Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas
Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional
Dissertação de Mestrado

Aplicação de Probabilidade e Distribuição Binomial em Cursos Técnicos em Agropecuária

Marcos Moreira Peixoto

Cruz das Almas - Bahia

Março de 2022

Aplicação de Probabilidade e Distribuição Binomial em Cursos Técnicos em Agropecuária

Marcos Moreira Peixoto

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Adson Mota Rocha

Cruz das Almas-Bahia

Março 2022

FICHA CATALOGRÁFICA

P379a	Peixoto, Marcos Moreira. Aplicação de probabilidade e distribuição binomial em cursos técnicos em agropecuária / Marcos Moreira Peixoto._ Cruz das Almas, BA, 2022. 49f., il. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas. Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT. Orientador: Prof. Dr. Adson Mota Rocha. 1.Matemática – Estatística. 2.Matemática – Probabilidades. 3.Distribuição binomial – Análise. I.Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas. II.Título. CDD: 519.23

Ficha elaborada pela Biblioteca Universitária de Cruz das Almas - UFRB. Responsável pela Elaboração – Antonio Marcos Sarmento das Chagas (Bibliotecário - CRB5 / 1615).

Aplicação de Probabilidade e Distribuição Binomial em Cursos Técnicos em Agropecuária

Marcos Moreira Peixoto

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, APROVADO em 22 de Março de 2022.

Banca examinadora:

gov.br Documento assinado digitalmente
ADSON MOTA ROCHA
Data: 12/05/2022 16:31:39-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Prof. Dr. Adson Mota Rocha(Orientador)

UFRB

Luiz Alberto de Oliveira Silva

Prof. Dr. Luiz Alberto de Oliveira Silva

UFRB

Maria Amélia de P. B. Hohlenwerger

Profa. Dra. Maria Amelia de Pinho Barbosa Hohlenwerger

UFRB

Agradecimentos

Eu agradeço a Deus, todos os professores que me ajudaram e minha família.

"Cabe ao professor, especialmente ao educador, tirar os obstáculos entre a pessoa e o conhecimento, e que ela sinta, no professor e educador, como o conhecimento transformou aquela pessoa"

Leandro Karnal

Resumo

Neste trabalho são abordadas as definições de probabilidade, distribuição binomial e as aplicações em problemas que possam auxiliar os professores de um curso técnico do ensino médio em agropecuária ou área afim. Neste contexto, são trazidos os conceitos iniciais da estatística, análise combinatória, probabilidade e binômio de Newton a fim de melhor compreensão da distribuição binomial. As aplicações direcionadas ao curso técnico no ensino médio visam facilitar o trabalho de pesquisa dos professores nas implementações destes temas da estatística.

Palavras-chave: Probabilidade; Binômio de Newton; Distribuição Binomial; Agropecuária.

Abstract

In this work we approach the definitions of probability and binomial distribution and apply them to problems that can help teachers of a technical course of high school in agriculture or similar area. In this context, we bring the initial concepts of statistics, combinatorics, probability and Newton's binomial in order to better understand the binomial distribution. The applications aimed at the technical course in high school aim to facilitate the research work of teachers in the implementation of these statistical themes.

Keywords: Probability; Newton's binomial; Binomial Distribution; Agriculture.

Sumário

Introdução

O ensino de matemática é alvo de estudos e debates, principalmente com a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2016), tratando de uma área muito complexa que necessita de grandes reformulações. Segundo Miguel e Miorim (2019), a finalidade do ensino da matemática é fazer o estudante compreender e se apropriar da própria matemática concebida com um conjunto de resultados, métodos, procedimentos, algoritmo, etc . Outra finalidade apontada pelos autores é fazer o estudante construir, por intermédio do conhecimento matemático, valores e atitudes de natureza diversa, visando à formação integral do ser humano e, particularmente, do cidadão, isto é, do homem público.

A importância do relacionamento dos conteúdos teóricos com a prática é imprescindível na compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos no ensino de cada disciplina, conforme as Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, devem ser ensinadas, propondo atividades que deverão ser organizados por meio de atividades teóricas e práticas e a análise combinatória e probabilidade são assuntos que estão diretamente na vida do ser humano.

Nesse viés, é essencial falar que o assunto análise combinatória faz parte do ensino de matemática e que é um conteúdo que muitos alunos e até mesmo professores têm aversão pela forma em que combinatória é apresentada nos livros do ensino médio, sendo apresentada como meramente utilização de fórmulas.Devemos levar em conta que os temas de estatísticas são relevantes devido sua grande aplicabilidade em diversas área de conhecimento, em particular para os próprios saberes da matemática. Para Roa e Navarro-Pelayo,

> *os problemas combinatórios e as técnicas para sua resolução tiveram e têm profundas implicações no desenvolvimento de outras áreas da matemática como a probabilidade, teoria dos números, a teoria dos autônomos e inteligência artificial, investigação operativa, geometria e topologia combinatórias (ROA; NAVARRO-PELAYO, 2001).*

Nas últimas décadas, vê-se um movimento cada vez maior numa redefinição da apresentação destes conteúdos considerados relevantes no desenvolvimento do estudante, principalmente que desenvolve o raciocínio lógico e o pensamento crítico.

> *(...) o ensino de Análise Combinatória deve se dar através de situações problema. As fórmulas devem aparecer em decorrência das experiências dos alunos na resolução de problemas, devem ser construídas e não ser o elemento de partida para o ensino de cada tema: Arranjo, Permutação e Combinação (STURM, 1999).*

A teoria da probabilidade é o ramo da matemática que estuda experimentos que dependem do acaso. Na distribuição de probabilidade de eventos independentes, calculamos o número de sucessos numa sequência de n tentativas em um experimento aleatório. Por exemplo, na agropecuária, suponha que ao nascimento de um bezerro existe a possibilidade de macho ou fêmea e o objetivo seja nascer fêmea, esse será o sucesso no problema, ou que uma vacina aplicada em um rebanho tenha certa probabilidade de eficácia e o cálculo de eficácia em um certo número n de gados seja o objeto estudado, a eficácia pode ser chamada de sucesso. Os livros (MEYER, 1965; BUSSAB; MORETTIN, 2010; MORGADO, 1991) são boas recomendações para aqueles que desejam iniciar no estudo de análise combinatória e probabilidade. Neste trabalho, os conteúdos da teoria de probabilidade foram construídos usando como livro texto (MORGADO, 1991), referência bastante abordada nos cursos tradicionais de análise combinatória e probabilidade, em especial no curso do Mestrado Profissional em Matemática.

No ensino médio vem sempre sendo tratada no contexto da abordagem dos conteúdos de análise combinatória, como arranjo, permuta e combinação. No entanto, a parte de probabilidade, bem como distribuição, quando feitas, são abordadas muito superficialmente. Em particular, um tipo de distribuição, a distribuição binomial não é conteúdo encontrado nos livros didáticos e quando abordada é um conteúdo superficial e direto, não sendo contextualizado suficientemente com a vida do aluno. Ao aluno do curso técnico em agropecuária ou áreas afins pouco é apresentado, e é possível notar dificuldades de docentes em abordar o assunto que por muitas vezes não está no material didático com detalhes.

O objetivo deste trabalho é buscar, através de aplicações da distribuição binomial para o curso de ensino médio técnico em agropecuária, fomentar uma estratégia ao professor de contextualização da teria de probabilidade na sala de aula. Para isto, inicialmente é feita uma apresentação dos conceitos de probabilidade e distribuição binomial de forma construtiva para auxiliar os professores a fim de melhor compreensão da distribuição binomial. É incluído uma aplicação de um artigo de estudos realizados na EMBRAPA.

Este trabalho está dividido em quatro capítulos. No Capítulo 1, tem-se os conceitos iniciais de análise combinatória. No Capítulo 2 são apresentados os conceitos sobre probabilidade e distribuição. No Capítulo 3 é dado destaque à distribuição Binomial. Por fim, no Capítulo 4, faz-se a apresentação de problemas contextualizados e aplicáveis no ensino médio e técnico em agropecuária.

Capítulo 1

Conceitos Iniciais de Análise Combinatória

Segundo Morgado (1991), análise combinatória ou simplesmente combinatória é a parte da matemática que analisa estruturas e relações discretas, resolvendo problemas, sejam em determinar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto dado e que satisfazem certas condições em contar e classificar os subconjuntos de um conjunto finito e que satisfazem certas condições dadas.

Dentre os problemas de análise combinatória se destacam permutações, arranjos e combinações. É importante ressaltar que problemas simples podem revelar certas dificuldades exigindo criatividade na resolução.

Neste capítulo é apresentada uma abordagem mais simples, buscando uma construção de técnicas de contagem que ajudam na resolução de problemas. Iniciamos com uma discussão dos princípios aditivos e multiplicativos, que apesar de óbvios, contribuem com a construção do raciocínio para abordagem de permutação, arranjos e combinação.

1.1 Princípios Básicos da Aritmética

O princípio aditivo é uma das técnicas mais primitivas na história da contagem e desenvolvida na escola desde as séries de ensino infantil, onde é introduzida contextualizada com problemas do cotidiano infantil.

A operação de adição geralmente é introduzida em conexão com um problema de contagem. Quando o professor associa um conjunto p com determinados elementos adicionados a outro conjunto q com outra quantidade de elementos, podendo ser diferentes do primeiro conjunto, o total será a união desses conjuntos será a adição dos elementos do primeiro conjunto ao segundo conjunto. Sendo assim a união desses conjuntos, ou seja, dada por $p+q$ elementos. Esse problema de contagem é chamado princípio aditivo.

