UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

FELIPE RODRIGUES DOS SANTOS

A GEOMETRIA ANALÍTICA NAS PROVAS DO ENEM

JUAZEIRO DO NORTE
2022

FELIPE RODRIGUES DOS SANTOS

A GEOMETRIA ANALÍTICA NAS PROVAS DO ENEM

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Dr. Clarice Dias Albuquerque

Co-Orientador: Dr. Valdinês Leite de Sousa Júnior

JUAZEIRO DO NORTE
2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Cariri
Sistema de Bibliotecas

S237g Santos, Felipe Rodrigues dos.
A geometria analítica nas provas do ENEM / Felipe Rodrigues dos Santos. – 2022.
120 f.: il. color., enc. ;30 cm.
(Inclui bibliografia, p.118-120)

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Cariri, Centro de Ciências e Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Juazeiro do Norte, 2022.

Orientadora: Profª. Drª. Clarice Dias Albuquerque.
Coorientador: Prof. Dr. Valdinês Leite de Sousa Júnior.

1. ENEM. 2. Geometria analítica. 3. Matemática. I. Título.

CDD 516.3

Bibliotecária: Fernanda Nunes de Araújo - CRB 3/1031

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E
TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

A Geometria Analítica nas Provas do Enem

FELIPE RODRIGUES DOS SANTOS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em 30 de junho de 2022.

Banca Examinadora

Clarice Dias de Albuquerque
Profª. Drª. Clarice Dias de Albuquerque
Orientadora

Valdinês Leite de Sousa Júnior
Prof. Dr. Valdinês Leite de Sousa Júnior
Coorientador - UFCA

Plácido Francisco de Assis Andrade
Prof. Dr. Plácido Francisco de Assis Andrade
UFCA

Anderson José de Oliveira
Prof. Dr. Anderson José de Oliveira
UNIFAL

À minha mãe.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por tudo.

Agradeço à minha família: minha mãe, Laurice Rodrigues de Almeida, meu filho, minha esposa, meus irmãos e demais familiares que me incentivaram a cada momento e não permitiram que eu desistisse.

In MEMORIAM, a meu pai, José dos Santos Felipe, pelo apoio incondicional em todos os momentos vividos desde o início de minha trajetória acadêmica.

Agradeço a todos os professores da UFCA, em especial a meus orientadores, Clarice Dias Albuquerque e Valdinês Leite de Sousa Júnior, pela paciência e dedicação para que eu pudesse alcançar o melhor resultado possível neste trabalho acadêmico.

A todos os meus colegas do PROFMAT, especialmente, a Maurício José Nascimento Macêdo, pelo grande apoio e incentivo na construção desse trabalho. A Edson Henrique da Silva, Helder Cruz Fernandes, Anderson Antônio da Silva, pelos grandes momentos vivenciados durante o curso. Foram muitos sábados dedicados a estudos de avaliações e exames.

Ao PROFMAT UFCA e à Capes pelo apoio.

“Que nenhum desconhecedor da geometria entre aqui”

(inscrição no frontispício da Academia de Platão)

RESUMO

O presente trabalho está inserido dentro de um projeto que visa construir apostilas das diferentes áreas de Matemática que são exigidas no Enem, e este, em particular, pretende elaborar um material que explore o conteúdo de Geometria Analítica, bem como uma série de questões resolvidas e comentadas dentro do tema que é abordado no Ensino Médio e cobrado no Enem. Tal material servirá de apoio para alunos do curso preparatório Edificar, promovido pelo programa Edifique Ações que é uma das atividades vinculadas à extensão da Universidade Federal do Cariri (UFCA). Observando que 32% das questões de Matemática da prova do Enem estão na área de Geometria, e que muitas dessas questões podem ser resolvidas por meio de argumentos de Geometria Analítica, este trabalho tem o objetivo de confeccionar um material de suporte para estudantes e professores do Ensino Médio, com diversas questões resolvidas e comentadas através de argumentos de Geometria Analítica, apresentando soluções por nível crescente de dificuldade.

Palavras-chave: Enem. Geometria Analítica. Matemática.

ABSTRACT

This work is part of a project which aims to build handouts of the different areas of Mathematics that are required in the Enem, and this one in particular intends to elaborate a material that explores the content of Analytical Geometry, as well as a number of issues resolved and commented within the theme that is addressed in high school and charged in the Enem. Such material will serve as support for students of the Edificar preparatory course, promoted by the Edifique Ações program, which is one of the activities linked to the extension of the Federal University of Cariri (UFCA). Noting that 32% of the Mathematics questions on the Enem exam are in the Geometry area, and that many of these questions can be resolved through arguments from Analytical Geometry, this work has the objective of making support material for high school students and teachers, with several issues resolved and commented through arguments of Analytical Geometry, presenting solutions by increasing level of difficulty.

Keywords: Enem. Analytical Geometry. Mathematics.

Sumário

Lista de Figuras

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), foi criado em 1998 com objetivo de avaliar o estudante no fim de sua fase de escolaridade básica, segundo o Ministério da Educação. Atualmente, a principal porta de entrada para ensino superior é através do ENEM, ele substitui o vestibular de algumas universidades e instituições públicas e privadas no Brasil e no exterior[1], sendo utilizada por mais de 500 universidades. Com respeito a Matemática, 25% da prova do ENEM é dedicada aos conhecimentos de Matemática.

O Cursinho Edificar, que faz parte do projeto de extensão Edifique ações, surgiu do interesse de alunos da Universidade Federal do Cariri – UFCA em contribuir com o desenvolvimento socioeducativo da região. A proposta é preparar estudantes para a realização do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), bem como contribuir com a formação cidadã destes. É um cursinho popular completamente gratuito destinado a alunos de escolas públicas de baixa renda.

No sentido de cooperar com esse projeto de extensão, alguns trabalhos de conclusão de curso do PROFMAT-UFCA vem produzindo um material de suporte para a área de Matemática. Em (SIQUEIRA, 2020) foi feita uma análise das questões de Matemática das provas do ENEM entre os anos 2009 a 2019 e destacou-se que 32% das questões exigiam domínio sobre conhecimentos geométricos. Já em (ALACÂNTARA, 2020) foram apresentados os resultados de uma pesquisa de conteúdos de Geometria das provas de Matemática do ENEM entre os anos 2009 a 2019 e destacou-se que 16% das questões, exigiam conhecimentos algébrico e algébrico geométricos. Com isso em mente, o presente trabalho é voltado para a unidade temática de Geometria.

A Geometria é imprescindível para a formação e o desenvolvimento intelectual do aluno. O conhecimento geométrico desenvolve ideias que possibilitam a compreensão do mundo no qual ele se insere, explorando e descobrindo ações que lhe dão o sentido desse espaço. Além disso, a Geometria pode ser compreendida como uma parte mais concreta da Matemática, que pode ser observada na natureza e em outros aspectos criados pelo homem.

Já a Geometria Analítica estabelece uma correspondência entre equações algébricas e

[1] França, Portugal e Reino Unido, por exemplo, possuem instituições, que no processo seletivo, usam as notas do Enem para selecionar brasileiros (PEREIRA,).

curvas geométricas. Ela é de extrema importância, pois desenvolve o raciocínio visual do aluno, que é essencial para resolver situações-problemas sem a utilização de instrumentos de medição. O principal objetivo da Geometria Analítica é desenvolver um pensamento menos abstrato das figuras geométricas, ou seja, um pensamento mais analítico dos conceitos de Geometria.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), homologada em 2018, é um documento normativo que regulamenta quais são as aprendizagens essenciais a serem trabalhadas nas escolas brasileiras públicas e privadas de Educação Infantil, Ensino Fundamental e Médio. O intuito é promover e garantir o pleno desenvolvimento cognitivo, social e cultural dos estudantes. A BNCC não é apresentada em conteúdos, mas sim por competências e habilidades, que são definidas, respectivamente, como a mobilização de conhecimentos, ou seja, conceitos e procedimentos, e práticas cognitivas e socioemocionais. Segundo a BNCC,

> [...] os estudantes do Ensino Médio precisam "desenvolver habilidades para interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano, identificar transformações isométricas e produzir ampliações e reduções de figuras. Além disso, são solicitados a formular e resolver problemas em contextos diversos, aplicando os conceitos de congruência e semelhança" (BRASIL. . . , 2018).

Posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais são alguns dos objetos de conhecimento da unidade temática. O esperado é que esses conceitos ajudem o aluno a desenvolver o raciocínio necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos a partir dos conhecimentos de Geometria. O eixo também deve contemplar o trabalho com as transformações geométricas e as habilidades de construção, representação e interdependência.

O Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA), é uma avaliação internacional que mede o nível educacional de jovens de 15 anos por meio de provas de Leitura, Matemática e Ciências. O exame é realizado a cada três anos pela OCDE (Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico), entidade formada por governos de 30 países. O objetivo principal do PISA é produzir indicadores que contribuam, dentro e fora dos países participantes, para a discussão da qualidade da educação básica.

A edição 2018 do PISA, divulgada mundialmente, revela que 68,1% dos estudantes brasileiros não possuem nível básico de Matemática. Segundo o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep), vinculado ao Ministério da Educação (MEC), que é responsável pela aplicação do PISA no Brasil, foram envolvidas 597 escolas públicas e privadas com 10.961 alunos, selecionados, de forma amostral, a partir de um total aproximado de 2 milhões de estudantes (BRASIL, 2007).

Nesse sentido, este trabalho tem como objetivo confeccionar um material de suporte para estudantes e professores do Ensino Médio, com diversas questões resolvidas e comentadas por meio de argumentações da Geometria Analítica, apresentando as soluções em nível crescente de dificuldade.

Neste trabalho, além da presente introdução, temos mais quatro capítulos. No Capítulo 2 é feita uma breve apresentação sobre vetores; para isso, são abordados conceitos inciais, por exemplo, definição e propriedades de vetores, operações básicas com vetores, módulo, produto escalar e produto vetorial, que nos ajudarão na resolução das questões.

Já o Capítulo 3 apresenta conceitos básicos, tais como: plano cartesiano, distância entre dois pontos, equação de uma reta, coeficiente angular, posições relativas entre retas, ângulos entre retas, distância de um ponto a uma reta e área de um triângulo.

No Capítulo 4, são apresentadas diversas questões comentadas de Geometria Analítica divididas em duas partes: a primeira delas é dedicada às principais e mais recentes questões do ENEM. A segunda parte trata de questões das olimpíadas Putnam, olimpíadas internacionais, com o mais alto nível, retiradas do livro Putnam and Beyond. A William *Lowell Putnam Mathematical Competition* é a competição de Matemática proeminente para estudantes universitários de graduação nos Estados Unidos e Canadá. A competição Putnam, que iniciou em 1938, acontece anualmente no primeiro sábado de dezembro, e consiste em duas sessões de três horas, uma de manhã e outra à tarde. Durante cada sessão, os participantes trabalham individualmente em 6 problemas matemáticos desafiadores.

Finalmente, as considerações finais, apresentadas no Capítulo 5, destacam a importância da elaboração de um material que contemple o assunto estudado, o qual servirá de apoio para os estudantes do curso preparatório Edificar, do programa Edifique Ações da UFCA.

Capítulo 2

VETORES

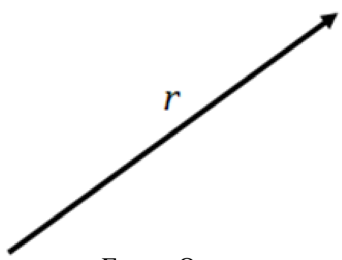
Neste capítulo é feita uma breve apresentação sobre vetores, com ênfase nos princípios básicos tais como, definição e propriedade de vetores, operações básicas com vetores, módulo, produto escalar e produto vetorial, que nos ajudarão com a resolução das questões no decorrer dos capítulos. O texto a seguir baseia-se nas referências Steinbruch e Winterle (2000) e Andrade (2022).

2.1 Reta orientada

Axioma 2.1.1. *Dois pontos A e B determinam uma única reta que aqui denotaremos por r ou $\overleftrightarrow{AB}$.*

No plano euclidiano $\mathbb{E}^2$ ou Espaço Euclidiano $\mathbb{E}^3$, uma reta r é dita orientada quando se fixa nela um sentido de percurso, considerado positivo e indicado geometricamente por uma seta (veja Figura 2.1).

Figura 2.1: Reta orientada.



Fonte: O autor.

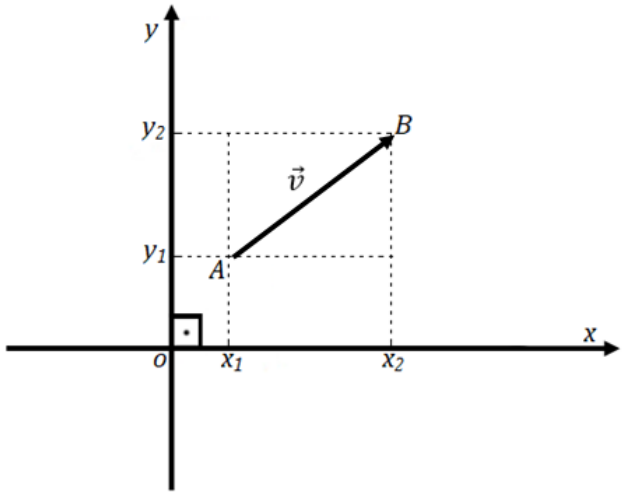
O sentido oposto é negativo. Uma reta orientada é denominada eixo.

2.2 Segmentos orientados

Um segmento orientado $\overline{AB}$ é o conjunto dos pontos da reta definida por A e B que estão entre A e B, incluindo esses pontos; está orientado quando escolhemos um dos pontos para ser o primeiro elemento do segmento orientado e o outro para ser o último elemento do segmento orientado. Um será dito ponto inicial e o outro ponto final do semento.

Representamos geometricamente um segmento orientado $\overline{AB}$ por uma seta que aponta da origem A para a extremidade B, conforme a Figura 2.2. Esta notação indicará que o primeiro elemento é A e o último é B.

Figura 2.2: Representação do segmento orientado $\overline{AB}$ no plano euclidiano.



Fonte: O autor.

Fixado um eixo de coordenadas cartesianas no plano euclidiano, ou seja, duas retas numéricas perpendiculares no origem, podemos identificar o segmento orientado com um par ordenado de números, a saber.

$$A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2)$$

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

$$= (x_2, y_2) - (x_1, y_1)$$

$$= B - A.$$

Portanto, as coordenadas de $\overline{AB}$ são dadas pela diferença entre as coordenadas do ponto final e do ponto inicial. O mesmo quando estamos no espaço euclidiano agora são três coordenadas envolvidas.

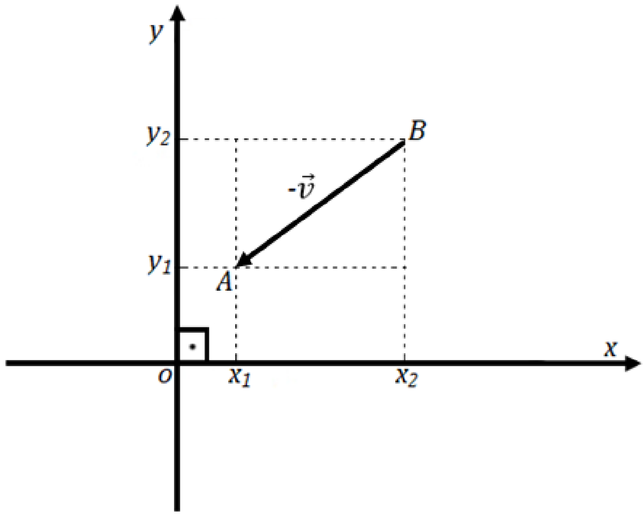
2.2.1 Segmento orientado nulo

O segmento orientado $\overline{AA}$, ou seja, quando o ponto inicial e o ponto final do segmento orientado coincidem, será denominado segmento orientado nulo.

2.2.2 Segmentos opostos

Se, por outro lado, B for a origem e A for a extremidade, denotaremos o segmento orientado por $\overline{BA}$ e dizemos que o sentido é orientado de B para A. desse modo $\overline{BA} = -\overline{AB}$, ou seja, $\overline{AB}$ e $\overline{BA}$ são orientados em sentidos contrários, conforme a Figura 2.3.

Figura 2.3: Representação do segmento orientado $\overline{BA}$.



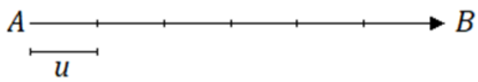
Fonte: O autor.

2.2.3 Medida de um segmento

Ao ser fixada uma unidade de comprimento, é possível associar a cada segmento orientado um número real, não negativo, que é a medida do segmento orientado em relação a esta unidade. Além disso, a medida de um segmento orientado é equivalente ao seu comprimento ou ao seu módulo. Já o comprimento do segmento orientado $\overline{AB}$ é indicado por AB.

Desse modo, o comprimento do segmento orientado $\overline{AB}$, representado Figura 2.4, é de 6 unidades de comprimento.

Figura 2.4: Comprimento do segmento $\overline{AB}$.



Fonte: O autor.

Assim, $AB = 6\,\mathrm{u.\,c.}$

Observações:

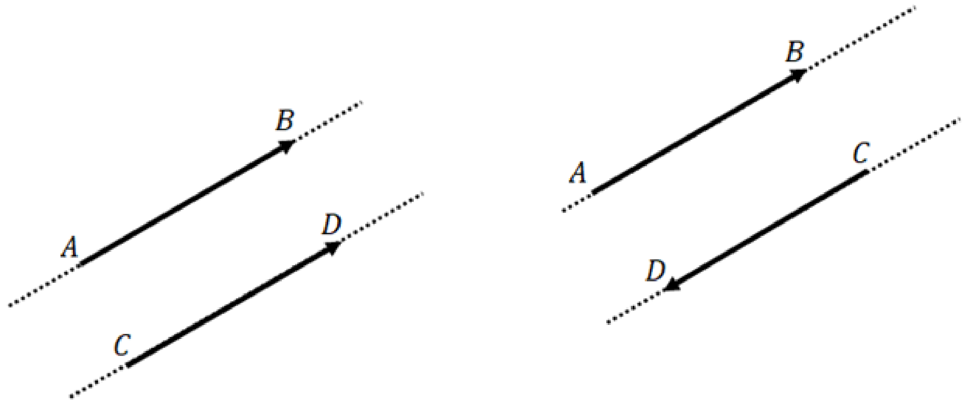
i) Segmentos nulos têm comprimento igual a zero;

ii) $AB = BA$.

2.2.4 Direção e sentido

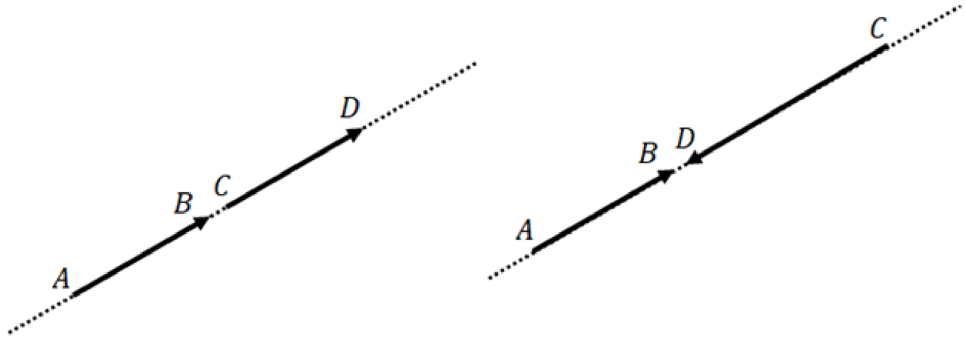
Sejam $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ dois segmentos orientados, ambos não nulos. Diremos que $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ têm a mesma direção se suas retas suportes forem paralelas (veja a Figura 2.5) ou coincidentes, conforme a Figura 2.6.

Figura 2.5: Direção e sentido do segmento orientado $\overline{AB}$: retas paralelas.



Fonte: O autor.

Figura 2.6: Direção e sentido do segmento orientado $\overline{AB}$: retas coincidentes.



Fonte: O autor.

Observação:

i) Só é possível comparar os sentidos de dois segmentos orientados se eles têm mesma direção;

ii) Dois segmentos orientados opostos têm sentidos contrários.

2.2.5 Módulo de um segmento orientado

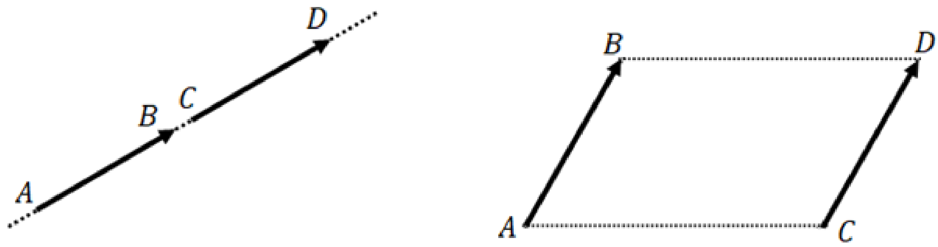
Norma, módulo ou comprimento de um segmento orientado $\overline{AB} = (x, y)$ representado por $|\overline{AB}|$ é um número real não negativo tal que

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x^2 + y^2)}.$$

2.2.6 Segmentos equipolentes

Dois segmentos orientados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são ditos equipolentes, quando têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento, conforme a Figura 2.7.

Figura 2.7: Segmentos equipolentes.



Fonte: O autor.

Se os segmentos orientados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ não pertencem à mesma reta. A representação do lado direito da Figura 2.7, para que $\overline{AB}$ seja equipolente a $\overline{CD}$ é necessário que $\overline{AB}//\overline{CD}$ e $\overline{AC}//\overline{BD}$, isto é, $ABCD$ deve ser um paralelogramo.

Observações:

i) Dois segmentos nulos são sempre equipolentes;

ii) A equipolência dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ é representada por $\overline{AB} \sim \overline{CD}$.

2.2.6.1 Propriedades da equipolência

I. $\overline{AB} \sim \overline{AB}$ (reflexiva).

II. Se $\overline{AB} \sim \overline{CD}$, então $\overline{CD} \sim \overline{AB}$ (simétrica).

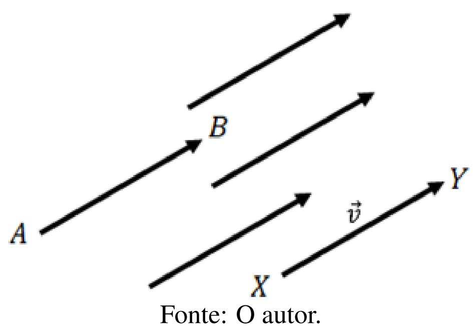
III. Se $\overline{AB} \sim \overline{CD}$ e $\overline{CD} \sim \overline{EF}$, então $\overline{AB} \sim \overline{EF}$ (transitiva).

IV. Dado um segmento orientado $\overline{AB}$ e um ponto C, existe um único ponto D tal que $\overline{AB} \sim \overline{CD}$.

2.3 Vetor

Um *vetor* é um conjunto de todos os segmentos orientados de mesma direção, de mesmo sentido e de mesmo comprimento. O vetor determinado por $\overline{AB}$ é representado por $\overrightarrow{AB}$ ou $B - A$ e que será indicado por $\overrightarrow{v}$, conforme a Figura 2.8. Assim, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$.

Figura 2.8: Representação do vetor.



Fonte: O autor.

Um vetor $\overrightarrow{v}$ está associado a uma infinidade de segmentos orientados, denominados *representantes* de $\overrightarrow{v}$ e de todos equipolentes entre si. Assim, podemos estabelecer que um vetor é um conjunto de segmentos, sendo que qualquer um destes representantes determina o mesmo vetor. Além disso, o módulo, a direção e o sentido do vetor $\overrightarrow{v}$ são os mesmos de qualquer um de seus representantes.

O módulo de $\overrightarrow{v}$ é indicado por $|\overrightarrow{v}|$.

2.4 Operações com vetores

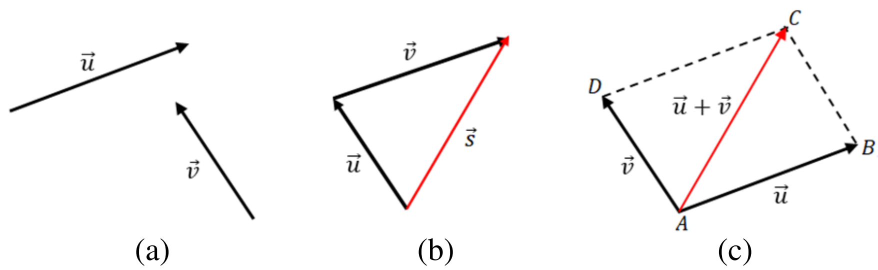
2.4.1 Adição de vetores

Dados dois vetores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AD}$ então o vetor soma de $\overrightarrow{u}$ com $\overrightarrow{v}$, indicado por $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$, é dado por

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} \text{ ou } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}.$$

Os pontos A e C determinam um vetor $\overrightarrow{s}$ que é, por definição, a soma dos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, ou seja, $\overrightarrow{s} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ (veja a Figura 2.9).

Figura 2.9: Representação da regra do paralelogramo.



Fonte: O autor.

Além disso, para quaisquer que sejam os pontos A, B, C e D, vale a igualdade, conhecida como *regra do paralelogramo* (veja a Figura 2.9(c)),

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}.$$

2.4.1.1 Propriedades da adição

I. Comutativa: $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$.

II. Associativa: $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$

III. Existe um só vetor nulo $\overrightarrow{0}$ tal que para todo o vetor $\overrightarrow{v}$ se tem: $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}$.

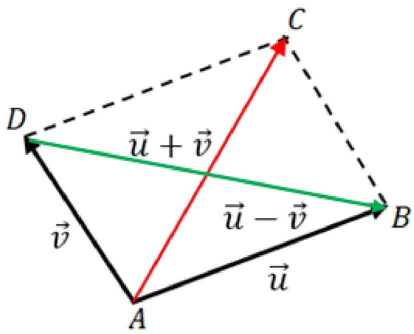
IV. Qualquer que seja o vetor $\overrightarrow{v}$, existem um só vetor $-\overrightarrow{v}$ (vetor oposto de $\overrightarrow{v}$) tal que $\overrightarrow{v} + (-\overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

2.4.2 Subtração de vetores

A partir da ilustração representada pela Figura 2.10, na qual $ABCD$ é um paralelogramo, consideremos $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AD}$. Perceba que a diagonal $\overrightarrow{AC}$ é um segmento orientado que representa a soma $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$. Por outro lado, a diagonal $\overrightarrow{DB}$ é um segmento orientado que representa a diferença $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$, visto que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ e $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} &= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} \\ &= \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} \\ &= \overrightarrow{DB}. \end{aligned}$$

Figura 2.10: Representação da regra do paralelogramo e da subtração.



Fonte: O autor.

Portanto, a partir do vetor inverso aditivo ou oposto pode-se definir subtração de vetores, o vetor $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$, como a soma do vetor $\overrightarrow{u}$ com o vetor $-\overrightarrow{v}$, ou seja, $\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{v})$.

2.4.3 Multiplicação por um número real

Seja α um número real e $\overrightarrow{u}$ um vetor. A multiplicação de um número real por um vetor, resulta em um novo vetor indicado por $\alpha\overrightarrow{u}$, chamado produto de α por $\overrightarrow{u}$, que satisfaz as seguintes condições:

- Se $\overrightarrow{u} = 0$ ou $\alpha = 0$, então $\alpha\overrightarrow{u} = 0$;
- $\alpha\overrightarrow{u}$ tem o mesmo sentido de $\overrightarrow{u}$ se $\alpha > 0$ e
- $\alpha\overrightarrow{u}$ tem o sentido oposto de $\overrightarrow{u}$ se $\alpha < 0$.
- $|\alpha\overrightarrow{u}| = |\alpha||\overrightarrow{u}|$, ou seja, o comprimento de $\alpha\overrightarrow{u}$ é igual ao comprimento do vetor $\overrightarrow{u}$ multiplicado por $|\alpha|$.

2.4.3.1 Propriedades da multiplicação por um número real

Se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são vetores quaisquer e a e b números reais, temos:

I. $a(b\overrightarrow{v}) = (ab)\overrightarrow{v}$ (associativa).

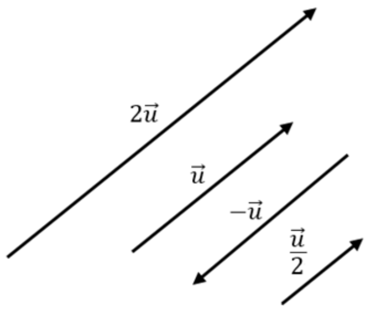
II. $(a+b)\overrightarrow{v} = a\overrightarrow{v} + b\overrightarrow{v}$ (distributiva em relação à adição de escalares).

III. $a(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = a\overrightarrow{u} + a\overrightarrow{v}$ (distributiva em relação à adição de vetores).

IV. $1\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}$ (identidade).

Na Figura 2.11, são apresentados alguns exemplos de vetores na forma $\alpha\overrightarrow{u}$ com $\alpha = 2$, 1, $\frac{1}{2}$ e -1.

Figura 2.11: Representação do vetor multiplicado por um escalar.



Fonte: O autor.

