UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

IGOR MARINHO FEITOSA

FRAÇÕES: UMA ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS E A UTILIZAÇÃO DA ENGENHARIA DIDÁTICA COMO UM RECURSO PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM

JUAZEIRO-BA

2022

IGOR MARINHO FEITOSA

FRAÇÕES: UMA ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS E A UTILIZAÇÃO DA ENGENHARIA DIDÁTICA COMO UM RECURSO PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Vale do São Francisco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Prof. Ma. Tuanny da Silva Maciel

JUAZEIRO-BA

2022

Feitosa, Igor Marinho
D192i Frações: uma análise de livros didáticos e a utilização da Engenharia didática como um recurso para o ensino e Aprendizagem / Igor Marinho Feitosa – Juazeiro - BA, 2022.
84 f.: il.; 29 cm.

Dissertação – Mestrado Profissional em Matemática, Universidade Federal do Vale do São Francisco, campus Juazeiro, 2022.

Orientadora: Prof. Ma. Tuanny da Silva Maciel.

1. Matemática - ensino e aprendizagem. 2. Didática. I. Maciel, Tuanny da Silva. II. Título. III. Universidade Federal do Vale do São Francisco.

CDD 510.7

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema Integrado de Biblioteca SIBI/UNIVASF
Bibliotecário: Renato Marques Alves, CRB 5/1458.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

FOLHA DE APROVAÇÃO

IGOR MARINHO FEITOSA

FRAÇÕES: UMA ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS E A UTILIZAÇÃO DA ENGENHARIA DIDÁTICA COMO UM RECURSO PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT pela Universidade Federal do Vale do São Francisco.

Aprovado em: 29 de julho de 2022.

Banca Examinadora

Tuanny da Silva Maciel

Ma. Tuanny da Silva Maciel - UNIVASF

Lino Marcos da Silva

Dr. Lino Marcos da Silva - UNIVASF

Rafael Barbosa da Silva

Dr. Rafael Barbosa da Silva - UFRPE/UAST

AGRADECIMENTOS

Eu agradeço primeiramente a Deus por me levantar e me manter de pé todos os dias da minha vida.

Aos meus filhos por serem as fontes inspiradora e renovável das minhas energias na caminhada rumo ao sucesso, na certeza que sem eles eu não teria conseguido;

À minha mãe pela forma que fez e agiu na minha vida;

À Professora Ma. Tuanny da Silva Maciel pela dedicação na orientação do meu trabalho;

Ao professor Dr. Manoel Vieira de Matos Neto, pela mão amiga no final da minha graduação;

Ao professor Dr. Lino Marcos da Silva, pela celebre frase “Eu acredito em você”;

Aos amigos Anderson, Flávio, Juremir, Marinilda e Max pelas suas contribuições ao longo de todos os anos da nossa amizade;

Ao amigo Rendrikson pelas doações dos livros, que foram tão importantes para análise das obras.

A banca avaliadora, pela disponibilidade em avaliar este trabalho.

Ao meu amigo especialista Sóstenes Rônmel pela celebre frase “para o bem de todos alguém tem que ir para guerra”.

Ao meu amigo Dr. Rafael Teixeira que mesmo sendo recente nossa amizade, me fez acreditar que posso ser uma pessoa cada vez melhor.

À minha amiga Dra Helba Cirino, por mesmo nossa amizade sendo virtual, estendeu a mão quando mais precisei.

"Deus não escolhe os capacitados capacita os escolhidos. Fazer ou não fazer algo só depende de nossa vontade e perseverança". Albert Einstein.

RESUMO

Este trabalho teve como objetivo verificar contribuições de uma proposta de ensino de frações com o uso da engenharia didática para alunos do primeiro ano do ensino médio de um instituto federal, localizado na cidade de Caracaraí, no estado de Roraima. Para isso, foi realizada uma análise da apresentação do tema em alguns dos principais livros didáticos de matemática do ensino fundamental adotado nas escolas da educação básica, em seguida foi proposta, por intermédio de recursos da engenharia didática, uma sequência didática abordando o estudo das frações. A sequência didática foi aplicada em 3 turmas, do primeiro ano, de cursos técnicos integrado ao ensino médio, buscando identificar os pontos de dificuldades ainda existentes sobre tal conteúdo, visto que, embora seja uma assunto bastante abordado no ensino fundamental, muitos alunos ainda tem dificuldades, refletindo na compreensão de outros conteúdos. Sobre a análise dos livros didáticos, buscamos comparar a forma abordada do conteúdo com o que é indicado pelos parâmetros curriculares nacionais e, ainda, tomar como referência os autores Toledo e Toledo (1997), Van de Walle (2009) e Bertoni (2009). Por fim, com a aplicação da sequência didática, verificou-se que é possível, utilizando como recurso metodológico a Engenharia didática, fazer com que os alunos aprendam de forma efetiva a trabalhar e resolver problemas envolvendo frações, além de sanar dificuldades e preencher algumas lacunas ainda existentes.

Palavras-chave: Sistema de numeração; Engenharia didática; Ensino e aprendizagem de Frações.

ABSTRACT

This work aimed to verify contributions of a proposal for teaching fractions with the use of didactic engineering for students of the first year of high school at a federal institute, located in the city of Caracaraí, in the state of Roraima. For this, an analysis of the presentation of the theme was carried out in some of the main mathematics textbooks of elementary education adopted in basic education schools, then, through the resources of didactic engineering, a didactic sequence addressing the study of fractions was proposed. The didactic sequence was applied in 3 classes, from the first year, of technical courses integrated to high school, seeking to identify the points of difficulties that still exist on such content, since, although it is a subject that is widely discussed in elementary school, many students still have difficulties, reflecting on the understanding of other contents. Regarding the analysis of textbooks, we sought to compare the approach of the content with what is indicated by the national curricular parameters and, still, take as a reference the authors Toledo and Toledo (1997), Van de Walle (2009) and Bertoni (2009). Finally, with the application of the didactic sequence, it was verified that it is possible, using Didactic Engineering as a methodological resource, to make students learn effectively to work and solve problems involving fractions, in addition to solving difficulties and filling some gaps. still existing.

Keywords: Numbering system; Didactic engineering; Teaching and learning Fractions.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O estudo das frações é um tema da matemática que, desde as suas primeiras apresentações, gera dificuldades para os alunos, seja pelo fato de ser algo novo para eles ou até mesmo pela forma didática como é apresentada em sala de aula. Tais dificuldades na compreensão do conteúdo acabam gerando um problema que é carregado por todo ensino básico, o que muitas vezes ocasiona um atrito com outros conteúdos e até mesmo uma certa repulsão pela disciplina, visto que ocorre uma desmotivação gerada por erros na resolução de exercícios ou até mesmo na interpretação de questões, implicando em um déficit no processo de aprendizagem dos alunos.

Vale salientar que quando se fala do processo de aprendizagem das operações básicas envolvendo frações no ensino básico, de um maneira geral, aponta-se as dificuldades que os alunos encontram na apropriação das propriedades dessas operações. Entretanto, muitos trabalhos de pesquisa, como os de Porto (2019) e de Paiva (2016), sobre este assunto têm mostrado um outro ponto, ou seja, para eles o que está faltando, são propostas metodológicas e recursos mais adequados para minimizar essas dificuldades.

Sendo assim, neste trabalho abordaremos uma proposta baseada no uso da Engenharia Didática como recurso didático para potencializar o aprendizado dos alunos com as regras das operações com números fracionários.

O termo “Engenharia Didática” teve origem da língua francesa *ingénerie didactique*, que é um método de pesquisa e teoria educacional que iniciou na década de 1980 para construir trabalhos de educação matemática. Há uma analogia do trabalho do educador com o trabalho de um engenheiro, que divide os temas para o ensino usando sequências didáticas. Constitui desde à concepção, planejamento e execução de uma aula, que se fundamenta em conhecimentos científicos. As etapas da aula possuem situações complexas que promovem fazer escolhas e tomar novas decisões, tornando o processo de ensino e aprendizagem mais dinâmico, adaptando às condições encontradas no contexto (ARTIGUE, 1996). Por meio da utilização da Engenharia Didática, o educador promove um ambiente no qual o aluno será capaz de utilizar o saber que por ele foi construído.

A Engenharia Didática possui duas principais formas de aplicações: uma como metodologia de pesquisa qualitativa na área da Matemática e a outra forma como uma dinâmica para a construção e análise de situações didáticas com objetivo de proporcionar um ambiente de aprendizagem mais significativa em sala de aula, ampliando assim a sua aplicabilidade para outras áreas de ensino (BRUN, 2000).

Dessa forma, temos como objetivo geral do nosso trabalho verificar contribuições de uma proposta de ensino de frações com o uso da engenharia didática para alunos do primeiro ano do ensino médio. E estabelecemos como objetivos específicos analisar as propostas de livros didáticos para o conteúdo de frações; elaborar uma sequência didática usando a metodologia da engenharia didática e analisar a aprendizagem dos alunos com a aplicação de uma sequência didática para o ensino de frações com o uso da engenharia didática.

Com isso pretendemos responder o seguinte questionamento: Como a utilização da engenharia didática, como proposta metodológica, pode contribuir para o processo de ensino e aprendizagem do conteúdo de frações para os alunos do ensino básico?

A ideia de trabalhar com a engenharia didática como ferramenta de aprendizagem, se deve ao fato de buscar estratégias para potencializar o aprendizado com operações envolvendo frações, já que os alunos do ensino básico tem grandes dificuldades com esse tipo de assunto.

Porto (2019, p. 19) afirma que:

> Atualmente as estratégias utilizadas no ensino de Matemática são, em sua maioria, baseadas em metodologias tradicionais. O ensino se desenvolve em um contexto em que o aluno é mais um expectador do que um sujeito participante. O cumprimento do programa tende a ser a maior preocupação do professor e há pouca articulação entre o conteúdo e a metodologia utilizada com o objetivo de que o ensino favoreça a inserção social do aluno, para o seu desenvolvimento e interação com o meio.

Nosso intuito é contribuir para a aprendizagem dessas operações de forma significativa, e neste sentido, dividimos nosso trabalho em quatro capítulos. O primeiro deles trata-se sobre a origem dos sistemas de numeração na história da humanidade, apresentando os sistemas de numerações das civilizações Egípcia, Babilônica, Indo-Arabica e Maia. No segundo capítulo realizamos uma revisão da literatura a respeito da engenharia didática, no terceiro fizemos a descrição da metodologia e a caracterização do sujeito e da pesquisa, e, por fim, no quarto capítulo, descrevemos e discutimos a cerca de uma proposta de sequência didática, utilizando a engenharia didática, para o ensino de frações.

1 O ESTUDO DAS FRAÇÕES

No sentido de contextualizar melhor o tema tratado nesta seção, consideramos importante apresentarmos uma breve exposição sobre a origem dos números pelas civilizações primitivas antes de iniciarmos o estudo mais detalhado das frações. A organização e o aprimoramento da linguagem foram necessários para desenvolver o pensamento matemático e os sistemas de contagem que conhecemos e utilizamos hoje.

Alguns registros e escritas em línguas antigas nos oportunizaram compreender como civilizações de outrora contavam e calculavam. Ao longo do tempo, tais procedimentos deixaram de ser meramente sentidos, intuídos ou memorizados para serem sistematizados e padronizados.

