UNIVERSIDADE ESTADUAL DO MARANHÃO
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação – PPG
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional / PROFMAT

MILTON CASSIO OLIVEIRA DO LAGO

O ENSINO DA GEOMETRIA COM O USO DE RÉGUA E COMPASSO: um estudo com alunos do 9º ano de uma escola particular em São Luís - MA.

São Luís – MA
2021

MILTON CASSIO OLIVEIRA DO LAGO

O ENSINO DA GEOMETRIA COM O USO DE RÉGUA E COMPASSO: um estudo com alunos do 9º ano de uma escola particular de São Luís - MA.

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico.

Orientadora: Profa. Dra. Lélia de Oliveira Cruz

São Luís – MA
2021

Lago, Milton Cassio Oliveira do.
O ensino da geometria com o uso de régua e compasso: um estudo com alunos do 9º ano de uma escola particular de São Luís - MA / Milton Cassio Oliveira do Lago. – São Luís, 2021.

73 f

Dissertação (Mestrado Profissional) – Curso de Matemática em Rede Nacional, Universidade Estadual do Maranhão, 2021.

Orientadora: Profa. Dra. Lélia de Oliveira Cruz.

1.Geometria. 2.Resgate. 3.Desenho. I. Construções Geométricas com régua e compasso. Um estudo com os alunos do 9° ano de uma escola particular de São Luís.

CDU: 514:37(812.1)

Elaborado por Giselle Frazão Tavares - CRB 13/665

MILTON CASSIO OLIVEIRA DO LAGO

O ENSINO DA GEOMETRIA COM O USO DE RÉGUA E COMPASSO: um estudo com alunos do 9º ano de uma escola particular de São Luís - MA.

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Coordenação do Programa de Pós-graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional/PROFMAT, como requisito obrigatório para a obtenção do título de MESTRE em Matemática.

Aprovado em: 31/05/2021

Lélia de Oliveira Cruz

Prof. Lélia de Oliveira Cruz/Orientador
Universidade Estadual do Maranhão – UEMA/CAXIAS

Celina Amélia da Silva

Profa. Dra. Celina Amélia da Silva/Membro interno
Universidade Estadual do Maranhão – UEMA/CAXIAS

Liamara

Profa. Dra. Liamara Stortganga/Membro externo
Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF

São Luís – MA
2021

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, por ter iluminado minha mente e meu caminho para que eu conseguisse completar mais uma etapa de vida;

Aos meus pais e demais familiares, pela força e incentivo;

Ao nascimento do meu filho, em uma época tão insegura, mas que trouxe muita felicidade para minha vida;

A Prof. Lélia de Oliveira Cruz, por ter sido uma excelente professora e orientadora durante o programa de mestrado.

A Profa. Dra. Celina Amélia da Silva, por ter me incentivado e apresentado um excelente material, que ajudou na construção do presente trabalho;

Ao Prof. Dr. Raimundo José Barbosa Brandão, por ter sido um excelente professor em cada etapa deste trabalho;

Aos amigos e colegas do curso, pelo apoio e convivência que ajudaram na formação deste trabalho;

A Universidade Estadual do Maranhão e seus funcionários, por permitirem tal realização;

A todos, que de algum modo, colaboraram para realização deste trabalho.

(...) pelo meu amor platônico às matemáticas; (...) porque através do lirismo propendo à geometria (...).

Murilo Mendes

RESUMO

Esta investigação teve o propósito de analisar as contribuições da régua e compasso no ensino introdutório da geometria. Para o estudo, valeu-se de uma abordagem qualitativa, com pesquisa de campo. O surgimento da geometria remonta a períodos anteriores ao nascimento de Cristo e as necessidades do homem desde o seu surgimento, contribuíram para a origem e evolução deste campo do saber matemático. Realizou-se uma oficina com alunos do 9º ano do ensino fundamental, do colégio O Bom Pastor Jr., onde foi elaborada a pesquisa. Durante a oficina, os alunos realizaram construções geométricas com o uso da régua e do compasso. Constatou-se que no início desse estudo, 65% dos participantes apresentaram alto nível de dificuldade sobre a compreensão dos conceitos matemáticos e elaboração das atividades que envolviam construções de elementos da geometria com os instrumentos citados anteriormente.

Palavras-chave: Ensino da Geometria. Matemática. Régua e Compasso.

ABSTRACT

This investigation aimed to analyze the contributions of the ruler and compass in the introductory teaching of geometry. For the study, a qualitative approach was used, with field research. The emergence of geometry dates back to periods prior to the birth of Christ and as a need for man since its emergence, it contibuted to te origin and evolution of this field of the mathematical knowledge. A workshop was held with students from the 9th year of elementar school, from the school O Bom Pastor Jr., where the search was developed. During the workshop, students performed geometric constructions using a ruler and a compass. It was found that there is no beginning of this study, 65% of participants have a high level of difficulty in understanding the mathematical concepts and preparation of activities that envolve construction of elements of gometry with the instruments mentioned above.

Keywords: Teaching of Geometry. Math. Ruler and Compass.

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

As bases da geometria foram definidas e construídas pelas antigas civilizações mediante suas necessidades do cotidiano que levavam estes povos a acumular experiência. O saber experiencial é importante para a reconstrução de novos conhecimentos. Como um dos mais autênticos representantes da matemática do passado, talvez Euclides, no século V a.C, com sua obra Os Elementos, seja a grande referência da geometria. Esta obra apresentava desde os princípios básicos de geometria, como ideias de pontos e retas, aos mais complexos de seus postulados e provas/demonstrações matemáticas.

A geometria tem grande aplicação no cotidiano, desde a compreensão do valor pago ao Imposto Predial e Territorial Urbano/IPTU, calculado em função da área construída; fatura de consumo de água, calculado pelo volume de água consumido e nos diversos ramos do conhecimento, como a geografia, engenharia civil, agronômica, ambiental, dentre outras.

Nas escolas da Educação Básica, as aulas de geometria não são trabalhadas numa perspectiva de aprendizagem significativa, ou seja, não dão oportunidades para os alunos desenvolverem habilidades com o seu uso.

De acordo com Ausubel (1982), a aprendizagem significativa procura explicar o processo de assimilação que ocorre com a criança na construção do conhecimento a partir do seu conhecimento prévio, ou seja, ela depende da base educacional que a criança teve, em seus primeiros anos escolares, para poder aprimorar novos conhecimentos e aplicá-los no cotidiano.

Além disso, pode-se apontar as dificuldades que os alunos enfrentam por falta de conhecimentos prévios, como os conceitos da geometria, aplicação de suas fórmulas e aplicação em situações do cotidiano.

Pavanello (1993), afirma que o abandono do ensino da Geometria nas salas de aula pode ser explicado pelo contexto histórico-político do problema. Nas escolas de iniciativa privada, estes problemas são atenuados pelo melhor poder aquisitivo dos pais e/ou responsáveis, pelo melhor grau de instrução dos mesmos e ainda, boa estrutura da instituição de ensino e maior exigência do corpo docente pela gestão escolar.

Com base nessas observações, foram realizadas oficinas, com alunos do 9º ano do ensino fundamental, de um colégio da rede privada, na cidade de São Luís, estado do Maranhão.

O motivo da escolha da escola e da turma para a pesquisa, se deve, em primeiro momento, ser o campo de atuação do professor pesquisador. E, em segundo, em virtude das inquietações provocadas pela organização dos livros didáticos, visto que, os livros didáticos utilizados durante os anos escolares, em que trabalha~~,~~ não priorizam as construções geométricas.

Estas são apresentadas como informações superficiais, para que o aluno possa partir direto para os cálculos algébricos. E quando o assunto é sobre geometria, são aplicados nos capítulos finais, podendo ser usado como justificativa para não explorar o tema de forma adequada, a falta de tempo para o professor aprofundar os conteúdos. Além disso, os alunos terminam o ensino fundamental sem desenvolver habilidade no uso da régua e do compasso, nas construções geométricas.

Os pressupostos anteriores, encaminharam o questionamento: como o professor poderia resgatar o interesse dos alunos para as definições e construções geométricas? A investigação realizada, visando responder o problema posto, objetivava: melhorar o desempenho dos alunos do nono ano, na utilização de régua e compasso para o entendimento do estudo da geometria.

O objetivo geral foi norteado pelos objetivos específicos: mostrar as ideias contidas na geometria euclidiana e seu desenvolvimento com simples instrumentos; analisar o entendimento dos alunos quanto aos conceitos geométricos e auxiliar os alunos nas construções geométricas com régua e compasso.

Essa pesquisa poderá ser ampliada para o Ensino Médio, pois os alunos já estarão mais familiarizados com as construções geométricas e dos conteúdos da geometria plana. Para realizar as construções sugeridas, o aluno necessitará apenas de lápis, régua e compasso. Em algumas atividades, ele poderá usar esquadros e transferidor, mas estes não serão essenciais na resolução. Poderia ainda, usar algum *software* de geometria dinâmica, mas, como nem toda escola dispõe de laboratório de informática, nos restringiremos apenas a estes materiais, pois são de fácil acesso aos alunos.

A dissertação denominada “O Ensino da Geometria com o uso de régua e compasso: um estudo com alunos do 9º ano de uma escola particular de São Luís - MA” está organizada em sete seções: a primeira é a introdução, com uma breve apresentação do trabalho, traz ainda, o objetivo geral e os específicos.

Na segunda seção denominada “procedimentos metodológicos”, vem o detalhamento da metodologia de trabalho; a terceira seção, exibe o panorama histórico, buscando entender os princípios da geometria e despertar o interesse do aluno para o passado da geometria; a seção de número quatro, apresenta a engenharia didática como metodologia apoiada na teoria de Van Hiele, para a construção do pensamento geométrico.

A quinta seção, discorre sobre as construções geométricas elementares, detalhando cada construção para o melhor entendimento do aluno; a apresentação e análise de dados, vem na sexta seção, onde é possível observar o desempenho dos alunos que participaram do projeto e por fim, a conclusão, referências bibliográficas, apêndice e anexo.

.

2. **PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS**

Na investigação de natureza qualitativa, segundo Brandão (2020, p. 51-52), o pesquisador se constitui como sujeito principal e foca o seu trabalho na interpretação da realidade. E com base nessa categoria de investigação, que esse presente trabalho se direciona, visto que o professor assume a responsabilidade em determinar as figuras que serão trabalhadas, os passos a serem construídos e como avaliar o desempenho dos alunos em cada construção.

Justifica-se a natureza qualitativa do estudo, por se trabalhar com valores, crenças, hábitos, atitudes, representações e opiniões. Esta abordagem é muito utilizada para a compreensão de fenômenos caracterizados por muita complexidade interna. Na concepção de TRIVIÑOS (1987), a pesquisa qualitativa é,

> [...] conhecida também como 'estudo de campo', 'estudo qualitativo', 'interacionismo simbólico', 'perspectiva interna', 'interpretativa', 'etnometodologia', 'ecológica', 'descritiva', 'observação participante', 'entrevista qualitativa', 'abordagem de estudo de caso', 'pesquisa participante', 'pesquisa fenomenológica', 'pesquisa-ação', 'pesquisa naturalista', 'entrevista em profundidade', 'pesquisa qualitativa e fenomenológica', e outras [...]. Sob esses nomes, em geral, não obstante, devemos estar alertas em relação, pelo menos, a dois aspectos. Alguns desses enfoques rejeitam total ou parcialmente o ponto de vista quantitativo na pesquisa educacional; e outros denunciam, claramente, os suportes teóricos sobre os quais elaboraram seus postulados interpretativos da realidade (TRIVIÑOS, 1987, p. 124).

Para a realização da investigação utilizou-se como metodologia de ensino a Engenharia Didática, desenvolvida pela pesquisadora francesa Michele Artigue. Para Artigue (1996), esta metodologia foi associada ao trabalho de um engenheiro, pois a este cabe:

> [...] realizar um projeto preciso, se apoia sobre conhecimentos científicos de seu domínio, aceita submeter-se a um controle de tipo científico, mas, ao mesmo tempo, se vê obrigado a trabalhar sobre objetos bem mais complexos que os objetos depurados na ciência e, portanto, a enfrentar ...] problemas que a ciência não quer ou não pode levar em conta. (ARTIGUE, 1996, p. 193)

Machado (2002, p. 198), concebe a Engenharia Didática [...] como uma sequência de aula (s) concebida(s), organizada(s) e articulada(s) no tempo, de forma coerente, por um professor-engenheiro para realizar um projeto de aprendizagem para uma certa população de alunos.

Nesta metodologia, a interação entre professor e aluno permite uma evolução na construção do conhecimento pelas escolhas e decisão do professor, em mediar o processo devolvendo as dúvidas dos alunos, para mais discussões e reflexões em grupo, e estes reagindo de forma motivadora para buscar soluções das atividades de ensino.

Este estudo foi realizado em um colégio particular, localizado em São Luís, capital do Maranhão. O Colégio em questão, tem quatro professores de matemática no 9º ano do ensino fundamental e 90 alunos matriculados e distribuídos nas turmas matutinas 19AM e 19BM, e as vespertinas 19AV e 19BV. Convêm destacar, que a disciplina Matemática inclui álgebra e geometria no mesmo material didático.

O estudo foi realizado com as turmas A e B, do turno matutino, e o convite para participar do projeto foi feito em sala de aula. No momento houve uma exposição dos objetivos e da metodologia de trabalho, os alunos que manifestaram interesse em participar do projeto, receberam um convite impresso para que os pais e/ou responsáveis pudessem autorizar a participação.

O trabalho iniciou com a participação de 10 alunos e concluiu com 25, uma amostra que representa, cerca de 28% da população de alunos. Foram realizados 11 (onze) encontros com 3 (três) horas de duração no contraturno das aulas. Os encontros ocorreram no período de outubro a dezembro de 2019.

Para coleta de dados utilizou-se atividades de geometria, que foram organizadas pelo pesquisador, sendo cada etapa adaptada, para melhor entendimento por parte dos alunos, para serem resolvidas com a utilização de régua e compasso.

Para avaliar o desempenho dos alunos, pontuou-se: a participação, entendimento sobre as etapas do trabalho e as construções realizadas no final de cada tópico.

3. PANORAMA HISTÓRICO DA GEOMETRIA

Uma das virtudes do ser humano é a capacidade de utilizar o conhecimento para desenvolver teorias que expliquem os eventos da natureza e os elementos que o cercam. Um dos caminhos trilhados para realizar tais feitos, foi a matemática. Ciência que vem acompanhando o homem, desde o seu surgimento nas cavernas até a sociedade capitalista atual. Tem aparecido na divisão do trabalho entre a mulher em cavernas e homens em suas caçadas e, hoje, entre mulheres e homens em empresas disputando igualdade e conquistas para ascender os níveis sociais.

