



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
EM REDE NACIONAL

JOSÉ APARECIDO PEREIRA DOS SANTOS

FUNÇÕES HIPERBÓLICAS: UMA ABORDAGEM  
GEOMÉTRICA

JUAZEIRO DO NORTE - CE  
2022

JOSÉ APARECIDO PEREIRA DOS SANTOS

FUNÇÕES HIPERBÓLICAS: UMA ABORDAGEM GEOMÉTRICA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Valdinês Leite de Sousa Júnior.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Cariri  
Sistema de Bibliotecas

---

S237f

Santos, José Aparecido Pereira dos.

Funções hiperbólicas: uma abordagem geométrica / José Aparecido Pereira dos Santos. – 2022.

68 f.: il. color., enc. ;30 cm.

(Inclui bibliografia, p.67-68)

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Cariri, Centro de Ciências e Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Juazeiro do Norte, 2022.

Orientador: Prof. Dr. Valdinês Leite de Sousa Júnior.

1. Hipérbole. 2. Funções hiperbólicas. 3. Aplicações das funções hiperbólicas. I. Título.

CDD 515.3535

---

Bibliotecária: Fernanda Nunes de Araújo - CRB 3/1031



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI  
CENTRO DE CIÊNCIAS E  
TECNOLOGIA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

---

## Funções Hiperbólicas: uma abordagem geométrica

**JOSÉ APARECIDO PEREIRA DOS SANTOS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em 15 de julho de 2022.

### Banca Examinadora

*Valdinês Leite de Sousa Júnior*

Prof. Dr. Valdinês Leite de Sousa Júnior

Orientador

Documento assinado digitalmente



STEVE DA SILVA VICENTIM

Data: 28/07/2022 21:12:31-0300

Verifique em <https://verificador.itl.br>

Prof. Dr. Steve da Silva Vicentim

Universidade Federal do Cariri

Documento assinado digitalmente



LUCAS VIDAL DE MEIRELES

Data: 29/07/2022 10:18:46-0300

Verifique em <https://verificador.itl.br>

Prof. Dr. Lucas Vidal de Meireles

Instituto Federal Goiano

Documento assinado digitalmente



PEDRO BONFIM DE ASSUNCAO FILHO

Data: 29/07/2022 11:08:59-0300

Verifique em <https://verificador.itl.br>

Prof. Dr. Pedro Bonfim de Assunção Filho

Instituto Federal de Goiás

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por tudo que tem proporcionado em minha vida.

Aos meus pais José Lourival dos Santos e Maria Ivonete Pereira, por tudo que fizeram por mim.

A minha esposa Maria Agda Ferreira Batista, pelo apoio, companheirismo, carinho, compreensão, e incentivo em todos os momentos.

A minha irmã Maria Gerrylane Pereira dos Santos, por sempre estar presente, me apoiando e incentivando.

Aos meus colegas de mestrado pelo convívio amigável, parceria e momentos agradáveis de descontração no decorrer do curso.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Valdinês Leite de Sousa Júnior, pelo incentivo, dedicação e, principalmente, por acreditar em mim durante a realização deste trabalho.

Aos professores que participaram da banca de defesa deste trabalho.

A todos os professores da UFCA que participam direta ou indiretamente do PROFMAT.

A EEMTI Belarmino Lins de Medeiros, por conciliar meus horários de trabalho com os do mestrado, de modo que eu pudesse realizar ambas as atividades da maneira menos desgastante possível.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo apoio financeiro.

*"A mente que se abre a uma nova ideia  
jamais voltará ao seu tamanho original"  
(Albert Einstein)*

## RESUMO

Esta dissertação tem como principal objetivo apresentar um estudo sobre as funções hiperbólicas a partir de uma abordagem geométrica na hipérbole. Iniciaremos revisando alguns conceitos preliminares, a saber: as funções exponenciais, logarítmicas e trigonométricas, que se apresentam como ferramentas e alicerces, para que as definições e conceitos a serem estudados, no decorrer deste trabalho, se tornem mais compreensíveis para o leitor. Em seguida definiremos a hipérbole e, em particular, a de equação  $xy = a$ , que será de fundamental importância para a definição das funções hiperbólicas. De posse desses resultados, define-se o setor hiperbólico, o ângulo hiperbólico e as funções hiperbólicas com suas características e propriedades. Por fim, serão apresentadas algumas das principais aplicações das funções hiperbólicas, com o intuito consolidar e justificar o motivo do desenvolvimento deste trabalho.

**Palavras-chave:** Hipérbole. Funções hiperbólicas. Aplicações das funções hiperbólicas.

## ABSTRACT

This dissertation has as main objective to present a study on the hyperbolic functions from a geometric approach in the hyperbole. We will start by reviewing some preliminary concepts, namely: exponential, logarithmic and trigonometric functions, which are presented as tools and foundations, so that the definitions and concepts to be studied, in the course of this work, become more understandable for the reader. Then, we will define the hyperbole and, in particular, the one with equation  $xy = a$ , which will be of fundamental importance for the definition of hyperbolic functions. With these results, the hyperbolic sector, the hyperbolic angle and the hyperbolic functions with their characteristics and properties are defined. Finally, we will present some of the main applications of hyperbolic functions, in order to consolidate and justify the reason for the development of this work.

**Keywords:** Hyperbole. Hyperbolic functions. Applications of hyperbolic functions.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Circunferência trigonométrica. . . . .	15
Figura 2 – Arco trigonométrico. . . . .	17
Figura 3 – Funções trigonométricas. . . . .	18
Figura 4 – Hipérbole. . . . .	20
Figura 5 – Reta e eixo não focal. . . . .	21
Figura 6 – Assíntotas da hipérbole. . . . .	22
Figura 7 – Hipérbole $xy = k$ ( $k > 0$ ). . . . .	24
Figura 8 – Hipérbole $xy = k$ ( $k > 0$ ). . . . .	26
Figura 9 – Hipérbole $xy = k$ ( $k < 0$ ). . . . .	26
Figura 10 – Pontos da hipérbole. . . . .	27
Figura 11 – Tensão: $r > 1$ . . . . .	28
Figura 12 – Tensão: $r < 1$ . . . . .	28
Figura 13 – Tensão: $m$ e $l$ paralelas. . . . .	29
Figura 14 – Tensão: $m$ e $l$ concorrentes em $O$ . . . . .	29
Figura 15 – Tensão: $m$ e $l$ paralelas entre si. . . . .	30
Figura 16 – Tensão: segmentos proporcionais. . . . .	31
Figura 17 – Tensão de figuras. . . . .	32
Figura 18 – Tensão sobre um quadrado de lado $l$ . . . . .	33
Figura 19 – Tensão sobre uma figura $F$ . . . . .	33
Figura 20 – Rotação hiperbólica. . . . .	35
Figura 21 – Logaritmo natural. . . . .	36
Figura 22 – Logaritmo natural. . . . .	37
Figura 23 – Setor hiperbólico. . . . .	38
Figura 24 – Ângulos hiperbólicos. . . . .	39
Figura 25 – Funções hiperbólicas. . . . .	40
Figura 26 – Sinal do ângulo hiperbólico. . . . .	41
Figura 27 – Homotetia. . . . .	43
Figura 28 – Homotetia de figuras. . . . .	43
Figura 29 – Homotetia sobre uma reta. . . . .	44
Figura 30 – Homotetia sobre retas paralelas. . . . .	44
Figura 31 – Área de figuras homotéticas. . . . .	45
Figura 32 – Área de figuras homotéticas. . . . .	46
Figura 33 – Área abaixo do gráfico. . . . .	48
Figura 34 – Área do setor hiperbólico. . . . .	48
Figura 35 – Área do Setor Hiperbólico. . . . .	49
Figura 36 – Catenária. . . . .	54

Figura 37 – Ponte Juscelino Kubitschek. . . . .	55
Figura 38 – Gateway Arch. . . . .	55
Figura 39 – Basílica da Sagrada Família. . . . .	55
Figura 40 – Equação da catenária. . . . .	56
Figura 41 – Comprimento da catenária. . . . .	57
Figura 42 – Comprimento da catenária. . . . .	58
Figura 43 – Comprimento do cabo. . . . .	58

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>CONCEITOS E RESULTADOS PRELIMINARES</b>	<b>10</b>
2.1	Função Exponencial . . . . .	10
2.2	Função Logarítmica . . . . .	12
2.3	Função Trigonométricas . . . . .	15
<b>3</b>	<b>A HIPÉRBOLE</b>	<b>20</b>
3.1	A Hipérbole . . . . .	20
3.1.1	Assíntotas da Hipérbole . . . . .	22
3.1.2	Equação Reduzida da Hipérbole . . . . .	22
3.2	A Hipérbole $xy = k$ . . . . .	24
3.3	Rotação Hiperbólica . . . . .	28
3.3.1	Transformação de Tensão . . . . .	28
3.3.2	Rotação Hiperbólica . . . . .	34
3.3.3	Uma Interpretação Geométrica para o Logaritmo Natural . . .	36
<b>4</b>	<b>AS FUNÇÕES HIPERBÓLICAS</b>	<b>38</b>
4.1	Setor Hiperbólico e Ângulo Hiperbólico . . . . .	38
4.2	Funções Hiperbólicas . . . . .	39
4.3	Forma Analítica das Funções Hiperbólicas . . . . .	43
4.3.1	Transformação Homotética . . . . .	43
4.3.2	Cálculo da Área do Setor Hiperbólico . . . . .	46
4.3.3	Forma Analítica das Funções Hiperbólicas . . . . .	50
4.3.4	Derivadas das Funções Hiperbólicas . . . . .	52
<b>5</b>	<b>APLICAÇÕES DAS FUNÇÕES HIPERBÓLICAS</b>	<b>54</b>
5.1	A Catenária . . . . .	54
5.2	Velocidade das ondas do mar . . . . .	59
5.3	Polinômios de Fibonacci e Polinômios de Lucas . . . . .	61
5.3.1	Funções Hiperbólicas e Números Complexos . . . . .	61
5.3.2	Polinômios de Fibonacci e Polinômios de Lucas . . . . .	61
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>66</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>67</b>

# 1 INTRODUÇÃO

Na abordagem de um conteúdo matemático é importante apoiar-se no seu conceito, na sua manipulação e nas suas aplicações. Isto significa dizer que devemos definir o objeto matemático, exercitar o que foi definido e encontrar aplicações que justifiquem a razão de se estudar tal conteúdo.

Ao longo do Ensino Médio são apresentados aos alunos aspectos gerais das funções, tais como: definição, notação, domínio e imagem, sendo desenvolvidas as habilidades de leitura, representação e interpretação de seus gráficos. A partir da formalização destes conceitos, há um tratamento específico das funções de acordo com cada tipo de modelo matemático, sendo elas: afim, quadrática, modular, polinomial, exponencial, logarítmica e trigonométricas, cada uma com suas particularidades. Ao se abordar as funções trigonométricas, poucas vezes é citada a existência de outro tipo de funções similares a estas, a saber, as hiperbólicas.

As funções hiperbólicas surgiram da comparação das funções trigonométricas com as funções logarítmicas e exponenciais. Porém, para defini-las, foi utilizada a hipérbole equilátera  $x^2 - y^2 = 1$ , de maneira análoga à definição das funções trigonométricas na circunferência unitária de equação  $x^2 + y^2 = 1$ . O matemático suíço Johann Heinrich Lambert (1728 - 1777) foi o primeiro a estudar essas funções, apresentando o primeiro desenvolvimento sistemático das Funções Hiperbólicas, publicando em 1768 as notações  $\sinh x$  e  $\cosh x$  para essas mesmas funções, que vigoram até hoje.

Dentro da Matemática as funções hiperbólicas são um tópico importante, presente nas matrizes curriculares dos cursos de graduação em Matemática, em disciplinas como Cálculo Diferencial, sendo que muitas vezes são abordadas de forma isolada e superficial, não permitindo ao estudante uma boa compreensão dos conceitos relacionados a este tipo de função. Visto isso, surgiu o desejo de apresentar este conteúdo de forma contextualizada e aprofundada, tornando-o mais compreensível e significativo para o leitor.

Diante dessa questão, o presente trabalho tem como principal objetivo apresentar um estudo sobre as funções hiperbólicas de forma contextualizada, a fim de servir como material de apoio para professores do Ensino Médio que desejam apresentar esse conteúdo para seus alunos em sala de aula e para estudantes que estão ingressando na graduação, proporcionando-lhes conhecimentos básicos que permitam ter menos dificuldades em lidar com essas funções e continuar seus estudos, contribuindo para que estes possam compreender os processos matemáticos envolvidos na conceituação, manipulação e aplicações das funções hiperbólicas.

Deste modo, o estudo dessas funções se torna um tema importante de ser abordado, uma vez que os leitores deste trabalho poderão obter um conhecimento mais aprofundado acerca deste tema e, com isso, tornar sua trajetória de estudos, seja ela no Ensino

Médio ou no Ensino Superior, mais prazerosa e relevante.

Assim, para uma melhor compreensão sobre o assunto, este trabalho está organizado em seis capítulos. O primeiro capítulo se refere à introdução, em que consta a apresentação do tema e de sua relevância, a motivação para realização do estudo, a justificativa e o principal objetivo do estudo realizado.

No segundo capítulo, faremos uma abordagem sobre as funções exponenciais, logarítmicas e trigonométricas, cada uma com suas relações e particularidades. Tal estudo se faz necessário para que possamos utilizar estas funções como ferramentas na construção do estudo das funções hiperbólicas.

No terceiro capítulo, será apresentada a hipérbole e suas assíntotas, além da equação reduzida da hipérbole e a rotação hiperbólica. Também será abordada a transformação de tensão, que se apresenta como um tipo de função extremamente importante para definirmos as funções hiperbólicas. E finalizando este capítulo, faremos uma interpretação geométrica para o logaritmo natural.

O quarto capítulo adentra diretamente nas funções hiperbólicas, definindo o setor hiperbólico e o ângulo hiperbólico, fazendo um paralelo com as funções trigonométricas circulares, a fim de definir as funções hiperbólicas, apresentando definições e demonstrações relacionados aos conceitos do objeto matemático apresentado.

No quinto capítulo, serão apresentadas algumas das principais aplicações das funções hiperbólicas, com o intuito de justificar ao leitor a importância de se estudar e conhecer este tipo de funções.

Por fim, o sexto e último capítulo, é dedicado à elaboração das considerações finais do estudo realizado, no qual será retomado o tema, considerando as principais ideias discutidas sobre as funções hiperbólicas e suas aplicações, visando alcançar o objetivo proposto neste trabalho.

# 2 CONCEITOS E RESULTADOS PRELIMINARES

Neste capítulo, faremos uma abordagem de alguns conceitos e resultados relativos as funções exponenciais, logarítmicas e trigonométricas. O estudo destas funções é de fundamental importância para que possamos ter uma melhor compreensão das propriedades e características das funções hiperbólicas, objeto de estudo deste trabalho.

Vale ressaltar que abordaremos os resultados deste capítulo de acordo com [8], [10] e [11].

## 2.1 Função Exponencial

**Definição 1** Chama-se *função exponencial de base a* a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  tal que  $f(x) = a^x$ , em que  $0 < a \neq 1$ .

A função exponencial de base a possui as seguintes propriedades, para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}$ :

1)  $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ ;

2)  $a^1 = a$ ;

3)  $f(x)$  é **crecente** se  $a > 1$  e **decrescente** se  $0 < a < 1$ , isto é,

- $x < y \Rightarrow a^x < a^y$  quando  $a > 1$ ;
- $x < y \Rightarrow a^x > a^y$  quando  $0 < a < 1$ .

4) A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  é **ilimitada superiormente**, ou seja, se  $a > 1$ , então a função  $f(x) = a^x$  cresce sem limites quando  $x$  é muito grande. E se  $0 < a < 1$ , a função  $f(x) = a^x$  torna-se arbitrariamente grande se  $x < 0$  possui valor absoluto grande.

5) A função exponencial é **sobrejetiva**, isto é, para todo  $y \in \mathbb{R}_+^*$  existe um  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = y$ .

6) A função exponencial também é **injetiva**, pois dados  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  tem-se

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Portanto, a função exponencial é **bijetiva**, isto é, dada a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ , definida por  $f(x) = a^x$ , existe uma correspondência biunívoca  $f$  entre os conjuntos  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{R}_+^*$ .

Ao nos depararmos com um determinado tipo de problema elementar de Matemática, é bastante comum surgir dificuldades na identificação de quais métodos matemáticos devemos utilizar para solucionar tal problema. Para que possamos identificar qual modelo deve ser utilizado, é preciso conhecer quais propriedades caracterizam cada função. No caso das funções exponenciais enunciaremos três proposições cujos resultados nos permitem identificar se o problema em questão representa ou não uma função exponencial. As demonstrações de cada uma destas proposições podem ser vistas na referência [11], de onde foram retiradas as mesmas.

**Proposição 2.1.1 (Caracterização da Função Exponencial)** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente). As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (1)  $f(nx) = f(x)^n$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$  e todo  $x \in \mathbb{R}$ ;
- (2)  $f(x) = a^x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , onde  $a = f(1)$ ;
- (3)  $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$  para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}$ .

**Observação:** A hipótese (1) acarreta que, para todo número racional  $r = m/n$ , (com  $m \in \mathbb{Z}$  e  $n \in \mathbb{N}$  tem-se  $f(rx) = f(x)^r$ . De fato, como  $nr = m$ , podemos escrever

$$f(rx)^n = f(nrx) = f(mx) = f(x)^m.$$

**Proposição 2.1.2 (Primeira Caracterização das Funções do Tipo Exponencial)** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) tal que, para  $x, h \in \mathbb{R}$  quaisquer, o acréscimo relativo  $[f(x+h) - f(x)]/f(x)$  depende apenas de  $h$ , mas não de  $x$ . Então, se  $b = f(0)$  e  $a = f(1)/f(0)$ , tem-se  $f(x) = ba^x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .*

**Proposição 2.1.3 (Segunda Caracterização das Funções do Tipo Exponencial)** *Para cada  $b$  e  $t$  reais, suponhamos dado um número  $f(b, t) > 0$  com as seguintes propriedades:*

- 1)  $f(b, t)$  depende linearmente de  $b$  e é monótona injetiva em relação a  $t$ ;
- 2)  $f(b, s + t) = f(f(b, s), t)$ .

Então  $a = f(1, 1)$ , tem-se  $f(b, t) = b \cdot a^t$ .

**Exemplo 1** *Dada a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  dada por  $f(x) = e^x$ . Mostre, utilizando o Teorema de caracterização da função exponencial, que  $f(x)$  representa uma função exponencial de base  $e$ .*

**Observação:** O número  $e$  representa a base dos logaritmos naturais e seu valor aproximado é  $e \cong 2,7182$ . Os logaritmos naturais são bastante utilizados em aplicações do

cálculo diferencial e, de modo geral, são os mais adequados cientificamente. No próximo capítulo faremos uma interpretação geométrica para este tipo de logaritmo.

**Solução:** Provaremos as implicações  $(1) \Rightarrow (2)$ ,  $(2) \Rightarrow (3)$  e  $(3) \Rightarrow (1)$ . A fim de mostrarmos que  $(1) \Rightarrow (2)$  observamos inicialmente que a hipótese (1) acarreta que, para todo número real  $x$  e todo número inteiro  $n$  tem-se  $f(nx) = f(x)^n$ . Daí,  $f(1) = e^1 = e$  e

$$f(x) = f(1 \cdot x) = f(1)^x = e^x.$$

Para mostrar que  $(2) \Rightarrow (3)$ , consideremos a hipótese (2), ou seja, pondo  $a = f(1)$  resulta que  $f(x) = a^x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Consequentemente,

$$f(x + y) = a^{x+y} = a^x \cdot a^y = f(x) \cdot f(y).$$

Por fim, se (3) é válida, ou seja,  $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$  para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}$  e supondo  $n$  um número inteiro maior ou igual a zero, tem-se

$$f(nx) = f(\underbrace{x + x + \dots + x}_{n \text{ vezes}}) = f(x) \cdot f(x) \cdot \dots \cdot f(x) = e^x \cdot e^x \cdot \dots \cdot e^x = e^{x+x+\dots+x} = e^{nx}.$$

Se  $n$  é um número inteiro negativo, então  $-n$  será positivo, daí

$$\begin{aligned} f(nx) = f[(-n)(-x)] &= f(\underbrace{[(-x) + (-x) + \dots + (-x)]}_{(-n) \text{ vezes}}) \\ &= f(-x) \cdot f(-x) \cdot \dots \cdot f(-x) \\ &= e^{-x} \cdot e^{-x} \cdot \dots \cdot e^{-x} \\ &= e^{(-x)+(-x)+\dots+(-x)} \\ &= e^{(-n)(-x)} = e^{nx}. \end{aligned}$$

Ou seja,  $(3) \Rightarrow (1)$ . Logo, pelo Teorema de caracterização da função exponencial, a função  $f(x) = e^x$  é uma função exponencial de base  $e$ .

