office boy viu que tinha se confundido e teve que retirar da gaveta, três cheques de R\$200,00 que havia depositado por engano.

Resposta esperada: “O patrimônio diminuiu de R\$600,00, pois  $(3) \times (200) = 600$ .”

Mais uma vez é importante interferir e chamar a atenção para o uso correto dos sinais e explicar que, como o office boy retirou 3 cheques então usa-se o -3. Por outro lado como cheque representa uma quantia que acrescenta valor ao patrimônio, deve-se continuar utilizando o sinal “+” como definido antes. Portanto, a operação ficará da seguinte maneira:

$$(-3) \times (+200) = -600$$

3ª) Novamente o office boy cometeu um engano, mas agora ele teve que retirar 4 contas de R\$100,00 que ele havia depositado por engano na gaveta.

Resposta esperada: “O patrimônio vai aumentar R\$400,00.”

Explica-se novamente que, como o office boy retirou 4 contas, então usa-se o -4 e, como os objetos retirados eram contas (diminuem o valor do patrimônio), usa-se o -100, tornando a operação correta da seguinte maneira:

$$(-4) \times (-100) = +400$$

Diante dessas três situações, conclui-se que:

- $(+) \cdot (+) = +$
- $(-) \cdot (+) = -$ , e pela lógica,  $(+) \cdot (-) = -$
- $(-) \cdot (-) = +$

Outra sugestão para o professor trabalhar a compreensão e fixação da multiplicação de números inteiros é utilizar a ideia da estratégia “Caminhando”, descrita por Peterson [2] com seus alunos em sala de aula como ilustrado a seguir.

Com o apoio de um equipamento de vídeo, o professor produzirá previamente dois vídeos simples e de curta duração. No primeiro deve aparecer uma pessoa

caminhando naturalmente para frente a uma velocidade considerada constante. No segundo filme, a mesma pessoa deverá ser filmada caminhando para trás. Sendo gravados em DVD, ou mesmo celular, esses filmes podem ser reproduzidos em sentido contrário, facilmente.

Na apresentação para os alunos o professor deverá explicar as seguintes condições:

- a pessoa caminhando para frente, será representada pelo sinal “+”;
- a pessoa caminhando para trás, será representada pelo sinal “-”;
- o filme exibido no sentido normal, será positivo “+” e
- o filme exibido no sentido contrário será negativo “-”.

Feito isso, o professor vai apresentar as filmagens de quatro maneiras diferentes:

1. Exibindo o filme da pessoa caminhando para frente (+), no sentido normal (+). Na tela os alunos perceberão que a pessoa caminha para frente (+). Pode-se chamar a atenção para o fato de que  $(+) \times (+) = (+)$ ;
2. Exibindo o filme da pessoa caminhando para frente (+), mas no sentido contrário, ou seja, voltando o filme (-). Na tela a pessoa aparecerá caminhando para trás (-). Ressalte-se que  $(+) \times (-) = (-)$ ;
3. Exibindo o filme da pessoa caminhando para trás (-), mas no sentido normal (+), tem-se como resultado, na tela, uma pessoa caminhando para trás (-). Assim,  $(-) \times (+) = (-)$ ;
4. Por fim, o professor exibirá o filme no sentido contrário, para a compreensão e aprendizagem da multiplicação  $(-1) \times (-1) = +1$ . Ou seja, voltando o filme (-) da pessoa caminhando para trás (-) ilustra-se a idéia da caminhada para frente (+).

## 2 Considerações Finais

São perfeitamente justificáveis as dificuldades apresentadas pelos alunos ao se depararem com as operações matemáticas envolvendo os números negativos. Historicamente, foram necessários séculos para que os números negativos fossem aceitos e totalmente compreendidos pela sociedade matemática, ultrapassando dessa forma, esse obstáculo epistemológico. Ainda assim, é exigida dos alunos a total compreensão desse conteúdo em poucos meses.

Com relação à adição e a subtração de números negativos, verifica-se que os livros didáticos, na maioria das vezes utilizam as mesmas táticas, bem como os

professores em sala de aula. Com exemplos ilustrativos, usam a reta enumerada, a temperatura de algumas cidades (frias e quentes) e movimentação numa conta bancária fictícia, onde se debitam e creditam dinheiro.

O maior problema acontece quando o assunto passa a ser a multiplicação de números negativos, com a famosa “regra dos sinais”. Verificamos que, realizar a operação  $(-1) \times (-1) = +1$  não é tão simples assim, e por isso a maioria dos professores, talvez influenciados por livros mais antigos, optam por simplesmente fazer com que os seus alunos decorem a regra. Contudo, o ensino puramente expositivo destas regras, ao causar a sensação de regra outorgada pela força, cria dificuldades para a compreensão e aplicação correta nas operações. Como resultado, observa-se que os alunos chegam ao ensino médio ainda apresentando dificuldades em trabalhar com números inteiros, embora tenham decorado a “regra dos sinais”.

O uso de estratégias ou artifícios simples e compreensíveis que ilustrem as regras de sinais contribui com a assimilação do conceito e dão significado a ele, sendo superado este obstáculo epistemológico-didático que costumeiramente impede a progressão dos alunos no aprofundamento na disciplina. Não que seja impossível conseguir resultados favoráveis de compreensão do conhecimento da multiplicação entre números negativos em tão pouco tempo, mas devemos sempre estar atentos para o fato de que trabalhar com esses tipos de números não é algo natural para a maioria dos alunos. Portanto, é papel do professor estar de posse do maior número de estratégias para facilitar a compreensão do conteúdo por todos os alunos.

## Referências

- [1] R. Duval. Registro de representações semióticas e funcionamento cognitivo de compreensão em matemática. In *Aprendizagem em Matemática*. Papirus, Campinas, 2003.
- [2] J.C. Peterson. Fourteen different strategies for multiplication of integers or why  $(-1)(-1) = +1$ . *The Arithmetic Teacher*, 19(5):396–403, 1972.