Uma das localidades e tempo em que essa área se desenvolveu de forma incrível foi na Grécia Antiga. Muitos estudiosos gregos se destacaram na matemática, tais como: Anaximandro, Arquimedes, Erastóstenes, Hiparco, Pitágoras, Tales, entre outros. Entretanto, este trabalho terá como foco um dos matemáticos mais importantes para a história da geometria. Euclides de Alexandria foi um importante matemático e conhecido como o “Pai da Geometria”.

Há certo desconhecimento a respeito da sua vida e nem ao menos como seria sua aparência, por isso a diversidade de imagens que se encontra em livros e pesquisas. Foi chamado para ensinar em uma escola em Alexandria, e lá ganhou muito prestígio por ter uma capacidade incrível de repassar os conteúdos de geometria aos alunos, de uma forma simples e eficaz. Ele tinha grande habilidade em sintetizar o assunto e mostrar os caminhos mais fáceis para a aprendizagem. Em uma das suas famosas frases, quando um rei lhe perguntou se havia caminho mais rápido para aprender geometria e ele em sua ampla experiência respondeu: “Não existem estradas reais para chegar à geometria”.

É certo, que houve outros livros escritos por ele, e muitos foram perdidos, mas a sua obra mais clássica foi “*Os Elementos*”. É uma coleção composta por treze livros, que envolve desde a geometria plana até a geometria espacial e poliedros. Depois da Bíblia, foi o livro mais reproduzido e estudado no ocidente da Europa. É uma coletânea que não foi constituída de modo desorganizado, pois ela segue uma ordem lógica onde as definições, axiomas e postulados seguem uma ordem perfeita. Euclides elaborou esse trabalho não com a intenção de apenas reunir o conhecimento da geometria, e sim como avalia-lo como ciência. Naquele tempo não havia tecnologias que facilitassem seu desempenho, portanto, com os instrumentos da época, ele desenvolveu estudos sobre as figuras geométricas. Esta obra foi de fundamental importância para os estudos da geometria durante anos e seus conhecimentos foram utilizados por mais de dois milênios. Por ter sido uma obra tão ampla e bem desenvolvida, muitos estudiosos acreditavam que era impossível que uma única pessoa pudesse realizar tal façanha. Conclui-se que muitos desses conhecimentos contidos em tal obra, já tinham sido demonstrados, entretanto, o que impressiona as mentes intelectuais que a estudam, é o fato de poder recolher tanto conhecimento em uma obra.

Nos livros I ao IV, encontra-se a geometria elementar plana que reúne assuntos como construções geométricas, igualdade de áreas e o Teorema de Pitágoras. O livro V trata de forma unicamente geométrica sobre *a teoria das proporções de Eudoxo*.

Assim, *Os Elementos* de Euclides são praticamente tudo o que temos da Matemática grega que se desenvolveu desde seu início com *Tales de Miletos*, que viveu no século VI a.C., até o tempo de Euclides, um período de cerca de 250 anos, aliás, muito pouco tempo para que a Matemática, logicamente organizada, evoluísse do estágio embrionário em que se encontrava Tales, até o alto grau de sofisticação que transparece em *Os Elementos*. Uma versão conhecida é a tradução inglesa de Thomas L. Heath, que foi publicada em três livros.

A versão brasileira, traduzida por Irineu Bicudo, apresenta uma introdução bem detalhada, além de destacar os postulados, incluir comentários esclarecedores e desenvolver etapas de construções geométricas com desenhos bem elaborados.

> Como se pode ver pelas passagens acima, e julgamos constituírem elas tudo o que se possa falar sobre esse trabalho de Euclides, estava aberta a temporada das conjecturas. E nada de mal nisso. É mesmo um ampliar de horizontes, um ganho em visão sobre os métodos dos antigos. (EUCLIDES, 2009, p. 57)

De acordo com Borsuk (1905 - 1982) e Szmielew (Foundations of geometry, 1960), na obra *Os elementos* (2009): "Se o valor de um trabalho científico pode ser medido pelo tempo durante o qual ele mantém a sua importância, então os Elementos de Euclides são a obra científica mais válida de todos os tempos."

Em relação ao uso de instrumentos para auxiliar na construção de desenhos matemáticos, tem-se o compasso e a régua que são mencionados em várias etapas das demonstrações apresentadas por Euclides.

No trabalho de pesquisa Lucas Maken (2015), *Ensinando Geometria com Régua e Compasso, uma proposta para o 8° ano,* pode-se analisar como é importante a reforçar a base matemática, ao relembrar que o tema sobre desenho geométrico é importante para o ensino da geometria, conforme afirma:

> Desde Os Elementos de Euclides, o desenho geométrico acompanha a Geometria Plana. A proposta de Euclides, ao elaborar sua geometria, era o estudo da possibilidade de construir uma figura usando régua e compasso e não, simplesmente, a execução do traçado da figura com esses instrumentos. Porém, o desenho geométrico já não é mais trabalhado nas escolas e, paralelamente, a essa realidade ou como consequência dela, o ensino de Geometria tem se tornado o terror da Matemática. (LUCAS MARKEN, 2015, p. 30)

Enfim, percebe-se que Euclides foi um homem que independentemente da aplicação da geometria, deixou-se levar pelo seu amor à construção da matemática.

4. A ENGENHARIA DIDÁTICA APOIANDO A TEORIA DE VAN HIELE NA CONSTRUÇÃO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO

Entende-se por engenharia didática como,

> [...] uma sequência de aula(s) concebida(s), organizada(s), e articulada(s) no tempo, de forma coerente, por um professor-engenheiro para realizar um projeto de aprendizagem para uma certa população de alunos. No decurso das trocas entre professor e alunos, o projeto evolui sob as reações dos alunos e em função das escolhas e decisões do professor. (DOUADY, 1993, p. 02)

Ela tem como enfoque a abordagem da didática francesa, assim como, utiliza o ambiente escolar para analisar o desenvolvimento de suas pesquisas.

Para que se possa ter uma ideia geral sobre essa abordagem, pode-se avaliar forma metodológica, uma vez que busca analisar o conhecimento prévio dos discentes e a partir deles, foca a seu direcionamento para um saber consolidado.

Ela é composta por quatro fases:

- Análise de dados preliminares (troca de informações, para analisar quais bases de conhecimento possui ou necessita);
- Elaboração de sequências (desenvolver um planejamento de tarefas a serem realizadas para analisar o desempenho nas atividades);
- Aplicação da sequência didática (onde o discente pode seguir uma orientação didática para construção do conhecimento);
- Análise posteriori (conclusão do que foi desenvolvido ou colocado em prática pelo discente).

4.1 TEORIA DE VAN HIELE E A CONSTRUÇÃO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO

A teoria de Dina e Peter Van Hiele, casal neerlandês, iniciou-se em 1957 e nunca esteve tão atual. Faz referência ao ensino e aprendizagem da Geometria. Esta teoria, desenvolvida por volta dos anos 50 e início dos anos 60, propõe um avanço na aprendizagem do conteúdo através de cinco níveis cada vez mais complexos. De acordo com a Professora Heloísa Argento, no seu trabalho sobre Teoria Construtivista, destaca que eles fundamentaram-se nas ideias do psicólogo suíço Jean William Fritz Piaget, que desenvolveu a Teoria Psicogenética, também conhecida como concepção construtivista da formação da inteligência. Esta progressão é determinada pelo ensino. Assim, o professor tem um papel fundamental ao definir as tarefas norteadoras para os alunos progredirem em níveis avançados de pensamento.

A aprendizagem de conceitos geométricos sempre foi um aspecto da matemática que muitos alunos sentem dificuldades e a sua aprendizagem por vezes é realizada com lacunas ou erros (Fuys, Geddes & Tichler, 1988). Deste modo, os alunos quando chegam ao 2º ciclo do ensino básico português, já experimentaram situações e atividades em que se proporcionava a oportunidade de desenvolver conceitos, propriedades e raciocínios geométricos. Assim, o nível de conhecimentos, procedimentos, comunicação, raciocínio e pensamento geométrico em que cada um dos alunos se encontra pode ser diferente. Vários estudos confirmam essa diversidade, tais como Van Hiele (1986), Senk (1989), Gutiérrez (1996), Pandiscio e Orton (1998), Gray e Tall (2002), Tall (2004), entre outros.

No artigo Os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico de estudantes de uma licenciatura em matemática no estado de Pernambuco: um estudo sob a ótica da teoria de Van-Hiele, André Pereira da Costa afirma que desde Os Elementos de Euclides, o desenho geométrico acompanha a Geometria Plana.

Portanto, o que promove a evolução do pensamento geométrico é a vivência com atividades adequadas, que, ao serem trabalhadas em sala de aula, favorecem a aprendizagem geométrica.

Kaleff (1994), afirma que Van Hiele propôs um modelo teórico formado por cinco níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico, que se inicia a partir da compreensão dos objetos geométricos pelo seu aspecto global, concluindo-se no estudo de diferentes sistemas axiomáticos.

Evidenciamos nessa pesquisa que vários elementos devem ser levados em consideração para o desenvolvimento de pensamento. Inicialmente destacamos as construções geométricas, evidenciado como um dos elementos mediadores da aprendizagem e principal instrumento motivador à participação dos colaboradores de maneira afetiva. Outro elemento importante foi certamente a linguagem adequada empregada em consonância aos níveis do modelo de Van Hiele e evidenciadas nas mais diversas formas de comunicação, respeitando os limites de cada sujeito do grupo.

De certa forma, o uso de régua e compasso mostrou-se como um importante instrumento pedagógico no ensino e na aprendizagem de geometria. Entretanto, é bem provável que essa técnica não contemple todas as etapas e conteúdos do ensino de geometria, e tão pouco estimule a afetividade da totalidade dos alunos e, principalmente de todos os professores em matemática, o que nos faz propor aos docentes dessa área, que busquem instrumentos interessantes que favoreçam a afetividade dos alunos com os conteúdos a serem explorados.

5. CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS ELEMENTARES

As construções geométricas continuam a ter grande importância na compreensão da Matemática elementar. Seus problemas desafiam o raciocínio e exigem sólido conhecimento dos teoremas de geometria e das propriedades das figuras, não sendo exagero dizer que não há nada melhor para aprender geometria do que praticar as construções.

> [...] não há geometria sem régua e compasso. [...] O aprendizado das construções amplia as fronteiras do aluno e facilita muito a compreensão das propriedades geométricas, pois permite uma espécie de "concretização' (do conhecimento). [...] Em todas as interfaces que a Matemática faz com a linguagem gráfica, o conhecimento de Desenho entra como ferramenta enriquecedora (PUTNOKI, 1991, apud ZUIN, 2001, p. 177).

Inicialmente, realizou-se um diagnóstico acerca dos conhecimentos prévios dos alunos com relação às suas representações do seu cotidiano dos conceitos de geometria plana desde os conceitos mais primitivos, bem como as noções de áreas em seu contexto social.

Diante do diagnóstico sobre o conhecimento das noções dos conceitos de geometria em seu contexto social, o pesquisador/professor, elaborou uma sequência didática para trabalhar os objetos de geometria selecionados. Para a realização do planejamento levou-se em consideração os aspectos procedimentais e atitudinais.

No primeiro encontro, realizado no dia 03 (três) de outubro de 2019, apresentou-se o projeto aos alunos e procedeu-se a entrega dos termos de autorização aos pais para a participação dos seus filhos na investigação.

No segundo encontro, no dia 10 de outubro de 2019, o pesquisador/professor, mediou a primeira atividade, onde abordou, os conceitos primitivos da geometria e as construções geométricas iniciais, iniciando desta maneira, a fase de experimentação da engenharia didática.

As definições de ponto, reta e plano foram trabalhadas com os alunos no início do ano letivo, o que facilitou os primeiros passos das construções que iria se desenvolver ao longo do semestre. Assumindo dessa forma, essas noções como conceitos primitivos, de modo que não prescindem de definições formais.

Além disso, os alunos começaram essas construções admitindo que toda reta é um conjunto de (pelo menos dois) pontos. Da mesma forma, que o plano contém todos os pontos e que há pelo menos três pontos não situados em uma mesma reta.

Nas construções a seguir, a régua serve para desenhar semirretas ou uma reta passando por dois pontos e o compasso serve para desenhar uma circunferência com raio de comprimento arbitrário ou dado por um segmento, e cujo centro é um ponto dado.

5.1. PONTO, RETA, PLANO E OS TRANSPORTES DE SEGMENTOS

O segundo encontro, teve como objetivo: utilizar régua e compasso para trabalhar as concepções iniciais da geometria, observar a habilidade dos alunos com estes instrumentos, estudar e analisar os conceitos e técnicas de construções geométricas com régua e compasso, para resolver problemas de geometria euclidiana plana por meio do uso de régua e compasso.

Inicialmente, o professor, explicou a importância do uso da régua e do compasso nas construções geométricas e, em seguida discorreu sobre os axiomas e postulados dos elementos primitivos, ponta, reta e plano. Em seguida, foi entregue a primeira atividade, desenvolvida pelo pesquisador, sobre transporte de seguimento.

Atividade 1: Dados dois segmentos AB e uma semirreta OX, de medidas quaisquer:

a) Fazer o transporte de AB, para OX,

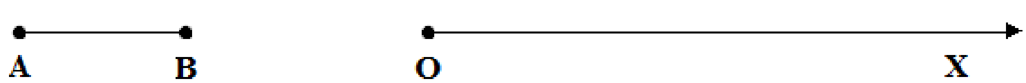


Figura 1 – Trasnporte de Segmento

Resolução

Os alunos não tiveram dificuldade na realização desta atividade. O professor colocou no quadro o roteiro para a realização do transporte dos segmentos.

O professor chamou a atenção dos alunos que não medissem o segmento com a régua, mas que usassem o compasso colocando inicialmente as pontas nas extremidades do segmento e depois colocar a ponta seca do compasso na origem da semirreta OX.

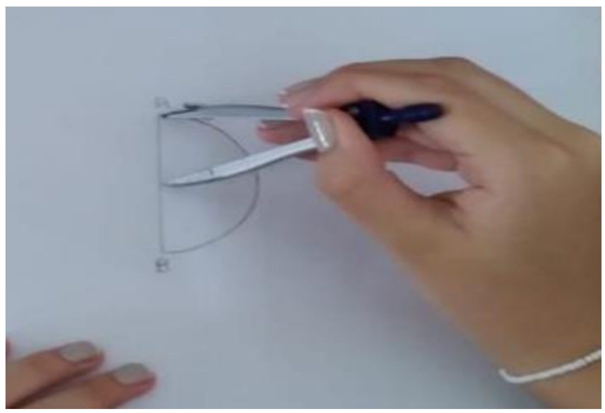


Figura 2 – Construção de uma semicircunferência, utilizando o segmento $\overline{AB}$, realizada por uma aluna da Turma 19AM

Resultado: Dos 10 alunos presentes nesse encontro, apenas dois conseguiram realizar a atividade por completo.