## 2.2 Função Logarítmica

Iniciaremos esta seção definindo a função inversa, pois as propriedades e características deste tipo de função serão de fundamental importância para o estudo das funções logarítmicas.

**Definição 2 (Função Inversa)** *Dada uma função  $f : A \rightarrow B$ , dizemos que  $g : B \rightarrow A$  é uma função inversa de  $f$  quando  $g(f(x)) = x$  e  $f(g(y)) = y$  para quaisquer  $x \in A$  e  $y \in B$ .*

Note que, de acordo com a definição de função inversa, se uma função  $g$  é a inversa de uma função  $f$ , então  $f$  também é a inversa de  $g$ .

**Observação:** Quando  $g : B \rightarrow A$  for a inversa de  $f : A \rightarrow B$ , denotaremos por  $g = f^{-1}$ .

**Exemplo 2** Sejam  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funções definidas por  $f(x) = 2x + 1$  e  $g(y) = \frac{y-1}{2}$ . Tem-se

$$g(f(x)) = g(2x + 1) = \frac{(2x + 1) - 1}{2} = x$$

e

$$f(g(y)) = f\left(\frac{y-1}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{y-1}{2}\right) + 1 = y.$$

Para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}$ . Portanto,  $g$  é a inversa de  $f$ .

**Proposição 2.2.4** A função  $f : A \rightarrow B$  possui uma inversa se, e somente se,  $f$  é uma bijeção entre  $A$  e  $B$ .

**Demonstração:** Seja  $g$  a inversa da função  $f$ . Daí,  $g(f(x)) = x$  para todo  $x \in A$ . Assim, dados  $x_1, x_2 \in A$  tem-se

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Ou seja,  $f$  é injetiva. Como  $f(g(y)) = y$ , dado  $y \in B$  arbitrário, tomamos  $x = g(y) \in A$  resulta que  $f(x) = y$ . Isto é,  $f$  é sobrejetiva. Portanto  $f$  é uma bijeção (correspondência biunívoca) entre  $A$  e  $B$ .

Reciprocamente, como  $f$  é uma correspondência biunívoca entre  $A$  e  $B$ , para todo  $y \in B$  existe um único  $x \in A$  tal que  $f(x) = y$ , pelo fato de  $f$  ser sobrejetiva. Este  $x$  é único, pois  $f$  também é injetiva. Daí, pondo  $g(y) = x$ , temos uma função  $g : B \rightarrow A$  que associa a cada  $y \in B$  a um único  $x \in A$  de modo que  $f(x) = y$ . Note que  $g(f(x)) = x$  e  $f(g(y)) = y$  para todo  $x \in A$  e  $y \in B$ . Ou seja,  $g$  é a inversa de  $f$ . Como queríamos demonstrar.

**Definição 3 (Logaritmo)** Dado um número real  $a > 0$ , com  $a \neq 1$ , o logaritmo de um número  $x > 0$  na base  $a$  é o expoente  $y$  a que se deve elevar  $a$  de modo que  $a^y = x$ . Escreve-se  $y = \log_a x$  e lê-se  $y$  é o logaritmo de  $x$  na base  $a$ .

Desse modo, dizer que  $y = \log_a x$  é o mesmo que afirmar que  $a^y = x$ . Assim, podemos escrever

$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x.$$

Da definição de logaritmo, decorrem as seguintes propriedades:

a)  $\log_a 1 = 0$ , pois  $a^0 = 1$ .

b)  $\log_a a = 1$ , pois  $a^1 = a$ .

c)  $\log_a b^r = r \cdot \log_a b$ , com  $r \in \mathbb{R}$ .

De fato, fazendo  $\log_a b = \alpha$  e  $\log_a b^r = \beta$ , temos  $a^\alpha = b$  e  $a^\beta = b^r$ , consequentemente

$$a^\beta = b^r = (a^\alpha)^r = a^{r\alpha} \Leftrightarrow \beta = r\alpha.$$

Isto é,  $\log_a b^r = r \cdot \log_a b$ .

d)  $a^{\log_a b} = b$ .

Para justificar essa propriedade podemos fazer:  $\log_a b = c \Rightarrow a^c = b$ . Daí,  $a^{\log_a b} = a^c = b$ .

e)  $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

Tal propriedade é conhecida como *propriedade fundamental dos logaritmos* e para demonstra-la, basta considerar  $\alpha = \log_a x$  e  $\beta = \log_a y$ , daí  $a^\alpha = x$  e  $a^\beta = y$ . Deste modo

$$xy = a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta},$$

Isto é,

$$\log_a xy = \log_a a^{\alpha+\beta} = \alpha + \beta = \log_a x + \log_a y.$$

f)  $\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x$ .

De fato, se  $\alpha = \log_a x$  e  $\beta = \log_b x$ , então  $x = a^\alpha$  e  $x = b^\beta$ . Escrevendo  $c = \log_a b$  teremos  $b = a^c$ . Daí,

$$x = a^\alpha = b^\beta = (a^c)^\beta = a^{c\beta}.$$

Portanto,  $\alpha = c\beta$ , ou seja,  $\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x$ . Essa propriedade é conhecida como *fórmula de mudança de base* para logaritmos.

Pelas Propriedades 5) e 6) vistas na seção anterior, a função exponencial de base  $a$  é bijetiva e, portanto, pela Proposição 2.2.4 possui uma inversa. Assim, dada a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  dada por  $f(x) = a^x$ , com  $0 < a \neq 1$ , existe uma inversa de  $f$  que denotaremos por  $l$ .

Sejam as funções  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  e  $l: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por  $f(x) = a^x$  e  $l(x) = \log_a x$ , com  $a$  positivo e diferente de 1. Note que,

$$f(l(x)) = f(\log_a x) = a^{\log_a x} = x$$

e

$$l(f(x)) = l(a^x) = \log_a a^x = x.$$

Ou seja,  $l(x) = \log_a x$ , que associa a cada número real positivo  $x$  o número real  $\log_a x$ , é a inversa da função  $f(x) = a^x$ . Daí, podemos dizer que a função logarítmica na base  $a$  é a inversa da função exponencial na mesma base  $a$ .

Como a função  $l : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $l(x) = \log_a x$  possui uma inversa, segue da Proposição 2.2.4 que  $l$  é uma bijeção entre  $\mathbb{R}_+^*$  e  $\mathbb{R}$ . Daí, pelo fato de a função  $x \mapsto a^x$  de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , inversa de  $l$ , ser crescente para  $a > 1$  e decrescente para  $0 < a < 1$ , implica que a função  $\log_a x : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  também será crescente e decrescente nesses respectivos intervalos.

Dentre as funções logarítmicas mais utilizadas em aplicações matemáticas, destacam-se as de base  $a > 1$ , em especial as de base 2 (logaritmos binários), as de base 10 (logaritmos decimais) e as de base  $e$  (logaritmos naturais).

A seguir enunciaremos uma proposição que nos permite identificar se o problema ou modelo matemático em questão representa ou não uma função logarítmica. Tal resultado é conhecido como *Caracterização das Funções Logarítmicas* e sua demonstração pode ser vista na referência [11].

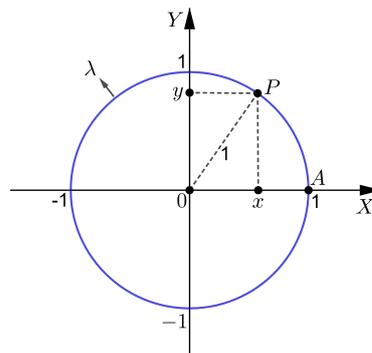
**Proposição 2.2.5** *Seja  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) tal que  $f(xy) = f(x) + f(y)$  para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}^+$ . Então existe  $a > 0$  e  $a \neq 1$  tal que  $f(x) = \log_a x$  para todo  $x \in \mathbb{R}^+$ .*

Essa Proposição será de grande valia para que seja feita uma interpretação geométrica para o gráfico do logaritmo natural no próximo capítulo.

## 2.3 Funções Trigonômicas

Considere a circunferência unitária centrada na origem (ou seja, de raio 1) também conhecida como circunferência ou ciclo trigonométrico, localizada no plano  $XOY$ . Denotando esta circunferência por  $\lambda$  temos  $\lambda = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$ .

Figura 1: Circunferência trigonométrica.



Fonte: [8].

Note que, para todo ponto  $P(x, y)$  pertencente a circunferência trigonométrica tem-se  $-1 \leq x \leq 1$  e  $-1 \leq y \leq 1$ .

Sendo  $A$  e  $P$  pontos pertencentes a esta circunferência, chamamos de *setor circular* a região limitada pelos segmentos  $OA$ ,  $OP$  e pela parte da circunferência  $\lambda$  compreendida entre os pontos  $A$  e  $P$ .

A medida do ângulo  $\theta$  é dado pela razão entre o comprimento do arco  $\widehat{AP}$  e a mediada do raio  $r$  da circunferência, isto é,  $\theta = \text{med}(\widehat{AP})/r$ . Há duas unidades que se destacam para medir ângulos: o grau (indicado por  $^\circ$ ) e o radiano (indicado por *rad*). O *grau* é um arco unitário cuja medida é igual a  $1/360$  da circunferência. Já o *radiano* é um arco unitário de medida igual ao raio  $r$  da circunferência.

Note que o arco de uma volta completa é igual ao comprimento  $C$  da circunferência. Daí, como na circunferência unitária  $r = 1$ , temos

$$C = 2\pi r = 2\pi \cdot 1 = 2\pi \Rightarrow \theta = 2\pi/r = 2\pi/1 = 2\pi \text{ rad.}$$

No que se segue, podemos estabelecer uma relação entre o ângulo  $\theta$  e a área  $A_s$  do setor circular. Como na circunferência trigonométrica  $r = 1$ , sua área é dada por  $\pi \cdot r^2 = \pi \cdot 1 = \pi$  unidades de área (*u.a.*). Assim, chamando a área dos setor circular  $AOP$  de  $A_s$ , podemos estabelecer a seguinte relação

Ângulo do Setor (em <i>rad</i> )	Área (em <i>u.a.</i> )
$2\pi$	$\pi$
$\theta$	$A_s$

E, pela Lei das Proporções, tem-se

$$\theta \cdot \pi = 2\pi \cdot A_s \Rightarrow \theta = 2A_s.$$

Ou seja, a medida do ângulo do setor trigonométrico pode ser dado pelo dobro da medida da área do setor por ele determinado.

Pela definição de círculo trigonométrico, cada ponto  $P$  pertencente a circunferência está associado a um número real  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Reciprocamente, cada número real desse intervalo associa-se a um ponto sobre a circunferência trigonométrica.

A fim de definirmos as funções trigonométricas, vamos estender o intervalo dessa associação. Ou seja, cada número real está associado a um ponto da circunferência trigonométrica. Deste modo, estaremos incluindo os números reais negativos e os números reais maiores ou iguais a  $2\pi$ , ocasionando uma ampliação dos nossos estudos para às demais voltas.

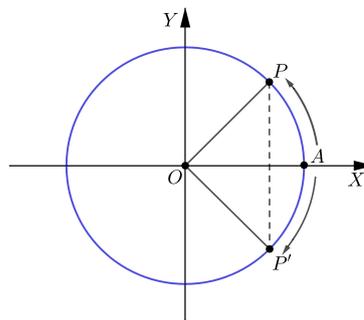
Sendo  $\theta$  um número real, considere a seguinte função  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \lambda$ , conhecida como função de Euler, tal que  $\varphi(\theta) = (x, y)$  e vamos estabelecer a seguinte relação:

- Se  $\theta = 0$ , então  $\varphi(0) = (1, 0)$ , ou seja,  $P = A$ .

- Se  $\theta > 0$ , então percorremos sobre a circunferência  $\lambda$ , a partir de  $A$ , um arco de comprimento  $\theta$ , no sentido anti-horário, de modo que o ponto final do percurso seja o ponto  $P$ .
- Se  $\theta < 0$ , então percorremos a partir de  $A$  um arco de comprimento  $|\theta|$ , no sentido horário, de modo que o ponto final do percurso seja o ponto  $P$ .

O ponto  $P$  é chamado de *imagem de  $\theta$*  na circunferência. Observe a Figura 2 a seguir:

Figura 2: Arco trigonométrico.



Fonte: O Autor.

Assim, por exemplo, se  $\theta = \pi/4 \text{ rad}$ , percorremos no sentido anti-horário, de  $A$  para  $P$ , um arco de comprimento  $\theta = \pi/4$  unidades de comprimento (*u.c.*), enquanto que se  $\theta = -\pi/4 \text{ rad}$ , então percorremos no sentido horário, de  $A$  para  $P'$ , um arco de mesmo comprimento  $|\theta| = \pi/4 \text{ u.c.}$

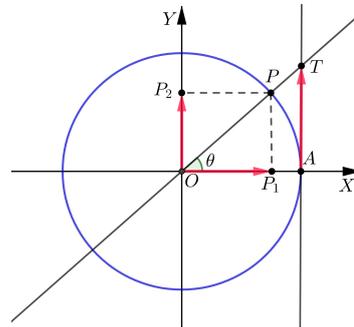
Observe que  $\varphi(\theta) = \varphi(\theta + 2k\pi)$ , isto é, se percorremos a partir de  $P$  uma volta ( $\theta \pm 2\pi$ ), duas voltas ( $\theta \pm 4\pi$ ), ou de modo geral  $k$  voltas ( $\theta \pm 2k\pi$ ), no sentido anti-horário ou horário, respectivamente, paramos no mesmo ponto  $P$ , ou seja, teremos a mesma imagem.

Deste modo, por exemplo, se  $\theta = 9\pi/2$  temos

$$\varphi\left(\frac{9\pi}{2}\right) = \varphi\left(\frac{\pi}{2} + \frac{8\pi}{2}\right) = \varphi\left(\frac{\pi}{2} + 4\pi\right) = \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Seja  $\theta$  um número real e  $P$  sua imagem na circunferência trigonométrica de modo que as coordenadas de  $P$  são  $\overline{OP}_1$  e  $\overline{OP}_2$  (Figura 3).

Figura 3: Funções trigonométricas.



Fonte: [8].

No triângulo  $OP_1P$ , definimos o seno de  $\theta$  por

$$\operatorname{sen} \theta := \frac{\overline{P_1P}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OP_2}}{1} = \overline{OP_2} \Rightarrow \operatorname{sen} \theta := \overline{OP_2}$$

e definimos o cosseno de  $\theta$  por

$$\operatorname{cos} \theta := \frac{\overline{OP_1}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OP_1}}{1} = \overline{OP_1} \Rightarrow \operatorname{cos} \theta := \overline{OP_1}.$$

Nestas condições, definimos *função seno* e *função cosseno* as funções de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$  que associam a cada número real  $\theta$  aos números  $\overline{OP_2} = \operatorname{sen} \theta$  e  $\overline{OP_1} = \operatorname{cos} \theta$ , respectivamente. Isto é,  $\varphi(\theta) = (\operatorname{cos} \theta, \operatorname{sen} \theta)$ .

Definimos ainda como *função tangente* a função  $\tau$  de  $\mathbb{R} - \{\pi/2 + 2k\pi\}$  em  $\mathbb{R}$  que associa a cada número real  $\theta$ , com  $\theta \neq \pi/2 + 2k\pi$ , o número real  $\overline{AT} = \operatorname{tg} \theta$ , isto é,  $\tau(\theta) := \operatorname{tg} \theta$ .

**Proposição 2.3.6** *A tangente de um ângulo trigonométrico  $\theta$ , indicada por  $\operatorname{tg} \theta$ , é a razão entre o seno e cosseno do ângulo  $\theta$ .*

**Demonstração:** Note que o ângulo  $\theta$  é comum aos triângulos  $OP_1P$  e  $OAT$  e os ângulos  $OP_1P$  e  $OAT$  são ângulos retos. Logo, pelo caso *AA* de semelhança de triângulos, os triângulos  $OP_1P$  e  $OAT$  são semelhantes. Daí, seus lados são proporcionais, isto é

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{OP_1}}.$$

Como  $\overline{AT} = \operatorname{tg} \theta$ ,  $\overline{OA} = 1$ ,  $\overline{P_1P} = \overline{OP_2} = \operatorname{sen} \theta$  e  $\overline{OP_1} = \operatorname{cos} \theta$ , resulta que

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\operatorname{cos} \theta}.$$

Das funções trigonométricas já definidas, surgem outras funções chamadas cotan-

gente, secante e cossecante, definidas, respectivamente, como:

$$\cotg \theta := \frac{\cos \theta}{\sen \theta}, \sec \theta := \frac{1}{\cos \theta} \text{ e } \operatorname{cossec} \theta := \frac{1}{\sen \theta}.$$

De modo que todas estas funções têm seus domínios restritos aos números reais para os quais o denominador é diferente de zero.

Para um estudo mais completo a respeito das funções trigonométricas, sugerimos a referência [8], pois os assuntos abordados nesta seção são apenas os de interesse para o entendimento acerca do objeto de estudo deste trabalho.

# 3 A HIPÉRBOLE

Neste capítulo, estudaremos o conceito de hipérbole, bem como seus principais elementos. Definiremos a hipérbole como um lugar geométrico e obteremos a chamada equação reduzida da hipérbole.

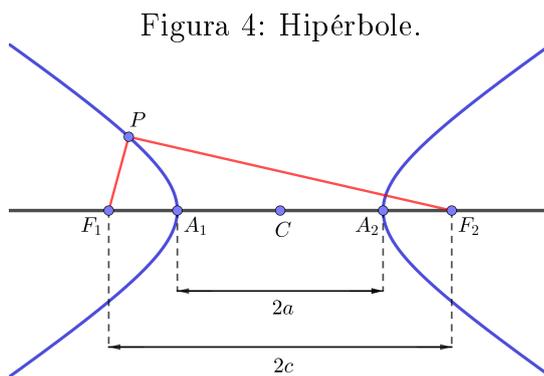
Vale ressaltar que no presente trabalho, abordaremos apenas a hipérbole centrada na origem e reta focal coincidente com o eixo  $OX$ , e a hipérbole de equação  $xy = k$  com  $k \neq 0$ . Para estudos referente a outros casos de hipérbole sugerimos a referência [3].

## 3.1 A Hipérbole

Nesta seção, abordaremos resultados de acordo com [3]. Definiremos a hipérbole, suas assíntotas e sua equação reduzida.

**Definição 4** Uma hipérbole  $\mathcal{H}$  é o lugar geométrico<sup>1</sup> de todos os pontos  $P$  do plano para os quais o módulo da diferença de suas distâncias a dois pontos fixos  $F_1$  e  $F_2$  é igual a uma constante  $2a > 0$  e menor do que a distância  $2c > 0$  entre os pontos  $F_1$  e  $F_2$ , ou seja

$$\mathcal{H} = \{P/ |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a\}, \quad 0 < a < c, \quad d(F_1, F_2) = 2c.$$



Fonte: O Autor.

A hipérbole  $\mathcal{H}$  possui dois ramos, um formado pelos pontos  $P$  para os quais a diferença  $d(P, F_1) - d(P, F_2)$  é positiva e igual a  $2a$  (ramo direito da hipérbole), e outro pelos pontos em que a diferença é negativa e igual a  $-2a$  (ramo esquerdo da hipérbole).

Em um sistema de eixos ortogonais  $XOY$  de tal forma que os focos possuam coordenadas  $F_1(-c, 0)$  e  $F_2(c, 0)$ , se  $P(x, y)$  está no ramo esquerdo da hipérbole, então

<sup>1</sup>O lugar geométrico com uma propriedade  $P$  é constituído exatamente pelos pontos do plano que satisfazem tal propriedade.

