UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA – UEFS
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA – SBM
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

JOSÉ HAILTON MERCÊS DE JESUS

PROGRESSÕES ARITMÉTICAS DE ORDEM SUPERIOR: CONSTRUINDO APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA ATRAVÉS DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA APLICADA AO 2º ANO DO ENSINO MÉDIO

Feira de Santana – BA
2022

JOSÉ HAILTON MERCÊS DE JESUS

PROGRESSÕES ARITMÉTICAS DE ORDEM SUPERIOR: CONSTRUINDO APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA ATRAVÉS DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA APLICADA AO 2º ANO DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática – Mestrado Profissional, Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Feira de Santana –, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Jacqueline Costa Cintra.

Feira de Santana – BA

2022

Ficha catalográfica - Biblioteca Central Julieta Carteado - UEFS

Jesus, José Hailton Mercês de
J56p Progressões aritméticas de ordem superior: construindo aprendizagem significativa através de uma sequência didática aplicada ao 2º ano do ensino médio / José Hailton Mercês de Jesus. - 2022.
106f. : il.

Orientadora: Jacqueline Costa Cintra

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Feira de Santana. Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2022.

1. Sequências (matemática). 2. Progressões aritméticas. 3. Aprendizagem significativa. 4. Sequência didática. 5. Resolução de problemas. I. Cintra, Jacqueline Costa, orient. II. Universidade Estadual de Feira de Santana. III. Título.

CDU: 512.12

Rejane Maria Rosa Ribeiro – Bibliotecária CRB-5/695

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ATA DA SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DO DISCENTE JOSÉ HAILTON MERCÊS DE JESUS DO PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Aos sete dias do mês de julho de dois mil e vinte e dois, às 14:30 horas, ocorreu a defesa pública não presencial, através da plataforma Google Meet, link: https://meet.google.com /nnd-pxnj-kfr, da dissertação apresentada sob o título **"PROGRESSÕES ARITMÉTICAS DE ORDEM SUPERIOR: CONSTRUINDO APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA ATRAVÉS DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA APLICADA AO 2º ANO DO ENSINO MÉDIO"**, do discente **José Hailton Mercês de Jesus**, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual de Feira de Santana, para obtencão do título de MESTRE. A Banca Examinadora foi composta pelos professores: Jacqueline Costa Cintra (Orientadora, UEFS), Maria de Fatima Costa Leal (UNEB) e Darlan Ferreira de Oliveira (UEFS). A sessão de defesa constou da apresentacão do trabalho pelo discente e das arguicões dos examinadores.

Em seguida, a Banca Examinadora se reuniu em sessão secreta para julgamento final do trabalho e atribuiu o conceito: Aprovado.

Sem mais a tratar, foi lavrada a presente ata, que segue assinada pelos membros da Banca Examinadora e pelo Coordenador Acadêmico Institucional do PROFMAT.

Feira de Santana, 07 de julho de 2022.

Jacqueline Costa Cintra

Prof.ª Dra. Jacqueline Costa Cintra (Orientadora, UEFS)

Maria de Fatima Costa Leal

Prof.ª Dra. Maria de Fatima Costa Leal (UNEB)

Darlan Ferreira de Oliveira

Prof. Dr. Darlan Ferreira de Oliveira (UEFS)

Visto do Coordenador:

"Dedico este trabalho à minha família pelo apoio incondicional nesta árdua e longa jornada e, ainda, por representar o sustentáculo para a construção e materialização deste e outros projetos de vida."

AGRADECIMENTOS

Muitas pessoas contribuíram direta e indiretamente para a construção deste trabalho acadêmico. Quero expressar-lhes, neste momento, meus sinceros sentimentos de agradecimento. Antes, porém, agradeço a Deus pelo dom da fé, que serviu de combustível para o árduo percurso do caminho que me conduziu até aqui.

Primeiramente, presto o meu agradecimento à minha orientadora, Professora Drª. Jacqueline Costa Cintra, pela atenção dedicada à construção deste trabalho, cumprindo mais do que o papel de orientadora, por vezes antecipando às minhas solicitações, mostrou-se disposta a contribuir com informações, sugestões e orientações que foram imprescindíveis à concretização deste projeto.

Agradeço a toda a minha família pelo apoio incondicional nesta longa jornada: aos meus irmãos, Edson, Lourival, Ivaneide, Ana Cleide e Júlio Mercês, que jamais contestaram minhas decisões e sempre acreditaram em mim; à minha mãe, Irenice Santos das Mercês, pelos conselhos e pelo cuidado para com a minha pessoa nos momentos em que eu mais necessitei da sua ajuda.

A todos os colegas de turma do mestrado, agradeço pelo espaço de discussão acadêmica que se oportunizou, servindo como contributo para minha formação pessoal, moral e profissional.

Agradeço também à professora Drª. Maria de Fátima Costa Leal e ao professor Dr. Erivelton Nonato de Santana que, em outros momentos da minha trajetória acadêmica, contribuíram sobremaneira para o meu desenvolvimento enquanto estudante e a todos os professores do mestrado, em especial, ao professor Dr. Darlan Ferreira de Oliveira, que marcou a minha trajetória com grandes ensinamentos. Por fim, agradeço aos alunos que participaram deste estudo, sem os quais seria inviável realizar este trabalho de dissertação.

Que todos os nossos esforços estejam sempre focados no desafio à impossibilidade. Lembremo-nos de que as grandes conquistas humanas vieram daquilo que parecia impossível.

(CHARLES CHAPLIN).

RESUMO

Este trabalho apresenta o processo da confecção e aplicação de uma Sequência Didática à luz da Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel com temas relevantes e tradicionais da matemática do ensino médio (sequências numéricas e progressões aritméticas). O objetivo é levantar conhecimentos prévios para posterior aquisição do novo saber, mediante uma série de atividades diversificadas e interligadas. Esse objetivo desdobra-se na seguinte questão de pesquisa: O que revela uma sequência didática, tematizando Progressões Aritméticas de Ordem Superior, aplicada a uma turma de 2º ano do ensino médio? As atividades foram realizadas em uma escola estadual na cidade de Santaluz-Ba e envolveu 13 alunos. Foram utilizados dois questionários como instrumentos de coleta de dados, um pré-teste e um teste final. A escolha desses instrumentos e do percurso metodológico cumpre dupla função: investigativa, à medida que os dados coletados possibilitam inferências sobre representações mentais e estratégias utilizadas pelos alunos; pedagógica, visto que a própria natureza das atividades da sequência didática pressupõe uma intencionalidade instrutiva e formativa. A finalidade ao lidar com tais temas não se restringe a investigar a competência do aluno para realizar operações básicas de aritmética, mas revelar suas habilidades e competências para interpretar, generalizar, concatenar ideias e mobilizar o raciocínio lógico matemático diante de problemas envolvendo PA. Assim, constatou-se que alguns entraves à aprendizagem das progressões aritméticas de 2ª ordem, sob a perspectiva da resolução de problemas, estão relacionados ao desenvolvimento dos processos de interpretação e generalização de fórmulas, como o Termo Geral. Por outro lado, foi verificado entendimento sobre as noções básicas e intuitivas do referido assunto. No campo teórico da matemática, esta obra traz conteúdos que não se encontram facilmente em livros, artigos e afins. Espera-se que este trabalho possa contribuir com o exercício da função do professor de matemática em termos teóricos e práticos, seja no estímulo para o estudo das progressões aritméticas em suas ordens superiores, seja no despertar do interesse em levar tais conhecimentos para o ambiente da sala de aula com alunos do ensino médio.

Palavras-chave: Sequências. Progressões Aritméticas. Aprendizagem Significativa. Sequência Didática. Resolução de Problemas.

ABSTRACT

This work presents the process of creating and applying a Didactic Sequence based on David Ausubel's Theory of Meaningful Learning with relevant and traditional topics of high school mathematics (number sequences and arithmetic progressions). The aim is to gather prior knowledge for later acquisition of the new knowledge, through a series of diversified and interconnected activities. This aim unfolds in the following research question: What does a didactic sequence reveal, thematizing Arithmetic Progressions of Higher Order, applied to a 2nd year high school class? The activities were carried out in a public state school in the city of Santaluz-BA and involved 13 students. Two questionnaires were used as data collection instruments, one pre-test and a final test. These instruments and the methodological path were chosen to fulfill a double function: investigative, as the data collected enable inferences about mental representations and strategies used by students; pedagogical, since the very nature of the activities of the didactic sequence presupposes an instructive and formative intentionality. The purpose of dealing with such topics is not restricted to investigating the student's competence to perform basic arithmetic operations, but to reveal their skills and competences to interpret, generalize, concatenate ideas and mobilize logical mathematical reasoning when facing problems involving AP. Thus, it was found that some obstacles to the learning of 2nd order arithmetic progressions, from the perspective of problem solving, are related to the development of the processes of interpretation and generalization of formulas, such as the General Term. On the other hand, an understanding of the basic and intuitive concepts of the subject was verified. In the theoretical field of mathematics, this work brings contents that are not easily found in books, articles and the like. It is expected that this work may contribute to the exercise of the mathematics teacher's role in theoretical and practical terms, either in stimulating the study of arithmetic progressions in higher orders, or in awakening the interest in bringing such knowledge to high school student classes.

Keywords: Sequences. Arithmetic Progressions. Meaningful Learning. Didactic Sequence. Problem Solving

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

INTRODUÇÃO

As ideias intuitivas de sequências numéricas, como um conjunto ordenado de números, estão presentes nas experiências cotidianas do ser humano há milênios, desde quando surgiu a necessidade de contar objetos. A história revela a importância das sequências e progressões, bem como a sua utilização nas diferentes aplicações do cotidiano. Na antiguidade, povos Babilônicos e Egípcios já se debruçavam sobre o estudo de problemas inerentes ao referido conteúdo. Inclusive, conforme Lima (2012), há registros de alguns desses problemas em papiros que datam de 1950 a. C.

Voltemos à história para frisar, ainda, que os Egípcios estabeleceram padrões sobre os períodos de enchentes do Rio Nilo, visto que precisavam desse conhecimento para as atividades de plantio na época propícia, e usemos a realidade atual para lembrar que o próprio sistema de numeração que usamos hoje, com os algarismos indo-arábicos, traz a ideia de uma sequência ordenada de números.

Assim, nos tempos modernos, as sequências possuem aplicações em diversos contextos da vida humana; aparecem, por exemplo, na análise de mercados financeiros, na ciência da computação e na teoria dos jogos. Além disso, como foi observado pelo matemático Leonardo Fibonacci, é possível encontrá-las também na natureza; aparecem em configurações biológicas, como, por exemplo, na disposição dos galhos das árvores ou no desenrolar da samambaia, entre outras.

Portanto, torna-se relevante investigar o entendimento sobre sequências numéricas no ensino médio, bem como aprofundar as discussões que envolvem esse campo próspero da matemática. Além do mais, é preciso refinar a compreensão de que cada sujeito individual, ou em grupo, é capaz de elaborar entendimentos diferentes sobre um mesmo conceito. Essa diversidade pode revelar o modo como foi assimilado, podendo ser este compartilhado e/ou convertido em objeto de investigação.

O que se vê no ensino médio das escolas brasileiras, entretanto, é que a aprendizagem escolar das sequências numéricas geralmente limita-se tão somente ao uso das fórmulas do termo geral e soma dos termos das progressões (aritmética e geométrica) e a exemplos bastante elementares. Contudo, nesta etapa da Educação Básica, é relevante centrar a aprendizagem não apenas em algoritmos e técnicas operatórias, mas no desenvolvimento conceitual, abordando vários tipos de sequências cujos modelos matemáticos não estejam restritos às funções afim (Progressão Aritmética) e exponencial (Progressão

Geométrica). Nesse contexto da problemática do ensino automatizado de fórmulas e algoritmos em diversos conteúdos matemáticos, o contemporâneo matemático e psicólogo Vergnaud já havia alertado:

> Vergnaud chama a atenção, em sua tese, para o lado "automatizado" dos algoritmos, que permite ao indivíduo certa economia cognitiva, e ao mesmo tempo para a necessidade de "pilotagem" dos algoritmos pelos conceitos, de forma que tal automatização tenha flexibilidade suficiente para cobrir certa gama de casos não excessivamente estreita, e não perca de vista o princípio de base sob o qual opera (BITTAR e MUNIZ, 2009, p.10).

A causa dos fatos apontados na citação acima pode ser reflexo, também, de uma fragilidade na formação dos professores de matemática, pois o que se observa é que mesmo licenciados em matemática revelam um desconhecimento do tema, o que acaba limitando-os a reproduzirem apenas o que consta nos livros didáticos do ensino médio. Esses livros, por sua vez, não aprofundam os estudos acerca das sequências numéricas e progressões.

É essencial que os conceitos inerentes às sequências sejam apresentados aos alunos de forma significativa, explorando também os conhecimentos já construídos, de modo que os alunos sejam conduzidos a explorarem diferentes representações e identificarem nas fórmulas o sentido das informações contidas nelas a partir de diferentes situações-problema. Cabe ao professor, ainda, cumprindo a função de mediador desse processo, propor um ambiente de discussão no qual o aluno seja protagonista, o que só poderá ser feito mediante o uso de metodologias mais atuais e condizentes com a realidade do alunado.

Nessa perspectiva, pautando a aprendizagem significativa do aluno, a qual defende o teórico David Ausubel, o presente trabalho traz uma proposta metodológica alternativa em detrimento das tradicionais já conhecidas que dão ênfase à tríade "definição, exemplo e exercício", para o ensino do conteúdo Progressões Aritméticas. Em um nível menos elementar do que o que trazem geralmente os livros didáticos, propomos o ensino das progressões aritméticas de ordem superior, com foco na segunda ordem, por meio de uma sequência didática aplicada ao 2º ano do ensino médio.

Para tanto, as discussões aqui elucidadas não se restringem apenas ao campo teórico, mas buscamos também fazer um trabalho de investigação in loco, por meio da aplicação da referida sequência didática numa turma de 2º ano do ensino médio de uma escola estadual da Bahia.

Trafegando nesta via, formulamos a questão de pesquisa "O que revela uma sequência didática, tematizando Progressões Aritméticas de Ordem Superior, aplicada a uma turma de 2º ano do ensino médio?". Na busca pela resposta dessa questão, estabelecemos alguns objetivos específicos a serem alcançados:

- ✓ Identificar qual o entendimento inicial que os alunos do 2º ano do ensino médio revelam sobre o conceito de sequências e progressão aritmética (PA);
- ✓ Introduzir o conteúdo das progressões aritméticas de segunda ordem;
- ✓ Perceber habilidades para formular e generalizar situações-problema de PA;
- ✓ Reconhecer as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de problemas envolvendo PA de segunda ordem;
- ✓ Identificar as dificuldades encontradas na resolução de problemas envolvendo PA de segunda ordem.

Assim, este trabalho de dissertação traz, no Capítulo 1, a motivação para esta pesquisa e os aspectos teóricos envolta do nosso objeto de estudo – dissertamos sobre a teoria da aprendizagem significativa de Ausubel sob a perspectiva de Moreira (1999) e sobre o conceito de sequência didática (SD) e sua importância pedagógica no processo de ensino e aprendizagem.

O Capítulo 2 apresenta o contexto teórico das sequências e progressões aritméticas, desde as ideias mais básicas de sequências às definições e demonstrações de proposições inerentes às PA's de ordem k. Nesse capítulo também trazemos sugestões de problemas contextualizados, que podem ser explorados por professores de matemática em suas aulas sobre progressões.

O Capítulo 3 discorre sobre nossas escolhas metodológicas e os procedimentos adotados. Foi dividido em quatro seções: na primeira, apresentamos o contexto da investigação; na segunda, a caracterização do lócus; na terceira, descrevemos o instrumento de coleta dos dados e, na quarta subseção, descrevemos os procedimentos de coleta e registro dos dados, isto é, as etapas da aplicação da sequência didática.

O Capítulo 4, dividido em duas seções, contempla os resultados da análise dos dados coletados mediante a aplicação da sequência didática: na seção 1, intitulada atividades diagnósticas, categorizamos e analisamos os entendimentos iniciais dos alunos sobre sequências e progressões, além de analisarmos também o desempenho em exercícios e problemas; na seção 2, atividade avaliativa final, voltamos a estabelecer categorias para os entendimentos dos sujeitos participantes, mas desta vez sobre ao conceito de PA de segunda ordem e, por conseguinte, discutimos os dados referentes às resoluções de problemas sobre o referido assunto.

Por fim, expomos as considerações finais, ressaltando os principais resultados do nosso trabalho e as contribuições desta pesquisa para o meio acadêmico e escolar.

Capítulo 1

MOTIVAÇÃO E ASPECTOS TEÓRICOS

Neste capítulo, vamos apresentar os principais motivos pessoais e experiências que contribuíram para a delimitação do tema desta dissertação. Versaremos também a respeito das bases teóricas sob as quais fundamentamos o nosso trabalho.

1.1 Motivação para a escolha do tema

Minha trajetória no programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) possibilitou-me ter acesso a alguns conteúdos matemáticos ainda não vistos anteriormente, nem mesmo no curso de Licenciatura em Matemática enquanto estudante de graduação. Dentre esses conteúdos, houve especificamente interesse em aprofundar as leituras sobre *Progressões Aritméticas de Ordem Superior*.

Se na grade curricular de alguns cursos de graduação em matemática as PA's de ordem superior já não são frequentes, muito menos ainda na grade curricular da maioria das escolas brasileiras. De modo geral as progressões aritméticas são conteúdos pouco aprofundados no ensino médio, apesar da sua importância e das suas aplicações na natureza e na vida cotidiana do ser humano. Tais fatores motivaram a escolha das progressões aritméticas como tema, que, por sua vez, ganhou mais força ainda após diálogos com a orientadora deste trabalho, que evidenciou a importância de estabelecer uma correspondência entre os conteúdos teóricos estudados no mestrado e a minha atividade profissional como professor da Educação Básica. Assim, vejo neste trabalho a oportunidade de relacionar teoria e prática por meio de uma investigação numa escola pública de ensino médio.

Essa investigação, conforme a maneira realizada, além de levar um conteúdo novo e desconhecido à luz de uma metodologia diferente para a tal escola, espera-se que traga resultados científicos significativos, que possam agregar ao conjunto de pesquisas dessa área e que sirvam como contributo para professores de matemática planejarem suas aulas.

Essa ideia de investigar a aprendizagem matemática dos alunos, sobretudo por meio de experimentos, é amplamente defendida por Nunes e Bryant (1997, p. 17-18), pois "se desejamos ensinar matemática para crianças [...] temos que saber muito mais sobre como as crianças aprendem matemática e o que a aprendizagem da matemática pode fazer pelo pensamento delas".

Espera-se, assim, que esta obra acrescente na produção de estudos científicos que abarcam o referido tema, afinal, esta é uma abordagem expositiva, com teoria e prática de resolução de problemas que pretendem explorar as progressões em suas ordens superiores, atendo-se mais à segunda ordem, bem como explorar os conceitos praticamente desconhecidos dos professores e estudantes do ensino médio. Além do mais, diferente do que se encontra no cenário editorial brasileiro, propomos a abordagem desse conteúdo escasso através de uma Sequência Didática (SD), com a descrição (no capítulo 3) de todas as suas etapas – aqui vale ressaltar que infelizmente esse instrumento metodológico ainda é pouco usado nas aulas de matemática.

1.2 Aspectos Teóricos

No campo prático, como já foi mencionado, o nosso trabalho de pesquisa consiste em uma investigação, que será feita com alunos do 2º ano do ensino médio a partir da aplicação de uma sequência didática. Já no campo teórico, esta investigação científica, como um todo, está ancorada em teorias, ideias e conceitos que serão discutidos a seguir.

1.2.1 Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel

Quando se fala em aprendizagem, de modo geral, segundo Moreira (1999), podemos distinguir três tipos: a cognitiva, a afetiva e a psicomotora. A aprendizagem cognitiva, que está diretamente relacionada à aprendizagem significativa de Ausubel, "é aquela que resulta no armazenamento organizado de informações na mente do ser que aprende, e esse complexo organizado é conhecido como estrutura cognitiva" (MOREIRA, 1999, p.151-

152). Ressalte-se que, entre os três tipos, o cognitivo é predominante para que ocorra a aprendizagem significativa.

Levando em conta tal concepção, não faz muito sentido pensar na aprendizagem construída em sala de aula sem considerar a capacidade de cognição dos alunos, isto é, a maneira com que esses sujeitos recebem e organizam as informações. Logo, para a teoria ausubeliana, ainda que as experiências afetivas também estejam presentes no momento da recepção de informações, o que prevalece é a aprendizagem cognitiva, em que a essência está na forma de armazenamento das informações quando estas relacionam-se com aspectos cognitivos do indivíduo.

Essa maneira de organizar as informações na mente, na concepção de Ausubel, segundo Moreira (1999), forma uma hierarquia interligada de conceitos específicos e gerais. Portanto, para o autor:

> Aprendizagem significativa é um processo por meio do qual uma nova informação relaciona-se com um aspecto especificamente relevante da estrutura de conhecimento do indivíduo, ou seja, este processo envolve a interação da nova informação com uma estrutura de conhecimento específica, a qual Ausubel define como conceito subsunçor, ou simplesmente subsunçor, existente na estrutura cognitiva do indivíduo. A aprendizagem significativa ocorre quando a nova informação ancora-se em conceitos ou proposições relevantes, preexistentes na estrutura cognitiva do aprendiz (MOREIRA, 1999, p.153).

Assim, dentro daquilo que Ausubel chama de *estrutura cognitiva* do sujeito, as informações são armazenadas de maneira organizada, de modo que os elementos bastante específicos do conjunto de conhecimentos conectam-se com conceitos mais gerais. "...*estrutura* cognitiva significa, portanto, uma estrutura hierárquica de conceitos que são representações de experiências sensoriais do indivíduo" (MOREIRA, 1999, p. 153).

Na contramão da aprendizagem significativa, surge a ideia de aprendizagem mecânica (ou automática), visto que nesta última as novas informações recebidas não se conectam com as que já existem na estrutura cognitiva do indivíduo, ou seja, elas são organizadas de maneira arbitrária. Como exemplo de aprendizagem mecânica, no contexto do ensino da matemática, citamos a mera utilização de algoritmos dissociados de significado e contextualização, bem como a memorização de fórmulas e leis matemáticas.

Uma constatação um tanto intrigante é que, consoante a teoria de Ausubel, a aprendizagem significativa não encontra obstáculo na aprendizagem por recepção (na qual o conteúdo é apresentado ao aprendiz) tampouco na aprendizagem por descoberta (em que o conteúdo deve ser descoberto pelo aprendiz), desde que esse conteúdo (recebido ou descoberto) ligue-se a conceitos *subsunçores*[1] relevantes preexistentes na estrutura cognitiva.

Dessa maneira, "quer por recepção ou descoberta, a aprendizagem é significativa, segundo a concepção ausubeliana, se a nova informação incorpora-se de forma não-arbitrária à estrutura cognitiva" (MOREIRA, 1999, p. 154). A seguir temos um esquema que exemplifica a teoria da assimilação, proposta por Ausubel, para esclarecer como é feito o processo de aquisição e organização de significados na estrutura cognitiva do indivíduo:

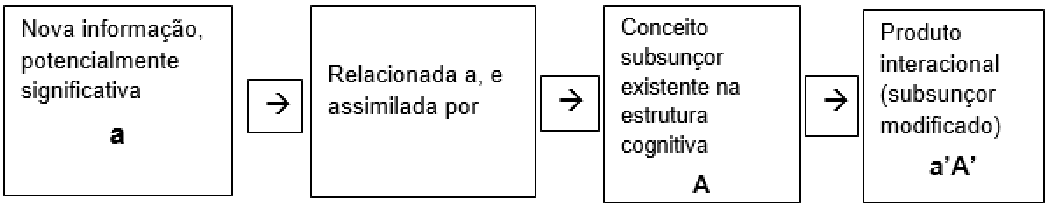


Figura 1.1: Uma adaptação de Moreira (1999, p. 157)

Como visto no esquema acima, o processo de assimilação proposto Ausubel leva em conta a interação entre a nova informação e o subsunçor preexistente na estrutura cognitiva, de tal forma que o produto dessa interação é um novo subsunçor modificado. Sobre isso, Moreira (1999) complementa:

> Portanto, assimilação é um processo que ocorre quando um conceito ou proposição a, potencialmente significativo, é assimilado sob uma ideia ou conceito mais inclusivo, já existente na estrutura cognitiva, como um exemplo, extensão, elaboração ou qualificação do mesmo. Tal como sugerido no diagrama, não só a nova informação a, mas também o conceito subsunçor A, com o qual ela se relaciona, são modificados pela interação. Além disso, a' e A' permanecem relacionados como participantes de uma nova unidade a'A', que, em última análise, é o subsunçor modificado (MOREIRA, 1999, p. 158).