1.1 A ORIGEM DOS NÚMEROS

É comum no nosso dia a dia efetuarmos somas, subtrações, multiplicações e divisões envolvendo números diversos, contudo nem sempre paramos para refletir sobre como surgiram os números e suas representações, como nossos ancestrais começaram a usá-los ou como foi possível a abstração do conceito para chegarmos ao que conhecemos hoje.

Segundo Ifrah (1989, p.1) os números contam a história completa da matemática. Ao acompanhar a evolução da matemática, podemos perceber o desenvolvimento do raciocínio dos nossos ancestrais desde a pré-história, passando por todos os povos que desenvolveram a arte de calcular.

Podemos nos perguntar sobre a origem dos números ou sobre o período do seu surgimento. Seria na época do homem australopiteco, há 2 milhões de anos? Ou no tempo do *Homo Erectus*, há quase 400 mil anos? Contudo, não podemos afirmar com exatidão sobre isso.

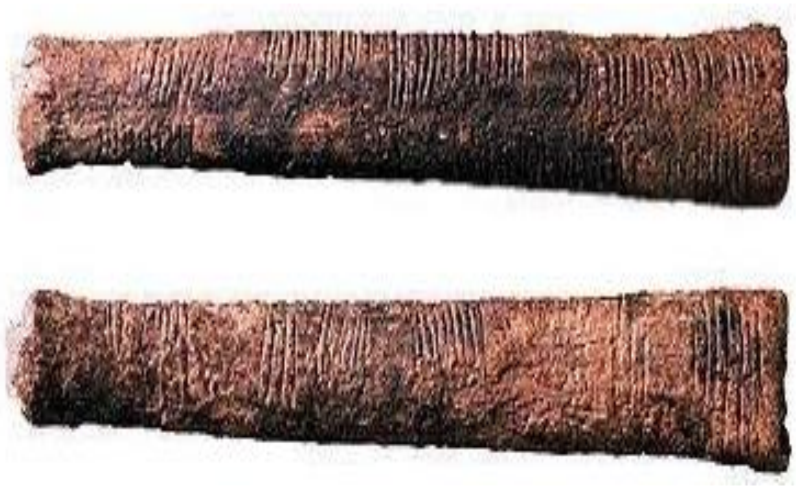
A utilização dos algarismos do nosso sistema decimal, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, é algo tão intuitivo de ser usado que, às vezes, parece que “já nascemos sabendo” como manuseá-los. Segundo Ifrah (2010, p. 41), a descoberta dos números não é retilínea, é uma história de carência e aflições de povos que precisavam contabilizar seus membros, seus bens, suas perdas, seus prisioneiros, datar a fundação de sua cidade e suas vitórias utilizando os meios disponíveis.

Vale ressaltar que o homem antigo não disponibilizava de símbolos para nomear os números e muito menos conhecia o conceito de número abstrato, ou seja, eles não possuíam o “poder de abstração”, da forma como conhecemos hoje, para usar o mesmo símbolo para expressar quantidades iguais de coisas distintas. Ifrah (2010, p.16) defende que um e dois são os primeiros conceitos numéricos inteligíveis pelo ser humano.

Assim percebe-se que os números começaram a ser construídos devido às necessidades do homem primitivo de contar coisas e da necessidade de organização da sociedade em que viviam. Sendo assim, de forma independente, cada povo desenvolveu seu próprio recurso de contagem, utilizando as técnicas que possuíam, e mais tarde os métodos de contagem foram sistematizados, dando origem aos primeiros sistemas de numeração.

Um registro relacionado com contagens, e cuja interpretação suscita discussões entre os especialistas, é o osso, mostrado na Figura 1, encontrado em Ishango, na África, e datado entre vinte mil e dez mil anos a.C.

Figura 1 - O osso de Ishango.



Fonte: Roque & Pitombeira, 2012.

Mesmo com toda a evolução da definição de número, apesar de ter sido motivada por necessidades concretas, claramente existe uma forma de abstração, mesmo que essa abstração não seja no sentido que entendemos hoje. Segundo Roque e Pitombeira (2012, p. 06), contar é concreto, mas usar um mesmo número para expressar quantidades iguais de coisas distintas é um procedimento abstrato.

1.2 SISTEMAS DE NUMERAÇÃO

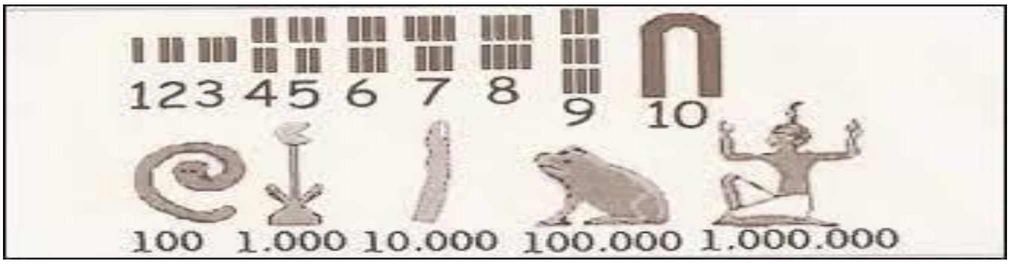
Aqui abordaremos um pouco da história dos sistemas de numeração, a exemplo do sistema de numeração Egípcio, Babilônio e Indo-Arábico. Tais sistemas são indispensáveis para compreendermos como trabalhamos e operamos com os números atualmente, além de entendermos as relações existentes entre eles e as contribuições que cada sistema de numeração trouxe para a forma que utilizamos o sistema de numeração atual.

1.2.1 Sistema de Numeração Egípcio

A civilização egípcia é uma das mais antigas do mundo, com aproximadamente 6.000 anos do seu surgimento. Desenvolvida a beira do grande rio Nilo, fonte de subsistência dos povos daquela época, a civilização egípcia criou um sistema de numeração cujos símbolos eram chamados hieróglifos (VICENTINO, 2016).

Os hieróglifos egípcios são, de fato, quase todos tirados da fauna e da flora do Nilo, e os instrumentos ou utensílios que aquela escrita “copiou” eram utilizados no Egito, pelo menos, desde o início do quarto milênio antes da nossa era (IFRAH, 1985, p.157).

Figura 2 - Números Egípcios.



Fonte: O Sistema de Numeração Egípcio - Brasil Escola
https://meuartigo.brasilescola.uol.com.br/matematica/o-sistema-numeracao-egipcio.htm

Na numeração egípcia, uma porção com dez elementos não era escrita por meio da representação de dez unidades -|||||||||| -, mas sim por um símbolo único que representa essa quantidade - ∩, como mostra a Figura 2 acima. Isto significa que um símbolo “∩” valia por dez símbolos “│”. E isso poderia ser feito com qualquer outro símbolo da numeração egípcia.

Para representar certo número, o símbolo de cada classe decimal era repetido tantas vezes quantas fossem necessárias, como podemos observar nos três exemplos abaixo.

32 → 

130 → 

1.300 → 

Após os hieróglifos egípcios serem decifrados, foi possível compreender que o sistema numérico era organizado em escala de dez. Com um sistema iterativo simples e símbolos distintos para a primeira potência de dez. Um traço vertical representa uma unidade, um V invertido indicava 10, um laço que lembra a letra C valia 100, uma flor de lótus, 1.000, um dedo dobrado, 10.000 e uma figura ajoelhada 1.000.000. Às vezes, os dígitos menores eram colocados à esquerda, e outras vezes os dígitos eram dispostos verticalmente. Os próprios símbolos eram entalhados com orientação invertida, assim o laço tanto podia ser convexo para a direita como para a esquerda (BOYER, 2012, p. 30).

> O tedioso princípio repetitivo da numeração hieroglífica foi substituído pela introdução de sinais especiais ou cifras para representar dígitos e múltiplos de potência de dez. (...) As inscrições hieroglíficas egípcias têm uma notação especial para frações unitárias, isto é, numerador um. O recíproco de qualquer inteiro era indicado simplesmente colocando sobre a notação para o inteiro um sinal oval alongado (BOYER, 2012, p. 31).

A fração $\frac{1}{8}$ era representada com o símbolo  e $\frac{1}{20}$ como  . Nos papiros, o oval alongado é substituído por apenas um ponto acima da representação para o inteiro correspondente. Por exemplo, no papiro de Ahmes $\frac{1}{8}$ está simbolizado  por e $\frac{1}{20}$ como  . Essas frações, pelos indícios, eram manipuladas livremente por esse povo.

Para Boyer (2012, p. 37), a matemática egípcia permaneceu uniforme durante sua história. Era construída em torno da operação de adição, uma desvantagem que conferia aos cálculos egípcios um primitivismo e complexidade. A tradição religiosa causou uma estagnação e, consequentemente, pouca expansão nos estudos de geometria, por exemplo.

Os egípcios mediam e contavam com muita precisão. A construção do calendário solar é um exemplo admirável disso. As pirâmides é outro exemplo mundialmente conhecido, pois mostram o grau de precisão durante a sua construção e orientação deu origem a várias lendas em torno delas.

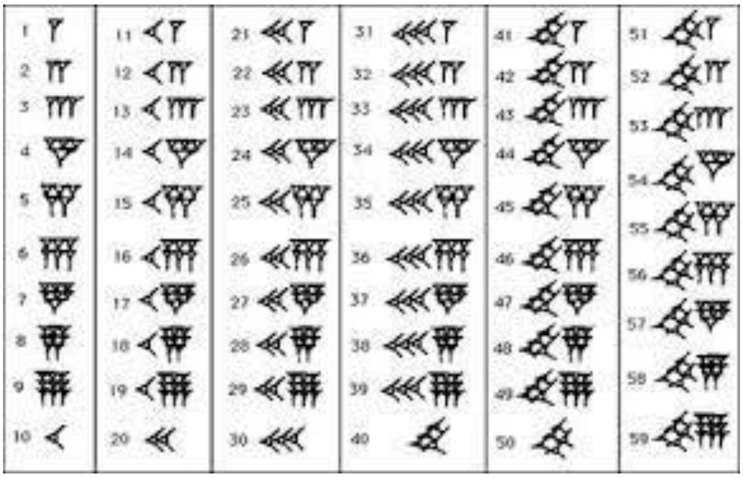
Então, percebe-se que a criação dos números foi um processo árduo e profundo nessa civilização, valendo ressaltar o grau de dificuldade o mérito que eles têm sobre o tema.

1.2.2 Sistema de Numeração Babilônico

Os Babilônios habitavam próximos aos vales dos rios Tigres e Eufrates. Essa região era conhecida como Mesopotâmia, que significa “terra entre rios” e atualmente pertence ao Iraque, no Oriente Médio. A matemática babilônica continuou em uso até o surgimento do Cristianismo.

A cerca de 2000 a.C., os Babilônios registravam seus símbolos numéricos em tábuas de argila, que depois eram cozidas para manter suas formas preservadas. Basicamente, eles usavam dois símbolos, cujos valores, assim como os Egípcios eram adicionados para formar novas representações, como podemos observar na Figura 3.

Figura 3 - Números Babilônicos.