Dessa forma, podemos ilustrar e contextualizar com os cursos agrários na seguinte situação: Matheus possui 4 bezerros e João 5, diferentes dos de Matheus, logo a união desses dois conjuntos resultam na soma $4+5=9$, que é a quantidade de bezerros que os dois possuem.

O princípio multiplicativo torna-se uma ferramenta básica para resolver problemas de contagem no ensino médio. Para motivar tal situação, considere a seguinte situação de três cidades A, B e C e existencia dois caminhos A para B e de B para C existem 3 caminhos, gostaria de saber quantas formas podemos ir da cidade A para a cidade C, passando por B.

Podemos pensar que tomando um dos caminhos de A para B, teremos 3 opções para ir de B para C e tomando o outro caminho de A para B podemos usar os mesmos 3 caminhos de B para C. Somando os caminhos existentes $3+3=2\cdot 3$, logo exitem 6 caminhos possíveis.

O princípio multiplicativo auxilia nesse cálculo e serve como uma ferramenta poderosa para os próximos problemas. O exemplo acima ilustra o princípio multiplicativo ou também chamado de princípio fundamental da enumeração.

De maneira geral, sabendo que as decisões são disjuntas, que a forma de se tomar a primeira decisão existe e é de x maneiras, e que a segunda decisão pode ser tomada de y maneiras, então o número de maneiras de se tomarem as decisões 1 e 2 é xy. Esse princípio se expande para n decisões, desde que os conjuntos em questão sejam disjuntos.

Assim, o princípio multiplicativo permite encontrar o número de elementos do conjunto de caminhos possíveis, usando como primeira decisão 2 caminhos a serem usados de A para B e como segunda decisão os 3 caminhos existentes de B para C. Isto é, o número de formas de ir do caminho A ao C é $2 \cdot 3 = 6$.

Exemplo 1.1.1. *Quantas são as formas possíveis, entre machos e fêmeas, de nascimento de bezerros de* 6 *vacas em que cada vaca pariu apenas um filhote no mesmo dia?*

Nesse caso, há duas maneiras possíveis a cada nascimento de bezerro, ser macho ou fêmea. Como há 6 vacas, as formas possíveis formas de nascimentos, entre machos e fêmeas, são 2.2.2.2.2.2 ou 2^6o que indica 64 formas diferentes de nascimento de bezerros.

1.2 Permutação Simples

Considerando um problema com um conjunto de elementos, onde a localização deles importam, a permutação é qualquer agrupamento que se pode formar com todos os elementos, usando cada um deles uma única vez, e que se diferenciam um do outro apenas pela posição em que esses elementos aparecem no agrupamento. Desta forma, trocando a posição de dois elementos quaisquer temos outra permutação dos elementos. Um problema clássico é determinar o número de permutações simples possíveis num conjunto com n elementos, sendo esse número representado por P_n. Modelando matematicamente, considera-se n objetos distintos $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ e deseja-se obter P_n. Aqui destacam-se duas observações, $a_i \neq a_j$ para $i \neq j$ e cada permutação tem ordenados todos os elementos.

Por exemplo, considerando a palavra COR e, como elementos as letras, ou seja, $a_1 = C$, $a_2 = O$ e $a_3 = R$, teremos 6 formas diferentes de organizar, COR, CRO, ROC, RCO, ORC, OCR. Outra forma de analisar é ver que: para a primeira letra da palavra, temos 3 possibilidades de escolha, C, O ou R; como não há repetição para a segunda letra teremos 2 possibilidades, pois uma das letras foi usada na primeira posição; e, consequentemente, para a terceira letra existe 1 possibilidade. Dessa forma, usando o princípio multiplicativo $3.2.1 = 6$.

No caso geral, tem-se n modos de escolher o primeiro elemento, $n-1$ formas de escolher o segundo elemento, assim por diante até que no último elemento tem-se 1 forma de escolher. Assim, usando o princípio multiplicativo, a quantidade de permutações simples possível é

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)...3 \cdot 2 \cdot 1 = n!. \tag{1.1}$$

Exemplo 1.2.1. *Um fazendeiro pretende marcar seus bois com etiquetas numeradas. Essas etiquetas devem ter* 3 *dígitos e serem formadas com os algarismos* $1, 4,$ *e* 9*, sem repetições. De quantas maneiras o fazendeiro pode marcar os bois?*

A resolução é um problema clássico de permutação simples, isto é, devemos buscar a quantidade de permutações. Neste caso:

$$P_3 = 3! = 6.$$

Assim, existem 6 maneiras de marcar os bois. Outros problemas podem surgir envolvendo permutações e incluindo mais regras. Durante a resolução, usaremos técnicas de contagem que partem do mesmo princípio.

Exemplo 1.2.2. *Um fazendeiro pretende marcar seus bois com etiquetas numeradas. Essas etiquetas devem ter* 3 *dígitos, sendo que o último número deve ser par e as etiquetas devem conter somente os algarismos* $1, 4, 5, 8$ *e* 9 *sem repetições. De acordo com as exigências desse fazendeiro, quantos bois podem ser marcados?*

Como o algorismo da unidade deve ser par, só há duas escolhas, 4 e 8. E sobrando 4 escolhas para o algarismo das centenas, e consequentemente, três do algarismo das dezenas. Podemos, então, formar $2 \times 4 \times 3 = 24$ bois podem ser marcados dessa forma.

1.3 Permutação circular

Uma variação da permutação simples é a permutação circular, na qual em vez de analisar a posição dos elementos em linha reta, modificar a posição dos elementos em uma circunferências. Na permutação circular, a ordem em que um elemento está em relação ao outro em um ciclo importa. Mas não há ordem fixa, ou seja, "girar" os elementos não gera uma nova permutação circular.

De quantos modos pode-se colocar n objetos distintos em n posições em torno de um círculo, onde são considerados permutações circulares equivalentes quando são obtidas ao rotacionar as posições? Este número de permutações circulares é representada por PC_n.

Se não considerarmos as permutações circulares equivalentes teríamos $P_n = n!$ disposições. Como cada permutação circular gera n disposições equivalentes, então a quantidade de permutações circulares será

$$PC_n = \frac{n!}{n}.$$

Exemplo 1.3.1. *De quantos modos 5 pessoas podem sentar-se à mesa circular?*

Inicialmente pode-se pensar que a solução desse problema se dá com 5! porém, tomando que todos os lugares são iguais, e atribuindo as letras A, B, C, D, E para cada pessoa teremos cada combinação é repetida 5 vezes por estar em círculo, assim, por exemplo, $ACDEB, BACDE, EBACD, DEBAC, CDEBA$ todos possuem a mesma organização numa mesa circular: A estará ao lado de C, C ao de D, D ao de E, E ao de B e B ao de A. Logo para cada organização de letras haverá 5 idênticas na contagem em 5!, logo a solução será $5!/5 = 4! = 24$, ou seja, serão 24 modos de se sentar à mesa.

1.4 Arranjo

O arranjo é um tipo especial de permutação. O problema consiste em, dado o conjunto de n objetos, para organiza-los em k elementos onde $k < n$. Cada disposição é uma arranjo e denotamos a quantidade de arranjos possíveis por $A_{(n,p)}$ (Lê-se arranjo de n, p a p.). Pode-se verificar facilmente que:

$$A_{(n,p)} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}. \tag{1.2}$$

Exemplo 1.4.1. *De um grupo de sete indivíduos, quantas comissões podemos formar, compostas de um presidente, um tesoureiro e um secretário? (Esse é um clássico problema de arranjo simples)*

A solução desse problema se dá em observar que essa comissão existem cargos diferentes, dessa forma, a configuração ABC é uma contagem diferente de BCA, em que usamos as mesmas letras para representar os indivíduos. Esse é um problema de arranjo que resolveremos da seguinte forma:

$$A_{(7,3)} = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210.$$

1.5 Combinação

Combinação são todos os subconjuntos que podemos formar com uma quantidade de elementos de um conjunto maior. Ou seja, dado um conjunto com n elementos, $a_1, a_2, \ldots, a_n$, cada subconjunto com k, $k < n$, é uma combinação.

Um dos cálculos mais comuns dentro do estudo de contagem é a forma de contar quantidade de combinações possíveis com k objetos podemos formar a partir de um total de n objetos. Esta quantidade é representada por $C_{(n,k)}$ ou ainda $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$.

Por exemplo, quantos conjuntos de 3 elementos podem ser formados utilizando 5 itens, A, B, C, D e E? Para responder essa pergunta, podemos pensar da seguinte forma: como há 5 maneiras diferentes de selecionar o item inicial, 4 maneiras de selecionar o item seguinte e 3 maneiras de selecionar o item final, há portanto $5 \cdot 4 \cdot 3$ maneiras de selecionar o grupo de 3 quando a ordem de seleção dos itens for relevante. Entretanto, como cada grupo de 3 (por exemplo, o grupo formado pelos itens A, B e C) será contado 6 vezes (todas as permutações ABC, ACB, BAC, BCA, CAB e CBA serão contadas quando a ordem da seleção for relevante), tem-se que o número total de grupos que podem ser formados é igual a:

$$C_{(5,3)} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1}.$$

Em geral, como vimos em arranjo a forma de calcular como n objetos podem ser organizados em k espaços é dado por $A_{(n,k)} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$, isso acontece quando a ordem é relevante, porém no estudo de combinações cada grupo de k itens será contado $k!$ vezes, então:

$$C_{(n,k)} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdots (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}. \tag{1.3}$$

Em outra notação,

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{(n-k)!k!}. \tag{1.4}$$

Note que $C_{(n,1)} = n$, $C_{(n,n)} = 1$ e, por convenção, $C_{(n,0)} = 1$.