Trazendo essa teoria para o universo da matemática, por exemplo, se o conceito de progressão aritmética de ordem superior deve ser aprendido por um aluno que já assimilou o conceito de progressão aritmética, de maneira bem estabelecida em sua estrutura cognitiva, o novo conceito específico (progressão aritmética de ordem superior) será assimilado pelo conceito mais inclusivo (progressão aritmética) já aprendido. Considerando, porém, que esse novo tipo de progressão aritmética possui ordem maior que 1 – e sendo

[1]São conhecimentos estabelecidos na estrutura cognitiva do sujeito que aprende e que permite, por interação, dar significado a outros conhecimentos.

que 1 indica a ordem da progressão aritmética já conhecida pelo aluno –, não somente o conceito de progressão aritmética de ordem superior ganhará significado para o aluno, mas também o conceito mais geral de progressão aritmética será modificado e tornar-se-á mais inclusivo, visto que o novo conceito de progressão aritmética incluirá também as progressões cujas ordens são maiores que 1.

Nessa proposta, portanto, o *subsunçor* consiste no significado do conceito de progressão aritmética, enquanto o *subsunçor* modificado é o novo significado atribuído a esse conceito pós a assimilação do conteúdo de progressão aritmética de ordem superior.

Diante do exposto, para que se possa oportunizar a aprendizagem significativa em sala de aula, é necessário pensar em estratégias pedagógicas e ferramentas metodológicas alternativas em detrimento das tradicionais. Uma das sugestões de Ausubel, nesse sentido, é o uso de *organizadores* prévios, que, segundo o autor, "são materiais introdutórios apresentados antes do material a ser aprendido em si" (MOREIRA, 1999, p. 155).

Esses organizadores prévios funcionam como "pontes cognitivas" e cumprem o papel de estabelecer um link entre o que o aluno já aprendeu e o que ele deve aprender. Essa aprendizagem terá como ponto de partida o conhecimento prévio do aluno e dar-se-á, portanto, de forma significativa.

Nessa perspectiva, uma ferramenta metodológica alternativa para se utilizar em sala de aula, capaz de transformar a teoria da aprendizagem significativa de Ausubel em prática, são as chamadas Sequências Didáticas (SD).

1.2.2 Sequência didática

No âmbito da educação básica, é essencial pensar em estratégias pedagógicas que levem o aluno a pensar, questionar e criar suas próprias ideias e conceitos sobre os conteúdos estudados em sala de aula. No entanto, no que se refere ao ensino da matemática, via de regra, os professores preferem trabalhar tão somente com os métodos tradicionais de ensino. Normalmente os professores de matemática oferecem uma aula meramente expositiva, utilizando o quadro para transcrever o assunto do livro didático, fazer representações e depois solicitam a resolução de diversas listas de exercícios.

Esse método de ensino dialoga com aquilo que Freire (1978) chama de educação bancária, na qual o papel de mediador do professor se assemelha ao de um narrador, que narra o conteúdo para o aluno que, por sua vez, apenas tem o dever de fixar, memorizar e repetir, sem sequer atribuir significado ao que está sendo transmitido. A educação bancária é, pois, aquela em que o educador "faz comunicados e depósitos que os educandos, meras incidências, recebem pacientemente, memorizam e repetem" (FREIRE, 1978, p. 66).

Assim, essa escolha equivocada das metodologias tradicionais em detrimento de propostas metodológicas alternativas – por vezes reflexo do desinteresse do próprio docente em atualizar-se – irá refletir negativamente na postura dos seus alunos. Por isso, a fim de promover a diversificação nas propostas metodológicas alternativas, as pesquisas no campo da educação matemática têm crescido. Sobre isso, Cabral (2017) pondera que:

> De um modo geral o que tem sido apontado por essas pesquisas é a necessidade de que o aluno saia da postura passiva fortalecida pelo modelo tradicional de ensino – ênfase na tríade definição, exemplo e exercício – e adote uma postura mais ativa, participativa, em colaboração com seus pares aprendizes e com o professor que assume uma conduta de provocador e organizador de ideias. Assim, estão os resultados apontados pelas pesquisas no que se tem chamado de tendências do ensino de matemática (CABRAL, 2017, p.10).

Contudo, desenvolver essas habilidades no aluno vai exigir do professor uma base fortalecida por teorias da aprendizagem, teorias do desenvolvimento, bem como a manutenção de um fluxo contínuo entre elas. A mudança de perfil exigida desse profissional perpassa pela construção de significados em matemática do que vem a ser a matemática escolar, a matemática extraescolar e a matemática dos matemáticos. No caso particular da matemática escolar – aquela que se desenvolve no contexto da sala de aula –, as pesquisas apontam que, apesar dos avanços produzidos na área da Educação Matemática, predomina um saber regido por regras, normas e expectativas que organizam a relação entre professor, aluno e o conhecimento matemático. Mais especificamente no caso de alguns conteúdos, como sequências numéricas, inevitavelmente o saber matemático do aluno é influenciado pela forma didática como o professor apresenta e conduz na sala de aula.

Mediante essa problemática, uma das ferramentas metodológicas que vêm sendo largamente discutidas pelos teóricos da educação e que têm ganhado espaço dentro do ensino escolar são as chamadas Sequências Didáticas (SD). Segundo Cabral (2000), as articulações estruturais dessas SD's pretendem favorecer a criação de um ambiente no qual

> os alunos partilhem ideias, raciocínios, processos, estabeleçam conexões, comparações e analogias, construam conjecturas e negociem significados e desenvolvam capacidades de comunicar e argumentar". (KFOURI; D'AMBRÓSIO, 2006, p.2)

Definição 1.2.1 *Uma sequência didática é um conjunto de atividades encadeadas de questionamentos, atitudes, procedimentos e ações que os alunos realizam sob a mediação do professor. Ela pode ser aplicada em várias etapas, a depender da quantidade de conteúdo que se deseja trabalhar e dos objetivos a serem alcançados. Em uma sequência didática as atividades são ordenadas e interligadas de modo a aprofundar o tema que está sendo estudado. As estratégias usadas podem incluir atividades diagnósticas, leituras, pesquisas, aula expositiva, experimentos, etc.*

As sequências didáticas surgem, então, como um forte aliado do professor na construção da aprendizagem significativa do aluno, visto que leva em conta, desde o início do processo de desencadeamento das atividades, aquilo que o aluno já sabe e incorpora novos conhecimentos da sua estrutura cognitiva, fazendo-o conectar os novos conhecimentos aos seus conhecimentos prévios. Além disso, como menciona Moreira (1999), o professor pode utilizar *organizadores prévios*[2] – textos, vídeos, simulações, etc. – para auxiliar na estrutura cognitiva do aprendiz quando não há *subsunçores*.

De acordo com Cabral (2017), as sequências são instrumentos de ensino-aprendizado que permitem incluir as três fases da prática pedagógica do professor: planejamento, aplicação e avaliação. Elas representam, ainda, a unidade indissociável existente no processo educativo, o qual, nesse caso, está demarcado de forma clara para professores e alunos, com começo, meio e fim.

Na aplicação de uma sequência didática, deve-se diversificar os recursos didáticos a fim de suscitar um ambiente lúdico e romper com o clima monótono que muitas vezes se atribui às aulas de matemática. Assim sendo, haverá um estímulo à participação massiva dos alunos e esses variados recursos poderão proporcionar diferentes formas de aprendizado.

[2]São materiais introdutórios apresentados antes do material a ser aprendido em si.

> Sabe-se que a utilização de recursos didáticos diversificados se justifica pelo fato de que, ao utilizar tais recursos, consegue-se atingir o maior número de alunos em sala de aula, uma vez que possibilita o contato com diferentes formas de aprendizado. Assim, é necessário que o professor procure combinar vários recursos metodológicos para desenvolver uma SD, como: software, lápis, papel, calculadora, material concreto, medições, plantas, etc., com o objetivo de abranger uma maior compreensão dos conteúdos ministrados (BABINSKI, 2017, p. 30).

Outro ponto positivo das sequências didáticas é que, durante o desenvolvimento das atividades, a dinâmica de execução pode sofrer ajustes conforme a necessidade de serem criados novos recursos e estratégias para a condução de um resultado pedagógico mais satisfatório. Segundo Zabala (1998), as sequências didáticas oferecem instrumentos diversos e permitem ao professor intervir a qualquer momento no processo de ensino e permite que outros recursos sejam criados a partir desta que foi desenvolvida.

Ao longo dos últimos anos, as sequências didáticas têm sido objeto de estudo de pesquisadores de várias áreas do conhecimento. No tocante às investigações e experiências realizadas na área da Educação Matemática com as SD's, encontramos artigos, dissertações e teses que versam sobre a temática. A seguir, faremos menção a algumas destas obras.

Bitencourt (2017) aplicou uma sequência didática a uma turma de 2º ano do Ensino Médio sobre o tema proporcionalidade, pautada nos princípios da Engenharia Didática, e constatou que os alunos apresentaram uma melhora significativa no desempenho de resolução de questões envolvendo proporcionalidade. Foram aplicados um teste inicial e um final, os quais verificaram que as questões incorretas e questões deixadas em branco sofreram uma queda após a aplicação da sequência didática.

Em outro estudo, Lutz (2012) ministrou o conteúdo de Estatística por meio de uma sequência didática em uma turma do ensino médio da modalidade PROEJA. Ao final, foi verificada uma melhoria no aprendizado do referido conteúdo, ainda que, mediante a avaliação dos alunos participantes, a sequência tenha sido extensa e cansativa. Essa avaliação dos alunos é importante à medida que suscita uma reflexão sobre quão extensa pode ser uma sequência didática e o impacto que isso pode causar no resultado final do processo.

Correa (2019), com o objetivo principal de analisar a contribuição do uso de uma sequência didática para o estudo de proporcionalidade, realizou uma investigação no 1º ano do ensino médio, num Curso Técnico em Química Integrado ao ensino médio. Através de um pós-teste e de um questionário investigativo, buscou-se mensurar a apreensão dos conteúdos trabalhados com os alunos durante a realização da sequência didática. Após a análise dos dados à luz da teoria da aprendizagem significativa de Ausubel, constatou-se que, de fato, a aprendizagem foi mais significativa após a aplicação da sequência didática.

Pelo exposto, acreditamos que os diversos aspectos intrínsecos às sequências didáticas são promotores de subsídios para que professores de matemática criem situações pedagógicas mais eficientes no ensino dos conteúdos matemáticos. Em se tradando das progressões aritméticas de ordem superior, especialmente, esse instrumento metodológico pode contribuir sobremaneira para a sua abordagem num ambiente de sala de aula, desde que o professor saiba planejar adequadamente cada etapa da sequência didática.

Capítulo 2

SEQUÊNCIAS E PROGRESSÕES ARITMÉTICAS

Neste capítulo apresentaremos noções e conceitos matemáticos necessários para a leitura e compreensão do objeto de estudo de nossa investigação.

Traremos definições, proposições, demonstrações, problemas, exemplos e aplicações inerentes às progressões aritméticas, com ênfase na primeira e segunda ordens, a fim de auxiliar o leitor a compreender melhor os conceitos inerentes a esse conteúdo matemático, bem como auxiliar professores de matemática a viabilizarem a inserção de tais conceitos no ensino-aprendizagem de alunos da educação básica.

2.1 Sequências

É comum observarmos em situações cotidianas conjuntos cujos elementos estão dispostos em certa ordem, seguindo um determinado padrão. Esses conjuntos, por sua vez, são chamados de sequências ou sucessões.

Definição 2.1.1. *Uma sequência ou sucessão de números reais é uma função definida em* $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$ *e tomando valores no conjunto* R *dos números reais.*

$$\text{f: } \mathbb{N}^* \rightarrow \text{R}$$

em que

$$\text{f(n)} = a_n$$

Assim, a cada elemento $n \in \mathbb{N}^*$ corresponde um único número real a_n. Os elementos a_n são os termos da sequência e, portanto, podemos representá-la por $(a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n, ...)$ ou (a_n). Os índices 1, 2, 3, ..., n indicam a posição dos termos. Assim, o primeiro termo é indicado por a_1, o segundo por a_2 e assim por diante, sendo a_n o n-ésimo termo da sequência.

Desse modo, temos também:

$$\text{f}(1) = a_1,\ \text{f}(2) = a_2,\ \text{f}(3) = a_3,\ ...,\ \text{f}(\text{n}) = a_n...,$$

Logo, sempre que nos referirmos, por exemplo, ao 9° termo de uma sequência, é suficiente indicarmos por a_9.

As sequências possuem algumas classificações. No tocante à quantidade de termos, elas podem ser classificadas como sequências finitas ou infinitas. Uma sequência é dita finita quando possui um número limitado de termos e é dita infinita quando possui um número ilimitado de termos. Suas representações, portanto, diferem-se: na sequência finita, temos que, para algum n natural, sua representação é dada por $(a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n)$, já a sequência infinita é representada por $(a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n, ...)$ com n natural.

Quanto às maneiras de estabelecer a formação dos termos de uma sequência, podemos usar o termo geral (veja exemplo 2.1.1 a seguir) ou uma lei de recorrência (exemplo 2.1.2 a seguir), que é uma regra que relaciona cada termo da sequência com o termo antecessor, de modo que, a partir dessa lei, podemos determinar qualquer termo conhecendo termos anteriores.

Exemplo 2.1.1. A sequência numérica (3, 5, 7, 9, 11) é finita, uma vez que possui apenas 5 termos. A sua lei de formação, que também é chamada de termo geral, é dada por:

$$a_n = 2n + 1, \text{ para } n \text{ natural e } 0 < n < 6.$$

Observe que:

$$a_1 = 2.1 + 1 = 3$$
$$a_2 = 2.2 + 1 = 5$$
$$a_3 = 2.3 + 1 = 7$$
$$a_4 = 2.4 + 1 = 9$$
$$a_5 = 2.5 + 1 = 11$$

Exemplo 2.1.2. A sequência (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...), conhecida como sequência de Fibonacci, é dita infinita, pois possui um número ilimitado de termos. Representamos a sequência de Fibonacci recursivamente da seguinte forma: Sendo $a_1 = 1$ e $a_2 = 1$, temos:

$$a_{(n+2)} = a_{(n+1)} + a_n$$

Observe que:

$$\begin{aligned}
a_3 &= a_{(1+1)} + a_1 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2 \\
a_4 &= a_{(2+1)} + a_2 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3 \\
a_5 &= a_{(3+1)} + a_3 = a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5 \\
a_6 &= a_{(4+1)} + a_4 = a_5 + a_4 = 5 + 3 = 8 \\
&. \\
&. \\
&. \\
a_{(n+2)} &= a_{(n+1)} + a_n
\end{aligned}$$

A sequência acima (exemplo 2.1.2) está associada a Fibonacci, pois foi encontrada em trabalhos do matemático Italiano Leonardo Fibonacci, que datam do ano de 1202. A sequência de Fibonacci hoje tem aplicações na análise de mercados financeiros, ciência da computação e na teoria dos jogos. Aparece, ainda, em configurações biológicas, como, por exemplo, na disposição dos galhos das árvores ou no desenrolar da samambaia.

Além disso, os termos dessa sequência estabelecem entre si a chamada proporção (ou razão) áurea, muito usada na arte, na arquitetura e no design por ser considerada agradável aos olhos. A proporção áurea é o número irracional, infinito, representado pela letra grega phi (ϕ), cujo valor é de 1,618 aproximadamente.

Ao fazermos a divisão entre dois termos consecutivos, isto é, dividirmos algum termo pelo antecessor na sequência, obtemos um valor para o quociente próximo do valor da razão áurea, de maneira que, quanto mais avançamos na sequência, mais o quociente aproxima-se dessa razão. Observemos nas divisões abaixo:

$$\tfrac{2}{1} = 2; \tfrac{3}{2} = 1,5; \tfrac{5}{3} = 1,666...; \tfrac{8}{5} = 1,6; \tfrac{13}{8} = 1,625; \tfrac{21}{13} = 1,615$$

A respeito das ideias e similaridades matemáticas aqui evidenciadas, não traremos mais detalhes e/ou demonstrações por não ser este o objetivo do nosso estudo. Contudo, para mais aprofundamentos sobre a sequência de Fibonacci e suas aplicações, deixamos como sugestão a leitura dos textos *"Sequência de Fibonacci: veja suas aplicações na natureza e na arte"*[1] e *"Entenda o que é proporção áurea com exemplos fascinantes"*[2].

Em se tratando dos exemplos de sequências acima citados, é notória a existência de um padrão matemático. As sequências sobre as quais iremos dissertar neste trabalho – e especificamente as progressões aritméticas – possuem uma lei de formação à qual seus termos obedecem.

Algumas sequências possuem um padrão peculiar. Este padrão dá origem aos termos da sequência por meio da adição de um valor fixo ao primeiro termo para obter o segundo. Adicionando tal valor fixo a cada termo, obtêm-se o termo seguinte da sequência. Esse tipo de sequência numérica é chamado de Progressão Aritmética (PA).

2.2 Progressões Aritméticas

Em variados contextos da vida real, podemos notar grandezas que sofrem variações iguais em intervalos de tempos iguais.

Exemplo 2.2.1. *Uma fábrica de brinquedos possui 300 funcionários em janeiro. A fim de aumentar a sua produção, ela resolveu não demitir nenhum dos seus funcionários nos próximos 6 meses e contratar 20 funcionários a cada mês, começando no mês seguinte, até o mês de junho. Após esse período, quantos funcionários terá essa fábrica?*

Solução: Os valores da quantidade de funcionários, a partir de janeiro, serão: 300, 320, 340, 360, 380, 400. Logo, em junho a fábrica terá 400 funcionários.

Poderíamos ter usado outra ideia para resolver esse problema, evitando escrever a quantidade de funcionários mês a mês. Como a quantidade de funcionários aumenta 20 unidades a cada mês, em 5 meses teremos $5 \times 20 = 100$ funcionários a mais. Portanto, em junho teremos $300 + 100 = 400$ funcionários.

Esse é um problema típico de progressão aritmética, na qual o aumento de cada termo para o seguinte é sempre o mesmo. Esse aumento é chamado de taxa de crescimento ou razão da progressão aritmética.

Vejamos a definição formal:

[1] SEQUÊNCIA de Fibonacci. Hipercultura, 2022. Disponível em: https://www.hipercultura.com/sequencia-fibonacci/. Acesso em 11 mai. 2022.

[2] PROPORÇÃO áurea. Hipercultura, 2022. Disponível em: https://www.hipercultura.com/mito-da-proporcao-aurea/. Acesso em 11 mai. 2022.

Definição 2.2.1. *Uma progressão aritmética (PA) é uma sequência na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante. Essa diferença constante é chamada de razão da progressão e é representada pela letra r.*

Podemos classificar uma progressão aritmética em relação à sua razão. Se r = 0, a PA é chamada de constante ou estacionária. Se r > 0, a PA é crescente e se r < 0 temos uma PA decrescente. Em outras palavras, usando a notação de sequências aqui apresentada, temos que: $\forall n \in N$ uma progressão aritmética é constante ou estacionária se $a_{(n+1)} = a_n$; será crescente se $a_{(n+1)} > a_n$ e decrescente se $a_{(n+1)} < a_n$.

Exemplo 2.2.2. A sequência (2, 4, 6, 8, ...) é uma progressão aritmética crescente, cuja razão é r = 2. Além disso, podemos ver que $a_2 > a_1; a_3 > a_2; a_4 > a_3; ...; a_{(n+1)} > a_n$

Exemplo 2.2.3. A sequência (9, 6, 3, 0, ...) é uma progressão aritmética decrescente, cuja razão é r = - 3. Além disso, temos que $a_2 < a_1; a_3 < a_2; a_4 < a_3; ...; a_{(n+1)} < a_n$.

2.3 Termo Geral de uma Progressão Aritmética

Em uma progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n, ...)$, para determinar um termo, basta somar a razão ao termo imediatamente anterior. Assim, temos:

$$a_2 = a_1 + r$$
$$a_3 = a_2 + r$$
$$a_4 = a_3 + r$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$a_n = a_{(n-1)} + r$$

Ao somarmos as $n - 1$ igualdades acima, membro a membro, teremos:

$$a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{(n-1)} + (n-1)r$$

Agora, subtraindo $a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{n-1}$ em ambos os membros da igualdade, temos que:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

A expressão acima é chamada de termo geral da progressão aritmética. Vale frisar que:

a_n é o n-ésimo termo da PA;

a_1 é o primeiro termo da PA;

n indica a posição do n-ésimo termo (ou número de termos);

r é a razão da PA.

Porém, podemos generalizar o termo geral, tornando-o ainda mais abrangente ao considerarmos a PA$(a_1, a_2, a_3, ..., a_m, ..., a_n, ...)$. Assim, escrevemos o termo geral sem a dependência do primeiro termo da PA, a_1, da seguinte forma:

$$a_n = a_m + (n - m)r, \text{ com } m \leqslant n \text{ e m, n sendo números naturais.}$$

O termo geral de uma progressão aritmética é ensinado aos alunos da educação básica, geralmente no 1º ou 2º ano do ensino médio, por meio de problemas, exercícios de fixação, aplicações, modelagem matemática, etc.

No tocante à abordagem trazida pelos livros didáticos do ensino médio, seguem abaixo exercícios e problemas extraídos do livro de matemática do 1º ano do ensino médio "Matemática, contexto e aplicações", do autor Luiz Roberto Dante – livro este usado em escolas estaduais da Bahia.

Exercício 2.3.1. *Qual é o 20º termo da PA (2, 8, ...)?*

Solução:

Dados
$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ r = 6 \\ n = 20 \end{cases}$$

Aplicando o termo geral da PA (2.3), temos:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$
$$a_{20} = a_1 + 19r$$
$$a_{20} = 2 + 19.6$$

Logo,

$$a_{20} = 116$$

Exercício 2.3.2. *Em uma PA, o 5º termo vale 30 e o 20º vale 50. Quanto vale o 8º termo dessa progressão?*

Solução:

$$a_n = a_m + (n - m)r$$
$$a_{20} = a_5 + (20 - 5)r$$
$$50 = 30 + 15r$$
$$r = \tfrac{4}{3}$$

Assim, temos que:

$$a_8 = a_5 + 3r$$
$$a_8 = 30 + 3.\tfrac{4}{3}$$

Logo,

$$a_8 = 34$$

Problema 2.3.1. *Suponha que em 2018 um determinado cometa tenha passado pela Terra. Se esse cometa faz uma passagem pela Terra a cada 34 anos, então quantas vezes ele teria passado pela Terra de 1500 até 2018?*

Solução: Pelo termo geral da PA (2.3), temos:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$
$$2018 = a_1 + (n - 1).34$$

Vamos considerar inicialmente que $a_1 = 1500$, embora não saibamos se o cometa passou pela Terra em 1500. Então, segue que:

$$2018 = 1500 + (n - 1).34$$
$$2018 = 1466 + 34n$$
$$n = \tfrac{552}{34} \cong 16,24$$

Logo, o cometa passou pela Terra 16 vezes.

Podemos garantir que o cometa não passou pela terra em 1500 e que $a_1 \neq 1500$, visto que $n \neq 16$.

Desse modo, vamos determinar o termo a_1, que indica a primeira vez que o cometa passou pela Terra após o ano de 1500:

$$2018 = a_1 + (16 - 1).34$$
$$2018 = a_1 + 510$$
$$a_1 = 1508$$

Portanto, a primeira vez que o cometa passou após 1500 foi em 1508.

Nas resoluções de determinados problemas de progressões aritméticas, faz-se necessário muitas vezes usarmos ideias e argumentos algébricos a fim de facilitar a sua resolução. O problema a seguir, extraído do livro "Matemática Discreta" da Coleção PROFMAT e dos autores Augusto César Morgado e Paulo Cezar Pinto Carvalho (2015), exemplifica tal asserção.

Problema 2.3.2. *Determine 4 números em progressão aritmética crescente, conhecendo sua soma 8 e a soma de seus quadrados 36*.