A resolução esperada, era a seguinte:

- Dado um segmento $\overline{AB}$ e uma semirreta $\overrightarrow{OX}$.

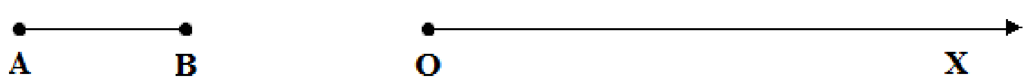


Figura 3 – Transporte de segmento para semirreta

Foi instruído aos alunos que para transportar o segmento $\overline{AB}$ para a semiereta $\overrightarrow{OX}$, utiliza-se o compasso para transportar $\overline{AB}$ a partir de *O*, obtendo o ponto *C* em $\overrightarrow{OX}$.

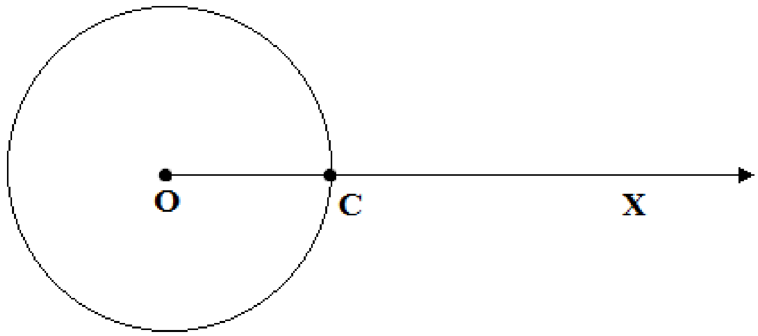


Figura 4 – Circunferência no segmento

Em seguida, para a construção da Figura 1 – Transporte de Segmento, poderia ter sido traçado apenas um arco conveniente de circunferência ao invés de traçá-la totalmente.

Após a explicação da resolução esperada, os 10 alunos entenderam que $\overline{AB}$ e $\overline{OC}$ são congruentes.

5.2 ÂNGULO E TRANSPORTE DE ÂNGULO.

No terceiro encontro, no dia 17 de outubro de 2019, a quantidade de alunos participantes aumentou para 16 integrantes. Este encontro teve como objetivo: analisar as definições de ângulos e quais métodos poderiam ser utilizados para o transporte destes.

a) Ângulo: é a região formada entre duas semirretas que partem do mesmo ponto.

b) Transporte de ângulos: é o deslocamento de um ângulo para uma determinada parte do plano.

Em seguida, foi entregue a segunda atividade, elaborada pelo pesquisador:

Atividade 2: Dados um ângulo **α** e uma semirreta $\overrightarrow{OX}$, de medidas quaisquer:

a) Fazer o transporte de α para $\overrightarrow{OX}$.

Resolução:

A princípio, os alunos tentaram fazer o transporte do ângulo sem o uso de compasso. Após analisar as tentativas, o professor colocou no quadro o roteiro para a realização do transporte de ângulos.

Resultado: Seis alunos conseguiram desenvolver a atividade por completo.

A resolução esperada era a seguinte:

- Dado o ângulo *α* e a semirreta $\overrightarrow{OX}$:

Figura 5 - Transporte de ângulo para segmento

Pode-se construir um ângulo $X\hat{O}Y$ que seja congruente ao ângulo *α*.

Para transportar o ângulo *α* sobre a semirreta $\overrightarrow{OX}$ dada, segue-se os seguintes passos:

- Com centro no vértice do ângulo *α*, utilizando-se o compasso, traçar um arco de circunferência cortando seus lados e encontrando, assim, os pontos *A* e *B*;

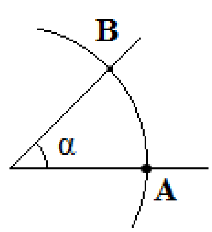


Figura 6 – Encontro de pontos no arco

- Com a mesma abertura do compasso utilizada para encontrar os pontos *A* e *B* na Figura 4, traçar uma circunferência com centro *O*, cortando $\overrightarrow{OX}$ e encontrando o ponto *C*;

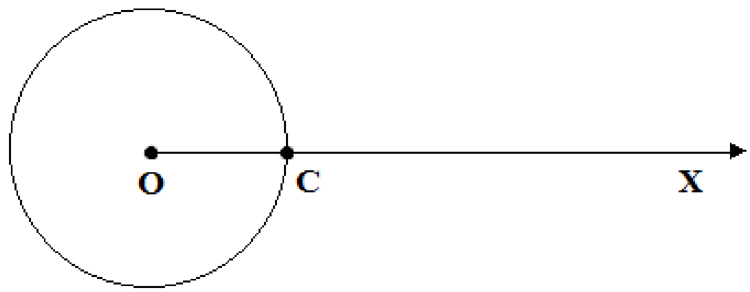


Figura 4 – Circunferência no segmento

- Utilizando-se o compasso com uma abertura de distância $\overline{AB}$, traçar outra circunferência (com centro *C* e raio $\overline{AB}$) que irá interseccionar a circunferência da Figura 5 nos pontos *D* e *E*. Além disso, $\overrightarrow{OY}$ será a semirreta que passa pelo ponto *D*.

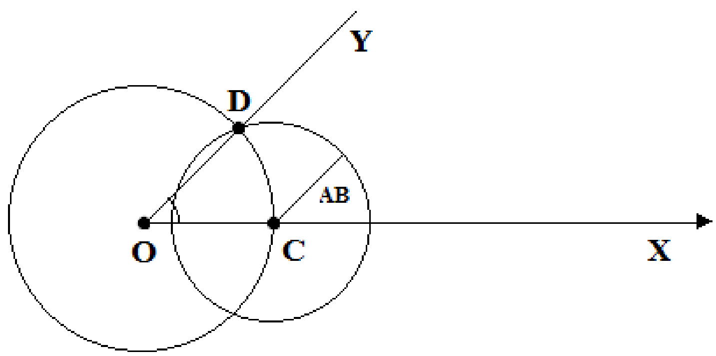


Figura 7 – Duas circunferências no segmento

O ângulo $D\hat{O}C$ tem como um de seus lados a semirreta $\overrightarrow{OX}$ e, pelo caso L.L.L. de congruência de triângulos, é congruente ao ângulo *α*.

Após a explicação sobre o resultado esperado, os alunos conseguiram compreender essas etapas, ficando entusiasmados para as construções das próximas aulas.

5.3. MEDIATRIZ DE UM SEGMENTO E RETA PERPENDICULAR A UMA RETA DADA POR UM PONTO DADO

No quarto encontro, no dia 24 de outubro de 2019, o número de participantes chegou a 20 alunos. E teve como objetivo: analisar as definições de mediatriz e retas perpendiculares.

Os alunos, normalmente, confundem as definições de mediatriz e mediana. Dessa forma, foi trabalhado os conceitos dos principais segmentos da Geometria. Como a atividade 3, o professor levantou as seguintes perguntas para os alunos, que deveriam responder em voz alta:

a) O que é uma mediatriz?
b) O que é uma mediana?
c) O que são retas perpendiculares?

Após ouvir as respostas dos alunos, o professor fez a correção no quadro com as respectivas definições. Em seguida, foi entregue a seguinte atividade, desenvolvida pelo pesquisador:

Atividade 4: Construir a mediatriz de um determinado segmento:

a) Sendo dado o segmento $\overline{AB}$

Resultado: 12 alunos conseguiram desenvolver a atividade por completo.

Resolução esperada:

Sendo a mediatriz de um segmento $\overline{AB}$ é uma reta perpendicular a este segmento que contem seu ponto médio. Sendo que todos os pontos da mediatriz têm a mesma distância às extremidades *A* e *B* do segmento.

O professor pesquisador orientou aos alunos que observassem o roteiro:

Após a resolução desta atividade pelos alunos com a orientação do professor, seguindo o roteiro apresentado, era esperado o seguinte:

- Seja dado um segmento $\overline{AB}$;

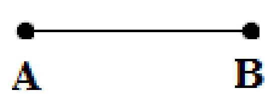


Figura 8 – Segmento

- Traçar duas circunferências com centro nos pontos *A* e *B* e com raio $\overline{AB}$, encontrando com a intersecção das circunferências, os pontos *C* e *D*;

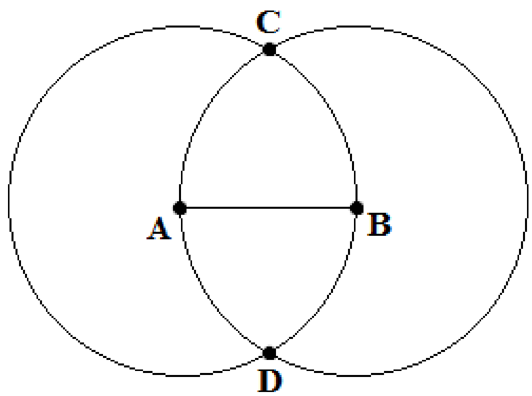


Figura 9 – Duas circunferências nas extremidades do segmento

- Depois, ligando-se os pontos *A*, *B*, *C* e *D*, forma-se um quadrilátero. Como os raios das duas circunferências são iguais, então os segmentos $\overline{AC}, \overline{CB}, \overline{BD}$ e $\overline{DA}$ tem o mesmo comprimento;

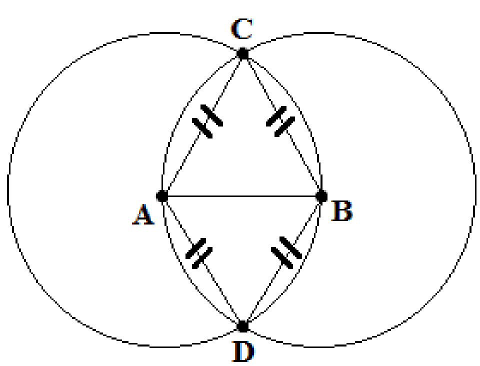


Figura 10 – Triângulos semelhantes no segmento

- O lado $\overline{AB}$ é comum aos triângulos *ABC* e *ABD*, portanto, pelo caso L.L.L. de semelhança de triângulos, eles são congruentes. E neste caso, os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ também são congruentes assim como os ângulos $\hat{C}$ e $\hat{D}$ também são. Logo o quadrilátero *ABCD* é um losango. Então, as diagonais $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são perpendiculares e encontram-se em seus pontos médios;

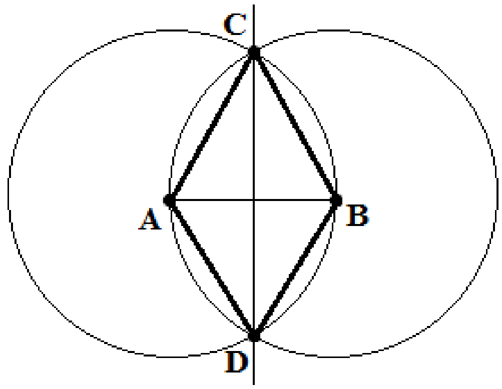


Figura 11 – Mediatriz no segmento

Portanto, a reta determinada pelos pontos *C* e *D* é a mediatriz do segmento $\overline{AB}$.

Ao final, os alunos conseguiram identificar os quadriláteros e circunferências que apareceram no decorrer da demonstração.

Em seguida, alguns alunos perguntaram sobre as classificações das retas, uma vez que apareceram em algumas etapas das construções, entre elas: as retas perpendiculares e paralelas. Dessa forma, o pesquisador realizou uma comparação e iniciou a seguinte atividade, sendo esta elaborada pelo mesmo:

Atividade 5: Construir a mediatriz de um segmento, quando:

a) o ponto dado pertence a reta;

b) o ponto dado não pertence a reta.

Resultado: 15 alunos conseguiram desenvolver a atividade por completo.

Resolução esperada:

Os alunos utilizaram apenas régua, medindo em centímetros, o comprimento do segmento e depois dividindo-o ao meio, construíram a mediatriz. Com a orientação do professor, começaram a utilizar o compasso, para realizarem uma construção mais precisa.

O resultado esperado é o seguinte:

Sejam dados o ponto *C* e a reta *t*. Entretanto, o ponto pode pertencer ou não a reta *t*. Logo, neste trabalho, serão tratados os dois casos.

a) C $\in$ *t*

- Seja dado o ponto *C* na reta *t*, transcreva-o em seu caderno.

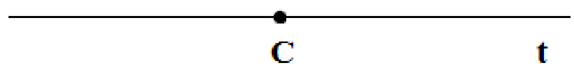


Figura 12 – Ponto no segmento

- Com o compasso com uma abertura qualquer e com centro no ponto *C*, traçar uma circunferência que irá interceptar a reta *t* nos pontos *A* e *B*;

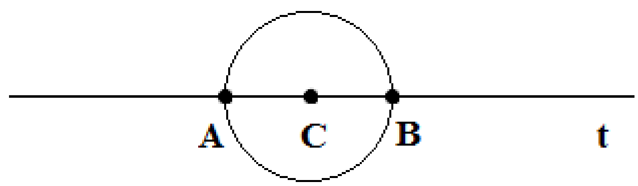


Figura 13 – Circunferência interceptando o segmento

- Utilizando-se novamente o compasso, agora com uma abertura maior que a da Figura 12, traçar dois arcos sobre a circunferência e dois arcos abaixo da circunferência com centros nos pontos *A* e *B*, de modo que se interceptem nos pontos *D* e *E*;

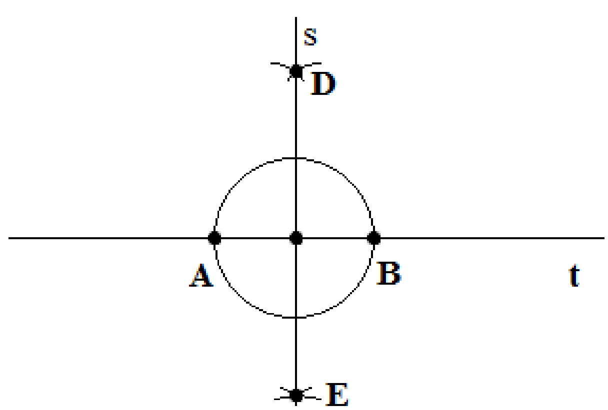


Figura 14 – Encontro dos pontos D e E

Portanto, a reta *s* (mediatriz do segmento $\overline{AB}$) é a reta perpendicular a reta *t* procurada. Em seguida, foi questionado aos alunos sobre o que aconteceria caso o ponto inicial não estivesse na reta. Após analisarmos as respostas, prosseguimos com as ideias deles e modificando-as quando necessário:

b) C $\notin$ *t*

Seja *C* um ponto dado fora da reta *t*, como mostra o desenho que foi posto no quadro.