Exemplo 1.5.1 (Questão do Enem - 2021)**.** *A prefeitura de uma cidade está renovando os canteiros de flores de suas praças. Entre as possíveis variedades que poderiam ser plantadas, foram escolhidas cinco: amor-perfeito, cravina, petúnia, margarida e lírio. Em cada um dos canteiros, todos com composições diferentes, serão utilizadas somente três variedades distintas, não importando como elas serão dispostas. Um funcionário deve determinar os trios de variedades de flores que irão compor cada canteiro. De acordo com o disposto, a quantidade de trios possíveis é dada por:*

(a) 5*;*

(b) 5!

(c) $\frac{5!}{(5-3)!}$

(d) $\frac{5!}{(5-3)!2!}$

(e) $\frac{5!}{(5-3)!3!}$

Essa questão pode ser facilmente respondida observando que na escolha das sementes a ordem não importa, logo é uma questão de combinação. Dessa forma, $C_{(5,3)} = \frac{5!}{(5-3)!3!}$ que, usando a fórmula que vimos de combinação teremos a ultima alternativa como correta.

1.6 Permutação com elementos repetidos

Permutação de elementos repetidos deve seguir uma forma diferente da permutação, pois elementos repetidos permutam entre si. Para compreender como isso acontece veja o exemplo abaixo:

A quantidade de permutações da palavra "BANANA"ficaria da forma, sem levar em consideração as letras (elementos) repetidas

$$P_6 = 6! = 720.$$

Pelo fato de "BANANA"ter letras repetida, obtemos um número de anagramas menor do que obteríamos se as letras fosse todas distintas. Numa contagem em permutação simples BAN_1AN_2A e BAN_2AN_1A seriam anagramas diferentes, por exemplo. Assim para cada anagrama da palavra "BANANA"teremos 2! repetições da letra N. O mesmo raciocínio pode ser feito com a letra A, como podemos observar:

$$BA_1NA_2NA_3 = BA_1NA_3NA_2 = BA_2NA_1NA_3 =$$

$$= BA_2NA_3NA_1 = BA_3NA_1NA_2 = BA_3NA_2NA_1.$$

O anagrama "BANANA", ao calcular a forma de organizar as letras "As", continuamos com o mesmo anagrama e observamos que a letra A se organiza de 6 formas diferentes que é o mesmo que 3!, ou seja a permutação das 3 letras que se repetem. Assim, cada anagrama calculado, se repete 3! por conta da repetição da letra A e 2! vezes por conta da repetição da letra N. Usando o princípio multiplicativo entre as repetições, observamos que existem $3! \cdot 2! = 12$ repetições para cada anagrama calculado. Logo a forma correta de calcular essa quantidade de anagramas será:

$$\frac{6!}{3!2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2} = 60,$$

que vamos representar por $P_6^{3,2}$.

Outra maneira de obter as permutações com repetições é utilizando combinações. Para formar anagramas da palavra "BANANA"basta organizar $1B$, $3A$, e $2N$ em 6 lugares, __ __ __ __ __ __. O número de modos de escolher em que lugar colocaremos a letra B pode ser calculada por $C_{(6,1)}$, isto é, combinação de um elemento em 6 lugares. Após isso, restam cinco posições e o número de modos de escolher os lugares onde serão colocados as 3 letras As é $C_{(5,3)}$. Por fim, restam duas posições e o número de modos de se organizar as duas letras Ns será $C_{(2,2)}$, ou seja, apenas um único modo. Logo,

$$P_6^{1,3,2} = C_{(6,1)} \cdot C_{(5,3)} \cdot C_{(2,2)} = 6 \cdot 10 \cdot 1 = 60.$$

No caso geral, dada um conjunto com n elementos, $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, sendo alguns elementos repetem n_1 vezes, n_2 vezes, e, sucessivamente, n_k vezes. Então, a quantidade de permutações é calculada:

$$\begin{aligned}
P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k} &= C_{(n,n_1)} \cdot C_{(n-n_1,n_2)} \cdot \ldots \cdot C_{n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1} \cdot n_k} \\
&= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \cdot \ldots \cdot \frac{(n-n_1-n_2-\ldots n_{k-1})!}{n_k!(n-n_1-n_2-\ldots n_{k-1}-n_k)!} \\
&= \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!0!} \\
&= \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}.
\end{aligned}$$

Cálculo de anagramas pode ser associado atualmente ao estudo de quantidade de senhas ou códigos, como veremos no exemplo a seguir.

Exemplo 1.6.1. *Um exemplo de código para marcação de bovinos é $NNNSNSNS$, em que usamos* 5 *letras N (elemento N) e* 3 *letras S (elemento S). Quantos códigos existem usando essas* 8 *letras?*

Dessa forma podemos pensar no 8! como solução inicial, porém as 5 letras N que se repetem podem permutar entre si, assim como as 3 letras S. Assim, uma forma de eliminar as contagens repetidas será:

$$P_8^{5,3} = \frac{8!}{5!.3!} = 56.$$

Dessa forma, usando as letras do problema, podemos marcar 56 bovinos.

Capítulo 2

Probabilidade e Distribuição

Jaques Bernoulli foi um dos mais importantes pesquisadores da probabilidade, escrevendo no fim do séculos XVIII um trabalho intitulado *ARs Conjecturandi*, ou *A arte de conjecturar*, que só seria publicado em 1713, após sua morte. Nesse livro, ele retoma a análise de jogos de azar clássicos e enuncia pela primeira vez um dos princípios fundamentais da teoria da probabilidades: a lei dos grandes números (MORGADO, 1991). Essa lei afirma que, quanto mais repetimos uma experiência aleatória, mais a média dos resultados torna-se previsível, aproximando-se de um valor-limite, Em outras palavras, a longo prazo, até o acaso mais completo acaba dando origem a comportamentos que já não são tão aleatórios.

Para compreender esse fenômeno, nem é preciso ir muito longe. O simples estudo de um jogo de cara ou coroa, de uma moeda não viciada, permite assistir à manifestação da lei dos grandes números. Assim, por exemplo, quanto mais vezes jogarmos uma moeda mais a contagem do número de caras se aproxima do número de coroas. Resumindo, a lei dos grandes números afirma: ao se repetir indefinidamente uma experiência aleatória, a média dos resultados obtidos vai se aproximar inevitavelmente de um valor-limite que nada mais tem de aleatório.

A teoria de probabilidade é o ramo matemática que estuda experimentos ou fenômenos aleatórios, tentado quantificar a noção de provável em determinados eventos. Probabilidade é o estudo das chances de ocorrência de um resultado, que são obtidas pela razão entre casos favoráveis e possíveis.

Quando associamos um fenômeno aleatório à um subconjunto dos números reais temos as variáveis aleatórias, que podem ser discretas ou contínuas. Ao trabalhar com a probabilidade de variáveis assumirem mesmo valor obtemos a distribuição de probabilidade. A distribuição de probabilidade mais conhecida pela simplicidade e vasta aplicabilidade é a distribuição binomial que será abordada no próximo capítulo.

2.1 Experimento Aleatório e Espaço Amostral

Experimentos ou fenômenos aleatórios são aqueles que, mesmo repetidos várias vezes sob condições semelhantes, apresentam resultados imprevisíveis.

São exemplo de experimentos aleatórios:

1. Jogo de um dado, não viciado. Ao jogar um dado, esse dado não viciado, tem na sua face voltada para cima um dos números de 1 a 6;

2. Retirar uma carta de um baralho e verifica se ela é ou não um coringa;

3. Compra uma lâmpada e verifica-se ela para de funcionar ou não antes de 100h de uso;

4. Efetuar o parto de uma vaca e verifica que se trata de uma fêmea;

5. verificar a efetividade de um determinado medicamento quando aplicado em um rebanho.

O espaço amostral ou conjunto universo é o conjunto de todos os resultados possíveis de uma experiência aleatória. Representaremos o espaço amostral por Ω. Os subconjuntos de Ω serão chamados de eventos. Diremos que um evento ocorre quando o resultado da experiência pertence a esse dado evento.

Exemplo 2.1.1. *Lança-se uma moeda e observa-se a face que cai voltada para cima. O espaço amostral é* $\Omega = \{cara, coroa\}$ *e há 4 possibilidade de eventos:* $\varnothing$, $A = cara$, $B = coroa$ *e* Ω*. O evento* $\varnothing$ *nunca ocorre, por isso é chamado de evento impossível. O evento* A *ocorre se, e somente se, o lançamento resulta em caram similarmente para o evento* B*. Por último, o evento* Ω *ocorre sempre e é chamado de evento certo.*

Como o espaço amostral e seus eventos são conjuntos, na próxima seção é realizada a revisão das operações entre conjuntos (eventos) que auxiliarão no restante do capítulo.