Solução Considere uma PA de quatro termos (a, b, c e d) de razão r. Assim, no conjunto das propriedades válidas para PA, podemos escrever:

$$\begin{cases} b + c = a + d \\ c - b = 4 \end{cases}$$

i) Somando as equações, obtemos: $2c = a + d + r \rightarrow c = \frac{a+b}{2} + \frac{r}{2}$

ii) Subtraindo as equações, obtemos: $2b = a + d - r \rightarrow b = \frac{a+d}{2} - \frac{r}{2}$

Então, sem perda de generalidade, podemos escrever $b = x - y$ e $c = x + y$, com $r = 2y$

A progressão é, então, escrita da seguinte forma:

x - 3y, x − y, x + y, x + 3y

Assim, segue que:

$$\begin{cases} (x - 3y) + (x - y) + (x + y) + (x + 3y) = 8 \\ (x - 3y)^2 + (x - y)^2 + (x + y)^2 + (x + 3y)^2 = 36 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 4x = 8 \\ 4x^2 + 20y^2 = 36 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = 2 \\ y \pm 1 \end{cases}$$

Como a progressão é crescente, y > 0. Logo, x = 2 e y = 1.

Portanto, os números são -1, 1, 3, 5.

2.4 Soma dos Termos de uma Progressão Aritmética

Historicamente estudiosos atribuem as primeiras ideias para somar termos de uma PA ao matemático alemão Johann Carl Friedrich Gauss, que, quando ainda criança, recebeu uma tarefa, juntamente com seus colegas de turma da escola, a qual consistia em somar todos os números naturais de 1 a 100. Conjectura-se que Gauss foi o único entre seus colegas a conseguir encontrar o resultado para a referida soma, e sem precisar somar todos os termos um por um.

O pensamento de Gauss, que norteia a ideia central usada para demonstrar a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PA, baseava-se na percepção de que a soma do primeiro número com o último tinha 101 como resultado e que o mesmo acontecia para o segundo e penúltimo, terceiro e antepenúltimo e assim por diante.

Gauss então notou que, ao final, encontraria 50 resultados iguais a 101 e que a soma procurada era igual a 50 x 101 = 5050.

Proposição 2.4.1. *A soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética, denotada por* $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{(n-2)}, a_{(n-1)}, a_n)$, *é dada pela expressão:*

$$S_n = \frac{(a_1+a_n)n}{2}$$

Demonstração:

Dada a PA $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{(n-2)}, a_{(n-1)}, a_n)$, que possui n termos, observe que o primeiro termo é a_1, o segundo é a_2, ..., o penúltimo é $a_{(n-1)}$ e o último é a_n. Representando a soma desses termos por S_n, teremos a seguinte expressão:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

Escrevemos a mesma soma novamente, entretanto, de trás para frente:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + ... + a_3 + a_2 + a_1$$

Observe que, mantendo-se o mesmo pensamento de Gauss e somando as duas expressões, teremos:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + ... + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Note que, ao passar de uma soma para a seguinte – entre parênteses –, soma-se a razão r à primeira parcela e diminui-se r na segunda parcela, o que não altera o valor da soma. Portanto, analogamente à ideia de Gauss, concluímos que todas as somas são iguais à primeira $(a_1 + a_n)$.

Daí, como são n somas, temos

$$2S_n = (a_1 + a_n).n$$

e concluímos que

$$\boldsymbol{S_n = \tfrac{(a_1+a_n)n}{2}}$$

A fim de exemplificar como os livros didáticos abordam a utilização da fórmula da soma dos termos de uma PA, traremos alguns exercícios e problemas extraídos do livro de matemática do 1º ano do ensino médio "Matemática, contexto & aplicações", do autor Luiz Roberto Dante.

Exercício 2.4.1. *Calcule o valor de x na igualdade* $x+2x+...+20x = 6300$*, sabendo que os termos do 1º membro da igualdade estão em PA.*

Solução: Temos a PA $(x, 2x, ..., 20x)$, na qual o termo $a_1 = x; a_n = 20x$ e $r = x$. Usando o termo geral (2.3), temos:

$$20x = x + (n-1).x$$
$$19x = nx - x$$
$$20x = nx$$
$$n = 20$$

Usando a fórmula da soma dos termos (proposição 2.4.1), temos:

$$S_{20} = \tfrac{(x+20x)20}{3} = 6300$$

Assim, segue que:

$$21X = 630$$
$$x = 30$$

Problema 2.4.1 (Física). *Um corpo em queda livre percorre 3 metros no primeiro segundo, 12 metros no segundo, 21 metros no terceiro, e assim por diante. Continuando nessa sequência, quantos metros terá percorrido após 10 segundos.*

Solução: Temos a PA $(3, 12, 21, ..., a_{10})$, na qual o termo $a_1 = 3$; $n = 10$ e $r = 9$ Usando o termo geral da PA (2.1), temos:

$$a_{10} = a_1 + 9r = 3 + 9.9 = 84m$$

Segue que, pela proposição 2.4.1, a soma dos 10 primeiros termos é dada por:

$$S_{10} = \frac{(3+84).10}{2} = 435m$$

Logo, o corpo terá percorrido $435m$.

A seguir, traremos um problema que, conquanto apresente uma abordagem mais algébrica e menos frequente nos livros voltados ao ensino médio, entendemos que pode ser trabalhado de maneira didática e cuidadosa com alunos dessa etapa de ensino a fim de despertar neles o raciocínio lógico e o pensamento algébrico envolvidos nas progressões aritméticas.

Problema 2.4.2. *Prove que a soma dos n primeiros números ímpares é dado por* n^2.

Solução: Podemos escrever a soma dos n primeiros números ímpares por:

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1), \text{ com } n \text{ natural e } n > 0$$

Como os números acima formam uma PA, usando a fórmula da soma dos termos de uma PA (proposição 2.4.1), temos que

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = \frac{(1+2n-1)n}{2}$$

Mas

$$\frac{(1+2n-1)n}{2} = n^2$$

Logo,

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$$

O problema a seguir também pode ser trabalhado numa turma de ensino médio, pois, além de mobilizar outros conhecimentos matemáticos, pode levar os alunos a várias inquietações sobre a maneira de se resolverem problemas desse tipo.

Problema 2.4.3 *Qual é a soma de todos os números inteiros compreendidos entre 137 e 458 que, ao serem divididos por 11, deixam resto 7?*

Solução: Sabemos que 137 dividido por 11 deixa resto 5, pois 12.11 + 5 = 137. Somando 2 a ambos os membros dessa igualdade, temos:

$$12.11 + 7 = 139$$

que é o menor inteiro maior que 137 que, dividido por 11, deixa resto 7. Para saber quem é o próximo número com tal característica, basta somar a constante 11 e o mesmo vale para descobrir os demais termos. Então, temos a sequência (139, 150, 161, ...).

Para descobrir quantos termos estão entre 137 e 458, vamos usar o termo geral da PA:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$
$$458 = 139 + 11n - 11$$
$$n = 30$$

Finalmente, para calcular a soma solicitada, usamos a fórmula da soma dos termos da PA (proposição 2.4.1):

$$S_{30} = \frac{(139+458)30}{2} = 8955$$

2.5 Progressões Aritméticas de Ordem Superior

As progressões aritméticas às quais nos referimos até aqui são classificadas como progressões de *primeira ordem*. Evidentemente essa assertiva pode levar o leitor às seguintes indagações: existem, então, progressões aritméticas de segunda ordem? De terceira? Ou até de ordem k?

Se positivas as respostas para esses questionamentos, tais progressões aritméticas de ordens maiores que 1 são abordadas no âmbito da sala de aula da educação básica? Estão presentes nos livros didáticos do ensino médio? Neste tópico, buscaremos responder a algumas dessas perguntas.

De fato, dentro do conjunto de objetos estudados pela matemática discreta, lidamos com conceitos inerentes a progressões aritméticas de ordem superior, dentre os quais estudaremos com mais ênfase nesta investigação os conceitos relacionados às progressões de segunda ordem.

As progressões aritméticas de segunda ordem, no tocante ao que é abordado nas escolas de ensino médio, aparentemente são pouco mencionadas pelos professores de matemática. Quando são mencionadas, usam-se apenas noções básicas. Em livros[3] e sites[4] voltados para o referido nível de ensino, vemos a ideia intuitiva de que uma PA de segunda ordem é uma sequência de números tal que a diferença entre termos consecutivos é uma progressão aritmética.

Outra definição intuitiva semelhante é a de que "PA de segunda ordem ou PA de ordem 2 é uma sequência de números tais que, após uma operação de diferença entre termos consecutivos da sequência, obtemos uma PA de 1ª ordem, não estacionária" (LOPES, 1998, p.7).

Não obstante, para aprofundarmos os estudos sobre as progressões aritméticas de ordem superior e podermos compreender melhor o seu conceito formal, bem como suas leis de formação e o comportamento dos seus termos, faz-se necessário estudarmos alguns conceitos específicos, como, por exemplo, o conceito de operador diferença.

Definição 2.5.1. *Seja (a_n) uma sequência qualquer. O operador diferença, denotado por Δa_n, é tal que $\Delta a_n = a_{(n+1)} - a_n$, isto é, Δa_n é a diferença entre o sucessor de cada termo e o próprio termo.*

Segue da definição imediatamente que uma sequência (a_n) é uma progressão aritmética de primeira ordem se, e somente se, $(\Delta a_n) = (a_{n+1} - a_n)$ constante (ou estacionária).

Exemplo 2.5.1. *A sequência $(a_n) = (2, 6, 10, 14, 18, ...)$ é uma progressão aritmética de primeira ordem porque a sequência das diferenças entre o sucessor de cada termo e o próprio termo,*

$$(\Delta a_n) = (a_{n+1} - a_n) = (4, 4, 4, 4, ...),$$

é uma progressão aritmética constante.

[3] ALEGRI, Mateus. O pequeno livro das progressões. Brasil: Ciência Moderna, 2018.

[4] PROBLEMÃO: Progressão aritmética de segunda ordem. Clubes de Matemática da OBMEP. Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/problemao-progressao-aritmetica-de-segunda-ordem-edicao/. Acesso em 13 de jul. 2022.

Definição 2.5.2. *Uma progressão aritmética de segunda ordem é uma sequência* (a_n) *na qual as diferenças* $\Delta a_n = a_{(n+1)} - a_n$*, entre o sucessor de cada termo e o próprio termo, formam uma progressão aritmética não-estacionária. De modo mais geral, uma progressão aritmética de ordem* $k(k > 2)$ *é uma sequência na qual as diferenças entre o sucessor de cada termo e o próprio termo formam uma progressão aritmética de ordem* $k - 1$.

Exemplo 2.5.2. *A sequência* $(a_n) = (1, 4, 9, 16, 25, 36, ...)$ *é uma progressão aritmética de segunda ordem porque a sequência das diferenças entre o sucessor de cada termo e o próprio termo,*

$$(\Delta a_n) = (a_{n+1} - a_n) = (3, 5, 7, 9, 11, ...),$$

é uma progressão aritmética não-estacionária.

Proposição 2.5.1 *Seja* (a_n) *uma progressão aritmética de segunda ordem qualquer e* $(b_n) = (\Delta a_n)$ *a progressão aritmética de primeira ordem de razão* r *associada a* (a_n)*. Então, o termo geral da progressão aritmética de segunda ordem* (a_n) *é dado por:*

$$a_n = a_1 + b_1(n-1) + \tfrac{(n-1).(n-2)r}{2}$$

Demonstração

Pelas definições 2.5.1 e 2.5.2, temos que $(b_n) = (\Delta a_n) = (a_{n+1} - a_n)$. Então, é verdade que

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 &= b_1 \\ a_3 - a_2 &= b_2 \\ a_4 - a_3 &= b_3 \\ &. \\ &. \\ &. \\ a_n - a_{n-1} &= b_{n-1} \end{aligned}$$

Somando todas as igualdades, temos:

$$(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + ... + (a_n - a_{n-1}) = b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_{n-1}$$

Dessa igualdade segue-se que

$$a_n - a_1 = b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_{n-1} \text{ (I)}$$

Como (b_n) é uma PA de primeira ordem, pela fórmula da soma dos termos (proposição 2.4.1.), temos:

$$b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_{n-1} = \frac{(b_1+b_{n-1})(n-1)}{2} \text{ (II)}$$

Assim, substituindo a igualdade (II) na igualdade (I), temos:

$$a_n = a_1 + \frac{(b_1+b_{n-1})(n-1)}{2} \text{ (III)}$$

Usando a notação $S_{(n-1)}$ para representar a soma dos n-1 termos da sequência (b_n), temos que

$$a_n = a_1 + S_{n-1}$$

Usando o termo geral da PA de primeira ordem (2.3), segue que

$$b_{n-1} = b_1 + (n-2).r$$

Agora, substituindo essa expressão em (III), temos que

$$a_n = a_1 + \frac{(b_1+b_1+(n-2)r)(n-1)}{2}$$
$$a_n = a_1 + \frac{2b_1(n-1)+(n-1)(n-2)r}{2}$$

Portanto, o termo geral da progressão aritmética de segunda ordem é

$$a_n = a_1 + b_1(n-1) + \frac{(n-1)(n-2)r}{2}$$

Problema 2.5.1. *Os números hexagonais fazem parte de um grupo de números chamados de poligonais. Eles recebem tal denominação porque podem ser representados por polígonos. No caso dos hexagonais, sua representação acontece na forma de hexágonos, como mostra a figura 2.1 a seguir:*

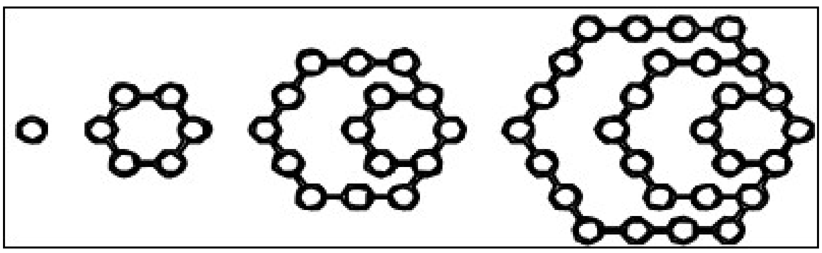


Figura 2.1: Representação de números hexagonais

Com base na sequência de números representada na Figura 2.1 acima, descubra qual é o vigésimo número hexagonal.

Solução: Com base na lógica da figura 2.1, os primeiros números hexagonais formam a PA de segunda ordem $(a_n) = (1, 6, 15, 28, ...)$.

As diferenças entre os termos consecutivos formam a PA de primeira ordem $(b_n) = (5, 9, 13, ...)$.

Assim, aplicando o termo geral da PA de segunda ordem (proposição 2.5.1), temos:

$$a_n = a_1 + b_1(n-1) + \tfrac{(n-1)(n-2)r}{2}$$
$$a_{20} = 1 + 5(20-1) + \tfrac{(20-1)(20-2)4}{2}$$
$$a_{20} = 1 + 5.19 + \tfrac{19.18.4}{2}$$
$$a_{20} = 1 + 95 + 684$$

Logo,

$$a_{20} = 780$$

Lema 2.5.1. *Se (a_n) é uma PA de ordem p, então a sequência das somas parciais de (a_n), denotada por S_n, onde $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$, é uma PA de ordem p + 1.*

Demonstração. Seja $a_n = (a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ uma PA de ordem p e considere

$$(S_n) = (a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, ...).$$

Observe que $(\Delta S_n) = (a_2, a_3, a_4, ...)$. Assim, (ΔS_n) é uma PA de ordem p e, portanto, (S_n) é uma PA de ordem p + 1.

Proposição 2.5.2. *Toda sequência na qual o termo de ordem n é um polinômio em n, de grau 2, é uma progressão aritmética de ordem 2 e, reciprocamente, se (a_n) é uma progressão aritmética de ordem 2, então a_n é um polinômio de grau 2 em n.*

Em outras palavras, essa proposição afirma que o termo geral de uma PA de segunda ordem (proposição 2.5.1) é um polinômio quadrático.

Demonstração. Consideremos inicialmente o caso em que, numa sequência (a_n), quando o termo de ordem n é o polinômio $a_n = an^2 + bn + c$ com $a \neq 0$, (a_n) tem ordem 2 (ida).

Aplicando o operador diferença, temos

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$$
$$\Delta a_n = a(n+1)^2 + b(n+1) + c - (an^2 + bn + c)$$
$$\Delta a_n = 2an + (a+b)$$

Mostraremos, agora, o caso em que, se (a_n) é uma PA de segunda ordem, então a_n é um polinômio do segundo grau em n (volta).

Seja (a_n) uma PA de ordem 2. Temos que

$$(b_n) = (\Delta a_n) = (a_{n+1} - a_n)$$

que é uma progressão aritmética com razão diferente de zero e, ainda,

$$b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_{n-1} + b_n =$$
$$(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + ... + (a_n - a_{n-1}) =$$
$$a_{n+1} - a_1$$

Mas, usando a fórmula da soma dos termos de uma PA (proposição 2.4.1), temos que

$$b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_{n-2} + b_{n-1} + b_n$$
$$= \frac{(b_1 + (b_1 + (n-1)r))n}{2}$$
$$= \frac{b_1 + n^2 r - nr + b_1 n}{2}$$
$$= \frac{rn^2}{2} + \frac{(b_1 - r)}{2} + \frac{b_1}{2}$$

que é um polinômio do segundo grau em n.

Daí, como

$$a_{(n+1)} - a_1 = \frac{rn^2}{2} + \frac{(b_1 - r)n}{2} + \frac{b_1}{2}$$

segue que $a_{n+1} - a_1$ é um polinômio do segundo grau em n e, em consequência, a_n também é um polinômio do segundo grau em n

A proposição acima (2.5.2) pode ser generalizada para progressões aritméticas de ordens superiores a 2. Antes, porém, para auxiliar a demonstração, estudaremos somas polinomiais do tipo

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = 1^p + 2^p + ... + n^p$$

e, posteriormente, de forma mais geral, o tipo

$$\sum_{k=1}^{n} p(k)$$

onde $p(k)$ é um polinômio em k.

Exemplo 2.5.3. *A soma dos quadrados dos n primeiros números inteiros positivos é*

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \sum_{K=1}^{N} K^2$$

e podemos calculá-la da seguinte forma:

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

Os dois primeiros somatórios têm várias parcelas comuns, visto que

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 = 2^3 + 3^3 + ... + n^3 + (n+1)^3$$

e

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$$

Assim, simplificando as parcelas que são comuns aos dois membros da igualdade, temos

$$(n+1)^3 = 1^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

como

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

e

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = 1 + 1 + ... + 1 = n$$

temos

$$(n+1)^3 = 1^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\frac{n(n+1)}{2} + n$$

Assim,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{2n^3+3n^2+n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Note que

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2$$

é um polinômio do terceiro grau em n.

Podemos tornar esse caso mais abrangente e generalizá-lo para o teorema a seguir:

Teorema 2.5.1.

$$1^p + 2^p + 3^p + ... + n^p = \sum_{k=1}^{n} k^p$$

é um polinômio de grau p+1 em n.

Demonstração:

Faremos essa demonstração por indução em p.

Para p=1, temos

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

que é um polinômio de grau 2.

Supondo

$$\sum_{k=1}^{n} k^p$$

um polinômio de grau $p+1$ em n, para todo $p \in \{1, 2, ..., s\}$

Mostraremos, então, que essa afirmação é verdadeira para $p = s + 1$, ou seja, mostraremos que

$$\sum_{k=1}^{n} k^{s+1}$$

é um polinômio de grau $s + 2$ em n.

Note que

$$(k+1)^{s+2} = k^{s+2} + (s+2)k^{s+1} + ...,$$

onde os termos que não estão explícitos formam um polinômio de grau s em k.

Assim, temos que

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^{s+2} = \sum_{k=1}^{n} k^{s+2} + (s+2)\sum_{k=1}^{n} k^{s+1} + F(n)$$

e $F(n)$ é um polinômio de grau $s + 1$ em n por hipótese de indução. Simplificando os termos comuns aos dois primeiros somatórios, temos:

$$(n+1)^{s+2} = 1 + (s+2)\sum_{k=1}^{n} k^{s+1} + F(n)$$

Logo,

$$\sum_{k=1}^{n} k^{s+1} = \frac{(n+1)^{s+2} - 1 - F(n)}{s+2}$$

que é um polinômio de grau $s+2$ em n.

Corolário 2.5.1. *Se F é um polinômio de grau p, então*

$$\sum_{k=1}^{n} F(k)$$

é um polinômio de grau p+1 em n.

Enfim, podemos generalizar a proposição 2.5.2 da seguinte forma:

Proposição 2.5.3. *Toda sequência na qual o termo de ordem n é um polinômio em n, de grau p, é uma progressão aritmética de ordem p e, reciprocamente, se (a_n) é uma progressão aritmética de ordem p, então a_n é um polinômio de grau p em n.*

Demonstração

Faremos esta demonstração por indução em p.

Para p=1, a proposição decorre do termo geral de uma progressão aritmética não constante, isto é, da expressão

$$a_n = a_1 + (a-1)r$$

que é a mesma coisa que

$$a_n = an + a_1 - r$$

que, por sua vez, é um polinômio de grau 1 em n.

Suponhamos que a proposição seja válida para todo $p \in \{1, 2, ..., s\}$. Vamos mostrar que vale também para $p = s+1$.

Se (a_n) é uma progressão aritmética de ordem $s+1$,

$$(b_n) = (\Delta a_n) = (a_{n+1} - a_n)$$

é uma progressão aritmética de ordem s e, pela hipótese de indução, b_n é um polinômio de grau s em n. Então,

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = a_{n+1} - a_1$$

é, pelo corolário do teorema anterior, um polinômio de grau $s + 1$ em n. Se a_n é um polinômio de grau $s+1$ em n, Δa_n é um polinômio de grau s em n (isso pode ser verificado facilmente). Logo, pela hipótese de indução, (Δa_n) é uma progressão aritmética de ordem s, ou seja, $(\ a_n)$ é uma progressão aritmética de ordem s+1.

Exemplo 2.5.4. A sequência $(3, 7, 13, 23, 39, 63, 97, ...)$ é uma progressão aritmética de terceira ordem, visto que, aplicando o operador diferença (2.5.1), obtemos a sequência:

$$(4, 6, 10, 16, 24, 34...) \rightarrow 2^{\underline{\text{a}}} \text{ ordem}$$

Aplicando o operador diferença mais uma vez, temos:

$$(2, 4, 6, 8, 10, ...) \rightarrow 1^{\underline{\text{a}}} \text{ ordem}$$

Por fim, aplicando o operador diferença novamente, teremos uma sequência constante:

$$(2, 2, 2, 2...)$$

Proposição 2.5.4. *Seja (a_n) uma progressão aritmética de segunda ordem qualquer e (b_n) a progressão aritmética de primeira ordem de razão r associada a (a_n). Então, a soma dos n primeiros termos da progressão aritmética de segunda ordem (a_n) denotada por S_n, é dada por:*

$$S_n = a_1 n + b_1 \tfrac{n(n-1)}{2} + r \tfrac{n(n-1).(n-2)}{6}$$

Demonstração

Seja $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + ... + a_n$, pela proposição 2.5.1

temos

$$\begin{aligned}
a_1 &= a_1 + 0.b_1 + 0.r \\
a_2 &= a_1 + 1.b_1 + 0.r \\
a_3 &= a_1 + 2.b_1 + 1.r \\
a_4 &= a_1 + 3.b_1 + 2.r \\
a_5 &= a_1 + 4.b_1 + 6.r \\
a_6 &= a_1 + 5.b_1 + 10.r \\
&. \\
&. \\
&. \\
a_n &= a_1(n-1).b_1 + \tfrac{(n-1)(n-2)}{2}.r
\end{aligned}$$

Somando todas as equações, temos

$S_n = a_1 n + b_1(0+1+2+3+4+5+...+(n-1)) + r(0+0+1+3+6+10+...+\frac{(n-1)(n-2)}{2})$

Como $0+1+2+3+4+5+...+(n-1)$ representa a soma dos $n-1$ termos de uma PA de 1ª ordem, segue da proposição 2.4.1 (fórmula da soma dos termos de uma PA) que

$$(0+1+2+3+4+5+...+(n-1)) = \frac{n(n-1)}{2}$$

Assim, para concluir a demonstração, basta mostrar que

$$(0+0+1+3+6+10+...+\frac{(n-1).(n-2)}{2}) = \frac{n(n-1).(n-2)}{6}$$

Provemos esse resultado por indução em n. Temos que $p(1) = 0; p(2) = 0; p(3) = 1$

Suponhamos que $p(n)$ é válida. Vamos mostrar que $p(n+1)$ também é válida. Por hipótese,

$$(0+0+1+3+6+10+...+\frac{(n-1).(n-2)}{2}) = \frac{n(n-1).(n-2)}{6}$$

Somando $\frac{n(n-1)}{2}$ a ambos os membros da igualdade, temos

$$0+0+1+3+6+10+...+\frac{(n-1).(n-2)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1).(n-2)}{6} + \frac{n(n-1)}{2}$$

mas

$$\begin{aligned}&\frac{n(n-1).(n-2)}{6} + \frac{n(n-1)}{2}\\ &= \frac{(n(n-2)+3n)(n-1)}{6}\\ &= (n^2+n)\frac{n-1}{6}\\ &= \frac{n(n+1)(n-1)}{6}\\ &= p(n+1)\end{aligned}$$

Logo, como $p(n+1)$ também é válida, o resultado está provado e, portanto,

$$S_n = a_1 n + b_1 \frac{n(n-1)}{2} + r\frac{n(n-1).(n-2)}{6}$$

Problema 2.5.2. *Determine a soma dos 20 primeiros números pentagonais.*

Temos que $(a_n) = (1, 5, 12, 22, ...)$ é PA da 2ª ordem e $(b_n) = (4, 7, 10, ...)$ é a PA de 1ª ordem associada.