Fonte: Sistema de Numeração Babilônico - Mundo Educação
https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/sistema-numeracao-babilonico.htm

De acordo com Ifrah (1986, p, 237), esta numeração utilizava propriamente apenas dois algarismos: Um cravo vertical representando a unidade e uma ‘asna’ associado ao número 10 (signos cuja grafia é denominada “cuneiforme” em virtude de seu aspecto em forma de cunhas e de cravos). E os números de 1 a 59 eram representados de modo aditivo, repetindo cada um desses dois signos tantas vezes quantas fossem necessários.

Boyer (2012, p. 40) descreve que o sistema decimal, que era tão comum à maioria das civilizações, deu lugar a base sessenta na Mesopotâmia. O porquê dessa mudança pode ter sido por questões astronômicas, ou a combinação natural de dois esquemas mais antigos, um decimal e a base 6. A base 60 também pode ter sido adotada pelo interesse da metrologia.

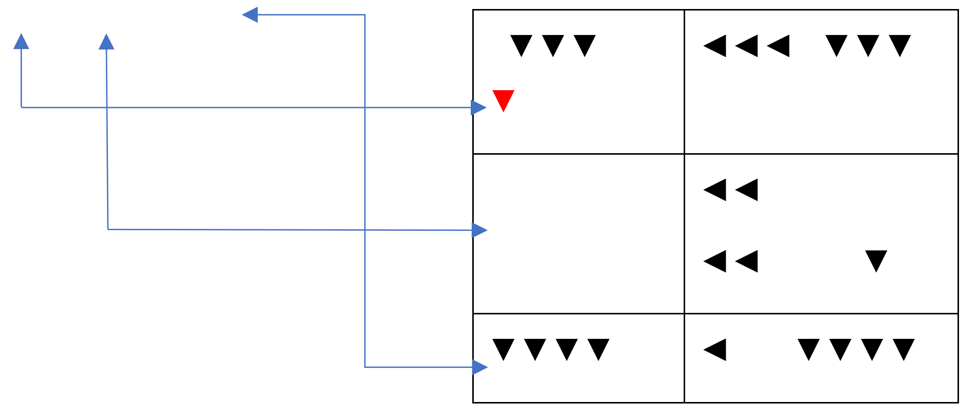
Os Babilônios perceberam que seus dois símbolos para unidade e dezenas bastavam para representar um número inteiro. Isso tornou possível a elaboração da notação posicional, ou seja, um sistema de representação numérica no qual o valor de cada algarismo depende da sua posição na composição do número. Exatamente a mesma inspiração da forma de numeração dos dias de hoje. E estabeleceram que os símbolos podiam receber valores que dependessem de suas posições na escrita do número. Assim, os Babilônios dominavam a computação que é utilizada no sistema decimal, conforme conhecemos. As operações matemáticas dos Babilônios eram semelhantes às usadas ainda hoje (BOYER, 2012, p. 41).

Para realizar a operação de adição entre dois ou mais números, utilizamos o seu valor posicional, em outras palavras, juntamos unidade com unidade, dezena com dezena, centena com centena, e assim sucessivamente. O número 222, por exemplo, utiliza o mesmo algarismo com significado diferente de acordo com a posição ocupada no número. Da direita para a esquerda, na primeira posição, valendo 2 unidades; na segunda, 2 dezenas; e na terceira, 2 centenas.

Um outro exemplo que podemos citar é a adição dos números 213 e 41, que estão na classe das unidades. Ao operarmos, encontramos como a soma o número 254, que tem duas centenas, cinco dezena e quatro unidades, ou seja, o resultado pode atingir outras classes.

Para somar 213 + 41, nesse sistema de numeração, organiza-se da seguinte forma:

$$213 + 41 = 254$$



Legenda: ▼ = 60 = 1; ◀ = 10; ▼ = proveniente da soma de 40 + 30.

Note que, como estamos trabalhando com base 60, podemos escrever:

213 = 60 + 60 + 60 + 30 + 3 e 41 = 40 + 1.

Analisando o esquema apresentado acima, observe que na primeira linha e primeira coluna os três triângulos na vertical em preto e na segunda coluna os três triângulos na horizontal e os três triângulos na vertical também em preto são provenientes da decomposição do número 213, de maneira extremamente análoga acontece na decomposição do número 41 que se encontra na segunda linha e segunda coluna. À medida que vamos somando os números, caso aconteça que essa soma ultrapasse 59, colocamos um triângulo na vertical, que é o que acontece com o triângulo em vermelho, ele é proveniente da soma de 30 + 40 = 60 + 10. Na terceira linha e primeira coluna aparece a quantidade de 60 que contém o 254, já na terceira linha e segunda coluna são as parcelas que faltam para completar o número, ou seja, podemos escrever 254 = 60 + 60 + 60 + 60 + 10 + 4. O fato de escrever o 254 e os demais números desta forma, ocorre em função dos Babilônicos usarem na sua numeração a base 60.

1.2.3 Sistema de Numeração Indo-arábico

Os povos Hindus se desenvolveram as margens do rio Indo (atualmente onde é localizado o Paquistão). Os matemáticos e astrônomos hindus desenvolveram ao longo do tempo, um sistema de numeração cujo documento mais antigo é um livro publicado há cerca de 1.500 anos.

Esse é o sistema que utilizamos atualmente, nomeado por Sistema Indo-Arábico, também chamado sistema de numeração de base dez. Semelhante quanto ao desenho dos números e igual quanto ao uso de conjuntos tomados de dez em dez. Uma explicação bastante intuitiva para utilizar esse agrupamento é que o ser humano possui dez dedos nas duas mãos, o que pode ter inspirado o processo de contagem em agrupamentos de 10 em 10, assim como é o sistema de numeração decimal. Na Figura 4 temos uma apresentação da evolução dos algarismos até os dias de hoje.

Figura 4 - Números Indo-arábico.

Fonte: Algarismos arábicos - História, Sistema de Numeração Árabe, símbolos https://escolaeducacao.com.br/algarismos-arabicos/

Vale ressaltar a dificuldade que os povos hindus tinham para representar grandes números, pois devido a cada número possuir uma simbologia, ficaria exaustiva a escrita. Eles solucionaram esse problema optando por escrever os algarismos por extenso, embora, segundo Ifrah (2005, p. 267), há muito tempo eles já tinham conseguido contornar a dificuldade, recorrendo para tanto aos nomes de números sânscrito (língua culta hindu que constituiu durante muito tempo, e ainda constitui um vínculo intelectual constante entre os eruditos e sábios com modo de falar diferentes). Os hindus, agrupando em dez, fizeram um sistema de numeração com a ideia de posição. Em tal sistema, eram usados símbolos distintos para representar as quantias de 1 a 9. A simbologia para o zero foi desenvolvida mais adiante, no século VI, e era um ponto ou um pequeno círculo. Os árabes adotaram o sistema de numeração Hindu, pela praticidade e facilidade para calcular, já no século VIII.

Quando povoaram o norte da África e parte da Espanha, os árabes ocidentais introduziram os símbolos hindus, que deram origem aos símbolos que conhecemos hoje, os símbolos indo-arábicos, e ao sistema de numeração conhecido como Sistema de Numeração Decimal.

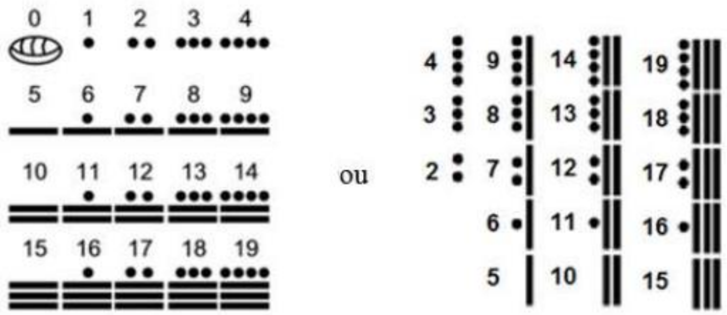
Esses, dentre outros fatos históricos, contribuíram para a evolução dos números e dos sistemas de numeração.

1.2.4 Sistema de Numeração Maia

A civilização conhecida como Maia viveu no sul e sudoeste do México (que correspondem aos estados de Yucatán, Campeche, Tabasco, Quintana Roo e zona oriental de Chiapas) e em partes da Guatemala, Honduras e Belize. Semelhante aos egípcios, os maias trabalhavam com agricultura. Embora seja uma civilização muito mais recente em relação as demais, integra a história e a cultura mais antiga dentre os povos americanos (FERREIRA *et al.,* 2014, p. 2).

A civilização Maia organizou um sistema de numeração que utilizava a base 20 e baseado na posição. Conseguiram utilizar apenas três símbolos, incluindo o número zero (símbolo ovalado). Foram o primeiro povo a utilizarem um símbolo para o zero. Também dominavam as quatro operações básicas da matemática: multiplicação, divisão, soma e subtração.

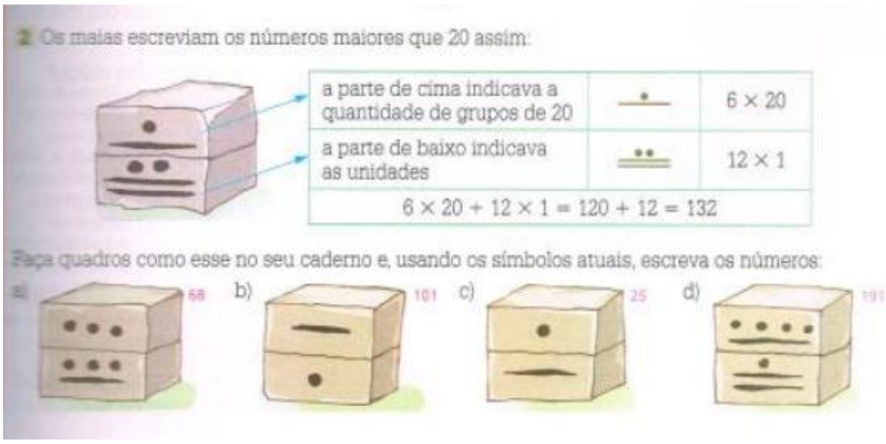
Figura 5 - Representação dos numerais Maias.



Fonte: o uso de numeração e ábacos hiberoamericanos na educação básica. Disponível em: https://im.ufal.br/evento/bsbm/download/minicurso/abaco.pdf

Os Maias utilizavam raciocínio lógico e operações de adição. Na Figura 6, Giovanni & Giovanni Jr, no livro didático “Pensar & Descobrir” (2005, p. 17) fez uma comparação dos nossos números atuais com os números Maias. Através da tabela o aluno pode perceber a diferença entre ambos e como são construídos os números dessa civilização. O livro traz atividades para trabalhar a representação Maia.

Figura 6: Exercício envolvendo representação Maia.



Fonte: Giovanni & Giovanni Jr, no livro didático “Pensar & Descobrir” (2005, p. 17)

É bem possível que os Maias trabalhavam perfeitamente com divisões e com frações. Mas houve uma destruição em massa de seus registros pelos espanhóis, no período colonial, que eliminou as evidências inegáveis. Ademais, em seus cálculos de calendários, adotavam o intervalo de tempo de 20 anos, denominado *k’atuns*, pois utilizavam um sistema numérico de base 20 (NOGUEIRA, 2015, p. 7).