$P'(-x, y)$ , simétrico de  $P$  em relação ao eixo  $OY$ , está no ramo direito. Dessa forma, os ramos da hipérbole apresentam-se de forma simétrica em relação ao eixo  $OY$ .

Vejam agora alguns dos principais elementos da hipérbole:

- Os pontos  $F_1$  e  $F_2$  são os **focos** da hipérbole  $\mathcal{H}$ .
- A reta  $r$  que contém os focos é a **reta focal**.
- Os pontos  $A_1$  e  $A_2$  que correspondem a interseção da hipérbole  $\mathcal{H}$  com a reta focal  $r$  são chamados de **vértices** da hipérbole.
- O segmento  $\overline{A_1A_2}$  é denominado **eixo focal** e seu comprimento vale  $2a$ , ou seja,

$$d(A_1, A_2) = 2a.$$

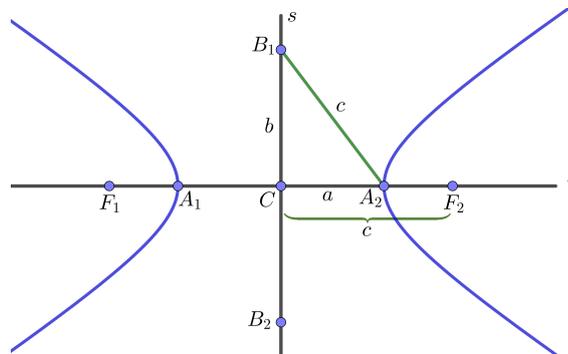
- O ponto  $C$  é o **centro** da hipérbole. Observe que  $C$  é o ponto médio dos segmentos  $\overline{A_1A_2}$  e  $\overline{F_1F_2}$ , ou seja:

$$C = \frac{A_1 + A_2}{2} = \frac{F_1 + F_2}{2}$$

Observe ainda que  $d(C, F_1) = d(C, F_2) = c$  e  $d(C, A_1) = d(C, A_2) = a$ .

- Uma reta  $s$  que intersecta o ponto  $C$  e é perpendicular à reta  $r$  é chamada de **reta não focal** da hipérbole (Figura 5).
- O segmento  $\overline{B_1B_2}$ , perpendicular ao eixo focal que tem ponto médio  $C$ , e comprimento  $2b$ , onde  $b^2 = c^2 - a^2$ , é denominado **eixo não focal** da hipérbole, e  $B_1$  e  $B_2$  são os vértices imaginários da hipérbole (Figura 5).

Figura 5: Reta e eixo não focal.



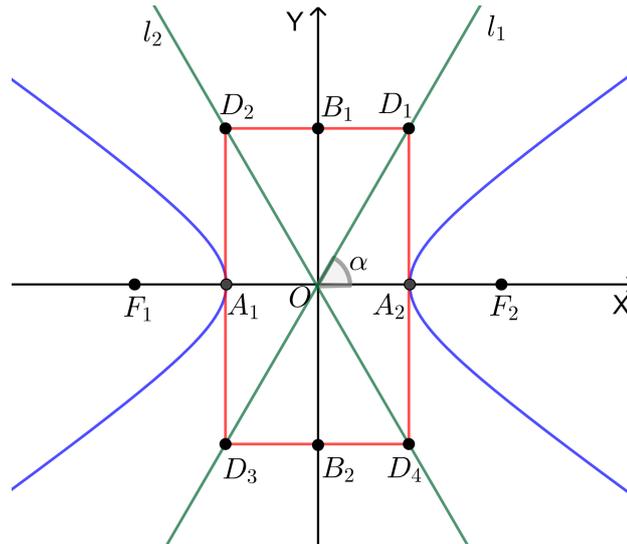
Fonte: O Autor.

- O número  $e = \frac{c}{a}$ , é chamado de **excentricidade** da hipérbole  $\mathcal{H}$ . Observe que  $e > 1$ , pois  $c > a$ .

### 3.1.1 Assíntotas da Hipérbole

Considere a hipérbole localizada no plano  $XOY$  e o retângulo  $D_1D_2D_3D_4$  cujos lados têm  $A_1, A_2, B_1$  e  $B_2$  como pontos médios (Figura 6). As retas  $l_1$  e  $l_2$  que contêm as diagonais desse retângulo são denominadas **assíntotas da hipérbole**.

Figura 6: Assíntotas da hipérbole.



Fonte: O Autor.

Observe que as assíntotas  $l_1$  e  $l_2$  são retas que passam pela origem  $O$  do sistema cartesiano. Logo, do ponto de vista analítico, podemos determinar suas respectivas equações, que serão do tipo  $y = \pm mx$ , onde  $m$  é o coeficiente angular da reta. O coeficiente angular  $m$  é dado por  $m = \operatorname{tg} \alpha$ , sendo  $\alpha$  o ângulo formado pelo eixo  $X$  e a reta  $l_1$ . Logo, por trigonometria no triângulo retângulo  $OA_2D_1$  temos:

$$m = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{A_2D_1}}{\overline{OA_2}} = \frac{b}{a},$$

isto é,  $m = \frac{b}{a}$ . Portanto, a equação das assíntotas  $l_1$  e  $l_2$  são, respectivamente,  $l_1 : y = \frac{b}{a}x$  e  $l_2 : y = -\frac{b}{a}x$ , ou seja, de modo geral temos  $y = \pm \frac{b}{a}x$ .

### 3.1.2 Equação Reduzida da Hipérbole

Agora iremos determinar uma equação que representa uma hipérbole localizada no plano em um sistema de eixos ortogonais  $XOY$ , centrada na origem e com reta focal coincidente com o eixo  $OX$ . Nesse caso temos

$$F_1(-c, 0); F_2(c, 0); A_1(-a, 0); A_2(a, 0); B_1(0, b) \text{ e } B_2(0, -b).$$

Seja  $P(x, y)$  um ponto pertencente a hipérbole  $\mathcal{H}$ . Logo, pela definição de hipérbole, temos

$$P \in \mathcal{H} \Rightarrow |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a.$$

Assim,

$$\begin{aligned} d(P, F_1) - d(P, F_2) = \pm 2a &\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \pm 2a \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a. \end{aligned}$$

Podemos escrever esta equação da seguinte maneira:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos:

$$\begin{aligned} (x+c)^2 + y^2 &= 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \\ \Leftrightarrow x^2 + 2cx + c^2 &= 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 \\ \Leftrightarrow 4cx - 4a^2 &= \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Dividindo por 4 e elevando novamente ambos os membros da equação ao quadrado, temos:

$$\begin{aligned} cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} &\Leftrightarrow (cx - a^2)^2 = \left[ \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right]^2 \\ \Leftrightarrow c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 &= a^2 [(x-c)^2 + y^2] \\ \Leftrightarrow c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 &= a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) \\ \Leftrightarrow c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 &= a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 \\ \Leftrightarrow c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 &= -a^4 + a^2c^2 \\ \Leftrightarrow (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 &= a^2(c^2 - a^2). \end{aligned}$$

Como  $b^2 = c^2 - a^2$ , temos:

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \Leftrightarrow b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

Dividindo os dois membros da equação por  $a^2b^2$ , obtemos:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (3.1)$$

A equação (3.1) é chamada de **equação reduzida da hipérbole**.

**Definição 5 (Hipérbole Equilátera)** Dizemos que uma hipérbole é equilátera, sempre

que os comprimentos dos seus eixos focal e não focal forem iguais, isto é,  $a = b$ .

**Exemplo 3** A hipérbole de equação reduzida  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$  é uma hipérbole equilátera, pois  $a = b = 3$ .

**Definição 6 (Hipérbole Unitária)** Dizemos que uma hipérbole é unitária, sempre que os comprimentos dos seus eixos focal e não focal forem ambos iguais a 2, ou seja,  $a = b = 1$ .

**Exemplo 4** A hipérbole de equação reduzida  $x^2 - y^2 = 1$  é uma hipérbole unitária, pois  $a = b = 1$ .

Observe que toda hipérbole unitária é equilátera, porém a recíproca não é válida, pois nem toda hipérbole equilátera é unitária.

## 3.2 A Hipérbole $xy = k$

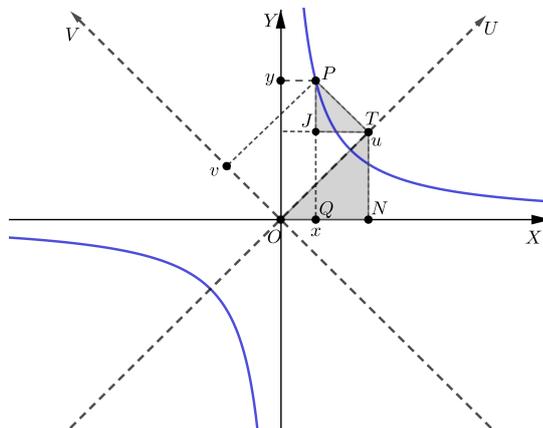
Nesta seção, mostraremos que a curva  $xy = k$  com  $k \neq 0$  representa duas hipérbolas, uma localizada no primeiro e no terceiro quadrantes, e outra localizada no segundo e no quarto quadrantes do plano  $XOY$ . Mostraremos o caso em que  $k > 0$ , pois o caso em que  $k < 0$  segue de forma análoga.

Afim de alcançarmos os objetivos propostos desta seção, abordaremos resultados de acordo com [4], [14] e [16].

**Proposição 3.2.7** A curva representada pela fórmula  $xy = k$ , com  $k > 0$ , corresponde a uma hipérbole equilátera com eixo focal sobre o eixo  $X$  do plano cartesiano  $XOY$ .

**Demonstração:** Considere a curva de equação  $xy = k$  com  $k > 0$ , localizada no primeiro quadrante do sistema de coordenadas  $XOY$ , e seja  $P(x, y)$  um ponto pertencente a essa curva tal que  $x = \overline{OQ}$  e  $y = \overline{PQ}$  (Figura 7).

Figura 7: Hipérbole  $xy = k$  ( $k > 0$ ).



Fonte: O Autor.

Aplicando uma rotação de  $45^\circ$  no sentido anti-horário no plano cartesiano  $XOY$ , obtemos um novo sistema de coordenadas cartesianas  $UOV$  no qual o ponto  $P$  passa a ter coordenadas  $u = \overline{OT}$  e  $v = \overline{PT}$ .

Como a rotação do plano  $XOY$  foi de  $45^\circ$ ,  $N\hat{O}T = O\hat{T}J = 45^\circ$  e  $P\hat{T}J = P\hat{T}O - O\hat{T}J = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ , ou seja,  $P\hat{S}N = 45^\circ$ . No triângulo retângulo  $ONT$ , temos:

$$\overline{ON} = \overline{OT} \cdot \cos(N\hat{O}T) = u \cdot \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}u$$

e

$$\overline{NT} = \overline{OT} \cdot \sen(N\hat{O}T) = u \cdot \sen 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}u.$$

Isto é,

$$\overline{ON} = \overline{NT} = \frac{\sqrt{2}}{2}u.$$

No triângulo retângulo  $TJP$ , temos:

$$\overline{JP} = \overline{PT} \cdot \sen(P\hat{T}J) = v \cdot \sen 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}v.$$

e

$$\overline{TJ} = \overline{PT} \cdot \cos(P\hat{T}J) = v \cdot \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}v.$$

Ou seja,

$$\overline{JP} = \overline{TJ} = \frac{\sqrt{2}}{2}v.$$

Note que  $\overline{TJ} = \overline{QN}$  e

$$x = \overline{OQ} = \overline{ON} - \overline{QN} = \frac{\sqrt{2}}{2}u - \frac{\sqrt{2}}{2}v = \frac{\sqrt{2}}{2}(u - v).$$

Isto é,

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(u - v). \quad (3.2)$$

Como  $y = \overline{NT} + \overline{JP}$ , resulta que

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}u + \frac{\sqrt{2}}{2}v = \frac{\sqrt{2}}{2}(u + v).$$

Logo,

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}(u + v). \quad (3.3)$$

Como o ponto  $P(x, y)$  pertence a curva  $xy = k$ , segue que:

$$xy = \frac{\sqrt{2}}{2}(u - v) \frac{\sqrt{2}}{2}(u + v) = \frac{1}{2}(u^2 - v^2) = k \Leftrightarrow \frac{1}{2}(u^2 - v^2) = k \Leftrightarrow u^2 - v^2 = 2k.$$

Dividindo ambos os membros da equação por  $2k$ , obtemos:

$$\frac{u^2}{2k} - \frac{v^2}{2k} = 1.$$

Cuja equação é equivalente a

$$\frac{u^2}{(\sqrt{2k})^2} - \frac{v^2}{(\sqrt{2k})^2} = 1.$$

Portanto, a curva  $xy = k$ , com  $k > 0$ , corresponde a uma hipérbole equilátera com  $a = b = \sqrt{2k}$ .

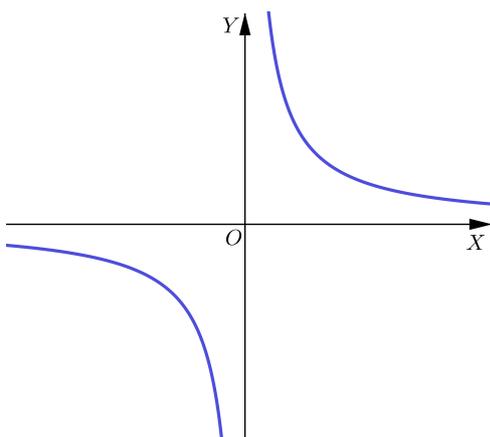
Desse modo, ao realizarmos uma rotação de  $45^\circ$ , no sentido horário, com o plano  $UOV$  em conjunto com a curva  $xy = k$ , essa curva irá coincidir com a hipérbole  $x^2/\sqrt{2k}^2 - y^2/\sqrt{2k}^2 = 1$  no plano  $XOY$ .

Assim, por exemplo, tomando  $k = 1/2$ , temos que a hipérbole  $xy = k$  corresponde a hipérbole unitária  $x^2 - y^2 = 1$ , localizada no sistema de coordenadas  $XOY$ .

Note que, no que se refere ao gráfico da curva  $xy = k$ , com  $k \neq 0$ , no sistema  $XOY$ , pode ocorrer duas situações:

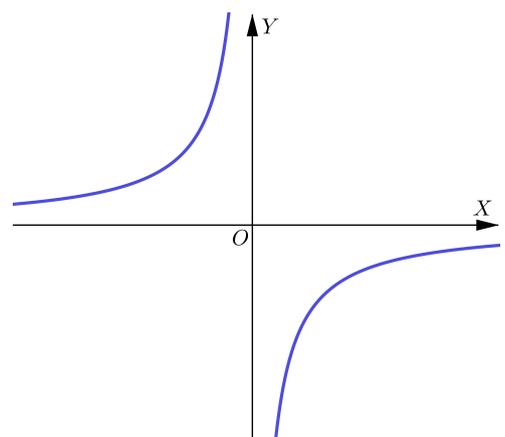
- 1) Se  $k > 0$ , então temos uma hipérbole cujos ramos localizam-se um no primeiro quadrante e o outro no terceiro quadrante do plano  $XOY$  (Figura 8).
- 2) Se  $k < 0$ , então temos uma hipérbole cujos ramos localizam-se um no segundo quadrante e o outro no quarto quadrante do plano  $XOY$  (Figura 9).

Figura 8: Hipérbole  $xy = k$  ( $k > 0$ ).



Fonte: O Autor.

Figura 9: Hipérbole  $xy = k$  ( $k < 0$ ).



Fonte: O Autor.

No que se segue, vamos nos deter a hipérbole da situação 1), pois contempla o objeto de estudo deste trabalho.

No gráfico da hipérbole  $xy = k$  ( $k > 0$ ), podemos observar que, no ramo localizado no primeiro quadrante ( $x, y > 0$ ), quanto maior o valor de  $x$  menor será o valor  $y$ , e

vice-versa, isto é, se  $x \rightarrow +\infty$ , então  $y \rightarrow 0$  e se  $y \rightarrow \infty$ , então  $x \rightarrow 0$ . Enquanto que, no ramo localizado no terceiro quadrante ( $x, y < 0$ ), quanto maior o valor de  $x$ , menor será o valor de  $y$ , isto é, se  $x \rightarrow 0$ , então  $y \rightarrow -\infty$  e se  $y \rightarrow 0$ , então  $x \rightarrow -\infty$ . De modo geral, podemos dizer que na hipérbole  $xy = k$ ,  $|x| \rightarrow 0 \Leftrightarrow |y| \rightarrow +\infty$ .

A equação algébrica da hipérbole  $xy = k$  possui uma interpretação geométrica bem simples. Considere um ponto  $P(x, y)$  pertencente a hipérbole da Figura 10. As coordenadas do ponto  $P$  são do tipo  $x = \overline{OQ}$  e  $y = \overline{OR}$ . Observe ainda, que os pontos  $O(0, 0)$ ,  $Q(x, 0)$ ,  $P(x, y)$  e  $R(0, y)$  formam um retângulo cujos lados são  $\overline{OQ}$ ,  $\overline{QP}$ ,  $\overline{PR}$  e  $\overline{RO}$ . A área desse retângulo independe do ponto  $P$  pertencente a hipérbole. De fato, seja  $P$  um ponto qualquer da hipérbole, a área  $S_{OQPR}$  do retângulo  $OQPR$  será dada por:

$$S_{OQPR} = \overline{OQ} \cdot \overline{QP} = x \cdot y = k$$

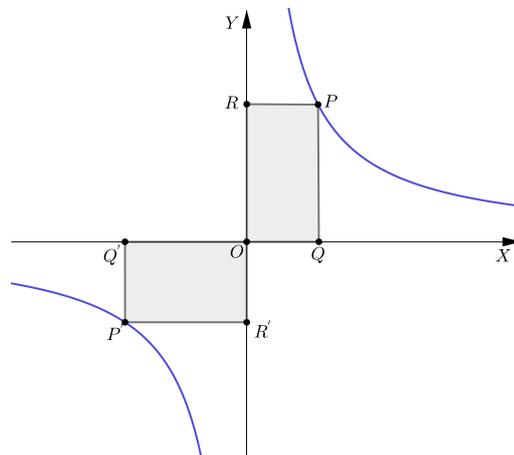
Daí, chamando o retângulo  $OQPR$  de retângulo de coordenadas do ponto  $P$ , podemos dizer que *"a hipérbole é o lugar geométrico dos pontos do primeiro e do terceiro quadrante do sistema de coordenadas cujos retângulos possuem uma determinada área"*, para saber mais veja a referência [16]. Sendo assim, dados dois pontos  $P(x, y)$  e  $P'(x', y')$  com  $x = \overline{OQ}$ ,  $y = \overline{OR}$ ,  $x' = \overline{OQ'}$  e  $y' = \overline{OR'}$ , os retângulos  $OQPR$  e  $OQ'P'R'$  possuem a mesma área cuja medida é  $k$ . De fato, como os pontos  $P$  e  $P'$  pertencem a hipérbole  $xy = k$ , temos:

$$S_{OQPR} = \overline{OQ} \cdot \overline{OR} = x \cdot y = x' \cdot y' = k = S_{OQ'P'R'}.$$

Isto é,

$$S_{OQPR} = S_{O'Q'P'R'}.$$

Figura 10: Pontos da hipérbole.



Fonte: O Autor.

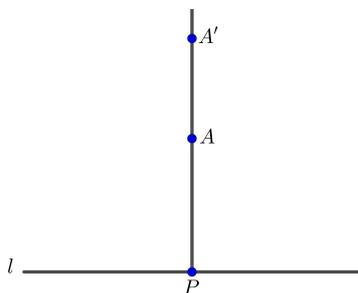
### 3.3 Rotação Hiperbólica

Nesta seção, utilizaremos resultados de [4], [10], [11] e [16]. O objetivo principal é definirmos a rotação hiperbólica. Começaremos definindo a transformação de tensão, pois a mesma irá nos auxiliar a compreender algumas das principais propriedades da rotação hiperbólica. Por fim, faremos uma interpretação geométrica para o logaritmo natural, utilizando a área abaixo do gráfico da hipérbole  $xy = 1$  com  $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ .