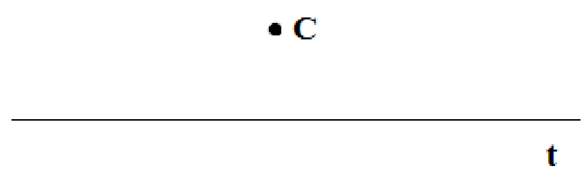


Figura 15 – Ponto fora da reta

Utilizar os seguintes passos para a construção:

- Com um compasso, traçar uma circunferência com centro *C* que irá interceptar a reta *t* nos pontos *A* e *B*.

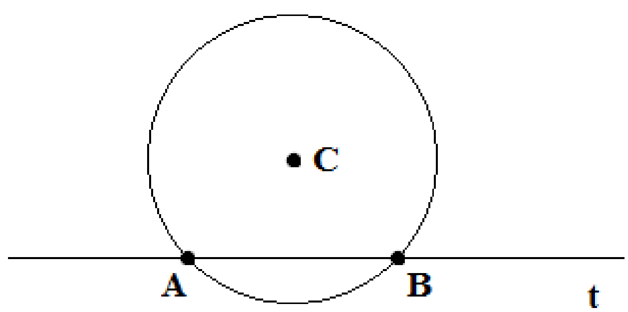


Figura 16 – Circunferência com centro fora da reta

- Traçar dois arcos de circunferência de mesmo raio, com centros nos pontos *A* e *B*, respectivamente, encontrando na intersecção, o ponto *D* (neste exemplo, o ponto *D* está abaixo da circunferência);

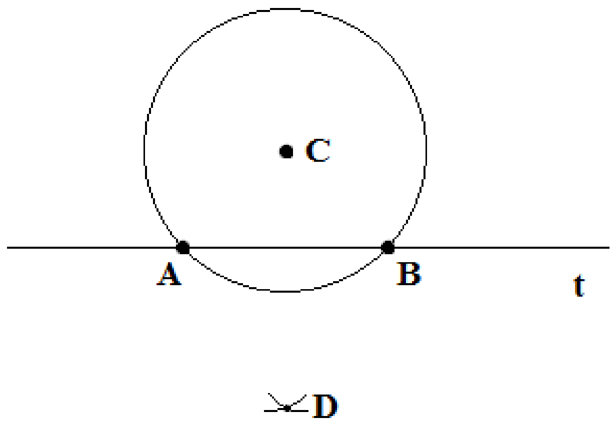


Figura 17 – Arcos com centro nos pontos da reta

- Traçar uma reta *s* que passe por *C* e *D*;

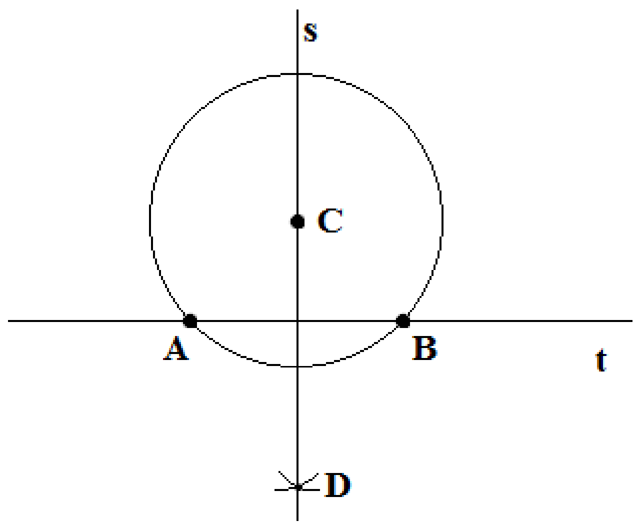


Figura 18 – Reta perpendicular a reta inicial

A reta *s* é perpendicular a reta *t*. Isto se justifica porque a primeira circunferência traçada garante que $\overline{CA} = \overline{CB}$ e os outros dois arcos garantem que $\overline{DA} = \overline{DB}$. Como *C* e *D* equidistam de *A* e *B*, então eles pertencem a mediatriz do segmento $\overline{AB}$ (que é a reta perpendicular a $\overline{AB}$, passando pelo seu ponto médio).

Após a explicação do resultado esperado, os alunos apresentaram suas dificuldades e entenderam as etapas necessárias para as construções realizadas.

5.4. PROJEÇÃO ORTOGONAL, SIMÉTRICO DE UM PONTO EM RELAÇÃO A UMA RETA E BISSETRIZ DE UM ÂNGULO DADO

No quinto encontro, no dia 31 de outubro de 2019, havia a presença de 21 alunos. E teve como objetivo: analisar as definições de projeções ortogonais e bissetriz de um ângulo. Foi colocada como atividade, elaborada pelo pesquisador, as seguintes perguntas:

Atividade 6:

a) O que significa “projeção ortogonal de um ponto”?

b) O que é bissetriz?

Resultado: 18 alunos responderam a atividade de forma correta.

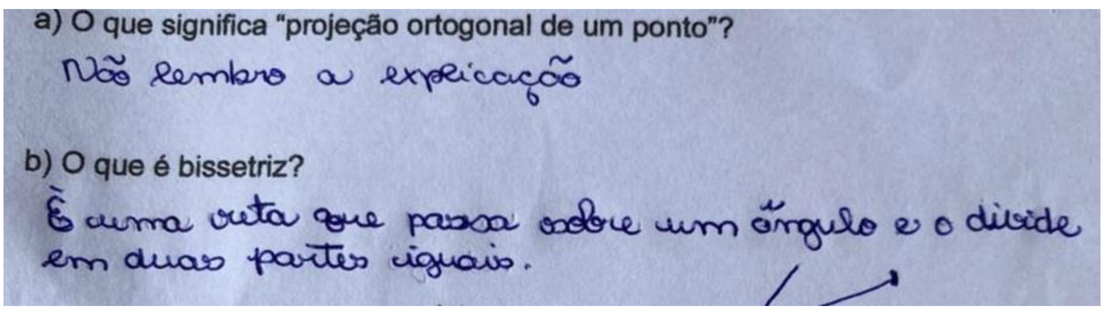

a) O que significa “projeção ortogonal de um ponto”?
Não lembro a expricação
b) O que é bissetriz?
É uma reta que passa sobre um ângulo e o divide em duas partes iguais.

Figura 19 – Respostas de uma aluna da Turma 19BM

Na figura acima, percebe-se que o aluno compreende bem os conceitos mais utilizados durante o ano letivo, que é o caso da definição de bissetriz. Enquanto que, quando se questiona sobre um tema menos trabalhado em sala de aula, como o caso de projeção ortogonal percebe-se que não conseguem responder de maneira correta. O professor/pesquisador analisou essas respostas e trabalhou os conceitos corretos com os alunos.

As respostas esperadas, eram as seguintes:

a) Projeção ortogonal: é a transferência de um ponto para uma reta, de forma perpendicular à ela.

b) Bissetriz de um ângulo: é a semirreta que parte do vértice do ângulo, dividindo-o ao meio.

No caso de projetar ortogonalmente um ponto *C* sobre uma reta *r* dada, foi necessário relembrá-los o conceito de projeção: deslocar esse ponto sobre a reta perpendicular à reta *r* e que passa pelo ponto *C*, até a reta dada.

Convém lembrar que o ponto pode ou não pertencer à reta dada, e por isso os dois casos foram tratados em sala de aula. Dessa forma, os alunos puderam reescrever em seus cadernos esses conceitos e se organizaram para a próxima atividade. O professor/pesquisador elaborou os seguintes comandos:

Atividade 7: Sejam dados o ponto C e a reta r, construir:

a) a projeção ortogonal do ponto C sobre a reta r, quando este ponto pertencer a reta;

b) a projeção ortogonal do ponto C sobre a reta r, quanto este ponto não pertencer a reta;

c) analisar a simetria do ponto em relação a reta, quando este pertence a reta;

d) analisar a simetria do ponto em relação reta, quando este não pertence a reta;

e) dado um ângulo, construir sua bissetriz.

Resolução

Os alunos começaram a tentar utilizar o compasso. Entretanto, 10 alunos tiveram dificuldade em seguir um procedimento mais adequado para as construções, enquanto que os onze restantes conseguiram realizar a atividade por completo. Dessa forma, o pesquisador observou quais dificuldades deveriam ser sanadas durante a apresentação da resolução esperada. Em seguida, o professor os orientou, escrevendo os passos que deveriam seguir.

A resolução esperada é a seguinte:

a) $C \in r$

Seja dado o ponto *C* na reta *r*.

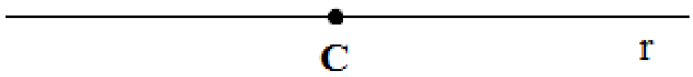


Figura 20 – Ponto na reta

A projeção ortogonal de *C* sobre a reta *r* é o ponto *C'*, e neste caso, como *C E r* então $C \equiv C'$. Nesse caso, os alunos perceberam que o ponto não sofre deslocamento e sim recebe uma outra denominação para diferenciá-los,

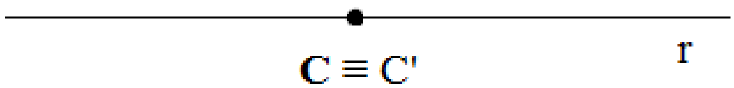


Figura 21 – Pontos coincidentes na reta

b) $C \notin r$

Sejam dados o ponto *C* e a reta *r*, utilizaremos novamente a Figura 15:

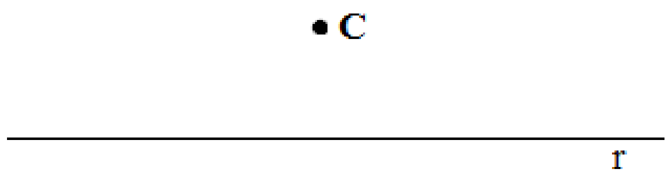


Figura 15 – Ponto fora da reta

Como a projeção ortogonal de um ponto *C* sobre a reta *r* é feita utilizando a construção de uma reta perpendicular à reta dada (sendo que já foi tratada anteriormente, pelos alunos), então tem *C'* que se encontra no pé da reta perpendicular baixada de *C* sobre *r*.

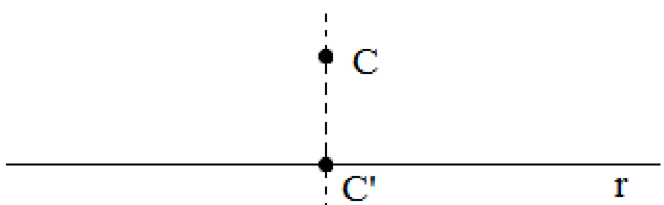


Figura 22 – Projeção do ponto na reta

Durante a explicação, um aluno levantou a mão e disse que a projeção do ponto parecia uma sombra natural de uma bola que foi chutada para cima, o que ajudou no entendimento da construção.

Para descrever esses tópicos, foi indagado aos alunos o que entendiam por simetria. Um dos alunos respondeu que é a divisão dos corpos em duas partes iguais ou que poderia ser uma imagem refletida de espelho. O restante da turma apoiou essa ideia, e a partir disso, o professor/pesquisador começou a escrever novas etapas de construções para que os estudantes pudessem concluir os desenhos a seguir.

Seja o ponto *C'* a projeção ortogonal de *C* sobre a reta *r*. O ponto *D*, pertencente a reta perpendicular a *r*, é o simétrico de *C* se $\overline{CC'} = \overline{C'D}$. E no caso de *C* pertencer a *r*, então ele mesmo é o seu simétrico.

Como o ponto *C* pode pertencer ou não a reta *r*, então foram tratados os dois casos a seguir.

c) C $\in$ *r*

Com uma orientação supervisionada, foi colocada seguinte instrução no quadro:

Seja dado um ponto *C* contido na reta *r*, utilizando novamente a Figura 20:

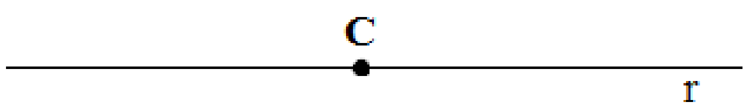


Figura 20 – Ponto na reta

Neste caso, o aluno conseguiu interpretar que o ponto simétrico *D* é o próprio ponto *C*.

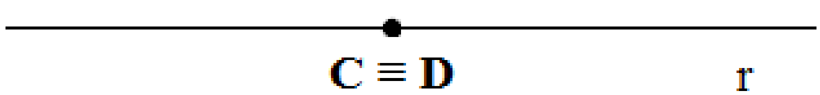


Figura 23 – Pontos distintos que se tornaram coincidentes

d) C $\notin$ *r*

Em seguida quando o ponto não faz parte da reta.

Sejam dados um ponto *C* e uma reta *r*, utilizaremos novamente a Figura 15:

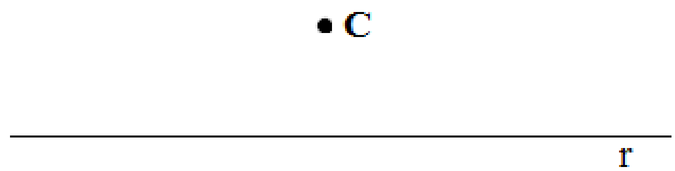


Figura 15 – Ponto fora da reta

Projetando-se ortogonalmente *C* sobre *r*, encontra-se *C’*, reutilizando a Figura 22:

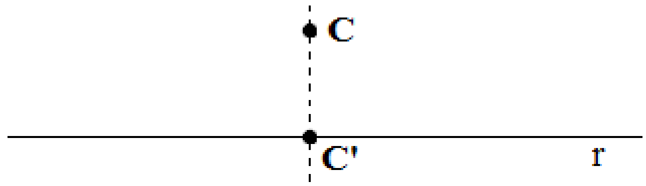


Figura 22 – Projeção do ponto na reta

Com o compasso, deve-se traçar uma circunferência com centro no ponto *C’* e de raio igual a $\overline{CC'}$, que irá interseccionar a reta perpendicular nos pontos *C* e *D*.

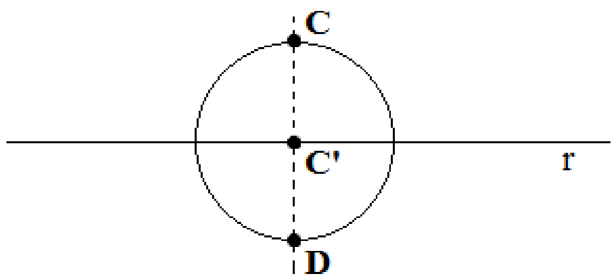


Figura 24 – Circunferência com centro na projeção

Logo, o simétrico de *C* em relação à reta *r* é o ponto *D*, pois $\overline{CC'} = \overline{C'D}$ e o ponto *D* está contido na reta perpendicular à *r*.