Assim, aplicando a proposição 2.5.4, temos

$$S_{20} = 1.20 + 4.\frac{20(20-1)}{2} + 3\frac{20(20-1).(20-2)}{6}$$

$$S_{20} = 20 + 760 + 3420$$

$$S_{20} = 4200$$

Capítulo 3

O PERCURSO METODOLÓGICO

Neste capítulo, descrevemos a metodologia empregada na investigação sobre as progressões aritméticas de ordem superior, com foco na segunda ordem. Apresentamos o caminho metodológico escolhido – com todas as suas etapas –, além dos instrumentos de coleta de dados, o tipo de investigação, o campo de pesquisa, os sujeitos envolvidos e o levantamento dos dados.

3.1 Contexto da investigação

Adotamos na investigação uma abordagem de natureza qualitativa, por considerarmos que ela contribui para um maior aprofundamento do objeto de estudo. Um dos principais objetivos é compreender os processos de solução adotados pelos alunos. Por isso a necessidade de gerar dados qualitativos que permitam descrever e analisar esses processos.

Segundo Ludke e André, a pesquisa qualitativa configura-se por:

> 1. ter ambiente natural com sua fonte direta de dados e o pesquisador como seu principal instrumento;
> 2. os dados obtidos são predominantemente descritivos;
> 3. a preocupação com o processo é muito maior que com o produto;
> 4. a análise dos dados tende a seguir um processo indutivo;
> 5. os pesquisadores não se preocupam em buscar evidências que comprovem hipóteses definidas antes do início dos estudos;
> 6. as abstrações formam-se ou consolidam-se basicamente a partir de inspeção dos dados num processo de baixo para cima (LUDKE E ANDRÉ, 2013, p. 11-13).

Assim, a abordagem qualitativa permite aprofundar as informações coletadas, por meio de descrição, análise e reflexões, ou seja, configurando-se como um caminho por onde buscamos atingir os objetivos específicos da investigação. Vale ressaltar que a escolha do caminho metodológico a ser percorrido, bem como a escolha da sequência didática como instrumento de coleta de dados cumprem dupla função:

Investigativa – a partir da análise de atividades avaliativas (pré-teste e teste final), discussões e observações realizadas durante o desenvolvimento da sequência didática, é possível fazer inferências sobre as representações mentais e as estratégias utilizadas pelos alunos para chegar a um determinado resultado. Além disso, os erros também são objetos de estudo, visto que revelam a natureza dessas representações e as estratégias elaboradas. Por meio deles, podem-se diagnosticar as dificuldades encontradas e pensar em mecanismos para superá-las.

Pedagógica – a própria natureza das atividades desenvolvidas na sequência didática já pressupõe uma intencionalidade instrutiva e formativa, visto que as atividades incluem leituras, discussões, apresentações individuais e/ou em grupo e até mesmo aula expositiva.

Portanto, este trabalho de investigação visa não somente coletar dados para uma posterior análise do nosso objeto de estudo, mas também, do ponto de vista pedagógico, introduzir novos conceitos sobre um conteúdo desconhecido para alunos do 2º ano do ensino médio, por meio de uma série de atividades interligadas. Outra intenção é evidenciar a resolução de problemas como um poderoso instrumento de ensino e aprendizagem, de modo que os modelos aqui usados inspirem outros professores de matemática a adotarem tal instrumento em suas aulas.

A pesquisa foi classificada em descritiva, uma vez que, segundo Gil (1999), as pesquisas descritivas têm como finalidade principal a descrição das características de determinada população ou fenômeno, ou o estabelecimento de relações entre variáveis. Nesse caso, faremos a descrição das respostas dos alunos na resolução das questões da atividade diagnóstica e da atividade avaliativa final.

Esta pesquisa qualitativa também se insere no grupo de pesquisa de campo, uma vez que foi feito um corte temporal-espacial – definição do campo e dimensão do trabalho a ser desenvolvido –, para posterior investigação. Segundo Gil:

> O estudo de campo procura muito mais o aprofundamento das questões propostas do que a distribuição das características da população, segundo determinadas variáveis. Como consequência, o planejamento do estudo de campo apresenta muito mais flexibilidade, podendo ocorrer mesmo que seus objetivos sejam reformulados ao longo da pesquisa (GIL, 1999, p. 53).

Além disso, como preconiza a pesquisa de campo, foram feitas observação, coleta, análise e interpretação de fatos e fenômenos no ambiente natural da pesquisa, isto é, uma sala de aula, com alunos do 2º ano do ensino médio.

3.2 A caracterização do lócus

A sequência didática foi realizada em uma escola estadual de médio porte, que conta com 1352 alunos matriculados nas três séries do ensino médio (dados de 2021). Essa escola está situada na cidade de Santaluz, no interior da Bahia, que possui, aproximadamente, 37704 habitantes conforme estimativa do IBGE de 2021. Na composição geográfica da região, não há muitas instituições de ensino superior (a universidade púbica mais próxima, UNEB, dista mais de 50km da referida cidade), o que faz com que estudantes egressos dessa escola procurem oportunidades de estudo em cidades distantes.

O convite para participar desta pesquisa aconteceu na Escola X, na qual o pesquisador figura o quadro de professores efetivos. Não havendo objeção do corpo diretivo da escola à realização da sequência didática, o convite foi feito aos alunos em uma das turmas de 2º ano em que o pesquisador/professor ministra aulas de matemática. A aceitação por parte dos alunos deveria ser voluntária, e assim recebemos o aceite de todos os alunos da turma de forma mista, 13 no total. Vale ressaltar que esse quantitativo reduzido foi reflexo da evasão escolar provocada pelos obstáculos impostos pela Covid-19, que ainda era uma preocupação mundial e limitava a frequência de alguns alunos na época da realização deste trabalho.

Os participantes da pesquisa são, portanto, 13 alunos do 2º ano do Ensino Médio, do turno matutino, com frequência regular, sendo 10 do sexo feminino e apenas 3 do sexo masculino.

3.3 Instrumentos de coleta de dados

Antes do início do processo de coleta de dados, foi apresentado brevemente aos participantes da pesquisa o modelo da sequência didática a ser utilizado (em apêndice C), elaborado pelo presente pesquisador sob o olhar da orientadora deste trabalho. Ressalta-se que esse modelo sofreu ajustes no decorrer das aulas, adaptando o roteiro e o tempo de execução das ações na medida em que se verificava tal necessidade.

Em termos de instrumentos de coleta de dados, além das observações do pesquisador/professor dos registros e discussões feitos em sala de aula, foram utilizadas duas atividades impressas intituladas: *Atividade Diagnóstica* (em apêndice A) e *Avaliação Final da Sequência Didática* (em apêndice B).

A atividade diagnóstica foi dividida em duas partes denominadas Atividade A e Atividade B, ambas estão presentes no conjunto de objetos de análise deste trabalho. O objetivo principal dessa atividade diagnóstica é investigar aquilo que os alunos já sabem sobre as sequências e progressões aritméticas, isto é, seus conhecimentos prévios, sendo esse o ponto de partida para a construção de novos conceitos e o aprofundamento da temática com a turma. Vale ressaltar que sequências numéricas e progressões aritméticas (de 1ª ordem) já haviam sido trabalhadas por ocasião do cumprimento do conteúdo programático da matéria de matemática, estabelecido pelos professores da área e coordenação pedagógica da escola.

A primeira atividade, denominada *"Atividade A"*, traz os seguintes questionamentos: *"Para você, o que são sequências numéricas? Para você, o que é Progressão Aritmética (PA)?"*.

Nessa tarefa inicial, onde foram analisadas as respostas dos participantes, o intuito era investigar o entendimento outrora construído na estrutura cognitiva dos alunos sobre a temática – aquilo que Ausubel chama de *Conceito Subsunçor*.

Para a segunda situação analisada, denominada "Atividade B", foi solicitada a resolução de exercícios e problemas (7 no total) envolvendo sequências e progressões aritméticas. A seleção dos exercícios e problemas levou em conta o processo de hierarquização de conceitos, partindo dos mais simples para os mais complexos, finalizando com um problema contextualizado, retirado do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) de 2016.

No capítulo 4 deste trabalho, fizemos a análise completa dos registros referentes às resoluções de todas as questões presentes na atividade diagnóstica (em apêndice A). Por ora, trazemos a seguir apenas algumas das finalidades dessas questões:

- ✓ Investigar a percepção de regularidades em sequências numéricas e reconhecer padrões de resolução para encontrar elementos faltantes;

- ✓ Identificar no aluno as habilidades cuja Base Nacional Comum Curricular (BNCC) recomenda para esta etapa de ensino: (EF03MA10) "Identificar regularidades em sequências ordenadas de números naturais, resultantes da realização de adições ou subtrações sucessivas, por um mesmo número, descrever uma regra de formação da sequência e determinar elementos faltantes ou seguintes";

- ✓ Perceber se o conceito de progressão aritmética já está bem estabelecido na estrutura cognitiva do aluno, bem como se este consegue fazer a distinção entre esse tipo de sequência (PA) e outros tipos que não seguem o padrão de adição ou subtração de termos constantes;

- ✓ Constatar a aparição da ideia de termo geral de uma PA, outrora estudado, nos registros das resoluções;

- ✓ Revelar as competências que envolvem o raciocinar, como preconiza a Base Nacional Comum Curricular (2017):

> Para o desenvolvimento de competências que envolvem o raciocinar, é necessário que os estudantes possam, em interação com seus colegas e professores, investigar, explicar e justificar os problemas envolvidos, com ênfase nos processos de argumentação matemática. Embora todas as habilidades pressuponham a mobilização do raciocínio, nem todas se restringem ao seu desenvolvimento. Assim, por exemplo, a identificação de regularidades e padrões exige, além de raciocínio, a representação e a comunicação para expressar as generalizações, bem como a construção de uma argumentação consistente para justificar o raciocínio utilizado (BRASIL, 2017, p. 519).

Espera-se que os registros das resoluções sejam um campo fértil para análise e reflexão das estratégias, procedimentos e raciocínios empregados pelos participantes, podendo estes revelar as fragilidades inerentes à aprendizagem das progressões aritméticas. Além disso, do ponto de vista pedagógico, a análise desse material possibilita ao pesquisador/professor (re) pensar as etapas subsequentes da sequência didática, levando em conta os conhecimentos prévios apresentados até aqui.

Daí a necessidade (talvez) de se pensar em organizadores prévios (por exemplo, exibição de vídeos, leituras, pesquisas, entre outros) antes da introdução dos conceitos sobre progressões aritméticas de ordem superior, que são totalmente desconhecidos de alunos 2º ano do ensino médio e exigem, como pré-requisito, o conhecimento sobre o conceito de PA (de 1ª ordem).

Ainda sobre as questões da referida atividade B, vale mencionar que, a fim de favorecer a fluidez desta leitura, não as trouxemos neste capítulo, mas faremos sua exposição mediante a análise e discussão dos registros dos sujeitos no capítulo 4. Com o propósito de verificar a aprendizagem acerca das PA's de segunda ordem, temos a Avaliação Final da Sequência Didática (em apêndice B), que é composta de 5 questões. A questão 1 é aberta e visa identificar na escrita dos participantes quais as noções básicas (ou mesmo formais) que foram adquiridas durante as atividades desenvolvidas na sequência didática. Segue-a:

Questão 1. *Para você, o que é Progressão Aritmética (PA) de 2ª ordem? Dê um exemplo.*

Aqui espera-se encontrar algum entendimento sobre a temática, seja na resposta direta à primeira pergunta, seja no exemplo dado.

Na questão 2, a seguir, temos a intenção de averiguar se os participantes conseguem fazer distinção entre PA de segunda ordem e outros tipos de sequências e a partir disso identificar dois entre cinco exemplos que se caracterizam como a referida PA.

Questão 2. *Identifique entre as sequências abaixo aquelas que são progressões aritméticas de segunda ordem.*

(a) (1, 2, 3, 4, 5, . . .)

(b) (1, 3, 6, 10, 15, . . .)

(c) (1, 2, 4, 8, 16, 32, . . .)

(d) (1, 4, 9, 16, 25, . . .)

(e) (1, 5, 9, 13, 17, . . .)

Solução:

São progressões aritméticas de segunda ordem as sequências dos itens: b) (1, 3, 6, 10, 15, . . .) e d) (1, 4, 9, 16, 25, . . .)

As demais questões que compõem a avaliação final da sequência didática são problemas bastante contextualizados, que foram criteriosamente selecionados, ao passo que exigem dos sujeitos participantes mais do que o entendimento da ideia intuitiva de PA de segunda ordem, mas a proficiência e o amadurecimento cognitivo para montar estratégias, raciocinar logicamente e mobilizar os diversos saberes adquiridos nas aulas em busca da solução. Assim, esperamos que esses problemas possam ser usados por professores de matemática que tenham a iniciativa de mediar os estudos sobre o referido tema.

A seguir trazemos esses problemas com suas respectivas resoluções:

Questão 3. *Os Números Poligonais são casos particulares de Números Figurados. Denominam-se Números Figurados aqueles que podem ser representados por uma construção geométrica de pontos equidistantes. Caso tal arranjo seja um polígono regular, esses números são chamados de Números Poligonais. As figuras abaixo (nos itens a, b, c e d) apresentam as sequências dos números chamados triangulares, quadrados, pentagonais e hexagonais, respectivamente. Analise os itens e em cada um deles:*

I – Indique se a sequência dos números poligonais é uma PA de 2ª ordem;

II – Desenhe a próxima figura da sequência (figura 6);

III – Encontre o termo a_{10}, que representa a décima figura, caso a sequência seja uma PA de 2ª ordem.

a)

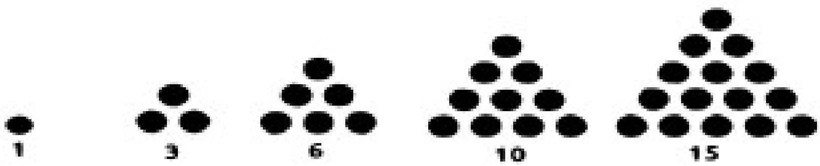


Figura 3.1: : Representação de Números Triangulares

b)

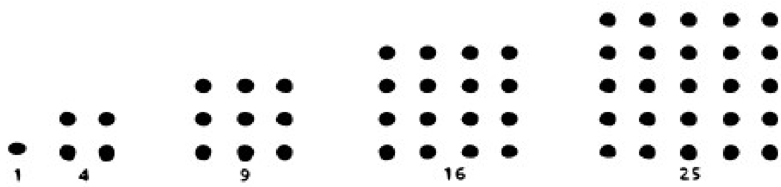


Figura 3.2: : Representação de Números Quadrangulares

c)

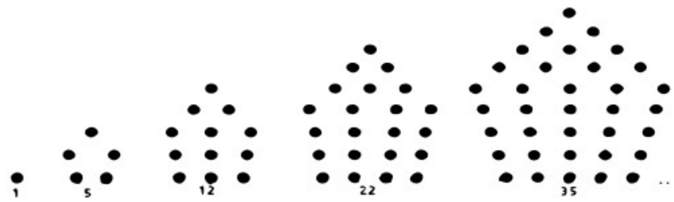


Figura 3.3: : : Representação de Números Pentagonais

d)

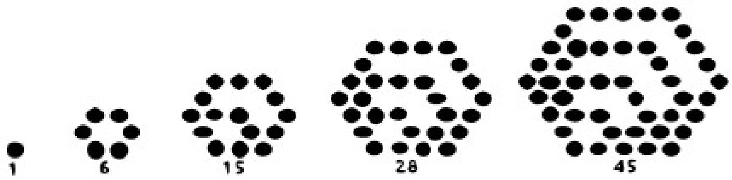


Figura 3.4: : Representação de Números Hexagonais

Solução:

a) **I** – As diferenças entre os números triangulares consecutivos na figura 3.1 forma a sequência (2, 3, 4, 5), que é uma PA de primeira ordem. Portanto, a sequência original dos números triangulares (1, 3, 6, 10, 15, ...) é uma PA de segunda ordem.

II – A figura 6 da referida sequência é dada por:

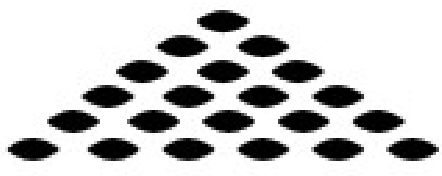


Figura 3.5: : Representação do 6º número triangular

III – Para encontrar o termo a_{10}, que representa a décima figura, consideramos a sequência (a_n)

$$(1, 3, 6, 10, 15, ...)$$

As diferenças entre os termos consecutivos formam a sequência (b_n)

$$(2, 3, 4, 5, ...)$$

Percebemos, portanto, que a segunda sequência (b_n) é uma PA de primeira ordem e a sequência original dos números triangulares (a_n) é uma PA de segunda ordem. Assim, para calcularmos a_{10}, usamos o termo geral de uma PA de segunda ordem abordado no capítulo 2 desta obra (proposição 2.5.1).

$$a_n = a_1 + b_1(n-1) + \frac{(n-1).(n-2)r}{2}$$

Substituindo cada termo da expressão acima, temos:

$$a_{10} = 1 + 2(10-1) + \frac{(10-1).(10-2)1}{2}$$
$$a_{10} = 1 + 18 + \frac{9.8.2}{2}$$
$$a_{10} = 1 + 18 + 36$$
$$a_{10} = 55$$

Logo, o termo a_{10}, que representa a décima figura, vale 55.

É fácil verificar que as sequências dos números poligonais dos demais itens (b, c e d) da questão 3, são progressões aritméticas de segunda ordem. A resolução desses itens é inteiramente análoga à do item a, acima. Deixamos como exercício para o leitor.

Questão 4. *(FGV - 2008) A figura 3.6 abaixo mostra castelos de cartas de 1, 2 e 3 andares. De quantos baralhos de 52 cartas precisamos, no mínimo, para construir um castelo de 10 andares?*

Figura 3.6: : Castelo de Cartas, FONTE: FGV - 2008

Solução

Analisando a sequência (a_n) das figuras, temos que:

$$a_1 = 2$$
$$a_2 = 2 + 5 = 7$$
$$a_3 = 2 + 5 + 8 = 15$$
$$a_4 = 2 + 5 + 8 + 11 = 26$$

.

.

.

Daí, temos a sequência

$$(2, 7, 15, 26, ...)$$

A variação entre os termos consecutivos forma a sequência (b_n)

$$(5, 8, 11, ...)$$

Temos, então, que a segunda sequência é uma PA de primeira ordem e a sequência original é uma PA de segunda ordem. Assim, para calcularmos a_{10}, usamos o termo geral de uma PA de segunda ordem (proposição 2.5.1).

$$a_n = a_1 + b_1(n-1) + \tfrac{(n-1).(n-2)r}{2}$$

Substituindo cada termo na expressão acima, temos:

$$a_{10} = 2 + 5(10-1) + \tfrac{(10-1).(10-2)3}{2}$$
$$a_{10} = 2 + 45 + \tfrac{9.8.3}{2}$$
$$a_{10} = 2 + 45 + 108$$
$$a_{10} = 155$$

Portanto, como $2.52 = 104 < 155 < 3.52 = 156$, precisa-se, no mínimo, de 3 baralhos com 52 cartas.

Questão 5. Considere que os números naturais foram dispostos em uma espiral retangular, como mostra a figura 3.7 a seguir. Qual será o número que ocupará a vigésima posição na direção indicada? Determine a lei de formação da PA de 2ª ordem que está relacionada a esse problema.

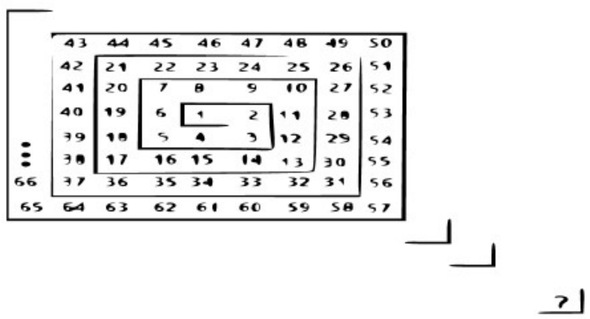


Figura 3.7: : Números Naturais em espiral retangular

Solução: Observando a lógica da figura 3.7, notamos a formação de uma sequência (a_n) dada por:

$$(1, 3, 13, 31, 57, ...)$$

As diferenças entre os termos consecutivos forma a sequência (b_n):

$$(2, 10, 18, 26, ...)$$

A sequência (b_n) é uma PA de primeira ordem, enquanto (a_n) é uma PA de segunda ordem. Logo, usamos o termo geral de uma PA de segunda ordem (proposição 2.5.1) para encontrar o termo a_{20}:

$$a_n = a_1 + b_1(n-1) + \frac{(n-1).(n-2)r}{2}$$

Substituindo cada termo na expressão acima, temos:

$$a_{20} = 1 + 2(20-1) + \frac{(20-1).(20-2)8}{2}$$
$$a_{20} = 1 + 38 + \frac{19.18.8}{2}$$
$$a_{20} = 1407$$

Portanto, o número que ocupa a vigésima posição é 1407

Vale salientar que esta maneira de resolver problemas de PA de segunda ordem aqui apresentada é apenas uma entre várias possibilidades. Por isso esperamos encontrar, também, outras estratégias nos registros feitos pelos participantes desta investigação.

Ademais, o conhecimento construído sob a ênfase da resolução de problemas deve favorecer a criatividade do aluno e auxiliá-lo na superação das dificuldades de compreensão dos conteúdos matemáticos. Essa metodologia também pode ser usada para a inserção de novos conhecimentos, afinal, conforme pensa Almeida (2009), sem um problema inicial, não há novos conhecimentos, e assim continua-se na segurança do que é conhecido.

3.4 Aplicação da sequência didática

Cada etapa da sequência didática foi explicada brevemente aos participantes. No total, foi dividida em quatro etapas correspondentes a 4 aulas de 50 minutos. No primeiro momento da primeira etapa (aula 1), foi aplicada a atividade diagnóstica. No segundo momento dessa primeira etapa, foram exibidos dois vídeos[1] (em datashow) sobre sequências numéricas. Para provocar o primeiro contato dos alunos com o tema deste trabalho,

[1]MATEMÀTICA e Natureza. Youtube, Hero X Cast – Anime e Cultura Nerd. 2012. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=XjOUoLfoLo8&t=34s. Acesso em 05 dez. 2021.

foi solicitada uma pesquisa na internet sobre progressões aritméticas de ordem superior, a fim de suscitar um entendimento inicial. Essa pesquisa foi pauta de discussão na etapa seguinte.

Iniciamos a segunda etapa fazendo uma discussão sobre o que os alunos haviam entendido a respeito do tema Progressões Aritméticas de Ordem Superior. Percebeu-se um cenário no qual muitos mostraram dificuldade de compreensão, que já era esperado, haja vista que o pesquisador já havia percebido na atividade diagnóstica algumas fragilidades na aprendizagem das progressões aritméticas (de 1ª ordem). Assim, a fim de eliminar tais fragilidades e construir aquilo que Ausubel chama de *Conceito Subsunçor*, foi retomada uma discussão acerca das noções básicas de PA, com auxílio de material impresso (em apêndice D) usado pelos alunos.

Na terceira etapa foi apresentada a definição de PA de segunda ordem, seguida de exemplos e problemas que foram resolvidos pelos alunos com auxílio do professor (em apêndice D). Para finalizar esta etapa, foi solicitada uma nova tarefa: pensar e/ou pesquisar uma situação que possa ser modelada por meio de uma progressão aritmética, preferencialmente de ordem superior, para apresentar em grupo. Os alunos puderam consultar a internet durante a realização desta atividade.