#### 3.3.1 Transformação de Tensão

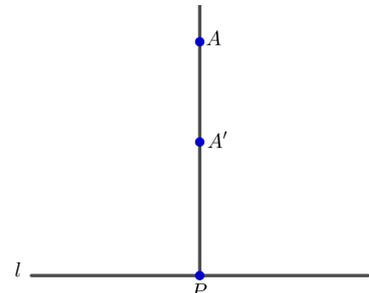
**Definição 7** *Dados uma reta  $l$  contida no plano, um ponto  $P$  arbitrário pertencente a reta  $l$ , um número real  $r > 0$  e um ponto  $A$  do plano tal que a semirreta  $\overrightarrow{PA}$  é perpendicular a reta  $l$ . A transformação de tensão é uma função  $f(A) = A'$  que transforma o ponto  $A$  no ponto  $A'$  sobre  $\overrightarrow{PA}$ , tal que  $\overline{PA'} = r \cdot \overline{PA}$ . Em uma tensão a reta  $l$  e a constante  $r$  são denominadas, respectivamente, eixo de tensão e constante de tensão.*

Figura 11: Tensão:  $r > 1$ .



Fonte: [16].

Figura 12: Tensão:  $r < 1$ .



Fonte: [16].

Em uma transformação de tensão, se  $r > 1$ , temos  $\overline{PA'} > \overline{PA}$  (Figura 11), e a tensão é chamada de "dilatação". Se  $r < 1$ , então  $\overline{PA'} < \overline{PA}$  (Figura 12), e a tensão é chamada de "contração". No caso em que  $r = 1$ , temos  $\overline{PA'} = \overline{PA}$ .

Vejam agora algumas das principais propriedades das transformação de tensão:

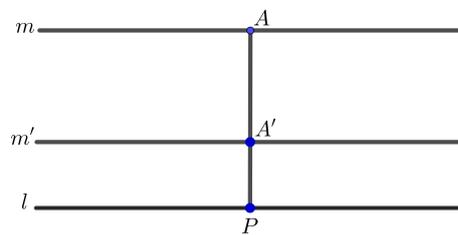
**Propriedade 1:** Uma tensão transforma uma reta  $m$  em outra reta  $m'$ . Neste caso, pode ocorrer duas situações:

- i)* Se a reta  $m$  e o eixo de tensão  $l$  são paralelos, então as retas  $m$  e  $m'$  também serão paralelas;
- ii)* Se a reta  $m$  e o eixo de tensão  $l$  são concorrentes, digamos que o ponto de intersecção seja o ponto  $O$ , então as retas  $m$  e  $m'$  também serão concorrentes no ponto  $O$ .

**Demonstração:**

*i)* Se  $m$  é paralela ao eixo de tensão  $l$  a uma distância  $d$  de  $l$ , então a reta  $m'$  também será paralela  $l$  e a uma distância  $rd$  de  $l$  (Figura 13). De fato, suponha que ocorra uma tensão que tenha eixo  $l$  e coeficiente  $r$ . Observe que sob essa tensão todo ponto  $A$  arbitrário pertencente a  $m$  é transformado em um ponto  $A'$  pertencente a  $m'$  de tal forma que  $\overline{PA'} = r \cdot \overline{PA}$ . Isso mostra que a distância entre qualquer ponto  $A'$  da reta  $m'$  e o eixo de tensão  $l$  é sempre a mesma, digamos  $rd$ . Portanto, as retas  $m'$  e  $l$  são paralelas entre si e, conseqüentemente, as retas  $m$  e  $m'$  também são.

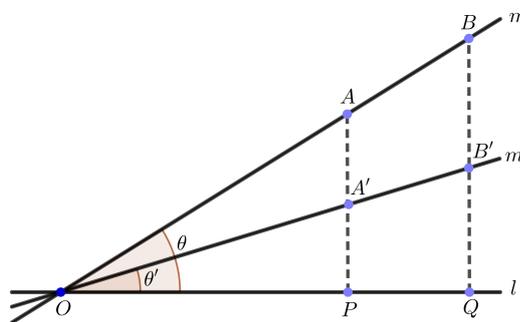
Figura 13: Tensão:  $m$  e  $l$  paralelas.



Fonte: [16].

*ii)* Seja  $O$  o ponto de intersecção da reta  $m$  com o eixo de tensão  $l$ . Sob a tensão, o ponto  $O$  permanece fixo, pois neste caso a distância de  $O$  ao eixo  $l$  vale zero. Seja  $A$  um ponto arbitrário pertencente a reta  $m$  diferente do ponto  $O$ , e seja  $A'$  o ponto no qual  $A$  é transformado pela tensão. Daí,  $\overline{PA'} = r \cdot \overline{PA}$ , onde  $P$  é um ponto pertencente ao eixo  $l$  tal que  $\overrightarrow{PA}$  é perpendicular a  $l$ . Seja  $B$  outro ponto arbitrário da reta  $m$  e  $B'$  o ponto em que a semirreta  $\overrightarrow{QB}$ , perpendicular a reta  $l$ , intersecta a reta  $OA'$ .

Figura 14: Tensão:  $m$  e  $l$  concorrentes em  $O$ .



Fonte: [16].

Vamos mostrar que  $B'$  é o ponto no qual  $B$  é transformado pela tensão de eixo  $l$  e coeficiente  $r$ . Isto significa que precisamos mostrar que  $\overline{QB'} = r \cdot \overline{QB}$ , onde  $Q$  é um ponto pertencente a reta  $l$  tal que  $\overrightarrow{QB}$  é perpendicular ao eixo  $l$ . De fato, observe  $\overrightarrow{QB}$  cruza a reta  $OA'$  em um ponto  $B'$ . Pelo caso *LAL* (Lado, Ângulo, Lado), de semelhança de

triângulos, os triângulos  $OQB$  e  $OPA$  são semelhantes, da mesma forma que os triângulos  $OQB'$  e  $OPA'$  também são semelhantes. Daí,

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{QB}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{PA'}}{\overline{QB'}} = r.$$

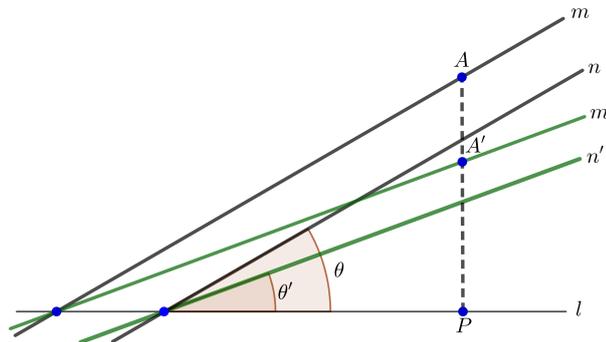
Ou seja,

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{QB}} = \frac{\overline{PA'}}{\overline{QB'}} \Leftrightarrow \frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{QB'}}{\overline{QB}} = r.$$

Logo,  $\overline{QB'} = \overline{QB} \cdot r$ . Portanto, concluímos que a tensão transforma o ponto  $B$  no ponto  $B'$ . Como  $B$  é um ponto arbitrário de  $m$ , segue que a reta  $m'$  é transformada pela tensão na reta  $OA' = m'$ .

**Propriedade 2:** Duas retas  $m$  e  $n$  paralelas entre si são transformadas por uma tensão em retas  $m'$  e  $n'$  também paralelas entre si.

Figura 15: Tensão:  $m$  e  $l$  paralelas entre si.



Fonte: [16].

**Demonstração:** Pela Propriedade 1 temos que, sob a transformação de tensão com constante de tensão  $r$ , a reta  $m$  é transformada em uma reta  $m'$  paralela a  $m$ . Da mesma forma, a reta  $n$  é transformada pela mesma tensão em uma reta  $n'$  paralela a  $n$ . Por transitividade, concluímos que  $m'$  e  $n'$  também são paralelas. Observe que, as retas  $m'$  e  $n'$ , nas quais  $m$  e  $n$  são transformadas, também não têm ponto de intersecção, já que um ponto comum a  $m'$  e a  $n'$  só poderia resultar de um ponto comum às retas  $m$  e  $n$ .

Observe ainda que, se  $\theta$  e  $\theta'$  são, respectivamente, ângulos formados pela intersecção de  $m$  e  $m'$  com o eixo de tensão  $l$ , então a partir da Figura 14, temos

$$tg\theta' = \frac{\overline{PA'}}{\overline{OP}} = \frac{r \cdot \overline{PA}}{\overline{OP}} = r \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{OP}} = r \cdot tg\theta.$$

Isto é,

$$tg\theta' = r \cdot tg\theta.$$

Portanto, também segue-se que as semirretas paralelas  $m$  e  $n$  (interseção  $l$  com o mesmo ângulo  $\theta$ ) são transformadas em retas paralelas  $m'$  e  $n'$  (interseção de  $l$  com o mesmo ângulo  $\theta'$ ).

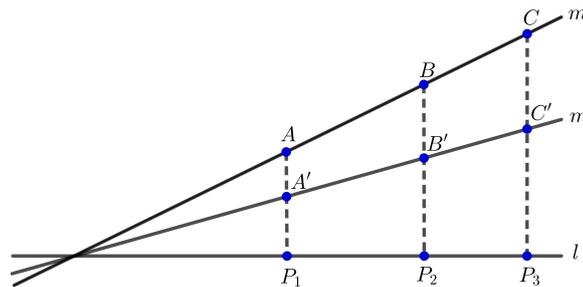
**Propriedade 3:** As proporções dos comprimentos dos segmentos de reta na mesma reta não são alteradas por uma transformação de tensão.

**Demonstração:** Na Figura 16, temos que as semirretas  $P_1A$ ,  $P_2B$  e  $P_3C$  são interceptadas pelas retas transversais  $m$  e  $m'$ . Logo, pelo Teorema de Tales, resulta que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}.$$

Ou seja, os comprimentos dos segmentos  $AB$ ,  $BC$ ,  $A'B'$  e  $B'C'$  são proporcionais.

Figura 16: Tensão: segmentos proporcionais.



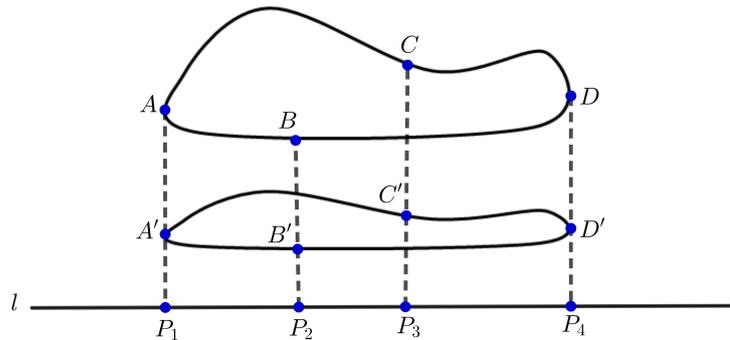
Fonte: [16].

**Propriedade 4:** Uma tensão transforma uma figura  $F$  em uma figura  $F'$  que, geralmente, não é semelhante a figura  $F$ . Se  $r > 1$ , então  $F'$  é uma dilatação de  $F$  e se  $r < 1$ ,  $F'$  é uma contração de  $F$ . De fato, cada um dos infinitos pontos  $(A, B, C, D, \dots)$  da figura  $F$  é transformado pela tensão em outro respectivo ponto  $(A', B', C', D', \dots)$  da figura  $F'$  de modo que  $\overline{P_1A'} = r \cdot \overline{P_1A}$ ,  $\overline{P_2B'} = r \cdot \overline{P_2B}$ ,  $\overline{P_3C'} = r \cdot \overline{P_3C}$ ,  $\overline{P_4D'} = r \cdot \overline{P_4D}$ , ... com as semirretas  $P_1A$ ,  $P_2B$ ,  $P_3C$ ,  $P_4D$ , ... todas perpendiculares ao eixo de tensão  $l$ .

**Exemplo 5** Na Figura 17 temos  $r = \frac{1}{3}$ , o que resulta em uma contração da figura que contém os pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ .

$$\frac{\overline{P_1A'}}{\overline{P_1A}} = \frac{\overline{P_2B'}}{\overline{P_2B}} = \frac{\overline{P_3C'}}{\overline{P_3C}} = \frac{\overline{P_4D'}}{\overline{P_4D}} \dots = \frac{1}{3}.$$

Figura 17: Tensão de figuras.



Fonte: O Autor.

**Exemplo 6** Um quadrado  $ABCD$  de lados  $\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{BC} = \overline{AD} = a$ , sofre uma dilatação em relação ao eixo  $l$  (eixo de tensão). Determine a área da figura  $A'B'C'D'$  obtida a partir do quadrado  $ABCD$  após esta tensão. Sabendo que o lado  $AB$  do quadrado está a uma distância de  $d$  da reta  $l$  e que a transformação ocorreu sob uma constante de tensão  $r$ .

**Solução:** Como o segmento  $AB$  está a uma distância  $d$  da reta  $l$ , pela Propriedade 1, o segmento  $AB$  é transformado pela tensão no segmento  $A'B'$ , tal que  $\overline{P_1A'} = r \cdot \overline{P_1A} = rd$  e  $\overline{P_2B'} = \overline{P_2B} = rd$ . Assim, a distância do segmento  $A'B'$  ao eixo  $l$  passa a ser dada por  $rd$ , e ainda, os comprimentos dos segmentos  $AB$  e  $A'B'$  permanecem o mesmo ( $\overline{A'B'} = \overline{AB} = a$ ). Os pontos  $C$  e  $D$  são transformados, respectivamente, nos pontos  $C'$  e  $D'$  de modo que  $\overline{P_2C'} = r \cdot \overline{P_2C} = r \cdot (a + d)$  e  $\overline{P_1D'} = r \cdot \overline{P_1D} = r \cdot (a + d)$ . Agora observe que

$$\overline{A'D'} = \overline{P_1D'} - \overline{P_1A'} = r(a + d) - rd = r(a + d - d) = ra.$$

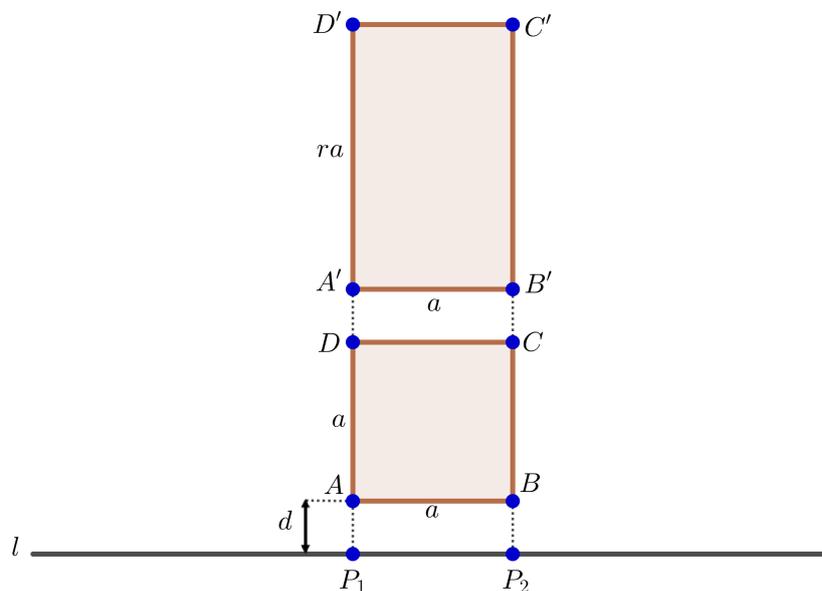
Logo, o retângulo  $A'B'C'D'$  terá a base e a altura medindo, respectivamente,  $\overline{A'B'} = a$  e  $\overline{A'D'} = ra$ . E temos que a área  $S_{A'B'C'D'}$  do retângulo  $A'B'C'D'$  será dada por

$$S_{A'B'C'D'} = ra \cdot a = ra^2.$$

Como a área  $S_{ABCD}$  do quadrado  $ABCD$  é dada por  $S_{ABCD} = a^2$ , temos

$$S_{A'B'C'D'} = r \cdot (a^2) = r \cdot S_{ABCD}.$$

Figura 18: Tensão sobre um quadrado de lado  $l$ .

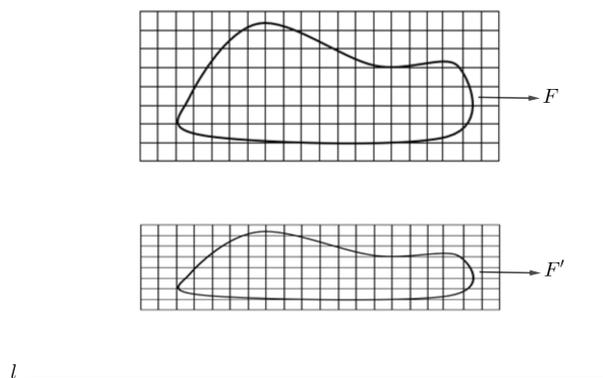


Fonte: O Autor.

O resultado do exemplo anterior é apenas um caso particular da proposição que veremos a seguir.

**Proposição 3.3.8** *Se uma figura  $F'$  é obtida a partir de uma transformação de tensão sobre uma figura  $F$ , então a área da  $S_{F'}$  da figura  $F'$  será dada por  $S_{F'} = r \cdot S_F$ , onde  $r$  é o coeficiente de tensão e  $S_F$  é a área da figura  $F$ .*

Figura 19: Tensão sobre uma figura  $F$ .



Fonte: O Autor.

**Demonstração:** Seja  $F$  uma figura no plano. Considere também uma grade de pequenos quadrados, congruentes entre si, de modo que dois de seus lados opostos são paralelos ao eixo de tensão  $l$ . A área  $S_F$  da figura  $F$  é, aproximadamente, igual os número  $n$  de

quadrados contidos em  $F$  multiplicado pela área  $S_Q$  de um desses quadrados (Figura 19). Isto é,

$$S_F \cong n \cdot S_Q.$$

Quanto menor for o comprimento dos lados dos quadrados da grade, menor será o erro. De fato, se escolhermos qualquer número positivo pequeno  $\mathbf{e}$ , podemos reduzir o erro a  $\mathbf{e}$ , tornando os quadrados suficientemente pequenos.

Após aplicada a transformação, a figura  $F$  é transformada em uma outra figura  $F'$  de modo que, os quadrados da figura  $F$  são transformados pela tensão em uma grade de retângulos e, de acordo com o exemplo 6, a área  $S_R$  de cada retângulo é a área de um dos quadrados originais multiplicados por  $r$  (uma das dimensões do quadrado é inalterada, enquanto a outra é multiplicada por  $r$ ), isto é,

$$S_R = r \cdot S_Q.$$

A figura  $F$  contém exatamente o mesmo número de retângulos que a figura  $F'$  de quadrados, e a área de  $F$  é aproximadamente igual ao número  $n$  de retângulos contidos nela multiplicados pela área de um desses retângulos. Ou seja,  $S_{F'} \cong n \cdot S_R$ . Daí,

$$S_{F'} \cong n \cdot S_R = n \cdot (rS_Q) = r \cdot (nS_Q) \cong r \cdot S_F.$$

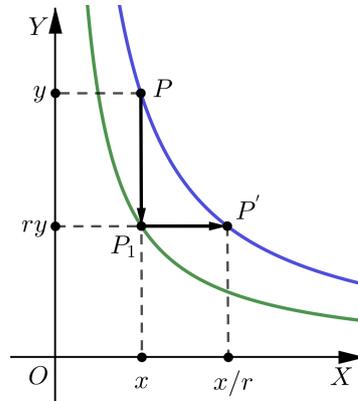
Logo,  $S_{F'} \cong r \cdot S_F$ , ou seja, a área da figura  $F'$  é, aproximadamente, igual a área de da figura  $F$  multiplicada por  $r$ . Fazendo o erro  $\mathbf{e}$  tender pra zero, a área  $S_{F'}$  tenderá para  $r \cdot S_F$  e, portanto, podemos considerar

$$S_{F'} = r \cdot S_F.$$

### 3.3.2 Rotação Hiperbólica

Dada a hipérbole  $xy = k$  com  $k > 0$ . Vamos aplicar nesta hipérbole uma transformação de tensão sobre o eixo  $X$  e com coeficiente de tensão  $r$ . Essa tensão transforma cada ponto  $P(x, y)$  da hipérbole  $xy = k$  em outro ponto  $P_1(x, ry)$ . Isto é, a equação da hipérbole passa a ser  $xy = rk$ . Observe que, após a transformação, a abscissa  $x$  do ponto  $P$  permanece inalterada, enquanto a ordenada  $y$  é alterada pela tensão para  $ry$ . Agora apliquemos outra tensão porém, desta vez, sobre o eixo  $Y$  e com coeficiente  $\frac{1}{r}$ . Sob esta segunda tensão, cada ponto  $P_1(x, ry)$  é transformado em outro ponto  $P'(\frac{x}{r}, ry)$  pertencente a hipérbole  $xy = k$ . Assim, a hipérbole passa a ser  $xy = \frac{rk}{r}$ , isto é,  $xy = k$ , que corresponde a hipérbole inicial.