2.5 Produto de vetores

2.5.1 Produto interno ou produto escalar

Sejam dois vetores $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1)$ e $\overrightarrow{v} = (x_2, y_2)$. O produto interno de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, indicado por $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$, é um número real tal que:

- Se $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ é nulo, então $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.
- Se $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ não são nulos e θ é o ângulo formado entre eles, então $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = |\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}| \cos\theta$.
- Se $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ são vistos como coordenadas de um vetor, então $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = x_1x_2 + y_1y_2$.

2.5.1.1 Propriedades do produto escalar

Para quaisquer que sejam os vetores $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1)$, $\overrightarrow{v} = (x_2, y_2)$, $\overrightarrow{w} = (x_3, y_3)$ e $a \in \mathbb{R}$ valem as seguintes propriedades:

I. $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} \geq 0$ e $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = 0$ se, e somente se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

II. $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$ (comutativa).

III. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ (distributiva em relação à adição de vetores).

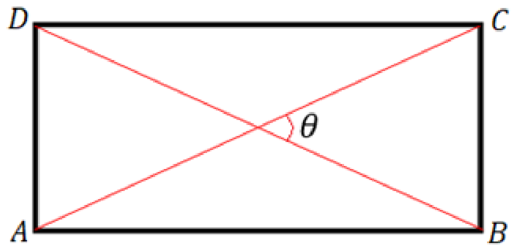
IV. $(a\vec{u}) \cdot \vec{v} = a(\vec{u} \cdot \vec{v})$.

V. $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$.

Vale ressaltar que o produto interno ou produto escalar de dois vetores, tem como resultado um número real, ou seja, um escalar.

Exemplo 2.5.1. *Iremos calcular o ângulo entre as diagonais de um retângulo $ABCD$, sabendo que sua base é o dobro da altura, conforme a Figura 2.12.*

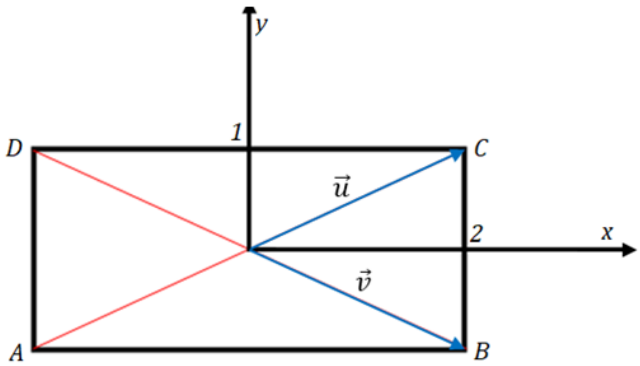
Figura 2.12: Representação do produto escalar.



Fonte: O autor.

Escolhendo os eixos coordenados e a unidade de medida, convenientemente, para a realização dos cálculos, temos a Figura 2.13:

Figura 2.13: Representação do produto escalar com os eixos.



Fonte: O autor.

Veja que, $\vec{u} = (2, 1)$ e $\vec{v} = (2, -1)$.

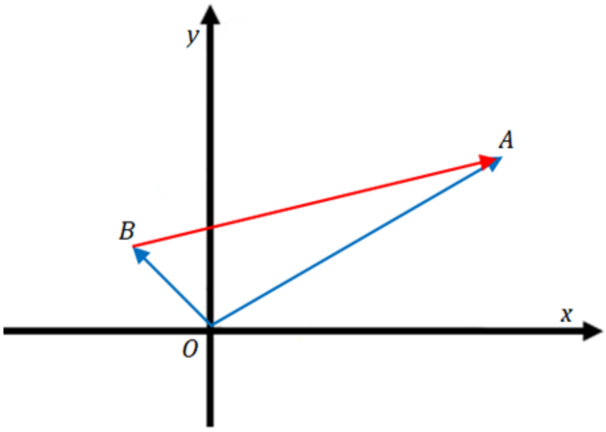
Portanto,

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} \\ &= \frac{2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1)}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} \\ &= \frac{3}{5} \\ \Longrightarrow \theta &\cong 53°. \end{aligned}$$

2.5.2 Condição de perpendicularismo

Dados dois vetores não nulos $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1)$ e $\overrightarrow{v} = (x_2, y_2)$. Eles são ditos perpendiculares (veja a Figura 2.14) e indicado por $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ se, e somente se, $\langle u, v\rangle = x_1x_2 + y_1y_2 = 0$.

Figura 2.14: Representação de vetores perpendiculares.



Fonte: O autor.

De fato, usando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{BA}|^2 &= |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2\\
(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 &= x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2\\
x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2 &= x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - 2x_1x_2 - 2y_1y_2 \; = \; 0\\
&\implies x_1x_2 + y_1y_2 \; = \; 0
\end{aligned}$$

Reciprocamente, se $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$, então $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$.

Capítulo 3

ESTUDO DA RETA

O objetivo deste capítulo é apresentar conceitos básicos, tais como, plano cartesiano, distância entre dois pontos, ponto médio de um segmento, mediana e baricentro, bem como as diferentes equações de uma reta, coeficiente angular, posições relativas entre retas, ângulos entre retas, distância de um ponto a uma reta e área de um triângulo, representar pontos, segmentos de retas e retas no plano cartesiano.

O texto a seguir baseia-se nas referências: (BOULOS PAULO – CAMARGO, 2005), (ESCOLA,), (PORTAL..., c), (IEZZI, 2016), (PORTAL..., a), (IEZZI,), (LEONARDO, 2013), (MACHADO, 1982), (BARRETO, 2000) e (LIMA, 2006).

3.1 Conceitos básicos

3.1.1 Plano cartesiano

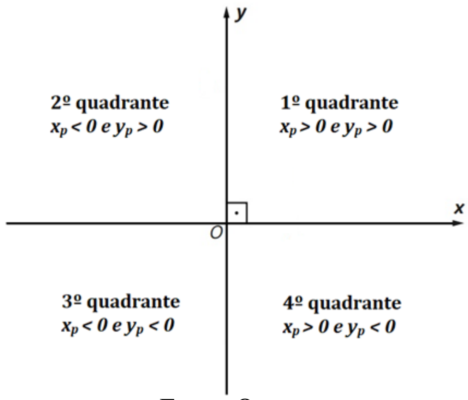
O sistema cartesiano ortogonal é formado por dois eixos perpendiculares entre si. O eixo x (horizontal) é chamado eixo das *abscissas*, e o eixo y (vertical) é chamado eixo das *ordenadas*. Os dois eixos se interceptam no ponto $O = (0, 0)$, que é denominado *origem* das coordenadas do plano cartesiano.

Com isso, é possível localizar qualquer ponto P do plano cartesiano por meio de um único par ordenado (x_p, y_p) de números reais e, de modo análogo dado um par ordenado (x_p, y_p) de números reais, a ele fica associado um único ponto P pertencente ao plano.

3.1.2 Quadrantes

Os pontos (x_p, y_p) do plano cartesiano que não pertencem a um eixo são tais que $x_p \neq 0$ e $y_p \neq 0$. Assim, os eixos do plano cartesiano dividem esse plano em quatro regiões que chamaremos de quadrantes, conforme a Figura 3.1.

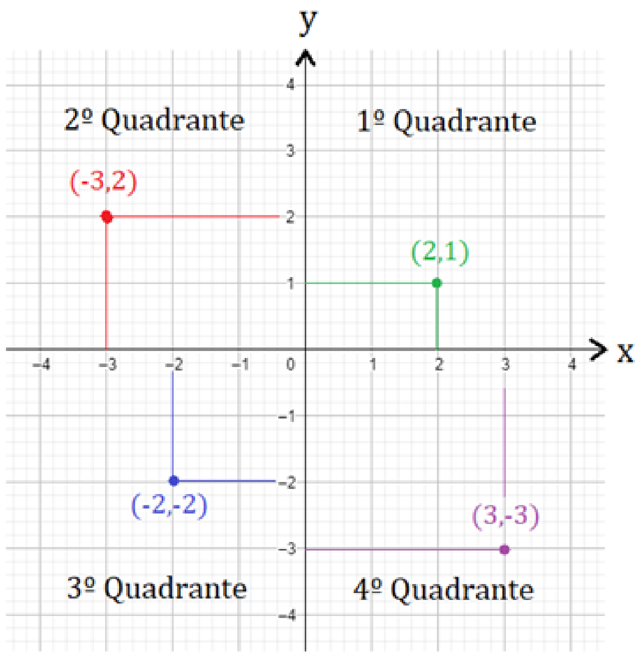
Figura 3.1: Representação dos quadrantes



Fonte: O autor.

Exemplo 3.1.1. *Represente os pontos* $(2, 1)$*;* $(-3, 2)$*;* $(-2, -2)$ *e* $(3, -3)$ *no plano cartesiano e, em seguida, informar seus respectivos quadrantes.*

Figura 3.2: Identificação de pontos dados nos quadrantes.

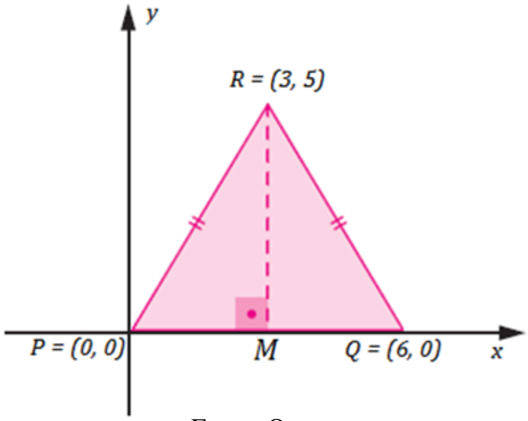


Fonte: O autor.

Exemplo 3.1.2. *(VUNESP - adaptado) Classifique o triângulo* PQR *de vértices* $P = (0, 0)$*,* $Q = (6, 0)$ *e* $R = (3, 5)$ *quanto aos seus lados.*

Supondo que já sejam conhecidas as definições de triângulo equilátero, escaleno e isósceles, que são as possíveis classificações de uma triângulo quanto aos lados; também há classificação quanto aos ângulos em acutângulo, retângulo ou obtusângulo. Do enunciado podemos desenhar o triângulo PQR, conforme a Figura 3.3.

Figura 3.3: Relativo ao Exemplo 3.1.2



Fonte: O autor.

Observando o triângulo PMR, retângulo em M, conforme a Figura 3.3, temos

$$(PR)^2 = (PM)^2 + (MR)^2 \implies (PR)^2 = 3^2 + 5^2 \implies PR = \sqrt{34}.$$

No triângulo RMQ (retângulo em M), temos

$$(QR)^2 = (MQ)^2 + (MR)^2 \implies (QR)^2 = 3^2 + 5^2 \implies (QR) = \sqrt{34}.$$

Então

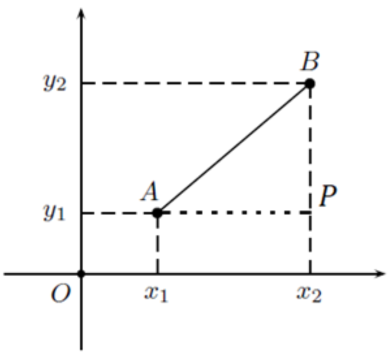
$$\left.\begin{array}{r} PR = QR = \sqrt{34} \\ PQ = 6 \end{array}\right\} \implies PR = QR \neq PQ.$$

Portanto, o triângulo PQR possui dois lados iguais, ou seja, é um triângulo isósceles.

3.1.3 Distância entre dois pontos

Dados os pontos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ situados num plano cartesiano, desejamos calcular a distância entre esses pontos. A maneira mais intuitiva de o fazer, seria calcular o comprimento do segmento de reta que liga os pontos, conforme a Figura 3.4.

Figura 3.4: Distância entre dois pontos



Fonte: O autor.

Perceba que o segmento de reta que liga os pontos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ é a hipotenusa do triângulo retângulo ΔABP cujos catetos podem ser expressos por $|x_2 - x_1|$ e $|y_2 - y_1|$. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ΔABP, a distância d entre os pontos é dada por:

$$\begin{aligned}[d(A,B)]^2 &= [d(A,P)]^2 + [d(B,P)]^2 \\ &= (|x_2 - x_1|)^2 + (|y_2 - y_1|)^2.\end{aligned}$$

Note ainda que não é necessário escrever os módulos sob a raiz quadrada, pois os comprimentos dos catetos já estão elevados ao quadrado. Logo, podemos escrever:

$$[d(A,B)]^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

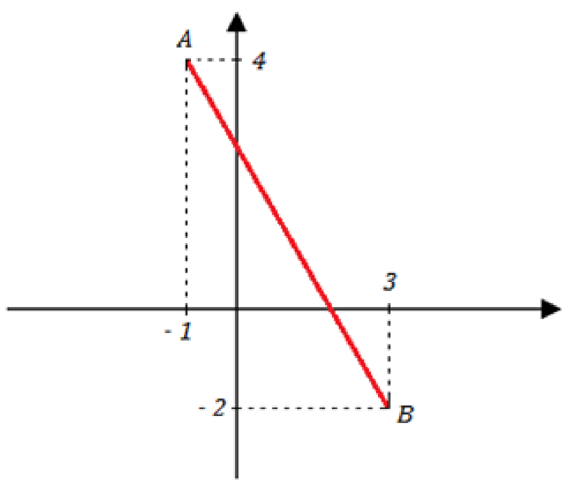
Portanto, a distância entre os pontos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ do plano cartesiano é calculada por:

$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{3.1}$$

Exemplo 3.1.3. *Calcule a distância entre os pontos* $A = (-1, 4)$ *e* $B = (3, -2)$*, representados na Figura 3.5, temos pela equação* (3.1)*:*

$$\begin{aligned}d(A,B) &= \sqrt{(3 - (-1))^2 + (-2 - 4)^2} \\ &= \sqrt{4^2 + (-6)^2} \\ &= \sqrt{16 + 36} \\ &= \sqrt{52}.\end{aligned}$$

Figura 3.5: Representação da distância entre os pontos $A = (-1, 4)$ e $B = (3, -2)$.



Fonte: O autor.

Exemplo 3.1.4. *(UFRGS - adaptado) Calcule o valor da variável y, do ponto A, sabendo que a distância entre os pontos $A = (-2, y)$ e $B = (6, 7)$ é 10.*

Pela equação (3.1), temos

$$\begin{aligned} d(A,B) &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \\ 10 &= \sqrt{(6-(-2))^2+(7-y)^2} \\ 10 &= \sqrt{8^2+(7-y)^2} \\ 10 &= \sqrt{64+(7-y)^2}; \end{aligned}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, temos:

$$\begin{aligned} 10^2 &= \left(\sqrt{(64+(7-y)^2}\right)^2 \\ 100 &= 64+(7-y)^2 \\ 100 &= 64+49-14y+y^2 \\ y^2-14y+13 &= 0; \end{aligned}$$

Resolvendo a equação do 2º grau.

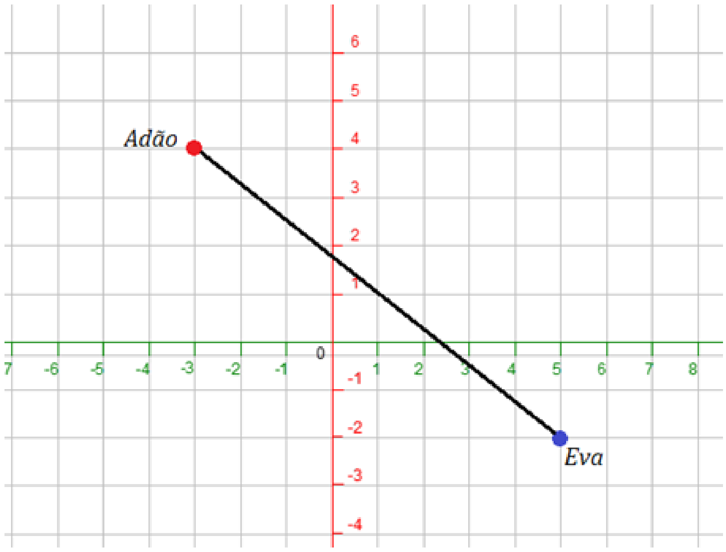
$$\begin{aligned} \Delta &= b^2-4ac \\ &= (-14)^2-4\cdot 1\cdot 13 \\ &= 144. \\ & \quad y = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &\Longrightarrow \quad y = \frac{14\pm\sqrt{144}}{2} \\ &\Longrightarrow \quad y = 13 \text{ ou } y = 1. \end{aligned}$$

Portanto, y pode ser 1 ou 13.

Exemplo 3.1.5. *(CEFET-RN - adaptado) Dois amigos, Adão e Eva, encontram-se na origem de um sistema cartesiano ortogonal. Eles só podem dar um passo de cada vez para Norte, Sul, Leste ou Oeste. Cada passo é representado, nesse sistema, pelo deslocamento de uma unidade para uma das direções mencionadas anteriormente. Eva deu 2 passos para o Sul, depois deu 5 passos para o Leste e parou. Adão deu 7 passos para o Norte, depois deu 3 passos para o Oeste, mais 3 passos para o Sul e parou. Calcule a distância entre Adão e Eva.*

Podemos representar as posições de Adão e Eva como na Figura 3.6.

Figura 3.6: Representação das posições de Adão e Eva, Exemplo 3.1.5.



Fonte: O autor.

Logo,

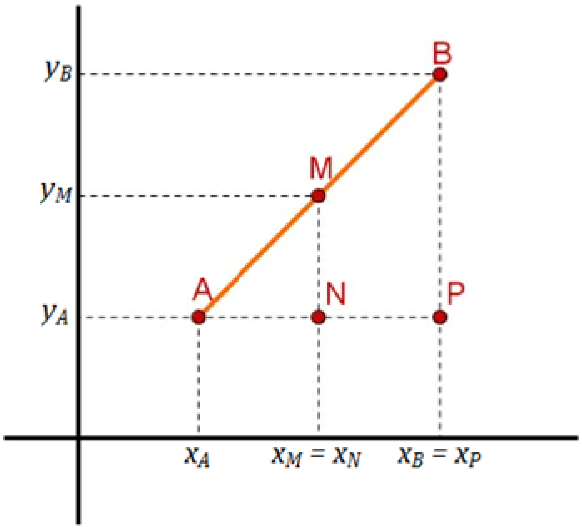
$$
\begin{aligned}
d(\text{Adão}, \text{Eva}) &= \sqrt{(5-(-3))^2+(-2-4)^2} \\
&= \sqrt{8^2+(-6)^2} \\
&= \sqrt{64+36} \\
&= \sqrt{100} \\
&= 10.
\end{aligned}
$$

Portanto, podemos afirmar que a distância entre Adão e Eva é de 10 passos.

3.1.4 Ponto médio de um segmento

Seja M o ponto médio do segmento de extremidades $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$. Perceba, que os triângulos AMN e ABP são semelhantes, pois possuem os três ângulos respectivamente congruentes, conforme a Figura 3.7.

Figura 3.7: Ponto médio



Fonte: O autor.

Portanto, pela razão de semelhança, temos:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AP}.$$

Note que

$$AB = 2(AM), \text{ pois } M \text{ é ponto médio de } (\overline{AB}).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{AM}{2(AM)} = \frac{AN}{AP} &\implies \frac{1}{2} = \frac{AN}{AP} \\ &\implies AP = 2(AN). \end{aligned}$$

Assim, temos:

$$|x_p - x_A| = 2|x_N - x_A|.$$

Como $x_p > x_N > x_A$, $x_p = x_B$ e $x_N - x_M$, podemos escrever:

$$\begin{aligned} x_p - x_A &= 2(x_N - x_A) \\ x_B - x_A &= 2(x_M - x_A) \\ x_B - x_A &= 2x_M - 2x_A \\ x_M &= \frac{x_A + x_B}{2} \end{aligned} \tag{3.2}$$

De modo análogo, temos que:

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \tag{3.3}$$

Portanto, sendo M o ponto médio do segmento $\overline{AB}$, temos:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right). \tag{3.4}$$

Exemplo 3.1.6. *Calcule o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ de pontos $A = (2, 3)$ e $B = (4, 1)$.*

Da equação (3.4) segue que

$$\begin{aligned} M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) &= \left(\frac{2+4}{2}, \frac{3+1}{2}\right) \\ &= \left(\frac{6}{2}, \frac{4}{2}\right) \\ &= M(3, 2). \end{aligned}$$

Exemplo 3.1.7. *Determine as coordenadas do ponto B do segmento $\overline{AB}$, conhecido seu ponto médio $M = (0, 2)$ e o ponto $A = (-2, 5)$.*

Usamos a definição das coordenadas do ponto médio:

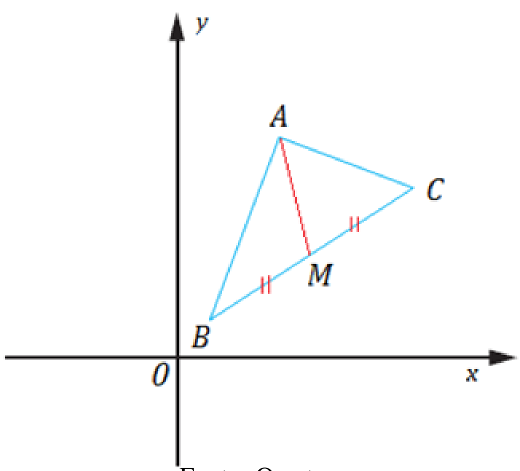
$$\begin{aligned} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} &\implies 0 = \frac{-2 + x_B}{2} \implies x_B = 2; \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} &\implies 2 = \frac{5 + y_B}{2} \implies y_B = -1. \end{aligned}$$

Assim, $B = (2, -1)$.

3.1.5 Mediana e baricentro

Definição 3.1.1. *A mediana $\overline{AM}$ de um triângulo ABC é o segmento de reta de extremidade no vértice A do triângulo, e o ponto médio M do lado oposto ao vértice, ou seja, o lado $\overline{BC}$, conforme a Figura 3.8.*

Figura 3.8: Mediana



Fonte: O autor.

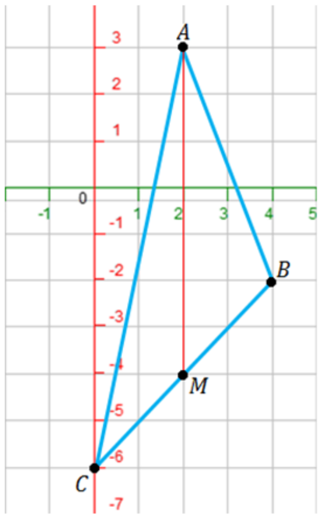
Exemplo 3.1.8. *Determine o comprimento da mediana $\overline{AM}$ relativa ao lado $\overline{BC}$ do triângulo cujos vértices são $A = (2, 3)$, $B = (4, -2)$ e $C = (0, -6)$.*

As coordenadas do ponto médio M do segmento $\overline{BC}$ são:

$$x_M = \frac{4+0}{2} = 2 \text{ e } y_M = \frac{(-2)+(-6)}{2} = -4$$

Assim, o ponto médio do segmento $\overline{BC}$ é $M = (2, -4)$.

Figura 3.9: Mediana relativa ao Exemplo 3.1.8.



Fonte: O autor.

O comprimento da mediana é dado por:

$$d_{A,M} = \sqrt{(2-2)^2 + (-4-3)^2} = \sqrt{49} = 7.$$

Portanto, o comprimento da mediana $\overline{AM}$ é 7.

Teorema 3.1.1. *Dado um triângulo ABC. Se duas medianas $\overline{AM}$ e $\overline{BN}$ concorrem em um ponto G, então $GA = 2GM$ e $GB = 2GN$, G é chamado baricentro do triângulo ABC.*

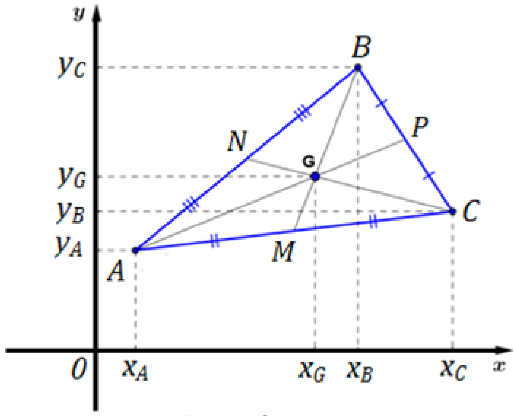
Definição 3.1.2. *O baricentro de um triângulo ABC, é o ponto de interseção das medianas, o que divide cada mediana em dois segmentos na relação 2 pra 1, ou seja, o segmento que contém um dos vértices do triângulo como uma de suas extremidades mede o dobro do outro.*

Observação: O baricentro também é conhecido como centro de massa de um triângulo.

Sejam $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$ três pontos não alinhados no plano cartesiano. As três medianas relativas aos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, são respectivamente $\overline{CN}$, $\overline{AP}$ e $\overline{BM}$. Elas se interceptam no ponto $G = (x_G, y_G)$, baricentro do triângulo.

Obtenha as coordenadas de G. Considere o triângulo ABC, conforme a Figura 3.10.

Figura 3.10: Baricentro



Fonte: O autor.

Se $M = (x_M, y_M)$ é ponto médio do segmento $\overline{AC}$, então de (3.2), temos:

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2}. \tag{3.5}$$

Como o baricentro G divide cada mediana na relação 2 pra 1. Logo,

$$\frac{BG}{GM} = \frac{2}{1}.$$

Considerando as abscissas dos pontos B, G e M, temos:

$$\begin{aligned} \frac{x_G - x_B}{x_M - x_G} &= \frac{2}{1} \\ x_G - x_B &= 2(x_M - x_G) \\ 3x_G &= x_B + 2x_M. \end{aligned} \tag{3.6}$$

De (3.5) e (3.6), temos:

$$3x_G = x_B + 2\left(\frac{x_A + x_C}{2}\right) \Longrightarrow x_G = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}\right).$$

De modo análogo,

$$y_G = \left(\frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right).$$

Portanto, o baricentro do triângulo ABC é dado por:

$$G = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right).$$

Exemplo 3.1.9. *Determine o baricentro de um triângulo que possui vértices localizados nos pontos* $A = (2, 3)$*,* $B = (5, -4)$ *e* $C = (-1, -2)$*.*

$$\begin{aligned}
G &= \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right) \\
G &= \left(\frac{2 + 5 - 1}{3}, \frac{3 - 4 - 2}{3}\right) \\
G &= \left(\frac{6}{3}, \frac{-3}{3}\right) \\
G &= (2, -1).
\end{aligned}$$

Exemplo 3.1.10. *Em uma cidade, serão instaladas três torres de telefonia para resolver o problema com a falha na rede e no sinal para os celulares. Acontece que as posições dessas torres foram planejadas de modo que o centro da cidade coincida com o baricentro do triângulo com vértices em A, B e C, que são as localizações das torres. Para escolher a posição das torres, definiu-se a prefeitura como a origem do eixo, e o centro da cidade se localiza no ponto $(1, -1)$. Certificaram-se que as localizações dos pontos A e B seriam $A = (12, -6)$, $B = (-4, -10)$. Localize o posicionamento do ponto C.*

$$\begin{aligned}
& \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = x_G \\
\Longrightarrow\ & \frac{12 + (-4) + x}{3} = 1 \\
\Longrightarrow\ & \frac{8 + x}{3} = 1 \\
\Longrightarrow\ & 8 + x = 1 \cdot 3 \\
\Longrightarrow\ & 8 + x = 3 \\
\Longrightarrow\ & x = 3 - 8 \\
\Longrightarrow\ & x = -5.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = y_G \\
\Longrightarrow\ & \frac{-6 + (-10) + y}{3} = -1 \\
\Longrightarrow\ & \frac{-16 + y}{3} = -1 \\
\Longrightarrow\ & -16 + y = -1 \cdot 3 \\
\Longrightarrow\ & y = 16 - 3 \\
\Longrightarrow\ & y = 13.
\end{aligned}$$

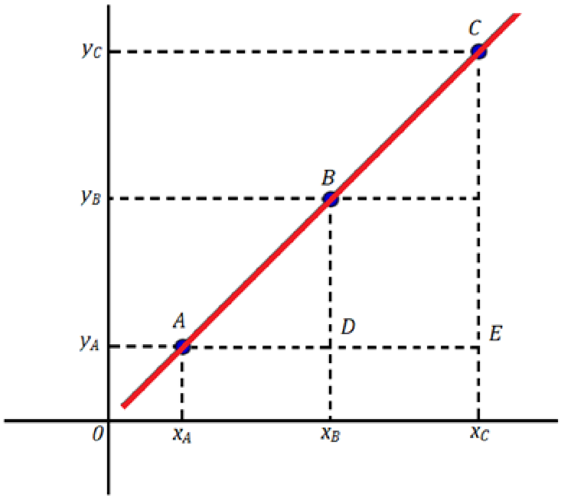
Desse modo, chegamos a $C = (-5, 13)$.

3.2 Condição de alinhamento de três pontos

Segundo o postulado de Euclides, dados dois pontos distintos $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$, por eles passa uma única reta $\overleftrightarrow{AB}$.

Agora iremos verificar qual é a condição para que três pontos, dois a dois distintos $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$, pertençam a uma reta não paralela a algum dos eixos coordenados, ou seja, estejam alinhados, conforme a Figura 3.11.

Figura 3.11: Pontos colineares



Fonte: O autor.

Perceba que os triângulos ACE e ABD são semelhantes. Logo,

$$\frac{AE}{AD} = \frac{EC}{DB} \implies \frac{x_C - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_A}{y_B - y_A};$$

com $x_B - x_A \neq 0$ e $y_B - y_A \neq 0$.