2.2 Operações entre Eventos

União

Sejam A e B eventos de um mesmo espaço amostral Ω. A união dos eventos A e B contém os elementos do espaço amostral que estão em pelo menos um dos dois conjuntos. Note que a união também será um evento, o qual será denotado por $A \cup B$. Na figura 2.1 a união é representada pela área hachurada. A união está associada à conjunção *ou*,

$$A \cup B = \{x \in \Omega;\ x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

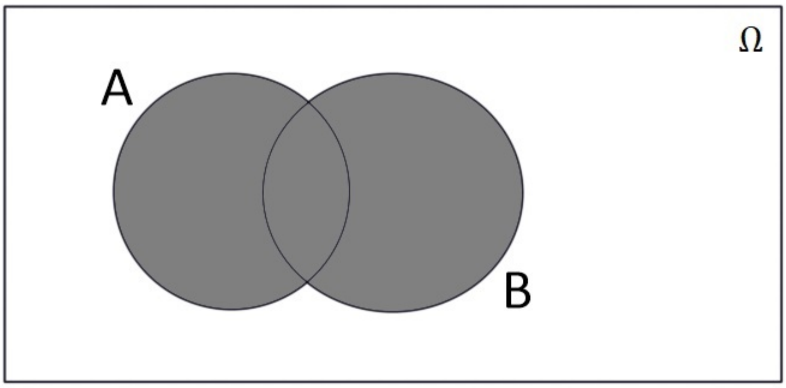

Figura 2.1: Evento União. Fonte: Figura do Autor.

Exemplo 2.2.1. *Considere o espaço amostral determinado pelo acaso de escolher um aluno de um curso de técnico em agropecuária e as disciplinas usadas pelos alunos. Se A é o conjunto dos alunos que fazem a disciplina de Irrigação e B é o conjunto dos alunos que fazem Apicultura, então $A \cup B$ é o conjunto dos alunos que fazem pelo menos uma das duas disciplinas.*

Interseção

Sejam A e B eventos de um mesmo espaço amostral, é possível determinar um novo evento, chamado interseção de A e B e representado por $A \cap B$. Esse evento contém todos todos os elementos do espaço amostral que estão em A e B simultaneamente. Na figura 2.2 o evento $A \cap B$ é representado pela área hachurada. Note que à interseção está associada a conjunção *e*,

$$A \cap B = \{x \in \Omega;\ x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

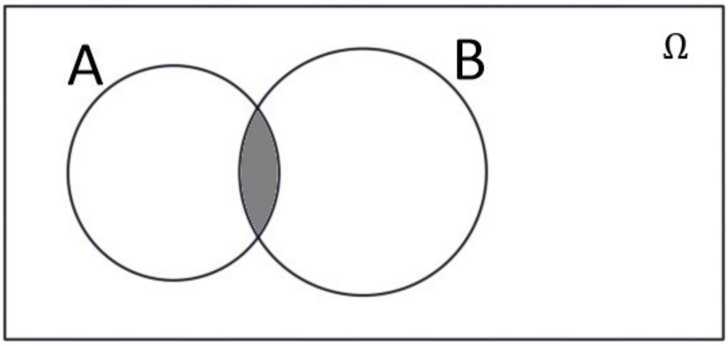

Figura 2.2: Evento Interseção. Fonte: Figura do Autor

Exemplo 2.2.2. *Novamente, considere Ω sendo determinado pelo acaso de escolher um aluno de um curso de técnico em agropecuária e as disciplinas cursada pelos alunos. Se A é o conjunto dos alunos que fazem Meio Ambiente e B é o conjunto de aluno que fazem Construções Rurais, então $A \cap B$ é o evento compostos pelos alunos que fazem simultaneamente as duas disciplinas.*

Exclusão

Dois eventos A e B dizem-se mutuamente exclusivos ou mutuamente excludentes quando a ocorrência de um deles impossibilita a ocorrência do outro. Os eventos não têm nenhum elemento em comum, ou seja, $A \cap B = \varnothing$. Na figura 2.3, o diagrama representa esta situação.

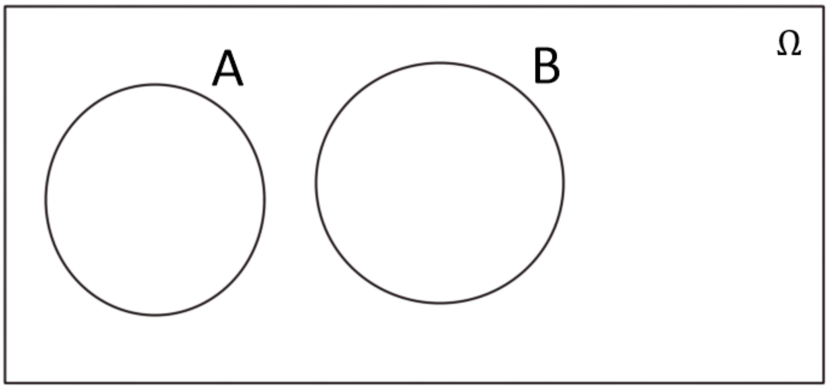

Figura 2.3: Eventos Excludentes. Fonte: Figura do Autor.

Exemplo 2.2.3. *Na jogada de um dado, seja A o evento aparecer número par e B o evento aparecer número ímpar. A e B são mutualmente excludentes, ou seja, $A \cap B = \varnothing$, visto que nenhum número pode ser par e ímpar ao mesmo tempo.*

Negação ou complementar

Se A é um eventos de um espaço amostral Ω. A negação do evento A, denotada por A^c e também chamado de evento complementar de A, é o evento composto por todos elementos do espaço amostral que não estão em A, isto é,

$$A^c = \{x \in \Omega;\ x \notin A\}.$$

Na figura, 2.4 a área escura representa o complementar do evento A.

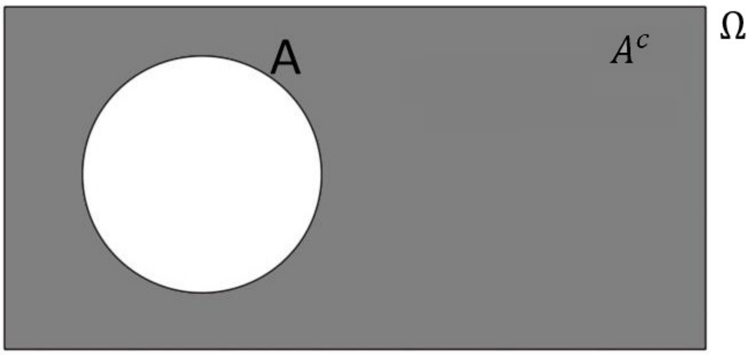

Figura 2.4: Evento Complementar. Fonte: Figura do Autor.

Exemplo 2.2.4. *Se, na jogada de um dado, o evento E_1 consiste no aparecimento das* *faces* 1*, ou* 2*, ou* 5*, ou* 6*. Então:* $E_1 = \{1, 2, 5, 6\}$ *e* $E_1^c = \{3, 4\}$*.*

2.3 Conceito e Propriedades de Probabilidade

Para iniciar o nosso estudo, suponha que o espaço amostral seja discreto, ou seja, Ω é um conjunto finito e, além disso, um espaço equiprovável, onde todos os pontos amostrais dentro dele têm a mesma chance de ocorrer.

Exemplos clássicos são: o experimento em que jogamos um dado, onde o conjunto $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ de cada número tem possibilidade igual de ocorrer; e o experimento de lançamento de uma moeda onde $\Omega = \{Cara, Coroa\}$ e a possibilidade ocorrer Cara ou Coroa são iguais.

Considerando A um evento qualquer de Ω, temos, intuitivamente, que a probabilidade de A ocorrer dentro do espaço amostral Ω é dado por:

$$\text{Probabilidade de } A = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)}. \tag{2.1}$$

Denominando os elementos que compõem A de *'casos favoráreis'* e os elementos do espaço amostral Ω de *'casos prováveis'* e conforme 2.1, definimos a probabilidade de um determinado conjunto como a razão entre o número de casos favoráveis $\#(A)$ e o número total de casos $\#(\Omega)$. Também conhecida como *probabilidade de Laplace.*

$$\text{Probabilidade} = \frac{Casos\ Favoraveis}{Casos\ Possiveis}.$$

Resumidamente, considerando Ω um conjunto finito com n elementos, sendo todos os elementos (casos possíveis) igualmente prováveis, e A um evento qualquer com m elementos $m \leq n$, definimos a probabilidade de A por:

$$\text{Probabilidade de } A = \ P(A) \ = \frac{m}{n}. \tag{2.2}$$

Alguma propriedade imediatas, que vislumbrará uma generalização da definição de probabilidade para espaços amostrais quaisquer.

Proposição 2.3.1. *1. Para todo evento* A*,* $O \leq P(A) \leq 1$*;*

2. $P(\Omega) = 1$;

3. $P(\varnothing) = 0$;

4. Se A *e* B *forem eventos excludentes,* $A \cap B = \varnothing$ *então* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Exemplo 2.3.2. *Três bezerros nascem no mesmo dia e de vacas diferentes. Qual a probabilidade de virem 2 machos nesse grupo de bezerros? Qual a probabilidade de nascerem pelo menos 2 machos? (Levando em conta que a probabilidade de nascer macho ou fêmeas)*

Vamos indicar M para Macho e F para fêmea. O espaço amostral é então:

$\Omega = \{(M, M, M), (M, M, F), (M, F, M), (F, M, M), (M, F, F), (F, M, F), (F, F, M), (F, F, F)\}$,

dessa forma, o número de elementos do espaço amostral é $\#(\Omega) = 8$.