Figura 20: Rotação hiperbólica.



Fonte: O Autor.

Portanto, concluímos que, aplicando duas transformações sucessivas no plano com os respectivos eixos, o eixo  $X$  e o eixo  $Y$ , e com os respectivos coeficientes  $1/r$  e  $r$ , a hipérbole  $xy = k$  é transformada em si mesma. A aplicação sucessiva destas duas transformações resulta em uma transformação denominada como **rotação hiperbólica**. Sendo assim, podemos definir a rotação hiperbólica da seguinte forma:

**Definição 8 (Rotação Hiperbólica)** *Dada uma hipérbole  $xy = k$  tal que  $k > 0$ , a rotação hiperbólica é uma transformação  $T = T_r : \mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}^2$ , que associa a cada ponto  $P(x, y) \in \mathbb{R}^2$  o ponto  $T(x, y) = (x/r, ry)$ , obtido dividindo a abscissa por  $r$  e multiplicando a ordenada por  $r$ .*

O termo "Rotação Hiperbólica" está relacionado ao fato de que, sob essa transformação, todos os pontos da hipérbole "deslizam" ao longo da curva; assim, na Figura 20, o ponto  $P$  primeiro é transformado no ponto  $P_1$  e depois  $P_1$  é transformado em  $P'$ , isto é, o efeito da rotação hiperbólica é transformar o ponto  $P$  da hipérbole no ponto  $P'$  da mesma hipérbole. Assim, podemos dizer que a hipérbole "gira".

**Proposição 3.3.9** *Uma rotação hiperbólica não altera a proporção dos segmentos de linha na mesma linha reta.*

**Demonstração:** Segue da Propriedade 3, Seção 3.3.1.

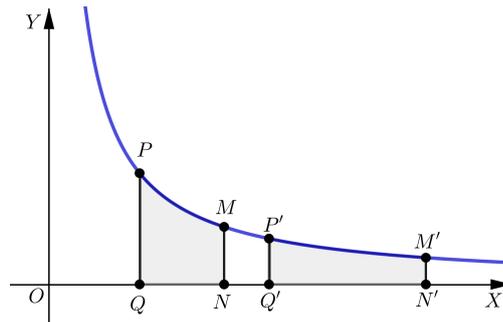
**Proposição 3.3.10** *Uma rotação hiperbólica não altera as áreas das figuras no plano.*

**Demonstração:** Seja  $F$  uma figura do plano. Pela Proposição 3.3.8, logo após a primeira tensão a área da figura  $F$  será multiplicada por  $r$ , ou seja, sua área passa a ser  $r \cdot S_F$ , em que  $S_F$  é a área da figura  $F$  antes da transformação. Como resultado da segunda tensão a área será dividida por  $r$ . Segue que, após as duas transformações a área da figura  $F$  permanece a mesma.

### 3.3.3 Uma Interpretação Geométrica para o Logaritmo Natural

Seja  $\mathcal{R}$  a região delimitada pelas retas  $x = x_1 = \overline{OQ}$ ,  $x = x_2 = \overline{ON}$ ,  $y = 0$  e pela hipérbole  $xy = 1$  e, sem perda de generalidade, vamos supor que  $x_1 \leq x_2$  (Figura 21). Vamos mostrar que a área  $S_{PQNM}$  da região  $\mathcal{R}$  depende das abscissas  $x_1$  e  $x_2$  dos pontos  $P$  e  $M$ .

Figura 21: Logaritmo natural.



Fonte: [16].

Inicialmente, provaremos que a área  $S_{PQNM}$  depende apenas da razão  $\frac{x_2}{x_1}$ . No sentido de que se duas regiões  $PQNM$  e  $P'Q'N'M'$  são tais que  $\frac{ON}{OQ} = \frac{O'N'}{O'Q'}$ , então as áreas dessas regiões são iguais. De fato, aplicando a rotação hiperbólica que transforma  $\overline{PQ}$  em  $\overline{P'Q'}$ , segue da Proposição 3.3.3 que o ponto  $N$  é transformado em um ponto  $N_1$  tal que  $\frac{ON_1}{O'Q'} = \frac{ON}{OQ}$ , logo,  $N_1 = N'$ . Isso significa que o segmento  $MN$  é transformado no segmento  $M'N'$  e a região  $PQNM$  na região  $P'Q'N'M'$ . Portanto, pela Proposição 3.3.10,  $S_{PQNM} = S_{P'Q'N'M'}$ . Assim, segue que a área  $S_{PQNM}$  depende apenas da razão  $\frac{x_2}{x_1}$ . Fazendo então  $z = \frac{x_2}{x_1}$ , temos

$$S_{PQNM} = S(z).$$

Como  $z = \frac{z}{1}$ , resulta que  $S(z)$  é a área da região delimitada pela hipérbole  $xy = 1$  e as retas  $x = 1$ ,  $x = z$ ,  $y = 0$ .

Normalmente, a área de uma figura não é um número negativo. Porém, as vezes é conveniente usar "áreas orientadas", ou seja, que são provenientes de sinal  $+$  ou  $-$ . Assim, convencionaremos que a área da região será positiva quando  $z > 1$ , negativa quando  $0 < z < 1$  e zero quando  $z = 1$ . Logo,  $S(z)$  é uma função  $S : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que:

- $S(z) > 0$  se, e somente se,  $z > 1$ .
- $S(z) < 0$  se, e somente se,  $0 < z < 1$ .
- $S(1) = 0$ , pois se  $z = 1$ , a região é apenas um segmento de reta.
- A função  $S(z)$  é **crescente**. De fato, se  $z_2 > z_1$ , então  $S(z_2) > S(z_1)$ .

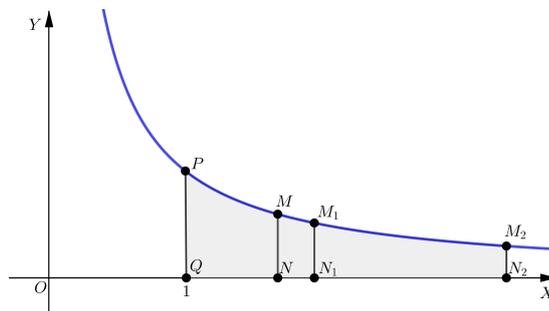
Além disso, dadas três regiões  $PQNM$ ,  $PQN_1M_1$  e  $PQN_2M_2$  de modo que  $\overline{OQ} = 1$ ,  $z = z_1 = \overline{ON}$ ,  $z_2 = \overline{ON_1}$  e  $z_1z_2 = \overline{ON_2}$  (Figura 22), temos:

$$S(z_1 \cdot z_2) = S_{PQNM} + S_{MNN_2M_2} = S\left(\frac{\overline{ON}}{\overline{OQ}}\right) + S\left(\frac{\overline{ON_2}}{\overline{ON}}\right) = S\left(\frac{z_1}{1}\right) + S\left(\frac{z_1z_2}{z_1}\right) = S(z_1) + S(z_2).$$

Ou seja,

$$S(z_1z_2) = S(z_1) + S(z_2).$$

Figura 22: Logaritmo natural.



Fonte: O Autor.

Pela Proposição 2.2.5 (Caracterização das Funções Logarítmicas), existe um número real positivo, que chamamos de  $e$ , tal que  $S(z) = \log_e z$  para  $z \in \mathbb{R}^+$ . Assim, a área da região  $PQNM$  (Figura 22) é dada por:

$$S_{PQNM} = \log_e z = \log_e \frac{\overline{ON}}{\overline{OQ}}. \quad (3.4)$$

Escrevemos  $\ln z$  em vez de  $S(z) = \log_e z$  e chamamos o número  $\ln z$  de *logaritmo natural* de  $z$ . Observe que,

$$S(e) = \log_e e = 1.$$

Ou seja, o número  $e$ , base dos logaritmos naturais, é caracterizado pelo fato de que seu logaritmo natural é igual a 1.

O número  $e$  é irracional. Um valor aproximado dessa constante é

$$e \cong 2,718281828459.$$

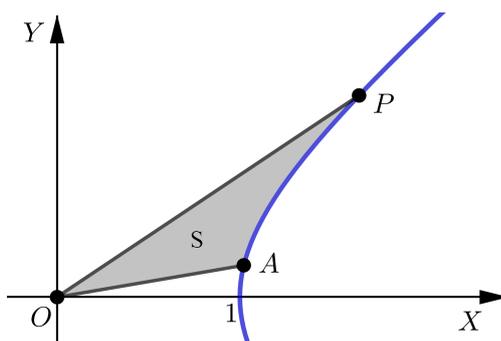
## 4 AS FUNÇÕES HIPERBÓLICAS

O objetivo principal deste capítulo é definir as funções hiperbólicas, para isto, utilizaremos resultados de [1], [4], [6], [16] e [17].

### 4.1 Setor Hiperbólico e Ângulo Hiperbólico

Considere a hipérbole unitária  $x^2 - y^2 = 1$  e dois pontos  $A$  e  $P$  pertencentes a um mesmo ramo desta hipérbole (Figura 23). Definimos o **setor hiperbólico** como sendo a região limitada pelos segmentos  $OA$  e  $OP$  e pela hipérbole  $x^2 - y^2 = 1$  compreendida entre os pontos  $A$  e  $P$ .

Figura 23: Setor hiperbólico.



Fonte: O Autor.

Observe que o setor hiperbólico é representado por uma região do plano de área  $S$  (área do setor hiperbólico  $AOP$ ). O **ângulo hiperbólico**  $\theta$  é definido como sendo o dobro da área do setor  $AOP$ , isto é,  $\theta = 2S$ . Assim, podemos definir o ângulo hiperbólico da seguinte forma:

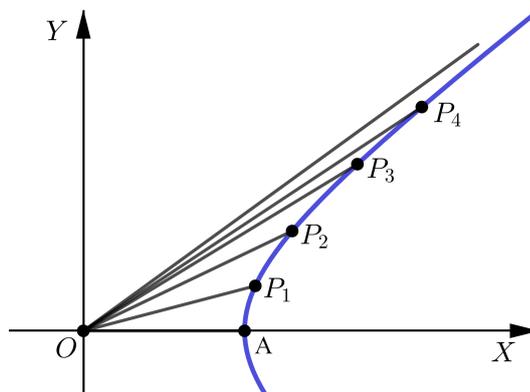
**Definição 9** *Dados dois pontos  $A$  e  $P$  pertencentes a um mesmo ramo da hipérbole  $x^2 - y^2 = 1$ , definimos o ângulo hiperbólico  $\theta$  como sendo o dobro da área  $S$  do setor hiperbólico  $AOP$ , ou seja,  $\theta = 2S$ .*

Note que o ângulo trigonométrico da circunferência unitária e o ângulo hiperbólico são definidos de maneiras análogas, apesar de possuírem conceitos diferentes. Pois, como vimos no Capítulo 2, a medida do ângulo trigonométrico é igual ao dobro da área do setor circular por ele limitado. Porém, enquanto o ângulo trigonométrico é medido em radianos, o ângulo hiperbólico é medido em unidades de área.

Vimos no Capítulo 2 que o ângulo trigonométrico varia de 0 a  $2\pi$ , o que não ocorre com o ângulo hiperbólico  $\theta$ , pois  $\theta$  pode assumir valores de 0 até  $\infty$ . De fato,

considere um setor hiperbólico  $AOP_1$  arbitrário de área  $S_1$  (Figura 24), o que equivale a dizer que o ângulo hiperbólico vale  $\theta_1$ . Aplicando uma rotação hiperbólica que transforma o ponto  $A$  no ponto  $P_1$ , depois transformando  $P_1$  num ponto  $P_2$ , depois transformando  $P_2$  num ponto  $P_3$ , e assim por diante. Segue da Proposição 3.3.4, que as áreas dos setores  $AOP_1, P_1OP_2, P_2OP_3, \dots$ , são iguais e, conseqüentemente, os ângulos hiperbólicos  $AOP_1, AOP_2, AOP_3, \dots$ , são, respectivamente, iguais a  $\theta_1, 2\theta_1, 3\theta_1, \dots$ . Portanto,  $\theta$  varia de 0 a  $\infty$ .

Figura 24: Ângulos hiperbólicos.



Fonte: [16].

## 4.2 Funções Hiperbólicas

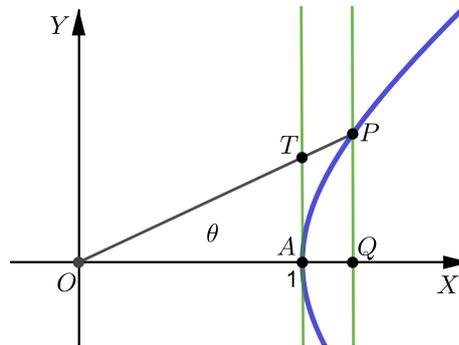
Nesta seção, definiremos as funções hiperbólicas cuja teoria se assemelha a teoria das funções trigonométricas. Inicialmente, definiremos as três principais funções:  $\sinh \theta$ ,  $\cosh \theta$  e  $\operatorname{tgh} \theta$ ; e, a partir delas, definiremos as demais funções hiperbólicas.

Considere o ramo direito da hipérbole unitária  $x^2 - y^2 = 1$  localizada no plano  $XOY$  (Figura 25). Se  $P$  é um ponto pertencente a esta hipérbole, então o setor hiperbólico  $AOP$  terá área  $\theta/2$  unidades de área. Isto é equivalente a dizer que o ângulo hiperbólico terá medida  $\theta$ . Pelo ponto  $P$  tracemos uma reta  $PQ$ , perpendicular ao eixo  $OX$ , e que o intersecta no ponto  $Q$  ( $\overline{OQ}$  é a abscissa de  $P$ ). No vértice  $A$  da hipérbole trace uma reta  $AT$ , perpendicular ao eixo  $OX$ , que intersecta o segmento  $OP$  no ponto  $T$ . Observe que a reta  $AT$  é tangente a hipérbole.

Definimos o  $\sinh \theta$ , o  $\cosh \theta$  e a  $\operatorname{tgh} \theta$  como sendo, respectivamente, os comprimentos dos segmentos  $PQ$ ,  $OQ$  e  $AT$ . Ou seja,

$$\sinh \theta := \overline{PQ}, \quad \cosh \theta := \overline{OQ} \quad \text{e} \quad \operatorname{tgh} \theta := \overline{AT}.$$

Figura 25: Funções hiperbólicas.



Fonte: O Autor.

Pela definição de funções hiperbólicas  $\sinh 0 = \operatorname{tgh} 0 = 0$  e  $\cosh 0 = 1$ . Além disso, diferentemente das funções trigonométricas, as funções hiperbólicas não são periódicas, pois o ângulo hiperbólico  $\theta$  varia de 0 a  $+\infty$ . De acordo com a definição de ângulo hiperbólico, isso é equivalente a dizer que para cada número real positivo  $\theta$  existe algum setor hiperbólico  $AOP$  cuja área  $2S$  é numericamente igual a  $\theta$ . O  $\sinh \theta$  varia de 0 a  $+\infty$  e o  $\cosh \theta$  varia de 1 a  $+\infty$ . A  $\operatorname{tgh} \theta$  varia de 0 a 1, pois o segmento  $\overline{AT} < \overline{AR} = 1$ , onde  $R$  é o ponto de coordenadas  $(1, 1)$ , ou seja,  $R$  pertence a assíntota  $y = x$ . Porém, analogamente as funções trigonométricas, podemos considerar as funções hiperbólicas com ângulos negativos. Convencionaremos que:

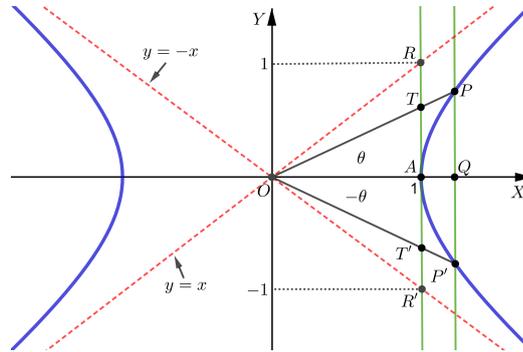
1) Se  $P$  está acima do eixo  $OX$ , a área do setor hiperbólico  $AOP$  terá sinal positivo (+) e, conseqüentemente, o ângulo hiperbólico definido por ele também terá sinal positivo. Daí,

$$\sinh \theta = \overline{PQ}, \quad \cosh \theta = \overline{OQ} \quad \text{e} \quad \operatorname{tgh} \theta = \overline{AT}.$$

2) Se  $P$  está abaixo do eixo  $OX$ , a área do setor hiperbólico  $AOP$  terá sinal negativo (−) e, conseqüentemente, o ângulo hiperbólico definido por ele também terá sinal negativo. Daí,

$$\begin{aligned} \sinh(-\theta) &= -\overline{P'Q} = -\overline{PQ} = -\sinh(\theta), \\ \cosh(-\theta) &= \overline{OQ} = \cosh(\theta), \\ \operatorname{tgh}(-\theta) &= -\overline{AT'} = -\overline{AT} = -\operatorname{tgh}(\theta). \end{aligned}$$

Figura 26: Sinal do ângulo hiperbólico.



Fonte: O Autor.

De modo geral, podemos dizer que o ângulo hiperbólico  $\theta$  e o  $\sinh \theta$  hiperbólico variam de 0 a  $\pm\infty$ , o  $\cosh \theta$  varia de 1 a  $+\infty$  e a  $\operatorname{tgh} \theta$  varia de 0 a  $\pm 1$ . Também podemos observar que a função  $\cosh$  é uma função par, pois  $\cosh(-\theta) = \cosh(\theta)$ , enquanto as funções  $\sinh$  e  $\operatorname{tgh}$  são funções ímpares, pois  $\sinh(-\theta) = -\sinh(\theta)$  e  $\operatorname{tgh}(-\theta) = -\operatorname{tgh}(\theta)$ .

**Proposição 4.2.11** *A tangente hiperbólica de um ângulo hiperbólico  $\theta$ , indicada por  $\operatorname{tgh} \theta$ , é dada pela razão entre o seno hiperbólico e o cosseno hiperbólico do ângulo  $\theta$ , isto é,*

$$\operatorname{tgh} \theta = \frac{\sinh \theta}{\cosh \theta}.$$

**Demonstração:** Observe que o ângulo  $\widehat{TOA}$  é comum aos triângulos  $OAT$  e  $OQP$  e os ângulos  $\widehat{OAT}$  e  $\widehat{OQT}$  são ângulos retos. Logo, pelo caso AA de semelhança de triângulos, os triângulos  $OAT$  e  $OQP$  são semelhantes. Daí,

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}}.$$

Como  $\overline{AT} = \operatorname{tgh} \theta$ ,  $\overline{OA} = 1$ ,  $\overline{PQ} = \sinh \theta$  e  $\overline{OQ} = \cosh \theta$ , segue que:

$$\operatorname{tgh} \theta = \frac{\sinh \theta}{\cosh \theta}.$$

Das funções seno e cosseno hiperbólicos, derivam as outras funções hiperbólicas, chamada de cotangente, secante e cossecante hiperbólicas, cujas definições são, respectivamente,

$$\operatorname{cotgh} \theta := \frac{\cosh \theta}{\sinh \theta}, \quad \operatorname{sech} \theta := \frac{1}{\cosh \theta} \quad \text{e} \quad \operatorname{cossech} \theta := \frac{1}{\sinh \theta}.$$

Vale ressaltar que todas as funções, definidas por meio de quociente, têm seus domínios restritos aos números reais para os quais o denominador é diferente de zero.