Dessa forma,

$$\begin{aligned} & (x_C - x_A)(y_B - y_A) - (x_B - x_A)(y_C - y_A) = 0 \\ \implies & x_C y_B - x_C y_A - x_A y_B + x_A y_A - x_B y_C + x_B y_A + x_A y_C - x_A y_A = 0 \\ \implies & x_C y_B - x_C y_A - x_A y_B - x_B y_C + x_B y_A + x_A y_C = 0. \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade por -1 e reordenando os termos, obtemos:

$$x_A y_B + x_C y_A + x_B y_C - x_C y_B - x_A y_C - x_B y_A = 0.$$

Perceba que a equação apresentada anteriormente é justamente o desenvolvimento de um determinante de ordem 3, onde a primeira coluna são as abscissas, a segunda coluna representa as ordenadas dos pontos dados e todos os valores da terceira coluna são iguais a 1.

$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = x_A y_B + x_C y_A + x_B y_C - x_C y_B - x_A y_C - x_B y_A = 0.$$

Logo, se três pontos $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$ estão alinhados, então o determinante da matriz formada pelas coordenadas dos pontos é nulo.

De modo análogo, se o determinante da matriz formada pelas coordenadas dos pontos for nulo, então $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$ são colineares.

Conclusão, três pontos $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$, são colineares se, e somente se

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Exemplo 3.2.1. *Verifique se os pontos $A = (3, 2)$, $B = (4, 1)$ e $C = (1, 4)$ são colineares ou vértices de uma triângulo.*

Vamos calcular o determinante:

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 3 + 2 + 16 - 1 - 12 - 8 \\ &= 21 - 21 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como $D = 0$, os pontos são colineares.

Exemplo 3.2.2. *Calcule o valor da variável x do ponto C sabendo que os pontos $A = (1, 3)$, $B = (3, 4)$ e $C = (x, 2)$ são colineares.*

Nesse caso, sabemos que o determinante da matriz formada pelos pontos $A = (1, 3)$, $B = (3, 4)$ e $C = (y, 2)$ é zero. Logo,

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ x & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ \Longrightarrow\ & (3x + 4 + 6) - (9 + 4x + 2) = 0 \\ \Longrightarrow\ & 3x - 4x + 10 - 11 = 0 \\ \Longrightarrow\ & -x - 1 = 0 \\ \Longrightarrow\ & x = -1. \end{aligned}$$

Portanto, para que os pontos sejam colineares, o valor de x é -1.

3.3 Reta

3.3.1 Equação geral da reta

Teorema 3.3.1. *A toda reta r do plano está associada uma equação na forma $ax + by + c = 0$ onde a, b e c são números reais e a e b não são simultaneamente nulos.*

Para chegarmos à equação geral da reta, iremos utilizar os conhecimentos já desenvolvidos anteriormente, dessa forma podemos encontrar a equação da reta fazendo o alinhamento de três pontos.

Dados dois pontos distintos, $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$, não coincidentes e pertencentes a reta r, no plano cartesiano, iremos determinar uma relação entre as coordenadas de um ponto genérico, $P = (x, y)$, também pertencente à reta r, conforme a Figura 3.11.

Utilizando a condição de alinhamento de três pontos, para os pontos A, B e P, temos:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Desenvolvendo o determinante encontramos a seguinte equação:

$$\begin{aligned} & (xy_A + x_Ay_B + x_By) - (x_By_A + xy_B + x_Ay) = 0 \\ \Longrightarrow \quad & (y_A - y_B)x + (x_A - x_B)y + x_Ay_B - x_By_A = 0. \end{aligned}$$

Perceba que, nesse determinante, os pontos são fornecidos, ou seja, as únicas variáveis são x e y. Assim escrevendo a equação anterior, substituindo por:

$$\begin{aligned} (y_A - y_B) &= a, \\ (x_A - x_B) &= b, \\ (x_Ay_B - x_By_A) &= c. \end{aligned}$$

Obtemos,

$$ax + by + c = 0. \qquad (3.7)$$

Essa equação de uma reta é denominada *equação geral da reta*.

Exemplo 3.3.1. *Escreva a equação da reta que passa pelos pontos $A = (5, -1)$ e $B = (2, 3)$.*

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \\
\Longrightarrow\quad & 15 - x + 2y - 3x - y + 2 = 0 \\
\Longrightarrow\quad & -4x - 3y + 17 = 0.
\end{aligned}$$

Logo, a equação procurada é $-4x - 3y + 17$.

Exemplo 3.3.2. *Encontre a equação geral da reta que passa pelos pontos* $(-1, 8)$ *e* $B(-5, -1)$.

Primeiro devemos escrever a condição de alinhamento de três pontos, definindo a matriz associada aos pontos dados e a um ponto genérico $P = (x, y)$ pertencente a reta e calculamos o determinante.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 8 & 1 \\ -5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Desenvolvendo o determinante, encontramos:

$$(8 + 1)x + (1 - 5)y + 40 + 1 = 0.$$

A equação geral da reta que passa pelos pontos $A = (-1, 8)$ e $B = (-5, -1)$ é

$$9x - 4y + 41 = 0.$$

Exemplo 3.3.3. *(EBSERH – AOCP - adaptada) Dados os pontos a seguir, analise quais deles pertencem à reta cuja equação é dada por* $y - 2x - 10 = 0$.

a) $A = (5; 0)$ *e* $B = (-20; 35)$.

b) $C = (12; 21)$ *e* $D = (0; 20)$.

c) $E = (14; -15)$ *e* $F = (-7; 7)$.

d) $G = (5; 30)$ *e* $H = (0, 5; 4)$.

e) $I = (0; 10)$ *e* $J = (-13; -16)$.

Observe, que a forma mais simples de encontrar a resposta correta é testar cada uma das opções, onde ambos os pontos, obrigatoriamente, devem pertencer à reta.

a) $A = (5; 0)$ e $B = (-20; 35)$. Testando o ponto A.

$$\begin{aligned}
y - 2x - 10 &= 0 \\
0 - 2 \cdot 5 - 10 &= 0 \\
-20 &= 0 \text{ (Falso).}
\end{aligned}$$

Conclusão: O ponto A não pertence à reta.

b) $C = (12; 21)$ e $D = (0; 20)$. Testando o ponto C.

$$\begin{aligned} y - 2x - 10 &= 0 \\ 21 - 2 \cdot 12 - 10 &= 0 \\ 21 - 24 - 10 &= 0 \\ -13 &= 0 \text{ (Falso).} \end{aligned}$$

Conclusão: O ponto C não pertence à reta.

c) $E = (14; -15)$ e $F = (-7; 7)$. Testando o ponto E.

$$\begin{aligned} y - 2x - 10 &= 0 \\ -15 - 2 \cdot 14 - 10 &= 0 \\ -15 - 28 - 10 &= 0 \\ -53 &= 0 \text{ (Falso).} \end{aligned}$$

Conclusão: O ponto E não pertence à reta.

d) $G = (5; 30)$ e $H = (0,5; 4)$. Testando o ponto G.

$$\begin{aligned} y - 2x - 10 &= 0 \\ 30 - 2.5 - 10 &= 0 \\ 30 - 10 - 10 &= 0 \\ 10 &= 0 \text{ (Falso).} \end{aligned}$$

Conclusão: O ponto G não pertence à reta.

e) $I = (0; 10)$ e $J = (-13; -16)$. Testando o ponto I.

$$\begin{aligned} y - 2x - 10 &= 0 \\ 10 - 2 \cdot 0 - 10 &= 0 \\ 10 - 0 - 10 &= 0 \\ 0 &= 0 \text{ (Verdadeiro).} \end{aligned}$$

Conclusão: O ponto I pertence à reta.

Testando o ponto J.

$$\begin{aligned} y - 2x - 10 &= 0 \\ -16 - 2\cdot(-13) - 10 &= 0 \\ -16 + 26 - 10 &= 0 \\ 0 &= 0 \text{ (Verdadeiro).} \end{aligned}$$

Conclusão: O ponto J pertence à reta.

Exemplo 3.3.4. *Obtenha a equação geral da reta r, que passa pelos pontos $A = (3,1)$ e $B = (2,4)$ e seus pontos de interseção com os eixos x e y.*

Seja $P = (x,y)$ um ponto pertencente à reta r de tal maneira que os pontos A, B e P estejam alinhados. Então:

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} \\ \Longrightarrow\;& x + 2y + 12 - 2 - 4x - 3y = 0 \\ \Longrightarrow\;& -3x - y + 10 = 0. \end{aligned}$$

Portanto, a equação geral da reta r é $-3x - y + 10 = 0$.

Vamos determinar agora os pontos de interseção da reta r com os eixos x e y.

A reta r intercepta o eixo x no ponto $P = (p,0)$. Substituindo as coordenadas do ponto p na equação geral da reta r, temos:

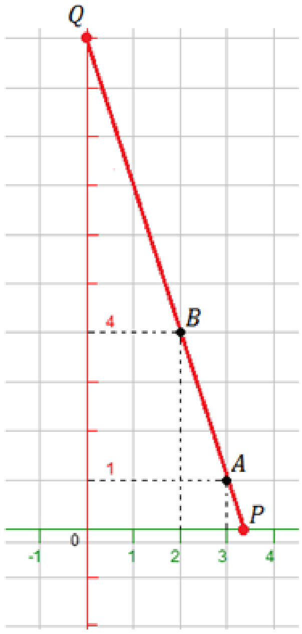
$$P = (p,0) \in r \Longrightarrow -3p - 0 + 10 = 0 \Longrightarrow p = \frac{10}{3}.$$

Analogamente, a reta r intercepta o eixo y no ponto $Q = (0,q)$. Substituindo as coordenadas do ponto Q em r, temos

$$Q = (0,q) \in r \Longrightarrow -3\cdot 0 - q + 10 \Longrightarrow q = 10.$$

Logo, a reta r intercepta o eixo x no ponto $P = \left(\frac{10}{3}, 0\right)$ e o eixo y no ponto $Q = (0,10)$, conforme a Figura 3.12.

Figura 3.12: Equação geral da reta - referente ao Exemplo 3.3.4.



Fonte: O autor.

3.3.2 Equação reduzida da reta

Dada a equação geral da reta r, definida por $ax + by + c = 0$, se tivermos $b \neq 0$, então:

$$\begin{aligned} by &= -ax - c \\ \Longrightarrow \quad y &= \left(-\frac{a}{b}\right)x + \left(-\frac{c}{b}\right). \end{aligned}$$

Substituindo

$$-\frac{a}{b} = m \text{ e } -\frac{c}{b} = n.$$

Então,

$$y = mx + n \tag{3.8}$$

Essa equação, que expressa y em função de x, é denominada de equação reduzida da reta, como veremos, m é coeficiente angular da reta r e n é o coeficiente linear, ou seja, é a medida do segmento que r define no eixo das ordenadas.

Exemplo 3.3.5. *Se uma reta r passa pelos pontos $A = (0, 3)$ e $B = (-1, 0)$ podemos calcule a sua equação geral e reduzida.*

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \underbrace{3x - y + 3 = 0}_{\text{Equação geral}} \Longrightarrow \underbrace{y = 3x + 3}_{\text{Equação reduzida}}.$$

Exemplo 3.3.6. *(Aeronáutica – 2015 - adaptado). A equação reduzida da reta que passa pelos pontos $A = (0, 1)$ e $B = (6, 8)$ é dada por:*

Determinando o coeficiente angular m:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{8-1}{6-0} = \frac{7}{6}.$$

Determinando o coeficiente linear n a partir do ponto A:

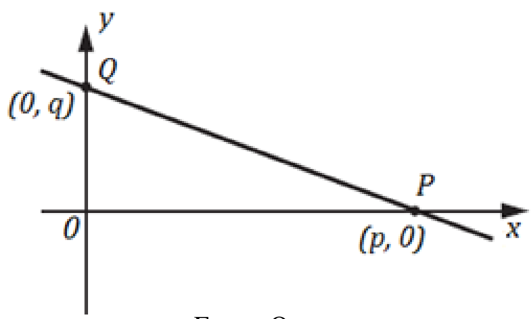
$$\begin{aligned} y &= m \cdot x + n \\ \Longrightarrow 1 &= \left(\frac{7}{6}\right) \cdot 0 + n \\ \Longrightarrow 1 &= 0 + n \\ \Longrightarrow n &= 1. \end{aligned}$$

A equação reduzida da reta será $y = \left(\dfrac{7}{6}\right)x + 1$.

3.3.3 Equação segmentária

Seja a reta r, de equação $ax + by + c = 0$, não paralela a nenhum dos eixos coordenados e que passe pelos pontos $Q = (0, q)$ e $P = (p, 0)$, conforme a Figura 3.13.

Figura 3.13: Equação segmentária da reta



Fonte: O autor.

Logo, a equação dessa reta é dada por:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & q & 1 \\ p & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad &\Longrightarrow \quad qx + py - pq = 0 \\ &\Longrightarrow \quad qx + py = pq \\ &\Longrightarrow \quad \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1. \end{aligned} \tag{3.9}$$

A equação (3.9) é denominada equação segmentária da reta.

Sendo que p e q são as medidas algébricas dos segmentos $\overline{OP}$ e $\overline{OQ}$. Perceba que se compararmos a equação geral da reta e a equação segmentária, temos:

$$ax + by + c = 0 \text{ e } \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1.$$

Concluímos,

$$p = -\frac{c}{a} \text{ e } q = -\frac{c}{b}.$$

Exemplo 3.3.7. *Determine a equação segmentária da reta r, conhecendo a sua equação geral $r: \;\; 3x - 4y + 12 = 0$.*

A equação segmentária pode ser obtida da equação geral de uma reta, observando-se que

$$\begin{cases} a = 3, & p = -\dfrac{c}{a} \qquad\quad \text{e} \quad q = -\dfrac{c}{b}. \\ b = -4, & p = -\dfrac{12}{3} = -4 \quad \text{e} \quad q = \dfrac{-12}{-4} = 3. \\ c = 12, & \end{cases}$$

Substituindo p e n na equação $\dfrac{x}{p} + \dfrac{y}{q} = 1$, obtemos $\dfrac{x}{-4} + \dfrac{y}{3} = 1$.

Exemplo 3.3.8. *Determine a equação segmentária da reta que passa pelos pontos $A = (-4, -3)$ e $B = (2, 6)$.*

Inicialmente obtemos a equação geral da reta

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -4 & -3 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow -9x + 6y - 18 = 0.$$

A seguir, procedemos como no Exemplo 3.3.7 ou, então, fazemos

$$-9x + 6y - 18 = 0 \Longrightarrow -9x + 6y = 18 \Longrightarrow -\frac{9x}{18} + \frac{6y}{18} = \frac{18}{18}.$$

Logo, $-\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 1$.

3.3.4 Equação paramétrica

Iremos apresentar agora, a forma paramétrica e mostrar como representar uma reta por meio delas.

Enquanto a equação geral $ax + by + c = 0$ se relaciona com as coordenadas x e y de um ponto qualquer da reta, as equações paramétricas não se relacionam diretamente com essas coordenadas, mas sim com um parâmetro t, que definiremos da seguinte forma:

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}.$$

Perceba que a partir das equações paramétricas, é possível encontrar a equação geral da reta, eliminando-se o parâmetro t.

Exemplo 3.3.9. *Seja a reta com equações paramétricas*

$$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t + 3 \end{cases}.$$

Obtenha a equação geral dessa reta.

A obtenção da equação geral dessa reta é feita eliminado-se o parâmetro t, assim

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t + 3 \end{cases} & \iff \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y - 3 = t \end{cases} \\ & \iff x = 2(y-3) - 1 \\ & \iff x - 2y + 7 = 0. \end{aligned}$$

Observação: Os pontos dessa reta podem ser obtidos atribuindo-se valores reais para o parâmetro t.

Exemplo 3.3.10. *Consideremos uma reta de equações paramétricas:*

$$\begin{cases} x = 4t \\ y = 3t + 1 \end{cases}.$$

Obtenha a equação geral dessa reta.

Para obter a equação geral dessa reta, basta isolar o parâmetro t numa das equações e substituí-lo na outra equação.

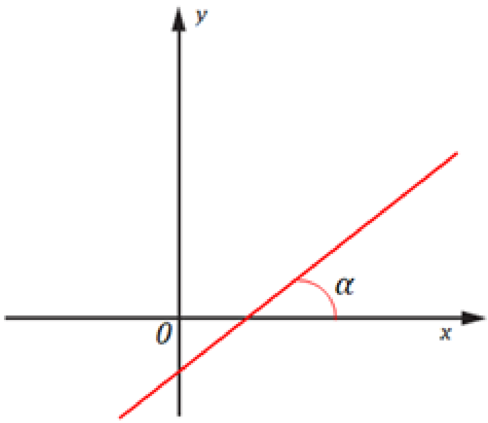
Assim, de $x = 4t$, tem-se $t = \dfrac{x}{4}$.

Substituindo em $y = 3t + 1$, vem a equação geral da reta $y = \dfrac{3x}{4} + 1$, ou, ainda, $3x - 4y + 4 = 0$.

3.4 Coeficiente angular ou declividade de uma reta

A cada reta no plano cartesiano associamos um número chamado *coeficiente angular*, também chamado de inclinação da reta, que é definido da seguinte forma, conforme apresentado na Figura 3.14, pelo ângulo α.

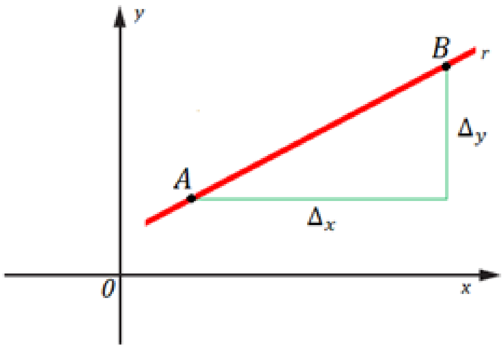
Figura 3.14: Coeficiente angular



Fonte: O autor.

Sejam r uma reta no plano cartesiano e, A, B pontos quaisquer que pertençam a r. Construiremos um triângulo retângulo, passando por esses dois pontos, com catetos paralelos aos eixos coordenados (como mostra a Figura 3.15).

Figura 3.15: Coeficiente angular da reta r passando por A e B.



Fonte: O autor.

O cateto vertical que é a diferença entre as ordenadas desses dois pontos, denotado por Δy e cateto horizontal a diferença entre as abcissas, denotado por Δx. Portanto, o coeficiente angular dessa reta é:

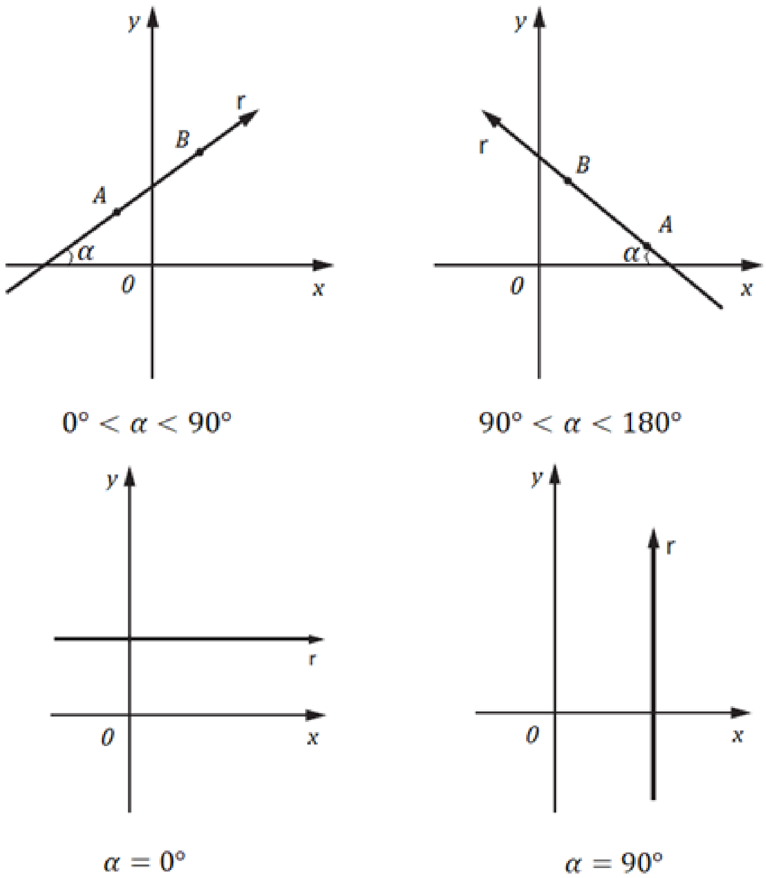
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \Longrightarrow m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

A razão $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ significa a tangente do ângulo que o eixo x forma com a reta. Logo podemos escrever:

$$m = \operatorname{tg} \alpha.$$

Vejamos agora as possibilidades para o ângulo α.

Figura 3.16: Coeficiente angular para diferentes valores de α.



Fonte: O autor.

Observações:

a) Perceba que o coeficiente angular de uma reta, quando calculado conhecendo-se dois de seus pontos, é dado por:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

b) Não se define coeficiente angular para retas verticais, pois:

$$x_B = x_A \Longleftrightarrow x_B - x_A = 0.$$

Que resultaria em um denominador nulo na fórmula do coeficiente angular.

c) No desenvolvimento da equação da geral da reta $ax + by + c = 0$, temos:

$$y_A - y_B = a \text{ e } x_A - x_B = b.$$

Logo,

$$m \;=\; \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = -\frac{a}{b}.$$

Dessa forma, o coeficiente angular da reta, sabendo que a equação geral é dada por $ax + by + c = 0$, pode ser obtida por:

$$m = -\frac{a}{b}.$$

Exemplo 3.4.1. *A medida α do ângulo indicado na Figura 3.17 é chamada de inclinação da reta, e é obtida girando-se o eixo x no sentido anti-horário em torno do ponto ($0^{\circ} \leq \alpha < 180^{\circ}$ ou $0 \leq \alpha < \pi$). Chamamos de coeficiente angular ou declividade de uma reta, não perpendicular ao eixo x, o número real m expresso pela tangente trigonométrica de sua inclinação, ou seja: $m = \operatorname{tg}\alpha$. Com esses dados apresentados anteriormente, podemos afirmar o coeficiente angular da reta r do gráfico a seguir é:*

a) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

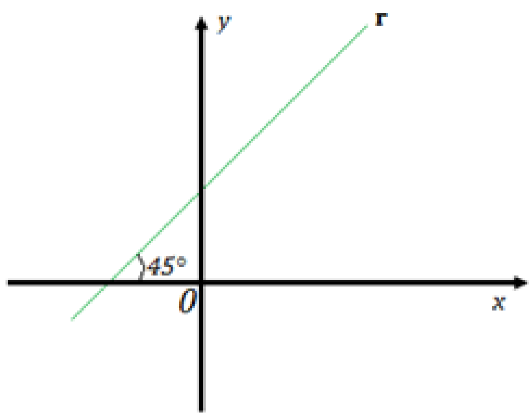
b) 1

c) $\sqrt{3}$

d) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

Figura 3.17: Representação do Exemplo 3.4.1



Fonte: O autor.

Sabemos que

$$m = \operatorname{tg}\alpha.$$

Logo,

$$m = \operatorname{tg} 45^{\circ} \Longrightarrow m = 1.$$

Exemplo 3.4.2. *Identifique o coeficiente angular de uma reta que contém os pontos $A = (1, -2)$ e $B = (-4, 1)$.*

Temos

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta y} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1 - (-2)}{-4 - 1} = \frac{3}{-5} = -\frac{3}{5}.$$

Exemplo 3.4.3. *Calcule o coeficiente angular da reta r que tem equação geral* $r:\ 3x - 4y + 3 = 0$.

Comparando a equação

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ 3x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

temos $a = 3$ e $b = -4$
Portanto,

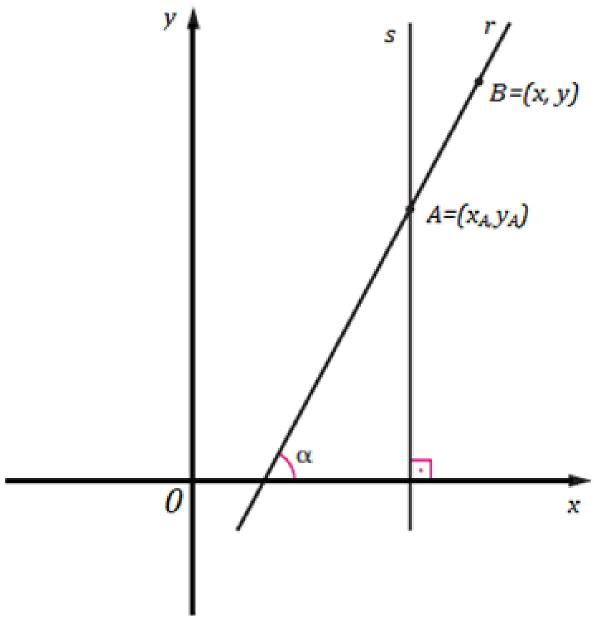
$$m = -\frac{a}{b} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}.$$

Logo, $m = \dfrac{3}{4}$.

3.5 Equação da reta que passa por um ponto dado e coeficiente angular *m*

Vimos anteriormente como obter a equação de uma reta conhecendo dois de seus pontos. Iremos agora, determinar a equação de uma reta r conhecendo um de seus pontos $A = (x_A, y_A)$ e seu coeficiente angular m, conforme a Figura 3.18.

Figura 3.18: Reta passando por um ponto com x_A diferente x_B.



Fonte: O autor.

Seja $B = (x, y)$, um ponto genérico da reta r, de tal forma que $A \neq B$. Logo,

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \Longrightarrow m = \frac{y - y_A}{x - x_A}.$$

Concluímos que:

$$y - y_A = m(x - x_A).$$

Perceba que essa reta s é perpendicular ao eixo das abscissas, portanto sua equação é dada por:

$$x = x_A.$$

Exemplo 3.5.1. *Obtenha a equação da reta r que passa pelo ponto $P = (-5, 3)$ e possui coeficiente angular $m = 3$.*

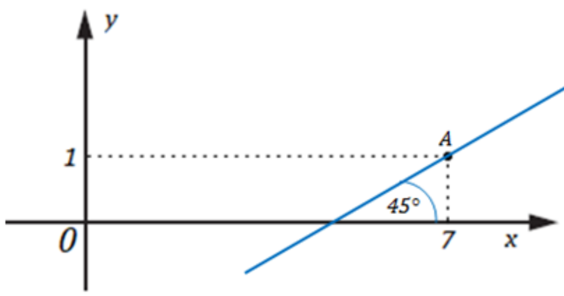
$$\begin{aligned} y - y_A = m(x - x_A) &\implies y - 3 = 3(x - (-5)) \\ &\implies y - 3 = 3x + 15. \end{aligned}$$

Logo,

$$y = 3x + 18 \text{ ou } 3x - y + 18 = 0.$$

Exemplo 3.5.2. *Observe a Figura 3.19 e obtenha a equação da reta r que passa pelo ponto A e tem inclinação $45°$.*

Figura 3.19: Reta passando por um ponto, representação do Exemplo 3.5.2



Fonte: O autor.

Solução: Para determinar a equação da reta r, é preciso encontrar o coeficiente angular m:

$$m = \operatorname{tg} \alpha \implies m = \operatorname{tg} 45° \implies m = 1.$$

A reta procurada tem coeficiente angular $m = 1$ e passa pelo ponto $A = (7, 1)$. Assim:

$$y - y_A = m(x - x_A) \implies y - 1 = 1 \cdot (x - 7) \implies x - y - 6 = 0.$$

Portanto, $x - y - 6 = 0$ é a equação geral da reta r.

Exemplo 3.5.3. *Determine a equação da reta r que intercepta o eixo y no ponto $P = (0, 1)$ e intercepta o eixo x segundo uma inclinação de $150°$.*

Como $m = \operatorname{tg} 150° = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ e $P = (0, 1)$ pertence à reta r, temos

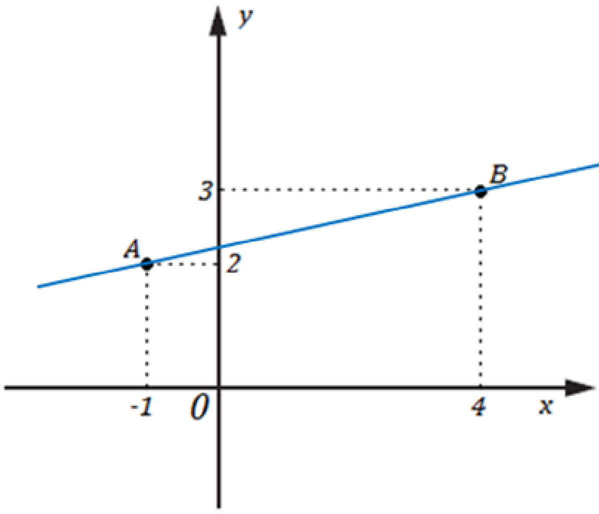
$$y - 1 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (x - 0) \implies \sqrt{3}x + 3y - 3 = 0.$$

Portanto, a equação da reta é:

$$\sqrt{3}x + 3y - 3 = 0.$$

Exemplo 3.5.4. *Determine a equação da reta r representada no plano cartesiano na Figura 3.20.*

Figura 3.20: Reta passando pelos pontos $A(-1,2)$ e $B(4,3)$.



Fonte: O autor.