Se A indica o evento "nascer dois machos"temos que:

$$A = \{(M, M, F), (M, F, M), (F, M, M)\},$$

assim, $\#(A) = 3$ e de acordo com a probabilidade de Laplace:

$$P(A) = \tfrac{\#(A)}{\#(\Omega)} = \tfrac{3}{8}.$$

Se tomamos como B o evento, "pelo menos dois machos"teremos:

$B = \{(M, M, F), (M, F, M), (F, M, M), (M, M, M)\}$

Logo, $\#(B) = 4$ e $P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

Exemplo 2.3.3. *Lança-se uma moeda e observa-se a face que cai voltada para cima. O espaço amostral é* $\Omega = cara, coroa$ *e há 4 eventos:* $\varnothing$, $A = \{cara\}$, $B = \{coroa\}$, Ω. *Obviamente*

$$P_1(\varnothing) = 0, P_1(A) = 0,5, P_1(B) = 0,5 \text{ e } P_1(\Omega) = 1.$$

Note que as Propriedades 2.3.1 são satisfeitas. Observe também que esse é um problema em que a probabilidade é equiprovável.

Poderíamos, para esse mesmo espaço amostral, outra probabilidade que pode ser definida é

$$P_2(\varnothing) = 0, P_2(A) = 0,3, P_2(B) = 0,7 \text{ e } P_2(\Omega) = 1,$$

ainda assim as Propriedades 2.3.1 são satisfeitas. Neste caso, temos que o espaço amostral não equiprovável, onde a probabilidade de um evento pode ter valor probabilístico diferente de um outro evento elementar.

Outra questão, quando pensamos em espaços amostral que não são finitos, por exemplo e peso de um bezerro aos seu nascimento, a definição de probabilidade (2.2) não pode ser utilizada.

De forma geral, estendendo a definição de probabilidade de Laplace, para qualquer espaço amostral Ω, defini-se probabilidade como sendo uma função sobre o espaço formado por todos os eventos de Ω.

Definição 2.3.4. *Uma probabilidade é uma função que associa a cada evento $A \subset \Omega$ um número $P(A) \in \mathbb{R}$ de forma que satisfaça as condições:*

1. *Para todo evento A, $0 \leq P(A) \leq 1$*
2. $P(\Omega) = 1$
3. *Se $A \cap B = \varnothing$, ou seja, são mutuamente excludentes, isto é, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$*

Agora será apresentado algumas propriedades fundamentais de probabilidade. Essas propriedades serão importantes para melhor entendimento da distribuição binomial. Inclusive quando abordarmos a probabilidade condicional que será de fundamental importância para entendimento da distribuição binomial.

Proposição 2.3.5. $P(\varnothing) = 0$.

Prova: Utilizando o item 3 da definição de probabilidade, basta ver que

$$1 = P(\Omega) = P(\Omega \cup \varnothing) = P(\Omega) + P(\varnothing),$$

assim, $1 = P(\Omega) + P(\varnothing)$ e usando o item 2, tem-se $1 = 1 + P(\varnothing)$. Logo $P(\varnothing) = 0$. $\square$

Proposição 2.3.6. *A probabilidade do evento complementar, $P(A^c)$, será dada pelo valor que falta para 1 da probabilidade do evento, ou seja,*

$$P(A^c) = 1 - P(A).$$

Prova: Segue que

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup P(A^c) = P(A) + P(A^c),$$

logo

$$1 - P(A^c) = P(A).$$

$\square$

Proposição 2.3.7. *A probabilidade da diferença $(A - B)$, ou seja, a probabilidade de A ocorrer sendo que B não ocorreu é dada por*

$$P(A - B) = P(A) - P(A - B).$$

Prova: Usando operação entre conjunto pode-se mostrar que $A = (A - B) \cup (A \cap B)$, logo

$$P(A) = P[(A - B) \cup (A \cap B)] = P(A - B) + P(A \cap B),$$

daí concluímos

$$P(A) - P(A \cap B) = P(A - B).$$

$\square$

Proposição 2.3.8. *A probabilidade da união qualquer de dois eventos A e B, não necessariamente excludentes, é dada por*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Prova: Duas observações de operações entre conjuntos, $A \cup B = (A - B) \cup B$ e, agora,

$(A - B)$ e B são mutualmente excludentes. Desta forma,

$$P(A \cup B) = P[(A - B) \cup B] = P(A - B) + P(B),$$

e usando a propriedade anterior:

$$P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

$\square$

2.3.1 Probabilidade Condicional

Para melhor entender é iniciado com um exemplo de jogo de dados. Sabe-se que a probabilidade de sair um número 6 ao jogar um dado é $P(seis) = \frac{1}{6}$. Pergunta-se como calcular a probabilidade de sair o mesmo número 6 sendo condicionado que o número sorteado seja par? Escrevemos $P(seis|par)$. Neste caso, nosso espaço amostral são os 3 números pares existentes no dado, portanto, $P(seis|par) = \frac{1}{3}$.

Definição 2.3.9. *A probabilidade de B, sendo que A ocorreu é chamada de probabilidade condicional e representada por $P(B|A)$. Dita simplesmente de probabilidade condicional de B dado A.*

Se considerarmos $A \subset \Omega$ um evento que tenha ocorrido, então temos que A se torna o novo, ou reduzido, espaço amostral (conjunto dos casos possíveis) e o conjunto de casos favoráveis será a intercessão entre A e B, conforme na figura 2.5.

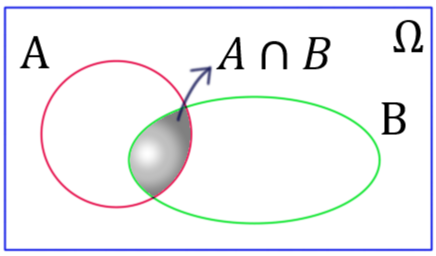

Figura 2.5: Diagrama da Probabilidade Condicional. Fonte: Próprio Autor.

Consequentemente em termos de cálculo probabilísticos, a probabilidade condicional de B, dado A, pode-se verificar que:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}, \quad \text{desdeque } P(A) > 0. \tag{2.3}$$

Caso $P(A) = 0$ então necessariamente, $P(B|A) = 0$.

A equação 2.3 é equivalente a conhecida regra da multiplicação.

$$P(B|A) \cdot P(A) = P(B \cap A). \tag{2.4}$$

Analogamente pode-se obter $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}, P(B) > 0$ o que torna a definição bastante geral.

A probabilidade condicional mantém características de uma probabilidade. Ou seja, fixado um evento $A \subset \Omega$, tal que $P(A) > 0$, a probabilidade condicional, dado o evento A, é uma probabilidade. Isto segue da proposição.

Proposição 2.3.10. *1.* $0 \leq P(E|A) \leq 1$*;*

2. $P(\Omega|A) = 1$*;*

3. Se $E_1 \cap E_2 = \varnothing$ *então* $P((E_1 \cup E_2)|A) = P(E_1|A) + P(E_2|A)$.

Prova: Provaremos somente o item 3. Dados dois eventos, E_1 e E_2, mutualmente excludentes, temos que $E_1 \cap A$ e $E_2 \cap A$ ainda continuam mutualmente excludentes, assim $P((E_1 \cap A) \cup (E_2 \cap A)) = P(E_1 \cap A) + P(E_2 \cap A)$. Pela definição de probabilidade condicional e o resultado acima, temos que

$$\begin{aligned} P((E_1 \cup E_2)|A) &= \frac{P((E_1 \cup E_2) \cap A)}{P(A)} \\ &= \frac{P((E_1 \cap A) \cup (E_2 \cap A)}{P(A)} \\ &= \frac{P((E_1 \cap A) + (E_2 \cap A)}{P(A)} \\ &= P(E_1|A) + P(E_2|A). \end{aligned}$$

□

Independência entre dois eventos

Observando a definição de probabilidade condicional vamosanalisar o conceito de independência entre dois eventos.

Definição 2.3.11. *Dizemos que dois eventos A e B são independentes se, e somente se,*

$$P(B \cap A) = P(B) \cdot P(A).$$

Pela regra da multiplicação $P(B|A) \cdot P(A) = P(B \cap A)$. Assim, $P(B|A) = P(B)$. Pode-se verificar também que pode inverter a ordem dos eventos e $P(A|B) = P(A)$.

A extensão da noção de independência para n eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ é feita naturalmente, se a probabilidade da interseção é igual ao produto das probabilidades,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n).$$

2.4 Distribuição de Probabilidade

Novamente considera-se experimentos aleatórios no entanto a cada elemento do espaço amostral associamos um número, esta associação é o que denomina-se de variável aleatória. Por exemplo, num jogo de dados, podemos definir uma variável aleatória sendo associa a cada jogo do dado exatamente o número que obter, assim os valores atribuídos serão $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Considerando um lançamento de moedas, definimos a variável aleatória sendo que associa o número 0 ao resultado Cara e 1 ao resultado Coroa, neste caso os valores atribuídos são $X = \{0, 1\}$.

Desta forma, uma variável aleatória X é uma função que associa um número real ao resultado de um experimento.

Denota-se variáveis aleatórias por letras maiúsculas X, Y, Z e assim por diante. Usaremos letras minúsculas x, y, z para denotar valores particulares reais de uma variável aleatória. Então $P(X = x)$ é a probabilidade de que a variável aleatória X assuma o valor, x. $P(x_1 \leq X \leq x_2)$ é a probabilidade de que a variável aleatória X assuma valores entre x_1 e x_2, inclusive ambos.