A proposição a seguir é conhecida como **relação fundamental da trigonometria hiperbólica**.

**Proposição 4.2.12** *Para todo  $\theta \in \mathbb{R}$ , temos*

$$\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1.$$

**Demonstração:** Seja  $P(x, y)$  um pertencente a hipérbole unitária  $x^2 - y^2 = 1$ , com  $x = \overline{OQ} = \cosh \theta$  e  $y = \overline{PQ} = \sinh \theta$  (Figura 25). Logo,

$$\overline{OQ}^2 - \overline{PQ}^2 = 1.$$

Ou seja,

$$\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1. \quad (4.5)$$

**Proposição 4.2.13** *Sejam  $\theta$  e  $\theta'$  dois ângulos hiperbólicos. Então,*

$$(a) \sinh(\theta + \theta') = \sinh \theta \cdot \cosh \theta' + \sinh \theta' \cdot \cosh \theta.$$

$$(b) \sinh(\theta - \theta') = \sinh \theta \cdot \cosh \theta' - \sinh \theta' \cdot \cosh \theta.$$

$$(c) \cosh(\theta + \theta') = \cosh \theta \cdot \cosh \theta' + \sinh \theta \cdot \sinh \theta'.$$

$$(d) \cosh(\theta - \theta') = \cosh \theta \cdot \cosh \theta' - \sinh \theta \cdot \sinh \theta'.$$

**Demonstração:** A demonstração pode ser vista na referência [4, p. 50]

**Proposição 4.2.14** *Sejam  $\theta$  e  $\theta'$  dois ângulos hiperbólicos. Então,*

$$(a) \operatorname{tgh}(\theta + \theta') = \frac{\operatorname{tgh} \theta + \operatorname{tgh} \theta'}{1 + \operatorname{tgh} \theta \cdot \operatorname{tgh} \theta'} \text{ e, em particular, se } \theta = \theta', \text{ então}$$

$$\operatorname{tgh}(2\theta) = \frac{2 \operatorname{tgh} \theta}{1 + \operatorname{tgh}^2 \theta}.$$

$$(b) \operatorname{tgh}(\theta - \theta') = \frac{\operatorname{tgh} \theta - \operatorname{tgh} \theta'}{1 - \operatorname{tgh} \theta \cdot \operatorname{tgh} \theta'}.$$

**Demonstração:**

(a) Da definição da  $\operatorname{tgh}$ , temos:

$$\operatorname{tgh}(\theta + \theta') = \frac{\sinh(\theta + \theta')}{\cosh(\theta + \theta')} = \frac{\sinh \theta \cdot \cosh \theta' + \sinh \theta' \cdot \cosh \theta}{\cosh \theta \cdot \cosh \theta' + \sinh \theta \cdot \sinh \theta'}.$$

Dividindo o numerador e o denominador por  $\cosh \theta \cdot \cosh \theta'$ , obtemos:

$$\operatorname{tgh}(\theta + \theta') = \frac{\operatorname{tgh} \theta + \operatorname{tgh} \theta'}{1 + \operatorname{tgh} \theta \cdot \operatorname{tgh} \theta'}.$$

Em particular, se  $\theta = \theta'$ , temos:

$$\operatorname{tgh}(\theta + \theta') = \operatorname{tgh}(\theta + \theta) = \operatorname{tgh}(2\theta) = \frac{\operatorname{tgh} \theta + \operatorname{tgh} \theta}{1 - \operatorname{tgh} \theta \cdot \operatorname{tgh} \theta} = \frac{2 \operatorname{tgh} \theta}{1 + \operatorname{tgh}^2 \theta}.$$

Isto é

$$\operatorname{tgh}(2\theta) = \frac{2 \operatorname{tgh} \theta}{1 + \operatorname{tgh}^2 \theta}.$$

(b) Como  $\operatorname{tgh} \theta$  é uma função ímpar, temos

$$\operatorname{tgh}(\theta - \theta') = \operatorname{tgh}(\theta + (-\theta')) = \frac{\operatorname{tgh} \theta + \operatorname{tgh} -\theta'}{1 + \operatorname{tgh} \theta \cdot \operatorname{tgh} -\theta'} = \frac{\operatorname{tgh} \theta - \operatorname{tgh} \theta'}{1 - \operatorname{tgh} \theta \cdot \operatorname{tgh} \theta'}.$$

Portanto,

$$\operatorname{tgh}(\theta - \theta') = \frac{\operatorname{tgh} \theta - \operatorname{tgh} \theta'}{1 - \operatorname{tgh} \theta \cdot \operatorname{tgh} \theta'}.$$

## 4.3 Forma Analítica das Funções Hiperbólicas

### 4.3.1 Transformação Homotética

**Definição 10** *Dados um ponto  $P$  do plano e um número  $r > 0$ , a homotetia de centro  $O$  e razão  $r$  é a função  $f(P) = P'$ , que associa a cada ponto  $P$  do plano o ponto  $P'$  sobre a semirreta  $\overrightarrow{OP}$ , tal que  $\overline{OP'} = r \cdot \overline{OP}$ . A função  $f(P)$  é chamada de transformação homotética (ou homotetia) de centro homotético  $O$  e razão homotética  $r$ .*

Figura 27: Homotetia.

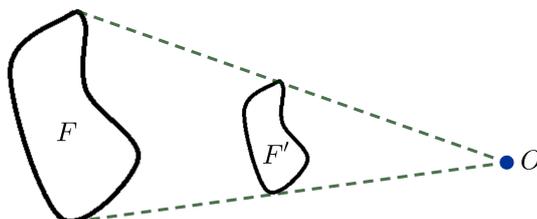


Fonte: O Autor.

Note que se  $r > 1$ , a medida do segmento  $OP'$  é maior do que a medida do segmento  $OP$ , ou seja,  $(\overline{OP'} > \overline{OP})$ , enquanto que se  $0 < r < 1$ , ocorre que a medida do segmento  $OP'$  é maior do que a medida do segmento  $OP$ , isto é,  $(\overline{OP'} < \overline{OP})$ . E ainda, se  $r = 1$ , temos  $\overline{OP'} = \overline{OP}$ .

Nesse sentido, dizemos que duas figuras  $F$  e  $F'$  são homotéticas se existir uma homotetia que transforma cada ponto  $P$  que compõe a figura  $F$  em um respectivo ponto  $P'$  que compõe a figura  $F'$  de modo que  $\overline{OP'} = r \cdot \overline{OP}$ .

Figura 28: Homotetia de figuras.

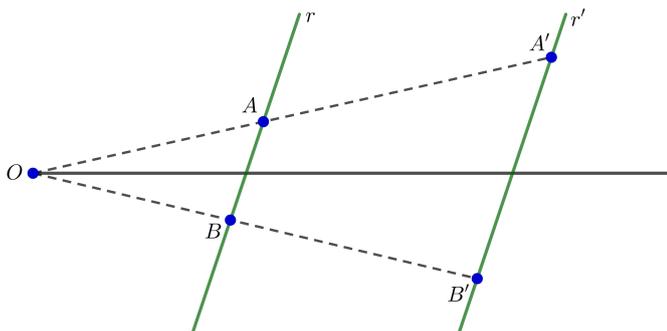


Fonte: O Autor.

Com relação a homotetia, vamos destacar algumas de suas principais propriedades:

**Propriedade 1:** Uma transformação homotética transforma uma reta  $r$  em outra reta  $r'$  paralela a  $r$  e, em particular, um seguimento de reta  $AB$  é transformado em outro segmento de reta  $A'B'$  paralelo ao segmento  $AB$ .

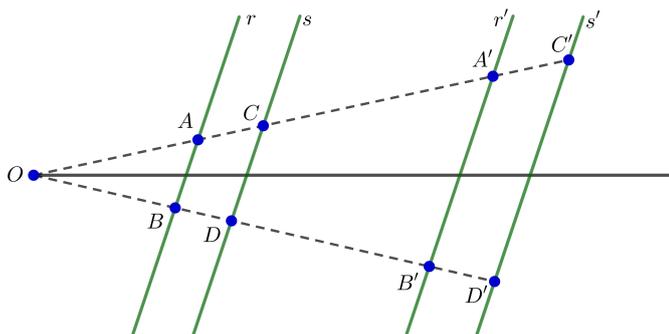
Figura 29: Homotetia sobre uma reta.



Fonte: O Autor.

**Propriedade 2:** Uma transformação homotética transforma duas retas  $r$  e  $s$ , paralelas entre si, em duas retas  $r'$  e  $s'$  também paralelas entre si e, em particular, dois segmentos  $AB$  e  $CD$ , paralelos entre si, são transformados em outros dois segmentos de retas  $A'B'$  e  $C'D'$  também paralelos entre si.

Figura 30: Homotetia sobre retas paralelas.



Fonte: O Autor.

**Propriedade 3:** Em uma homotetia de centro  $O$  e razão  $r$ , a razão entre as medidas do segmento homotético  $A'B'$  e do segmento inicial  $AB$  é sempre igual a  $r$  (razão da homotetia)(Figura 30). Isto é,

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = r.$$

De fato, na Figura 30 temos que:  $\overline{OA'} = r \cdot \overline{OA}$ ,  $\overline{OB'} = r \cdot \overline{OB}$  (pela definição de homotetia) e  $\hat{A}OB = \hat{A}'OB'$  (vértice comum). Logo, pelo caso LAD de semelhança de triângulos, os

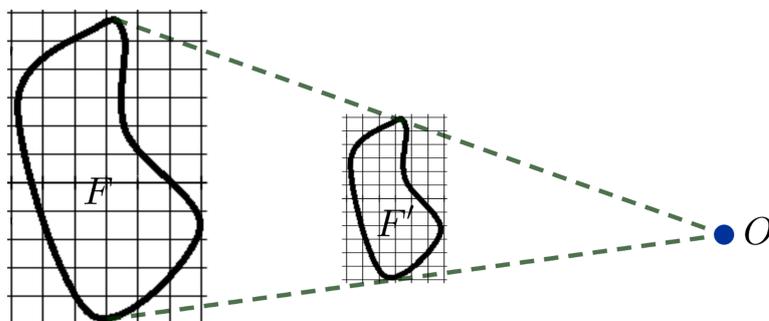
triângulos  $OAB$  e  $OA'B'$  são semelhantes. Daí,

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = r.$$

Perceba que de acordo com as propriedades 1, 2 e 3 uma transformação homotética altera o tamanho da figura, porém não altera sua forma.

**Proposição 4.3.15** *Se uma figura  $F'$  é obtida a partir de uma transformação homotética sobre uma figura  $F$ , então a área da  $S_{F'}$  da figura  $F'$  será dada por  $S_{F'} = r^2 \cdot S_F$ , onde  $r$  é a razão homotética e  $S_F$  é a área da figura  $F$ .*

Figura 31: Área de figuras homotéticas.



Fonte: [16].

**Demonstração:** Seja  $F$  uma figura no plano. Considere também uma grade de pequenos quadrados no plano sobre a figura  $F$ . A área  $S_F$  da figura  $F$  é, aproximadamente, igual ao número  $n$  de quadrados contidos em  $F$  multiplicado pela área  $S_Q$  de um quadrado (Figura 31). Isto é,

$$S_F \cong n \cdot S_Q.$$

Quanto menor for o comprimento dos lados dos quadrados da grade, menor será o erro. De fato, se escolhermos qualquer número positivo pequeno  $\epsilon$ , podemos reduzir o erro a  $\epsilon$ , tornando os quadrados suficientemente pequenos.

Após aplicada a transformação homotética, a figura  $F$  é transformada em uma outra figura  $F'$  de modo que, os quadrados da figura  $F$  são transformados pela homotetia em uma nova grade de quadrados, cuja área  $S_{Q'}$  de cada quadrado é a área de um dos quadrados originais multiplicados por  $r^2$  (sob a homotetia os lados dos quadrados originais são multiplicados por  $r$ ), isto é,

$$S_{Q'} = r^2 \cdot S_Q.$$

A figura  $F'$  contém exatamente o mesmo número de quadrados que a figura  $F$ , e a área de  $F'$  é, aproximadamente, igual ao número de quadrados contidos nela multiplicados

pela área de um quadrado. Ou seja,  $S_{F'} \cong n \cdot S_{Q'}$ . Daí,

$$S_{F'} = n \cdot S_{Q'} = n \cdot (r^2 S_Q) = r^2 \cdot (n S_Q) \cong r^2 \cdot S_F.$$

Logo,  $S_{F'} \cong r^2 \cdot S_F$ , ou seja, a área da figura  $F'$  é, aproximadamente, igual a área de da figura  $F$  multiplicada por  $r^2$ . Fazendo o erro  $\epsilon$  tender pra zero, a área  $S_{F'}$  tenderá para  $r^2 \cdot S_F$  e, portanto, podemos considerar

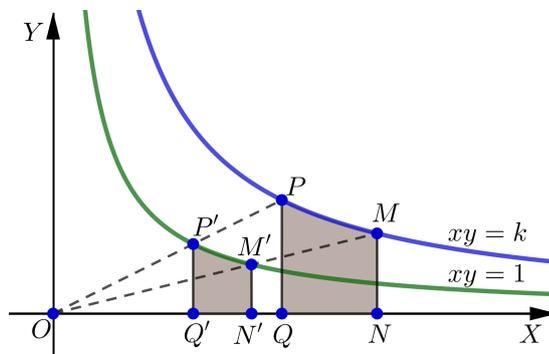
$$S_{F'} = r^2 \cdot S_F.$$

### 4.3.2 Cálculo da Área do Setor Hiperbólico

**Proposição 4.3.16** *A área da região limitada pela ao norte pela hipérbole  $xy = k$  ( $k > 0$ ), lateralmente pelas retas verticais  $x_1 = \overline{OQ}$  e  $x_2 = \overline{ON}$ , e ao sul pelo eixo das abscissas é dada por*

$$S_{PQNM} = k \ln \left( \frac{\overline{ON}}{\overline{OQ}} \right).$$

Figura 32: Área de figuras homotéticas.



Fonte: [16].

**Demonstração:** Aplicando um transformação homotética com a origem  $O$  como centro e com razão homotética  $r = \frac{1}{\sqrt{k}}$ , a hipérbole  $xy = k$  será transformada na hipérbole  $xy = 1$ , então, um ponto com coordenadas  $(x, y)$  será transformado no ponto com coordenadas  $(\frac{1}{\sqrt{k}}x, \frac{1}{\sqrt{k}}y)$ . Assim, a região  $PQNM$  será transformada na região  $P'Q'N'M'$ . Como vimos na subseção 3.3.3, a área da região  $P'Q'N'M'$  é dada por:

$$S_{P'Q'N'M'} = \ln \left( \frac{\overline{ON'}}{\overline{OQ'}} \right).$$

Por outro lado, segue-se da Proposição 4.3.15 que

$$S_{P'Q'N'M'} = r^2 S_{PQNM}$$

$$\Leftrightarrow \ln \left( \frac{\overline{ON'}}{\overline{OQ'}} \right) = \left( \frac{1}{\sqrt{k}} \right)^2 S_{PQNM}$$

$$\Leftrightarrow S_{PQNM} = k \ln \left( \frac{\overline{ON'}}{\overline{OQ'}} \right).$$

Pela Propriedade 3 da subseção 4.3.1, temos

$$\frac{\overline{ON'}}{\overline{OQ'}} = \frac{\overline{ON}}{\overline{OQ}} = \frac{x_2}{x_1} = \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Ou seja,

$$S_{PQNM} = k \ln \left( \frac{\overline{ON}}{\overline{OQ}} \right).$$

Assim, por exemplo, para a hipérbole  $xy = \frac{1}{2}$ , temos:

$$S_{PQNM} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\overline{ON}}{\overline{OQ}} \right).$$

**Observação:** A área da região  $PQNM$  também pode ser encontrada utilizando o Cálculo Diferencial. Para isto, vejamos alguns resultados retirados da referência [6].

**Teorema (Teorema Fundamental do Cálculo):** Se uma função  $f$  for integrável no intervalo  $[a, b]$ , e se  $F$  for uma primitiva de  $f$  em  $[a, b]$ , então

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

**Demonstração:** A demonstração pode ser vista na referência [6, p. 305].

**Proposição 4.3.17** *Se  $f$  é uma função integrável no intervalo  $[a, b]$ , com  $f(x) \geq 0$  em  $[a, b]$  (Figura 33), então a área  $S$  da região limitada pelas retas  $x = a$ ,  $x = b$ , o eixo  $X$  e pelo gráfico da função  $y = f(x)$  é dada por*

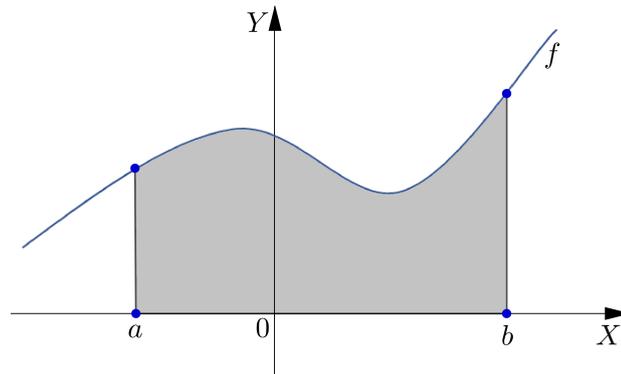
$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

**Demonstração:** A demonstração pode ser vista na referência [6, p. 310].

Note que, se  $f(x) < 0$  em  $[a, b]$  (o gráfico de  $f$  fica localizado abaixo de eixo  $X$ ), então

$$S = - \int_a^b f(x) dx < 0.$$

Figura 33: Área abaixo do gráfico.



Fonte: O Autor.

**Demonstração:** A demonstração pode ser vista na referência [6, p. 310].

Note que, se  $f(x) < 0$  em  $[a, b]$  (o gráfico de  $f$  fica localizado abaixo de eixo  $X$ ), então

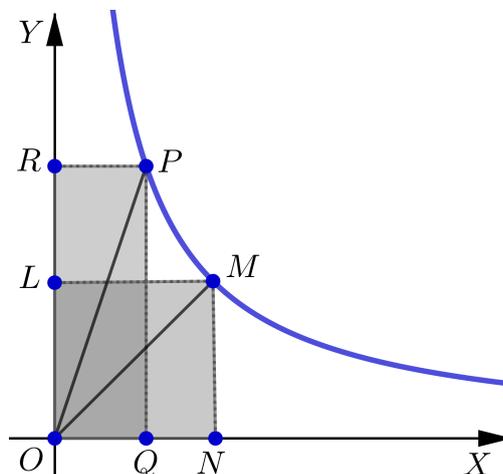
$$S = - \int_a^b f(x) dx < 0.$$

Assim, a área da região limitada pelas retas  $x_1 = \overline{OQ}$ ,  $x_2 = \overline{ON}$ ,  $y = 0$  e pela hipérbole  $xy = k$  ( $k > 0$ ) (ou  $y = \frac{k}{x}$ ) é dada por

$$S = \int_{x_1}^{x_2} \frac{k}{x} dx = k \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{x} dx = k (\ln x_2 - \ln x_1) = k \ln \left( \frac{x_2}{x_1} \right).$$

Considere a hipérbole  $xy = \frac{1}{2}$  e dois pontos quaisquer  $M$  e  $P$  pertencentes a esta hipérbole (Figura 34). O ponto  $M$  terá coordenadas  $x = \overline{OQ}$  e  $y = \overline{OL}$  e o ponto  $P$  terá coordenadas  $x = \overline{OQ}$  e  $y = \overline{OR}$ .

Figura 34: Área do setor hiperbólico.



Fonte: [17].