Além do método da condição de alinhamento usando determinante, esse problema pode ser resolvido com o estudo do coeficiente angular da reta.

Considerando que as coordenadas dos pontos A e B são, respectivamente, $(-1,2)$ e $(4,3)$, vamos calcular o coeficiente angular da reta determinada por A e B:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-2}{4-(-1)} = \frac{1}{5}.$$

A reta procurada tem coeficiente angular $m = \dfrac{1}{5}$ e passa pelo ponto $B(4,3)$. Assim,

$$y - 3 = \frac{1}{5}(x-4) \Longrightarrow 5y - 15 = x - 4 \Longrightarrow x - 5y + 11 = 0.$$

Portanto, $x - 5y + 11 = 0$ é a equação geral da reta r.

Exemplo 3.5.5. *Sabendo que a inclinação da reta que passa pelos pontos $A = (k,2)$ e $B = (-1,3)$ é $45°$, determine o valor de k e a equação dessa reta.*

O coeficiente angular é

$$m = \operatorname{tg} 45° \Longrightarrow m = 1.$$

Portanto,

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Longrightarrow 1 = \frac{3-2}{-1-k} \Longrightarrow k = -2.$$

A reta tem coeficiente angular $m = 1$ e passa por $A = (-2, 2)$.
Assim,

$$y - 2 = 1(x + 2) \Longrightarrow x - y + 4 = 0.$$

Portanto, $x - y + 4 = 0$ é a equação geral da reta que passa pelos pontos A e B.

Exemplo 3.5.6. *Um laboratório estudou uma colônia de bactérias composta por* 350 *indivíduos vivos. Verificou-se que, após a aplicação de certa droga, o número de indivíduos na colônia diminuía com o tempo, sendo que, após* 25 *horas, não havia mais nenhum indivíduo vivo na colônia. Supondo que o número* y *de indivíduos vivos varie linearmente com o tempo* x *de vida, contando a partir da administração da droga, pede-se:*

a) *determine a expressão que relaciona* y *a* x*;*

b) *o número de indivíduos que permaneciam vivos após* 10 *horas do início do experimento.*

a) Vamos considerar o par (x, y) para identificar que, após x horas, havia y indivíduos vivos na colônia. Assim, temos pontos com os seguintes significados:

- $A = (0, 350)$: estado inicial da colônia (no tempo 0 h, havia 350 indivíduos.)
- $B = (25, 0)$: estado final da colônia (no tempo 25 h, havia 0 individuo). Com a relação é linear, seu gráfico é um conjunto de pontos pertencentes à reta que passa pelos pontos A e B.

O coeficiente angular m da reta $\overleftrightarrow{AB}$ é

$$m = \frac{0 - 350}{25 - 0} = -14.$$

A reta tem coeficiente angular $m = -14$ e passa por $B(25, 0)$. Assim:

$$y - 0 = -14(x - 25) \Longrightarrow y = -14x + 350.$$

b) Para obter o número de indivíduos vivos após 10 horas do início do experimento, basta substituir x por 10 na igualdade $y = -14x + 350$.

Assim:

$$y = -14 \cdot 10 + 350 = 210.$$

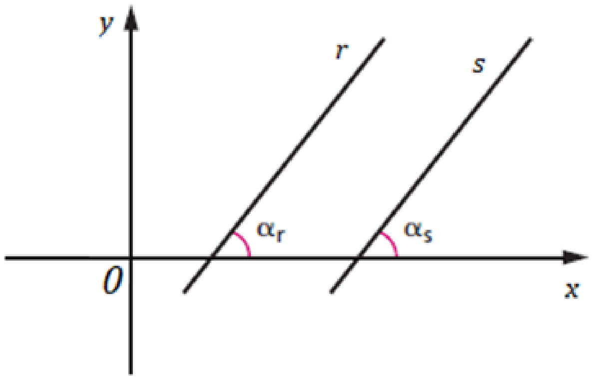
Portanto, após 10 horas, havia 210 indivíduos vivos na colônia de bactérias.

3.6 Posição relativa entre duas retas

3.6.1 Paralelismo

Duas retas r e s do plano cartesiano, não verticais, são ditas paralelas distintas se, e somente se, seus coeficientes angulares são iguais $m_r = m_s$, conforme a Figura 3.21.

Figura 3.21: Retas paralelas



Fonte: O autor.

Perceba que:

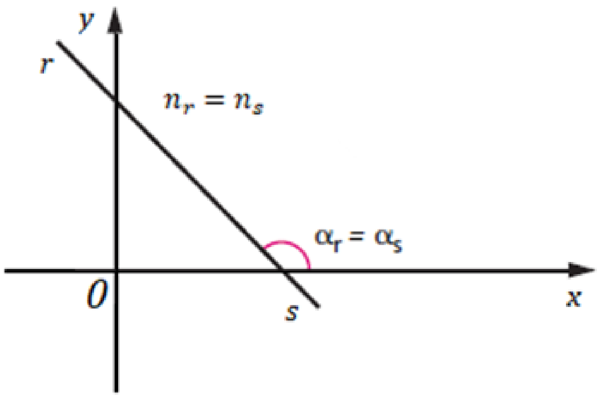
$$\alpha_r = \alpha_s \Longrightarrow \operatorname{tg}(\alpha_r) = \operatorname{tg}(\alpha_s) \Longrightarrow m_r = m_s.$$

Logo,

$$r//s \Longleftrightarrow m_r = m_s.$$

Por outro lado, duas retas r e s do plano cartesiano, não verticais, são ditas paralelas coincidentes se, e somente se, seus coeficientes angulares são iguais $m_r = m_s$ e seus coeficientes lineares também são iguais $n_r = n_s$, conforme a Figura 3.22.

Figura 3.22: Retas paralelas coincidentes



Fonte: O autor.

Exemplo 3.6.1. *Determine a equação geral da reta s sabendo que o ponto $A = (1, 3)$ pertence* *a ela e que é paralela a reta* $r: 5x + 2y + 1 = 0$.

Se s é paralela a r, então $m_r = m_s$.

$$m_s = m_r = -\frac{a}{b} = -\frac{5}{2}.$$

Conhecendo $m_s = -\dfrac{5}{2}$ e $A = (1, 3)$, basta substituir na fórmula

$$\begin{aligned} y_{-}y_A = m_s(x - x_A) \quad &\Longrightarrow \quad y - 3 = -\frac{5}{2}(x - 1) \\ &\Longrightarrow \quad y - 3 = -\frac{5}{2}x + \frac{5}{2} \\ &\Longrightarrow \quad \frac{5}{2}x + y - \frac{11}{2} = 0 \\ &\Longrightarrow \quad 5x + 2y - 11 = 0. \end{aligned}$$

Exemplo 3.6.2. *Determine o valor de* k *e* w *para os quais as retas* $r:\ 2x - 3y + 1 = 0$ *e* $s:\ (k-1)x - 3y + w = 0$ *sejam coincidentes.*

Inicialmente vamos determinar m e n de cada reta.

$$\text{reta } r: m_r = -\frac{2}{-3} \text{ e } n_r = -\frac{1}{-3} \qquad \text{reta } s: m_s = -\frac{k-1}{-3} \text{ e } n_s = -\frac{w}{-3}.$$

Para que as retas sejam coincidentes devemos ter:

$$m_r = m_s \Longrightarrow \frac{2}{3} = \frac{k-1}{3} \Longrightarrow k = 3.$$

$$n_r = n_s \Longrightarrow \frac{1}{3} = \frac{w}{3} \Longrightarrow w = 1.$$

Exemplo 3.6.3. *Determine a posição relativa da reta* r*, de equação* $x + 2y - 6 = 0$*, em relação à reta* s*, de equação* $3x + 6y - 5 = 0$.

Primeiro vamos determinar os coeficientes angular e linear de r e s usando as equações na forma reduzida.

Para a reta r, temos

$$x + 2y - 6 = 0 \Longrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 3.$$

Portanto,

$$m_r = -\frac{1}{2} \text{ e } n_r = 3.$$

Para a reta s, temos

$$3x + 6y - 5 = 0 \Longrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{6}.$$

Portanto,

$$m_r = -\frac{1}{2} \text{ e } n_r = \frac{5}{6}.$$

Como $m_r = m_s = -\dfrac{1}{2}$ e $n_r \neq n_s$, então as retas r e s são paralelas distintas.

Exemplo 3.6.4. *Calcule o valor de k para que as retas r e s, não verticais, de equações, $(k+1)x + y + 1 = 0$ e $-(k^2-2)x + 2y - 3 = 0$, respectivamente, sejam paralelas.*

Inicialmente, vamos obter a equação reduzida das retas r e s e seus respectivos coeficientes angulares.

Reta r:

$$(k+1)x + y + 1 = 0 \Longrightarrow y = -(k+1)x - 1.$$

Portanto,

$$m_r = -(k+1).$$

Reta s:

$$-(k^2-2)x + 2y - 3 = 0 \Longrightarrow y = \frac{-(k^2-2)x}{2} + \frac{3}{2}.$$

Portanto,

$$m_s = \frac{k^2-2}{2}.$$

Para que as retas r e s sejam paralelas, é necessário que os coeficientes angulares de ambas sejam iguais. Assim:

$$\begin{aligned} m_r = m_s &\Longrightarrow -(k+1) = \frac{k^2-2}{2} \\ &\Longrightarrow -2k-2 = k^2-2 \\ &\Longrightarrow k^2+2k = 0. \end{aligned}$$

Resolvendo a última igualdade, temos:

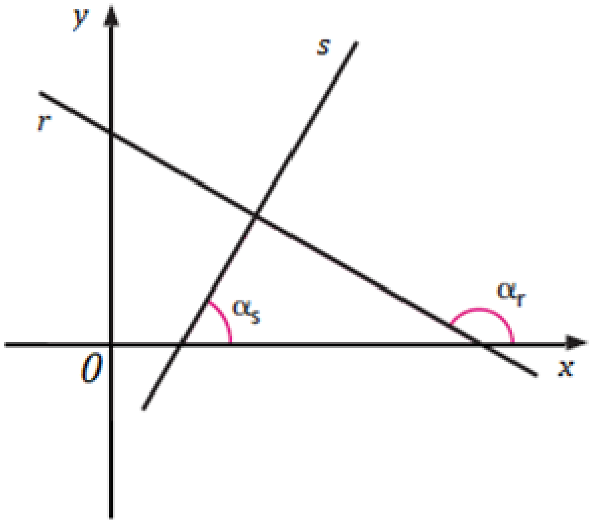
$$k^2 + 2k = 0 \Longrightarrow k = 0 \text{ ou } k = -2.$$

Portanto, as retas r e s são paralelas quando $k = 0$ ou $k = -2$.

3.6.2 Retas perpendiculares

Duas retas r e s do plano cartesiano, não verticais, são ditas concorrentes, quando elas apresentam coeficientes angulares diferentes $m_r \neq m_s$, conforme a Figura 3.23.

Figura 3.23: Retas concorrentes



Fonte: O autor.

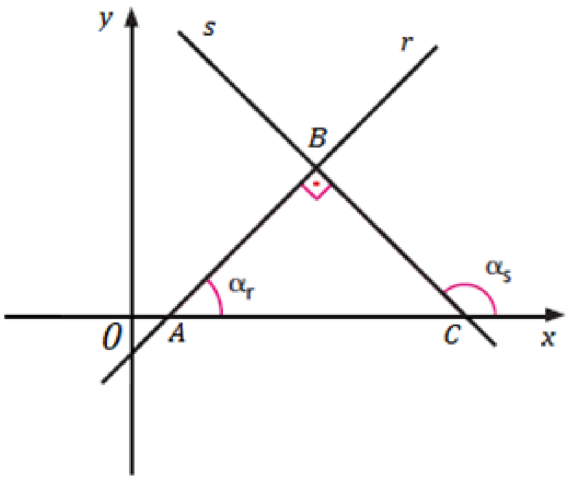
$$\alpha_r \neq \alpha_s \Longrightarrow \operatorname{tg}(\alpha_r) \neq \operatorname{tg}(\alpha_s) \Longrightarrow m_r \neq m_s.$$

Logo,

$$r \nparallel s \Longleftrightarrow m_r \neq m_s.$$

Duas retas r e s do plano cartesiano, não verticais, são ditas perpendiculares entre si se, e somente se, o produto de seus coeficientes angulares é -1, $m_s \cdot m_r = -1$, conforme a Figura 3.24.

Figura 3.24: Retas concorrentes perpendiculares



Fonte: O autor.

Demonstração: 1ª parte:

$$r \perp s \Longrightarrow m_r \cdot m_s = -1.$$

No triângulo ABC retângulo em B, temos:

$$\begin{aligned} & \alpha_s = 90^\circ + \alpha_r \\ \implies\ & \operatorname{tg}(\alpha_s) = \operatorname{tg}(90^\circ + \alpha_r) \\ \implies\ & \operatorname{tg}(\alpha_s) = -\operatorname{cotg}(\alpha_r) \\ \implies\ & \operatorname{tg}(\alpha_s) = -\frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha_r)}. \end{aligned}$$

Logo,

$$m_s = -\frac{1}{m_r} \text{ ou } m_s \cdot m_r = -1.$$

2ª parte:

$$m_r \cdot m_s = -1 \implies r \perp s.$$

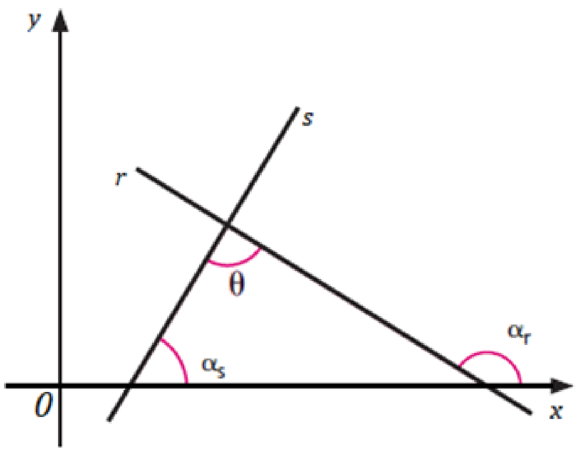
Partindo agora da hipótese de que $m_s \cdot m_r = -1$, temos:

$$m_s = -\frac{1}{m_r}.$$

Ou seja, $m_r \neq m_s$, portanto as retas r e s são concorrentes e formam um ângulo θ tal que, conforme a Figura 3.25:

$$\alpha_r = \theta + \alpha_s. \tag{3.10}$$

Figura 3.25: Retas concorrentes perpendiculares - recíproca



Fonte: O autor.

Temos ainda que:

$$
\begin{aligned}
m_r = -\frac{1}{m_s} \quad &\Longrightarrow \quad \operatorname{tg}(\alpha_r) = -\frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha_s)} \\
&\Longrightarrow \quad \operatorname{tg}(\alpha_r) = -\operatorname{cotg}(\alpha_s) \\
&\Longrightarrow \quad \operatorname{tg}(\alpha_r) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_s\right) \\
&\Longrightarrow \quad \alpha_r = \frac{\pi}{2} + \alpha_s. \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

De (3.10) e (3.11), temos:

$$\theta = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow r \perp s.$$

$$r \perp s \Longleftrightarrow m_r \cdot m_s = -1.$$

Exemplo 3.6.5. *Verifique se as retas r e s, de equações $2x + 3y - 6 = 0$ e $3x - 2y + 1 = 0$ são perpendiculares.*

Reta r: $2x + 3y - 6 = 0 \Longrightarrow y = -\frac{2}{3} + 2 \Longrightarrow m_r = -\frac{2}{3}$.
Reta s: $3x - 2y + 1 = 0 \Longrightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \Longrightarrow m_s = \frac{3}{2}$.
Como $-\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = -1$, sabemos que $m_r \cdot m_s = -1$, portanto $r \perp s$.

Exemplo 3.6.6. *Escreva a equação reduzida da reta r que passa pelo ponto $P = (-2, 1)$ e é perpendicular à reta s de equação $2x + y - 2 = 0$.*

Para que as retas r e s sejam perpendiculares, é necessário que o produto de seus coeficientes angulares seja igual a -1.

Como o coeficiente angular da reta s é -2, temos

$$m_s \cdot m_r = -1 \Longrightarrow (-2) \cdot m_r = -1 \Longrightarrow m_r = -\frac{1}{2}.$$

O ponto P pertence à reta r, então:

$$y_p = m_r \cdot x_P + n_r \Longrightarrow 1 = \frac{1}{2} \cdot (-2) + n_r \Longrightarrow n_r = 2.$$

Logo, a equação da reta r, perpendicular à reta s, é $y = \frac{1}{2}x + 2$.

Exemplo 3.6.7. *Determine a equação reduzida da mediatriz[1] r do segmento $\overline{AB}$, de extremidades $A = (1, 3)$ e $B = (-5, -1)$, representado na Figura 3.26.*

Vamos determinar as coordenadas do ponto médio M do segmento $\overline{AB}$:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1 + (-5)}{2} = -2 \text{ e } y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3 + (-1)}{2} = 1.$$

[1] A mediatriz de um segmento é a reta perpendicular a esse segmento e que passa por seu ponto médio.

O ponto médio é $M = (-2, 1)$.
O coeficiente angular da reta suporte do segmento $\overline{AB}$ é dado por

$$m_{\overline{AB}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1-3}{-5-1} = \frac{2}{3}.$$

O coeficiente angular da reta mediatriz r é dado por:

$$m_{\overline{AB}} \cdot m_r = -1 \Longrightarrow \frac{2}{3} \cdot m_r = -1 \Longrightarrow m_r = -\frac{3}{2}.$$

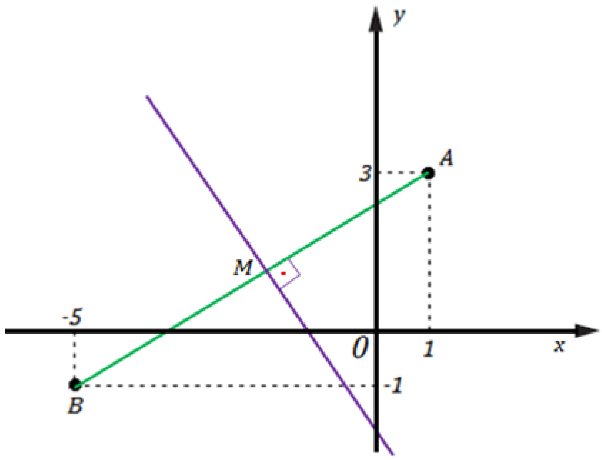
Como o ponto médio M de $\overline{AB}$ pertence à mediatriz r, temos:

$$y = m_r \cdot x + n_r \Longrightarrow 1 = -\frac{3}{2} \cdot (-2) + n_r \Longrightarrow n_r = -2.$$

Portanto, a equação da reta r mediatriz de $\overline{AB}$ é:

$$y = -\frac{3}{2}x - 2.$$

Figura 3.26: Retas concorrentes perpendiculares, referente ao Exemplo 3.6.7



Fonte: O autor.

Exemplo 3.6.8. *Obtenha as coordenadas do baricentro G de um triângulo qualquer sabendo que as retas suportes de duas de suas medianas são dadas por $x - 6y + 8 = 0$ e $3x - 2y + 8 = 0$.*

Assim, as coordenadas do baricentro G serão determinadas pela solução do sistema:

$$\begin{cases} x - 6y + 8 = 0 \\ 3x - 2y + 8 = 0 \end{cases}$$

Isolando x na primeira equação:

$$x = 6y - 8 \tag{3.12}$$

Substituindo x por $6y - 8$ na segunda equação, temos

$$3(6y-8) - 2y + 8 = 0 \Longrightarrow 16y - 16 = 0 \Longrightarrow y = 1.$$

Substituindo y por 1 na equação (3.12), obtemos

$$x = 6 \cdot 1 - 8 = -2.$$

Então $G = (-2, 1)$.

3.7 Interseção entre duas retas

Todo ponto de interseção entre duas retas tem que obrigatoriamente satisfazer as equações de ambas as retas. Portanto, seja (S) o sistema formado com as duas equações gerais das retas r e s, definido da seguinte forma:

$$(S)\begin{cases} r: \ a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ s: \ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

O sistema formado com essas equações, terá como solução um par ordenado (x_0, y_0) que representa o ponto de interseção entre as retas r e s.

Exemplo 3.7.1. *Determine o ponto de interseção entre duas retas concorrentes cujas equações são $y = x + 1$ e $y = 2 - x$.*

Para resolver esse problema, podemos construir um sistema linear com essas duas equações ou considerar que, se ambas são iguais a y, então podemos igualar o segundo membro da primeira equação ao segundo membro da segunda equação. Observe:

$$\begin{aligned} & y = y \\ \Longrightarrow \quad & x + 1 = 2 - x \\ \Longrightarrow \quad & x + x = 2 - 1 \\ \Longrightarrow \quad & 2x = 1 \\ \Longrightarrow \quad & x = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Para encontrar o valor de y, basta substituir o valor encontrado para x em uma das duas equações:

$$\begin{aligned} & y = x + 1 \\ \Longrightarrow \quad & y = \frac{1}{2} + 1 \\ \Longrightarrow \quad & y = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

O ponto de interseção entre as duas retas, ou seja, o ponto de interseção entre elas é: $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Exemplo 3.7.2. *Sejam x e y as coordenadas do ponto de interseção entre as retas de equações $-2x + y = -1$ e $x + y = 2$, determine a soma entre x e y.*

Para encontrar as coordenadas do ponto de interseção entre duas retas, pode-se usar o sistema formado pelas equações dessas retas ou igualar suas equações quando uma incógnita está isolada. Utilizaremos a segunda alternativa, isolando antes a incógnita y em cada uma das equações.

$$\begin{aligned} & -2x + y = -1 \\ \Longrightarrow \quad & y = 2x - 1 \\ \Longrightarrow \quad & x + y = 2 \\ \Longrightarrow \quad & y = 2 - x. \end{aligned}$$

Igualando as duas equações, teremos:

$$\begin{aligned} & y = y \\ \Longrightarrow \quad & 2x - 1 = 2 - x \\ \Longrightarrow \quad & 2x + x = 2 + 1 \\ \Longrightarrow \quad & 3x = 3 \\ \Longrightarrow \quad & x = \frac{3}{3} \\ \Longrightarrow \quad & x = 1. \end{aligned}$$

Substituindo o valor de x em qualquer uma das equações, teremos:

$$\begin{aligned} & y = 2 - x \\ \Longrightarrow \quad & y = 2 - 1 \\ \Longrightarrow \quad & y = 1. \end{aligned}$$

A soma dos coeficientes é:

$$x + y = 1 + 1 = 2.$$

Exemplo 3.7.3. *Calcule a distância do ponto de interseção das retas de equações $-x+2y=2$ e $x+y=2$ e a origem do plano cartesiano.*

Para resolver essa questão, o primeiro passo é determinar o ponto de interseção entre as duas retas, para, em seguida, encontrar a distância entre esse ponto e a origem do plano cartesiano. Nesse caso, observe que será mais fácil isolar a incógnita x do que a incógnita y. Assim, teremos:

$$\begin{aligned} & -x = 2-2y \\ \implies & x = -2+2y \\ \implies & x+y=2 \\ \implies & x = 2-y \\ \implies & y = y \\ \implies & -2+2y = 2-y \\ \implies & 2y+y = 2+2 \\ \implies & 3y = 4 \\ \implies & y = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Substituindo esse valor em uma das equações:

$$\begin{aligned} & x = 2-y \\ \implies & x = 2-\frac{4}{3} \\ \implies & x = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

A distância entre o ponto $\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$ e a origem $(0,0)$ será:

$$\begin{aligned} & d^2 = \left(\frac{2}{3}-0\right)^2 + \left(\frac{4}{3}-0\right)^2 \\ \implies & d^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 \\ \implies & d^2 = \frac{4}{9}+\frac{16}{9} \\ \implies & d^2 = \frac{20}{9} \\ \implies & d = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{9}} \\ \implies & d = \frac{2\sqrt{5}}{3}. \end{aligned}$$

Exemplo 3.7.4. *Determine o produto entre as coordenadas do ponto de interseção entre as retas $x + y = -1$ e $-x + 2y = -5$?*

Primeiramente, encontre o ponto de interseção entre as duas retas. Para tanto, isolaremos a incógnita x em ambas as equações.

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ -x + 2y = -5 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -1 - y \\ x = 2y + 5 \end{cases}$$

Igualando as equações obtidas, temos

$$\begin{aligned} 2y + 5 = -1 - y &\implies 2y + y = -1 - 5 \\ &\implies 3y = -6 \\ &\implies y = -2. \end{aligned}$$

Substituindo $y = -2$ na equação $x = 2y + 5$, temos

$$\begin{aligned} x = 2y + 5 &\implies x = 2 \cdot (-2) + 5 \\ &\implies x = -4 + 5 \\ &\implies x = 1. \end{aligned}$$

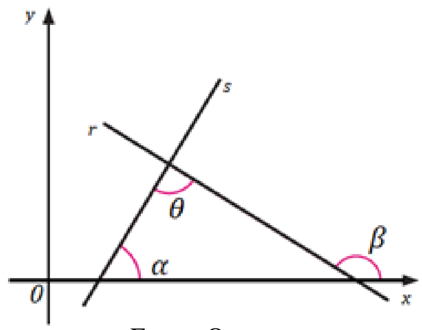
O produto entre as coordenadas do ponto é:

$$1 \cdot (-2) = -2.$$

3.8 Ângulo entre duas retas

Seja θ um ângulo agudo formado por duas retas concorrentes, r e s, de coeficientes angulares m_r e m_s, respectivamente. Admita agora que nenhuma das retas citadas sejam perpendiculares ao eixo das abscissas, como mostra a Figura 3.27.

Figura 3.27: Ângulo entre duas retas



Fonte: O autor.

1º caso: Nenhuma das retas é vertical. Perceba que nesse caso $\beta > \alpha$ e $\beta = \alpha + \theta$. Assim:

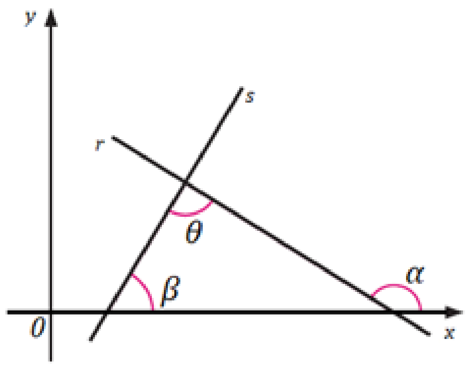
$$\begin{aligned} & \theta = \beta - \alpha \\ \Longrightarrow \quad & \operatorname{tg}(\theta) = \operatorname{tg}(\beta - \alpha) \\ \Longrightarrow \quad & \operatorname{tg}(\theta) = \frac{\operatorname{tg}(\beta) - \operatorname{tg}(\alpha)}{1 + \operatorname{tg}(\beta) \cdot \operatorname{tg}(\alpha)} \\ \Longrightarrow \quad & \operatorname{tg}(\theta) = \frac{m_s - m_r}{1 + m_s \cdot m_r}. \end{aligned}$$

Assim, θ é agudo e $\operatorname{tg}(\theta) > \theta$.

De modo análogo, se $\alpha > \beta$ (como mostra a Figura 3.28). Encontraríamos $\operatorname{tg}(\theta) = \dfrac{m_s - m_r}{1 + m_s \cdot m_r}$, pois θ é agudo e $\operatorname{tg}(\theta) > \theta$. Portanto, em qualquer situação, temos:

$$\operatorname{tg}(\theta) = \left| \frac{m_s - m_r}{1 + m_s \cdot m_r} \right|.$$

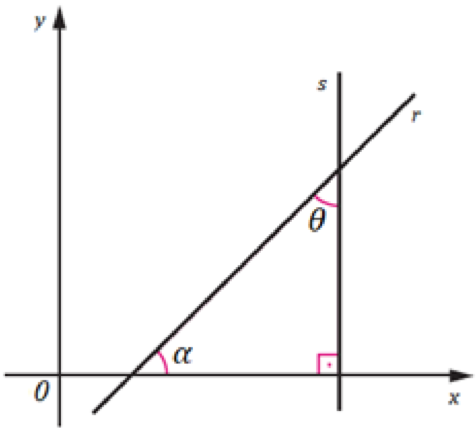
Figura 3.28: Ângulo entre duas retas, em que $\alpha > \beta$.



Fonte: O autor.

2º caso: Uma das retas é vertical, conforme a Figura 3.29.