Definição 2.4.1. *Uma Distribuição de Probabilidade é utilizada para apresentar quais valores uma variável aleatória pode assumir e qual a probabilidade desta variável assumir.*

As distribuições de probabilidades normalmente são apresentadas por fórmulas dando a probabilidade das variáveis aleatórias. As distribuições de probabilidades estão classificadas de acordo com o tipo das variáveis aleatórias, discretas ou contínuas. As principais distribuições de probabilidades, classificadas como discretas e contínuas:

Variáveis Aleatórias Contínuas:

Normal;

Exponencial;

Gama.

Variáveis Aleatórias Discretas:

Binomial;

Poisson;

Geométrica;

Pascal.

No caso discreto, tem-se que os valores da variável aleatória X é finito, e suponha indicados por $x_1, x_2, \ldots, x_k$ e e as respectivas probabilidades por $P(x_1), P(x_2), \ldots, P(x_k)$. Visto a definição de probabilidade, pode-se dizer que a distribuição de probabilidade tem que satisfazer obrigatoriamente:

1. A soma das probabilidades de ocorrerem todos os valores possíveis de X é 1, isto é,
$$\sum_{j=1}^{k} x_j = 1.$$
2. A probabilidade de ocorrer qualquer valor de X é maior ou igual a zero e não pode ser negativa, ou seja,
$$0 \leq P(x_k) \leq 1, \quad \forall k.$$

Exemplo 2.4.2. *A variável X representa o número de caras que se obtêm quando se lança uma moeda duas vezes. Apresente a distribuição de probabilidades de X em tabela.*

Solução: Quando se joga uma moeda duas vezes. os eventos possíveis são (coroa, coroa); (coroa, cara); (cara, coroa); (cara, cara). Se saírem duas coroas, a variável X assume valor zero. A probabilidade de isso acontecer é:

$$\begin{aligned} P(X=0) &= P(coroa)\cdot P(coroa) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4} \\ &= 0,25 \end{aligned}$$

Se saírem uma coroa e uma cara, a variável X assume valor um. A probabilidade de isso acontecer é:

$$\begin{aligned} P(X=1) &= P(coroa)\cdot P(cara)+P(cara)\cdot P(coroa) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \\ &= 0,50 \end{aligned}$$

Se saírem duas caras, a variável X assume valor dois. A probabilidade de isso acontecer é:

$$\begin{aligned} P(X=2) &= P(cara)\cdot P(cara) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4} \\ &= 0,25 \end{aligned}$$

A Tabela 2.1 apresentam um resumo destes cálculos, ou seja, apresentam a distribuição de probabilidades de X. Observe que a soma das probabilidades é 1.

No próximo capítulo será desenvolvido a distribuição binomial tão frequente em modelos matemáticos para problemas da agropecuária.

Tabela 2.1: Distribuição de probabilidades do número de caras em dois lançamentos de uma moeda.

Eventos	Valor de X	$P(X)$
Coroa e Coroa	0	0,25
Coroa e Cara ou Cara e Coroa	1	0,50
Cara e Cara	2	0,25
Total		1

Capítulo 3

Distribuição Binomial

Neste Capítulo é apresentado os conceitos necessários para obter a formulação da Distribuição Binomial. Inicia com a relação de recorrência e construção do triângulo de Pascal, combinações e o binômio de Newton. Posteriormente apresenta-se variável aleatória binomial e o estudo de probabilidade deduzindo a a fórmula para distribuição binomial e a relação com o binômio de Newton.

3.1 O Triângulo de Pascal

O triângulo aritmético ou triângulo de Pascal trata-se de uma tabela de valores inteiros construídos de forma recursiva e ao final tem uma forma de um triângulo Retângulo. O seu uso já foi aplicado em diversas áreas de conhecimentos e será fundamental para o entendimento do decorrer do nosso assunto e desenvolvimento de um binômio.

As regras da construção do triângulo de Pascal são:

- O primeiro elemento é 1;
- Os elementos interiores do quadro são obtidos somando os dois elementos, um imediatamente acima dele e o outro acima do lado esquerdo. Quando não tiver um elemento da parcela substitui por 0.

Vejamos a construção das primeiras linhas nos diagramas a seguir:

$$
1 \qquad \Rightarrow \qquad
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] \arrow[d] & {} \arrow[d] \\
1 & 1
\end{tikzcd}
\qquad \Rightarrow
$$

$$
\Rightarrow \qquad
\begin{tikzcd}
1 & & \\
1 \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[r] \arrow[d] & {} \arrow[d] \\
1 & 2 & 1
\end{tikzcd}
\qquad \Rightarrow \qquad
\begin{tikzcd}
1 & & & \\
1 & 1 & & \\
1 \arrow[r] \arrow[d] & 2 \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[r] \arrow[d] & {} \arrow[d] \\
1 & 3 & 3 & 1
\end{tikzcd}
\qquad \Rightarrow
$$

$$
\Rightarrow \qquad
\begin{tikzcd}
1 & & & & \\
1 & 1 & & & \\
1 & 2 & 1 & & \\
1 \arrow[r] \arrow[d] & 3 \arrow[r] \arrow[d] & 3 \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[r] \arrow[d] & {} \arrow[d] \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1
\end{tikzcd}
.
$$

Existe uma correspondência entre os coeficientes do triângulo de Pascal e Combinação como podemos ver na tabela 3.1. Se contarmos linhas e colunas começando em zero, o elemento da linha n e coluna p será $C_{(n,p)}$.

Duas propriedades podem ser obtidas para combinações devido esta correspondência com o triângulo de Pascal. A primeira pela obserção da construção do triângulo de Pascal onde somando dois elementos consecutivos de uma mesma linha

Tabela 3.1: Triangulo de Pascal e Combinações.

$C_{(0,0)}$						1				
$C_{(1,0)}$	$C_{(1,1)}$					1	1			
$C_{(2,0)}$	$C_{(2,1)}$	$C_{(2,1)}$				1	2	1		
$C_{(3,0)}$	$C_{(3,1)}$	$C_{(3,2)}$	$C_{(3,3)}$			1	3	3	1	
$C_{(4,0)}$	$C_{(4,1)}$	$C_{(4,2)}$	$C_{(4,3)}$	$C_{(4,3)}$		1	4	6	4	1

obtemos o elemento situado abaixo da última parcela.

De maneira genérica, tem-se a relação conhecida como Relação de Stifel. Dados n e p inteiros, $p < n$ tem-se

$$C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}.$$

Usando a outra notação para combinações temos o tabela 3.2 que apresenta a relação de Stifel.

Tabela 3.2: Relação de Stifel.

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

	0	1	2	3	4	5
0	$\binom{0}{0}$					
1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$				
2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$			
3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$		
4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$	
5	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$

A outra propriedade está relacionada com a simetria que existe no triângulo de Pascal, assim os elementos da linha n que estão situados em posição equidistantes dos extremos possuem mesmo valor. Dessa forma

$$C_{(n,p)} = C_{(n,n-p)}.$$

Estes elementos são chamados de *Combinações Complementares*. Por exemplo, $C_{(10,6)} = C_{(10,10-6)} = C_{(10,4)}$.

3.2 Binômio de Newton

Binômio de Newton é toda potência do tipo $(x+a)^n$, onde $x, a \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$. Fazendo a multiplicação do termo $(x+a)$ sucessivamente n vezes e utilizando a propriedade distributiva pode-se o obter uma expressão para o desenvolvimento do binômio de Newton. Por exemplo,

Para $n = 0 \quad \Rightarrow \quad (x+a)^0 = 1;$

Para $n = 1 \quad \Rightarrow \quad (x+a)^1 = x + a;$

Para $n = 2 \quad \Rightarrow \quad (x+a)^2 = (x+a)(x+a) = x^2 + 2ax + a^2$

Para $n = 3 \quad \Rightarrow \quad (x+a)^3 = x^3 + 3a^2x + 3ax^2 + a^3,$

e assim, sucessivamente. Porém desta forma torna-se um trabalho exaustivo assim que o valor de n for crescendo. Por outro lado, é possível notar que os coeficientes do desenvolvimento do binômio de Newton estão relacionadas as mesmas linhas do triângulo de Pascal, por exemplo, para $n = 3$, temos que:

$$(x+a)^3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot x^3a^0 + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot x^2a^1 + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot x^1a^2 + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot x^0a^3.$$

Teorema 3.2.1. *Dados $x, a \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$ quais quer, então vale a fórmula para o binômio de Newton*

$$\begin{aligned} (x+a)^n &= \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \cdot x^{n-k}a^k \qquad (3.1) \\ &= \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} \cdot x^n a^0 + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} \cdot x^{n-1}a^1 + \cdots + \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} \cdot x^0 a^n. \end{aligned}$$

3.3 Variável Aleatória Binária e Binomial

Observamos os seguintes experimentos aleatórios:

- lançar uma moeda;
- um exame laboratorial pode dar resultado positivo ou negativo;
- um nascimento de uma animal pode ser fêmea ou macho;
- um medicamento pode surtir ou não o efeito esperado;
- um doador de sangue pode ser Rh+ ou Rh-;
- determinado material pode estar contaminado ou não;
- uma vacina pode ter sucesso sobre uma gado ou não.

Estes experimentos tem em comum de resultar em uma de duas possibilidades: o evento no qual estamos interessados, que é denominado "sucesso"e o evento contrário, chamado de "fracasso". Além disso, os dois eventos são mutualmente excludentes. Quando associamos o valor 1 para o "sucesso"e 0 para o "fracasso"determina-se uma variável aleatória que é denominada binária.