Observe que a área dos retângulos  $OLMN$  e  $OQPR$  são iguais a  $\frac{1}{2}$ . De fato, como  $M$  e  $P$  são pontos pertencentes a hipérbole  $xy = \frac{1}{2}$ , temos:

$$S_{ONML} = ON \cdot OL = xy = \frac{1}{2}.$$

e

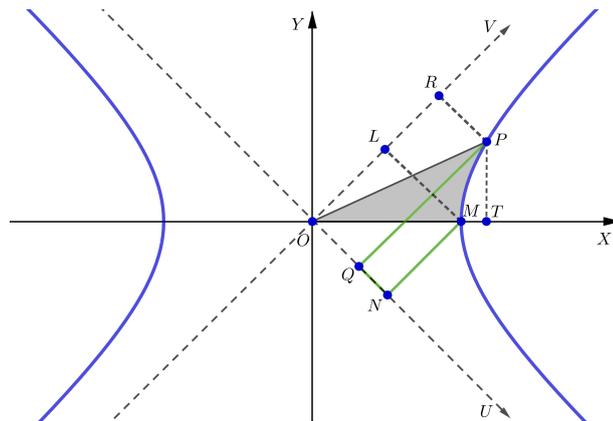
$$S_{OQPR} = OQ \cdot OR = xy = \frac{1}{2}$$

Ou seja,

$$S_{ONML} = S_{OQPR}.$$

A fim de calcularmos a área do setor hiperbólico  $MOP$  (Figura 35), considere a hipérbole de equação  $x^2 - y^2 = 1$  no plano  $XOY$ . Rotacionando o plano  $XOY$  sob um ângulo de  $45^\circ$  no sentido horário, a equação da hipérbole passa a ser representada, no plano  $UOV$ , por  $uv = \frac{1}{2}$ .

Figura 35: Área do Setor Hiperbólico.



Fonte: O Autor.

De acordo com a figura 35, podemos observar que

$$S_{OQP} = \frac{1}{2}S_{OQPR} = \frac{1}{2}S_{ONML} = S_{ONM}.$$

E ainda,

$$S_{ONMP} = S_{OQP} + S_{PQNM} = S_{MOP} + S_{ONM}.$$

Como  $S_{OQP} = S_{ONM}$ , resulta que

$$S_{MOP} = S_{PQNM}.$$

Utilizando um raciocínio análogo, concluímos que

$$S_{MOP} = S_{MLRP}.$$

Assim, resulta que a área do setor hiperbólico  $MOP$  é igual a área da região  $PQNM$  delimitado pela hipérbole  $uv = \frac{1}{2}$  e pelas retas  $u = \overline{OQ}$ ,  $u = \overline{ON}$ ,  $v = 0$  no plano  $UOV$ . Pela Proposição 4.3.16, a área  $S_{PQNM}$  é dada por

$$S_{PQNM} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\overline{ON}}{\overline{OQ}} \right).$$

Ou seja,

$$S_{MOP} = S_{PQNM} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\overline{ON}}{\overline{OQ}} \right).$$

Assim, pela definição de ângulo hiperbólico, pode ocorrer duas situações:

1) Se  $P$  está acima do eixo  $OX$ , a área do setor  $MOP$  possui sinal positivo:

$$S_{MOP} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\overline{ON}}{\overline{OQ}} \right).$$

2) Se  $P$  está abaixo do eixo  $OX$ , a área do setor  $MOP$  possui sinal negativo:

$$S_{MOP} = -\frac{1}{2} \ln \left( \frac{\overline{ON}}{\overline{OQ}} \right).$$

### 4.3.3 Forma Analítica das Funções Hiperbólicas

Seja  $P$  um ponto pertencente a hipérbole  $x^2 - y^2 = 1$  tal que a área do setor hiperbólico  $MOP$  seja  $\theta/2$ , isto é, o ângulo hiperbólico  $MOP$  terá medida  $\theta$  (Figura 35).

No plano  $XOY$ , o ponto  $P$  possui coordenadas  $x = \overline{OT} = \cosh \theta$  e  $y = \overline{PT} = \sinh \theta$ , enquanto que no plano  $UOV$  suas coordenadas são  $u = \overline{OQ}$  e  $v = \overline{OR}$ . Pelas equações 3.2 e 3.3,

$$u = \overline{OQ} = \frac{\sqrt{2}}{2} (x - y) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cosh \theta - \sinh \theta)$$

e

$$v = \overline{OR} = \frac{\sqrt{2}}{2} (x + y) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cosh \theta + \sinh \theta).$$

Como as coordenadas do ponto  $M$ , no plano  $XOY$ , são  $x = 1$  e  $y = 0$ , resulta que

$$\overline{ON} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - 0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

e

$$\overline{OL} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + 0) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Logo, pela Proposição 4.3.16, seque que

$$S_{PQNM} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\overline{ON}}{\overline{OQ}} \right) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} (\cosh \theta - \sinh \theta)} \right) = -\frac{1}{2} \ln (\cosh \theta - \sinh \theta)$$

e

$$S_{MLRP} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\overline{OR}}{\overline{OL}} \right) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} (\cosh \theta + \sinh \theta)}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \right) = \frac{1}{2} \ln (\cosh \theta + \sinh \theta).$$

Como  $S_{MOP} = \theta/2$  e  $S_{MOP} = S_{PQNM} = S_{MLRP}$ , temos

$$\begin{aligned} S_{PQNM} &= -\frac{1}{2} \ln (\cosh \theta - \sinh \theta) \\ \Leftrightarrow \frac{\theta}{2} &= -\frac{1}{2} \ln (\cosh \theta - \sinh \theta) \\ \Leftrightarrow -\theta &= \ln (\cosh \theta - \sinh \theta) \\ \Leftrightarrow e^{-\theta} &= \cosh \theta - \sinh \theta \end{aligned} \tag{4.6}$$

e

$$\begin{aligned} S_{MLRP} &= \frac{1}{2} \ln (\cosh \theta + \sinh \theta) \\ \Leftrightarrow \frac{\theta}{2} &= \frac{1}{2} \ln (\cosh \theta + \sinh \theta) \\ \Leftrightarrow \theta &= \ln (\cosh \theta + \sinh \theta) \\ \Leftrightarrow e^{\theta} &= \cosh \theta + \sinh \theta. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Somando e subtraindo as equações 4.6 e 4.7, obtemos

$$\cosh \theta = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2}$$

e

$$\sinh \theta = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}.$$

**Proposição 4.3.18** *Para todo ângulo hiperbólico  $\theta$  tem-se:*

$$(a) \operatorname{tgh} \theta = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{e^{\theta} + e^{-\theta}}.$$

$$(b) \operatorname{cotgh} \theta = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{e^{\theta} - e^{-\theta}}, \text{ sempre que } \theta \neq 0.$$

$$(c) \operatorname{sech} \theta = \frac{2}{e^{\theta} + e^{-\theta}}.$$

$$(d) \operatorname{cosech} \theta = \frac{2}{e^\theta - e^{-\theta}}, \text{ sempre que } \theta \neq 0.$$

**Demonstração:** Para demonstrarmos cada um destes resultados basta substituir  $\sinh \theta = (e^\theta - e^{-\theta})/2$  e/ou  $\cosh \theta = (e^\theta + e^{-\theta})/2$  nas fórmulas  $\operatorname{tgh} \theta = \sinh \theta / \cosh \theta$ ,  $\operatorname{cotgh} \theta = \cosh \theta / \sinh \theta$ ,  $\operatorname{sech} \theta = 1 / \cosh \theta$  e  $\operatorname{cosech} \theta = 1 / \sinh \theta$ .

### 4.3.4 Derivadas das Funções Hiperbólicas

Nesta subsecção, iremos determinar as derivadas das principais funções hiperbólicas.

**Proposição 4.3.19** *Para todo  $\theta \in \mathbb{R}$  tem-se:*

$$(a) \frac{d}{d\theta}(\sinh \theta) = \cosh \theta.$$

$$(b) \frac{d}{d\theta}(\cosh \theta) = \sinh \theta.$$

$$(c) \frac{d}{d\theta}(\operatorname{tgh} \theta) = \operatorname{sech}^2 \theta.$$

**Demonstração:**

$$(a) \text{ Como } \sinh \theta = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2} \text{ temos}$$

$$\frac{d}{d\theta}(\sinh \theta) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}\right) = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2} = \cosh \theta.$$

$$(b) \text{ Como } \cosh \theta = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2} \text{ temos}$$

$$\frac{d}{d\theta}(\cosh \theta) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}\right) = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2} = \sinh \theta.$$

$$(c) \text{ Como } \operatorname{tgh} \theta = \frac{\sinh \theta}{\cosh \theta} \text{ temos}$$

$$\frac{d}{d\theta}(\operatorname{tgh} \theta) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\sinh \theta}{\cosh \theta}\right) = \frac{\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta}{\cosh^2 \theta} = \frac{1}{\cosh^2 \theta} = \operatorname{sech}^2 \theta.$$

Desse modo, as integrais das funções  $\sinh \theta$ ,  $\cosh \theta$  e  $\operatorname{sech}^2 \theta$  são dadas por

- $\int \sinh \theta \, dx = \cosh \theta + k.$
- $\int \cosh \theta \, dx = \sinh \theta + k.$

- $\int \operatorname{sech}^2 \theta \, dx = \operatorname{tgh} \theta + k.$

Onde  $k$  é uma constante real arbitrária.

# 5 APLICAÇÕES DAS FUNÇÕES HIPERBÓLICAS

Neste capítulo, apresentaremos algumas das principais aplicações das funções hiperbólicas. Para isto, serão apresentadas situações retiradas das referências [5], [7], [12], [15], [16] e [17].

Inicialmente, falaremos um pouco sobre a *catenária*, uma importante curva provocada por uma corda ou corrente suspensa pelas suas extremidades, sob ação do seu próprio peso, de densidade homogênea, perfeitamente flexível e não elástica.

Figura 36: Catenária.



Fonte: [9].

## 5.1 A Catenária

A palavra *catenária* tem origem do latim (*catena*), que significa cadeia ou corrente. Esta curva gerada por uma corrente suspensa foi batizada de catenária pelo filósofo e matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716).

Inicialmente, vários estudiosos tais como Leonardo da Vinci (1452 - 1519) e Galileu Galilei (1564 - 1642) acreditavam que a curva representava uma parábola. Porém, estudos posteriores constatou-se que na verdade essa curva representaria uma função hiperbólica do tipo  $y = k(e^{x/k} + e^{-x/k})/2$ , ou seja, um cosseno hiperbólico.

A catenária é uma curva bastante comum em nosso dia-a-dia, estando presente em diversos lugares tais como: na rede elétrica de uma via férrea, nos fios de alta tensão, nas extremidades de um ovo, nas cordas suspensas por duas hastes verticais usadas em supermercado para o anúncio de produtos, na arquitetura (principalmente a catenária invertida, pois estabelece um maior equilíbrio e modernidade) e na engenharia com a construção de pontes pênsis.

Dentre as inúmeras obras de engenharia e arquitetura que utilizam a catenária

invertida podemos destacar alguns arcos monumentais, tais como: a ponte Juscelino Kubitschek (localizada em Brasília, aqui no Brasil), o Gateway Arch (localizado às margens do Rio Mississippi, em St. Louis, nos EUA) e os Arcos na Basílica da Sagrada Família (em Barcelona). Veja as imagens a seguir:

Figura 37: Ponte Juscelino Kubitschek.



Fonte: [13].

Figura 38: Gateway Arch.



Fonte: [2].

Figura 39: Basílica da Sagrada Família.



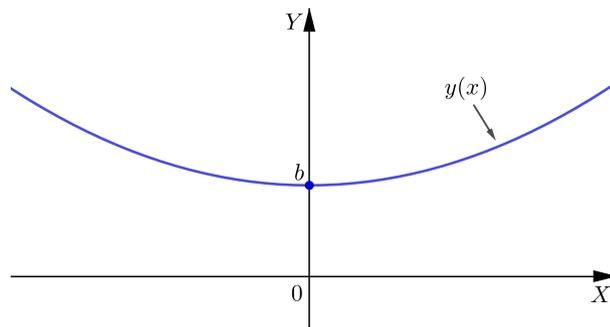
Fonte: [18].

Seja um cabo perfeitamente flexível, homogêneo e não elástico, suspenso pelas suas extremidades e sob a ação do seu próprio peso. Prova-se em [5, p. 36] que ao tomarmos um sistema de coordenadas cartesianas onde o ponto mais baixo deste cabo (vértice da catenária) coincida com eixo  $Y$  em  $(0, b)$ , a equação da catenária é dada por

$$y(x) = k \cdot \cosh\left(\frac{x}{k}\right) + b - k.$$

Em que  $b = y(0)$  e  $k$  é a constante de especificidade do cabo.

Figura 40: Equação da catenária.



Fonte: O Autor.

É bastante comum supor que  $k = b$  na resolução de algumas problemas matemáticos acerca da catenária. Daí, podemos escrever sua equação do seguinte modo:

$$y(x) = k \cdot \cosh\left(\frac{x}{k}\right).$$

A seguir enunciaremos uma proposição cujo resultado nos permite calcular o comprimento  $L$  de uma curva ou linha dada por uma função  $f$  definida em um intervalo  $[a, b]$ .

**Proposição 5.1.20** *Se  $f(x)$  é uma função com derivada contínua em  $[a, b]$ , então o comprimento  $L$  do gráfico de  $f$ , ou da curva  $y = f(x)$ , limitado entre  $x = a$  e  $x = b$ , é dado por*

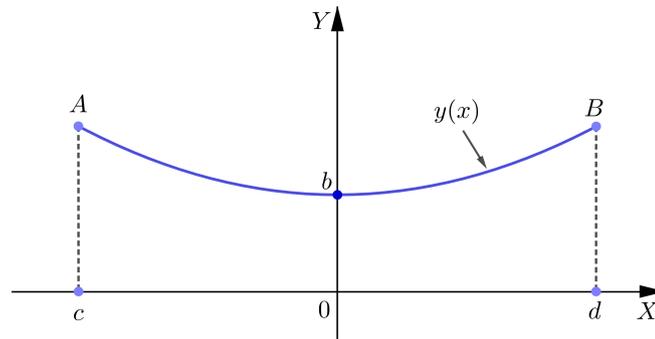
$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Em que  $f(x)$  representa a regra da função que gera a curva e  $f'(x)$  sua derivada.

**Demonstração:** A demonstração pode ser vista na referência [17, p. 50].

Assim, considere a catenária da Figura 41, cujo vértice dessa curva coincide com o eixo  $Y$  no ponto  $(0, b)$ .

Figura 41: Comprimento da catenária.



Fonte: O Autor.

Como vimos anteriormente, a função  $y(x)$  que representa essa catenária é dada por

$$y(x) = k \cdot \cosh\left(\frac{x}{k}\right) + b - k.$$

Logo, pela Proposição 5.1.20, o comprimento dessa curva, limitado pelos pontos  $A$  e  $B$ , é dado por

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx.$$

Como o vértice da catenária está na origem, tem-se  $c = -d$  e, conseqüentemente, o comprimento da curva no intervalo  $[c, 0]$  é igual ao comprimento da curva no intervalo  $[0, d]$ . Daí,

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx = 2 \cdot \int_0^d \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx.$$

Visto que a derivada da função  $y(x)$  é dada por  $y'(x) = \sinh\left(\frac{x}{k}\right)$ , temos

$$L = 2 \cdot \int_0^d \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{x}{k}\right)} dx = 2 \cdot \int_0^d \sqrt{\cosh^2\left(\frac{x}{k}\right)} dx = 2 \cdot \int_0^d \cosh\left(\frac{x}{k}\right) dx.$$

Assim,

$$L = 2 \cdot k \left[ \sinh\left(\frac{d}{k}\right) - \sinh\left(\frac{0}{k}\right) \right] = 2k \cdot \sinh\left(\frac{d}{k}\right).$$

Portanto,

$$L = 2k \cdot \sinh\left(\frac{d}{k}\right). \quad (5.8)$$

O exemplo a seguir foi retirado da referência [17, p. 54].

**Exemplo 7** *Um cabo de transmissão de energia é esticado entre dois postes, distantes 200 m, cuja a equação é  $y = 75 \left( e^{\frac{x}{150}} + e^{-\frac{x}{150}} \right)$ . Calcule o comprimento do cabo.*

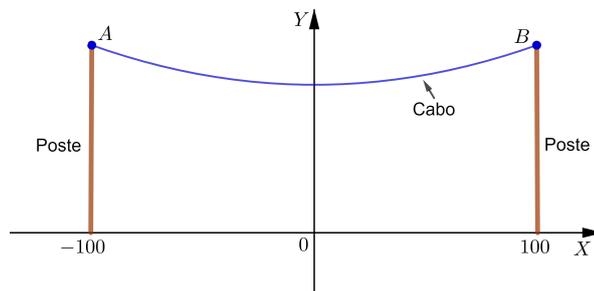
**Solução:** Note que

$$y = 75 \left( e^{\frac{x}{150}} + e^{-\frac{x}{150}} \right) = 150 \cdot \left( \frac{e^{\frac{x}{150}} + e^{-\frac{x}{150}}}{2} \right) = 150 \cdot \cosh \left( \frac{x}{150} \right).$$

Ou seja, essa função representa uma catenária cuja constante específica é  $k = 150$ .

Representando essa curva em um sistema de coordenadas cartesianas de modo que seu ponto médio coincida com o eixo  $y$  temos

Figura 42: Comprimento da catenária.



Fonte: O Autor.

Daí, pela equação 5.1, o comprimento do cabo é dado por

$$L = 2 \cdot 150 \cdot \sinh \left( \frac{100}{150} \right) = 300 \cdot \sinh \left( \frac{2}{3} \right) = 300 \cdot \left( \frac{e^{2/3} - e^{-2/3}}{2} \right) = 150 \cdot (e^{2/3} - e^{-2/3}).$$

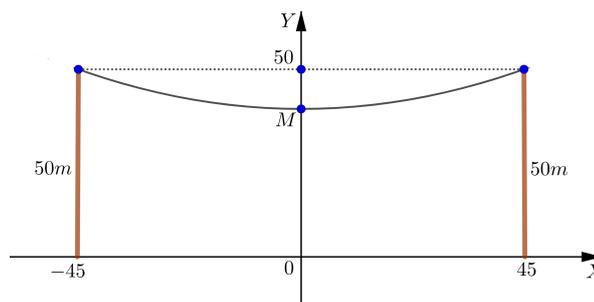
Isto é,

$$L = 150(e^{2/3} - e^{-2/3}) \cong 215 \text{ m.}$$

O próximo exemplo foi retirado da referência [5, p. 41].

**Exemplo 8** Um cabo de 100 pés está preso pelas pontas no alto de dois postes de 50 pés posicionados a 90 pés de distância, veja a Figura 43. A que altura acima do solo está o ponto médio do cabo?

Figura 43: Comprimento do cabo.



Fonte: O Autor.

**Solução:** Pelo fato do cabo estar suspenso pelas suas extremidades, sob ação do seu próprio peso, a curva gerada representa uma catenária cujo vértice corresponde ao ponto médio do cabo. Daí, sua equação é do tipo

$$y(x) = k \cdot \cosh\left(\frac{x}{k}\right) + b - k.$$

Vimos que o comprimento da catenária com extremidades em  $x = -45$  e  $x = 45$  é dado por

$$L = 2k \cdot \sinh\left(\frac{45}{k}\right).$$

Como  $L = 100$ , temos

$$100 = 2k \cdot \sinh\left(\frac{45}{k}\right) \Leftrightarrow k \cdot \sinh\left(\frac{45}{k}\right) = 50.$$

Utilizando o recurso numérico de uma calculadora, obtemos que  $k \cong 56,01$ . Daí, fazendo  $b - k = \alpha$ , a equação do cabo fica

$$y(x) = 56,01 \cdot \cosh\left(\frac{x}{56,01}\right) + \alpha.$$

Como  $y(45) = 50$ , resulta

$$y(45) = 56,01 \cdot \cosh\left(\frac{45}{56,01}\right) + \alpha = 50 \Leftrightarrow 75,08 + \alpha = 50 \Leftrightarrow \alpha = -25,08.$$

Logo, o ponto médio do cabo é dado por

$$y(0) = 56,01 \cdot \cosh\left(\frac{0}{56,01}\right) - 25,08 = 56,01 \cdot 1 - 25,08 = 56,01 - 25,08 = 30,93.$$

Ou seja, o ponto médio  $M$  do cabo está a 30,93 pés acima do solo.