Esse é um assunto que os alunos têm contato anualmente, entretanto dificilmente conseguem trabalhar na sua construção. Para isso, um aluno foi orientado a desenhar um ângulo no quadro, para que o restante da turma pudesse olhar:

Dado um ângulo $A\hat{O}B$.

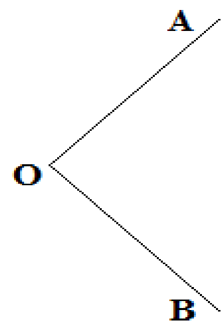


Figura 25 – Ângulo AÔB

Em seguida, deveriam usar o compasso para traçar uma circunferência de centro *O* e com um raio qualquer, de modo que encontre os pontos *C* e *D* ao interceptar os lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ do ângulo $A\hat{O}B$.

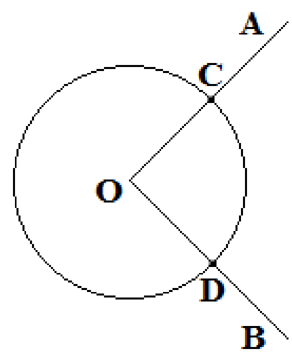


Figura 26 – Circunferência com centro no vértice do Ângulo

Novamente com o compasso, traçar dois arcos com centros em *C* e *D*, que irão se interseccionar no ponto *E*.

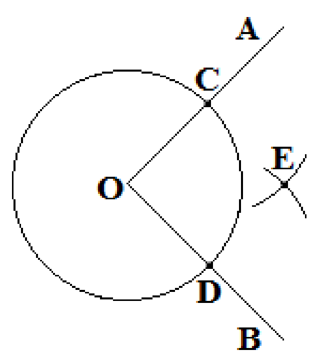


Figura 27 – Arcos com centros nos pontos da circunferência

A seguir, traçar uma semirreta que parte do ponto *O* e passe pelo ponto *E*.

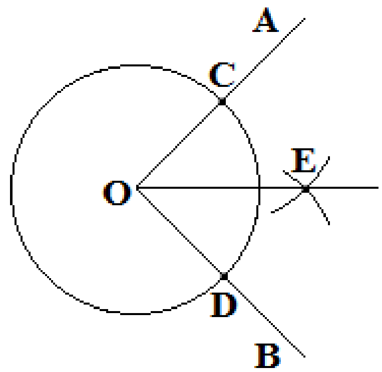


Figura 28 – Semirreta com origem no vértice do ângulo

Sejam os triângulos *OCE* e *ODE*. Como $\overline{OC} = \overline{OD}$, $\overline{CE} = \overline{DE}$ e o lado $\overline{OE}$ é comum aos dois triângulos, então pelo caso L.L.L. de semelhança de triângulos, os triângulos *OCE* e *ODE* são congruentes. Logo, os ângulos $A\hat{O}E$ e $E\hat{O}B$ são congruentes.

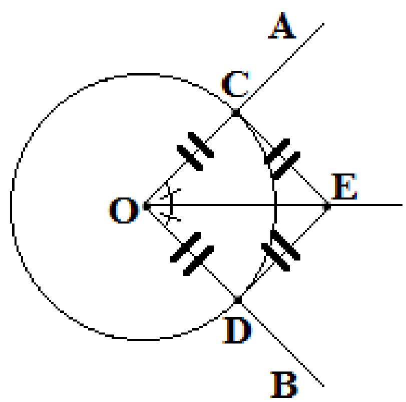


Figura 29 – Triângulos semelhantes com base na semirreta

Portanto a semirreta $\overrightarrow{OE}$ é bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$.

Ao final, seis alunos tiveram dificuldade para realizar tal construção, cinco tiveram dificuldade em realizar o último tópico e os dez estudantes restantes conseguiram realizar a atividade finalizar de forma mais rápida.

5.5. RETAS PARALELAS

No sexto encontro, no dia 07 de novembro 2019, com a presença de 23 alunos, teve como objetivo: analisar a definição de retas paralelas e construir exemplos.

Como já havia sido trabalhado a diferença entre retas em um dos encontros anteriores, então todos os alunos presentes já tinham uma noção da definição. Logo, pode-se observar na imagem abaixo, da atividade desenvolvida pelo pesquisador, uma das respostas escritas por um dos alunos.

Atividade 8:

a) O que são retas paralelas?

Resultado: Os 23 alunos conseguiram definir de forma clara o conceito de retas paralelas.

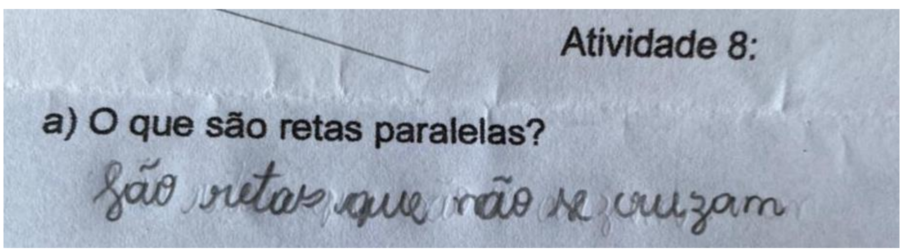


Figura 30 – Resposta de um aluno da Turma 19BM

A resposta esperada:

a) São retas que não possuem ponto em comum.

Com o conceito definido, o pesquisador elaborou a seguinte atividade de construção que trabalha com retas paralelas.

Atividade 9: Dado um ponto P e uma reta r, construir uma reta que passe por P e seja paralela à **r**.

Resultado: 19 alunos conseguiram desenvolver a atividade por completo, usando régua e compasso, enquanto que 4 alunos utilizaram apenas réguas para as construções.

O resultado esperado era:

Dados um ponto *P* fora de uma reta *r*, será construída uma reta *s* paralela a *r* passando pelo ponto *P*.

Figura 31 – Ponto externo a reta e não centralizado

Em seguida:

- Com o compasso, traçar um arco centrado em *P* e raio maior que a distância de *P* a *r*, encontrando um ponto P_1 devido a intersecção do arco com a reta *r*;

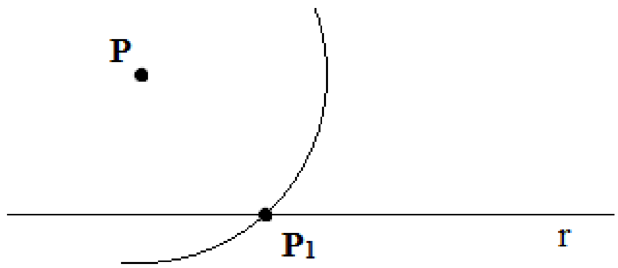


Figura 32 – Arco com centro no ponto externo interceptando a reta

- Traçar outro arco, centrado em P_1 e de raio $\overline{PP_1}$. Ao interseccionar este arco com a reta *r*, resultara um ponto P_2;

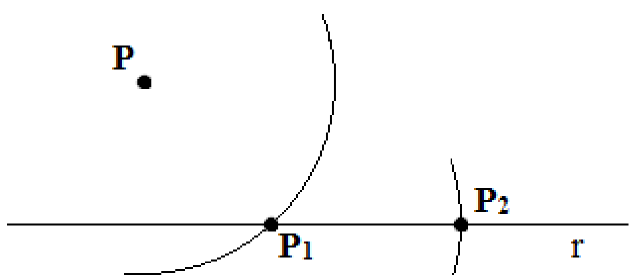


Figura 33 – Arco com centro no primeiro arco construído

- Traçar mais um arco com centro em P_2 e de raio $\overline{PP_1}$, que irá interseccionar o primeiro arco no ponto P_3;

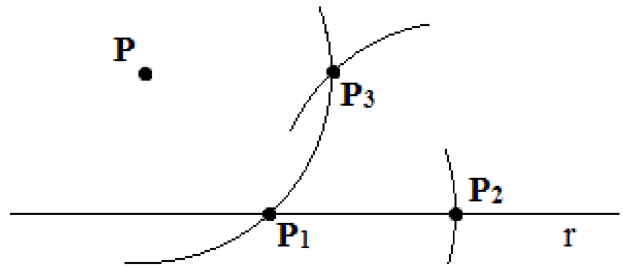


Figura 34 – Arcos se interceptando fora da reta

- Traçar uma reta *s*, que passe pelos pontos *P* e P_3;

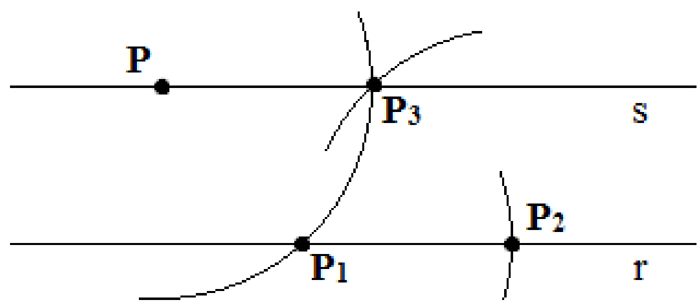


Figura 35 – Retas paralelas

- Tem-se que duas retas *r* e *s* são paralelas entre si, se elas não se interceptam, ou seja, se *r* e *s* não possuem nenhum ponto comum e conservam a mesma distância uma da outra. Neste caso a reta *s* é paralela à reta *r* se, para todo ponto *P* pertencente a *s*, a distancia de *P* à reta *r* é constante. Logo *P*, P_1, P_2 e P_3 é um quadrilátero com todos os lados de igual comprimento, consequentemente é um paralelogramo.

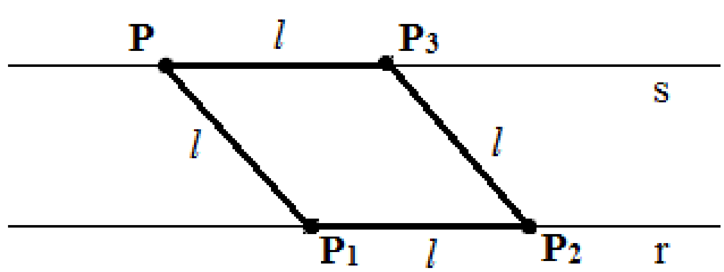


Figura 36 - Paralelogramo

Como todo losango é um paralelogramo, segue que a reta determinada por P_1 e P_2 é paralela à reta determinada por P e P_3.

Após a explicação detalhada das etapas, os 4 alunos que haviam usado apenas régua, conseguiram refazer o trabalho, apresentando a atividade concluída.

Além disso, os 19 alunos que haviam utilizado régua e compasso, conseguiram incluir as explicações em suas construções. Um dos alunos relatou que além das retas paralelas, foi uma forma de aprender a construir um paralelogramo.

5.6. CONSTRUÇÃO DE TRIÂNGULO EQUILÁTERO

No sétimo encontro, acontecido dia 14 de novembro de 2019, com a presença de 23 alunos, teve como objetivo: analisar a definição de triângulo equilátero e em seguida, a sua construção.

Dessa forma, o professor/pesquisador elaborou uma atividade sobre o conceito de triângulo equilátero, antes de passar para as etapas de construção.

Atividade 10:

a) O que é um triângulo equilátero?

Resultado: Os 23 alunos não tiveram dificuldade em responder a essa pergunta, uma vez que representa um conceito utilizado com frequência durante as aulas de matemática.

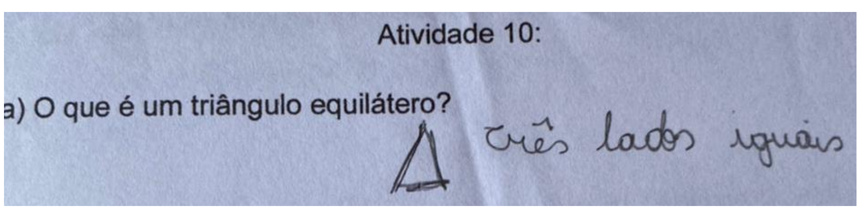


Figura 37 – Resposta de um aluno da Turma 19AM

Como pode-se observar na Figura 37, a resposta foi escrita de forma bem simples. Portanto, foi colocado em votação qual dos triângulos eles mais gostariam de trabalhar, sendo que a maioria optou pelo triângulo equilátero. Dessa forma, foi aplicada a seguinte atividade desenvolvida pelo pesquisador:

Atividade 11: Dado um lado **l**, construir um triângulo equilátero.

Resultado: Doze alunos mediram o comprimento do lado dado e tentaram construir mais dois lados de mesmo tamanho para formar um triângulo. Entretanto, perceberam que perdiam tempo para essa construção. Enquanto isso, os onze restantes, conseguiram desenvolver a construção com o auxílio de régua e compasso.

O resultado esperado era:

Seja dada a medida *l*.

Figura 38 – Lado l

Para a construção do triângulo equilátero, conhecendo-se a medida *l* do seu lado, o aluno teve que:

- Traçar uma semirreta $\overrightarrow{OX}$;

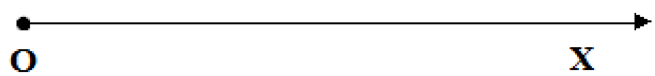


Figura 39 – Semirreta OX

- Transportar a medida *l* para a semirreta $\overrightarrow{OX}$ (sendo que esta construção foi tratada anteriormente), a partir do ponto *O*, de modo a obter um ponto *A*;

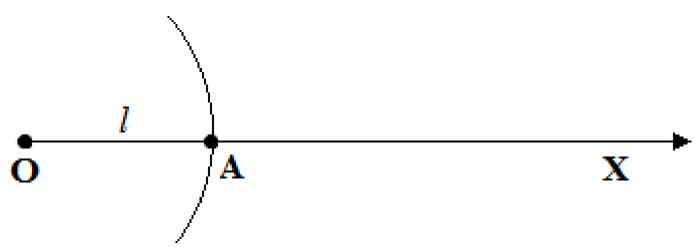


Figura 40 – Transporte de l para a semirreta

- A seguir, traçar duas circunferências de raio *l*, com centro nos pontos *O* e *A,* respectivamente. Sendo que quando houver a intersecção entre elas, serão encontrados os pontos *B* e *B'*;

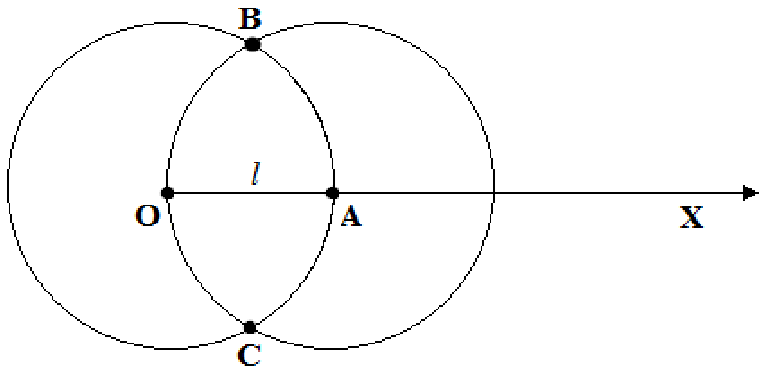


Figura 41 – Circunferências se interceptando nos pontos B e C

- Ligando-se os pontos *O*, *A* e *B*, tem-se o triângulo *OAB*. Como $\overline{OB}$ e $\overline{AB}$ são raios das circunferências, que foram traçadas com raios de tamanho *l*, então todos os lados desse triângulo são iguais. Logo, os seus ângulos internos $\hat{O}$, $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são congruentes.