Agora, considerando os experimentos aleatórios com somente duas possibilidade, no entanto contamos o número de vezes que ocorre o evento de interesse (ou sucesso), em uma série de tentativas ou de experimentos. Por exemplo:

- Um jogador conta quantas caras saem quando lança 10 moedas.
- Um pesquisador conta quantos, dos 500 chefes de família que entrevistou, eram mulheres.
- Um veterinário conta quantos, dos 100 animais que tratou com uma nova droga, ficaram curados.
- Um biomédico conta quantos, dos 32 hemogramas que fez no dia, indicaram doença contagiosa.

- Uma enfermeira conta quantos, dos nascidos vivos durante determinado ano em uma maternidade, tinham doença ou defeito sério.

A variável que resulta da soma dos resultados de uma variável aleatória binária em n tentativas é uma variável aleatória binomial.

3.4 Distribuição Binomial

A distribuição binomial estuda as probabilidades de uma variável aleatória binomial X ter k sucessos em n tentativas.

Uma distribuição binomial tem as seguintes características:

1. Consiste de n ensaios, ou n tentativas, ou n eventos idênticos.
2. Cada tentativa resulta em um de dois resultados mutuamente excludentes. Um dos resultados possíveis é chamado (arbitrariamente) de sucesso e o outro de fracasso com valores 1 e zero, respectivamente.
3. A variável aleatória X é o número de sucessos em n ensaios.
4. Denotaremos de p a probabilidade de sucesso e a probabilidade de fracasso é justamente o complementar $1 - p$, que representaremos pela letra q.
5. O resultado de uma tentativa particular não é afetado pelos resultados das outras tentativas, ou seja, são independentes.

A distribuição binomial fica, portanto, definida quando são dados dois parâmetros:

1. n, isto é, o número de ensaios (p. ex., se uma moeda for lançada 10 vezes);
2. p, isto é, a probabilidade de sucesso em uma tentativa (por exemplo, a probabilidade de sair cara quando se joga uma moeda).

Considere n tentativas e deseja-se obter $P(X = k)$, ou seja, a probabilidade de obter k sucessos (representado pela letra S) (e portanto $n - k$ fracassos, representado pela letra F), $k = 0, 1, 2, 3, ..., n$.

Pelas considerações, $P(S) = p$ e $P(F) = 1-p$. Inicialmente tome uma sequência de experimentos de tal forma que

$$E = SSS...SFF...F,$$

temos k sucessos seguidos por $n-k$ fracassos. A probabilidade de tal sequencia é

$$P(E) = p^k(1-p)^{n-k}$$

devido à independência dos ensaios. Note que qualquer sequência com k sucessos e $n-k$ fracassos terá a mesma probabilidade. Portanto, resta saber quantas sequências com a propriedade especificada podemos formar.

Tomando a forma genérica $SSS...SFF...F$ é fácil observar que se trata de um anagrama de letras repetidas (uma caso de combinação) e lembrando que temos k sucessos e $n-k$ fracassos pode-se calcular a quantidade de sequências por

$$C_{(n,k)} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Desse modo,

$$P(X = k) = C_{(n,k)}p^k(1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n,$$

que é justamente o mesmo termo da ordem $k+1$ do binômio de Newton $(p+q)^n$.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 3.4.1. *Três bezerros nascem no mesmo dia e de vacas diferentes. Vamos estudar a distribuição de bezerros serem macho em três nascimentos.*

Indicar F para fêmea e M para menino, os eventos possíveis são os seguintes:

$$\begin{array}{cccc} FFF & FFM & FMM & MMM \\ & FMF & MFM & \\ & FMM & MMF & \end{array}$$

O número de machos que pode ocorrer em três nascimentos é uma variável aleatória binomial, que indicaremos por X. A Tabela 3.3 apresenta os valores possíveis de X e o número de vezes que cada um deles ocorre, conforme mostrado no esquema.

Tabela 3.3: Números possíveis de machos em três nascimentos.

Valor de X	Frequência
0	1
1	3
2	3
3	1

Seja p a probabilidade de nascer macho e q a probabilidade de nascer fêma. Evidentemente, $p + q = 1$. Se nascerem três fêmeas, isto é, se ocorrer o evento FFF, a variável aleatória X assume valor zero, com probabilidade:

$$P(X = 0) = P(F) \cdot P(F) \cdot P(F) = q^3$$

Se nascerem duas fêmeas e um macho, X assume valor 1. Mas duas fêmeas e um macho podem ocorrer de três maneiras diferentes. Veja as probabilidades:

$$P(F) \cdot P(F) \cdot P(M) = q^2 p,$$

$$P(F) \cdot P(M) \cdot P(F) = q^2 p,$$

$$P(M) \cdot P(F) \cdot P(F) = q^2 p,$$

logo

$$P(X = 1) = 3pq^2.$$

Similarmente, se nascerem uma fêmea e dois machos, X assume valor 2 e ocorre de três maneiras diferentes e obtêm-se

$$P(X = 2) = 3p^2 q.$$

Por fim, se nascerem três machos, isto é, se ocorrer o evento MMM, a variável aleatória X assume valor 3, com probabilidade:

$$P(X = 3) = P(M)XP(M)XP(M) = p^3.$$

A distribuição binomial do número X de machos em $n = 3$ nascimentos está na Tabela 3.4.

Tabela 3.4: Distribuição de probabilidades do número de machos em três nascimentos.

Valor de X	Probabilidade
0	q^3
1	$3pq^2$
2	$3p^2q$
3	p^3

Capítulo 4

Problemas de Distribuição Binomial Aplicado à Agropecuária

A distribuição binomial pode ser usada em diferentes situações quando se trata da agropecuária. Neste capítulo apresentamos três exemplos para demonstrar a importância deste conteúdo ser abordado em curso técnicos de agropecuária.

Problema 1

Suponha que 40% de uma certa população de animais são imunes a alguma doença. Se uma amostra aleatória de tamanho 7 é selecionada desta população, qual é a probabilidade de que ela contenha exatamente 4 animais imunes? Ou seja, calcular $P(X = 4)$

Um animal pode ser imune ou não ser imune. Essas são as duas possibilidades possívies no nosso problema o que pode ter sucesso que seria imunidade e fracasso, no caso de não imunidade. Ao primeiro momento o pensamento pode ser:

$$\frac{40}{100} \cdot \frac{40}{100} \cdot \frac{40}{100} \cdot \frac{40}{100} \cdot \frac{60}{100} \cdot \frac{60}{100} \cdot \frac{60}{100}$$

que seria o mesmo que:

$$\frac{4}{10} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{6}{10}$$

E assim um aluno ou até mesmo professor pode pensar que desta forma está calculando a probabilidade de quatro animais imunes, enquanto os outros 3 não são imunes. Assim terímaos o cálculo:

$$P(x=4) = \left(\frac{4}{10}\right)^4 . \left(\frac{6}{10}\right)^3 \tag{4.1}$$

O que levaria a um engano pois as possibilidades de ocorrerem 4 sucessos e 3 "fracassos"podem acontecer de várias formas. Por exemplos podemos configurar da seguinte forma, usando p *sucesso* e q$fracasso$ esse acontecimento pode ser do tipo $p\ p\ p\ p\ q\ q\ q$ dessa forma teríamos os sucessos acontecendo nas quatro primeiras posições enquanto os fracassos aparecem nas três ultimas posições mas isso é apenas uma forma de acontecer. Podemos pensar que $p\ p\ p\ q\ q\ p\ q$ é também uma forma de acontecer o que queremos pois temos nessa configuração 4 sucessos e 3 fracassos. Dessa forma, temos então, um anagrama de 7 letras com as letras repetidas. Dessa forma o cálculo de quantas possibilidades existem de organizar essas letras, seria:

$$\frac{7!}{4!3!} \tag{4.2}$$

O cálculo usado para um anagrama com apenas duas letras, como no caso que vimos. É equavalente ao cálculo $C_{7,4}$ ou

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

.

Dessa forma chegamos a conclusão que não basta apenas o produtos entre as probabilidades já que existem $C_{7,4}$ formas de se acontecer a mesma situação pedida no problema.

Assim, a função probabilidade pedida no problema pode ser encontrada pela seguinte expressão:

$$P(x=4) = C_{7,4}. \left(\frac{4}{10}\right)^4 . \left(\frac{6}{10}\right)^3 \tag{4.4}$$

Problema 2

Neste exemplo, abordaremos um trabalho de Gaspar e Santos (2021) retirado do site da EMBRAPA (Empresa Brasileira de Agropecuária). O professor pode abordar em sala para ilustrar o conteúdo e aproximar à realidade do aluno do curso técnico.

De acordo com Gaspar e Santos (2021) os bovinos ao receber uma vacina, mesmo sendo considerada uma boa vacina, possui índices de efetividade ao redor de 85 a 90%. Sendo assim podemos supor um mínimo de efetividade de 85% e um cálculo para um máximo de efetividade 90%. Dessa forma, podemos calcular num grupo de 5 gados admitindo que a vacina tem o mínimo de efetividade em todos animais 85%, qual a probabilidade de todos os 5 gados sejam completamente imunizado?

Podemos nesse problema usar a distribuição binomial, dessa forma:

$$P(X = 5) = C_{5,5} = \left(\frac{85}{100}\right)^5 . \left(\frac{15}{100}\right)^0 \tag{4.5}$$

Devemos observar que 15% é a probabilidade complementar de 85% daí no estudo da probabilidade binomial aparece como o valor do insucesso, já que um boi pode ser imunizado ou não e temos apenas essas duas possibilidades.