## 5.2 Velocidade das ondas do mar

As ondas marítimas são resultado da interação das forças provocadas pelo vento e pela gravidade. Se propagando sobre a superfície da água do mar com determinada velocidade de propagação. De acordo com Elmore e Heald (1985, p. 187), conforme citado por [15, p. 61], A velocidade  $v$  de propagação das ondas do mar é dada pela fórmula

$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \cdot \operatorname{tgh}\left(\frac{2\pi d}{\lambda}\right)},$$

em que  $d$  representa a espessura da lâmina de líquido,  $\lambda$  o comprimento da onda e  $g$  a intensidade da gravidade.

Note que se o comprimento de onda for maior ou igual a  $2d$ , ou seja,  $\lambda \geq 2d$ , temos

$$\frac{2\pi d}{\lambda} \leq \frac{2\pi d}{2d} = \pi.$$

De acordo com [15, p. 40], a função  $\operatorname{tgh} \theta$  é uma função estritamente crescente. Daí,

$$\operatorname{tgh} \left( \frac{2\pi d}{\lambda} \right) \leq \operatorname{tgh} \pi = 0,996 \cong 1.$$

Portanto, a velocidade de propagação da onda é, aproximadamente,

$$v \cong \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}.$$

Essa equação nos permite calcular a velocidade de propagação das ondas marítimas ditas "normais" em alto-mar, que apresentam uma espessura da lâmina d'água na ordem de quilômetros e comprimento da onda na ordem de algumas centenas de metros. Assim, por exemplo, se  $\lambda = 250 \text{ m}$ , temos

$$v \cong \sqrt{\frac{9,8 \cdot 250}{2 \cdot 3,14}} \cong 19,75 \text{ m/s} = 19,75 \cdot 3,6 \text{ Km/k} = 71,1 \text{ Km/h}.$$

Por outro lado, de acordo com [15, p. 62], se o comprimento da onda é muito maior que a espessura da lâmina do líquido ( $\lambda \gg d$ ), vale a aproximação

$$\operatorname{tgh} \left( \frac{2\pi d}{\lambda} \right) \cong \frac{2\pi d}{\lambda}.$$

Daí,

$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \cdot \operatorname{tgh} \left( \frac{2\pi d}{\lambda} \right)} \cong \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \cdot \left( \frac{2\pi d}{\lambda} \right)} = \sqrt{gd}.$$

Logo,

$$v \cong \sqrt{gd}.$$

Desse modo, no caso do *tsunami*, que se apresenta como uma onda extremamente gigante, onde seu comprimento é de até centenas de quilômetros, e com comprimento de onda com cerca de  $5 \text{ Km}$ , ou seja  $\lambda \gg d$ , pode-se calcular sua velocidade de propagação utilizando a fórmula  $v \cong \sqrt{gd}$ . Assim, a velocidade de propagação de um *tsunami* é muito maior do que a das ondas marítimas ditas normais, pois se  $d = 4000 \text{ m}$ , por exemplo, tem-se

$$v \cong \sqrt{gd} = \sqrt{9,8 \cdot 4000} \cong 198 \text{ m/s} = 198 \cdot 3,6 \text{ Km/h} = 711,8 \text{ Km/h}.$$

## 5.3 Polinômios de Fibonacci e Polinômios de Lucas

### 5.3.1 Funções Hiperbólicas e Números Complexos

Vimos que as funções hiperbólicas  $\sinh \theta$  e  $\cosh \theta$  são definidas de modo que  $\theta$  representa um número real. Porém, alguns problemas da Matemática e da Física, requerem que essa definição seja generalizada para as funções do tipo  $\sinh z$  e  $\cosh z$ , de modo que  $z$  representa um número complexo da forma  $x + yi$ , sendo  $x, y$  números reais e  $i$  representa a  $\sqrt{-1}$ , denominado de unidade imaginária (veja [12, p. 38]). Assim, os valores numéricos conhecidos de  $\cosh \theta$  e  $\sinh \theta$ , se apresentam como um caso particular quando  $\theta = x$  e  $y = 0$ , ou seja,  $z = \theta$ .

Desse modo, os resultados obtidos para as funções hiperbólicas em que o ângulo hiperbólico é  $\theta$  devem, se possível, serem generalizados, com todas as consequências que daí decorrem. Assim,

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad \text{e} \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

**Definição 11** *Dado um número complexo  $z = x + yi$ , dizemos que  $z$  é um número imaginário puro se, e somente se,  $x = 0$  e  $y \neq 0$ .*

**Proposição 5.3.21** *Se  $z$  é um número imaginário puro, ou seja  $z = yi$ , então*

$$\sinh(yi) = i \sin y \quad \text{e} \quad \cosh(yi) = \cos y.$$

**Demonstração:** A demonstração pode ser vista na referência [12, p. 41].

### 5.3.2 Polinômios de Fibonacci e Polinômios de Lucas

Os polinômios de Fibonacci e de Lucas são sequências polinomiais definidas por recorrência. De modo que os polinômios de Fibonacci são definidos pela relação de recorrência

$$F_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1 \\ x, & \text{se } n = 2 \\ xF_{n-1}(x) + F_{n-2}(x), & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

Em que  $F_n(x)$  representa o termo geral dessa sequência polinomial. Já os polinômios de Lucas são definidos por

$$L_n(x) = \begin{cases} x, & \text{se } n = 1 \\ x^2 + 2, & \text{se } n = 2 \\ xL_{n-1}(x) + L_{n-2}(x), & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

Sendo  $L_n(x)$  o termo geral dos polinômios de Lucas.

Note que os polinômios de Fibonacci se apresentam como uma generalização da sequência de Fibonacci, pois fazendo  $x = 1$  temos

$$F_1(1) = 1, F_2(1) = 1, F_3(1) = 1 \cdot F_1(1) + F_2(1) = 1 + 1 = 2, \dots, F_n(1) = F_{n-1}(1) + F_{n-2}(1).$$

A tabela a seguir apresenta os seis primeiros termos dos polinômios de Fibonacci e de Lucas

$n$	$F_n(x)$	$L_n(x)$
1	1	$x$
2	$x$	$x^2 + 2$
3	$x^2 + 1$	$x^3 + 3x$
4	$x^3 + 2x$	$x^4 + 4x^2 + 2$
5	$x^4 + 3x^2 + 1$	$x^5 + 5x^3 + 5x$
6	$x^5 + 4x^3 + 3x$	$x^6 + 6x^4 + 9x^2 + 2$

Pode-se mostrar por indução matemática que o termo geral de cada uma dessas sequências podem ser representados pelas expressões

$$F_n(x) = \frac{\alpha(x)^n - \beta(x)^n}{\alpha(x) - \beta(x)} \text{ e } L_n(x) = \alpha(x)^n + \beta(x)^n, \quad (5.9)$$

onde  $\alpha(x)$  e  $\beta(x)$  são as soluções (em  $t$ ) da equação característica  $t^2 + xt - 1 = 0$  das recorrências  $F_n(x) - xF_{n-1}(x) - F_{n-2}(x) = 0$  e  $L_n(x) - xL_{n-1}(x) - L_{n-2}(x) = 0$ , respectivamente, ou seja,

$$\alpha(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2} \text{ e } \beta(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 + 4}}{2}. \quad (5.10)$$

Fazendo  $x = 2 \sinh z$ , resulta que  $\sqrt{x^2 + 4} = \sqrt{(2 \sinh z)^2 + 4} = \sqrt{4 \sinh^2 z + 4} = 2\sqrt{\sinh^2 z + 1} = 2\sqrt{\cosh^2 z} = 2 \cosh z$ . Daí, substituindo os valores de  $x$  e  $\sqrt{x^2 + 4}$  nas identidades em (5.10), temos

$$\alpha(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2} = \frac{2 \sinh z + 2 \cosh z}{2} = \sinh z + \cosh z = e^z$$

e

$$\beta(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 + 4}}{2} = \frac{2 \sinh z - 2 \cosh z}{2} = \sinh z - \cosh z = -e^{-z}.$$

Substituindo  $\alpha(x) = e^z$  e  $\beta(x) = -e^{-z}$  nas identidades em (5.9), temos

$$F_n(x) = \frac{\alpha(x)^n - \beta(x)^n}{\alpha(x) - \beta(x)} = \frac{e^{nz} - (-1)^n e^{-nz}}{e^z + e^{-z}}$$

e

$$L_n(x) = \alpha(x)^n + \beta(x)^n = e^{nz} + (-1)^n e^{-nz}.$$

Desse modo,

- $F_{2n}(x) = \frac{e^{2nz} - (-1)^{2n} e^{-2nz}}{e^z + e^{-z}} = \frac{e^{2nz} - e^{-2nz}}{e^z + e^{-z}} = \frac{(e^{2nz} - e^{-2nz})/2}{(e^z + e^{-z})/2} = \frac{\sinh(2nz)}{\cosh z};$
- $F_{2n+1}(x) = \frac{e^{(2n+1)z} - (-1)^{2n+1} e^{-(2n+1)z}}{e^z + e^{-z}} = \frac{e^{(2n+1)z} + e^{-(2n+1)z}}{e^z + e^{-z}} = \frac{(e^{(2n+1)z} + e^{-(2n+1)z})/2}{(e^z + e^{-z})/2} = \frac{\cosh((2n+1)z)}{\cosh z};$
- $L_{2n}(x) = e^{2nz} + (-1)^{2n} e^{-2nz} = e^{2nz} + e^{-2nz} = 2 \left( \frac{e^{2nz} + e^{-2nz}}{2} \right) = 2 \cosh(2nz);$
- $L_{2n+1} = e^{(2n+1)z} + (-1)^{2n+1} e^{-(2n+1)z} = e^{(2n+1)z} - e^{-(2n+1)z} = 2 \left( \frac{e^{(2n+1)z} - e^{-(2n+1)z}}{2} \right) = 2 \sinh((2n+1)z).$

Logo,

- $F_{2n}(x) = \frac{\sinh(2nz)}{\cosh z};$
- $F_{2n+1}(x) = \frac{\cosh((2n+1)z)}{\cosh z};$
- $L_{2n}(x) = 2 \cosh(2nz);$
- $L_{2n+1} = 2 \sinh((2n+1)z).$

Como vimos anteriormente, cada termo da sequência polinomial de Fibonacci ou de Lucas corresponde a um polinômio, sendo que o  $n$ -ésimo termo da sequência polinomial de Fibonacci possui grau  $n - 1$ , enquanto que o  $n$ -ésimo termo da sequência polinomial de Lucas possui grau  $n$ . Assim, podemos escrever os termos gerais  $F_n(x)$  e  $L_n(x)$  como um produto de fatores do grau 1 sob a forma

$$F_n(x) = (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot \dots \cdot (x - r_{n-1})$$

e

$$L_n(x) = (x - s_1) \cdot (x - s_2) \cdot \dots \cdot (x - s_n),$$

em que,  $r_1, r_2, \dots, r_{n-1}$  e  $s_1, s_2, \dots, s_n$  são, respectivamente, as raízes de  $F_n(x)$  e  $L_n(x)$ .

Desse modo, se quisermos determinar o  $F_4(x)$ , por exemplo, basta encontrar as três raízes do polinômio de grau 3 correspondente ao  $F_4(x)$ , que são:  $0, -i\sqrt{2}$  e  $+i\sqrt{2}$ , pois

$$F_4(x) = (x - 0) \cdot (x - (-i\sqrt{2})) \cdot (x - i\sqrt{2}) = x^3 + 2x.$$

Assim, para obtermos as raízes da equação polinomial de um termo qualquer, basta fazer seu termo geral igual a zero, Ou seja,  $F_n(x) = 0$  ou  $L_n(x) = 0$ .

Sendo  $z = x + yi$ , resulta da definição de funções hiperbólicas que para todo  $x$  real,  $\sinh x = 0$  se, e somente se,  $x = 0$ . Daí, se  $x = 0$ , temos  $\sinh z = \sinh(0 + yi) = 0$  se, e somente se,  $\sinh yi = i \sen y = 0$  e  $\cosh z = \cosh(0 + yi) = 0$  se, e somente se,  $\cosh yi = \cos y = 0$  (Proposição 4.3.21). Desse modo, podemos encontrar os números complexos necessários e suficientes para que  $F_n(x)$  e  $L_n(x)$  sejam nulos.

**Exemplo 9** Fazendo  $F_{2n}(x) = 0$ , temos

$$\frac{\sinh 2nz}{\cosh z} = 0.$$

Como  $\cosh z \neq 0$ , temos  $\sinh 2nz = 0$ , o que implica que  $\sen 2ny = 0$  e  $\cos y \neq 0$ . Como  $\sen 2ny = 0$ , resulta que  $2ny = k\pi$ , onde  $z = yi$ . Ora, para obtermos o termo geral de  $F_{2n}(x)$  tomamos  $x = 2 \sinh z$ , logo,  $x = 2 \sinh yi = 2i \sen y = 2i \sen k\pi/2n$ . Ou seja, os números complexos necessários e suficientes para que  $F_{2n}(x) = 0$  são do tipo  $x = \pm 2i \sen k\pi/2n$ , com  $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$ .

Assim, em particular, se quisermos determinar o  $F_6(x)$ , basta notar que  $F_6(x) = F_{2 \cdot 3}(x)$ , isto é,  $n = 3$  e as soluções para que tenhamos  $F_6(x) = 0$  são do tipo  $x = \pm 2i \sen k\pi/6$ , com  $k = 0, 1, 2$ . Daí,

- $k = 0 \Rightarrow x = \pm 2i \sen 0\pi/6 = \pm 2i \sen 0 = 0$ ;
- $k = 1 \Rightarrow x = \pm 2i \sen 1\pi/6 = \pm 2i \cdot 1/2 = \pm i$ ;
- $k = 2 \Rightarrow x = \pm 2i \sen 2\pi/6 = \pm 2i \sen \pi/3 = \pm 2i \cdot \sqrt{3}/2 = \pm i\sqrt{3}$ .

Como  $F_6(x)$  é um polinômio de grau 5, podemos escreve-lo do seguinte modo

$$F_6(x) = (x - 0)(x - i)(x + i)(x + i\sqrt{3})(x - i\sqrt{3}),$$

onde  $0, +i, -i, i\sqrt{3}$  e  $-i\sqrt{3}$  são as raízes do polinômio  $F_6(x)$ . Portanto,

$$F_6(x) = x(x^2 + 1)(x^2 + 3) = x^5 + 4x^3 + 3x.$$

Para  $F_{2n+1}(x) = 0$ ,

$$\frac{\cosh(2n+1)z}{\cosh z} = 0.$$

O que implica que  $\cosh(2n+1)z = 0$ , já que  $\cosh z \neq 0$ . Ou seja,  $\cosh(2n+1)yi = \cos(2n+1)y = 0$ , com  $\cos y \neq 0$ . Daí,  $(2n+1)y = (2k+1)\pi/2$ , desse modo,

$$z = yi = \frac{(2k+1)\pi i}{2(2n+1)}.$$

Como  $x = 2 \operatorname{senh} z$ , temos

$$x = \pm 2i \operatorname{sen} \left( \frac{2k+1}{2n+1} \right) \cdot \frac{\pi}{2}, \text{ com } k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Analogamente, fazendo  $x = 2 \operatorname{senh} z$ , também podemos encontrar as soluções para os polinômios de Lucas:

- $L_{2n}(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 2i \operatorname{sen} \left( \frac{2k+1}{2n} \right) \cdot \frac{\pi}{2}, \text{ com } k = 0, 1, 2, \dots, n-1$
- $L_{2n+1}(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 2i \operatorname{sen} \left( \frac{k\pi}{2n+1} \right), \text{ com } k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

# CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho pretendeu realizar um estudo sobre as funções hiperbólicas a partir de uma abordagem geométrica sobre a hipérbole. A fim de cumprir esse objetivo, definimos a hipérbole  $xy = k$ , a rotação hiperbólica, e fizemos uma interpretação geométrica para o logaritmo natural. A partir daí, foram definidos o setor hiperbólico, o ângulo hiperbólico e, logo em seguida, as funções hiperbólicas. Para finalizar, como forma de justificar esse estudo, foi realizada uma abordagem sobre algumas das principais aplicações das funções hiperbólicas.

A abordagem é feita com uma linguagem simples e acessível para cada tipo de leitor, seja ele um aluno do ensino médio ou que esteja cursando uma graduação. Diante disso, este trabalho atinge seu objetivo, servindo como material de apoio para professores do Ensino Médio que desejam apresentar esse conteúdo para seus alunos em sala de aula, e para estudantes que estão ingressando em um curso de graduação. Desse modo, como este material é destinado a esse público específico, sugerimos as referências [4], [16] e [17] para leitores que desejam aprofundar seus conhecimentos acerca desse tema.

# REFERÊNCIAS

- [1] ALHADAS, Márcio de C. **Funções Hiperbólicas no Ensino Médio**. 73 f. Dissertação de Mestrado, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Centro de Ciências e Tecnologia, UENF, Rio de Janeiro, 2013.
- [2] BRADY, Paul W. **Gateway Arch**. WorldAtlas. Disponível em: <<https://www.worldatlas.com/landmarks/gateway-arch-st-louis.html>>. Acesso em: 05 de Junho de 2022.
- [3] DELGADO, J.; FRENSEL, K.; CRISSAFF L.; **Geometria Analítica**. 2<sup>a</sup> edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, 2017.
- [4] FERREIRA, Mário V. **Uma Proposta para a abordagem de Funções Hiperbólicas no Ensino Médio**. 74 f. Dissertação de Mestrado, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2018.
- [5] FREITAS, Maria do B. C. da S. B. **As Funções Hiperbólicas e suas Aplicações**. 61 f. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Federal da Paraíba - UFPB, João Pessoa, 2015.
- [6] GUIDORIZZI, Hamilton L. **Um curso de cálculo**. vol. 1. 5<sup>a</sup> edição. São Paulo: LTC, 2011.
- [7] HOGGATT, Jr., V. E.; BICKNELL, Marjorie; **Roots of Fibonacci Polynomials**, California.
- [8] IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar, 3: Trigonometria**. 7<sup>a</sup> edição. São Paulo: Atual Editora, 1993.
- [9] KEMEL15. **Corrente suspensa formando uma catenária**. Wikimedia. Disponível em: <[https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Kette\\_Kettenkurve\\_Catenary\\_2008\\_PD.JPG](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Kette_Kettenkurve_Catenary_2008_PD.JPG)>. Acesso em: 03 de Junho de 2022.
- [10] LIMA, Elon L. et al. **A Matemática do Ensino Médio**. Volume 1. 11<sup>a</sup> edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, 2016.
- [11] LIMA, Elon L. **Números e Funções Reais**. 1<sup>a</sup> edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, 2013.

- [12] MERRIMAN, Mansfield; WOODWARD, Robert S. **Hyperbolic Functions**, N° 4, New York, 1906.
- [13] ORTIZ, Roberto D. **Ponte Juscelino Kubitschek**. Wikipédia. Disponível em: <[https://pt.wikipedia.org/wiki/Ponte\\_Juscelino\\_Kubitschek](https://pt.wikipedia.org/wiki/Ponte_Juscelino_Kubitschek)>. Acesso em: 03 de Junho de 2022.
- [14] RODRIGUES, Kennedy. F. **Funções Hiperbólicas Definidas por Ângulos Hiperbólicos**. 68 f. Dissertação de Mestrado, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Federal de Sergipe - UFSE, São Cristóvão, 2014.
- [15] SANTOS, Jonas J. C. dos. **Estudo e Aplicações das Funções Hiperbólicas**. 77 f. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Federal da Paraíba - UFPB, João Pessoa, 2015.
- [16] SHERVATOV, V.G. **Hiperbolic Functions**, D.C. Heath, Boston, 1963.
- [17] VASCONCELOS, Jerry G. S. F. **Funções Hiperbólicas: História, Conceito e Aplicações**. 74 f. Dissertação de Mestrado, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Instituto Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2013.
- [18] WALSH, Niall P. **Basílica da Sagrada Família**. ArchDaily. Disponível em: <<https://www.archdaily.com.br/br/918862/sagrada-familia-recebe-seu-primeiro-alvara-de-construcao-em-137-anos-de-historia>>. Acesso em: 05 de Junho de 2022.