Figura 3.29: Ângulo entre duas retas, uma delas vertical

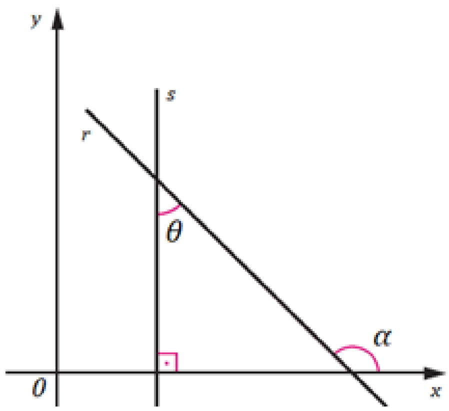


Fonte: O autor.

$$\begin{aligned} & \alpha + \theta = 90° \\ \Longrightarrow \quad & \theta = 90° - \alpha \\ \Longrightarrow \quad & \operatorname{tg}(\theta) = \operatorname{tg}(90° - \alpha) \\ \Longrightarrow \quad & \operatorname{tg}(\theta) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha)} \\ \Longrightarrow \quad & \operatorname{tg}(\theta) = \frac{1}{m_r}. \end{aligned}$$

O coeficiente angular é negativo quando $90° < \alpha < 180°$. De modo análogo, se α fosse ângulo externo (como mostra a Figura 3.30), encontraríamos:

Figura 3.30: Ângulo entre duas retas - parte II



Fonte: O autor.

$$\operatorname{tg}(\theta) = -\frac{1}{m_r}.$$

Portanto, em qualquer situação, temos:

$$\operatorname{tg}(\theta) = \left|\frac{1}{m_r}\right|.$$

Exemplo 3.8.1. *Calcule o ângulo agudo formado pelas retas* $r : 3x - y + 5 = 0$ *e* $s : 2x + y + 3 = 0$.

$$\operatorname{tg}\theta = \left|\frac{m_s - m_r}{1 + m_r \cdot m_s}\right| = \left|\frac{3 - (-2)}{1 + 3 \cdot (-2)}\right| = \left|\frac{5}{-5}\right| = 1 \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}.$$

Exemplo 3.8.2. *Calcule o ângulo formado pelas retas cujas equações são* $r : 2x + 3y - 1 = 0$ *e* $s : 6x - 4y + 5 = 0$.

$$m_r = -\frac{2}{3} \text{ e } m_s = \frac{3}{2} \Longrightarrow m_r \cdot m_s = -1 \Longrightarrow r \perp s \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}.$$

Exemplo 3.8.3. *Calcule o ângulo agudo formado pelas retas* $r : 4x + 2y - 1 = 0$ *e* $s : 3x - 4 = 0$.

$$\left.\begin{array}{r} m_r = -\dfrac{4}{2} = -2 \\ \nexists m_s \text{ para } m_r = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \operatorname{tg}\theta = \left|\frac{1}{m_r}\right| = \left|\frac{1}{-2}\right| = \frac{1}{2} \Longrightarrow \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right).$$

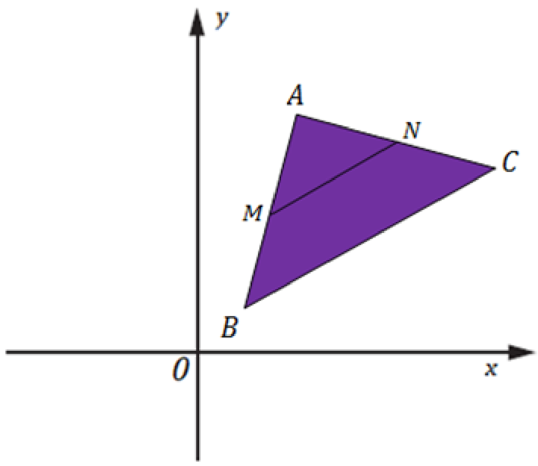
Exemplo 3.8.4. *Calcule o ângulo formado pelas retas $r : 5x + 2y = 0$ e $s : 10x + 4y - 7 = 0$.*

$$\left.\begin{array}{l} m_r = -\dfrac{5}{2} \\ m_2 = -\dfrac{10}{4} = -\dfrac{5}{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow m_r = m_s \Longrightarrow r//s \Longrightarrow \theta = 0.$$

3.9 Base média de um triângulo

Teorema 3.9.1. *Dado um triângulo ABC, onde M e N são respectivamente os pontos médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, o segmento $\overline{MN}$ é paralelo ao lado $\overline{BC}$, e sua medida é igual a metade da medida de $\overline{BC}$, conforme a Figura 3.31.*

Figura 3.31: Base média do triângulo ABC



Fonte: O autor.

Demonstração: Sejam M e N, respectivamente, os pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$.
Vamos mostrar que $\overline{MN}//\overline{BC}$ e $MN = \dfrac{BC}{2}$.
1ª parte: mostrar que $\overline{MN}//\overline{BC}$.
O coeficiente angular da reta suporte do lado $\overline{BC}$ pode ser calculado por:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B}. \tag{3.13}$$

Como M é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$, temos que

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{3} \text{ e } y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Analogamente, o ponto médio de $\overline{AC}$, temos

$$x_N = \frac{x_A + x_C}{2} \text{ e } y_N = \frac{y_A + y_C}{2}.$$

O coeficiente angular da reta que passa por M e N é:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{y_M - y_N}{x_M - x_N} \\
&= \frac{\left(\dfrac{y_A + y_B}{2}\right) - \left(\dfrac{y_A + y_C}{2}\right)}{\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}\right) - \left(\dfrac{x_A + x_C}{2}\right)} \\
&= \frac{\left(\dfrac{y_B - y_C}{2}\right)}{\left(\dfrac{x_B - x_C}{2}\right)} \\
&= \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} \\
&= \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B}. \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

De (3.13) e (3.14), concluímos que as retas suportes dos segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{MN}$ são paralelas.

2ª parte: mostrar que $MN = \dfrac{BC}{2}$.

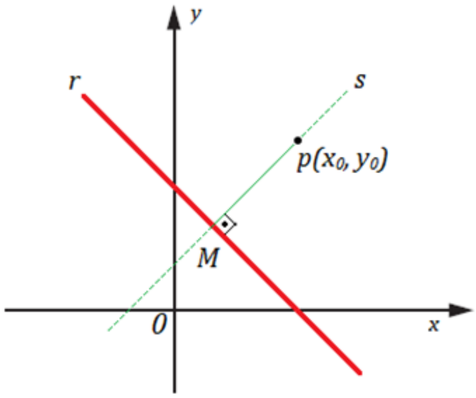
$$\begin{aligned}
BC = d_{BC} &= \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} \\
MN = d_{MN} &= \sqrt{\left[\left(\frac{x_A + x_B}{2}\right) - \left(\frac{x_A + x_C}{2}\right)\right]^2 + \left[\left(\frac{y_A + y_B}{2}\right) - \left(\frac{y_A + y_C}{2}\right)\right]^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{x_B - x_C}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_B - y_C}{2}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2}{4}} \\
&= \frac{\sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2}}{2} \\
&= \frac{d_{BC}}{2}.
\end{aligned}$$

3.10 Distância de um ponto a uma reta

Seja a reta r dada por $ax + by + c = 0$ e um ponto qualquer $P = (x_0, y_0)$, que não pertença à reta, conforme a Figura 3.32. Então a distância do ponto P à reta r, é dada por:

$$d_{P,r} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Figura 3.32: Distância entre ponto e reta



Fonte: O autor.

Demonstração: Seja a reta r de equação $ax + by + c = 0$, então $m_r = -\dfrac{a}{b}$ (coeficiente angular da reta r).

A reta s que passa pelo ponto $P = (x_0, y_0)$ e é perpendicular a r, tem $m_s = \dfrac{b}{a}$ e equação:

$$y - y_0 = \frac{b}{a} \cdot (x - x_0) \iff bx - ay + ay_0 - bx_0 = 0.$$

O ponto M, de interseção entre r e s, é determinado pelo sistema

$$\begin{cases} bx - ay + ay_0 - bx_0 = 0 \\ ax + by + c = 0 \end{cases},$$

cuja solução resulta:

$$M\left(\frac{b^2x_0 - aby_0 - ac}{a^2 + b^2}, \frac{a^2y_0 - abx_0 - bc}{a^2 + b^2}\right).$$

Calculando a distância entre o ponto M e o ponto $P = (x_0, y_0)$, obtemos

$$\begin{aligned} d_{MP} = d_{P,r} &= \sqrt{\left(\frac{b^2x_0 - aby_0 - ac}{a^2+b} - x_0\right)^2 - \left(\frac{a^2y_0 - abx_0 - bc}{a^2+b^2} - y_0\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{(ax_0+by_0+c)^2}{a^2+b^2}}. \end{aligned}$$

Finalmente:

$$d_{P,r} = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{3.15}$$

Exemplo 3.10.1. *Calcule a distância entre o ponto $P = (2, 1)$ e a reta $r :\ 3x + 4y + 7 = 0$.*

Basta consideramos $a = 3$, $b = 4$, $c = 7$, $x_0 = 2$, $y_0 = 1$ e substituir em (3.15).

$$\begin{aligned} d_{P,r} &= \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ &= \frac{|3\cdot 2 + 4\cdot 1 + 7|}{\sqrt{3^2+4^2}} \\ &= \frac{|6+4+7|}{\sqrt{25}} \\ &= \frac{17}{5}. \end{aligned}$$

Exemplo 3.10.2. *Considerando que a distância entre ponto $P = (k, 4)$ e a reta r, de equação $6x + 8y - 80 = 0$, é igual a 6 unidades, calcule o valor da coordenada k.*

$x = k, y = 4, a = 6, b = 8$ e $c = -80$.

$$\begin{aligned} d = \frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} &\implies 6 = \frac{|6\cdot k + 8\cdot 4 - 80|}{\sqrt{6^2+8^2}} \\ &\implies 6 = \frac{|6k-48|}{\sqrt{100}} \\ &\implies 6 = \frac{|6k-48|}{10} \\ &\implies |6k-48| = 60. \end{aligned}$$

Desse modo:

$$\begin{aligned} 6k - 48 = 60 &\implies 6k = 60 + 48 \\ &\implies 6k = 108 \\ &\implies k = \frac{108}{6} \\ &\implies k = 18, \end{aligned}$$

ou,

$$\begin{aligned} 6k - 48 = -60 &\Longrightarrow 6k = -60 + 48 \\ &\Longrightarrow 6k = -12 \\ &\Longrightarrow k = \frac{-12}{6} \\ &\Longrightarrow k = -2. \end{aligned}$$

O valor de k deve ser igual a -2 ou 18.

Exemplo 3.10.3. *Calcule a altura do triângulo ABC, relativa ao vértice A. São dados $A = (6,5)$, $B = (0,3)$ e $C = (4,0)$.*

Inicialmente vamos determinar a equação da reta r, suporte do lado $\overleftrightarrow{BC}$ do triângulo.

$$D = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3x + 4y - 12 \Longrightarrow r:\ 3x + 4y - 12 = 0.$$

A distância d, entre o vértice $A = (6,5)$ e a reta r, é dada por:

$$\begin{aligned} d &= \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{|3 \cdot 6 + 4 \cdot 5 - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \\ &= \frac{|18 + 20 - 12|}{\sqrt{25}} \\ &= \frac{26}{5} \end{aligned}$$

Exemplo 3.10.4. *Calcule a distância entre as retas paralelas r e s, de equações $2x - y + 4 = 0$ e $2x - y - 7 = 0$, respectivamente.*

Sabemos que a distância entre duas retas paralelas é igual à distância de um ponto P qualquer de um delas à outra reta.

Então, vamos calcular as coordenadas de um ponto P qualquer da reta r.

Para $x = 0$, temos:

$$2 \cdot 0 - y + 4 \Longrightarrow y = 4.$$

Portanto, $P = (0,4)$.

Agora basta calcular a distância entre P e a reta s.

$$d_{P,s} = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 \cdot 0 + (-1) \cdot 4 + (-7)|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{11}{\sqrt{5}} = \frac{11\sqrt{5}}{5}.$$

Logo, a distância entre as duas retas é $\dfrac{11\sqrt{5}}{5}$.

3.11 Área de um triângulo

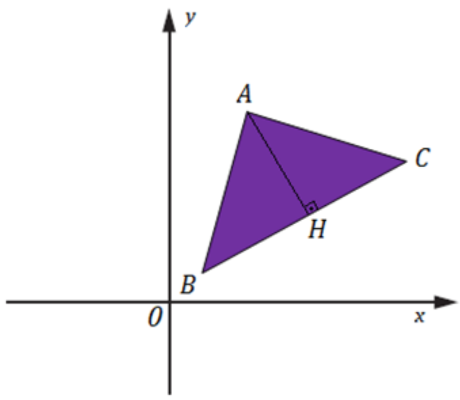
Anteriormente vimos que três pontos $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$ são ditos colineares se, e somente se, o determinante da matriz formanda pelos três pontos for igual a zero, ou seja, se

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Nesse tópico veremos que, caso os pontos não estejam alinhados, eles formarão vértices de um triângulo e o determinante formado pelas coordenadas desses três pontos, permitirá calcular a área do triângulo quando conhecidos seus vértices.

Seja o triângulo de vértices $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$, calcular a área do triângulo ABC a partir de suas coordenadas, conforme a Figura 3.33.

Figura 3.33: Área do triângulo



Fonte: O autor.

Demonstração: Inicialmente sabemos, da Geometria Plana, que a área de um triângulo é dada por:

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{1}{2} \cdot \text{Base} \cdot \text{Altura}.$$

Definindo S como a área do triângulo ABC, então:

$$S = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH.$$

Aplicando a fórmula da distância entre pontos B e C:

$$d(B, C) = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2}.$$

A equação da reta $\overleftrightarrow{BC}$ é dada por:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow (y_B - y_C)x + (x_C - x_B)y + (x_By_C - x_Cy_B) = 0.$$

Fazendo,

$$\begin{aligned} (y_B - y_C) &= a \\ (x_C - x_B) &= b \\ (x_By_C - x_Cy_B) &= c. \end{aligned}$$

Logo,

$$ax + by + c = 0.$$

Calculando a distância do ponto A à reta $\overleftrightarrow{BC}$.

$$d = \left| \frac{(ax_A + by_A + c)}{\sqrt{(a^2 + b^2)}} \right|.$$

Então:

$$\begin{aligned} AH = d &= \left| \frac{(y_B - y_C) + (x_C - x_B)y_A + (x_By_C - x_Cy_B)}{\sqrt{(y_B - y_C)^2 + (x_C - x_B)^2}} \right| \\ &= \left| \frac{\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2}} \right|. \end{aligned}$$

Seja D o seguinte determinante

$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}.$$

Daí, temos:

$$S = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH.$$

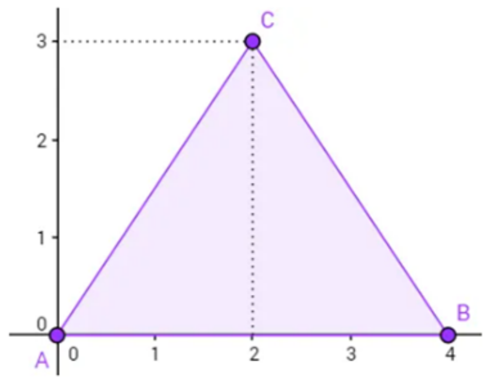
$$S = \frac{1}{2}\sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} \cdot \frac{|D|}{\sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2}}.$$

Concluímos então que:

$$S = \frac{1}{2} \cdot |D|.$$

Exemplo 3.11.1. *Calcule a área do triângulo representado na Figura 3.34, em* cm^2*, utilizando Geometria Analítica.*

Figura 3.34: Área do triângulo, referente ao Exemplo 3.11.1



Fonte: O autor.

A área de um triângulo pode ser calculada pela fórmula $\dfrac{b \cdot h}{2}$, onde b é a medida do comprimento da base e h da altura. Contudo, como o exercício propõe que seja utilizada a Geometria Analítica, a solução será feita da seguinte maneira:

A fórmula para o cálculo da área do triângulo pela Geometria Analítica é:

$$A = \frac{|D|}{2}. \tag{3.16}$$

D é o determinante da matriz 3×3 formada a partir das coordenadas dos pontos A, B e C, isto é:

$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}.$$

Portanto,

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 12..$$

Logo,

$$A \ = \ \frac{|D|}{2} = \frac{|12|}{2} = \frac{12}{2} = 6\,\mathrm{cm}^2\,.$$

Exemplo 3.11.2. *Calcule a área do triângulo ABC, cujos vértices são $A = (4,1)$, $B = (-2,3)$ e $C = (0,-6)$.*

$$D_{ABC} = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 36 + 2 + 12 = 50.$$

$$= \frac{1}{2} \cdot |D_{ABC}| = \frac{1}{2} \cdot 50 = 25.$$

Exemplo 3.11.3. *Calcule a coordenada x do ponto $A = (x, 1)$ e do ponto $B(x, 2)$ sabendo que as coordenadas do ponto C são $(4, 2)$, que eles não são colineares e que a área do triângulo formado por eles é igual a* 3*.*

Três pontos não colineares formam um triângulo. Portanto, é possível utilizar a fórmula para o cálculo de área de um triângulo pela Geometria Analítica para descobrir o valor da coordenada x.

$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ x & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -4 + x.$$

Substituindo na fórmula (3.16), temos:

$$A = \frac{|D|}{2} \Longrightarrow 3 = \frac{|-4+x|}{2} \Longrightarrow 6 = |-4+x|.$$

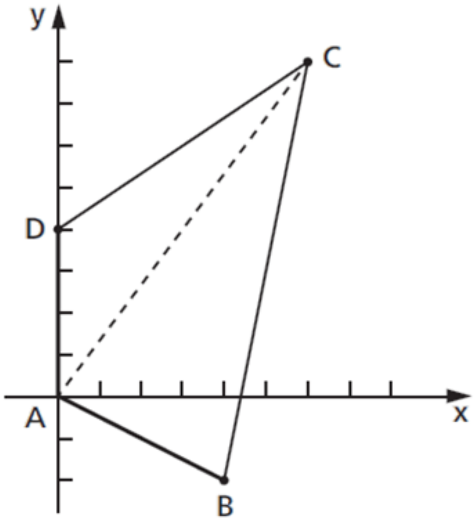
Sempre que $-4 + x > 0$, temos:

$$6 = -4 + x \Longrightarrow x = 6 + 4 \Longrightarrow x = 10.$$

Exemplo 3.11.4. *Calcule a área do quadrilátero $ABCD$, dados: $A = (0, 0)$, $B = (4, -2)$, $C = (6, 8)$ e $D = (0, 4)$.*

Inicialmente iremos dividir o quadrilátero $ABCD$ em dois triângulos: ΔABC e ΔACD, conforme a Figura 3.35.

Figura 3.35: Área do triângulo, referente ao Exemplo 3.11.4



Fonte: O autor.

Área do ΔABC.

$$D_{\Delta ABC} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 6 & 8 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -44.$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{|D_{\Delta ABC}|}{2} = 22.$$

Área do ΔACD.

$$D_{\Delta ACD} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 6 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 24.$$

$$S_{\Delta ACD} = \frac{|D_{\Delta ACD}|}{2} = 12.$$

Como $S_{\Delta ABC} = 22$ e $S_{\Delta ACD} = 12$, temos que a área S do quadrilátero $ABCD$ é dada por:

$$S = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ACD} = 22 + 12 = 34.$$

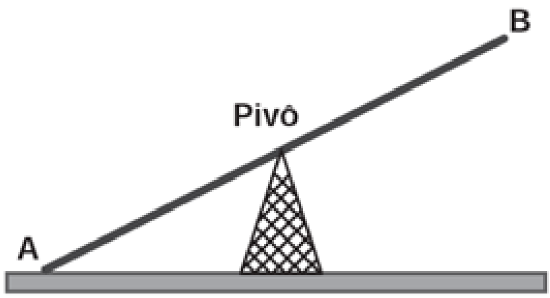
Capítulo 4

QUESTÕES COMENTADAS

Neste capítulo apresentaremos diversas questões comentadas de Geometria Analítica divididas em duas partes. A primeira é dedicada as principais e mais recentes questões do ENEM e da PUC; a segunda, corresponde às questões retiradas do livro Putnam and Beyond, referentes as olimpíadas internacionais - Putnam, que foram iniciadas em 1938 e ocorrem nos Estados Unidos e Canadá. As questões da Putnam usam conteúdos do Ensino Médio e podem ser resolvidas por argumentos de Geometria Analítica, o que possibilita auxiliar na preparação do candidato para o ENEM. O texto a seguir baseia-se nas referências: (GELCA; ANDREESCU, 2007) e (INEP,).

4.1 Exames nacionais

1. (ENEM-2013) Gangorra é um brinquedo que consiste de uma tábua longa e estreita equilibrada e fixada no seu ponto central (pivô). Nesse brinquedo, duas pessoas sentam-se nas extremidades e, alternadamente, impulsionam-se para cima, fazendo descer a extremidade oposta, realizando, assim, o movimento da gangorra. Considere a gangorra representada na figura, em que os pontos A e B são equidistantes do pivô:

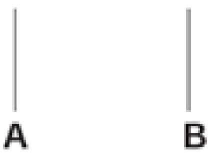


A projeção ortogonal da trajetória dos pontos A e B, sobre o plano do chão da gangorra, quando esta se encontra em movimento, é:

A) 

B) 

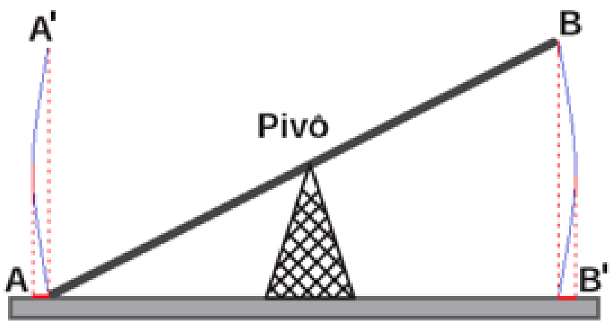
C) 

D) 

E) 

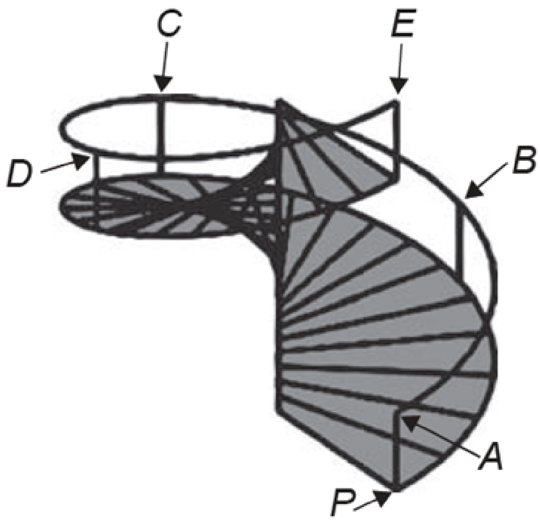
Solução: Perceba que as trajetórias dos pontos A e B são dois arcos de circunferência, com centro no pivô, localizados num mesmo plano perpendicular ao plano do chão.

Portanto, suas projeções ortogonais sobre o plano no chão é um par de segmentos da reta de intersecção desse tal plano com o plano do chão, conforme a figura.



Resposta: B.

2. (ENEM-2014) O acesso entre os dois andares de uma casa é feito através de uma escada circular (escada caracol), representada na figura. Os cinco pontos A, B, C, D, E sobre o corrimão estão igualmente espaçados, e os pontos P, A e E estão em uma mesma reta. Nessa escada, uma pessoa caminha deslizando a mão sobre o corrimão do ponto A até o ponto D.



A figura que melhor representa a projeção ortogonal, sobre o piso da casa (plano), do caminho percorrido pela mão dessa pessoa é:

A) 

C) 

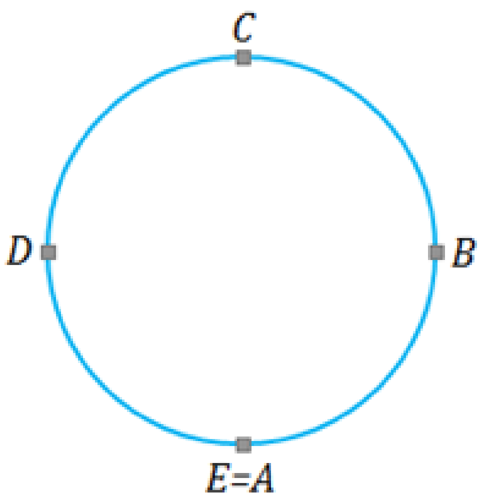
E) 

B) 

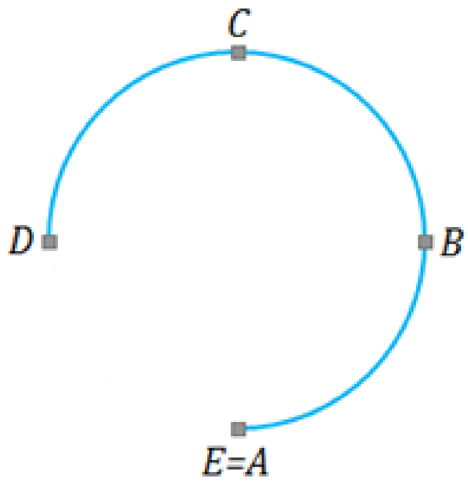
D) 

Solução: Pelo enunciado da questão temos que os 5 pontos, A, B, C, D e E, estão igualmente espaçados, logo o corrimão planificado é um segmento de reta dividido em 4 partes iguais.

A projeção ortogonal do corrimão completo sobre o piso(plano) é uma circunferência.

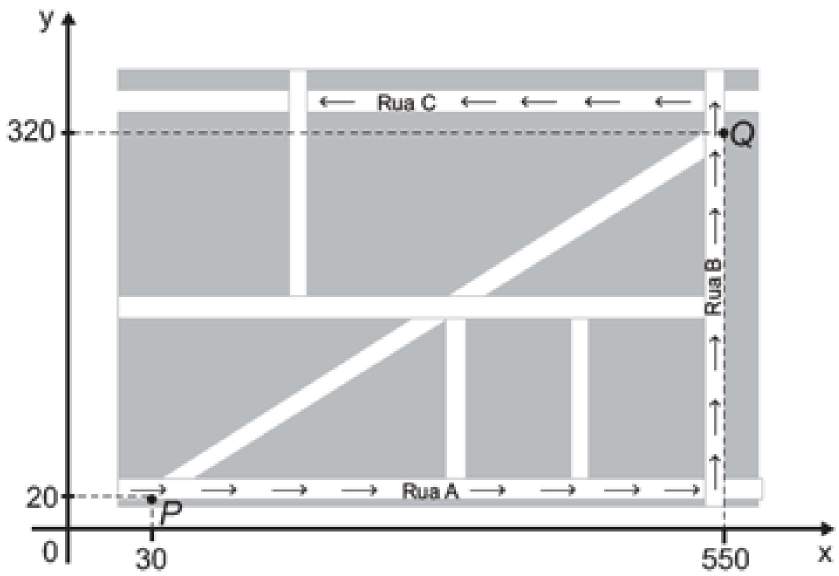


A projeção do ponto A ao ponto D corresponde a $\frac{3}{4}$ da circunferência.



Resposta: C.

3. (ENEM-2015) Devido ao aumento do fluxo de passageiros, uma empresa de transporte coletivo urbano está fazendo estudos para a implantação de um novo ponto de parada em uma determinada rota. A figura mostra o percurso, indicado pelas setas, realizado por um ônibus nessa rota e a localização de dois de seus atuais pontos de parada, representados por P e Q.



Os estudos indicam que o novo ponto T deverá ser instalado, nesse percurso, entre as paradas já existentes P e Q, de modo que as distâncias percorridas pelo ônibus entre os pontos P e T e entre os pontos T e Q sejam iguais. De acordo com os dados, as coordenadas do novo ponto de parada são

A) $(290; 20)$. **C)** $(410; 20)$. **E)** $(440; 20)$.

B) $(410; 0)$. **D)** $(440; 0)$.

Solução: Adotando o Sistema de coordenadas ortogonais dado, temos

$$P = (30, 20) \text{ e } Q = (550, 320).$$

A distância percorrida pelo ônibus entre as paradas P e Q, pelo percurso indicado no enunciado é:

$$(550 - 30) + (320 - 20) = 820.$$

O novo ponto T deve ser instalado nesse percurso é a distância percorrida entre os pontos P e T deve ser igual à

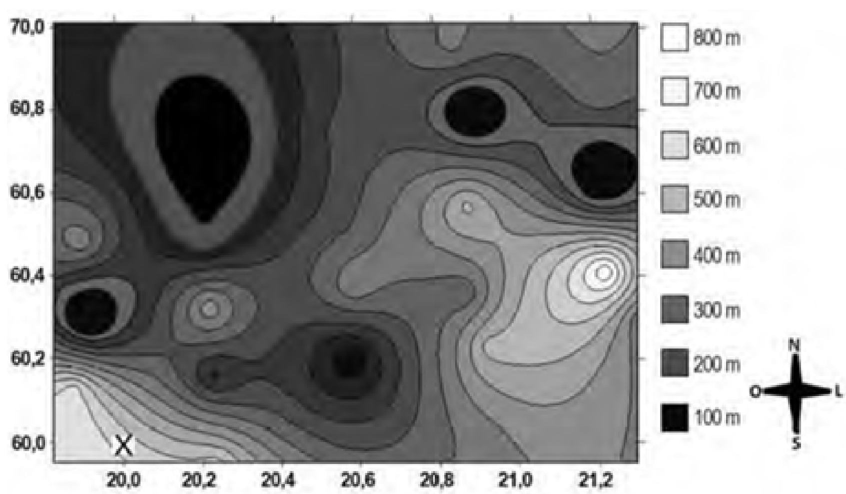
$$\frac{820}{2} = 410,$$

Logo, o ponto T é

$$(30 + 410, 20) = (440, 20).$$

Resposta: E.

4. A figura a seguir é a representação de uma região por meio de curvas de nível, que são curvas fechadas representando a altitude da região, com relação ao nível do mar. As coordenadas estão expressas em graus de acordo com a longitude, no eixo horizontal, e a latitude, no eixo vertical. A escala em tons de cinza desenhada à direita está associada à altitude da região.