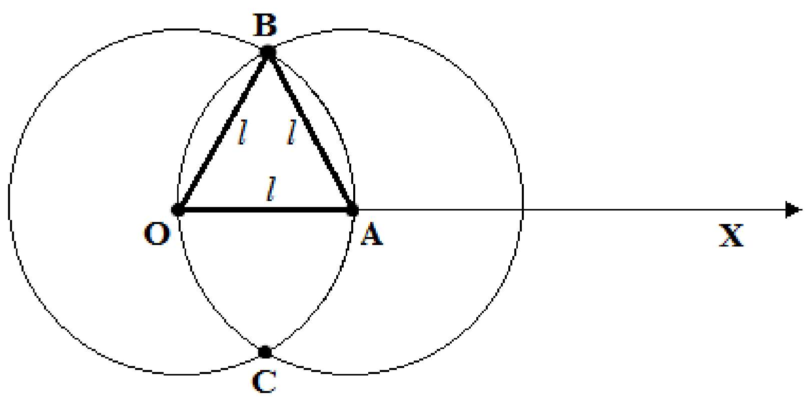


Figura 42 – Triângulo equilátero a partir de duas circunferências

Portanto, *OAB* é um triângulo equilátero.

Após serem explicadas as etapas que poderiam utilizar, os 12 alunos que tiveram dificuldade no início, conseguiram adaptar as etapas em suas construções. Depois de compararem os resultados, toda a turma conseguiu terminar a atividade em sala de aula.

5.7. OPERAÇÕES COM ÂNGULOS

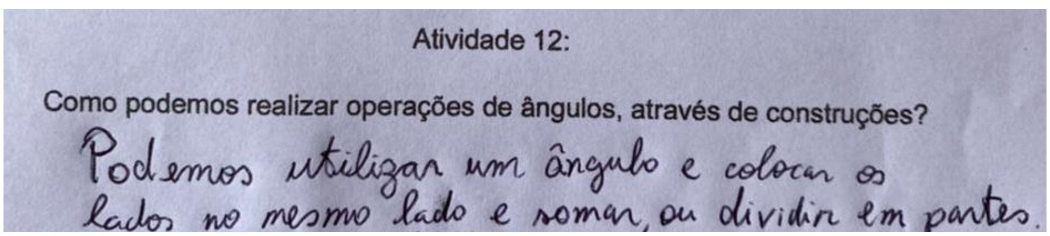
No oitavo encontro, dia 21 de novembro de 2019, com a presença de 25 alunos, objetivou-se: a construção de ângulos, a partir de outros ângulos dados.

Antes de iniciar as etapas de construções, o professor/pesquisador desenvolveu uma atividade para analisar as ideias que os alunos apresentariam sobre operações com ângulos.

Atividade 12: Como podemos realizar operações de ângulos, através de construções?

Resultado: Vinte alunos responderam de forma correta, dois escreveram analisando a questão das operações algébricas e três alunos não souberam responder.

De acordo com a Figura 43, temos a resposta de um dos alunos:


Atividade 12:

Como podemos realizar operações de ângulos, através de construções?

Podemos utilizar um ângulo e colocar os lados no mesmo lado e somar, ou dividir em partes.

Figura 43 – Resposta de um aluno da Turma 19BM

Percebe-se que por essa resposta apresentada na figura acima, o aluno apresentou uma forma de realizar operações de ângulos a partir de outro ângulo.

O resultado esperado era:

Utilizando-se régua e compasso, é possível construir alguns ângulos a partir de outros ângulos. Também pode ser efetuada operações de adição e subtração, assim como construir ângulos cujas medidas sejam múltiplas ou divisores da medida de um ângulo dado.

Após compartilhar o resultado esperado com a turma, o professor/pesquisador elaborou uma atividade que exigia a construção de ângulos.

Atividade 13: Construir:

a) um ângulo de 60° e a partir dele, outro de 30°;

b) um ângulo reto;

c) um ângulo de 45°.

Resultado: Vinte e dois alunos conseguiram resolver as três letras da atividade por completo, enquanto que os outros três não conseguiram concluir o exercício, tendo dificuldade com o compasso. Por saberem manusear um transferidor, esses alunos mediram com esse instrumento, marcaram os pontos e desenharam os ângulos.

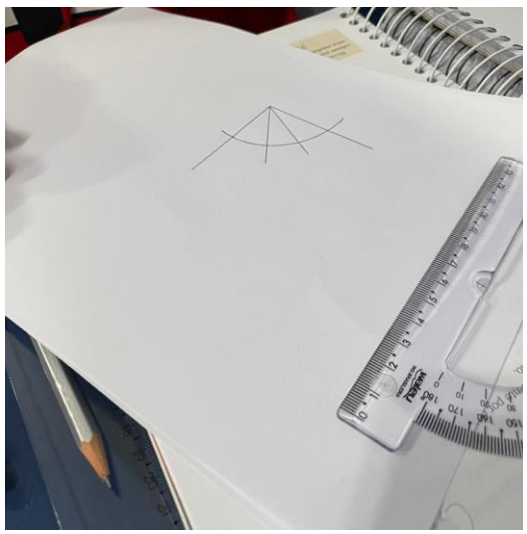


Figura 44 – Construção realizada por um aluno da Turma 19AM

Através da imagem acima, percebe-se que o aluno quis recorrer ao transferidor, uma vez que não sabia como poderia utilizar o compasso para realizar essa construção.

O resultado esperado era:

a) Construir um ângulo de 60° e a partir dele, outro de 30°.

- Para construir um ângulo de 60°, deve-se construir um triangulo equilátero (que já foi tratado, anteriormente, em sala de aula), pois todos os seus ângulos internos são iguais a 60°.

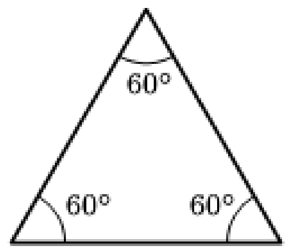


Figura 45 – Triângulo equilátero

- Utilizando apenas o ângulo $A\hat{O}B$, traçar a sua bissetriz (que também já foi construída, anteriormente, pelos alunos) e assim encontrar um ângulo de 30°.

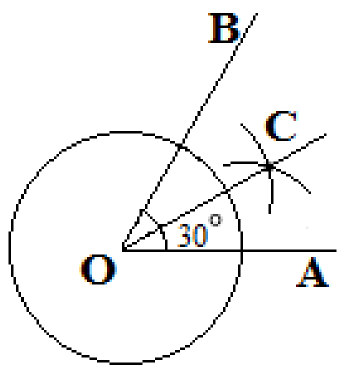


Figura 46 – Determinando um ângulo de 30°

Com as construções anteriores, o desenvolvimento destas começaram a ser obtidas rapidamente, uma vez que os alunos adquiriram uma prática no manuseio dos instrumentos.

b) Construir um ângulo reto

A definição de ângulo reto é bem conhecida pelos alunos. Com isso, foram questionados como poderiam proceder para construir um ângulo desse tipo, e após algumas respostas bem significativas, iniciaram a sua construção.

A ideia escolhida por eles, foi a seguinte: pode-se utilizar a construção de retas perpendiculares ou construir um ângulo de 90° cuja medida é dada pela soma de um ângulo de 60° com um ângulo de 30°.

Dessa forma, começaram com as seguintes orientações:

- Construir um triângulo equilátero, com medida arbitraria para seu lado. E assim, utilizando-se somente o ângulo $A\hat{O}B$ que equivale a 60°, tem-se:

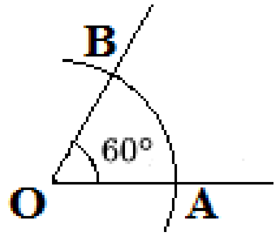


Figura 47 – Determinando um ângulo de 60°

- A partir do lado *OB*, construir outro ângulo de 60° da mesma forma que foi realizada na Figura 45;

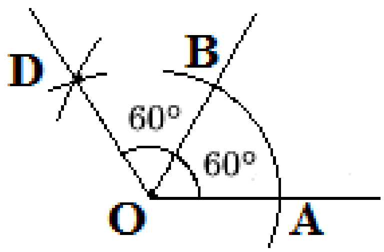


Figura 48 – Duplicando o ângulo de 60°

- Utilizando o novo ângulo $B\hat{O}D$, construir sua bissetriz;

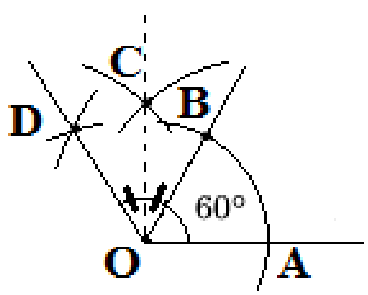


Figura 49 – Bissetriz partindo do novo ângulo

- Tem-se que o ângulo $B\hat{O}C$ mede 30°. Somando os ângulos $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ que medem 60° e 30°, respectivamente, tem-se o ângulo $A\hat{O}C$ que mede 90°.

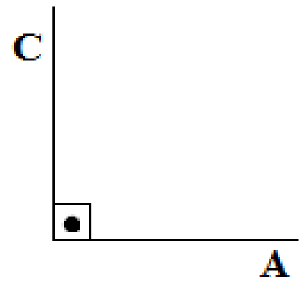


Figura 50 – Ângulo reto

Logo, o ângulo $A\hat{O}C$ é um ângulo reto.

c) Construir um ângulo cuja medida é 45°.

Ao serem questionados sobre o ângulo de 45°, responderam, prontamente, que bastava utilizar o ângulo reto e construir sua bissetriz (sendo que esse segmento já foi trabalhado em aulas anteriores. Logo,

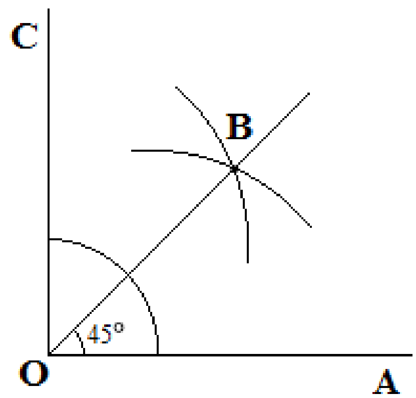


Figura 51 – Determinando o ângulo de 45°

Portanto, o ângulo $A\hat{O}B$ mede 45°.

Após analisarem as etapas das construções, os três alunos que não conseguiram concluir a atividade anteriormente, começaram a introduzir as diretrizes feitas pelo professor em seus desenhos. Enquanto que os vinte e dois alunos que já haviam concluído o trabalho, começaram a comparar os resultados entre si.

5.8. DIVISÃO DE ÂNGULO E ARCO CAPAZ

Então que, no nono encontro, ocorrido dia 28 de novembro de 2019, com a participação de 25 alunos, o objetivo foi: divisão de ângulo, através de construções e, definição de arco capaz.

Porém, antes de iniciar as etapas das construções, o professor/pesquisador elaborou uma atividade e apresentou aos alunos:

Atividade 14:

a) É possível a divisão de ângulos através de construções geométricas?

b) O que é arco capaz?

Resultado: 21 alunos conseguiram resolver as duas letras de forma correta, enquanto que quatro alunos não conseguiram responder a atividade por completo.

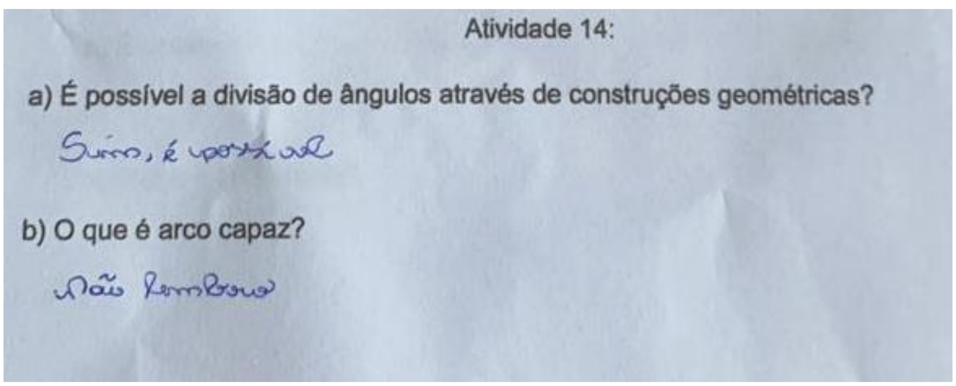


Figura 52 – Respostas de uma aluna da Turma 19AM

Na imagem acima, uma das respostas escrita por uma aluna, pode-se avaliar o quanto é necessário aprofundar mais o conceito das figuras geométricas em sala de aula. Pois o conceito havia acabado de ser explicado, porém a aluna ainda não lembrava da definição.

O resultado esperado era:

a) Sim, é possível.

b) É o lugar geométrico dos pontos que enxergam um segmento AB num determinado ângulo.

Após os conceitos serem apresentados para a turma, o professor/pesquisador elaborou uma atividade com o objetivo de avaliar os métodos utilizados pelos alunos para construir as seguintes figuras:

Atividade 15: Construir**:**

a) Dado um ângulo de 90°, construir dois ângulos de 60°.

b) Dados dois pontos sobre uma circunferência, construir um arco capaz.

Resultado: 21 alunos conseguiram resolver a atividade de forma correta, dois alunos apresentaram dificuldade em finalizar a construção do arco capaz e os outros dois não conseguiram realizar as duas letras por completo.

O resultado esperado era:

Aproveitarem o ângulo reto que já haviam construído e desenvolveram as seguintes etapas, que o professor escreveu no quadro:

a) Seja dado um ângulo $A\hat{O}B$ cuja medida seja 90°.

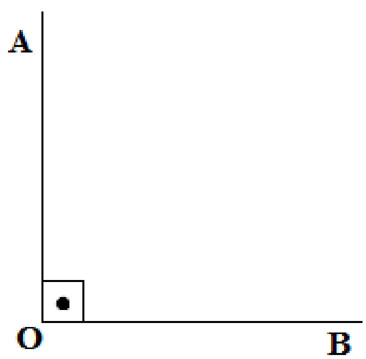


Figura 53 – Ângulo reto AÔB

- Construir dois ângulos de 60° a partir dos lados *OB* e *AO*, respectivamente, utilizando o processo de construção de triangulo equilátero.