Na quarta e última etapa, foi aplicada a atividade avaliativa final da sequência didática, de forma individual, a qual foi realizada dentro do tempo da aula (50 minutos), ainda que alguns tenham deixado questões sem respostas por, segundo eles, não saberem como responder.

Assim, espera-se que, ao final da aplicação desta sequência didática, os instrumentos avaliativos utilizados, aliados aos procedimentos e etapas interligadas entre si, possam refletir um processo de aprendizado mais significativo, por meio do qual o estudante amplie e atualize seus conhecimentos e que se possam atribuir novos significados a seus conhecimentos sobre progressões aritméticas. Afinal, parafraseando Moreira (1999), a aprendizagem significativa é um processo por meio do qual uma nova informação relaciona-se, de maneira substantiva (não-literal) e não-arbitrária, a um aspecto relevante da estrutura de conhecimento do indivíduo.

O capítulo seguinte traz o resultado das análises dos dados coletados com base nos 13 protocolos assim identificados: (A_1), (A_2), (A_3), (A_4), (A_5), ... ,(A_{12}), (A_{13}).

Capítulo 4

ANÁLISE DOS DADOS

Neste capítulo, analisaremos os dados recolhidos das respostas dadas pelos alunos do 2º ano do ensino médio às atividades propostas. Começaremos analisando os registros referentes às atividades diagnósticas (atividade A e atividade B – em apêndice A) a fim de contemplar o objetivo inicial desse estudo, que é identificar o entendimento revelado pelos alunos no que tange aos conceitos básicos das sequências numéricas e progressões aritméticas. Além disso, esses primeiros dados trazem para o pesquisador um retrato daquilo que já foi construído na estrutura cognitiva de cada aluno, isto é, seus conhecimentos prévios sobre o objeto de estudo, servindo, portanto, como contributo para a promoção de adequações e adaptações das atividades subsequentes da sequência didática.

Para verificar se o objetivo final almejado na sequência didática foi contemplado, isto é, a aprendizagem significativa das PA's de ordem superior, faremos a análise das respostas referentes às questões da atividade avaliativa final da referida sequência. Buscaremos revelar o entendimento dos alunos sobre os conceitos inerentes ao referido conteúdo, identificar índices de erros e acertos, o tipo de estratégia utilizada na resolução de problemas e, com isso, conjecturar sobre os novos aprendizados desse conteúdo desconhecido para alunos do 2º ano do ensino médio. Além disso, relativamente, poder-se-á avaliar a aprendizagem significativa proposta por Ausubel, como produto da aplicação dessa sequência didática.

4.1 Atividades diagnósticas

Ausubel deixa evidente a importância de traçarmos um diagnóstico sobre os conhecimentos prévios do aluno, antes de apresentarmos um conteúdo novo. Para ele, “se quiséssemos reduzir a psicologia educacional a um único princípio, diríamos: O fator singular mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já conhece. Descubra isto e ensine-o de acordo”Ausubel (1980). Portanto, identificar tais conhecimentos e organizar aulas de acordo com aquilo que o aluno já sabe, vai facilitar o processo de interligação de conhecimentos e o seu armazenamento na estrutura cognitiva.

Assim, neste primeiro momento, buscaremos trazer o entendimento inicial dos alunos a respeito dos conceitos básicos de sequências numéricas e progressões aritméticas por meio da análise do registro das respostas às indagações da atividade A (em apêndice A): *Para você, o que são sequências numéricas? Para você, o que é progressão aritmética (PA)*?

Por conseguinte, na atividade B (em apêndice A), buscaremos identificar as fissuras no aprendizado do referido conteúdo, destacando os índices de erros e acertos. Almejamos também encontrar indícios que apontem os conhecimentos prévios que farão a ponte de ligação com os novos saberes. Assim, na elaboração e aplicação dos exercícios e problemas que constam nessa atividade B, partimos do mais simples para o mais complexo, elevando gradativamente o nível de habilidades e competências requeridas, a fim de poder extrair dados que indiquem níveis de domínio e de aprendizados das progressões.

4.1.1 Compreensão sobre sequências numéricas e progressões aritméticas

Compreender um conceito matemático envolve diversos aspectos que se revelam no entendimento sobre números, quantidades, algoritmos, etc.. Assim, na tentativa de explorar o conhecimento que alunos do 2º ano possuem sobre sequências numéricas, foi formulada a seguinte questão: *“Para você, o que são sequências numéricas?”*.

Ao analisar as respostas, encontramos uma diversidade de entendimentos sobre sequências, identificados por meio das seguintes categorias: *entendimento revelado a partir de um exemplo; definição que envolve um significado matemático associado exclusivamente à ideia de sequência de números; definição que envolve um significado matemático* *associado à ideia de sequência de números, com exemplo dado; definição que envolve um significado matemático associado à ideia geral de sequência (não necessariamente numérica).*

A Tabela 4.1, a seguir, apresenta os entendimentos revelados com base nessas categorias.

Tabela 4.1: Diferentes entendimentos revelados sobre sequências numéricas.

Descrição das Categorias - situações	Descrição dos entendimentos revelados
Entendimento revelado a partir de um exemplo	*"1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10"* (A_8)
Definição que envolve um significado matemático associado exclusivamente à ideia de sequência de números	*"São sequências de números independente da ordem, valores e sequências. São números em uma ordem específica"* (A_1)
	"Sequência de números com algum sentido" (A_2)
	"São sequências de números independente da ordem," (A_4)
	"São sequências de números dependendo da ordem" (A_6)
	"É uma sequência de números" (A_9)
	"É uma sequência infinita de números" (A_7)
	"É um conjunto de números ordenados" (A_{10})
	"São sequências feitas por números" (A_5)
Definição que envolve um significado matemático associado exclusivamente à ideia de sequência de números, com exemplo dado.	*"São números que seguem uma ordem que tenha um padrão pré-estabelecido" Ex: (2, 4, 6, 8, 10, ...)"* (A_{11})
	"São sequências feitas por números. Ex: 1, 2, 3, 4." (A_3)
	"São números que seguem uma ordem Ex: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8... um padrão pré-estabelecido" (A_{13})
Definição que envolve um significado matemático associado à ideia geral de sequência (não necessariamente numérica)	*"A sequência aparece em várias situações cotidianas, podem ser dos dias da semana, dos meses do ano..."*. (A_{12})

Fonte: Dados da Pesquisa

Conseguir expressar matematicamente o entendimento sobre determinados conceitos, sobretudo de maneira formal e com o rigor da simbologia matemática, pode ser um desafio até mesmo para estudiosos da área. Para alunos de ensino médio, naturalmente, torna-se mais acentuado o desafio para desenvolver tal competência. Nesse nível de ensino, nota-se que muitas vezes o sujeito compreende uma definição, mas não consegue explicá-la com a mesma facilidade.

Nesse sentido, avaliar aquilo que o aluno diz, ou quis dizer, requer cautela e uma certa subjetividade para não incorrer no erro de subestimá-lo. Na tabela acima percebemos que o aluno (A_8) usa apenas um exemplo para expressar o seu entendimento sobre o que são sequências numéricas. Contudo, embora ele não tenha usado a notação matemática adequadamente e tampouco uma definição formal, não se pode dizer que ele desconhece o conteúdo sobre o qual foi indagado, pelo contrário, ele revela certo entendimento ao construir uma sequência numérica usando os números naturais, de 1 a 10, ainda que não tenha conseguido (ou tentado) defini-la em palavras.

Por outro lado, os alunos (A_{11}), (A_3) e (A_{13}) vão mais longe, uma vez que, além de apresentarem um exemplo, definem em palavras, com certa coerência, sequências numéricas. O Aluno (A_{12}) apresenta uma definição que envolve um significado matemático associado à ideia geral de sequência, citando os dias da semana e os meses do ano como exemplo. De modo geral, constatamos que todos os alunos mostraram ter alguma noção ao menos no que se refere à definição intuitiva de sequências numéricas.

Ainda com enfoque no pensar dos sujeitos, foi formulada a seguinte questão: *"Para você, o que é progressão aritmética (PA)?"*. Como pode ser observado na tabela 4.2 a seguir, novamente categorizamos os diversos entendimentos: *definição que envolve um significado matemático associado à ideia de sequência ordenada de números ímpares ou pares; definição que envolve um significado matemático associado exclusivamente à ideia de sequência numérica que possua uma razão (r); definição incompleta que envolve um significado matemático de natureza geral; definição que envolve um significado matemático incoerente.*

Tabela 4.2: : Diferentes entendimentos revelados sobre progressão aritmética.

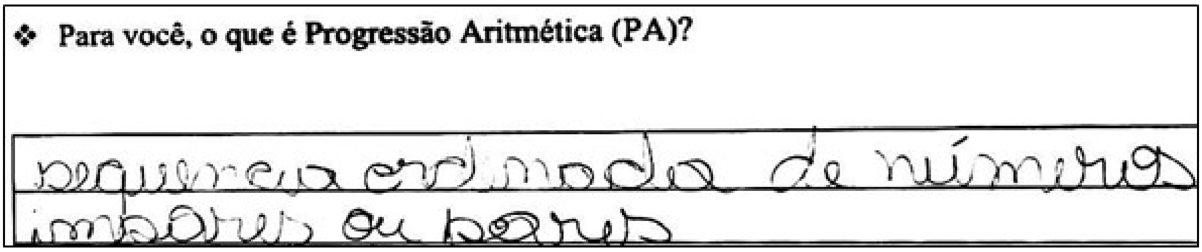
Descrição das Categorias - situações	Descrição dos entendimentos revelados
Definição que envolve um significado matemático associado à ideia de sequência ordenada de números ímpares ou pares	*"Sequência ordenada de números ímpares ou pares"* (A_2)
Definição que envolve um significado matemático associado exclusivamente à ideia de sequência numérica que possua uma razão (r)	*"É quando a sequência numérica tem uma razão"* (A_{13})
	"É uma sequência de números que a partir do segundo é igual à soma do número anterior com uma razão (A_{10})
	"É uma sequência na qual a cada termo a partir do segundo é igual à soma termo anterior com uma constante (r)" (A_{12})
	"É quando uma sequência numérica tem uma razão" (A_{11})
Definição incompleta que envolve um significado matemático de natureza geral	*"É uma sequência numérica que segue uma determinada ordem"* (A_3)
	"É uma progressão que segue uma ordem" (A_7)
Definição que envolve um significado matemático incoerente	*"É quando a soma dos últimos números é igual ao próximo número"* (A_9)
	"É quando os termos estão na ordem sequência" (A_6)
	"É uma sequência numérica em cada termo" (A_4)
	"É uma sequência numérica em cada termo" (A_5)
	"São várias sequências numéricas em cada termo" (A_8)
	"É uma sequência numérica em cada termo" (A_1)

Fonte: Dados da Pesquisa

O material até aqui coletado é de grande importância para avaliarmos o conhecimento dos alunos, uma vez que procura revelar um aspecto que é um pouco negligenciado: as noções que os alunos apresentam sobre o que vem a ser o conceito de progressão aritmética e os significados a ele atribuídos.

No entanto, vale reiterar que é preciso ter cuidado na interpretação sobre o que expressa o investigado para não subestimar sua competência. Assim, a leitura e categorização dos seus entendimentos aconteceram de forma cautelosa, buscando identificar um indicador de um domínio que pode não estar explicitado em seus escritos.

Nesse contexto, notamos que a resposta dada por (A_2), a seguir, conquanto não apresente uma definição completa e formal sobre progressões aritméticas, revela que o aluno tem pelo menos noção do que significa uma PA quando a define como "sequência ordenada de números ímpares ou pares".

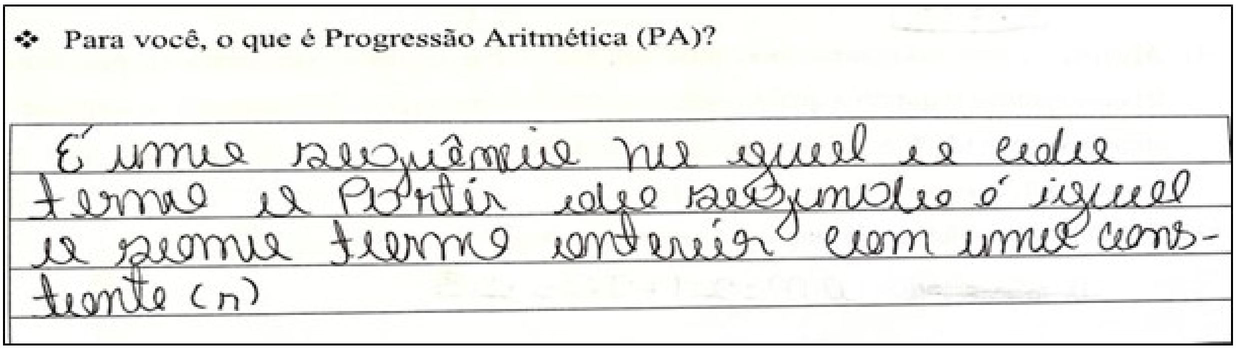

❖ **Para você, o que é Progressão Aritmética (PA)?**

sequencia ordenada de números impares ou pares

Figura 4.1: : Resposta do aluno (A_2) – *"sequência ordenada de números ímpares ou pares"*.

Aqui imaginamos que o aluno argumenta implicitamente e transmite a mensagem de que a sequência formada pelos números ímpares é uma PA, assim como a sequência formada pelos números pares é também uma PA. Assim sendo, mesmo não apresentando o conceito completo sobre o que se pede, pode-se conjecturar que ele pensa em dois exemplos clássicos de PA, que geralmente são trabalhados em sala de aula quando da introdução do assunto.

Entre os 13 participantes, 4 mostraram uma definição mais completa sobre progressões aritméticas e suas respostas figuram a categoria *"definição que envolve um significado matemático associado exclusivamente à ideia de sequência numérica que possua uma razão (r)". Como podemos observar na resposta dada por (A_{12}) abaixo:*


❖ Para você, o que é Progressão Aritmética (PA)?

É uma sequência na qual a cada termo a partir do segundo é igual a soma termo anterior com uma constante (r)

Figura 4.2: : Resposta do aluno (A_{12}).

De fato, o aluno não apenas compreende o que é uma PA como também a define corretamente e de maneira semelhante à definição dada por alguns livros didáticos, como o de Iezzi (2012), que afirma que "uma P.A. é uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, é a soma do anterior com uma constante r dada" (IEZZI, 2013, p. 6).

4.1.2 Desempenho e dificuldades dos alunos

Conforme a teoria da aprendizagem significativa, que fundamenta este trabalho, é essencial que o professor identifique o que a turma efetivamente já sabe sobre o que será tratado antes se iniciar efetivamente a abordagem do conteúdo, ou seja, aquilo que o aprendiz já sabe é um fator preponderante para a aprendizagem. David Ausubel (1980) ratifica esse pensamento quando chama de ideia-âncora o que o aluno já sabe e reconhece esse saber como a ponte para a construção de um novo conhecimento por meio da reconfiguração das estruturas mentais existentes ou da elaboração de outras novas.

Partindo dessa premissa, buscamos desvendar os conhecimentos prévios dos sujeitos participantes da sequência didática antes de iniciar efetivamente a abordagem do conteúdo novo (progressão aritmética de ordem superior). A seguir, trazemos algumas tabelas que reproduzem os dados coletados a esse respeito.

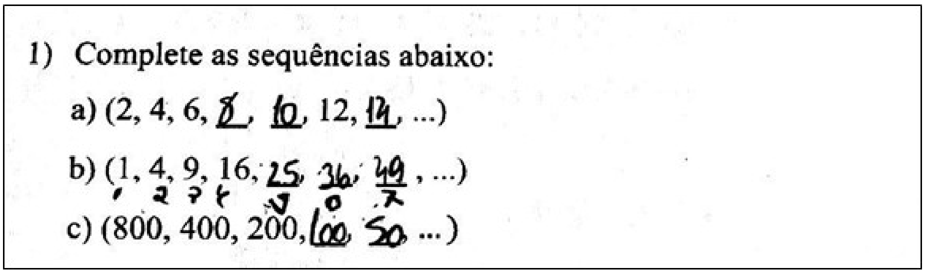
Antes de trazermos uma abordagem qualitativa dos dados, apresentamos na tabela 4.3, a seguir, o desempenho dos alunos por questão, na atividade B. Nela podemos observar o número de respostas corretas, parcialmente corretas e incorretas em cada questão.

Tabela 4.3: Desempenho por questão.

Questões	**resp. corretas**	**resp. parcialmente corretas**	**resp. incorretas**
Questão 1	9	4	0
Questão 2	0	5	8
Questão 3	7	0	6
Questão 4	0	4	9
Questão 5	7	3	3
Questão 6	0	1	12
Questão 7	0	5	8
Total	23	22	46

Fonte: Dados da Pesquisa

Consideramos como resposta correta aquela em que, independentemente da estratégia utilizada, o aluno encontrou a solução do problema ou, nas questões mais subjetivas – em que foi solicitada uma justificativa para a resposta –, o aluno respondeu e justificou usando argumentos matemáticos coerentes com o que se pediu. Nesse contexto, a resposta o aluno (A_{11}) para a questão 1, na imagem abaixo, foi considerada correta.



1) **Complete as sequências abaixo:**

a) (2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ...)

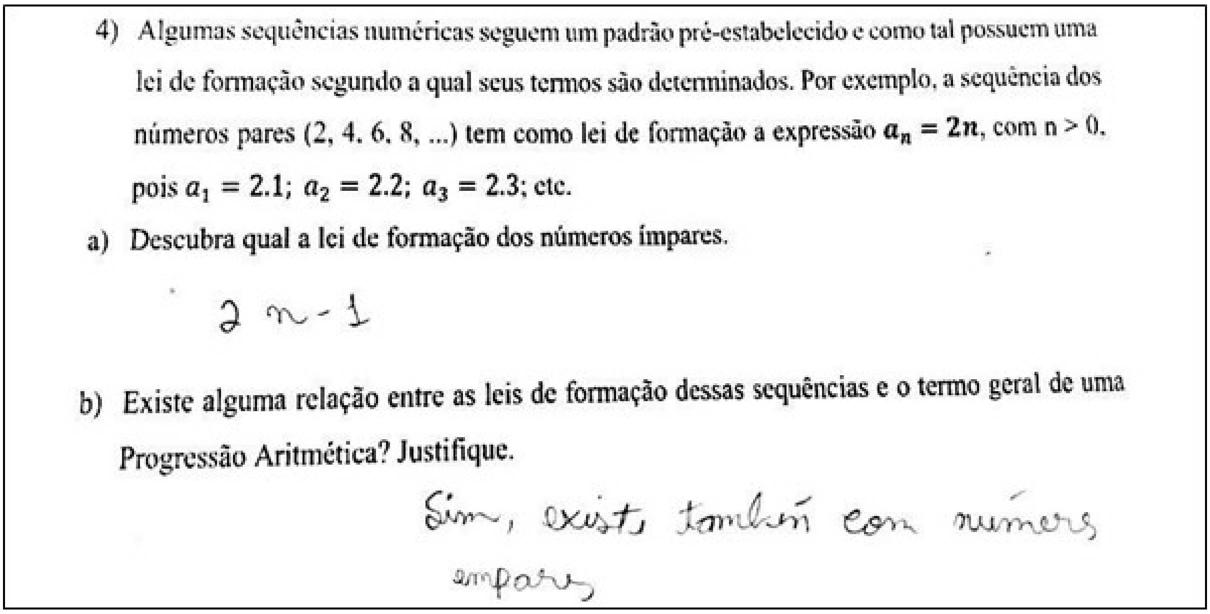
b) (1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, ...)

c) (800, 400, 200, 100, 50 ...)

Figura 4.3: : Resposta do aluno (A_{11}).

O aluno (A_{11}) responde corretamente aos três itens da questão 1.

Consideramos como resposta parcialmente correta aquela em que o aluno não registrou uma resposta completa e coerente para todos os itens solicitados na questão. Como exemplo, temos a resposta do aluno (A_7) para questão 4, a seguir.



4) Algumas sequências numéricas seguem um padrão pré-estabelecido e como tal possuem uma lei de formação segundo a qual seus termos são determinados. Por exemplo, a sequência dos números pares (2, 4, 6, 8, ...) tem como lei de formação a expressão $\boldsymbol{a_n = 2n}$, com n > 0, pois a_1 = 2.1; a_2 = 2.2; a_3 = 2.3; etc.

a) Descubra qual a lei de formação dos números ímpares.

2 n - 1

b) Existe alguma relação entre as leis de formação dessas sequências e o termo geral de uma Progressão Aritmética? Justifique.

Sim, existe também com numeros ímpares

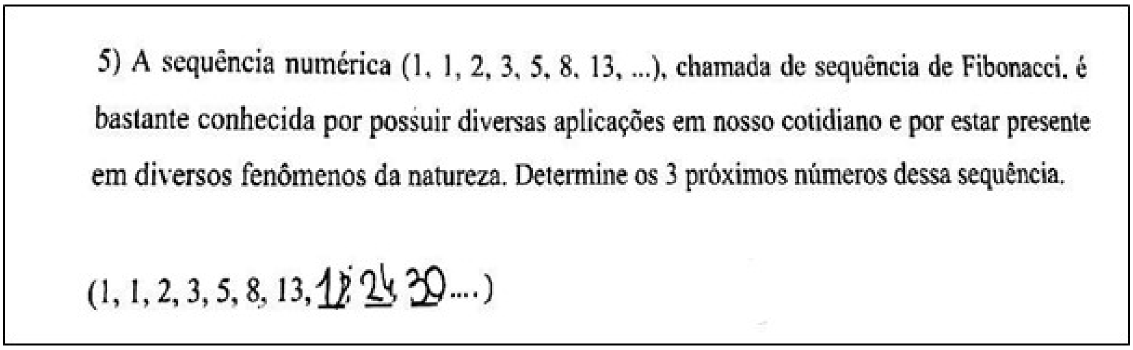
Figura 4.4: : Resposta do aluno (A_7).

Para o item (a) do problema 4, o aluno responde: "$2n - 1$". Aqui consideramos a resposta parcialmente correta, pois o aluno registra uma expressão numérica coerente e relacionada com a lei de formação solicitada, mas é notória a ausência de informações na notação utilizada.

Resposta correta do item (a): $a_n = 2n - 1$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

Já no item (b) da mesma questão, o aluno responde corretamente: "sim". Mas não justifica de forma coerente. Nesse item esperava-se encontrar na justificativa do aluno elementos que indicassem a percepção de que a sequência formada pelos números pares, bem como a sequência dos números ímpares são progressões aritméticas e que ele percebesse a semelhança entre suas respectivas leis de formação e o termo geral de uma PA qualquer.

Consideramos como resposta incorreta aquela em que o aluno registrou uma resposta incoerente com o que foi solicitado e não encontrou a solução final ideal para o problema ou o deixou em branco. Na questão 5, o aluno (A_{12}) registrou uma resposta incorreta.



5) A sequência numérica (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...), chamada de sequência de Fibonacci, é bastante conhecida por possuir diversas aplicações em nosso cotidiano e por estar presente em diversos fenômenos da natureza. Determine os 3 próximos números dessa sequência.

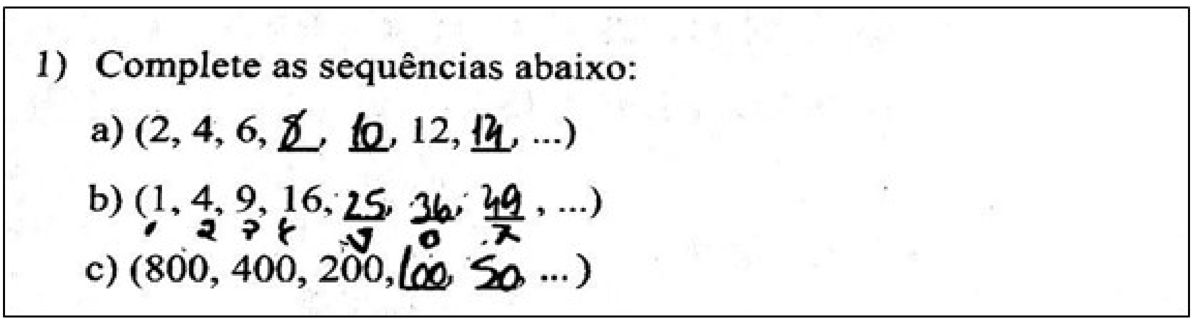
(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 17, 24, 30....)

Figura 4.5: : Resposta do aluno (A_{12}).

Resposta correta: 21, 34, 55.