Para indicar partes em geral, os maias utilizavam o termo *tzuc*, que literalmente significa “parte”. No entanto não há muito mais sobre frações maias além dessas poucas constatações.

1.3 AS PRIMEIRAS IMPRESSÕES SOBRE O CONCEITO DE FRAÇÕES

Com o conhecimento de um sistema de numeração, os povos antigos foram motivados a tentar registrar as medidas de forma mais precisa, pois já naquela época eram feitas divisões dos terrenos de cada agricultor, por exemplo.

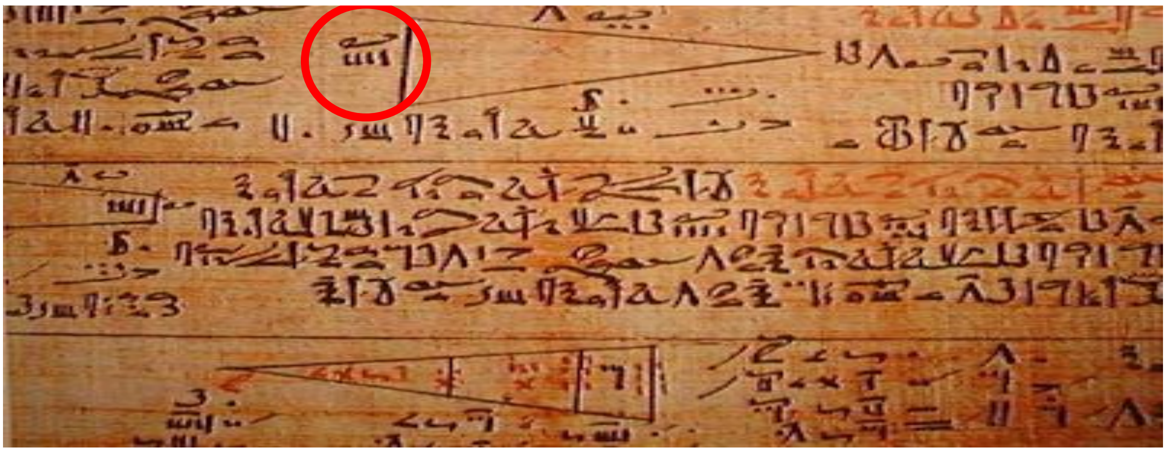
Segundo Boyer (1996, p.09), os homens da idade da pedra não usavam frações, mas com o advento de culturas mais avançadas durante a idade de bronze, parece ter surgido a necessidade de desenvolver o conceito e a notação para frações.

De acordo com Castro (2009, p. 59):

> Os números fracionários surgiram no Antigo Egito, às margens do Rio Nilo, por volta de 3000 a.C. na dinastia do Faraó Sesóstris. O Egito estava passando por um momento de transição, sua agricultura estava crescendo e o Faraó decidiu dividir as terras às margens do Rio Nilo em lotes iguais entre os agricultores. Para fazer as demarcações dos lotes foram chamados os geômetras do faraó, conhecidos como estiradores de cordas. As divisões eram feitas todo ano, pois como as inundações ocorriam no período de junho a setembro, as demarcações feitas desapareciam. Assim, os estiradores voltaram a demarcar os lotes. A marcação era feita da seguinte forma: esticavam-se as cordas e observavam quantas vezes essa unidade de medida estava contida no lote. Como a medida muitas vezes não resultava em um número inteiro, houve a necessidade da criação de um novo conceito de números, denominado números fracionários.

Eles escreviam esses novos números, aos quais chamamos de frações, com uma espécie de sinal oval escrito em cima do denominador. Mas os cálculos eram complicados, pois no sistema de numeração que usavam no antigo Egito os símbolos se repetiam muitas vezes, como mostra na Figura 7.

Figura 7 - Papiro de Rhind ou Ahmes.



Fonte: http://amandamonteiro04.blogspot.com/2015/06/sistemas-de-numeracao.html

Em destaque, na Figura 7, observando a simbologia circulada, percebemos a utilização do uso das frações em um dos problemas do Papiro de Rhind ou Ahmes. Os egípcios, assim como os babilônios, também trabalhavam com frações, com partes da unidade. Foi observado que só usavam frações com numerador unitário: 1/2, 1/3, 1/4, 1/7, 1/15, 1/47. Qualquer parte da unidade era expressa como a soma de frações desse tipo.

A notação de fração egípcia foi desenvolvida no Reino Médio do Egito. Os cinco primeiros textos em que aparecem frações egípcias são o rolo de couro matemático egípcio, o Papiro matemático de Moscou, o Papiro Reisner, o Papiro Kahun e a tábua de madeira de Akhmim, criados há aproximadamente 2200 a.C (ANSHEL & GOLDFELD, 1991).

Um texto posterior, o *Rhind Mathematical Papyrus*, inseriu diversas maneiras aperfeiçoadas de escrever frações egípcias. O Papiro Matemático de Rhind (Figura 8), um dos mais antigos trabalhos matemático egípcio, inclui uma tabela matemática para converter números racionais da forma $\frac{2}{n}$ em frações egípcias, por meio da soma de frações unitárias distintas, sendo conhecida como a forma que os egípcios usavam para escrever frações. O texto, escrito durante o Segundo Período Intermediário do Egito (aproximadamente 1650-1550 a.C) por Ahmes, descreve a representação de 50 números racionais.

Figura 8 - Parte do Papiro de Rhind ou Ahmes.

Fonte: https://www.matematica.br/historia/prhind.html

No entanto, quando as frações não eram unitárias, representavam em forma de adição de frações unitárias. Porém, a única fração que não era decomposta em adições de frações unitárias era a fração $\frac{2}{3}$ e, para essa representação, eles utilizavam um método específico. De acordo com Boyer (1996, p. 9), eles atribuíam à fração $\frac{2}{3}$ um papel especial nos processos aritméticos de modo que para achar o terço de um número, primeiro achavam os dois terços e tomavam depois a metade disso. Assim, por exemplo, a fração $\frac{2}{5}$ era escrita como $\frac{1}{3} + \frac{1}{15}$, enquanto a fração $\frac{3}{5}$ era representada como sendo $\frac{3}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15}$. O Papiro Rhind contém uma tabela de conversão de partes unitárias para essas frações.

Já os babilônicos utilizavam frações com denominadores 60, por ser a base do sistema de numeração adotado. Possivelmente, o uso do número 60 pelos babilônios se deu pelo fato de que é um número menor do que 100 com maior quantidade de divisores inteiros. Os Romanos usavam constantemente frações com denominador 12, talvez por ser um número que embora pequeno, possui um número expressivo de divisores inteiros. Com o passar dos tempos, muitas notações foram usadas para representar frações. A atual maneira de representação data do século XVI. Os números decimais têm origem nas frações decimais. Por exemplo, a fração $\frac{1}{2}$ significa o mesmo valor da fração $\frac{5}{10}$ que, por sua vez, é equivalente a 0,5 em notação de número decimal.

O método dos egípcios calcularem permaneceu uniforme com o passar do tempo. Em cada etapa da sua história, as operações matemáticas eram feitas em torno da operação de adição. Isso deixou os cálculos egípcios primitivos e complexos.

O sistema decimal, predominante na maioria das civilizações até então. Mas na Mesopotâmia foi adotado uma notação que usava a base sessenta, ou sistema sexagesimal.

Os babilônios deram um passo importante em estender o princípio da posição para cobrir as frações. Dessa forma conseguiram representar facilmente os números fracionários usando as posições $60^{-1}, 60^{-2}, 60^{-3}, \cdots,$ e assim sucessivamente.

Para BOYER (2012, p. 42),

> O segredo da superioridade da matemática babilônia sobre a dos egípcios indubitavelmente está em que os que viviam “entre rios” deram o passo muito feliz de estender o princípio da posição para cobrir as frações, bem como os inteiros. (...) Significava que os babilônios dominavam o poder de computação que a moderna notação decimal para frações nos confere.

Os babilônios, segundo BOYER (2012, p. 42), utilizavam as frações em problemas de economia como na distribuição de patrimônios entre herdeiros e dominavam os cálculos com estes números. Na divisão de frações, por exemplo, os babilônios multiplicavam o numerador pelo inverso do denominador e, para isso, usavam uma tabela de recíprocos (tabela babilônica contendo os inversos dos números sexagesimais inteiros).

Contudo, percebemos que as frações foram usadas por diferentes povos, de formas distintas e com bases e notações que variavam de civilização para civilização, cada uma elaborou sua própria maneira de representar frações.

1.4 DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES DOS NÚMEROS RACIONAIS

No nosso sistema de ensino atual, as primeiras impressões acerca do conteúdo de frações são apresentadas no Ensino Fundamental. Apresenta-se que se uma fração tem o denominador na forma de potência de dez, então esse número pode ser representado na forma decimal. De maneira mais geral, sabendo que os alunos já obtiveram conceitos e propriedades sobre os conjuntos dos números naturais e inteiros, apresenta-se o conjunto dos números racionais. Que, de modo intuitivo, vem suprir a necessidade de representação dos números e suas partes. Logo, é intuitivo pensar nos números racionais como quociente de dois números inteiros a e b, com $b \neq 0$.

Para definirmos os conceitos e propriedades de frações seguiremos o que diz Guidorizzi (2014) no livro um curso de cálculo.

Para Guidorizzi (2014, p. 1),

Definição: *Os números racionais são os números da forma* $\frac{a}{b}$*, sendo* a *e* b *inteiros e* $b \neq 0$*; O conjunto dos números racionais é indicado por* $\mathbb{Q}$*, assim:*

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b}\middle|\, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$$

no qual $\mathbb{Z}$ *indica o conjunto dos números inteiros:*

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Pensando na representação de tais números racionais é necessário frisarmos que tanto existem representações em números decimais finitos como também podem ser representados como números decimais infinitos. Por exemplo,

$$\frac{1}{2} = 0{,}5\,; \frac{4}{5} = 0{,}8\,; \frac{1}{10} = 0{,}1$$

são exemplos de números racionais que podem ser escritos na forma decimal finita. Assim como, os números

$$\frac{1}{3} = 0{,}333\dots\ ; \frac{2}{9} = 0{,}222\dots; \frac{11}{90} = 0{,}1222\dots,$$

tem representações decimais infinitas.

Uma pergunta que surge de maneira natural é quais números racionais tem representação decimal finita. Antes de mais nada, analisaremos o seguinte exemplo,

Sabemos que:

$$\frac{725}{1000} = 0{,}725$$

e que dada qualquer fração decimal finita a mesma pode ser escrita na forma de fração ordinária cujo denominador é uma potência de 10. Aplicando alguns critérios de divisibilidade podemos tornar a fração acima na forma irredutível, obtendo:

$$0{,}725 = \frac{725}{1000} = \frac{29}{40}$$

Obtivemos o denominador 40, dividindo 1000 por 25, onde 25 é o maior divisor comum de 725 e 1000. Note que o inteiro 40, assim como 1000, tem apenas dois fatores primos, a saber 2 e 5. Além disso, perceba que qualquer fração decimal finita que tivéssemos começado, ao invés de 0,725, a fração irredutível $\frac{m}{n}$ nos levaria a mesma propriedade, ou seja, os fatores primos de n não podem ser outros além de 2 e 5, pois é fácil ver que n é termo de alguma potência de 10, e obviamente $10 = 2 \text{ x } 5$. Esse fato nos leva a um resultado mais geral que é um teorema encontrado no livro *Números: Racionais e Irracionais*, do autor Niven (1984, p.36).