Fazendo esse cálculo com auxílio de uma calculadora chegamos em $P(X = 5) = 0,4437053125$ o que é o mesmo de $44,37\%$ aproximadamente. Logo, a chance de imunizar todo rebanho, na pior hipótese, em que a vacina tem 85% de efetividade, é de $44,37\%$.

Podemos pensar em outra situação, e na hipótese da vacina ter efetividade de 90%, nessa mesma quantidade de gados. Qual seria a probabilidade de todos os gados serem imunizados?

Nesse caso, usaremos 90% para o nosso sucesso e como complementar o que resta para 90% que é 10%, queremos achar a probabilidade para que todos possuam imunidade. Daí

$$P(X = 5) = C_{5,5} \left(\frac{90}{100}\right)^5 . \left(\frac{15}{100}\right)^0 .$$

Dessa forma, fazendo esse cálculo com auxílio de uma calculadora chegamos em $P(X = 5) = 0,59048999$, ou seja, transformando em porcentagem $P(X = 5) = 59,05\%$

aproximadamente.

Esses resultados são importantes pois é necessário que todo o rebanho esteja vacinado mesmo que, nesse caso, temos uma porcentagem aparentemente pequena quando calculamos para todo rebanho. Podemos calcular a probabilidade binomial para todo o rebanho e isso nos dará uma noção maior de imunização.

Observe que se trata de uma probabilidade discreta e podemos calcular para cada valor, usando 90% de chances de imunização:

$$\begin{aligned}
P(X=0) &= 0.00000999;\\
P(X=1) &= 0.00044999;\\
P(X=2) &= 0.00809999;\\
P(X=3) &= 0.07289999;\\
P(X=4) &= 0.32804999;\\
P(X=5) &= 0.59048999
\end{aligned}$$

Observe que obter apenas $0, 1, 2$ e 3 sucessos é muito baixa.

A interpretação que fazemos disso é que a probabilidade de 3 animais estarem totalmente imunizados é próximo de 100%, dessa forma, fica muito mais difícil de que no rebanho exista disseminação da doença. Podemos observar isso numa tabela de probabilidade acumulada, ao lado da probabilidade para cada situação:

$$\begin{aligned}
P(X>0) &= P(\Omega) - P(X=0) = 0.99999000\\
P(X>1) &= P(\Omega) - P(X=0) - P(X=1) = 0.99954000\\
P(X>2) &= P(\Omega) - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2) = 0.99144000\\
P(X>3) &= P(\Omega) - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2) - P(X=3) = 0.91854000\\
P(X>4) &= P(\Omega) - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2) - P(X=3) -\\
&\quad -P(X=4) = 0.59049000
\end{aligned}$$

Essa probabilidade é encontrada pelo complementar da probabilidade. para encontrar a probabilidade da desigualdade, podemos interpretar como: A probabilidade de que mais de 3 gados sejam imunizados é muito grande, é mais de 91% levando em conta que temos um grupo de 5 animais. E usando a situação mais otimista da vacina.

Problema 3

Para este último exemplo usaremos uma pesquisa intitulada "Situação epidemiológica da brucelose bovina no Estado da Bahia" feito pela Faculdade de Medicina Veterinária e Zootecnia - USP. Em resumo: O trabalho consistiu em estratificar o Estado da Bahia em quatro regiões com características homogêneas (circuitos produtores) para que fossem amostradas aleatoriamente, em cada uma delas, 300 propriedades.Em cada propriedade foram escolhidas, de forma aleatória, 10 a 15 fêmeas bovinas adultas, das quais foi obtida uma amostra de sangue. No total, foram amostrados 10.816 animais, provenientes de 1.413 propriedades.

Observe o texto retirado do artigo, "Situação epidemiológica da brucelose bovina no Estado da Bahia". De acordo com o texto, em 2009 a prevalência de brucelose bovina por animal é de $1,9\%$ e $10,6\%$ de propriedades/foco. Podemos retirar dessas informações algumas perguntas para serem solucionadas com a distribuição binomial.

Sabendo que a prevalência de animais positivos de brucelose é de $1,9\%$ na Bahia, dentro do espaço amostral pesquisado, qual a probabilidade de em um grupo com 10 animais 1 ter brucelose?

Sabemos que, se a prevalência de animais positivos de brucelose é de $1,9\%$, então a não prevalência é o complementar de $1,9\%$, ou seja $98,1\%$ que é a chance do animal não tem brucelose, conforme o artigo. Daí, queremos que 1 tenha sucesso e tenha 9 fracasssos, daí:

$$\begin{aligned}
P(x=1) &= C_{10,1}.\left(\frac{1,9}{100}\right)^1.\left(\frac{98,1}{100}\right)^9 \\
&= \frac{10!}{9!1!}.\left(\frac{1,9}{100}\right)^1.\left(\frac{98,1}{100}\right)^9 \\
&= 10.\left(\frac{1,9}{100}\right)^1.\left(\frac{98,1}{100}\right)^9
\end{aligned}$$

Usando uma calculadora encontraremos que $P(x = 1) = 0,15987283$ o que transformando em porcentagem equivale a $15,98\%$ de um bovino ter brucelose num grupo de 10 bovinos do espaço amostral baiano.

Podemos, para esse problema, fazer uma lista para a probabilidade de animais infectados para um grupo de 10 animais desse espaço amostral:

Probabilidade binomial do indivíduo estar infectado, calculada para um grupo de 10 animas:

P(0): 0.82544867;

P(1): 0.15987283;

P(2): 0.01393387;

P(3): 0.00071965;

P(4): 0.00002439;

P(5): 0.00000056;

P(6): 0.00000000;

P(7): 0.00000000;

P(8): 0.00000000;

P(9): 0.00000000;

P(10): 0.00000000;

Observamos que em um grupo de 10 animais a probabilidade de 2 animais ou mais com brucelose se aproxima muito de zero (0). Mas a probabilidade de existir 1 animal com a doença é algo que precisa ser levado em conta.

Considerações Finais

Com base na pesquisa realizada fica explícito que a estatística, se desenvolvida de forma coesa com o processo de ensino e aprendizagem, se torna um assunto bastante proveitoso na prática profissional da agropecuária. Nesse viés, esse assunto proporciona um maior desenvolvimento do aluno em diversas áreas do conhecimento, possibilitando criar modelos que descrevam o comportamento de algumas variáveis em função de outro conjunto de variáveis.

Dessa forma, diante do desenvolvimento do trabalho respondeu-se de forma clara ao problema levantado que a distribuição binomial pode e deve ser usada em diferentes situações quando se trata da agropecuária: situação epidemiológica da brucelose bovina, a vacinação de bovinos e o potencial de proteção dos animais, probabilidades da população de animais são imunes a alguma doença. Nessa perspectiva, o assunto se trabalho de forma prática não deve priorizar apenas o resultado ou o processo, mas deve como prática de investigação, interrogar a relação ensino aprendizagem e buscar identificar os conhecimentos construídos e as dificuldades de uma forma dialógica. Assim, é tarefa do professor desenvolver uma didática que desenvolva o pensamento crítico para que os discentes consigam interpretar o problema proposto e identificar um modelo para resolvê-lo, seja aplicando métodos já existentes ou ainda reinventando novas maneiras de resolvê-los. Nesta perspectiva, destaca-se que um ambiente de modelagem Matemática pode contribuir para despertar o interesse dos discentes em participar ativamente da construção de seu próprio conhecimento estatístico e propiciar a percepção da utilidade dos conhecimentos escolares para a resolução de problemas, atribuindo significado aos conceitos

Referências Bibliográficas

BRASIL. *Base Nacional Curricular Comum*. [S.l.: s.n.], 2016.

BUSSAB, W. d. O.; MORETTIN, P. A. Estatística básica. In: *Estatística básica*. [S.l.: s.n.], 2010. p. xvi–540.

GASPAR, E. B.; SANTOS e Lenita Ramires dos. *A vacinação de bovinos e o potencial de proteção dos animais*. 2021. ⟨https://www.embrapa.br/busca-de-noticias/-/noticia/14333015/artigo-a-vacinacao-de-bovinos-e-o-potencial-de-protecao-dos-animais⟩. Acessado em 16/10/2021.

MEYER, P. L. Probabilidade: aplicações à estatística. *2ª Edição–Tradução de Ruy de CB Lourenço Filho*, 1965.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. Â. *História na educação matemática*. [S.l.]: Autêntica Editora, 2019.

MORGADO, A. C. de O. et al. Análise combinatória e probabilidade. *Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro*, 1991.

ROA, R.; NAVARRO-PELAYO, V. Razonamiento combinatorio e implicaciones para la enseñanza de la probabilidad. *Jornadas europeas de estadística, Ilhas Baleares*, v. 10, 2001.

STURM, W. *As possibilidades de uma ensino de análise combinatória sob uam abordagem alternativa*. Tese (Doutorado) — Dissertação de Mestrado em Educação - Faculdade de Educação, 1999.

Universidade Federal do Recôncavo da Bahia - UFRB

Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas / Colegiado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

---

Rua Rui Barbosa, 710, Centro, Campus Universitário de Cruz das Almas, Cruz das Almas - BA

CEP: 44380-000

Telefone: (75) 3621-2350

<http://www.ufrb.edu.br/profmat/>