Voltando aos dados da tabela 4.3, podemos fazer algumas inferências quanto aos níveis de conhecimento prévio dos alunos sobre o tema:

✓ Todos os alunos apresentaram uma resposta correta ou parcialmente correta para a questão 1 e isso mostra que todos detêm algum conhecimento sobre sequências numéricas e habilidades necessárias para reconhecer padrões e determinar seus termos, como em (A_{11});



1) Complete as sequências abaixo:

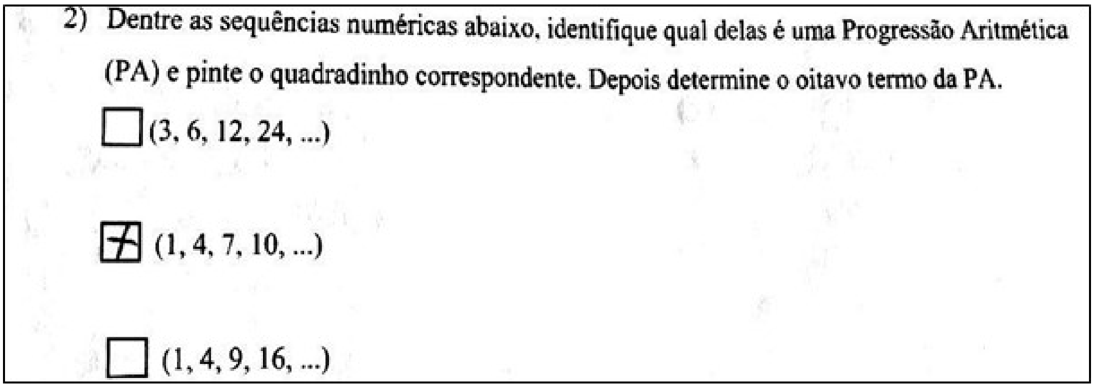
a) (2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ...)

b) (1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, ...)

c) (800, 400, 200, 100, 50 ...)

Figura 4.6: : Resposta do aluno (A_{11}).

✓ Na questão 2, tivemos apenas 5 respostas parcialmente corretas e nenhuma correta. Logo, o que chama a atenção é que, conquanto os sujeitos consigam identificar a PA corretamente, falta-lhes habilidade para encontrar um determinado termo, mostrando, portanto, que, apesar de saberem distinguir as sequências que são PA's das que não são, não conseguem aplicar ou não lembram da fórmula do termo geral, tampouco usam o raciocínio lógico para encontrar o termo solicitado, como vemos em (A_{12})


2) Dentre as sequências numéricas abaixo, identifique qual delas é uma Progressão Aritmética (PA) e pinte o quadradinho correspondente. Depois determine o oitavo termo da PA.

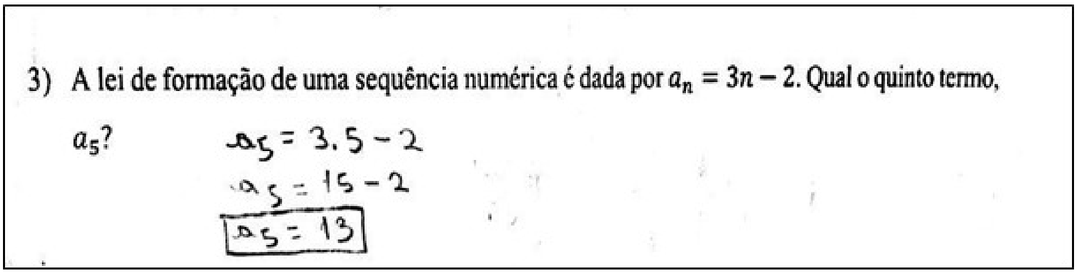
☐ (3, 6, 12, 24, ...)

☒ (1, 4, 7, 10, ...)

☐ (1, 4, 9, 16, ...)

Figura 4.7: : Resposta do aluno (A_{12}).

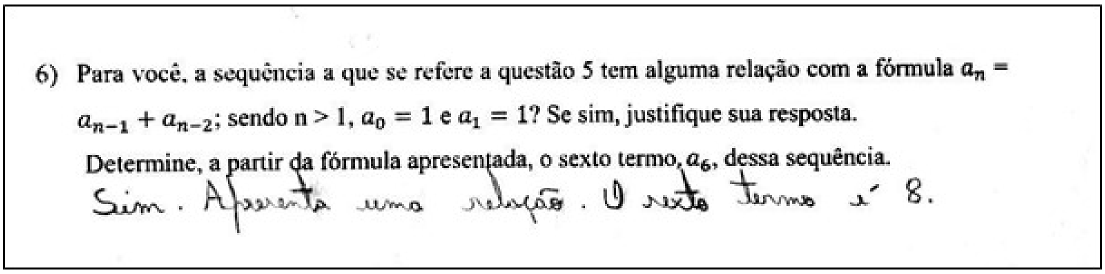
✓ Na questão 3, a maioria dos alunos mostrou habilidades e competências para encontrar um determinado termo da sequência numérica mediante uma lei de formação dada. Observemos em (A_3);


3) A lei de formação de uma sequência numérica é dada por $a_n = 3n - 2$. Qual o quinto termo, a_5?

$a_5 = 3.5 - 2$
$a_5 = 15 - 2$
$\boxed{a_5 = 13}$

Figura 4.8: : Resposta do aluno (A_3).

✓ Chama a atenção o fato de, apesar de a maioria ter mostrado habilidades para aplicar a lei de formação de uma sequência no cálculo de um determinado termo, como na questão 3, nenhum aluno mostrou as mesmas habilidades quando a lei de formação é dada por recorrência, como na questão 6, em que nenhuma resposta correta foi registrada e a única resposta parcialmente correta foi obtida, aparentemente, através de cálculo mental.



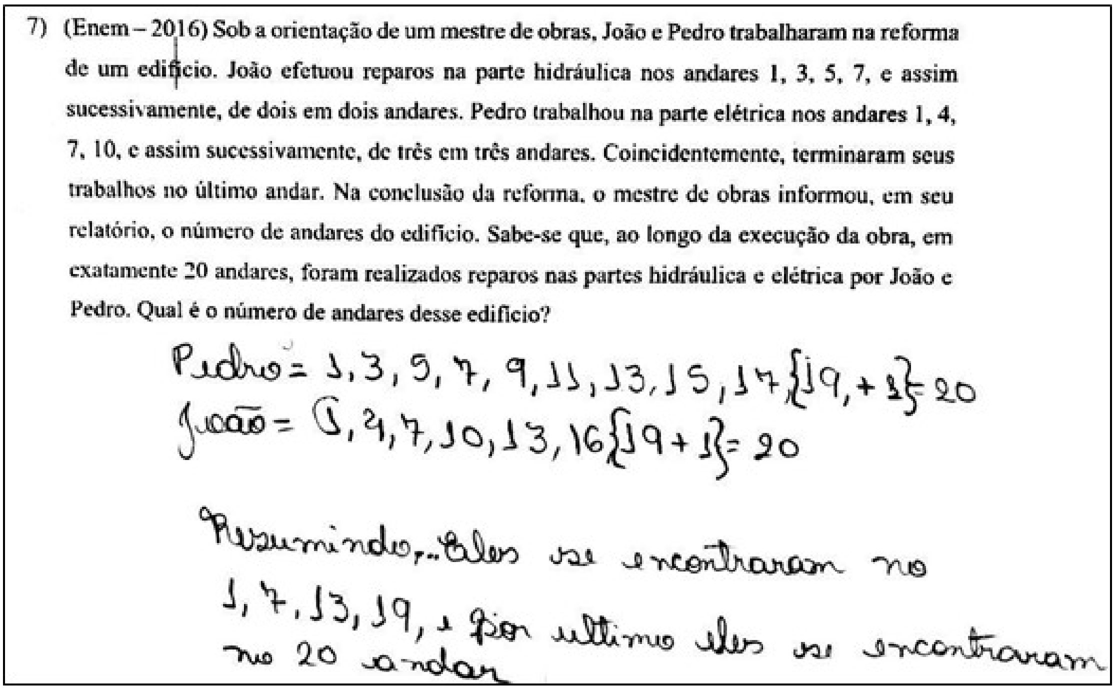
6) Para você, a sequência a que se refere a questão 5 tem alguma relação com a fórmula $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$; sendo n > 1, $a_0 = 1$ e $a_1 = 1$? Se sim, justifique sua resposta.

Determine, a partir da fórmula apresentada, o sexto termo, a_6, dessa sequência.

Sim. Apresenta uma relação. O sexto termo é 8.

Figura 4.9: : Resposta do aluno (A_3).

✓ Na questão 7, não verificamos resposta correta, o que nos permite conjecturar que os alunos encontram bastante dificuldade diante de um problema de PA contextualizado, que exige habilidades para interpretar, usar o raciocínio lógico e aplicar conceitos e fórmulas. Embora alguns tenham registrado as PA's presentes no problema e usado de forma coerente uma estratégia de resolução, eles não conseguiram chegar ao resultado final correto. O aluno (A_{10}) foi um dos que identificaram as PA's corretamente, mas não usou a estratégia adequadamente na resolução.



7) (Enem – 2016) Sob a orientação de um mestre de obras, João e Pedro trabalharam na reforma de um edifício. João efetuou reparos na parte hidráulica nos andares 1, 3, 5, 7, e assim sucessivamente, de dois em dois andares. Pedro trabalhou na parte elétrica nos andares 1, 4, 7, 10, e assim sucessivamente, de três em três andares. Coincidentemente, terminaram seus trabalhos no último andar. Na conclusão da reforma, o mestre de obras informou, em seu relatório, o número de andares do edifício. Sabe-se que, ao longo da execução da obra, em exatamente 20 andares, foram realizados reparos nas partes hidráulica e elétrica por João e Pedro. Qual é o número de andares desse edifício?

Pedro = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 {19, + 1} = 20

João = 1, 4, 7, 10, 13, 16 {19 + 1} = 20

Resumindo,.. Eles se encontraram no 1, 7, 13, 19, e por ultimo eles se encontraram no 20 andar

Figura 4.10: : Resposta do aluno (A_{10}).

De modo geral, podemos inferir que a turma se encontra em um nível de conhecimento relativamente raso sobre o conteúdo em enfoque e, ainda que a maioria tenha demonstrado conhecer as noções básicas de sequências e progressões aritméticas, como identificar padrões, determinar termos e reconhecer uma PA, por exemplo, faltam-lhes habilidades e competências para interpretar um problema, usar o termo geral, compreender fórmulas de recorrências, encontrar leis de formação, etc.

A problemática inerente à ausência dessas habilidades e competências pode ser entendida como indício de defasagem escolar, haja vista que, conforme a BNCC (2017), nessa etapa de ensino o aluno deve utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

A tabela 4.4, abaixo, traz o desempenho por aluno e expressa a quantidade de respostas corretas, parcialmente corretas e incorretas. Observa-se que basicamente não há alunos que tenham demonstrado pleno domínio de conteúdo, o que reforça a necessidade de criar os chamados organizadores prévios.

Tabela 4.4: Desempenho por aluno.

Participantes	**resp. corretas**	**resp. parcialmente corretas**	**resp. incorretas**
A_1	2	1	4
A_2	2	2	3
A_3	3	1	3
A_4	2	1	4
A_5	1	1	5
A_6	1	1	5
A_7	1	2	4
A_8	0	2	5
A_9	3	0	4
A_{10}	1	3	3
A_{11}	3	2	2
A_{12}	1	3	3
A_{13}	3	3	1
Total	23	22	46

Fonte: Dados da Pesquisa

Após traçar esse diagnóstico o pesquisador/professor buscou construir aquilo que Ausubel chama de conceitos subsunçores para, posteriormente, estabelecer conecções entre tais conceitos e o objeto de estudo principal deste trabalho – as progressões aritméticas de ordem superior.

Para tanto, fora desenvolvida uma série de atividades diversificadas tais como: apresentação de vídeos em datashow; aulas expositivas nas quais se utilizou o quadro branco; leitura e estudo de material impresso elaborado pelo próprio pesquisador; resolução de exercícios e problemas; além de debates e discussões entre os alunos, sob mediação do pesquisar, que visaram socializar aprendizados e retirar dúvidas.

Essas atividades precederam, portanto, a abordagem do objeto de estudo principal deste trabalho: progressões aritméticas de ordem superior, com ênfase na 2ª ordem. Sobre esse novo e desconhecido conteúdo, ressalta-se que houve muitas inquietações verbalizadas pelos alunos. Entretanto, cumpre relatar que a inviabilidade para registrar as falas em áudio, durante discussões e debates em sala de aula, impossibilita sua transcrição neste trabalho e, primando pela clareza e fidelidade dos dados para com a realidade observada, decidimos não reproduzir esse material com base apenas nas anotações e observações do pesquisador. Não obstante, acreditamos que os dados coletados a partir dos registros escritos dos participantes, tanto na atividade diagnóstica já discutida quanto na atividade avaliativa final a seguir, mostrar-se-ão suficientes para cumprir os objetivos desta investigação.

4.2 Atividade avaliativa final

Nesta seção trazemos a análise e discussão dos escritos dos alunos inerentes à atividade avaliativa final da sequência didática. Essa atividade, tal como fora apresentada no capítulo 3 deste trabalho, é composta de 5 questões – sendo a primeira questão aberta e de cunho pessoal, a segunda consta de um exercício de fixação de simples resolução e as três últimas são problemas contextualizados e relativamente mais complexos. Assim, abordamos, a princípio, a concepção de alunos do 2º ano do ensino médio a respeito do nosso objeto de estudo: progressões aritméticas de segunda ordem. No tocante aos problemas e exercícios propostos, dissertamos, por conseguinte, sobre os dados encontrados nos registros das respostas dos participantes – dados esses que serviram de fontes para inferências e possibilitaram constatações sobre diversos aprendizados construídos no decurso do processo de desenvolvimento das atividades da sequência didática.

4.2.1 Compreensão sobre progressões aritméticas de segunda ordem

Após diagnosticar os conhecimentos sobre sequências e progressões aritméticas (de primeira ordem), reafirmar e revisar as ideias sobre tal conteúdo, a fim de consolidálas, foi tarefa precedente à abordagem sobre PA de segunda ordem, visto que, consoante o que preconiza a aprendizagem significativa de Ausubel (1980), as ideias e os conceitos cristalizados na estrutura cognitiva do aprendiz, chamados subsunçores, vão interagir com os novos conceitos de modo a ancorá-los e possibilitar a atribuição de significado.

Assim, visando avaliar esses novos conhecimentos adquiridos mediante aplicação da sequência didática, à luz da teoria da aprendizagem significativa de Ausubel, montamos uma atividade avaliativa final. A primeira questão foca no pensar dos sujeitos, buscando revelar o entendimento expresso em palavras e exemplos. Portanto, em primeiro momento, foi formulada a seguinte questão: *"Para você, o que é Progressão Aritmética (PA) de 2ª ordem? Dê exemplo."* Aqui almejamos encontrar algum entendimento sobre a temática, seja na resposta direta à pergunta, seja no exemplo dado.

Ao fazer a leitura e análise das respostas, categorizamos os entendimentos dos alunos da seguinte maneira: *definição que envolve um significado matemático associado apenas à ideia de sequência numérica, sem exemplo ou com exemplo incorreto; definição que envolve um significado matemático associado apenas à ideia de sequência numérica, com exemplo correto; definição que envolve um significado matemático associado exclusivamente à ideia de PA de 2ª ordem, com exemplo correto; definição que envolve um significado matemático associado à ideia de PA de 1ª ordem, sem exemplo ou com exemplo incorreto.*

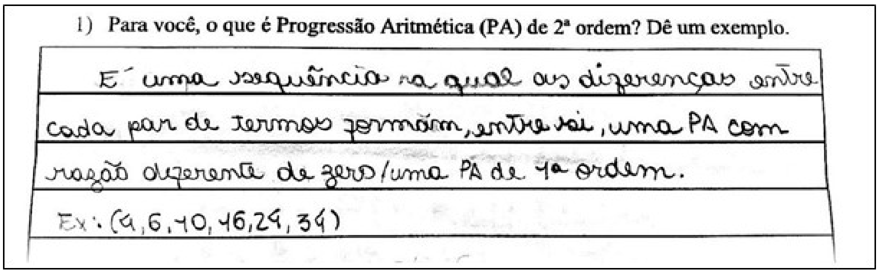
A Tabela 4.5, a seguir, apresenta os entendimentos revelados com base nessas categorias.

Tabela 4.5: Entendimento dos alunos sobre PA de 2ª ordem.

Descrição das Categorias - situações	**Descrição dos entendimentos revelados**
Definição que envolve um significado matemático associado apenas à ideia de sequência numérica, sem exemplo ou com exemplo incorreto.	*"Progressão aritmética é uma sequência numérica" Exemplo (2, 4, 6, 8, 10, 12, ...) (A_8).*
	"É uma sequência em que a diferença faz novos termos" (A_1).
Definição que envolve um significado matemático associado apenas à ideia de sequência numérica, com exemplo correto.	*"É uma sequência que forma uma PA de 1º grau." Ex; 4, 6, 10, 16. (A_3).*
	"Uma sequência de números." Exemplo: 1, 3, 7, 13, 21, 31 (A_7).
Definição que envolve um significado matemático associado exclusivamente à ideia de PA de 2ª ordem, com exemplo correto.	*"É uma sequência na qual as diferenças entre cada par de termos formam, entre si, uma PA com razão diferente de zero / uma PA de 1ª ordem." Ex: (4, 6, 10, 16, 24, 34). (A_{13})*
	"É a sequência na qual as diferenças entre cada par de termos entre si formam uma PA de 1ª ordem." (2, 5, 11, 20, 32, ...). (A_{11})
	"Sequência de números tal que as diferenças entre termos consecutivos é uma progressão aritmética." (4, 6, 11, 19, 30, 44). (A_{10})
	"Sequência de números tal que a diferença entre termos consecutivos é uma progressão aritmética." (4, 6, 11, 19, 30, 44). (A_4)
	"É uma sequência numérica em, quando subtraímos cada termo do anterior, a partir do segundo, encontramos os termos de uma PA não constante." Ex: os números poligonais. (A_9)
	"É uma sequência na qual as diferenças entre cada par de termos formam, entre si, uma PA com razão diferente de zero, isto é, uma PA de 1ª ordem.' Exemplo: (4, 6, 10, 16, 24, 34) é uma PA de 2ª ordem. (A_2)
Definição que envolve um significado matemático associado à ideia de PA de 1ª ordem, sem exemplo ou com exemplo incorreto.	*"Progressão aritmética é uma sequência numérica em que a diferença entre um termo e o seu anterior resulta sempre em um mesmo valor chamado de razão." (A_{12})*
	"É uma PA mais complicada e que sempre tem uma diferença entre dois termos consecutivos iguais." (A_5)
	"Progressão aritmética é uma sequência numérica em que a diferença entre um termo e o seu antecessor resulta sempre em um mesmo valor chamado de razão. Por exemplo, (2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, ...)." Razão (r) dessa sequência numérica é 2. (A_6)

Fonte: Dados da Pesquisa

A partir das respostas apresentadas na tabela acima, podemos inferir que a maioria dos alunos (8 no total) assimilaram ao menos as noções básicas do conteúdo proposto na sequência didática, visto que conseguiram citar exemplos de sequências de números que, de fato, representam termos de uma PA de 2ª ordem. Constatamos, ainda, que 6 desses alunos conseguem não apenas exemplificar, mas definir de maneira coerente o objeto matemático, uma vez que, além dos exemplos dados, eles registraram uma definição que envolve um significado matemático associado exclusivamente à ideia de PA de 2ª ordem, em consonância com a definição 2.5.2 apresentada em capítulo anterior – reitera-se que essa definição foi amplamente explorada durante aula expositiva. A figura 4.11 abaixo traz a resposta de um desses alunos.


1) Para você, o que é Progressão Aritmética (PA) de 2ª ordem? Dê um exemplo.

É uma sequência na qual as diferenças entre cada par de termos formam, entre si, uma PA com razão diferente de zero/uma PA de 1ª ordem.

Ex: (4, 6, 10, 16, 24, 34)

Figura 4.11: : Resposta do aluno (A_{13}) à questão 1.

Em contrapartida, vale ressaltar também que alguns alunos mostraram um possível desconhecimento sobre o que foi indagado, outros confundiram o conceito de PA de 1ª ordem com o conceito de PA de 2ª ordem, além de terem registrado exemplos incorretos. Isso não assegura, porém, uma realidade absoluta na qual inexista compreensão do conceito em questão por parte desses alunos (que são minoria), embora aponte indícios de que a dita aprendizagem significativa não tenha sido efetivamente alcançada – isso poderá ser ratificado (ou não) mediante análise das respostas às demais questões da atividade avaliativa.

4.2.2 Desempenho e estratégias utilizadas

As demais questões que compõem a avaliação final da sequência didática constam de um exercício de fixação (questão 2) e três problemas propostos nas três últimas questões. São problemas contextualizados, criteriosamente selecionados, que exigem dos sujeitos participantes mais do que o entendimento da ideia intuitiva de PA de segunda ordem e/ou a capacidade de distingui-la de outros tipos de sequência, mas exigem habilidades e capacidades para criar estratégias, pensar matematicamente e mobilizar os conceitos criados na estrutura cognitiva quando da realização das diversas atividades pedagógicas inerentes à sequência didática.

Assim, mediante a análise das respostas a essas questões, espera-se encontrar estratégias de resolução diversas, bem como outros elementos que possibilitem avaliar o desempenho dos sujeitos envolvidos, além de poder identificar quem conseguiu consolidar, de fato, a aprendizagem significativa.

Nessa perspectiva, decidimos dissertar sobre as questões da atividade avaliativa separadamente, visto que elas possuem propostas diferentes, sobretudo no que se refere ao nível de conhecimento requerido. A questão 2, inclusive, dada a sua natureza e metodologia de resolução, caracteriza-se mais como exercício de fixação do que como problema matemático propriamente dito, mas não deixa de ter a sua importância dentro do processo avaliativo, pois seu objetivo é averiguar, em nível mais elementar, se os participantes conseguem fazer distinção entre PA de segunda ordem e outros tipos de sequências numéricas. Nessa questão eles terão que indicar corretamente duas PA's de 2ª ordem, entre cinco sequências numéricas apresentadas, ou seja, a questão requer apenas que o aluno saiba identificar PA's de 2ª ordem. Assim sendo, foi formulada a seguinte questão:

Questão 2. *Identifique entre as sequências abaixo aquelas que são progressões aritméticas de segunda ordem.*

(a) (1, 2, 3, 4, 5, . . .)

(b) (1, 3, 6, 10, 15, . . .)

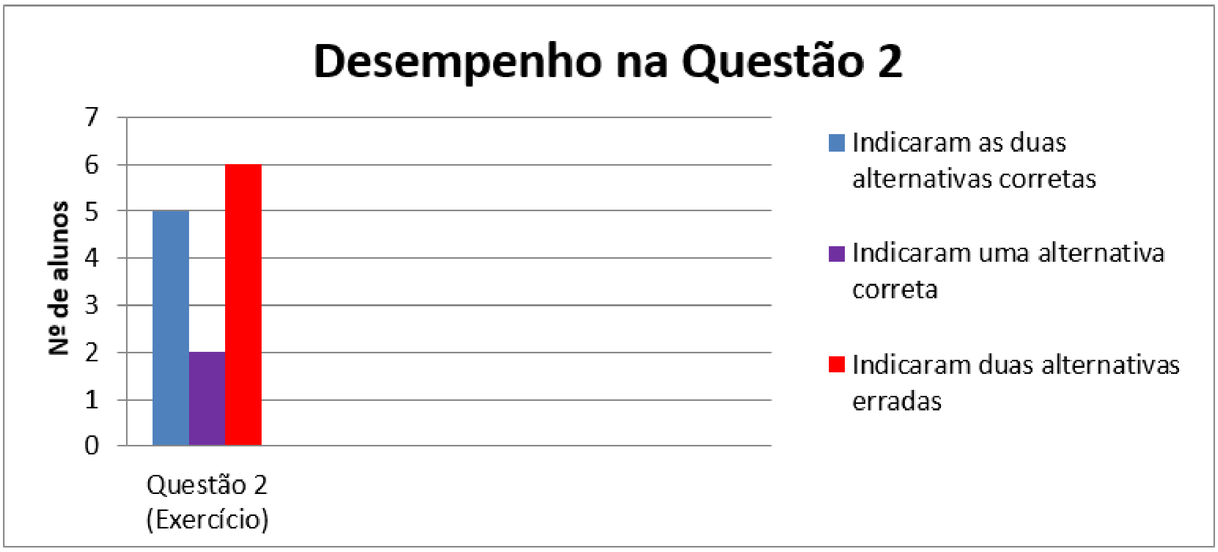
(c) (1, 2, 4, 8, 16, 32, . . .)