Antes de apresentarmos e demonstrarmos o teorema, vamos definir, uma representação decimal. Entenderemos como uma representação decimal, um elemento cuja forma possui a seguinte característica:

$$A = t_0, t_1\, t_2\, t_3 \ldots . t_s \ldots ,$$

onde, $t_0 \geq 0$ pertence aos inteiros (t_0 é a parte inteira) e $t_1 t_2 t_3$ .... t_s ... pertence aos naturais (onde cada t_s representa um dígito).

Teorema*: Um número racional, na forma irredutível* $\boldsymbol{\frac{a}{b}}$***,*** *tem uma representação decimal finita se, e somente se,* ***b*** *não tiver outros fatores primos além de 2 e 5.*

Vamos demonstrar esse fato.

Demonstração: Suponhamos que *a* e *b* sejam da forma $2^m 5^n$ com m e *n* inteiros positivos ou nulos. Então, de duas uma; ou *n* é menor do que ou igual a m (*n*≤ m), ou então, *n* é maior igual do que *m* (m ≤ *n*). Se *n* ≤ m multiplicaremos o denominador e o denominador da fração por 5^{m-n} :

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} = \frac{\boldsymbol{a}}{2^m 5^n} = \frac{\boldsymbol{a}.5^{m-n}}{2^m 5^n 5^{m-n}} = \frac{\boldsymbol{a}.5^{m-n}}{2^m 5^m} = \frac{\boldsymbol{a}.5^{m-n}}{10^m}$$

Sendo $\boldsymbol{m}$ – n positivo ou nulo, 5^{m-n} será um inteiro e, portanto, $\boldsymbol{a}.5^{m-n}$ também será um inteiro, digamos *c*. Assim, podemos escrever:

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} = \frac{\boldsymbol{c}}{10^m},$$

e, como a divisão do inteiro *c* por 10^m requer apenas que coloquemos a vírgula no lugar correto, obteremos para $\frac{a}{b}$ uma representação decimal finita.

Por outro lado, se *n*>*m*, multiplicaremos o numerador e o denominador de $\frac{a}{b}$ por 2^{m-n}:

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} = \frac{\boldsymbol{a}}{2^m 5^n} = \frac{\boldsymbol{a}.\,2^{n-m}}{2^m 5^n 2^{n-m}} = \frac{\boldsymbol{a}.\,5^{m-n}}{2^n 5^n} = \frac{\boldsymbol{a}.\,2^{n-m}}{10^n},$$

Escrevendo *d* no lugar de $\boldsymbol{a}.\,2^{n-m}$, obteremos:

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} = \frac{\boldsymbol{d}}{10^n}$$

e assim, novamente teremos, para $\frac{a}{b}$, uma representação decimal finita.

Uma pergunta que surge de maneira natural é: dado um número racional na forma fracionária $\frac{m}{n}$ o que acontece com o quociente da divisão de m por n, se n possuir algum fator primo diferente de 2 e 5.

Um outro conceito bastante conhecido e utilizado é o de dízima periódica. Uma dada representação decimal $A = t_0, t_1 t_2 t_3 \ldots . t_s \ldots .$, é denominada dízima periódica de período $t_1 t_2 t_3 \ldots . t_s \ldots .$, se após a vírgula algum dígito $\boldsymbol{s}$ se repete infinitamente.

O fato de representar uma dízima periódica usando reticências pode causar uma ambiguidade, desta forma é comum representar a continuação desses dígitos que se repetem, usando uma barra em cima da parte que se repete, simbolicamente escrevemos:

$$A = t_0, \overline{t_1 t_2 t_3 \ldots t_s}$$

Portanto, se o denominador de um número na forma fracionária possui um fator primo diferente de 2 e 5, então a representação decimal desse número será infinita e periódica.

Após a demonstração do teorema e algumas definições, mostraremos algumas propriedades que envolvem os números racionais. Começaremos com as propriedades que envolvem adição e da multiplicação.

1.4.1 Adição e Multiplicação de números racionais

Segundo Guidorizzi (2014, p. 1), dados dois números racionais quaisquer, digamos $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, a soma e o produto de tais números são obtidos utilizando:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd} \quad \text{e} \quad \frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{ac}{(bd)}$$

Considerando o conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$) juntamente com as operações (+, ·, ≤) e sejam x, y e z números racionais quaisquer são válidos as seguintes propriedades:

Associativa

(A1) $(x+y)+z=x+(y+z)$ (M1) $(x.y).z=x.(y.z)$

Comutativa

(A2) $x+y=y+x$ (M2) $x.y=y.x$

Existência de elemento neutro

(A3) $x+0=x$ (M3) $x.1=x\ (1\neq 0)$

Existência de oposto

(A4) Para todo racional x existe um único racional y tal que $x+y=0$. Tal y denomina-se oposto de x e indica-se por $-x$. Assim, $x+(-x)=0$.

Existência de inverso

(M4) Para todo racional $x\neq 0$ existe um único racional y tal que $x\cdot y=1$. Tal y denomina-se inverso de x e indica-se por x^{-1} ou $\frac{1}{x}$. Assim, $x\cdot x^{-1}=1$.

Distributiva da multiplicação em relação à adição

(D)

$x.(y+z)=xy+xz$

Reflexiva

(O1)

$x\leq x$

Antissimétrica

(O2)

$$x \leq \mathrm{y} \text{ e } y \leq \mathrm{x} \ \Rightarrow x = y$$

$(\text{ leia} - \text{se } \ x \leq y \text{ e } y \leq x, \text{então } x = y \text{ ou } \ x \leq \mathrm{y} \text{ e } y \leq x \ \text{ implica } x = y\ .$

Transitiva

(O3)

$x \ \leq y \text{ e } y \leq z \ \Rightarrow \ x \leq z.$ quais quer que sejam os racionais x, y e z

(O4)

$$x \leq y \text{ ou } y \leq x.$$

Compatibilidade da ordem com a adição

(OA)

$$x \leq y \text{ e } x + z \leq y + z$$

(Somando-se a ambos os membros de uma desigualdade um mesmo número, o sentido da desigualdade se mantém.)

Compatibilidade da ordem com a multiplicação

(OM)

$$x \leq y \text{ e } 0 \leq z \ \Rightarrow \ \ xz \leq yz$$

(Multiplicando-se ambos os membros de uma desigualdade por um mesmo número positivo, o sentido da desigualdade se mantém.)

Desta forma concluímos que as frações podem ser escritas em forma decimal ou em forma de dízima periódica, e que gozam de algumas propriedades, onde usamos para resolvermos exercícios independente do seu grau de dificuldade, ou seja, se o exercício é mais objetivo ou contextualizado.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 ENGENHARIA DIDÁTICA

Dentro de um contexto mais geral, buscando a etimologia do termo didática, temos que este provém do grego *didaktikós*, exercendo o papel do estudo da técnica de guiar ou orientar a aprendizagem. Comenius (1592 - 1670), no livro Didactica Magna, do século XVII, não ponderava os componentes específicos dos conhecimentos de cada área do conhecimento e contribuiu para a reestruturação da educação e aperfeiçoamento dos métodos, das ciências, das artes e das línguas. Foi um pedagogo cristão, fundador da Didática e considerava que os objetivos da educação consistiam no conhecimento de si mesmo e do mundo, na virtude e na piedade ou religião. O conhecimento leva à virtude e esta à piedade. O aluno precisa de condições para desenvolver a inteligência, o raciocínio e o juízo, tornando-se assim capaz por si mesmo. Ou seja, a experiência abre a inteligência (ARRUDA, 2007, p.15).

A metodologia da Engenharia Didática iniciou-se em decorrência da vertente conhecida como Didática da Matemática. Douady (1985, p. 885 *apud* Ribeiro *et al.*, 2018, p. 3) define a Didática da Matemática como:

> área das ciências que estuda o processo de transmissão e aquisição de diferentes conteúdos no ensino da Matemática, propondo-se a descrever e explicar os fenômenos relativos ao ensino-aprendizagem específica da matemática.

Mas, a Didática da Matemática, ainda de acordo com Douady (1985, p. 886), não se limita a pesquisar uma maneira eficaz ou um estilo de ensinar uma determinada ideia ou conceito particular.

2.1.2 A ENGENHARIA DIDÁTICA COMO RECURSO METODOLÓGICO

Como metodologia de pesquisa, a Engenharia Didática tem por virtude aprovar as habilidades e vivência do professor, percebendo-o como um investigador em potencial, podendo, segundo Almouloud (2007, p. 171), ser utilizada em pesquisas que estudam os processos de ensino e aprendizagem de um dado objeto matemático e, em particular, a elaboração de gêneses artificiais para um dado conceito.

Portanto, o docente deve acatar, segundo Carneiro (2005, p. 3), que sua prática de ensino é articulada como prática de investigação. A teoria da Engenharia Didática pode ser vista como referencial para o desenvolvimento de produtos para o ensino, gerados da junção do conhecimento prático com o teórico.

Nessa percepção, segundo Brum (2014, p. 04), o papel do professor é propor ao estudante uma situação de aprendizagem para que elabore seus conhecimentos como resposta pessoal a uma pergunta, e os faça funcionar ou os modifique como resposta às exigências do meio e não a um desejo do professor.

Vale ressaltar que a Engenharia Didática tem como principal atributo um esquema empírico baseado na concepção, realização, observação e análise de uma sequência de ensino, formada por uma quantidade adequada de aulas programadas e analisadas previamente com a finalidade de observar situações de aprendizagem.

Nessa concepção, Almouloud e Coutinho (2008, p. 67), afirmam que a Engenharia Didática:

> Caracteriza-se também como pesquisa experimental pelo registro em que se situa e modo de validação que lhe são associados: a comparação entre análise a priori e análise a posteriori. Tal tipo de validação é uma das singularidades dessa metodologia, por ser feita internamente, sem a necessidade de aplicação de um pré-teste ou de um pós-teste.

Desta forma, a Engenharia Didática tem o intuito de contribuir para a formação do docente e para a produção de conhecimento, em razão da reflexão e do enfrentamento das dificuldades e dos impasses.

2.2 A ENGENHARIA DIDÁTICA COMO PROPOSTA PARA O ENSINO

Ao se falar especificamente do ensino das frações no ensino básico, a Engenharia Didática surge como uma ponte metodológica por levar em consideração as peculiaridades tanto do ensino como dos alunos, à medida que almeja os conhecimentos prévios e a partir de onde se faz a construção de um saber verdadeiro, lúcido e autêntico.

O ensino e aprendizagem de frações está diretamente ligado ao conhecimento teórico e prático do nosso cotidiano. Sendo assim, surge a necessidade de o professor estar preparado para direcionar a sua ação educativa nesse caminho, o que exige uma capacidade reflexiva voltada para nosso dia a dia, buscando melhor expor o conteúdo abordado.