Um pequeno helicóptero usado para reconhecimento sobrevoa a região a partir do ponto $X = (20; 60)$. O helicóptero segue o percurso:

$$0,8°L \to 0,5°N \to 0,2°O \to 0,1°S \to 0,4°N \to 0,3°L.$$

Ao final, desce verticalmente até pousar no solo. De acordo com as orientações, o helicóptero pousou em um local cuja altitude é

A) menor ou igual a $200\,\mathrm{m}$.

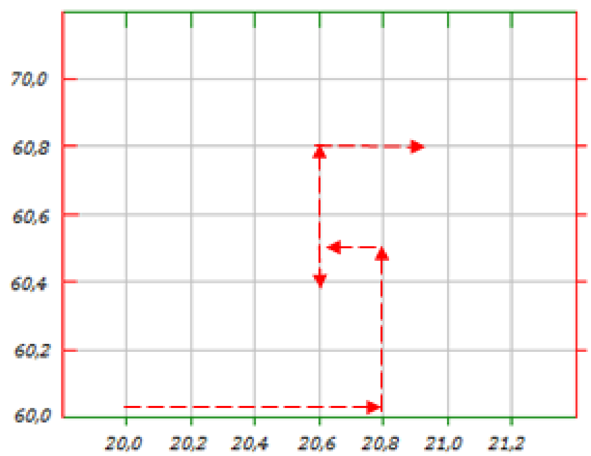
B) maior que $200\,\mathrm{m}$ e menor ou igual a $400\,\mathrm{m}$.

C) maior que $400\,\mathrm{m}$ e menor ou igual a $600\,\mathrm{m}$.

D) maior que $600\,\mathrm{m}$ e menor ou igual a $800\,\mathrm{m}$.

E) maior que $800\,\mathrm{m}$.

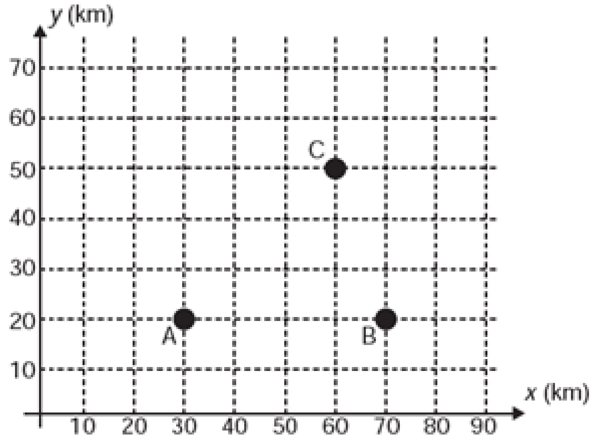
Solução: Perceba que a questão aborda um problema de plano cartesiano. Seguindo as coordenadas fornecidas pelo enunciado teremos o ponto onde o helicóptero pousou. As setas indicam a trajetória percorrida pelo helicóptero, em relação ao solo.



Logo, o helicóptero pousou em uma região de altitude menor ou igual a $200\,\mathrm{m}$.

Resposta: A

5. (ENEM-2013) Nos últimos anos, a televisão tem passado por uma verdadeira revolução, em termos de qualidade de imagem, som e interatividade com o telespectador. Essa transformação se deve à conversão do sinal analógico para o sinal digital. Entretanto, muitas cidades ainda não contam com essa nova tecnologia. Buscando levar esses benefícios a três cidades, uma emissora de televisão pretende construir uma nova torre de transmissão, que envie sinal às antenas A, B e C, já existentes nessas cidades. As localizações das antenas estão representadas no plano cartesiano:



A torre deve estar situada em um local equidistante das três antenas. O local adequado para a construção dessa torre corresponde ao ponto de coordenadas

A) $(65; 35)$.
B) $(53; 30)$.
C) $(45; 35)$.
D) $(50; 20)$.
E) $(50; 30)$.

Solução: Seja $D = (x_0, y_0)$ o local da construção da nova torre de transmissão, equidistante das antenas $A = (30, 20)$, $B = (70, 20)$ e $C = (60, 50)$.

I) D pertence à mediatriz do segmento $\overline{AB}$, então

$$x_D = \frac{30 + 70}{2} = 50.$$

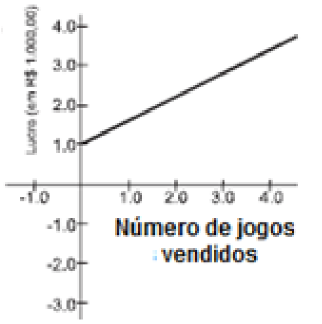
II) D é equidistante de A e C, então:

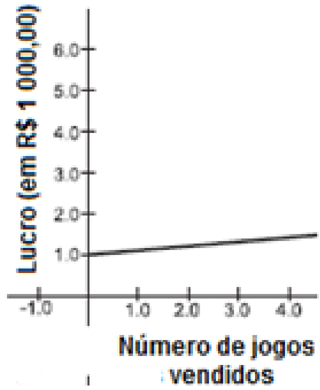
$$\begin{aligned}
&\sqrt{(50-30)^2 + (y_D - 20)^2} = \sqrt{(50-60)^2 + (y_D - 50)^2} \\
\iff\ & 400 + (y_D^2 - 40y_D + 400) = 100 + (y_D^2 - 100y_D + 2500) \\
\iff\ & 60 \cdot y_D = 1800 \\
\iff\ & y_D = 30
\end{aligned}$$

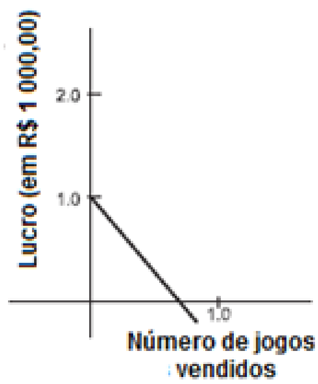
Portanto, $D = (50, 30)$.

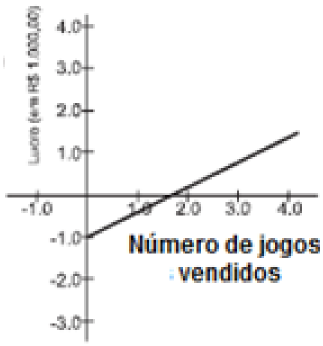
Resposta: E.

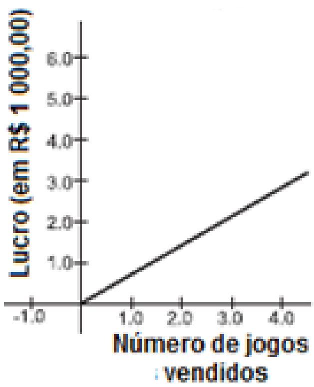
6. (ENEM-2009) Uma empresa produz jogos pedagógicos para computadores, com custos fixos de R\$ $1.000,00$ e custos variáveis de R\$ $100,00$ por unidade de jogo produzida. Desse modo, o custo total para x jogos produzidos é dado por $C(x) = 1 + 0,1x$ (em R\$ $1.000,00$). A gerência da empresa determina que o preço de venda do produto seja de R\$ $700,00$. Com isso a receita bruta para x jogos produzidos é dada por $R(x) = 0,7x$ (em R\$ $1.000,00$). O lucro líquido, obtido pela venda de x unidades de jogos, é calculado pela diferença entre a receita bruta e os custos totais. O gráfico que modela corretamente o lucro líquido dessa empresa, quando são produzidos x jogos, é:

A)


C)


E)


B)


D)


Solução: Sabemos que $L(x) = R(x) - C(x)$, logo

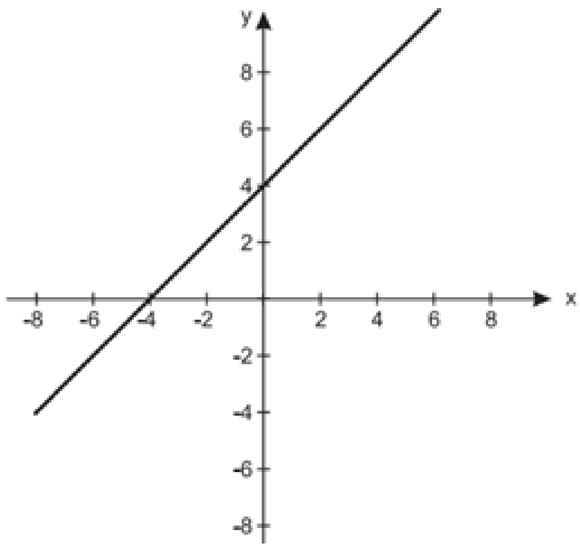
$$L(x) = 0,7x - (1 + 0,1x) \Longrightarrow L(x) = 0,6x - 1.$$

Portanto, em milhares de reais o lucro é

$$0,6x - 1.$$

Resposta: B.

7. (ENEM 2011) Um bairro de uma cidade foi planejado em uma região plana, com ruas paralelas e perpendiculares, delimitando quadras de mesmo tamanho. No plano de coordenadas cartesianas seguinte, esse bairro localiza-se no segundo quadrante, e as distâncias nos eixos são dadas em quilômetros.



A reta de equação $y = x + 4$ representa o planejamento do percurso da linha do metrô subterrâneo que atravessará o bairro e outras regiões da cidade. No ponto $P = (-5, 5)$, localiza-se um hospital público. A comunidade solicitou ao comitê de planejamento que fosse prevista uma estação do metrô de modo que sua distância ao hospital, medida em linha reta, não fosse maior que $5\,\mathrm{km}$. Atendendo ao pedido da comunidade, o comitê argumentou corretamente que isso seria automaticamente satisfeito, pois já estava prevista a construção de uma estação no ponto:

A) $(-5, 0)$.
B) $(-3, 1)$.
C) $(-2, 1)$.
D) $(0, 4)$.
E) $(2, 6)$.

Solução: Primeiramente iremos determinar quais dos pontos pertencem à equação da reta $y = x + 4$. Depois verificar qual deles está mais próximo do ponto $P = (-5, 5)$.

Substituindo os valores, dados nas alternativas, na equação, temos:

$$
\begin{aligned}
0 = -5 + 4 \quad &\Rightarrow \quad 0 = -1 \Rightarrow \text{ O ponto } (-5, 0) \notin \text{ a reta.}\\
1 = -3 + 4 \quad &\Rightarrow \quad 1 = 1 \Rightarrow \text{ O ponto } (-3, 1) \in \text{ a reta.}\\
1 = -2 + 4 \quad &\Rightarrow \quad 1 = 2 \Rightarrow \text{ O ponto } (-2, 1) \notin \text{ a reta.}\\
4 = 0 + 4 \quad &\Rightarrow \quad 4 = 4 \Rightarrow \text{ O ponto } (0, 4) \in \text{ a reta.}\\
6 = 2 + 4 \quad &\Rightarrow \quad 6 = 6 \Rightarrow \text{ O ponto } (2, 6) \in \text{ a reta.}
\end{aligned}
$$

Ou seja, os pontos $(-3, 1)$, $(0, 4)$ e $(2, 6)$ pertencem a linha do metrô. Precisamos saber agora qual dista menos de $5\,\mathrm{km}$ do ponto P

$$\begin{aligned} d(-3,1) &= \sqrt{(-5+3)^2+(5-1)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}\,\mathrm{km} \\ d(0,4) &= \sqrt{(-5-0)^2+(5-4)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}\,\mathrm{km} \\ d(2,6) &= \sqrt{(-5-2)^2+(5-6)^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50}\,\mathrm{km} \end{aligned}$$

O valor menor que $5\,\mathrm{km}$ é de $\sqrt{20}\,\mathrm{km} \cong 4,47\,\mathrm{km}$. Ou seja, a distância do ponto $(-3,1)$ até $P=(-5,5)$

Resposta: B.

8. (ENEM-2013) Durante uma aula de Matemática, o professor sugere aos alunos que seja fixado um sistema de coordenadas cartesianas (x,y) e representa na lousa a descrição de cinco conjuntos algébricos, I, II, III, IV e V, como se segue:

I. é a circunferência de equação $x^2+y^2=9$;

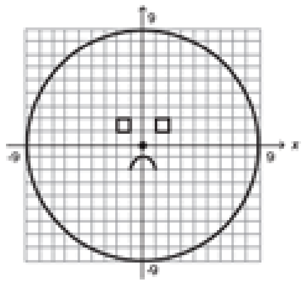
II. é a parábola de equação $y=-x^2-1$, com x variando de -1 a 1;

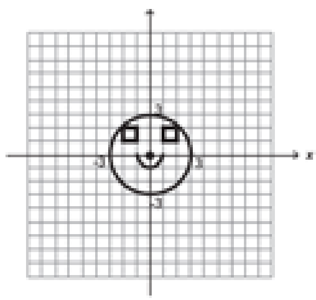
III. é o quadrado formado pelos vértices $(-2,1)$, $(-1,1)$, $(-1,2)$ e $(-2,2)$;

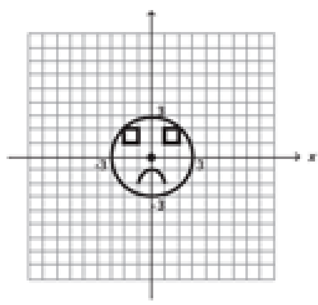
IV. é o quadrado formado pelos vértices $(1,1)$, $(2,1)$, $(2,2)$ e $(1,2)$;

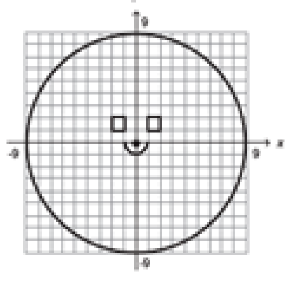
V. é o ponto $(0,0)$.

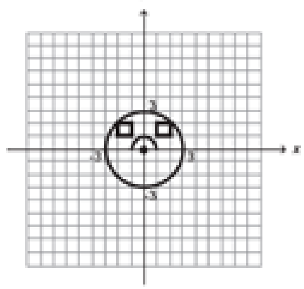
A seguir, o professor representa corretamente os cinco conjuntos sobre uma mesma malha quadriculada, composta de quadrados com lados medindo uma unidade de comprimento, cada, obtendo uma figura. Qual destas figuras foi desenhada pelo professor?

A)


C)


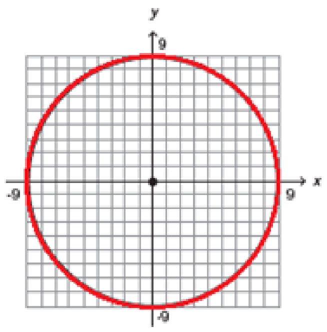
E)


B)


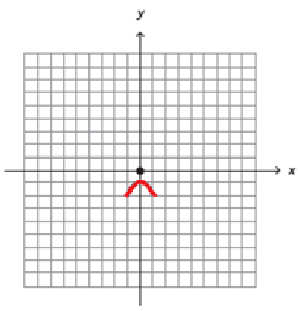
D)


Solução: De acordo com o enunciado, temos os seguintes conjuntos de pontos:

I. Circunferência de equação $x^2 + y^2 = 9$, cujo o centro é o ponto $(0, 0)$ e o raio é 3.



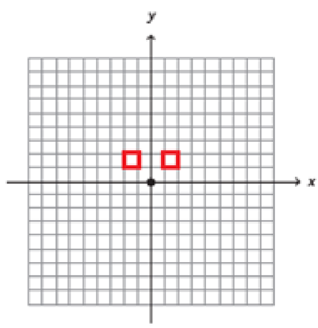
II. Parábola de equação $y = -x^2 - 1$, com $-1 \leq x \leq 1$.



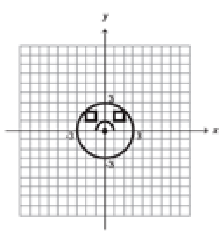
III. Quadrado de vértices $(-2; 1)$, $(-1; 1)$, $(-1; 2)$ e $(-2; 2)$.

IV. Quadrado de vértices $(1; 1)$, $(2; 1)$, $(2; 2)$ e $(1; 2)$.

V. Ponto $(0, 0)$.

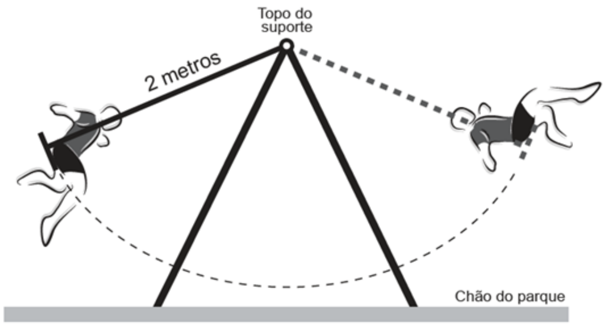


Assim, representando os cinco conjuntos sobre a mesma malha quadriculada, tem-se:



A melhor representação é a da alternativa E.

9. (ENEM-2014) A figura mostra uma criança brincando em um balanço no parque. A corda que prende o assento do balanço ao topo do suporte mede 2 metros. A criança toma cuidado para não sofrer um acidente, então se balança de modo que a corda não chegue a alcançar a posição horizontal.



Na figura, considere o plano cartesiano que contém a trajetória do assento do balanço, no qual a origem está localizada no topo do suporte do balanço, o eixo X é paralelo ao chão do parque, e o eixo Y tem orientação positiva para cima.

A curva determinada pela trajetória do assento do balanço é parte do gráfico da função.

A) $f(x) = -\sqrt{2 - x^2}$ **C)** $f(x) = x^2 - 2$ **E)** $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

B) $f(x) = \sqrt{2 - x^2}$ **D)** $f(x) = -\sqrt{4 - x^2}$

Solução: A curva determinada pela trajetória do assento do balanço é uma semicircunferência com centro na origem e raio 2, com $y < 0$ e $-2 < x < 2$. Assim:

$$x^2 + y^2 = 2^2 \Longrightarrow y = -\sqrt{4 - x^2}.$$

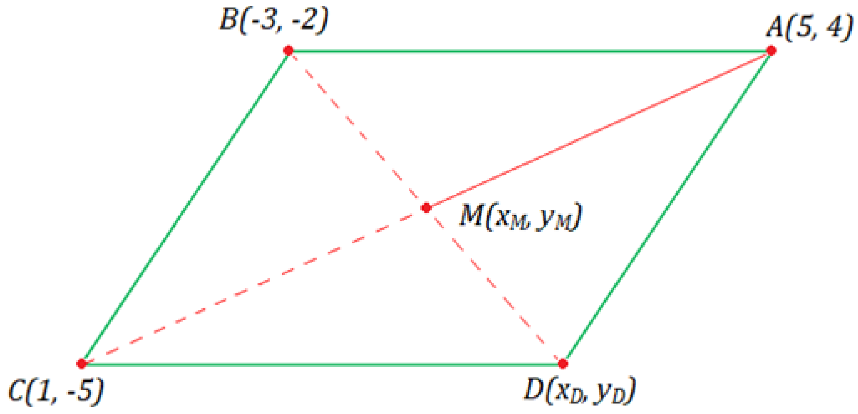
E, portanto, a curva é parte do gráfico da função $f(x) = -\sqrt{4 - x^2}$.

Resposta: E.

10. (PUC) Em um sistema de eixos cartesianos ortogonais, seja o paralelogramo $ABCD$ em que $A = (5, 4)$, $B = (-3, -2)$ e $C = (1, -5)$. Se AC é uma das diagonais desse paralelogramo, a medida da outra diagonal, em unidades de comprimento, é:

A) $3\sqrt{17}$ **B)** $6\sqrt{15}$ **C)** $6\sqrt{17}$ **D)** $9\sqrt{15}$ **E)** $9\sqrt{17}$

Solução:



No paralelogramo $ABCD$, em que $\overline{AC}$ é uma das diagonais, temos

1) $\begin{cases} x_M = \dfrac{1+5}{2} = 3 \\ y_M = \dfrac{-5+4}{2} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$ implica que $M\left(3; -\dfrac{1}{2}\right)$.

2) $\begin{cases} \dfrac{x_D + (-3)}{2} = 3 \\ \dfrac{y_D + (-2)}{2} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$ implica que $\begin{cases} x_D = 9 \\ y_D = 1 \end{cases} \implies D = (9; 1)$.

3) A medida da diagonal $\overline{BD}$ é:

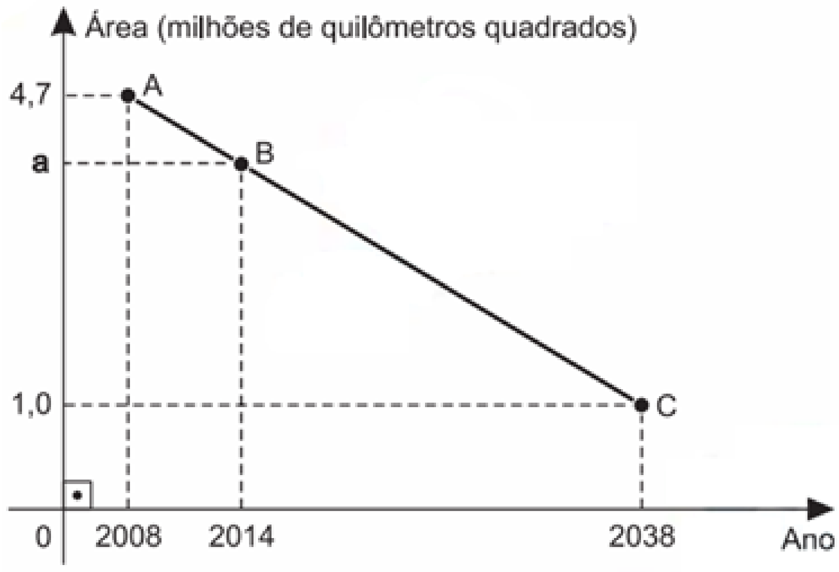
$$\sqrt{(9+3)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{144+9} = \sqrt{153} = \sqrt{9 \cdot 17} = 3\sqrt{17}.$$

Resposta: A.

11. (PUC- MODELO ENEM) "De acordo com a análise de seis avançados modelos climáticos de computadores, combinada com observações da perda da camada de gelo nos verões de 2007 e 2008, o gelo marinho derreterá nas próximas décadas até fazer do Oceano Ártico um mar aberto. Pesquisadores calculam que a área de gelo marinho cairá de $4,7$ milhões de quilômetros quadrados (registra no inverno de 2008) para apenas 1 milhão de quilômetros quadrados (registra no inverno de 2038)." Adaptado: Revista Planeta, Edição 441, ano37, p.30, jun/2009, São Paulo: Editora Três. Supondo que, no período considerado, a superfície de gelo marinho nessa região sofra um decréscimo linear, então o esperado é que no inverno de 2014 a área de sua superfície, em milhões de quilômetros quadrados, seja igual a:

A) $3,76$ **B)** $3,84$ **C)** $3,96$ **D)** $4,08$ **E)** $4,14$

Solução: Supondo que no período considerado a superfície de gelo marinho nessa região sofra um decréscimo linear e, sendo a área, em milhões de quilômetros quadrados, e sua superfície no inverno de 2014, temos os pontos A, B e C alinhados (como mostra a figura).



Logo, resolvendo o determinante

$$\begin{vmatrix} 2008 & 4,7 & 1 \\ 2014 & a & 1 \\ 2038 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies (9578,6 + 2008a + 2014) - (9465,8 + 2038a + 2008) = 0$$

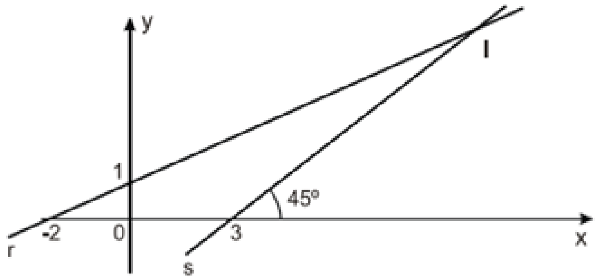
$$\implies 9578,6 + 2008a + 2014 - 9465,8 - 2038a - 2008 = 0$$

$$\implies -30a + 118,8 = 0$$

$$\implies a = 3,96$$

Resposta: C.

12. (PUC) Suponha que no plano cartesiano mostrado abaixo, em que a unidade de medida nos eixos coordenados é o quilômetro, as retas r e s representam os trajetos percorridos por dois navios, N_1 e N_2, antes de ambos atracarem em uma ilha, localizada no ponto I.



Considerando que, no momento em que N_1 e N_2 se encontravam atracados em I, um terceiro navio, N_3, foi localizado no ponto das coordenadas $(26; 29)$, a quantos quilômetros N_3 distava de I?

A) 28 **B)** 30 **C)** 34 **D)** 36 **E)** 40

Solução: Observe que o ponto I é a intersecção das retas r e s.

Descobrindo a equação da reta r:

Ela passa por $(-2, 0)$ e $(0, 1)$

Portanto $y = ax + b$

$$\begin{cases} 0 = -2a + b \\ 1 = b \end{cases} \implies -2a + 1 = 0$$
$$\implies -2a = -1$$
$$\implies a = \frac{1}{2}$$

Portanto: $r : y = \frac{1}{2}x + 1$

Descobrindo a equação da reta s:

$$\begin{cases} a = \operatorname{tg} 45^\circ = 1 \\ y = x + b \end{cases}$$

Como passa pelo ponto $(3, 0)$:

$$0 = 3 + b \implies b = -3.$$

Portanto, $s : y = x - 3$.

Achando o ponto de intersecção entre as duas retas:

$$\begin{cases} y = x - 3 \\ y = \frac{1}{2}x + 1 \end{cases} \implies x - 3 = \frac{1}{2}x + 1$$
$$\implies \frac{1}{2}x = 4$$
$$\implies x = 8.$$

Logo

$$y = 8 - 3 = 5.$$

Portanto a interseção ocorre no ponto $I = (8, 5)$.

O outro navio $(26, 29)$.

A distância d

$$\begin{aligned} d^2 &= (26-8)^2 + (29-5)^2 \\ d^2 &= 18^2 + 24^2 \\ d^2 &= 900 \\ d &= \sqrt{900} \\ d &= 30. \end{aligned}$$

Portanto, N_3 distava de I $30\,\mathrm{km}$.

Resposta: B.

13. (PUC) Relativamente à função quadrática f, dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que a, b e c são constantes reais, sabe-se que o valor mínimo é -4; seu gráfico tem o eixo das ordenadas como eixo de simetria e a distância entre as raízes é 8. Assim, sendo a equação da reta que contém o ponto $(a; c)$ e tem inclinação de $135°$ é

A) $2x + 2y + 15 = 0$

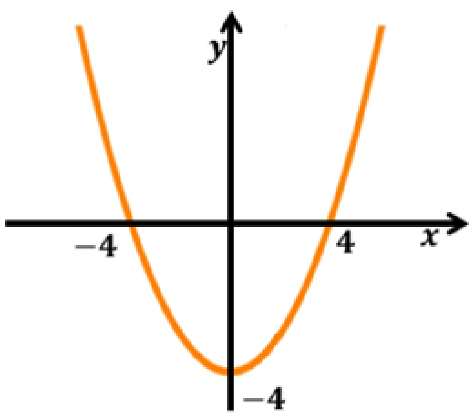
B) $2x - 2y - 15 = 0$

C) $4x + 4y + 15 = 0$

D) $4x - 4y - 3 = 0$

E) $4x + 4y + 3 = 0$

Solução:



1) O gráfico da função f, de acordo com os dados, permite concluir que

$$f(x) = a(x-4)(x+4) \text{ e } f(0) = -4.$$

2) $f(0) = a(0-4)(0+4) = -4 \iff a = \dfrac{1}{4}$

3) $f(x) = \dfrac{1}{4}(x-4)(x+4) \iff f(x) = \dfrac{1}{4}(x^2-16) \iff f(x) = \dfrac{1}{4}x^2 - 4.$

4) $f(x) = ax^2 + bx + c = \dfrac{1}{4}x^2 - 4 \Longrightarrow a = \dfrac{1}{4}$ e $c = -4$.

5) A equação da reta que contém o ponto $\left(\dfrac{1}{4}; -4\right)$ e tem coeficiente igual a $\operatorname{tg} 135° = -1$ é

$$y + 4 = -1\left(x - \frac{1}{4}\right) \iff y + 4 = -x + \frac{1}{4} \iff 4x + 4y + 15 = 0.$$

Resposta: C.

14. (PUC) Em um sistema cartesiano ortogonal, em que a unidade de medida nos eixos é o centímetro, considere:

- reta r, tracejada pelo ponto $(2,3)$ e paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares;
- a reta s, tracejada pelo ponto $(2,5)$ e perpendicular a r;
- o segmento OA em que O é a origem do sistema e A é a intersecção de r e s.

Um ponto M é tomado sobre o segmento OA de modo que OM e MA correspondam às medidas da hipotenusa e de um dos catetos de um triângulo retângulo Δ. Se o outro cateto de Δ mede $3\,\text{cm}$, a área de sua superfície, em centímetros quadrados, é:

A) $1,8$ **B)** $2,4$ **C)** $3,5$ **D)** $4,2$ **E)** $5,1$

Solução: Do enunciado, podemos concluir que o coeficiente angular m_r, da reta r, é dado por: $m_r = \operatorname{tg} 45° = 1$. Assim, uma possível equação de r é $y - 3 = 1 \cdot (x-2)$ e, portanto,

$$y = x + 1. \tag{4.1}$$

Como s é perpendicular a r, temos $m_s = -1$.