(d) (1, 4, 9, 16, 25, . . .)

(e) (1, 5, 9, 13, 17, . . .)

Conforme mostra o gráfico da tabela 4.6 a seguir, cinco alunos indicaram as duas alternativas corretas, o que nos permite constatar certo domínio dos conhecimentos que lhe foram exigidos na questão (descartando obviamente as chances remotas de terem acertado no "chute"). Dois alunos indicaram apenas uma das alternativas corretas – isso pode significar falta de atenção ao que é solicitado no enunciado e à possibilidade de existir mais de uma resposta correta, como também pode ser reflexo de erro de cálculo ou mesmo desconhecimento do assunto. Seis alunos marcaram as alternativas erradas, o que pressupõe falta de conhecimento sobre as noções básicas de PA de 2ª ordem, ratificando o que fora constatado na questão 1, na qual alguns alunos (minoria), de fato, revelaram pouco ou nenhum entendimento sobre o conteúdo.

Tabela 4.6: Gráfico de desempenho dos alunos na questão 2.



Fonte: Dados da Pesquisa

No campo da educação matemática são inúmeros os teóricos que defendem o uso de exercícios mais elaborados e contextualizados a fim de dar mais sentido aquilo que está sendo ensinado em sala de aula. Porém, isso não significa que os exercícios teóricos (também conhecidos como exercícios de fixação) devem ser eliminados do processo de ensino e aprendizagem, tampouco das avaliações, pois eles também aprimoram as habilidades exigidas e são essenciais ao aprendizado de técnicas operatórias e propriedades, além de auxiliar na familiarização das fórmulas, sobretudo em progressões aritméticas.

> ...não significa que os exercícios do tipo "calcule"..., "resolva"... devam ser eliminados, pois eles cumprem a função do aprendizado de técnicas e propriedades, mas de forma alguma são suficientes para preparar os alunos tanto para que possam continuar aprendendo, como para que construam visões de mundo abrangentes ou, ainda, para que se realizem no mundo social ou do trabalho (BRASIL, 1998, p.113).

Portanto, deixamos como sugestão para serem trabalhadas em sala de aula todas as questões aqui discutidas, sejam exercícios de fixação (como a questão anterior), sejam problemas contextualizados (como os que serão discutidos a seguir).

Na questão 3, composta dos itens a, b, c e d, temos um problema de PA de 2ª ordem envolvendo números poligonais, o qual exige, em sua resolução, múltiplos conhecimentos, competências e habilidades mediante o que se pede em cada um dos quesitos I, II e III.

Questão 3. *Os Números Poligonais são casos particulares de Números Figurados. Denominam-se Números Figurados aqueles que podem ser representados por uma construção geométrica de pontos equidistantes. Caso tal arranjo seja um polígono regular, esses números são chamados de Números Poligonais. As figuras abaixo (nos itens a, b, c e d) apresentam as sequências dos números chamados triangulares, quadrados, pentagonais e hexagonais, respectivamente. Analise os itens e em cada um deles:*

I – Indique se a sequência dos números poligonais é uma PA de 2ª ordem;

II – Desenhe a próxima figura da sequência (figura 6);

III – Encontre o termo a_{10}, que representa a décima figura, caso a sequência seja uma PA de 2ª ordem.

a)

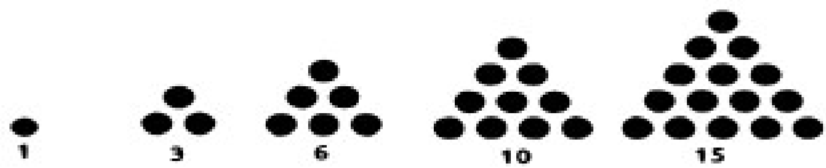


Figura 4.12: : Representação de Números Triangulares

b)

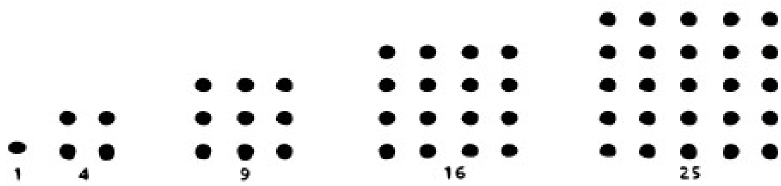


Figura 4.13: : Representação de Números Quadrangulares

c)

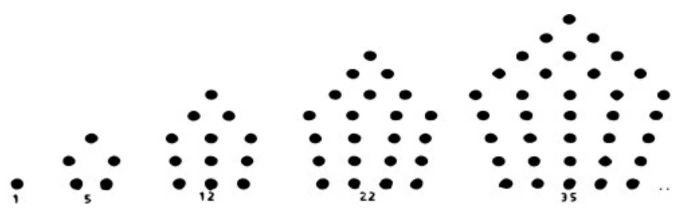


Figura 4.14: : : Representação de Números Pentagonais

d)

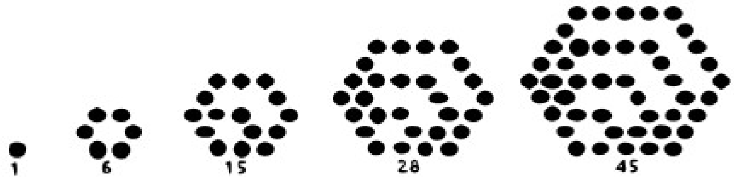


Figura 4.15: : Representação de Números Hexagonais

No quesito I, exige-se do aluno apenas o conhecimento para identificar uma PA de 2ª ordem. Já em II, exige-se mais do aluno, visto que ele precisa mobilizar habilidades e competências para interpretar representações icónicas (desenhos) associadas e determinar o termo seguinte em uma PA de 2ª ordem. Por fim, elevando o nível de complexidade no quesito III, o aluno precisa ter conhecimento sobre o termo geral de uma PA de 2ª ordem, bem como fazer o uso adequado de tal fórmula para chegar à solução ou usar o raciocínio lógico, cálculo mental e outras estratégias para encontrar a solução do problema.

Nesse contexto, levando-se em conta o que foi requerido em termos de conhecimento, habilidades e competências, pode-se olhar para os dados oriundos dos registros das respostas desse problema sob diversos ângulos e, assim, tecer inferências sobre níveis e possibilidades de aprendizados. A tabela 4.7, a seguir, traz o desempenho dos alunos em cada item da questão 3, especificando o quantitativo de respostas corretas, parcialmente corretas e incorretas, diante do que foi solicitado nos quesitos I, II e III.

Tabela 4.7: Desempenho dos alunos na questão 3.

QUESITOS	Questão 3												TOTAL		
	a)			b)			c)			d)					
	Cor	P.C	Inc	Cor	P.C	Inc	Cor	P.C	Inc	Cor	P.C	Inc	Cor	P.C	Inc
I	12	0	1	10	0	3	10	0	3	3	0	10	35	0	17
II	6	0	7	4	1	8	6	1	6	4	0	9	20	2	30
III	2	0	11	1	0	12	2	0	11	1	0	12	6	0	46
TOTAL	**20**	**0**	**19**	**15**	**1**	**23**	**18**	**1**	**20**	**8**	**0**	**31**	**61**	**2**	**93**

Cor = solução correta P.C = solução parcialmente correta Inc = solução incorreta

Fonte: Dados da Pesquisa

Como podemos observar na tabela acima, a grande maioria dos alunos responde corretamente ao que se pede no quesito I nos itens a, b e c, o que ratifica sua compreensão das noções básicas e intuitivas de PA de 2ª ordem e a competência para reconhecê-la, ainda que chame a atenção o fato de que essa maioria não a tenha reconhecido na configuração dos números hexagonais no item d. Ainda sobre esse quesito I, constatamos 35 respostas corretas e 17 incorretas no somatório de todos os itens (a, b, c e d).

À medida que se eleva o nível de cobrança nos quesitos II e III, evidentemente percebe-se um declínio no número de respostas corretas. Os dados referentes às respostas do quesito III, inclusive, remetem à falta de conhecimento sobre o termo geral de uma progressão aritmética de 2ª ordem, uma vez que, excetuando-se os registros de apenas um dos alunos, a fórmula sequer apareceu como tentativa nas respostas dos demais. Muitos relataram não lembrar do termo geral e outros não conseguiram relacioná-lo ao problema enquanto estratégia de solução.

Um dos dois alunos que conseguiram êxito no referido quesito, (A_{13}), relatou ter preferido a estratégia do cálculo mental a tentar usar a fórmula do termo geral, porque, segundo ele, não havia certeza quanto à escrita da fórmula e se conseguiria usá-la adequadamente. Segue na figura abaixo as respostas do aluno (A_{13}) para o item c.

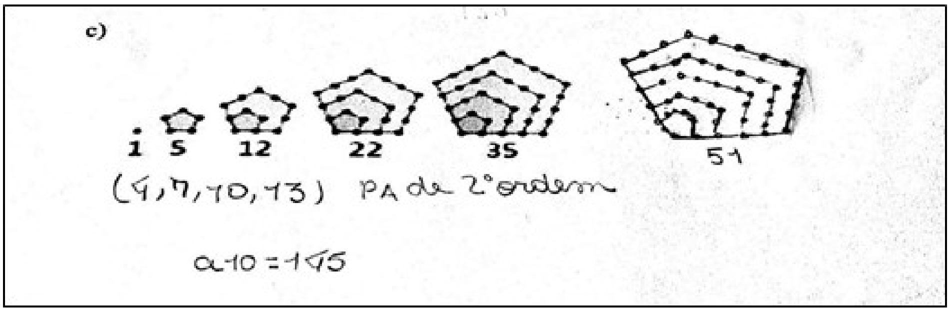


Figura 4.16: : Resposta do aluno (A_{13}) ao item c da questão 3.

A sequência $(4, 7, 10, 13)$ registrada pelo aluno pressupõe que foi feito cálculo mental das diferenças entre os termos consecutivos que representam cada figura e, a partir disso, feito o consequente registro "PA de 2ª ordem". O aluno também consegue desenhar a 6ª figura associando-a corretamente ao 6º termo da sequência (51) e depois encontra o 10º termo da PA de 2ª ordem, $a_{10} = 145$. Logo, conquanto o aluno não tenha usado o termo geral como estratégia de solução, pode-se afirmar que o aprendizado foi alcançado.

A questão 4, a seguir, é um problema típico de olimpíada, extraído do banco de questões da Fundação Getúlio Vargas (FGV) de 2008. De modo geral, o desafio para solucionar questões dessa natureza auxilia o desenvolvimento cognitivo do aluno, à medida que mobiliza o senso crítico para reconhecer relações, padrões e associar fórmulas, além de evidenciar o elo entre a matemática puramente teórica e a praticidade do conhecimento intrínseca à situação-problema.

Questão 4. *(FGV – 2008) A figura abaixo mostra castelos de cartas de 1, 2 e 3 andares. De quantos baralhos de 52 cartas precisamos, no mínimo, para construir um castelo de 10 andares*

Figura 4.17: : Castelo de Cartas, FONTE: FGV - 2008

Na tabela 4.8 abaixo, demos enfoque às estratégias utilizadas e ao desempenho dos alunos na questão 4.

Tabela 4.8: Estratégias utilizadas e desempenho dos alunos na questão 4.

ESTRATÉGIAS UTILIZADAS	QUESTÃO 4		
	Cor	P.C	Inc
Cálculo mental	0	7	1
Termo Geral da PA de 2ª ordem	2	0	0
Termo Geral da PA de 1ª ordem	0	1	0
Sem registro	0	0	2
Total	2	8	3

Cor = solução correta P.C = solução parcialmente correta Inc = solução incorreta

Fonte: Dados da Pesquisa

Nota-se na tabela que apenas 2 alunos conseguiram fazer o uso do termo geral da PA de 2ª ordem adequadamente, chegando à solução correta. Sobre as dificuldades para lidar com tal fórmula, conjecturamos algumas possibilidades: a falta de manejo com leis e fórmulas matemáticas dessa natureza, haja vista que a grande maioria das fórmulas trabalhadas no 2º ano e nas séries anteriores são mais curtas, com menos termos e naturalmente mais fáceis de memorizar e manusear; a problemática referente às bases, habilidades, competências e experiências para lidar com problemas que exigem interpretação, raciocínio e capacidade de relacionar fórmulas – essa problemática é inerente a toda a trajetória escolar e pode ter sido agravada pela interrupção das aulas por meses em virtude da pandemia da covid-19. Além disso, vale destacar que os alunos nunca tiveram acesso, especificamente, ao conteúdo proposto antes da aplicação da sequência didática, sequência essa que, com apenas 4 aulas, pode não ter sido suficiente para explorar a fundo e maturar esses conceitos menos simplórios.

Diante disso, a maioria dos alunos (8) optou pela estratégia do cálculo mental. 7 desses alunos acertaram parcialmente a questão, pois, apesar de terem chegado à solução final ideal, não foi possível identificar o raciocínio utilizado, sendo que alguns registraram justificativas e procedimentos metodológicos incoerentes. Nesse cenário, temos a resposta do aluno (A_{11}) a seguir.

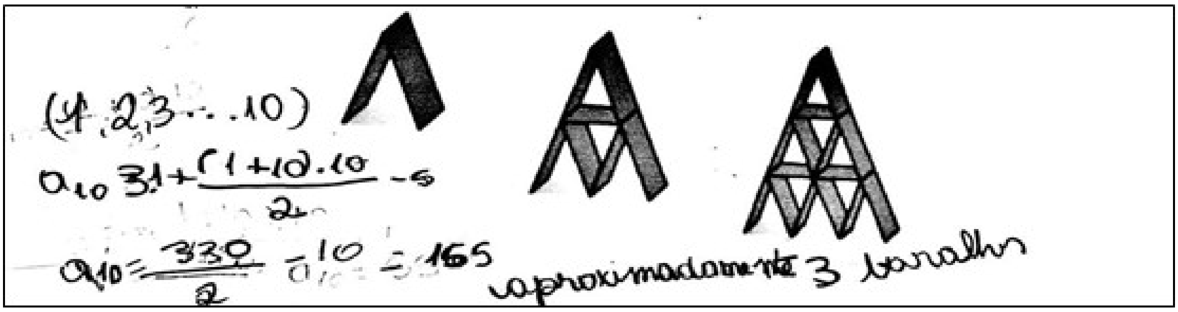


Figura 4.18: : Resposta do aluno (A_{11}) à questão 4.

Essa solução foi considerada parcialmente correta, pois o aluno encontra a solução final correta "$a_{10} = 155$"e responde de maneira coerente "aproximadamente 3 baralhos", mas não deixa claro o procedimento metodológico adotado, além de cometer erros de cálculos e, aparentemente, chegar à solução final de maneira arbitrária. É possível que o aluno tenha usado rascunho para anotar cálculos feitos mentalmente.

Na questão 5, o problema proposto integra o rol de problemas matemáticos que, além do conhecimento propriamente, exige que o aluno mobilize um leque variado de competências, a saber: selecionar variáveis essenciais para o modelo a construir; problematizar, isto é, formular o problema teórico na linguagem do campo matemático abarcado; conjecturar explicações dos fenômenos e formular hipóteses.

Questão 5. *Considere que os números naturais foram dispostos em uma espiral retangular, como mostra a figura a seguir. Qual será o número que ocupará a vigésima posição na direção indicada? Determine o termo geral da PA de 2ª ordem que está* *relacionada a esse problema.*

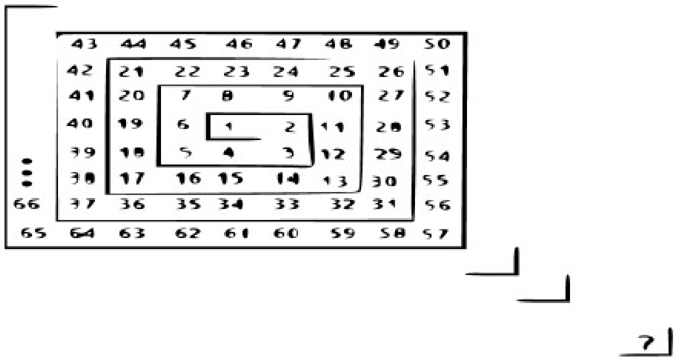


Figura 4.19: : Números Naturais em espiral retangular

Dos 13 alunos que responderam à atividade avaliativa, 9 registraram uma solução incorreta para este problema ou o deixaram em branco, os outros 4 acertaram parcialmente. A maior dificuldade apresentada está relacionada ao uso do termo geral de uma PA de 2ª ordem qualquer. Em consequência disso, nenhum aluno conseguiu determinar o termo geral associado a esse problema e isso corrobora a ideia de que a maior fissura no aprendizado do conteúdo abordado durante a aplicação da sequência didática, definitivamente, está atrelada ao uso do termo geral.

Ainda assim, vale destacar as estratégias e tentativas dos alunos que acertaram parcialmente a questão: dois desses alunos encontraram a solução final do problema, mas não identificam o termo geral associado; os outros dois registraram estratégias adequadas, identificando corretamente os termos da PA, mas não chegaram à solução final em virtude de erros procedimentais de cálculo. A resolução do aluno (A_9), abaixo, ilustra isso.

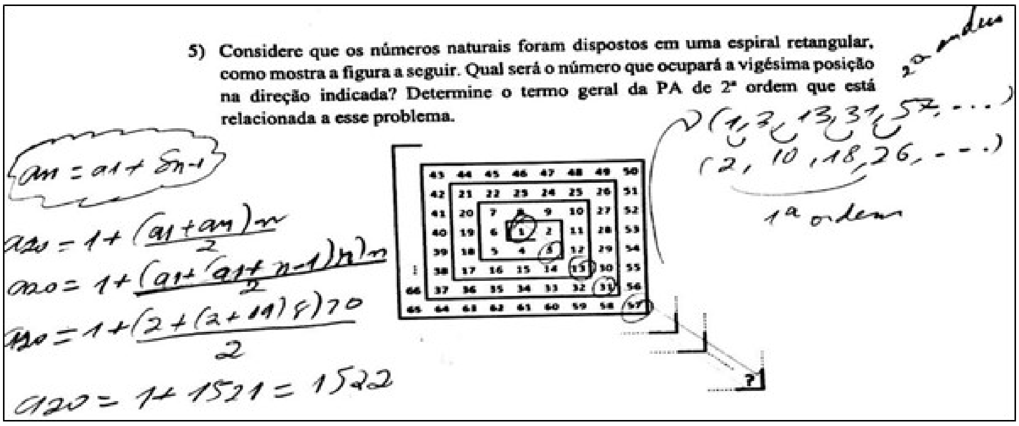


Figura 4.20: : Resposta do aluno (A_9) à questão 5.

Na estratégia adotada por (A_9) nesse problema, é possível reconhecer um plano de ação, numa determinada sequência, a fim de realizar a tarefa. É o que o psicólogo e matemático Gérard Vergnaud (1991) chama de esquema, ou seja, o próprio termo geral da PA de 2ª ordem constitui-se em um esquema. O aluno demonstra ter o reconhecimento das regras e dos procedimentos operatórios para chegar à solução, porém não revela conhecer o significado e as relações implícitas entre os termos. Segundo Vergnaud (1991), essas dificuldades estariam relacionadas sobretudo ao conjunto de invariantes operatórios, ou conhecimentos implícitos que o sujeito pode mobilizar para construir esquemas e atribuir significados. É nos esquemas que há indicação de elementos cognitivos que fazem com que a ação do sujeito seja operatória.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste último tópico do trabalho, apresentamos nossas considerações finais de acordo com a metodologia e com a análise do capítulo anterior, destacando os principais resultados da aplicação de uma sequência didática em uma turma de 2º ano do ensino médio à luz da teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel.

Buscando diagnosticar os conhecimentos prévios reveladas pelos alunos da referida turma sobre progressões aritméticas e construir outros novos, procuramos responder à nossa questão de pesquisa: O que revela uma sequência didática, tematizando Progressões Aritméticas de Ordem Superior, aplicada a uma turma de 2º ano do Ensino Médio?

Para alcançar os objetivos deste trabalho e responder à referida questão, utilizamos dois questionários como instrumento de coleta de dados, que foram aplicados no início e no final da sequência didática e contaram com a participação de 13 alunos de uma escola estadual, na cidade de Santaluz-Ba. Diante da análise das respostas dos sujeitos participantes, dialogando com a teoria da aprendizagem significativa, destacamos algumas fissuras no aprendizado do conteúdo investigado, que sinalizam fragilidades na assimilação e consolidação dos chamados conceitos subsunçores. Essas fissuras, por sua vez, estão relacionadas à dificuldade para interpretar problemas, à falta de domínio sobre o uso do termo geral de uma PA e a relação entre seus termos, à ausência de habilidades para utilizar fórmulas de recorrências, bem como descobrir leis de formação de sequências, etc..

A atividade diagnóstica revelou, num contexto geral, um repertório de conhecimentos quase inexistente, ainda que a maioria tenha mostrado algumas noções básicas de sequências e progressões aritméticas. Esse cenário negativo influenciou sobremaneira a execução da sequência didática, levando em conta o principal objeto de estudo deste trabalho (PA's de 2ª ordem) e a necessidade de alinhar a proposta pedagógica com o pensamento ausubeliano de que aquilo que o aluno já sabe, chamado de ideia-âncora, é a ponte para a construção de um novo conhecimento por meio da reconfiguração das estruturas mentais existentes ou da elaboração de outras novas,David Ausubel (1980).

Nessa perspectiva, foi repensada e reformulada uma série de atividades diversificadas (descritas no capítulo 3), dialogando com o que preconiza a teoria de Ausubel (1980), segundo a qual as condições para que ocorra a aprendizagem significativa estão relacionadas com a maneira pela qual o material potencialmente significativo é apresentado ao aprendiz, de modo que tal material deve ser apresentado de forma não arbitrária e substantiva. Todavia, não é necessário somente que o material seja potencialmente significativo, também deve haver uma disposição do aluno em aprender e essa disposição pode surgir espontaneamente ou mesmo influenciada por ferramentas metodológicas diversificadas.

Sobre o novo conteúdo apresentado, os dados analisados revelaram, em primeiro momento, certa compreensão do conceito de progressão aritmética de segunda ordem por parte da maioria dos sujeitos, que expressou tal entendimento por meio de definições e/ou exemplos. Categorizamos esses entendimentos da seguinte forma:

Tabela 4.9: Descrição das Categorias

Descrição das Categorias – situações
- Definição que envolve um significado matemático associado apenas à ideia de sequência numérica, sem exemplo ou com exemplo incorreto.
- Definição que envolve um significado matemático associado apenas à ideia de sequência numérica, com exemplo correto.
- Definição que envolve um significado matemático associado exclusivamente à ideia de PA de 2ª ordem, com exemplo correto.
- Definição que envolve um significado matemático associado à ideia de PA de 1ª ordem, sem exemplo ou com exemplo incorreto.

Fonte: Dados da Pesquisa

Além disso, os dados quantitativos e qualitativos deste trabalho ratificam a compreensão da maioria dos alunos sobre noções básicas e intuitivas de PA's de 2ª ordem e o conhecimento para reconhecê-las em diferentes situações, seja em exercícios de fixação, seja em problemas contextualizados. No entanto, esses mesmos dados alertam sobre a problemática evidenciada no início da investigação – as fissuras no aprendizado da matemática – e, não apenas isso, apontam indícios de uma defasagem escolar de conhecimentos, competências e habilidades que deveriam ter sido desenvolvidos nas séries anteriores – realidade comum aos alunos de muitas escolas públicas brasileiras conforme resultados de avaliações nacionais.

Devemos frisar que, conforme Brasil (2017), nessa etapa de ensino, deve-se desenvolver a matemática de modo que, com seus processos de construção e validação de conceitos e argumentações e os procedimentos de generalizar, relacionar e concluir que lhe são característicos, permita estabelecer relações e interpretar fenômenos e informações. Além disso, "a pertinente presença da Matemática no desenvolvimento de competências essenciais, envolvendo habilidades de caráter gráfico, geométrico, algébrico, estatístico, probabilístico, é claramente expressa nos objetivos educacionais da Resolução CNE/98" (BRASIL, 2017, p.9).

Destacamos, ainda, que a finalidade ao lidar com tais temas não se restringe a investigar a competência do aluno para realizar operações básicas de aritmética, mas suas habilidades para concatenar ideias e mobilizar o raciocínio lógico matemático diante de um problema envolvendo PA. Nesse sentido, constatamos que alguns entraves à aprendizagem das PA's de 2ª ordem, sob a perspectiva da resolução de problemas, estão relacionados ao desenvolvimento dos processos de interpretação e generalização de fórmulas como estratégia de solução. Como consequência, poucos alunos conseguirem associar a fórmula do termo geral da PA de 2ª ordem aos problemas propostos, tampouco operacionalizá-lo, sendo essa, definitivamente, a maior dificuldade no aprendizado do conteúdo abordado durante a aplicação da sequência didática.