A Engenharia Didática como metodologia abrange quatro fases: as análises preliminares, a concepção e a análise a priori, a experimentação e a análise a posteriori e validação.

Sobre as fases da Engenharia Didática, Pommer (2013, p.22) destaca que:

> É importante salientar que as quatro fases não ocorrem, geralmente, de forma linear e estanque. A elaboração da Engenharia Didática necessita, em alguns momentos, da articulação, da antecipação e até da superposição dos elementos caracterizadores destas quatro fases.

Discorreremos a seguir sobre cada uma dessas fases e o que é feita em cada uma delas.

2.2.1 Análises Preliminares

Na etapa intitulada como análises preliminares é feita uma sondagem a respeito do objeto de estudo em questão. As análises são feitas levando em conta o esquema didático teórico sobre o qual o investigador se apoia e os conhecimentos didáticos já obtidos a respeito do tema em estudo. Faz-se um estudo epistemológico dos conteúdos envolvidos no ensino, além de analisar como vem sendo desenvolvido o ensino atual do referido assunto e suas implicações, e fazer uma análise da percepção dos alunos, das dificuldades e obstáculos que se mostram diante do saber apresentado.

Segundo Artigue (1996, p. 202), as análises preliminares residem numa análise detalhada e prévia, das concepções dos alunos, das dificuldades e dos erros pertinentes, e a engenharia é concebida para provocar, de forma controlada, a evolução das concepções.

Almouloud e Coutinho (2008, p.66) asseguram que nessa fase são feitas análises que comportam as seguintes etapas:

- epistemológica dos conteúdos visados pelo ensino;
- do ensino usual e seus efeitos;
- das concepções dos alunos, das dificuldades e dos obstáculos que marcam sua evolução;
- das condições e fatores de que depende a construção didática efetiva;
- a consideração dos objetivos específicos da pesquisa;
- o estudo da transposição didática do saber considerando o sistema educativo no qual insere-se o trabalho.

Segundo Pais (2011, p. 101), para um melhor desempenho da análise preliminar, é aconselhável recorrer a uma descrição das principais dimensões que definem o fenômeno a ser estudado e que se relacionam com o sistema de ensino, tais como a epistemologia cognitiva, pedagógica, entre outras. Cada uma dessas dimensões participa na constituição do objeto de estudo.

Desta forma, mediante a uma refinada análise preliminar, o professor pode pensar em uma sequência didática para maximizar o aprendizado ou pelo menos minimizar as dificuldades dos alunos com as operações envolvendo o objeto de estudo.

2.2.2 Concepção e Análise a Priori

Nesta etapa da Engenharia Didática o professor deve realizar a descrição e a análise da situação didática selecionada por ele e que será proposta ao estudante, onde são apontadas problemáticas referente ao tópico de estudo e são edificadas as possibilidades que serão analisadas na ação investigativa da proposta didática a ser apresentada.

Berenguer (2010, p. 30) defende que a elaboração das possibilidades se constitui em um elemento importante no trabalho da Engenharia Didática, pois são elas que serão comparadas com os resultados da sequência didática para verificar a validação ou não da mesma.

Segundo Almouloud e Coutinho (2008, p.67), essas duas variáveis (descrição e análise) podem ser de maneira generalizada ou a depender do conteúdo matemático abordado; e suas análises serão realizadas em três vias: a via epistemológica (associada às características do saber), a via cognitiva (associada às dimensões cognitivas dos alunos sujeitos da aprendizagem) e via didática (associada às características do sistema de ensino, no qual os sujeitos estão inseridos).

O foco de uma análise a priori é definir como as escolhas feitas (isto é, os elementos que desejamos declarar como pertinentes) deixam controlar os comportamentos dos alunos e explicar seu sentido.

Sendo assim, de acordo com Almouloud e Coutinho (2008, p.67), em uma análise a priori é relevante:

i) Retratar os elementos locais e as características da situação didática desenvolvida.

ii) Explorar a importância da situação para o docente e construir mecanismos, tomadas de decisões, controle e validação que o aluno deverá ter diante da situação elaborada.

iii) Antever possíveis atitudes dos alunos e mostrar como a análise feita permite manipular sua interpretação, assegurando que as atitudes esperadas por parte dos alunos, se e quando eles intervêm, resultam do desenvolvimento do saber no processo de aprendizagem.

Portanto, é nessa etapa da Engenharia Didática que se busca prever as ações e os comportamentos dos alunos que poderão ocorrer. E é nesse momento que se buscam estratégias, focada no aluno, pois segundo Porto (2019, p.33) ele é o agente principal de sua aprendizagem, enquanto o professor tem o papel de oferecer atividade por meio da devolutiva, ou o acompanhamento supervisionado do aprendizado do aluno. Fazendo assim a institucionalização e sua presença está também no contrato didático que vai além do desenvolvimento da sequência didática.

2.2.3 Experimentação

Na fase da experimentação é o momento de se colocar em prática toda a estratégia construída, retificando-o se necessário, quando as análises locais do desenvolvimento experimental detectam essa necessidade, o que implica em um retorno a fase da análise a priori, em um processo de aperfeiçoamento. Segundo Almouloud e Coutinho (2008, p.68), ela é acompanhada de uma etapa de análise a posteriori que se alicerça no conjunto de elementos recolhidos ao longo da experimentação, que podemos considerar como observações realizadas sobre as sessões de ensino e as produções dos alunos em sala de aula ou fora dela. Esses dados são, às vezes, completados por dados obtidos através de questionários, ou entrevistas individuais.

No decorrer do ensino, considerando-se a análise do fenômeno investigado, é de grande relevância que as aulas não devem ser como de rotina. É necessário atenção para que se possa maximizar as informações que podem ser úteis, e o cenário real da aplicação devem estar descritas no relatório da pesquisa.

Nessa concepção, Berenguer (2010, p. 14) afirma que:

> Nesta fase, há de se colher também os meios de registros dos dados colhidos na experimentação, que vai depender das variáveis priorizadas na análise a priori. Os dados coletados mediante observações feitas nas sessões de ensino e pelas produções dos alunos, com a utilização de gravações do diário de bordo. Além disso, para uma melhor compreensão do ocorrido, estes dados podem ser completados com uso de questionários, entrevistas e testes, individuais ou em pequenos grupos, realizados durante a experimentação ou no final dela.

Portanto, nessa etapa da pesquisa cabe ao professor/pesquisador elaborar abordagens metodológicas que sigam os princípios da fase de experimentação.

2.2.4 Análise a Posteriori e Validação

É nessa fase que se tem o contato do pesquisador, professor e observadores com o corpo docente, o agente passivo da pesquisa, e são expostos os objetivos e condições em que será feita a pesquisa.

Conforme Porto (2019, p. 34), essa fase é o conjunto de resultados que se chega a partir das observações realizadas na transcorrência de cada sessão de ensino. Analisam-se os construtos didáticos dos alunos, as observações feitas em relação ao desempenho deles durante a aplicação da sequência didática, além de todas as outras anotações feitas durante a experimentação.

Do ponto de vista de Almouloud (2007, p. 177),

> A análise a posteriori depende das ferramentas técnicas (material didático, vídeo) ou teóricas (teoria das situações, contrato didático etc.) utilizadas com as quais se coletam os dados que permitirão a construção dos protocolos de pesquisa. Esses protocolos serão analisados profundamente pelo pesquisador e as informações daí resultantes serão confrontadas com a análise a priori realizada. O objetivo é relacionar as observações com os objetivos definidos a priori e estimar a reprodutibilidade e a regularidade dos fenômenos didáticos identificados.

A partir da comparação dos resultados obtidos na análise a priori e na análise a posteriori, as hipóteses propostas durante a investigação são analisadas para que seja identificado se elas são verificadas. Concluída essa etapa, os dados deverão ser validados ou questionados.

3 METODOLOGIA

No presente estudo participaram 75 (setenta e cinco) estudantes com faixa etária de 15 a 17 anos, do curso técnico integrado ao ensino médio, de um Instituto Federal, localizado na cidade de Caracaraí, no estado de Roraima. Dos 75 alunos envolvidos, 21 pertenciam ao curso A, 33 pertenciam ao curso B e 21 pertenciam ao curso C, que em sua maioria eram compostos por alunos indígenas, venezuelanos, alunos de baixa renda e com uma vivência mais rural.

A presente pesquisa teve como base o modelo quantitativo experimental, que de acordo com Fonseca (2002):

> A pesquisa experimental seleciona grupos de assuntos coincidentes, submete-os a tratamentos diferentes, verificando as variáveis estranhas e checando se as diferenças observadas nas respostas são estatisticamente significantes. Para avaliar quais os fatores extrínsecos são eliminados ou controlados. Os efeitos observados são relacionados com as variações nos estímulos, pois o propósito da pesquisa experimental é apreender as relações de causa e efeito ao eliminar explicações conflitantes das descobertas realizadas. (FONSECA, 2002, p.38).

A técnica utilizada para coletar os dados, foi através da aplicação de dois questionários, um chamado de teste diagnóstico, que foi aplicado no primeiro contato com alunos, e outro chamado de teste de validação da prática. Posteriormente foi realizado as etapas da Engenharia didática proposta por Pommer (2013, p. 22), que possibilita, na análise a priori, prever o que vai acontecer durante a experimentação (situação didática), a partir das escolhas apropriadas das variáveis didáticas, que nortearão as possíveis estratégias de solução que o estudante possa elaborar. Além disso, na análise a posteriori, as hipóteses estabelecidas podem ser validadas, quando se compara os objetivos definidos com o comportamento dos estudantes durante o processo de aprendizagem.

Neste sentido, foram realizadas uma revisão bibliográfica e uma análise de três livros didáticos. A saber “Matemática” de Edwaldo Bianchini (2006), “Praticando Matemática” de Álvaro Andrini e Maria José Vasconcellos (2002) e “Projeto Teláris” de Luiz Roberto Dante (2015). Além disso, apresenta-se uma proposta de sequência didática para o ensino e aprendizagem de frações.

Neste trabalho, esses princípios da engenharia didática foram aplicados ao ensino das frações. Essa escolha foi feita devido a existência de muitos cenários que envolvem números fracionários e permitem organizar uma rede de significados, conforme descrito em Machado (2011, p. 19).

Apresentamos uma proposta de engenharia didática para o ensino das frações que pode ser aplicada em turmas do ensino básico.

A sequência didática é um agrupamento de atividades conectadas entre si, esquematizadas para ensinar um conteúdo, fase por fase, estruturadas de acordo com os objetivos que o docente almeja para aprendizagem de seus alunos e contornando atividades de avaliação que pode levar uma ou mais aulas. É uma maneira de encaixar os conteúdos a um tema, e, por sua vez, a outro tornando o conhecimento lógico ao trabalho pedagógico desenvolvido.

Segundo (ZABALA, 2007, p. 18), sequência didática é um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelo docente como pelos discentes.

Sendo assim, deixamos, como sugestão, uma sequência didática que possa ser levada para sala de aula, utilizando as quatros fases da engenharia didática, propostas por Pommer, como também os resultados obtidos com turmas do 1º ano de cursos técnicos integrado ao ensino médio, após aplicação da prática.