Assim, uma possível equação de s é dado por:

$$y - 5 = -1 \cdot (x-2) \text{ e, portanto}$$

$$y = -x + 7 \tag{4.2}$$

As coordenadas do ponto A são dadas pela solução do sistema linear formado pela equações (4.1) e (4.2). Logo,

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = -x + 7 \end{cases}$$

Portanto, $x = 3$ e $y = 4$.

Então, $A = (3, 4)$ e o segmento $\overline{OA}$ é igual $OA = \sqrt{(4-0)^2 + (3-0)^2} = 5\,\text{cm}$. Fazendo $AM = x$, temos $OM = 5 - x$. Logo, temos, no triângulo retângulo Δ, a hipotenusa medindo, em cm, $5 - x$, e os catetos $x\,\text{cm}$ e $3\,\text{cm}$. Pelo Teorema de Pitágoras, tem-se que: $(5-x)^2 = x^2 + 3^2$, logo, $x = 1,6$.

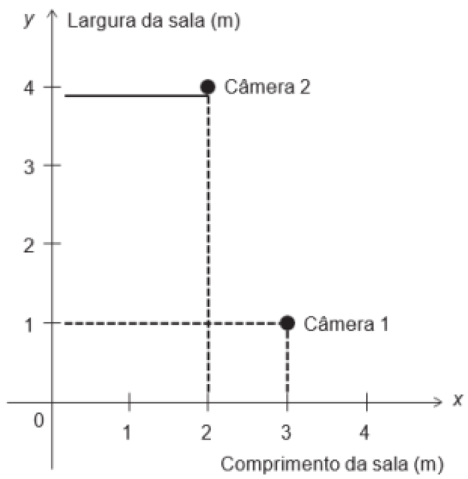
Portanto a área S do triângulo retângulo de catetos $3\,\text{cm}$ e $1,6\,\text{cm}$, em cm^2 é dada por

$$S = \frac{1,6 \cdot 3}{2} = 2,4.$$

Resposta: B.

15. (ENEM 2019) Uma empresa, investindo na segurança, contrata uma firma para instalar mais uma câmera de segurança no teto de uma sala. Para iniciar o serviço, o representante da empresa informa ao instalador que nessa sala já estão instaladas duas câmeras e, a terceira, deverá ser colocada de maneira a ficar equidistante destas. Além disso, ele apresenta outras duas informações:

I. um esboço em um sistema de coordenadas cartesianas, do teto da sala, onde estão inseridas as posições das câmeras 1 e 2, conforme a figura.



II. cinco relações entre as coordenadas $(x; y)$ da posição onde a câmera 3 deverá ser instalada.

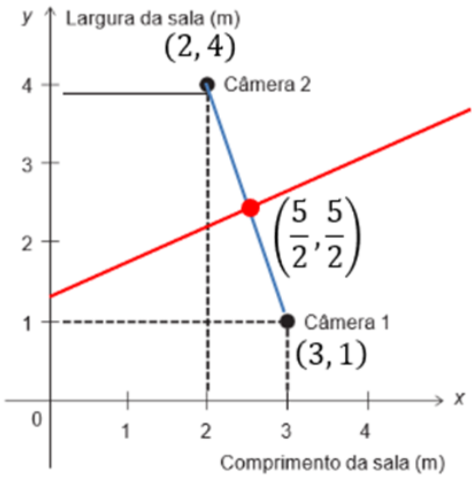
$$R_1 : y = x$$
$$R_2 : y = -3x + 5$$
$$R_3 : y = -3x + 10$$
$$R_4 : y = \frac{x}{3} + \frac{5}{3}$$
$$R_5 : y = \frac{x}{3} + \frac{1}{10}$$

O instalador, após analisar as informações e as cinco relações, faz a opção correta dentre as relações apresentadas para instalar a terceira câmera.

A relação escolhida pelo instalador foi a:

A) R_1 **B)** R_2 **C)** R_3 **D)** R_4 **E)** R_5

Solução: Questão muito interessante de Geometria Analítica do ENEM PPL 2019 que aborda o conceito da equação de reta mediatriz. Nosso objetivo nesta questão, será encontrar exatamente a equação da reta mediatriz dos pontos $C_1 = (3, 1)$ e $C_2 = (2, 4)$. O interessante é que a questão requer isso, porém sem citar o termo "equação de reta mediatriz"em seu enunciado



Calculando as coordenadas do ponto médio, temos:

$$x_m = \frac{3+2}{2} = \frac{5}{2} \text{ e } y_m = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2}.$$

Pela condição de perpendicularismo, temos:

$$m_s \cdot m_r = -1 \implies m_r = \frac{4-1}{2-3}$$
$$\implies m_r = -3,$$

então,

$$m_s = \frac{1}{3}.$$

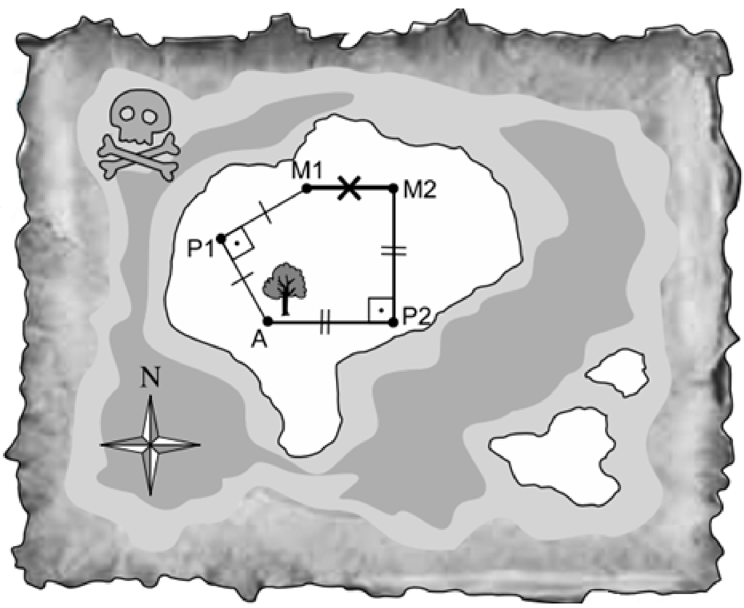
Substituindo o ponto médio e o coeficiente angulara da reta s na equação da reta, temos:

$$\begin{aligned} y - y_0 = m(x - x_0) \quad &\Longrightarrow \quad y - \frac{5}{2} = m_s\left(x - \frac{5}{2}\right) \\ &\Longrightarrow \quad y - \frac{5}{2} = \frac{1}{3}\left(x - \frac{5}{2}\right) \\ &\Longrightarrow \quad y - \frac{5}{2} = \frac{x}{3} - \frac{5}{6} \\ &\Longrightarrow \quad y = \frac{x}{3} + \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Portanto, a terceira câmera, deverá ser colocada em R_4.

Resposta: D.

16. (UNESP) Chegou às mãos do Capitão Jack Sparrow, do Pérola Negra, o mapa da localização de um grande tesouro enterrado em uma ilha do Caribe.



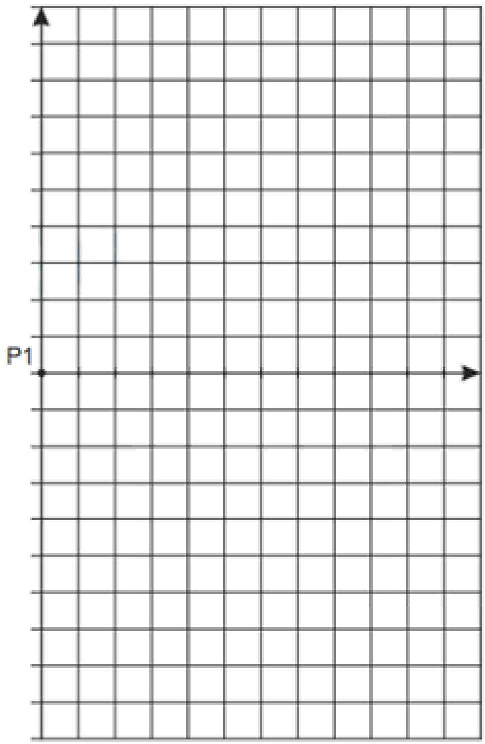
Ao aportar na ilha, Jack, examinando o mapa, descobriu que P_1 e P_2 se referem a duas pedras distantes $10\,\mathrm{m}$ em linha reta uma da outra, que o ponto A se refere a uma árvore já não mais existente no local e que:

(a) ele deve determinar um ponto M_1 girando o segmento $\overline{P_1A}$ em um ângulo de $90°$ no sentido anti-horário, a partir de P_1;

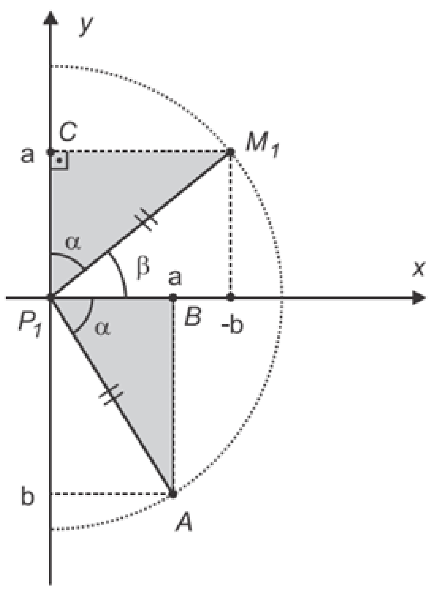
(b) ele deve determinar um ponto M_2 girando o segmento $\overline{P_2A}$ em um ângulo de $90°$ no sentido horário, a partir de P_2;

(c) o tesouro está enterrado no ponto médio do segmento M_1M_2. Jack, como excelente navegador, conhecia alguns conceitos matemáticos. Pensou por alguns instantes e introduziu um sistema de coordenadas retangulares com origem em P_1 e com o eixo das abscissas passando por P_2. Fez algumas marcações e encontrou o tesouro.

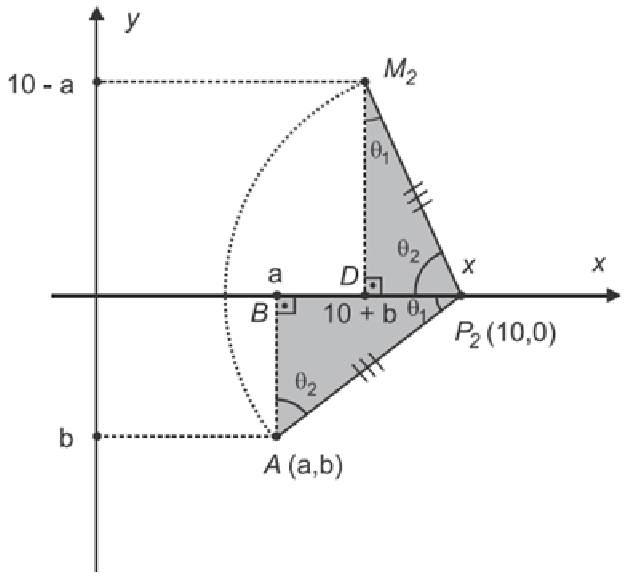
A partir do plano cartesiano definido por Jack Sparrow, determine as coordenadas do ponto de localização do tesouro e marque no sistema de eixos inserido no campo de Resolução e Resposta o ponto P_2 e o ponto do local do tesouro.



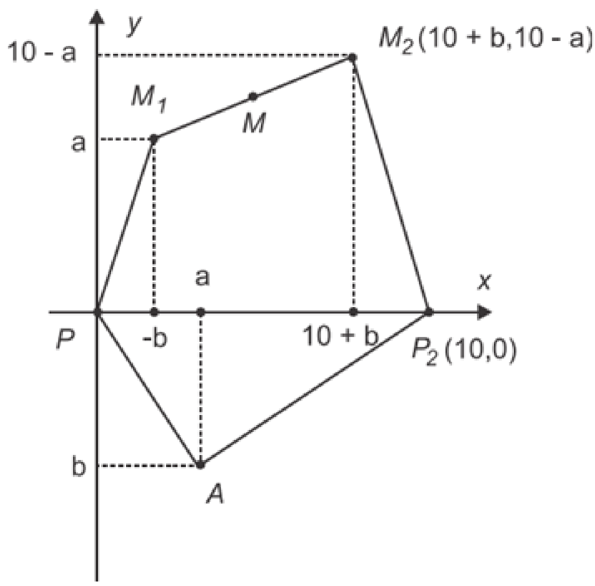
Solução: Seja $A = (a, b)$ e $\alpha + \beta = 90°$ (como mostra a figura).



Os triângulos P_1M_1C e P_1AB são congruentes pelo critério (LAA_0). Assim $CM_1 = AB = -b$ e $CP_1 = BP_1 = a$. Portanto a abscissa e a ordenada do ponto M_1 são $-b$ e a, respectivamente (Como mostra a figura).



Os triângulos AP_2B e P_2M_2D são congruentes pelo critério (LAA_0), então $M_2D = P_2B = 10 - a$ e $P_2D = AB = -b$. Assim, a abscissa e a ordenada do ponto M_2 são $10 + b$ e $10 - a$ Respectivamente (como mostra a figura).

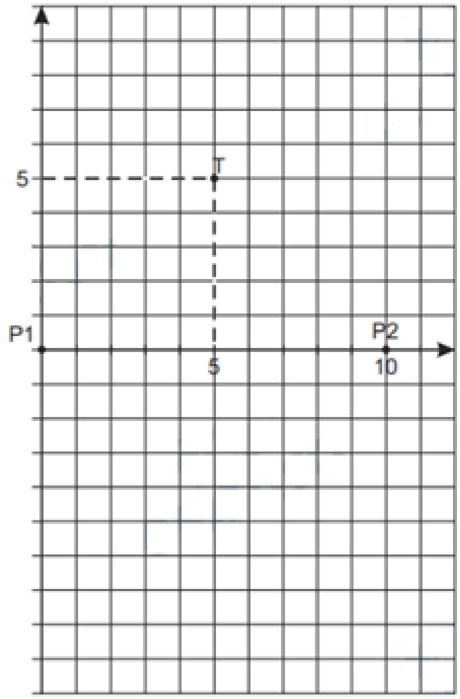


Como $T(x, y)$ é o ponto médio de $\overline{M_1M_2}$, temos:

$$X = \frac{-b + 10 + b}{2} \Longrightarrow X_p = 5.$$

$$Y = \frac{a + 10 - a}{2} \Longrightarrow Y_p = 5.$$

Portanto, o ponto médio do segmento $\overline{M_1M_2}$ é dado por $T(5, 5)$.

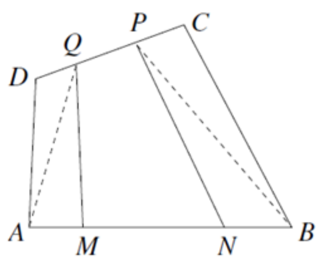


4.2 Exames internacionais

As questões a seguir foram extraídas da referência (GELCA; ANDREESCU, 2007).

1. (GELCA; ANDREESCU, 2007, página 204) Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo, M, N no lado $\overline{AB}$ e P, Q no lado, $\overline{CD}$. Mostre que se $AM = NB$ e $CP = QD$, e se os quadriláteros $AMQD$ e $BNPC$ têm a mesma área, então $\overline{AB}$ é paralelo a $\overline{CD}$.

Solução: Ao longo da questão observe a figura, a seguir.



Inicialmente, decompomos os quadrilátero sem triângulos e, em seguida, use a fórmula para a área em termos do produto vetorial. Em geral, o triângulo determinado por $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ tem área igual a metade da magnitude do $\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}$. Observe também que $\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}$ é perpendicular ao plano do triângulo.

Então, para um problema de geometria plana não há perigo em identificar as áreas com os produtos cruzados,desde que acompanhemos a orientação. A hipótese do problema implica

que
$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{DA}\times\overrightarrow{DQ}+\overrightarrow{AM}\times\overrightarrow{AQ})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CP}\times\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BP}\times\overrightarrow{BN}).$$

Por isso

$$\overrightarrow{DA}\times\overrightarrow{DQ}+\overrightarrow{AM}\times(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DQ})=\overrightarrow{CP}\times\overrightarrow{CB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CP})\times\overrightarrow{BN}.$$

Como $\overrightarrow{BN}=-\overrightarrow{AM}$ e $\overrightarrow{CP}=-\overrightarrow{DQ}$, essa igualdade pode ser reescrita como

$$(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{DQ})\times(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB})=2\overrightarrow{DQ}\times\overrightarrow{AM}.$$

Usando o fato de que $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ (que segue de $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{0}$), nós obtemos
$$\overrightarrow{AM}\times\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DQ}\times\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{DQ}\times\overrightarrow{AM}.$$

Daqui deduzimos que $\overrightarrow{AM}\times\overrightarrow{QC}=\overrightarrow{DQ}\times\overrightarrow{MB}$. Esses dois produtos cruzados apontam em direções opostas, de modo que a igualdade só pode valer se ambos forem iguais a zero, ou seja, se $\overline{AB}$ for paralelo a $\overline{CD}$.

2. **(GELCA; ANDREESCU, 2007, página 205)** Dados dois triângulos ABC e $A'B'C'$ com o mesmo baricentro, prove que se pode construir um triângulo com lados iguais aos segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ e $\overline{CC'}$.

   Solução: Denotamos por $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{C}$, $\overrightarrow{A'}$, $\overrightarrow{B'}$, $\overrightarrow{C'}$, os vetores posição dos vértices dos dois triângulos, a condição de que os triângulos tenham o mesmo baricentro é dada por:

$$\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}+\overrightarrow{C}=\overrightarrow{A'}+\overrightarrow{B'}+\overrightarrow{C'}.$$

   Subtraindo $\overrightarrow{A'}+\overrightarrow{B'}+\overrightarrow{C'}$ em ambos os membros, obtemos:

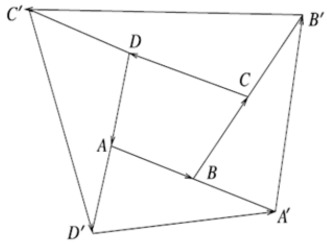
$$\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{0}.$$

   Isso mostra que $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}$ forma um triângulo como desejado.

3. **(GELCA; ANDREESCU, 2007, página 205)** Dado um quadrilátero $ABCD$, considere os pontos A', B', C' e D' nas meias-linhas (ou seja, raios) $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$, respectivamente, tal que $AB=BA'$, $BC=CB'$, $CD=DC'$, $DA=AD'$. Suponha agora que começamos com o quadrilátero $A'B'C'D'$. Usando apenas uma régua e um compasso, reconstrua o quadrilátero $ABCD$.

   Solução: Definiremos

$$\overrightarrow{v_1}=\overrightarrow{AB},\overrightarrow{v_2}=\overrightarrow{BC},\overrightarrow{V_3}=\overrightarrow{CD},\overrightarrow{v_4}=\overrightarrow{DA},\overrightarrow{u_1}=\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{u_2}=\overrightarrow{B'C'},\overrightarrow{u_3}=\overrightarrow{C'D'},\overrightarrow{u_4}=\overrightarrow{D'A'}.$$



Examinando a figura, podemos escrever o sistema de equações

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1} &= \overrightarrow{u_1}, \\ 2\overrightarrow{v_3} - \overrightarrow{v_2} &= \overrightarrow{u_2}, \\ 2\overrightarrow{v_4} - \overrightarrow{v_3} &= \overrightarrow{u_3}, \\ 2\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_4} &= \overrightarrow{u_4}, \end{aligned}$$

em que o lado direito é conhecido. Resolvendo, obtemos

$$\overrightarrow{v_1} = \frac{1}{15}\overrightarrow{u_1} + \frac{2}{15}\overrightarrow{u_2} + \frac{4}{15}\overrightarrow{u_3} + \frac{8}{15}\overrightarrow{u_4},$$

e as fórmulas análogas para $\overrightarrow{v_2}$, $\overrightarrow{v_3}$ e $\overrightarrow{v_4}$. Como o múltiplo racional de um vetor e a soma de dois vetores pode ser construída com régua e compasso, podemos construir os vetores $\overrightarrow{v_i}$, $i = 1, 2, 3$ e 4. Então pegamos os vetores $\overrightarrow{A'B} = -\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{B'C} = -\overrightarrow{v_2}$, $\overrightarrow{C'D} = -\overrightarrow{v_3}$ e $\overrightarrow{D'A} = -\overrightarrow{v_4}$ dos pontos A', B', C' e D' para recuperar os vértices B, C, D e A.

4. **(GELCA; ANDREESCU, 2007, página 206)** Nos lados do triângulo ABC construa no exterior os retângulos ABB_1A_2, BCC_1B_2, CAA_1C_2. Prove que as mediatrizes de $\overline{A_1A_2}$, $\overline{B_1B_2}$ e $\overline{C_1C_2}$ se cruzam em um ponto.

Solução: Seja O a intersecção das mediatrizes de $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{B_1B_2}$. Nós queremos mostrar que O está na mediatriz de $\overline{C_1C_2}$. Isso acontece se, e somente

$$(\overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OC_2}) \cdot \overrightarrow{C_1C_2} = 0.$$

Definindo

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{l}, \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{m}, \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{n}, \overrightarrow{AA_2} = \overrightarrow{a}, \overrightarrow{BB_2} = \overrightarrow{b}, \overrightarrow{CC_2} = \overrightarrow{c}.$$

como as mediatrizes de A_1A_2 e B_1B_2 passam por O, então ela pode ser escrita algebricamente como:

$$(2\overrightarrow{l} + \overrightarrow{a} + \overrightarrow{c}) \cdot (\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}) = 0 \text{ e } (2\overrightarrow{m} + \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \cdot (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) = 0.$$

A ortogonalidade dos lados dos retângulos é dada por:

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{m} - \overrightarrow{l}) \cdot \overrightarrow{a} &= 0,\\ (\overrightarrow{m} - \overrightarrow{n}) \cdot \overrightarrow{b} &= 0,\\ (\overrightarrow{n} - \overrightarrow{l}) \cdot \overrightarrow{c} &= 0.\end{aligned}$$

Agora só nos resta provar que

$$(2\overrightarrow{n} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) \cdot (\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}) = 0.$$

De fato,

$$\begin{aligned}& (2\overrightarrow{n} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) \cdot (\overrightarrow{c} - \overrightarrow{b})\\ =\ & 2\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{c} - 2\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}^2 - \overrightarrow{b}^2\\ =\ & 2(\overrightarrow{m} - \overrightarrow{l}) \cdot \overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{l} \cdot \overrightarrow{c} - 2\overrightarrow{m} \cdot \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}^2 - \overrightarrow{b}^2\\ =\ & 2\overrightarrow{m} \cdot \overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{m} \cdot \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}^2 + \overrightarrow{b}^2 + 2\overrightarrow{l} \cdot \overrightarrow{c} - 2\overrightarrow{l} \cdot \overrightarrow{a} - \overrightarrow{a}^2 + \overrightarrow{c}^2\\ =\ & 0.\end{aligned}$$

Portanto, as mediatrizes de $\overline{A_1A_2}$, $\overline{B_1B_2}$ e $\overline{C_1C_2}$ se cruzam em um ponto.

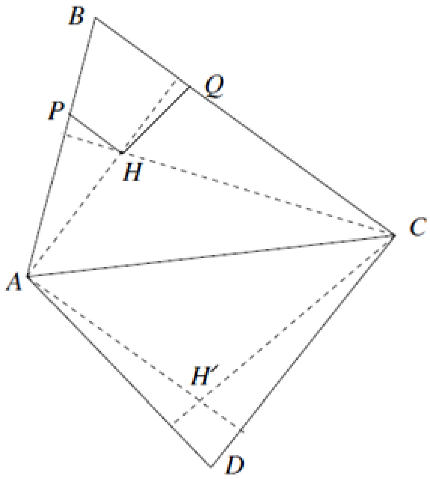
5. **(GELCA; ANDREESCU, 2007, página 206)** Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo. As linhas paralelas a $\overline{AD}$ e $\overline{CD}$ através do ortocentro H do triângulo ABC intercepta $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, respectivamente, em P e Q. Prove que a perpendicular de H à linha PQ passa pelo ortocentro do triângulo ACD.

   Solução: seja H' o ortocentro do triângulo ACD. Os quadriláteros $HPBQ$ e $HCH'A$ satisfaz

   $$\overline{HC} \perp \overline{BP}, \overline{H'C} \perp \overline{HP}, \overline{H'A} \perp \overline{HQ}, \overline{AH} \perp \overline{BQ}, \overline{AC} \perp \overline{HB}.$$

   (como mostra a figura) a conclusão decorre de um resultado mais geral.

   Lema 1. *Seja $MNPQ$ e $M'N'P'Q'$ dois quadriláteros tais que $\overline{MN} \perp \overline{N'P'}$, $\overline{NP} \perp \overline{M'N'}$, $\overline{PQ} \perp \overline{Q'M'}$, $\overline{QM} \perp \overline{P'Q'}$ e $\overline{MP} \perp \overline{N'Q'}$ então $\overline{NQ} \perp \overline{M'P'}$.*



Prova: Seja $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{QM} = \overrightarrow{v_4}$, e $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{N'P'} = \overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{P'Q'} = \overrightarrow{w_3}, \overrightarrow{Q'M'} = \overrightarrow{w_4}$.

As condições acima podem ser escritas na forma vetorial como

$$\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{w_2} = \overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{w_1} = \overrightarrow{v_3} \cdot \overrightarrow{w_4} = \overrightarrow{v_4} \cdot \overrightarrow{w_3} = \overrightarrow{0},$$

$$\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3} + \overrightarrow{v_4} = \overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2} + \overrightarrow{w_3} + \overrightarrow{w_4} = \overrightarrow{0},$$

$$(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}) \cdot (\overrightarrow{w_2} + \overrightarrow{w_3}) = \overrightarrow{0}.$$

Devemos mostrar que

$$(\overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3}) \cdot (\overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2}) = \overrightarrow{0}.$$

Primeiro, perceba que

$$\begin{aligned} 0 &= (\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}) \cdot (\overrightarrow{w_2} + \overrightarrow{w_3}) \\ &= \overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{w_2} + \overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{w_3} + \overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{w_2} + \overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{w_3} \\ &= \overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{w_3} + \overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{w_2} + \overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{w_3}. \end{aligned}$$

Além disso, o produto escalar que devemos mostrar é zero, logo temos:

$$\begin{aligned} & (\overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3}) \cdot (\overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2}) \\ =\ & \overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{w_2} + \overrightarrow{v_3} \cdot \overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{v_3} \cdot \overrightarrow{w_2} \\ =\ & \overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{w_2} + \overrightarrow{v_3} \cdot \overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{v_3} \cdot \overrightarrow{w_2}. \end{aligned}$$

Isso realmente seria igual a zero se mostrássemos que

$$\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{w_3} + \overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{w_3} = \overrightarrow{v_3} \cdot \overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{v_3} \cdot \overrightarrow{w_2}.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{w_3}+\overrightarrow{v_2}\cdot\overrightarrow{w_3} &= (\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2})\cdot\overrightarrow{w_3}\\
&= -(\overrightarrow{v_3}+\overrightarrow{v_4})\cdot\overrightarrow{w_3}\\
&= -\overrightarrow{v_3}\cdot\overrightarrow{w_3}-\overrightarrow{v_4}\cdot\overrightarrow{w_3}\\
&= -\overrightarrow{v_3}\cdot\overrightarrow{w_3}\\
&= -\overrightarrow{v_3}\cdot\overrightarrow{w_3}-\overrightarrow{v_3}\cdot\overrightarrow{w_4}\\
&= -\overrightarrow{v_3}\cdot(\overrightarrow{w_3}+\overrightarrow{w_4})\\
&= \overrightarrow{v_3}\cdot(\overrightarrow{w_1}+\overrightarrow{w_2})\\
&= \overrightarrow{v_3}\cdot\overrightarrow{w_1}+\overrightarrow{v_3}\cdot\overrightarrow{w_2}.
\end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar.

6. **(GELCA; ANDREESCU, 2007, página 206)** Prove que se as quatro linhas que passam pelos baricentros das quatro faces de um tetraedro perpendiculares a essas faces são concorrentes, então as quatro alturas do tetraedro também são concorrentes. Prove que a recíproca também é verdadeira.

   Solução: Solução: Sejam $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{d}$ e $\overrightarrow{p}$ denotam vetores de uma origem comum aos vértices A, B, C, D do tetraedro, e ao ponto P de interseção das quatro linhas. Então a equação vetorial para a altura de A é dada por

$$\overrightarrow{r}_A=\overrightarrow{a}+\lambda\Big[\frac{\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}+\overrightarrow{d}}{3}-\overrightarrow{p}\Big].$$

   O vetor posição do ponto correspondente $a\lambda=3$ é

$$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}+\overrightarrow{d}-3\overrightarrow{p},$$

   que é o mesmo para todos os quatro vértices do tetraedro. Isso mostra que as alturas são concorrentes.