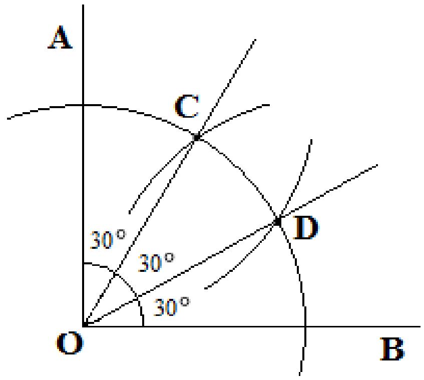


Figura 54 – Determinando três ângulos de 30°

Logo, cada um dos ângulos obtidos mede 30°.

b) Sejam dois pontos *A* e *B* sobre uma circunferência. Para todo ponto *P* sobre um dos arcos, o ângulo $A\hat{P}B$ = *α* é constante.

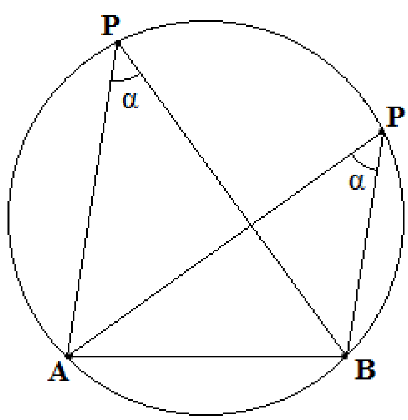


Figura 55 – Construção de arcos

Utilizando como exemplo, um observador que percorre o maior arco $\overline{AB}$ da Figura 52, ele consegue ver o segmento $\overline{AB}$ sempre sob o mesmo ângulo. Este arco é denominado de arco capaz do ângulo *α* sobre o segmento $\overline{AB}$.

E se outro ponto *Q* pertencer ao outro arco *AB*, então o ângulo $A\hat{Q}B$ também é constante e igual a *180° – α*.

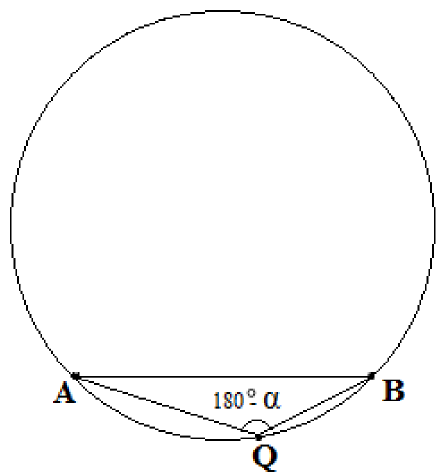


Figura 56 – Determinando arco de 180° - a

Dessa foram, os alunos tiveram uma noção do que precisariam para a construção do arco capaz, sendo dados o ângulo α e o segmento $\overline{AB}$.

Figura 57 – Ângulo e segmento

Em seguida, começaram os seguintes passos:

- Traçar a mediatriz de $\overline{AB}$.

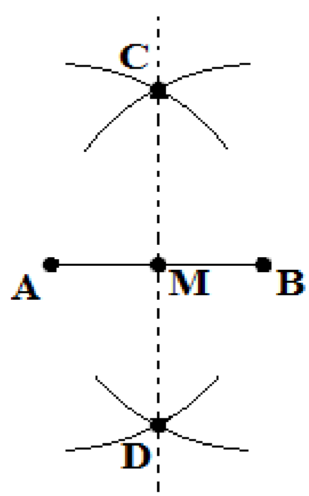


Figura 58 – Mediatriz de segmento

- Transportar o ângulo *α* sobre o segmento $\overline{AB}$, obtendo a semirreta $\overrightarrow{AX}$, onde $B\hat{A}X = \alpha$.

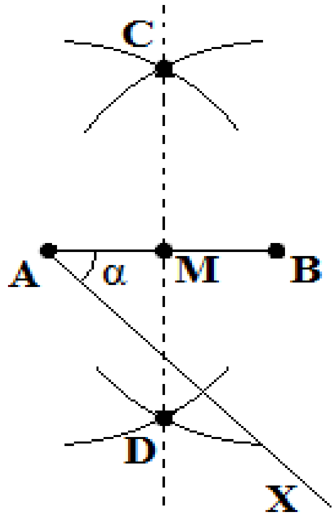


Figura 59 – Construção de arcos com ângulo e segmento

- Traçar pelo ponto *A*, uma semirreta $\overrightarrow{AY}$ perpendicular a $\overrightarrow{AX}$. Sendo que a intersecção de $\overrightarrow{AY}$ com a mediatriz é o ponto *O*, centro do arco capaz.

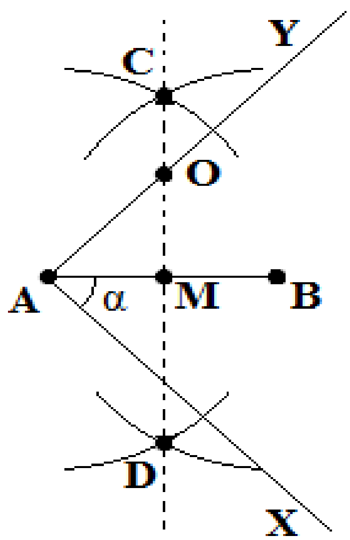


Figura 60 – Determinando uma semirreta perpendicular ao segmento

- Com centro em *O*, traçar o arco $\widehat{AB}$.

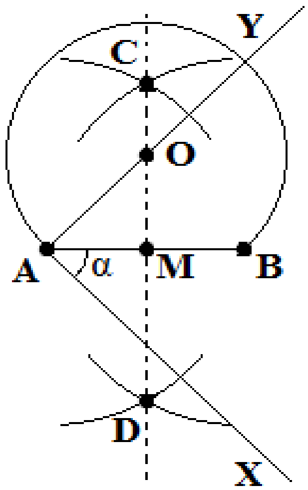


Figura 61 – Determinando o arco AB

- Como $A\hat{B}X$ = *α*, então $B\hat{A}Y$ = *90°* - *α* e, com *M* sendo o ponto médio de *AB*, tem-se $A\hat{O}M$ = *α*. Logo, $A\hat{O}B$ = *2α*. E para provar que para qualquer ponto *P* do arco *AB* tendo $A\hat{P}B$ = *α*, utiliza-se o ponto de intersecção entre a mediatriz de *AB* e o arco *AB*.

Resultado:

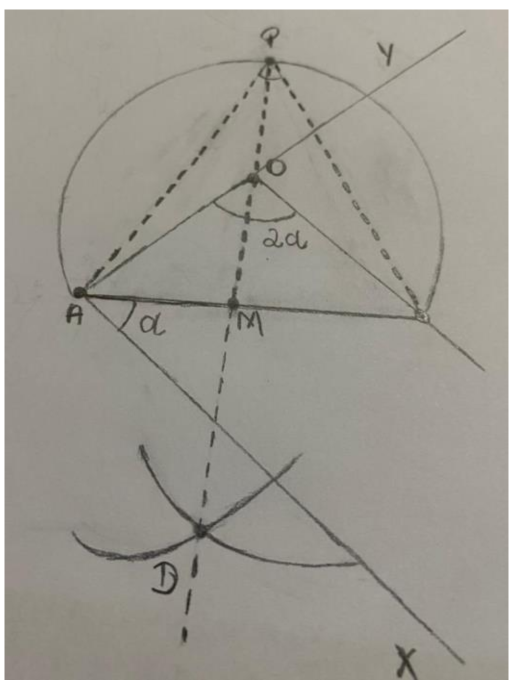


Figura 62 – Construção realizada por uma aluna da Turma 19AM

Resultado esperado:

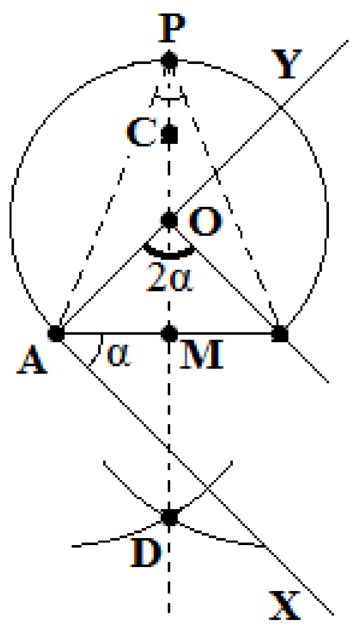


Figura 63 – Arco Capaz

- Como os ângulos $A\hat{P}B$ e $A\hat{O}B$ contem seus lados passando pelos pontos *A* e *B*, tem-se que, de acordo com a Figura 66 – Arco Capaz, $A\hat{P}B$ é um ângulo inscrito e $A\hat{O}B$ é um ângulo central. Mas como, o ângulo central é o dobro do ângulo inscrito e neste caso que $A\hat{O}B$ = *2α*, então $A\hat{P}B$ = *α*.

Portanto, para todo ponto *P* do arco *AB*, tem-se que $A\hat{P}B$ é sempre constante.

Os quatro alunos que tiveram dificuldades para chegar à construção final, com a orientação correta e incentivo dos demais colegas de turma, conseguiram finalizá-la.

5.9. AVALIAÇÃO DE DESEMPENHO

No décimo encontro, realizado dia 03 de dezembro de 2019, fora aplicado uma atividade para avaliação de desempenho dos alunos durante o processo de investigação. Nela, o professor/pesquisador elaborou duas questões que necessitaria dos estudos trabalhados nos encontros anteriores.

Objetivo: Analisar o desempenho dos alunos, de modo que elaborassem suas próprias etapas de construção. O professor/pesquisador comparando as atividades realizadas no início do projeto com as atividades a seguir.

Atividade 16

1) Se ABC é um triângulo isósceles de base BC, prove que a bissetriz, a mediana e a altura relativas à BC coincidem.

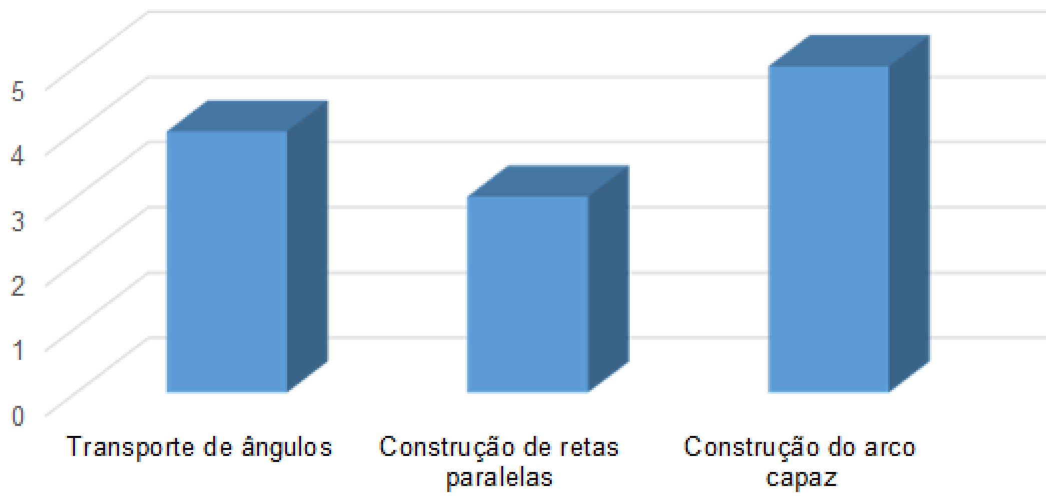
2) Construa com régua e compasso um paralelogramo, conhecendo os comprimentos a e b de seus lados e o ângulo α entre dois de seus lados.

Resultado: 21 alunos conseguiram resolver a atividade de forma correta, 2 alunos conseguiram resolver uma das questões e os 2 últimos tiveram dificuldade em finalizar a atividade.

6. ANALISANDO OS RESULTADOS ALCANÇADOS

No décimo primeiro encontro, realizado no dia 05 de dezembro de 2019, o professor/pesquisador reuniu os 25 alunos para analisar algumas informações sobre o trabalho. Por exemplo, as atividades que apresentaram maior grau de dificuldade foram:

Gráfico 1 – Atividades com maior grau de dificuldade



Fonte: Lago (2019)

- Atividade 2: transporte de ângulos

Nessa atividade, os alunos encontraram dificuldade em manusear o compasso, uma vez que estavam começando a se familiarizar com o uso. Dessa forma, os alunos formaram duplas, de modo que um pudesse auxiliar o outro. O professor também se aproximou das duplas para orientá-las e analisar o seu desempenho.

Ao transportarem os ângulos, alguns alunos tiveram dificuldade em posicionar a ponta metálica ou de plástico no vértice e conseguir marcar os pontos. O professor fez uma simulação com os pincéis, o que ajudou no desenvolvimento da construção.

- Atividade 9: construção de retas paralelas

Os alunos estavam habituados a desenharem retas paralelas, usando apenas réguas. O que apresentava uma margem de erro, pois a distância entre as retas não era a mesma. Portanto, o professor colocou os passos no quadro e foi orientando os alunos, passando pelas carteiras e dando a devida atenção às suas construções. Sendo que desta vez, já tinham desenvolvido uma habilidade melhor no uso do compasso.

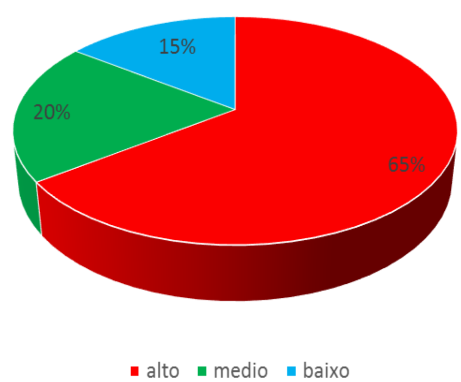
Dessa forma, as construções das retas paralelas ficaram mais precisas.

- Atividade 15: b) construção do arco capaz

Após aprenderem sobre a definição, tentaram a sua construção de forma aleatória, entretanto tiveram dificuldade em conciliar o compasso e a régua para desenhá-lo. O professor escreveu os passos no quadro e passou ao lado de cada aluno para auxiliá-los. Desta forma, foi sugerido que fizessem um rascunho de arco capaz, para terem uma diretriz de onde deveriam chegar. Desse modo, ficou mais fácil de chegar ao resultado esperado.

Pode-se observar no Gráfico 2, o resultado do segundo encontro, realizado no dia 10 de outubro de 2019.