3.1 PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

3.1.1 Etapas para a sequência didática

Etapa 1 - Análises preliminares: Os estudos preliminares tratam dos referenciais que servem de apoio para a construção da sequência didática. Nessa fase sugere-se ao docente a aplicação de um teste com dez questões diferenciadas sobre problemas envolvendo frações.

Para o desenvolvimento da atividade nas análises preliminares o professor-pesquisador deve:

i) Apresentar o teste e seus objetivos;

ii) Compartilhar o material necessário para o desenvolvimento da atividade;

iii) Fazer a leitura e orientar os estudantes em relação ao desenvolvimento da atividade;

iv) Pedir que os estudantes anotem as respostas de cada tarefa;

v) Pedir que apresentem suas respostas;

vi) Anotar todos os aspectos que dizem respeito ao processo de solução das atividades pelos estudantes.

Sugere-se que nessa etapa seja dado um tempo de 2 horas – aulas, para que os estudantes tenham tempo suficientes para demonstrar todos seus conhecimentos prévios.

Etapa 2 - Concepção e Análise a Priori: Levando em conta o campo de conhecimento sobre as operações envolvendo frações e os resultados obtidos no teste, sugere-se ao docente que elabore uma atividade ligada a jogos como ferramenta de fixação, visando proporcionar aos alunos condições para uma melhor compreensão desses problemas, e para uma melhor qualidade dessa estratégia sugere-se que o professor disponibilize 10 horas-aulas.

Aqui deixamos como sugestão alguns jogos, como: Dominó das frações, Papa tudo das frações, Passa rápido das frações, Memória das frações, Jogo da velha das frações, Trilha das frações, Pife das frações e Stop das frações, que podem ser encontrados no site “Coquinhos Jogos Educativos”: https://www.coquinhos.com/tag/jogos-de-fracoes/.

Etapa 3 - Experimentação: Nessa fase sugere-se que o professor use o recurso citado na fase anterior, respeitando o tempo de cada um, ou seja, devida a enorme dificuldade encontrada por esses alunos com esse assunto, o mediador deve incentivar e motivar a realização da atividade proposta. Após isso sugere-se que o professor aplique um novo teste, com o mesmo tempo estimado nas análises preliminares, contendo a mesma quantidade de questões do primeiro teste.

Etapa 4 - Análise a posteriori e Validação: Nas análises a posteriori e validação sugere-se que confronte os resultados do teste e teste de avaliação da aplicação da prática, realizados com os alunos, antes e após a aplicação da sequência.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

4.1 ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS

A análise e escolha das obras foi feita com base nos critérios e propostas apresentadas referentes à abordagem do conceito de fração por pesquisadores como Bertoni (2009), Toledo e Toledo (1997), Van de Walle (2009), e os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática – MEC/SEF BRASIL (1997), tendo em vista uma abordagem mais significativa dos conceitos, visando facilitar uma compreensão do conteúdo para os alunos.

Serão analisados três livros didáticos, a saber: “Matemática” - 6º ano (Edwaldo Bianchini, 2006), “Praticando Matemática” – 6º ano (Maria José Vasconcellos, 2002) e “Projeto Teláris” – 6º ano (Luiz Roberto Dante, 2015), buscando averiguar como os autores abordam os conteúdos de frações, desde a apresentação inicial, contextualização e prática de exercícios, além de relacionar com as teorias que estamos abordando durante todo trabalho, levantando pontos que podem ser considerados positivos e negativos sobre a forma abordada.

4.1.1 Livro Didático “MATEMÁTICA” – 6º ano

Nessa coleção, Edwaldo Bianchini (2006) introduz o conceito de fração, relacionando seu uso no dia a dia. O autor afirma que as frações são usadas para indicar partes de quantidades, medidas, grupos etc. Apresentando as seguintes situações, como nos mostra a Figura 9.

Figura 9 - Abordagem do conceito de fração.

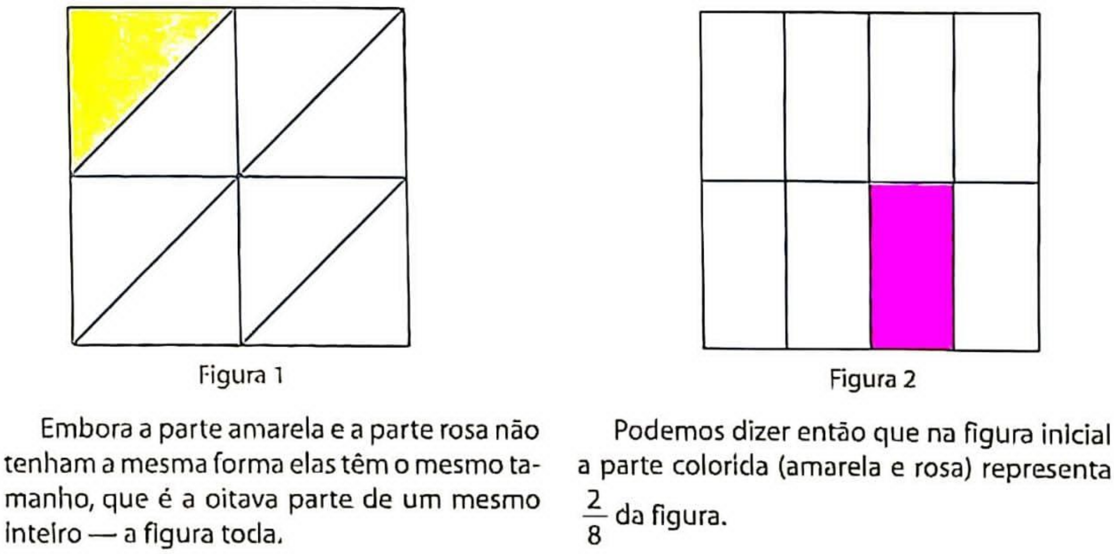
Fonte: Edwaldo Bianchini (2006, p. 104).

Na situação observada na Figura 9, percebemos que dificilmente encontramos distância de um logradouro a outro sendo medida dessa maneira. Embora o autor esteja tentando abordar o conteúdo por meio de uma situação que possa ser vivenciada pelo aluno, precisamos ressaltar que raramente essa situação seria vivenciada para contextualizar fração, o que não contribui para uma aprendizagem significativa dos conteúdos. Com tal situação, podemos afirmar que o autor força uma contextualização, e vale ressaltar, que não é dessa maneira que os alunos construirão significados frente ao conteúdo de fração.

O autor destaca que "é comum utilizarmos partes do nosso corpo para fazer uma medição" (Edwaldo Bianchini, 2006, p. 104). E, embora esse pensamento seja correto, da forma como foi abordada na Figura 9, promove uma situação bem improvável que aconteça, o que pode vir a provocar no aluno um desinteresse pelo assunto abordado, visto que para eles seria possível utilizar outros modos (mais rápido e práticos) de medição.

Em seguida, o autor apresenta as partes fracionárias a partir da divisão de gravuras em partes iguais, relacionando as partes pintadas com o total de partes divididas, ou seja, ele apresenta o significado parte/todo, como podemos observar na Figura 10.

Figura 10 - Ilustração do conceito de fração.



Fonte: Edwaldo Bianchini (2006, p. 109).

Observamos que o autor não deixa claro que essa divisão foi feita de maneira estratégica, podendo fazer com que o aluno pense que qualquer divisão feita terá sempre o mesmo tamanho.

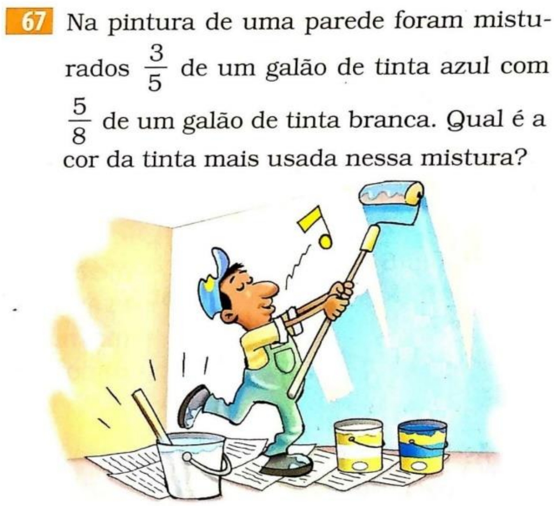
Segundo Bertoni (2009, p. 29), essa forma de exemplificar não contribui para o ensino/aprendizagem das frações, não corresponde com uma educação que visa à formação do cidadão independente e crítico, e à sua inclusão ativa na sociedade. A Figura 10 não traz um cenário contextualizado para a aprendizagem e sim um raciocínio de um professor. Autonomia e criticismo não serão alcançados por esquemas de dependência ao professor, desvinculados de um pensar consciente.

Por sua vez, a atuação ativa num mercado de trabalho que requer capacidade de resolver problemas, avaliar situações, propor soluções e ter versatilidade para novas funções, não pode ser alcançada apenas pelo exercício de um fazer mecânico, sem pensamento próprio e sem questionamentos.

Felizmente, os Parâmetros Curriculares Nacionais apontam para novos rumos, nas séries iniciais, os conteúdos relativos aos números fracionários foram diminuídos, havendo tempo suficiente para uma introdução mais detalhada e fundamentada a eles.

Exercícios ou problemas a respeito do conteúdo de frações, devem ser contextualizados de maneira que o aluno possa perceber as diversas situações em que podem aplicar e comparar as frações, como podemos observar na Figura 11.

Figura 11 - Problema de comparação entre frações.



67 Na pintura de uma parede foram misturados $\frac{3}{5}$ de um galão de tinta azul com $\frac{5}{8}$ de um galão de tinta branca. Qual é a cor da tinta mais usada nessa mistura?

Fonte: Edwaldo Bianchini (2006, p. 129).

A História da Matemática (Figura 12) aparece apenas no meio do capítulo de frações, não despertando a curiosidade do aluno acerca do conteúdo, uma vez que este já o estudou, ou até pelo fato de aparecer apenas no meio do livro, os professores deixam de abordar a história das frações, pois não atribuem a ela sua devida importância. Porém, as questões que se pode trabalhar referentes à história das frações são bastante propícias para serem exploradas.

Figura 12 - História da matemática.

PARA SABER mais

A Matemática na História

As frações aparecem nos mais antigos documentos matemáticos e, em geral, foram resultado dos vários modos de se operar a divisão.

Os babilônios já utilizavam as frações por volta do ano 2000 a.C., os egípcios usaram frações no Papiro Rhind — um texto matemático muito rico, escrito por volta de 1650 a.C., contendo 85 problemas copiados de trabalhos mais antigos — e os gregos passaram a usá-las em períodos posteriores.

Fonte: Edwaldo Bianchini (2006, p. 141).

Ressaltamos que o autor traz várias sugestões didáticas para trabalhar o conteúdo, conforme as Figuras 01, 02 e 03 no Anexo 01.

Segundo Van de Walle (2009, p. 58), ensinar com exercícios baseados em resolução de problemas é mais centrado no discente do que no docente. O ensino inicia e se constrói com as ideias que as crianças possuem – seus “pontos azuis” seus conhecimentos prévios. É um processo que requer confiança nas crianças – uma convicção de que todas elas podem criar projetos significativos sobre matemática.