Uma das limitações desse trabalho, além dos pré-requisitos necessários, pode estar baseada no tempo em que as situações foram realizadas, visto que a sequência didática se desenvolveu em 4 aulas. Por isso, sugerimos sua aplicação em 8 aulas, mas sabemos que isso acaba sendo um complicador para o docente que já dispõe de poucas aulas para vencer os conteúdos programáticos da disciplina.

Contudo, esperamos que este trabalho possa cumprir um papel científico e pedagógico importante: o de estimular professores de matemática a aprofundarem seus conhecimentos sobre progressões aritméticas em suas ordens superiores e despertar neles o interesse em levar tais conhecimentos para discussão nos espaços das escolas de Ensino Médio. O presente trabalho já reúne subsídios suficientes para se materializar tal ideia – sendo esse o seu diferencial –, pois traz detalhadamente teoremas, proposições, definições, exemplos e problemas pouco encontrados no cenário editorial nacional, além de uma experiência de aplicação de uma sequência didática que pode ser adaptada ou servir de referência conforme a realidade dos espaços e dos indivíduos aos quais se deseja atingir.

REFERÊNCIAS

AUSUBEL, D.P.; Novak, J.D. e Hanesian, H. (1980). **Psicologia educacional**. Rio de Janeiro, Interamericana. Tradução para português, de Eva Nick et al., da segunda edição de **Educational psychology: a cognitive view**.

BABINSKI, Adriano Luís. **Sequência Didática (SD): experiência da matemática**. (Dissertação Mestrado). Universidade do Estado de Mato Grosso, 2017.

BITENCOURT, R. R. R. **Aplicações do conceito de proporcionalidade a partir da engenharia didática**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Amapá, Macapá - AP, 2017.

BITTAR, Marilena; MUNIZ, Cristiano Alberto. **A aprendizagem matemática na perspectiva da teoria dos campos conceituais**. Curitiba: Editora CRV, 2009.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática/Secretaria de Educação Fundamental**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular (BNCC). **Educação é a Base**. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2017.

CABRAL, Natanael Freitas. **Sequências didáticas: estrutura e elaboração**. Belém: SBEM / SBEM-PA, 2017.

CARVALHO, P. C. P., Lima, E. L., Morgado, A. C., Wagner, E., **A Matemática do Ensino Médio - Volume 2**. Rio de Janeiro. SBM. 2006.

CORRÊA, Samara da Silva. **Uma sequência didática para o ensino e aprendizagem de proporcionalidade no ensino médio**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual do Norte Fluminense, Campos dos Goytacazes – RJ, 2019.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia do oprimido**. 6. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1978.

GIL, Antônio Carlos. **Métodos e Técnicas de pesquisa social**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 1999.

IEZZI, G., Hazzan, S. **Fundamentos de matemática elementar, 4: sequências, matrizes, determinantes e sistemas**. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013.

KFOURI, William; D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Explorar e investigar para aprender matemática através da modelagem matemática**. Belo Horizonte, 2006.

LIMA, V. S. **Progressões aritméticas e geométricas: história, conceitos e aplicações**. Revista intellectus, 2021. Disponível em: <http://www.revistaintellectus.com.br/artigos/2.12.pdf<. Acesso em: 13 de Jul. de 2022.

LIMA, W. A. F. **Progressões Aritméticas de Ordem Superior: Uma proposta de abordagem no ensino médio**. Dissertação (PROFMAT) — UEM, Maringá - PR, 2015.

LOPES, L. **Manual de Progressões**, Rio de Janeiro: Interciência, 1998.

LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli E. D. A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: EPU, 2013.

LUTZ, M. R. **Uma Sequência Didática para o ensino de estatística a alunos do ensino médio na modalidade PROEJA**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre - RS, 2012.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, Secretaria de Educação Básica, **Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica, 2006.

MOREIRA, M. A. **Aprendizagem significativa**. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1999.

MOREIRA, M. A. **Teorias de Aprendizagem**. São Paulo: EPU, 1999.

MORGADO, A. C., Wagner, E., Zani, S. C.., **Progressões e Matemática Financeira (Coleção do Professor de Matemática)**. Rio de Janeiro. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq. 1993.

MORGADO, A. C.; Carvalho Paulo C. P. **Matemática Discreta**. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

NOBRE, J. F. F. **Progressões Aritméticas: Abordando as ordens superiores**. Dissertação (PROFMAT), UFT, Palmas, TO, 2017.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

VERGNAUD, G. **La Teorie des Champs Conceptuals**. RDM, V10, N23, 1991.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa: como ensinar**; tradução: Ernani F. da F. Rosa. Porto Alegre: Artmed, 1998.

APÊNDICES

APÊNDICE A – ATIVIDADE DIAGNÓSTICA

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA – UEFS

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

ATIVIDADE DIAGNÓSTICA

ATIVIDADE A

✓ Para você, o que são sequências numéricas?

✓ Para você, o que é Progressão Aritmética (PA)?

Atividade B

✓ **A partir dos conhecimentos construídos durante a sua trajetória escolar, no que se refere a sequências numéricas e Progressões Aritméticas, responda às questões a seguir.**

(1) Complete as sequências abaixo:

(a) (2, 4, 6, __, __, 12, __, ...)

(b) (1, 4, 9, 16, __, __, __, ...)

(c) (800, 400, 200, __, __, ...)

(2) Dentre as sequências numéricas abaixo, identifique qual delas é uma Progressão Aritmética (PA) e pinte o quadradinho correspondente. Depois determine o oitavo termo da PA.

- ❑ (3, 6, 12, 24, ...)
- ❑ (1, 4, 7, 10, ...)
- ❑ (1, 4, 9, 16, ...)

(3) A lei de formação de uma sequência numérica é dada por $a_n = 3n - 2$. Qual o quinto termo, a_5?

(4) Algumas sequências numéricas seguem um padrão pré-estabelecido e como tal possuem uma lei de formação segundo a qual seus termos são determinados. Por exemplo, a sequência dos números pares (2, 4, 6, 8, ...) tem como lei de formação a expressão $a_n = 2n$, com $n > 0$, pois $a_1 = 2.1$; $a_2 = 2.2$; $a_3 = 2.3$; etc.

(a) Descubra qual a lei de formação dos números ímpares.

(b) Existe alguma relação entre as leis de formação dessas sequências e o termo geral de uma Progressão Aritmética? Justifique.

(5) A sequência numérica (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...), chamada de sequência de Fibonacci, é bastante conhecida por possuir diversas aplicações em nosso cotidiano e por estar presente em diversos fenômenos da natureza. Determine os 3 próximos números dessa sequência.

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \_,..., \_, \ldots)$$

(6) Para você, a sequência a que se refere a questão 5 tem alguma relação com a fórmula $a_n = a_{(n-1)} + a_{(n-2)}$; sendo $n > 1$, $a_0 = 1$ e $a_1 = 1$? Se sim, justifique sua resposta.

(a) Determine, a partir da fórmula apresentada, o sexto termo, a_6, dessa sequência.

(7) (Enem – 2016) Sob a orientação de um mestre de obras, João e Pedro trabalharam na reforma de um edifício. João efetuou reparos na parte hidráulica nos andares 1, 3, 5, 7, e assim sucessivamente, de dois em dois andares. Pedro trabalhou na parte elétrica nos andares 1, 4, 7, 10, e assim sucessivamente, de três em três andares. Coincidentemente, terminaram seus trabalhos no último andar. Na conclusão da reforma, o mestre de obras informou, em seu relatório, o número de andares do edifício. Sabe-se que, ao longo da execução da obra, em exatamente 20 andares, foram realizados reparos nas partes hidráulica e elétrica por João e Pedro. Qual é o número de andares desse edifício?

APÊNDICE B – AVALIAÇÃO FINAL DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA – UEFS

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Avaliação final da Sequência Didática

(1) Para você, o que é Progressão Aritmética (PA) de 2ª ordem? Dê um exemplo.

(2) Identifique entre as sequências abaixo aquelas que são progressões aritméticas de segunda ordem.

(a) (1, 2, 3, 4, 5, . . .)

(b) (1, 3, 6, 10, 15, . . .)

(c) (1, 2, 4, 8, 16, 32, . . .)

(d) (1, 4, 9, 16, 25, . . .)

(e) (1, 5, 9, 13, 17, . . .)

(3) Os Números Poligonais são casos particulares de Números Figurados. Denominam-se Números Figurados aqueles que podem ser representados por uma construção geométrica de pontos equidistantes. Caso tal arranjo seja um polígono regular, esses números são chamados de Números Poligonais. As figuras abaixo (nos itens a, b, c e

d) apresentam as sequências dos números chamados triangulares, quadrados, pentagonais e hexagonais, respectivamente. Analise os itens e em cada um deles:

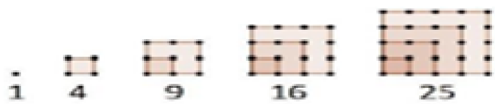
I – Indique se a sequência dos números poligonais é uma PA de 2ª ordem;

II – Desenhe a próxima figura da sequência (figura 6);

III – Encontre o termo a_{10}, que representa a décima figura, caso a sequência seja uma PA de 2ª ordem.

a)

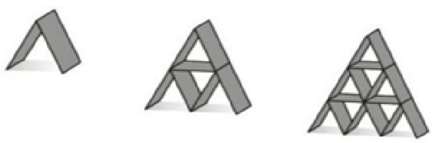
b)



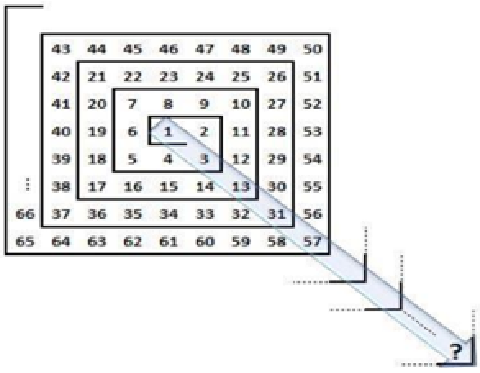
c)

d)

(4) (FGV-2008) A figura abaixo mostra castelos de cartas de 1, 2 e 3 andares. De quantos baralhos de 52 cartas precisamos, no mínimo, para construir um castelo de 10 andares?



(5) Considere que os números naturais foram dispostos em uma espiral retangular, como mostra a figura a seguir. Qual será o número que ocupará a vigésima posição na direção indicada? Determine o termo geral da PA de 2ª ordem que está relacionada a esse problema.


43 44 45 46 47 48 49 50
42 21 22 23 24 25 26 51
41 20 7 8 9 10 27 52
40 19 6 1 2 11 28 53
39 18 5 4 3 12 29 54
38 17 16 15 14 13 30 55
66 37 36 35 34 33 32 31 56
65 64 63 62 61 60 59 58 57
?

APÊNDICE C – SEQUÊNCIA DIDÁTICA

DISCIPLINA: Matemática

NOME DO PROFESSOR: José Hailton Mercês de Jesus

TURMA/SÉRIE: 2º ano do Ensino Médio

TEMA: Progressões aritméticas de ordem superior

CONTEÚDOS TRABALHADOS

- ➢ Sequências numéricas;
- ➢ Progressões aritméticas de 1ª ordem;
- ➢ Progressões aritméticas de ordem superior.

HABILIDADES (BNCC)

- ➢ (EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

TEMPO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

3 horas e 20 minutos (4 aulas)

MATERIAIS NECESSÁRIOS PARA A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Folha de ofício, caneta, lápis, borracha, Datashow, piloto.

AULA 1

Organização da turma

A turma será organizada em fileiras, de modo que os alunos possam fazer as atividades individualmente.

Objetivos

- ➢ Diagnosticar os conhecimentos prévios dos alunos;
- ➢ Revisar conceitos de sequências numéricas e progressões aritméticas;

Introdução

No início da primeira aula será apresentada a temática do dia, bem como os objetivos a serem alcançados.

Desenvolvimento

A primeira atividade a ser aplicada será um formulário diagnóstico, a fim de verificar quais os conhecimentos prévios dos alunos acerca de sequências numéricas e progressões aritméticas de 1ª ordem.

No segundo momento da aula, serão exibidos dois vídeos sobre algumas sequências numéricas clássicas, como a sequência de Fibonacci, com ênfase no conceito de razão áurea e o número de ouro. O conceito de PA será retomado.

Conclusão

Para aprofundamento dos estudos sobre progressões, será sugerido que os alunos façam uma pesquisa na internet sobre sequências e progressões de ordem superior, que será pauta de discussão na aula seguinte.

Avaliação

Atividade diagnóstica e avaliação da participação dos alunos durante a aula.

AULA 2

Organização da turma

A turma será organizada inicialmente em círculo para oportunizar as discussões entre professor e alunos.

Objetivos

➢ Discutir ideias e os conceitos de PA de ordem superior;

➢ Comparar PA´s de 1ª e 2ª ordens;

➢ Resolver problemas

Introdução

No início da aula 2, será apresentada a temática da aula, bem como os seus objetivos. Em seguida será feito um questionamento a respeito do tema pesquisado pelos alunos: *"o que vocês entenderam a respeito do tema progressões aritméticas de ordem superior"?*

Desenvolvimento

Após discussão sobre o significado de progressões aritméticas de ordem superior, o professor fará a explanação sobre o conceito formal das referidas progressões e fará a apresentação de algumas aplicações do conteúdo em questão. Será feita, também, a leitura de material impresso, elaborado pelo professor. Por conseguinte, serão apresentados alguns problemas, os quais serão resolvidos pelos alunos com o auxílio do professor.

Conclusão

Para finalizar a aula 2, será proposta a modelagem de uma situação-problema, a qual deverá ser feita em grupo, isto é, os alunos terão que pensar e/ou pesquisar uma situação que possa ser modelada por meio de uma progressão, preferencialmente de ordem superior, para apresentar na aula seguinte.

Avaliação

Participação dos alunos nas discussões e resolução de problemas.

AULA 3

Organização da turma

Já dividida em grupos de 3 ou 4 componentes, a turma será organizada em fileiras, de modo que os alunos possam assistir às apresentações sobre os problemas de modelagem

Objetivos

- ➢ Modelar situações-problema;
- ➢ Resolver problemas

Introdução

No início da aula 3, será apresentada a temática da aula, bem como os seus objetivos. Em seguida, os alunos irão apresentar, em grupo, a modelagem proposta na aula 2. Caso haja tempo ainda, serão apresentados problemas de PA de 2ª ordem para serem resolvidos com auxílio do professor.

Desenvolvimento

Após as apresentações sobre a modelagem, os resultados obtidos serão discutidos entre alunos e professor e serão resolvidos novos problemas de PA de 2ª ordem.

Conclusão

O conceito de progressão aritmética de segunda ordem será retomado, a fim de fixar as ideias e tirar possíveis dúvidas sobre o conteúdo estudado.

Avaliação

Apresentações em grupo.

AULA 4

Organização da turma A turma será organizada mantendo-se o afastamento ideal à aplicação da atividade avaliativa final da sequência didática.

Objetivo

- ➢ Investigar o conhecimento construído durante a sequência didática.

Introdução

No início da aula 4, será apresentada a temática da aula, bem como os seus objetivos.

Desenvolvimento

Será aplicada uma atividade avaliativa escrita, com questões abertas e problemas envolvendo progressões aritméticas de segunda ordem. A atividade será feita individualmente a fim de verificar a aprendizagem de cada aluno durante a aplicação da sequência didática.

Conclusão

Aplicação da atividade avaliativa final da sequência didática

Avaliação

Atividade avaliativa escrita.

FINALIZAÇÃO DA SEQUÊNCIA

Espera-se que, ao final da aplicação desta sequência didática, os instrumentos avaliativos utilizados – resolução de problemas, modelagem matemática, atividade diagnóstica, avaliação escrita, apresentações e discussões –, aliados aos procedimentos encadeados de passos e etapas interligadas entre si, possam refletir um processo de aprendizado mais significativo, por meio do qual o estudante amplie e atualize seus conhecimentos e que se possam atribuir novos significados a seus conhecimentos prévios sobre as Progressões Aritméticas. Afinal, parafraseando Moreira (1999), a aprendizagem significativa é um processo por meio do qual uma nova informação relaciona-se, de maneira substantiva (não-literal) e não-arbitrária, a um aspecto relevante da estrutura de conhecimento do indivíduo.

Por fim, serão sugeridas leituras extras e videoaulas disponíveis na plataforma do YouTube para os alunos, sobretudo para aqueles que não atingiram os objetivos propostos, a fim de despertar-lhes a curiosidade e o desejo de saber mais sobre as progressões e as suas importantes aplicações em nosso mundo real.

Relembrando o conceito de PA ($1^{\underline{a}}$ ordem)

A Progressão Aritmética (PA) é uma sequência numérica em que a diferença entre dois termos consecutivos é sempre igual. Essa diferença constante é chamada de razão da PA.

Exemplos de Progressões Aritméticas:

- A sequência dos números pares (2, 4, 6, 8, ...)
- A sequência dos números ímpares (1, 3, 5, 7, 9, ...)
- A sequência (15, 10, 5, 0, -5, ...)

Relembrando as fórmulas do Termo Geral e da Soma dos Termos de uma PA

Termo Geral: $\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1).r}$

Soma dos Termos: $\boldsymbol{S_n = \frac{(a_1+a_n)n}{2}}$

Exercício 1. Qual a soma dos dez primeiros termos da PA (4, 7, 10, 13, ...)?

PROGRESSÃO ARITMÉTICA DE $2^{\underline{a}}$ ORDEM

Uma progressão aritmética de $2^{\underline{a}}$ ordem é uma sequência na qual as diferenças entre cada par de termos formam, entre si, uma PA com razão diferente de zero, isto é, uma PA de $1^{\underline{a}}$ ordem.

Exemplo:

- A sequência (1, 4, 9, 16, 25, 36) é uma PA de $2^{\underline{a}}$ ordem.

Observe que: 4 – 1 = 3; 9 – 4 = 5; 16 – 9 = 7; 25 – 16 = 9; 36 – 25 = 11 Temos, portanto, a sequência (3, 5, 7, 9, 11), que é uma PA de $1^{\underline{a}}$ ordem.

Exercício 2. Determine o $101^{\underline{o}}$ termo da sequência (1, 2, 4, 7, 11, 16, ...)

A sequência em questão é uma PA de $2^{\underline{a}}$ ordem, pois:

2 – 1 = 1; 4 – 2 = 2; 7 – 4 = 3; 11 – 7 = 4; 16 – 11 = 5; ...

Essas diferenças formam uma PA de $1^{\underline{a}}$ ordem (1, 2, 3, 4, 5, ...) Na PA de segunda ordem, temos:

$a_1 = 1$

$a_2 = 1 + (1)$

$a_3 = 1 + (1 + 2)$

a_4= $1 + (1 + 2 + 3)$

a_5= $1 + (1 + 2 + 3 + 4)$

...

a_n=$1 + (1 + 2 + 3 + ... + a_{(n-1)})$

Sabemos que $1 + 2 + 3 + ... + a_{(n-1)}$ é a soma de n-1 termos de uma PA de 1ª ordem.

Portanto,

a_{101}= $1 + \frac{(1+100).100}{2}$

a_{101}= 1 +5050

a_{101}= 5051

Assim, podemos generalizar o termo geral de uma PA de 2ª ordem, como sendo:

$a_n = a_1 + S_{(n-1)}$

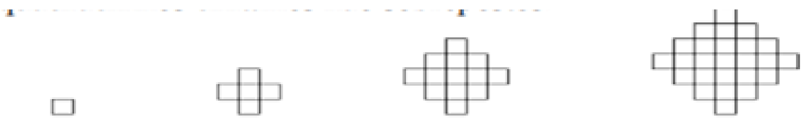
Sendo a_1 o 1º termo da PA de 2ª ordem e $S_{(n-1)}$ a soma dos termos da PA de 1ª ordem.

Ou

$a_{(n+1)} = a_1 + S_n$

Exercício 3. Qual o número de termos da sequência (71, 72, 75, 80, 87, ..., 2007)?

Exercício 4. Considere as figuras abaixo com 1, 5, 13 e 25 quadradinhos unitários não sobrepostos:



Caso o padrão seja mantido:

(a) Quantos quadradinhos unitários haverá na próxima figura (figura 5)?

(b) Qual a fórmula a_n do total de quadradinhos unitários em cada figura?

(c) Quantos quadradinhos unitários haverá na centésima primeira figura?

Outras definições sobre PA de ordem superior

Definição 1 (Operador Diferença)

Dada uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, define-se o chamado operador diferença $(\Delta^1 a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_{(n+1)} - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que constitui uma nova sequência. Como $(\Delta^1 a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forma uma nova sequência, podemos novamente obter o operador diferença, isto é, $(\Delta^1[\Delta^1 a_n])_{n\in\mathbb{N}} = (\Delta^2 a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e assim sucessivamente, $(\Delta^k a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para $k \geq 3$.

Definição 2 (Ordem de uma PA)

Uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, será uma PA de ordem k se for necessário aplicar o operador diferença k vezes para se chegar a uma sequência constante. Desse modo, uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, será uma PA de ordem 1 se o operador diferença $(\Delta^1 a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for uma PA constante; será uma PA de ordem 2 se o operador diferença $(\Delta^2 a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for uma PA constante, e assim por diante, ou, ainda, uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, será uma PA de ordem 2 se $(\Delta^1 a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for uma PA de primeira ordem; será uma PA de ordem 3 se $(\Delta^2 a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for uma PA de primeira ordem, e assim por diante.

Exemplo de PA de 3ª ordem:

- A sequência (3, 7, 13, 23, 39, 63, 97, ...) é PA de 3ª ordem, pois:

Aplicando o operador diferença, obtemos a sequência:

$$(4, 6, 10, 16, 24, 34, ...) \rightarrow 2^{\underline{a}} \text{ ordem}$$

Aplicando o operador diferença mais uma vez, temos:

$$(2, 4, 6, 8, 10, ...) \rightarrow 1^{\underline{a}} \text{ ordem}$$

Aplicando o operador diferença novamente, teremos uma sequência constante:

$$(2, 2, 2, 2, ...)$$

APÊNDICE E – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA – UEFS
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA – SBM
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT
Av. Transnordestina 2720, Feira de Santana, BA, CEP 44036-059

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado(a) a participar das atividades de pesquisa de dissertação de mestrado intitulada "PROGRESSÕES ARITMÉTICAS DE ORDEM SUPERIOR: CONSTRUINDO APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA ATRAVÉS DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA APLICADA AO 2º ANO DO ENSINO MÉDIO". A sua seleção foi aleatória e sua participação não é obrigatória. A qualquer momento você pode desistir de participar e retirar seu consentimento. Sua recusa não trará nenhum prejuízo em sua relação com o pesquisador ou com a Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS). Alguns dos objetivos deste estudo são: identificar qual o entendimento inicial que os alunos do 2º ano do Ensino Médio revelam sobre o conceito de sequências e progressão aritmética; introduzir o conteúdo das progressões aritméticas de segunda ordem; reconhecer as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de problemas envolvendo PA de segunda ordem; identificar as dificuldades encontradas na resolução de problemas envolvendo PA de segunda ordem.
Sua participação nesta pesquisa consistirá em desenvolver as atividades de uma sequência didática e responder a dois questionários sobre a temática da investigação. Esses questionários constam de perguntas abertas e objetivas, com exercícios e problemas. Os riscos relacionados com sua participação não existem, já os benefícios são vários, que vão desde uma melhoria no avanço de estudos de temas matemáticos desconhecidos de alunos do ensino médio ao fornecimento de dados que podem servir de fonte de estudo e análise para professores e outros estudantes, auxiliando na proposição de intervenção a possíveis problemas detectados na compreensão de conceitos matemáticos. As informações obtidas através dessa pesquisa serão confidenciais e asseguramos o sigilo sobre sua participação. Os dados não serão divulgados de forma a possibilitar sua identificação nos questionários. Você receberá uma cópia deste termo onde consta o endereço institucional e o telefone do pesquisador, podendo tirar suas dúvidas sobre o projeto e sua participação, agora ou a qualquer momento.

____

JOSÉ HAILTON MERCÊS DE JESUS
Pesquisador
Tel: (75) 99206-9033

Declaro que entendi os objetivos, riscos e benefícios de minha participação na pesquisa e concordo em participar.

____

Sujeito da pesquisa