Gráfico 2 – Nível de dificuldade no uso de régua e compasso



Fonte: Lago (2019)

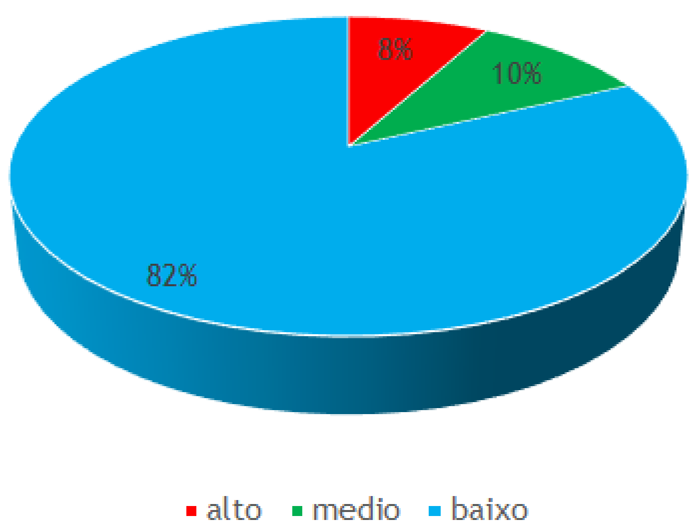
Nesse encontro dos 10 alunos que estavam presentes, mais da metade teve dificuldade em manusear o compasso e régua para desenvolver as construções, uma vez que estavam no início do projeto. Ao longo do projeto foram desenvolvidas habilidades com o manuseio dos instrumentos geométricos.

Podemos observar, através do depoimento da aluna, no início dos encontros, que os materiais, na maioria das vezes não eram utilizados.

> Professor, eu sempre comprei os materiais no início do ano mas nunca usavam com a gente. Eu não sei utilizar um compasso, pois a mão treme e não consigo fazer uma circunferência. Nos trabalhos anteriores, utilizávamos moeda ou tampa de alguma garrafa. Geralmente, esses desenhos nunca são cobrados em prova. (aluna do 19 AM, 2019)

Após os dez encontros, percebeu-se uma melhora significativa dos desenhos, além disso, essas turmas começaram a desenvolver uma competitividade saudável, para conseguir finalizar seus desenhos mais rápidos. Pode-se observar pelo gráfico abaixo, o resultado após o décimo encontro, realizado dia 03 de dezembro de 2019.

Gráfico 3 – Nível de dificuldade (%)



Fonte: Lago (2019)

Percebe-se que do primeiro encontro para o décimo, o nível de dificuldade caiu de 65% para 8%. Outra forma de constatar essa mudança, foi o depoimento da mesma aluna registrado no início do projeto, só que agora ao final dos encontros:

> Consegui utilizar o compasso até nas aulas de física, professor! E também as figuras que vimos nas apostilas, durante as aulas. Muito obrigado, por me ensinar como usar um compasso para desenhar as circunferências. *(*aluna do 19 AM, 2019)

Seus desempenhos nas provas de matemática aumentaram de forma significante, o que despertou o interessa da gestão escolar em aplicar esse método em outras turmas. Tivemos uma reunião, onde o trabalho foi elogiado pelos outros professores que se comprometeram em aplicar essa atividade em suas turmas. Além disso, os pais foram convocados para assistirem uma palestra sobre essas construções e como elas tiveram um impacto positivo na vida de seus filhos.

Logo, o objetivo do trabalho foi alcançado: melhorar o desempenho dos alunos do nono ano, na utilização de régua e compasso para o entendimento do estudo da geometria.

7. CONCLUSÃO

A Geometria é o pilar matemático mais encontrado no cotidiano do ser humano, como por exemplo: nas construções edificadas pelo homem, nas obras de arte, nas áreas de atuação profissional, entre outros. Muitas civilizações da Antiguidade estudaram Geometria, tendo grande desenvolvimento na Grécia, com participação de um notório filósofo e matemático grego Euclides. Este contribuiu de forma significativa para a matemática, ao reunir toda a Geometria da época em sua obra, Os Elementos, além de inserir notáveis textos esclarecedores. Sendo usado até hoje, como base de estudo e aplicação para resolução de problemas.

O presente trabalho apresentou uma sequência de encontros com atividades baseadas em construções geométricas com régua e compasso, que foram desenvolvidas com uma equipe de alunos do 9° ano do ensino fundamental. Por meio de atividades elaboradas pelo professor/pesquisador, que mesclava os conceitos de geometria com as etapas de construções geométricas, foi possível analisar o desempenho destes estudantes em relação aos desenhos geométricos.

Além disso, teve como objetivo melhorar o desempenho dos alunos do nono ano, na utilização de régua e compasso para o entendimento do estudo da geometria. Sendo este realizado, uma vez que foi acompanhado os resultados em cada etapa e analisados nos gráficos apresentados nessa pesquisa. Durante o processo, os objetivos específicos também foram alcançados, uma vez que serviram de ponte para construção do objetivo geral. Ao mostrar as ideias contidas na geometria euclidiana e seu desenvolvimento com simples instrumentos, no caso da régua e compasso, os alunos tiveram oportunidade de deixar de ter uma visão superficial da geometria e passaram a entender melhor os alicerces dessa ramificação da matemática. Ao analisar o entendimento dos alunos quanto aos conceitos geométricos, foi possível identificar as dificuldades e poder saná-las. E ao auxiliar os alunos nas construções geométricas com régua e compasso, foi possível aprimorar a habilidades destes e identificar as falhas no processo de construção.

O tema foi abordado da forma qualitativa, ressaltando como foi reunida a geometria plana da época, orientando os alunos em cada passo de construção e incentivando a competitividade para a realização dos desenhos.

Com todas as construções tratadas com apenas régua e compasso, tem-se que seu estudo pode ser aplicado de forma razoável para todos os campos de pesquisa. Conclui-se que é possível aprimorar a base dos estudantes do ensino fundamental, em relação aos conceitos geométricos, além de desenvolver seu raciocínio para elaborar métodos de realização de desenhos que acompanham seus estudos nos livros de matemática.

Espera-se que este trabalho desperte naqueles que venham tomar dele conhecimento o interesse pelo estudo da matemática em especial o tema abordado: O ensino da geometria com o uso de régua e compasso.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A.; COUTINHO, C. D. Q. E. S. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19/ANPEd. REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática, Florianópolis, SC, v. 3, p. 62-77, 2008.

ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In: BRUN, J. Didática das Matemáticas. Tradução de: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

ÁVILA, Geraldo. Introdução à Analise Matemática para Licenciatura. Ed. Edgard Blucher: 3ª ed. – São Paulo, 1999;

BARBOSA, João Lucas Marques. Geometria Euclidiana Plana. SBM: 8ª ed. – Rio de Janeiro, 2005.

BOYER, Carl B; História da matemática. Tradução Elza F. Gomide – 2ªed. – São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

BRANDÃO, Raimundo José Barbosa. Estatística e Probabilidade na Formação do Engenheiro Civil. In. Engenharia 4.0: a era da produção inteligente / Eduardo Mendonça Pinheiro, Glauber Tulio Fonseca Coelho, Patrício Moreira de Araújo Filho (Org.). São Luís: Editora Pascal Ltda, 2020

EUCLIDES: Os Elementos de Euclides. Tradução Irineu Bicudo – Ed. UNESP, 2009;

EVES, Howard; Introdução a história da Matemática. Tradução: Hygino H. Domingues – São Paulo: Editora UNICAMP, 2004.

KALEFF, Ana Maria. Desenvolvimento do Pensamento Geométrico – O Modelo de Van Hiele. Bolema, Rio Claro – SP. 1994.

LIMA; Elon Lages; Medida e Forma em Geometria Comprimento, Área Volume e Semelhança. SBM – Rio de Janeiro, 1991.

MARKEN, Lucas. *Ensinando Geometria com Régua e Compasso, uma proposta para o 8°* ano. Campos dos Goytazes – RJ. 2015.

MUNIZ NETO, Antônio Caminha. Geometria. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

PAULA, M. R.; SOARES, G. A. A utilização de algumas ferramentas das metodologias ativas de aprendizagem para as aulas de cálculo diferencial. Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades São Paulo – SP, 13 a 16 de julho de 2016.

PAVANELLO, Regina Maria. Um panorama histórico do ensino da geometria no Brasil: de 1500 até os dias atuais. 2. ed. São Paulo, 2012.

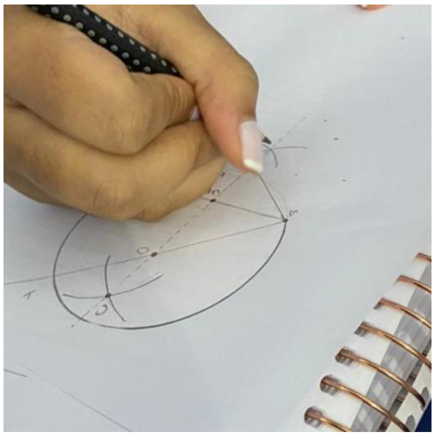
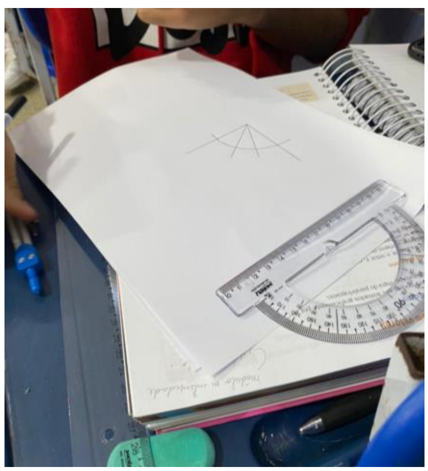
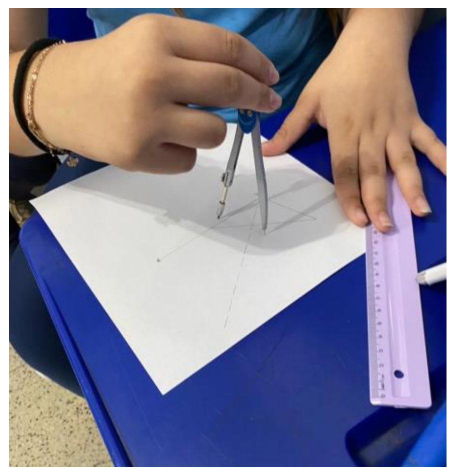
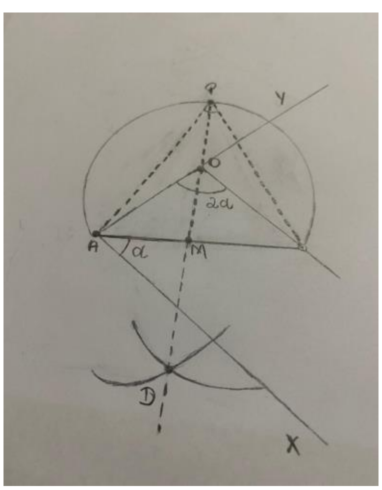
SIMMONS, Georg F. Cálculo com geometria analítica V.1. Tradução Seiji Hariki; São Paulo: Pearson Makron Books, 1987.

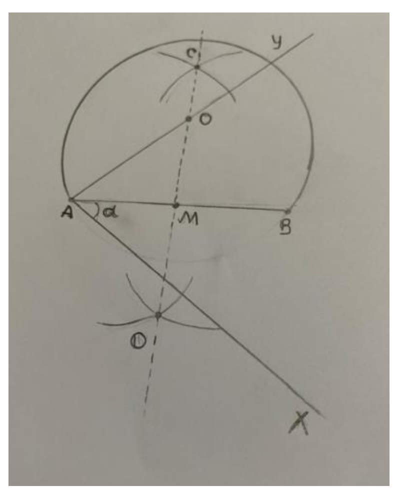
TRIVIÑOS, Augusto Nibaldo Silva. Introdução à Pesquisa em Ciências Sociais: a Pesquisa Qualitativa em Educação – O Positivismo, A Fenomenologia, O Marxismo. 5ª ed. São Paulo: Atlas, 2009. 175p.

WAGNER, Eduardo. Uma introdução às construções geométricas. Rio de Janeiro, IMPA, 2015

APENDICE A

IMAGENS DAS CONSTRUÇÕES REALIZADAS PELOS ALUNOS



ANEXO

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO/PPG
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL / PROFMAT

TERMO DE CONSENTIMENTO PARA PUBLICAÇÃO

Esta pesquisa está sendo realizada pelo Sr. MILTON CASSIO OLIVEIRA DO LAGO aluno do Mestrado em Matemática em Rede Nacional PROFMAT na Universidade Estadual do Maranhão, como parte da dissertação de mestrado, sendo orientado e supervisionado pelo professor Prof. Dr. Raimundo José Barbosa Brandão.

Seguindo os preceitos éticos, informamos que pela natureza da pesquisa, a participação desta organização não acarretará quaisquer danos à mesma. Informamos ainda que os resultados desta dissertação serão divulgados na íntegra ou em partes, através de publicação impressa ou online, com fins acadêmicos e culturais. A seguir, damos as informações gerais sobre esta pesquisa, reafirmando que qualquer outra informação ou dúvida poderá ser fornecida a qualquer momento, pelo aluno pesquisador ou pelo professor responsável.

TEMA DA PESQUISA: **O ENSINO DA GEOMETRIA COM O USO DE RÉGUA E COMPASSO: um estudo com alunos do 9º ano de uma escola particular em São Luís- MA.**

OBJETIVO: Investigar os conhecimentos matemáticos aplicados em sala de aula, despertando nos educandos o interesse pela matemática, ajudando-os na construção de figuras geométricas com o auxílio de régua e compasso.

PROCEDIMENTO: Construção de figuras realizados pelos alunos da escola, com a orientação do professor.

SUA PARTICIPAÇÃO: Autorizar a aplicação da pesquisa nesta organização e sua publicação.

É importante salientar que durante as construções geométricas, o aluno não será identificado, guardando seu direito de preservação de sua imagem.

Após a conclusão da pesquisa, uma dissertação, contendo todos os dados e conclusões, estará à disposição na Biblioteca da Universidade Estadual do Maranhão em São Luís, assim como no acervo *online* da Universidade *Sig*UEMA e no banco digital de teses e dissertações da Capes.

Agradecemos sua autorização, enfatizando que a mesma em muito contribuirá para a construção de um conhecimento atual nesta área.

São Luís, 07 de outubro de 2019.

____

Aluno: Milton Cassio Oliveira do Lago
RG: 280975620041 MA
E-mail: milton_cassio@hotmail.com
Tel: (98) 9408-7790

Tendo ciência das informações contidas neste Termo de Consentimento, Eu ____ portador(a) do RG nº ________________________________, responsável pela organização desta Instituição de Ensino autorizo a aplicação desta pesquisa na mesma.

________________,____/_____/_____

____

Assinatura e carimbo do responsável institucional