   Por outro lado, se as quatro alturas são concorrentes em um ponto H com vetor posição $\overrightarrow{h}$, então a linha que passa pelo baricentro da face BCD e perpendicular a essa face é descrito por:

$$\overrightarrow{r}'_a=\Big[\frac{\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}+\overrightarrow{d}}{3}\Big]+\lambda'(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{h}).$$

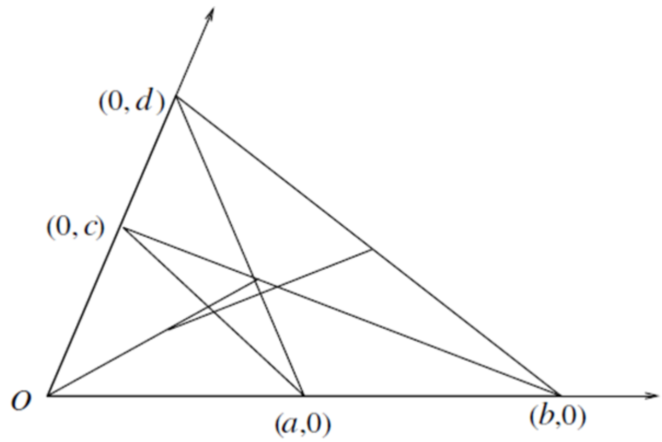
   Desta vez, o ponto comum das quatro linhas corresponderá, a $\lambda=\dfrac{1}{3}$.

   Logo concluímos o problema.

7. **(GELCA; ANDREESCU, 2007, página 207)** Prove que os pontos médios das três diagonais

de um quadrilátero completo (sistema de quatro linhas, nenhuma das quais passa pelo mesmo ponto, e os seis pontos de intersecção dessas linhas) são colineares.

Solução: Primeiramente, iremos escolher os eixos de coordenadas a serem lados do quadrilátero, como mostrado na figura a seguir.



Cinco dos vértices têm coordenadas $(0,0)$, $(a,0)$, $(b,0)$, $(0,c)$ e $(0,d)$, enquanto o sexto é encontrado como a interseção das retas por $(a,0)$ e $(0,d)$, respectivamente, $(0,c)$ e $(b,0)$. Para essas duas retas, conhecemos as interseções x e y, então suas equações são:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & d & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies ad - ay - dx = 0$$

$$\implies \frac{1}{b}x + \frac{1}{c}y = 1.$$

O sexto vértice do quadrilátero completo tem, portanto, as coordenadas

$$\left(\frac{ab(c-d)}{ac-bd}, \frac{cd(a-b)}{ac-bd}\right).$$

Descobrimos que os pontos médios das diagonais são:

$$\left(\frac{a}{2}, \frac{c}{2}\right), \quad \left(\frac{b}{2}, \frac{d}{2}\right), \quad \left(\frac{ab(c-d)}{2(ac-bd)}, \frac{cd(a-b)}{2(ac-bd)}\right).$$

A condição de que esses três pontos sejam colineares é dada por:

$$\frac{1}{2(ac-bd)} \begin{vmatrix} a & c & 1 \\ b & d & 1 \\ ab(c-d) & cd(a-b) & ac-bd \end{vmatrix}.$$

Calculando o determinante, temos:

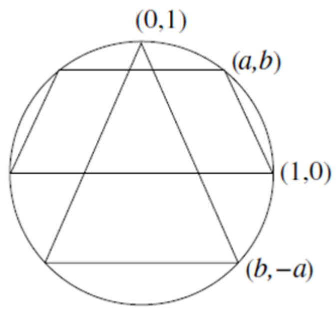
$$\begin{vmatrix} a & c & 1 \\ b & d & 1 \\ ab(c-d) & cd(a-b) & ac-bd \end{vmatrix}$$

$$= ad\cdot(ac-bd)+c\cdot 1\cdot(abc-abd)+1\cdot b(acd-bcd)-(abc-abd)\cdot d\cdot 1-(acd-bcd)\cdot 1\cdot a-(ac-bd)\cdot bc = 0.$$

Portanto, como o determinante acima é igual a zero, os pontos médios das três diagonais de um quadrilátero completo são colineares.

8. (GELCA; ANDREESCU, 2007, página 208) Em um círculo estão inscritos um trapézio com um lado como diâmetro e um triângulo com lados paralelos aos lados do trapézio. Prove que os dois têm a mesma área.

Solução: Para a resolução dessa questão, observe à Figura a seguir. Suponha que o círculo tenha raio 1, e o trapézio tem vértices $(1,0)$, (a,b), $(-a,b)$ e $(-1,0)$.



O triângulo é isósceles e tem um vértice em $(0,1)$. Precisamos determinar as coordenadas dos outros dois vértices. Um deles está sobre a paralela através de $(0,1)$ à reta determinada por $(1,0)$ e (a,b) que intercepta o círculo. Logo temos que a equação dessa reta é dada por:

$$y = \frac{b}{a-1}x + 1. \tag{4.3}$$

A relação $a^2+b^2=1$ é dada por

$$b^2 = (1-a)(1+a) \text{ ou } \frac{b}{1-a} = \frac{1+a}{b}.$$

Então a equação (4.3) pode ser reescrita como:

$$y = -\frac{1+a}{b}x + 1.$$

Agora é fácil ver que a interseção desta linha com o círculo é $(b,-a)$ (note que este ponto satisfaz a equação do círculo).

O outro vértice do triângulo é $(-b, -a)$, então a área é dada por:

$$\frac{1}{2} \cdot (2b) \cdot (1 + a) = b + ab.$$

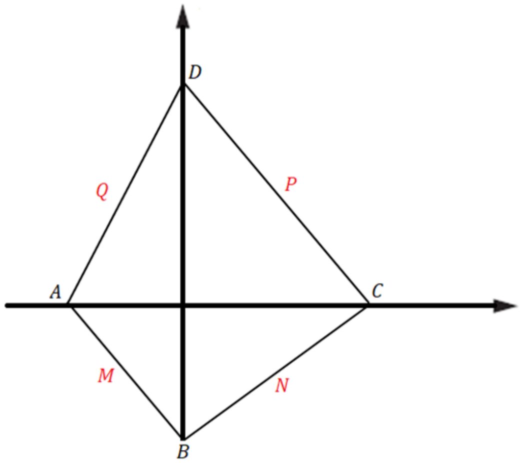
E a área do trapézio é dada por:

$$\frac{1}{2} \cdot (2a + 2) \cdot b = b + ab.$$

Portanto, os dois têm a mesma área.

9. (GELCA; ANDREESCU, 2007, página 208) Prove que os pontos médios dos lados de um quadrilátero formam um paralelogramo.

Solução: Para esse problema, iremos trabalhar com as coordenadas cartesianas de modo que utilizaremos as diagonais do quadrilátero como eixos. (Veja a figura)



Sejam os vértices definidos por $A = (a, 0)$, $B = (0, b)$, $C = (c, 0)$, $D = (0, d)$.

Sejam ainda, M, N, P e Q os pontos médios respectivamente dos lados AB, BC, CD e DA.

Os pontos médios dos lados são

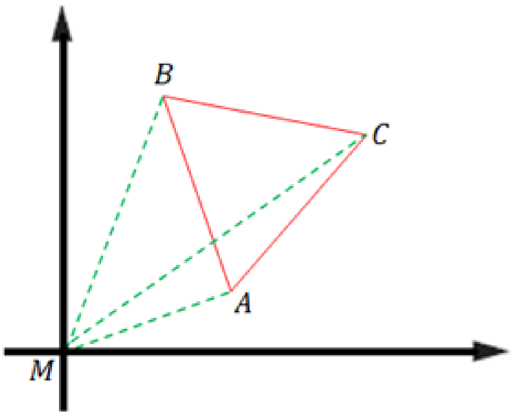
$$M = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right),\ N = \left(\frac{c}{2}, \frac{b}{2}\right),\ P = \left(\frac{c}{2}, \frac{d}{2}\right) \text{ e } Q = \left(\frac{a}{2}, \frac{d}{2}\right).$$

Perceba, que os segmentos $\overline{MP}$ e $\overline{NQ}$ têm o mesmo ponto médio,ou seja, o centro $\left(\frac{a+c}{4}, \frac{b+d}{4}\right)$ do quadrilátero.

Portanto, $MNPQ$ é um paralelogramo.

10. (GELCA; ANDREESCU, 2007, página 209) Seja M um ponto no plano do triângulo ABC. Prove que os baricentros dos triângulos MAB, MAC e MCB formam um triângulo semelhante ao triângulo ABC.

Solução: Para esse problema, iremos escolher um sistema de coordenadas de modo que coloque M na origem e deixe as coordenadas de A, B, C, respectivamente, sendo (x_A, y_A), (x_B, y_B), (x_C, y_C), como mostra a figura a seguir.



Então as coordenadas dos baricentros de MAB, MAC e MBC são:

$$G_A = \left(\frac{x_A + x_B + 0}{3}, \frac{y_A + y_B + 0}{3}\right);$$

$$G_B = \left(\frac{x_A + 0 + x_C}{3}, \frac{y_A + 0 + y_C}{3}\right);$$

$$G_C = \left(\frac{0 + x_B + x_C}{3}, \frac{0 + y_B + y_C}{3}\right).$$

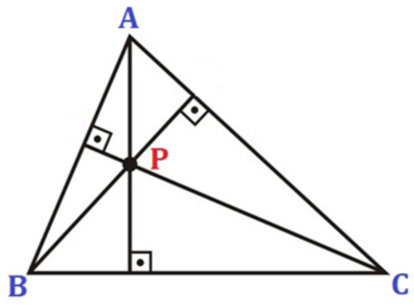
As coordenadas de G_A, G_B, G_C são obtidas subtraindo as coordenadas de A, B e C de $(x_A + x_B + x_C, y_A + y_B + y_C)$, depois dividindo por 3.

Daí o triângulo $G_AG_BG_C$ é obtido tomando a projeção do triângulo ABC em relação ao ponto de $(x_A + x_B + x_C, y_A + y_B + y_C)$.

Então, temos que a razão de semelhança é $\frac{1}{3}$ em relação à origem M. Concluímos então, que os triângulos ABC e $G_AG_BG_C$ são semelhantes.

11. (GELCA; ANDREESCU, 2007, página 209) Encontre o lugar geométrico do ponto P no interior de um triângulo ABC tal que as distâncias de P às retas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{CA}$ são os comprimentos dos lados de algum triângulo.

Solução: Seja $\delta(P, \overleftrightarrow{AB})$ a distância de P à reta $\overleftrightarrow{AB}$, $\delta(P, \overleftrightarrow{BC})$ a distância de P à reta $\overleftrightarrow{BC}$ e $\delta(P, \overleftrightarrow{CA})$ a distância de P à reta $\overleftrightarrow{CA}$ (Como mostra a figura a seguir).



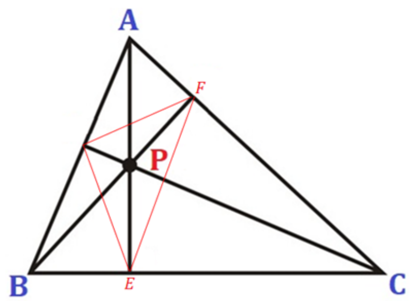
O problema pede o lugar geométrico dos pontos P para os quais as desigualdades triangulares, são simultaneamente satisfeitos. Vamos analisar a primeira desigualdade, escrita como:

$$f(P) = \delta(P, BC) + \delta(P, CA) - \delta(P, AB) > 0.$$

Em função das coordenadas (x, y) de P, a distância de P a uma reta é da forma $mx + ny + p$. Combinando três dessas funções, vemos que $f(P) = f(x, y)$ e da mesma forma, $f(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma$.

Para resolver a desigualdade $f(x, y) > 0$ basta encontrar a reta $f(x, y) = 0$ e determinar em qual lado da reta a função é positiva.

A reta intercepta o lado $\overline{BC}$ onde $\delta(P, \overleftrightarrow{CA}) = \delta(P, \overleftrightarrow{AB})$, portanto no ponto E onde a bissetriz do ângulo de A intercepta este lado. Ele cruza o lado CA no ponto F onde a bissetriz de B intercepta o lado (Como mostra a figura seguir).



Além disso, $f(x, y) > 0$ no lado $\overline{AB}$, portanto, no mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{EF}$, como o segmento $\overline{AB}$.

De modo análogo, para as outras duas desigualdades, deduzimos que o lugar geométrico é o interior do triângulo formado pelos pontos de encontro das bissetrizes dos ângulos com os lados opostos.

12. (GELCA; ANDREESCU, 2007, página 209) Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pontos distintos no plano, e seja m o número de pontos médios de todos os segmentos que eles determinam. Qual é o menor valor que m pode ter?

Solução: Considere um sistema afim de coordenadas tal que nenhum dos segmentos determinados pelos n pontos é paralelo ao eixo x. Se as coordenadas dos pontos médios são (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, m$, então $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$. Assim, reduzimos o problema a uma única situação.

Então seja $A_1, A_2, \ldots,$ dispostos nesta ordem. Os pontos médios de $A_1A_2, A_1A_3, \ldots, A_1A_n$ são todos distintos e diferentes dos pontos médios (também distintos) de $A_2A_n, A_3A_n, \ldots, A_{n-1}A_n$. Portanto,existem pelo menos

$$(n-1) + (n-2) = 2n - 3 \text{ pontos médios.}$$

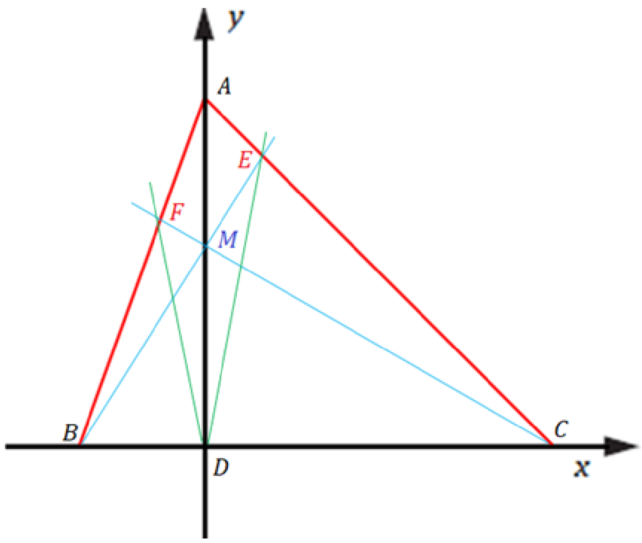
Este limite pode ser alcançado para $A_1, A_2, \ldots, E$ os pontos $1, 2, \ldots, n$ no eixo real.

Portanto, o menor valor que m pode ter

$$(n-1) + (n-2) = 2n - 3.$$

13. (GELCA; ANDREESCU, 2007, página 209) Dado um triângulo de ângulo agudo ABC com altura AD, escolha qualquer ponto M em AD, e então desenhe BM e estenda até cruzar AC em E, e desenhe CM e estenda até cruzar AB em F. Prove que $\angle ADE = \angle ADF$.

Solução: Consideramos um sistema cartesiano de coordenadas com BC e AD nos eixos x e y, respectivamente e origem em D (como mostra a figura a seguir).



Seja $A = (0, a)$, $B = (b, 0)$, $C = (c, 0)$, $M = (0, m)$.

Sabemos que o triângulo ABC é agudo, a, $c > 0$ e $b < 0$. Além disso, $m > 0$.

A equação de BM é dada por

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ b & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow bm - by - mx = 0.$$

Assim

$$mx + by = bm,$$

e a equação de AC é dada por

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & a & 1 \\ c & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow cy + ax - ac = 0.$$

Assim

$$ax + cy = ac.$$

Logo, a interseção dessas duas retas é dada por:

Isolando o y na equação $mx + by = bm$.

$$y = \frac{bm - mx}{b}.$$

Substituindo na equação $ax + cy = ac$, temos:

$$\begin{aligned} & ax + c\left(\frac{bm - mx}{b}\right) = ac \\ \Longrightarrow \quad & \frac{bax}{b} + \frac{cbm}{b} - \frac{cmx}{b} = \frac{abc}{b} \\ \Longrightarrow \quad & abx - cmx = abc - bcm \\ \Longrightarrow \quad & x(ab - cm) = bc(a - m). \end{aligned}$$

Daí temos que a coordenada x, do ponto E é dado por:

$$x = \frac{bc(a - m)}{ab - cm},$$

de modo análogo, temos que a coordenada y, do ponto E é:

$$y = \frac{am(b - c)}{ab - cm}.$$

Portanto, o ponto E tem coordenadas,

$$E\left(\frac{bc(a-m)}{ab-cm}, \frac{am(b-c)}{ab-cm}\right).$$

Observe que o denominador é estritamente negativo, logo, diferente de zero. O ponto E, portanto, existe.

A inclinação da reta $\overleftrightarrow{DE}$ é a razão das coordenadas de E, isto é,

$$\frac{am(b-c)}{bc(a-m)}.$$

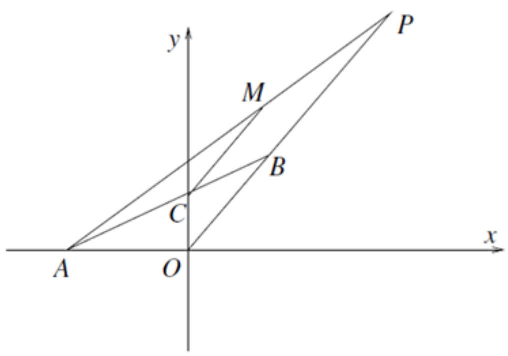
Trocando b e c, descobrimos que a inclinação de DF é

$$\frac{am(c-b)}{bc(a-m)},$$

que é o negativo da inclinação da reta $\overleftrightarrow{DE}$. Segue-se que as retas $\overleftrightarrow{DE}$ e $\overleftrightarrow{DF}$ são simétricas em relação ao eixo y, ou seja, os ângulos $\angle ADE$ e $\angle ADF$ são iguais.

14. **(GELCA; ANDREESCU, 2007, página 209)** Em um sistema cartesiano planar de coordenadas considere um ponto fixo $P(a,b)$ e uma reta variável através de P. Seja A a intersecção da reta com o eixo x. Conecte A com o ponto médio B do segmento $\overline{OP}$ (O sendo a origem), e passando por C, que é o ponto de intersecção desta reta com o eixo y, tome uma paralela a $\overline{OP}$, Esta paralela intercepta $\overline{PA}$ em M. Encontre o lugar geométrico de M que a reta varia.

Solução: Para esse problema observe a figura a seguir.



Seja o ponto $A=(c,0)$, de modo que c seja o parâmetro que determina a reta variável.

Perceba que B é ponto médio de $\overline{OP}$, pelo enunciado da questão, logo, tem coordenadas $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$.

Portanto, a reta $\overleftrightarrow{AB}$ é dada pela equação:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ c & 0 & 1 \\ \frac{a}{2} & \frac{b}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies bc - bx + ay - 2cy = 0$$

$$\implies ay - 2cy = bx - bc$$

$$\implies y(a - 2c) = bx - bc$$

$$\implies y = \frac{b}{a - 2c}x + \frac{bc}{2c - a}.$$

Portanto, C tem coordenadas $\left(0, \dfrac{bc}{2c - a}\right)$.

Como $\overline{CM}//\overline{OP}$, então a inclinação da reta $\overleftrightarrow{CM}$ é $\dfrac{b}{a}$.

Então, a equação da reta $\overleftrightarrow{CM}$ é:

$$y = \frac{b}{a}x + \frac{bc}{2c - a}.$$

Considerando sua interseção com a reta $\overleftrightarrow{AP}$, cuja equação é:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ c & 0 & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies ay + bc - cy - bx = 0$$

$$\implies ay - cy = bx - bc$$

$$\implies y(a - c) = bx - bc.$$

Igualando as equações das retas $\overleftrightarrow{CM}$ e $\overleftrightarrow{OP}$, obtemos M de coordenadas $\left(\dfrac{ac}{2c - a}, \dfrac{2bc}{2c - a}\right)$.

Este ponto está na reta $y = \dfrac{2b}{a}x$, pois:

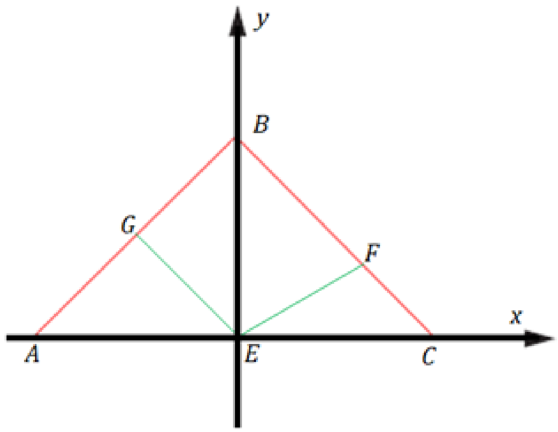
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \implies m = \frac{\frac{2bc}{2c - a}}{\frac{ac}{2c - a}} \implies m = \frac{2b}{a}.$$

Portanto, o lugar geométrico de M que a reta varia é a reta $y = \dfrac{2b}{a}x$.

Perceba, no entanto, que $A = O$ produz uma construção ambígua, então a origem deve ser removida do local. Por outro lado, qualquer (x, y) nesta reta, produz um ponto $c = \dfrac{ax}{2x - a}$, exceto para $x = \dfrac{a}{2}$. Assim, o local consiste na reta de inclinação $\dfrac{2b}{a}$ pela origem com dois pontos removidos.

15. (GELCA; ANDREESCU, 2007, página 209) Dado um triângulo ABC com $AB = BC$, seja $\overline{BE}$ a altura de B e O a ponto médio do lado $\overline{AC}$. A perpendicular de E a $\overline{BO}$ intercepta $\overline{AB}$ em G e $\overline{BC}$ em F. Mostre que se os segmentos $\overline{GE}$ e $\overline{EF}$ são iguais, então o ângulo $\angle B$ é reto.

Solução: Seja E a origem do sistema retangular de coordenadas, com a reta $\overleftrightarrow{EB}$ pertencente ao eixo y. Seja também $A = (-a, 0)$, $B = (0, b)$, $C = (c, 0)$, onde a, b, $c > 0$ (Como mostra a figura seguir). Temos que provar que $b^2 = ac$ (uma das relações métricas no triângulo retângulo).



Obtendo as equações das seguintes retas, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{GF}$.

Reta $\overleftrightarrow{BC}$:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ c & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies cy + bx - bc = 0$$

$$\implies cy + bx = bc$$

$$\implies \frac{bx}{bc} + \frac{cy}{bc} = \frac{bc}{bc}$$

$$\implies \implies \frac{x}{c} + \frac{y}{b} = 1$$

De modo análogo temos:

Reta $\overleftrightarrow{AB}$:

$$-\frac{x}{a} + \frac{y}{b};$$

Reta $\overleftrightarrow{GF}$:

$$y = \frac{c-a}{2b}x;$$

Ponto F:

$$x_F = \frac{2b^2c}{2b^2 + c^2 - ac},\ y_F = \frac{cb(c-a)}{2b^2 + c^2 - ac};$$

Ponto G:

$$x_G = \frac{2ab^2}{-2b^2 + ac - a^2},\ y_G = \frac{ab(c-a)}{-2b^2 + ac - a^2}.$$

Pelo enunciado da questão, temos que $GE = EF$, que é equivalente a dizer que $x_F = -x_G$. Logo,

$$\frac{2b^2c}{2b^2 + c^2 - ac} = \frac{2ab^2}{2b^2 - ac + a^2}.$$

Resolvendo a igualdade acima temos:

$$\begin{aligned}
2b^2c - ac^2 + a^2c = 2ab^2 + ac^2 - a^2c &\implies 2b^2c - 2ab^2 - 2ac^2 + 2a^2c = 0\\
&\implies b^2(c-a) - ac(c-a) = 0\\
&\implies (b^2 - ac)(c-a) = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, temos que $b^2 = ac$ ou $c = a$. Perceba, que por hipótese $c \neq a$. Logo, $b^2 = ac$, com isso concluímos que o ângulo $\angle B$ é reto.

Capítulo 5

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho está inserido dentro de um projeto que visa construir materiais estruturados das diferentes áreas de Matemática exigidas no ENEM, que servirá para o cursinho Edificar, do programa de extensão Edifique Ações da UFCA. De forma mais particular, o conteúdo aqui abordado é referente a Geometria Analítica. Para isso, apresentamos uma série de questões resolvidas e comentadas dentro do tema, bem como elementos da teoria necessários para entender suas resoluções.

Para alicerçar nossa proposta, selecionamos as questões do ENEM que podem ser resolvidas através de conceitos e argumentos de Geometria Analítica. Podemos comprovar a importância que a Geometria Analítica tem para solução de problemas em geral, abordando-a como ponte entre a Geometria Euclidiana e a Álgebra, visto que 32% das questões do ENEM estão na área de Geometria, e que boa parte dessas questões podem ser resolvidas através de argumentos de Geometria Analítica.

Além disso, a relevância desse trabalho também esta na contribuição para a melhoria do ensino e aprendizagem do conteúdo em questão. Sob essa perspectiva, o presente trabalho se apresenta como fonte de estudo e capacitação para estudantes e professores do Ensino Médio, bem como para outros interessados.

Ressaltamos que nessa dissertação, omitimos as demonstrações de alguns resultados exibidos ao longo do texto. Para quem desejar aprofundar-se nos assuntos tratados nesse trabalho ou em outros tópicos da Matemática, sugerimos uma leitura dos livros e materiais que foram fontes de orientação do mesmo e encontram-se listados nas referências.

Deixamos ainda, como sugestão para próximos trabalhos, a elaboração de um material semelhante, auto contido e que contemple exemplos e questões comentadas, abordando o assunto de Geometria Analítica voltada para outros tipos de concursos e olimpíadas.

Referências

ALACÂNTARA, É. F. d. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Cariri, **A matemática Básica em Provas do ENEM**. Juazeiro do Norte: [s.n.], 2020.

ANDRADE, P. F. **Álgebra Linear no $\mathbb{R}^n$ e Geometria Analítica Vetorial**. Rio de Janeiro: SBM, 2022.

AS FACES DA MATEMÁTICA. Disponível em: <http://asfacesmatematica.blogspot.com/p/distancia-entre-dois-pontos-exercicios.html>. Acesso em: 26 janeiro 2022.

BARRETO, C. X. **Matemática (Ensino Médio), Matemática Aula por Aula. Volume Único**. S ao Paulo: FTD: [s.n.], 2000.

BOULOS PAULO – CAMARGO, I. **Geometria Analítica I. Geometria Analítica – Um Tratamento Vetorial**. São Paulo: Prentice Hall: [s.n.], 2005.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Versão final. Brasília: MEC/CONSED/UNDIME, 2018. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=79611-anexo-texto-bncc-aprovado-em-15-12-17-pdf&category_slug=dezembro-2017pdf&Itemid=30192>. Acesso em: 10 junho 2021.

ESCOLA, B. **Exercícios de matemática**. Disponível em: <https://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica>. Acesso em: 28 janeiro de 2022.

GELCA, R.; ANDREESCU, T. **Putnam and Beyond- Springer Science and Business Media, LLC**. 233. ed. New York, USA: [s.n.], 2007. 204 – 209 p.

IEZZI, G. **Matemática (Ensino Médio), FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR 7. (Geometria Analítica)**. 6. ed. [S.l.: s.n.].

IEZZI, G. E. A. **Matemática (Ensino Médio). Matemática, Ciência e Aplicações**. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

INEP. **Provas e Gabaritos do ENEM**. INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA – INEP. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>.

INEP (BRASIL), MATRIZ DE REFERÊNCIA DO ENEM. Disponível em: <https://download.inep.gov.br/download/enem/matriz_referencia.pdf>. Acesso em: 05 junho 2021.

LEONARDO, F. M. d. **Matemática (Ensino Médio), Conexões com a Matemática**. 2. ed.. ed. São Paulo: moderna: [s.n.], 2013.

LIMA, E. L. A. **Matemática (Ensino Médio), A matemática do Ensino Médio (Volume 3)**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM: [s.n.], 2006.

MACHADO, A. d. S. **Álgebra Linear e Geometria Analítica. 2 ed**. São Paulo: Atual: [s.n.], 1982.

MEC/INEP. Matriz de referência para o Exame Nacional do Ensino Médio de 2009. [S.l.: s.n.], 2009. 24 p.

NETO, F. F. d. S. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – UFPB, **Aplicando as Propriedades dos Vetores a Problemas da geometria Clássica**. 2014.

PEREIRA, K. **Nota do Enem pode ser usada para estudar em universidades internacionais**. Poder 360. Disponível em: <hhttps://www.poder360.com.br/internacional/nota-do-enem-pode-ser-usada-para-estudar-em-universidades-internacionais/#:~:text=A%20nota%20do%20Enem%20(Exame,as%20notas%20do%20teste%20brasileiro>.

PORTAL OBMEP (BRASIL) GEOMETIA ANALÍTICA 1. Disponível em: <https://portaldaobmep.impa.br/index.php/modulo/index?a=1#7>. Acesso em: 14 junho 2021.

PORTAL OBMEP (BRASIL) GEOMETIA ANALÍTICA 2. Disponível em: <https://portaldaobmep.impa.br/index.php/modulo/index?a=1#7>. Acesso em: 20 dezembro 2021.

PORTAL OBMEP (BRASIL) GEOMETIA ANALÍTICA Vetores. Disponível em: <https://portaldaobmep.impa.br/index.php/modulo/index?a=1#7>. Acesso em: 27 janeiro 2022.

SIQUEIRA, V. F. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Cariri, **Tópicos de Geometria Plana em Provas do ENEM**. Juazeiro do Norte: [s.n.], 2020.

STEINBRUCH; WINTERLE. **Vetores e Geometria Analítica**. São Paulo: Pearson Makron Books, 2000.

SÁ, ARI DE. levantamento mostra o que mais cai na prova desde 2009. Disponível em: <https://g1.globo.com/educacao/enem/2017/noticia/enem-levantamento-mostra-o-que-mais-cai-na-prova-desde-2009.ghtml>. Acesso em: 07 junho 2021.