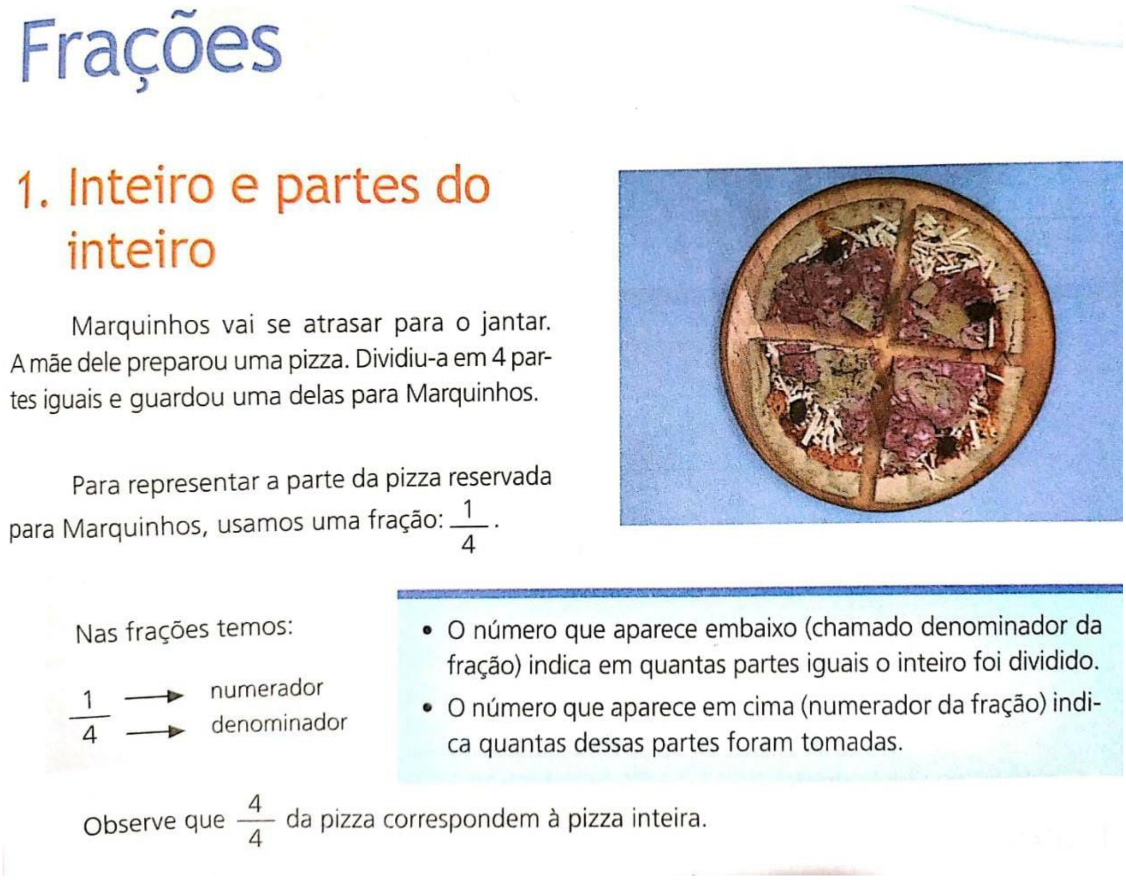
Vale ressaltar que um dos recursos comumente utilizados para o trabalho com frações em sala de aula são os jogos, tanto tecnológico como com a construção pelos próprios alunos, e essa ideia que o autor traz vai de encontro com a ideia de Grando (2009, p.10), onde para ele o jogo propicia um ambiente favorável ao interesse da criança, não apenas pelos objetos que o constituem, mas também pelo desafio das regras impostas por uma situação imaginária (...)”.

4.1.2 Livro Didático “PRATICANDO MATEMÁTICA” – 6º ano

Na coleção de Álvaro Andrini e Maria José Vasconcellos (2002) verificamos que o conteúdo de frações é introduzido de maneira clássica, que é a divisão de uma pizza, porém bastante resumida.

Os autores associam a primeira ideia de fração como sendo a relação parte/todo, apresentando a situação mostrada na Figura 13.

Figura 13 - Parte/todo.


Frações

1. Inteiro e partes do inteiro

Marquinhos vai se atrasar para o jantar. A mãe dele preparou uma pizza. Dividiu-a em 4 partes iguais e guardou uma delas para Marquinhos.

Para representar a parte da pizza reservada para Marquinhos, usamos uma fração: $\frac{1}{4}$.

Nas frações temos:

$\frac{1}{4}$ → numerador / denominador

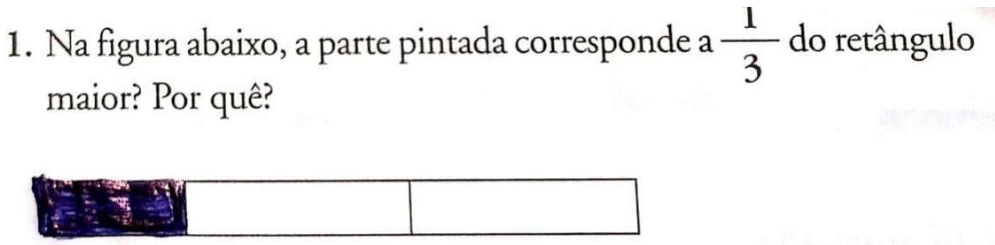
- O número que aparece embaixo (chamado denominador da fração) indica em quantas partes iguais o inteiro foi dividido.
- O número que aparece em cima (numerador da fração) indica quantas dessas partes foram tomadas.

Observe que $\frac{4}{4}$ da pizza correspondem à pizza inteira.

Fonte: Álvaro Andrini e Maria José Vasconcellos (2002. P. 165.)

Notamos que, logo após as explicações sobre a ideia inicial de fração, que se dão na metade de uma página, e logo após o pequeno exemplo introdutório, como ilustrado na Figura 13, os autores já propõem atividades aos alunos, sem fazer demais contextualizações. Percebemos ainda que a primeira atividade proposta aos alunos é divergente do exemplo apresentado, pois, nesta atividade, a divisão do inteiro é apresentada em partes desiguais, como mostra a Figura 14.

Figura 14 - Exemplo.


1. Na figura abaixo, a parte pintada corresponde a $\frac{1}{3}$ do retângulo maior? Por quê?

Fonte: Álvaro Andrini e Maria José Vasconcellos (2002. P. 166.)

Para um melhor entendimento dos alunos, seria necessário um aprofundamento maior nos conceitos de parte e de todo, além da análise da razão parte/todo, com as atividades de compartilhamento propostas por Van Walle (2009, p.154) pois estas ajudariam na melhor compreensão dos alunos no quesito parte/todo.

A leitura das frações é quase feita de maneira mecânica, os autores não se preocupam em dar exemplos práticos. Como percebemos, ele apenas dá um exemplo bem discreto no final da página após um bombardeio de exemplos mecânicos, como na Figura 15.

Figura 15 - Lendo as frações.

Prosseguindo,

denominador 4 → quartos
denominador 5 → quintos
denominador 6 → sextos
denominador 7 → sétimos
denominador 8 → oitavos
denominador 9 → nonos

As frações cujo denominador é uma potência de dez (10, 100, 1 000, 10 000 etc.) são chamadas *frações decimais*. Veja como nomeá-las:

denominador 10 → décimos
denominador 100 → centésimos
denominador 1 000 → milésimos
denominador 10 000 → décimos de milésimos

e assim por diante.

Para ler frações com denominador maior que 10 e que não sejam decimais, usamos a palavra *avos*. Veja:

- $\frac{7}{12}$ → Lê-se *sete doze avos*.

Outro exemplo:

Exemplos de leitura de frações:

Fração	Leitura
$\frac{2}{5}$	dois quintos
$\frac{7}{8}$	sete oitavos
$\frac{5}{9}$	cinco nonos
$\frac{3}{10}$	três décimos
$\frac{9}{16}$	nove dezesseis avos
$\frac{18}{25}$	dezoito vinte e cinco avos
$\frac{37}{100}$	trinta e sete centésimos
$\frac{44}{1\,000}$	quarenta e quatro milésimos
$\frac{131}{10\,000}$	cento e trinta e um décimos de milésimos

Fonte: Álvaro Andrini e Maria José Vasconcellos (2002. P. 167.)

Para potencializar a leitura das frações seria necessário um aprofundamento maior nas partes fracionárias, com as tarefas de compartilhamento propostas por Van de Walle (2009, p. 348.), pois estas ajudariam a desenvolver os conceitos das partes fracionárias.

A História da Matemática (Figura 12) aparece após diversas informações feita pelos autores, ou seja, o aluno é bombardeado por uma série de informações sem saber a motivação de tudo isso, assim não despertando a curiosidade do aluno acerca do conteúdo, uma vez que este já o estudou, ou até pelo fato de aparecer apenas em páginas posteriores a introdução do conteúdo, os professores deixam de abordar a história das frações, pois não atribuem a ela sua devida importância.

Figura 16 - História das frações.

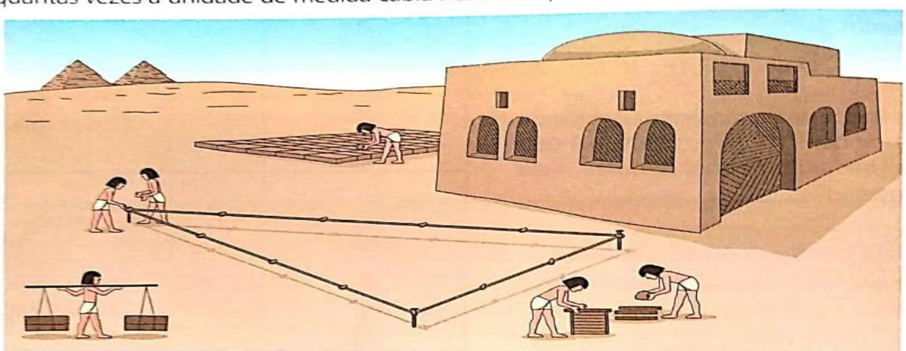
As frações e as medidas

Já sabemos que os números naturais surgiram da necessidade de contar. Durante muito tempo, os números naturais foram suficientes para resolver os problemas cotidianos do homem primitivo.

No entanto, com o surgimento da agricultura, possuir terras mais férteis passou a ser importante.

No antigo Egito, por exemplo, as terras próximas ao Rio Nilo eram muito disputadas.

Por isso, os faraós tinham funcionários que mediam e demarcavam os terrenos. Eles usavam cordas, com nós separados sempre pela mesma distância. Para medir um comprimento, a corda era esticada e se verificava quantas vezes a unidade de medida cabia neste comprimento.



A distância entre dois nós era tomada como unidade de medida.

Fonte: *Atlas Nacional do Brasil*, IBGE, 2000.

Muitas vezes, a unidade de medida não cabia um número inteiro de vezes no comprimento a ser medido, ou seja, os números naturais não eram suficientes para registrar as medidas. Era preciso criar uma maneira de registrar uma parte da unidade. Daí a ligação entre o uso das frações e os problemas de medidas.

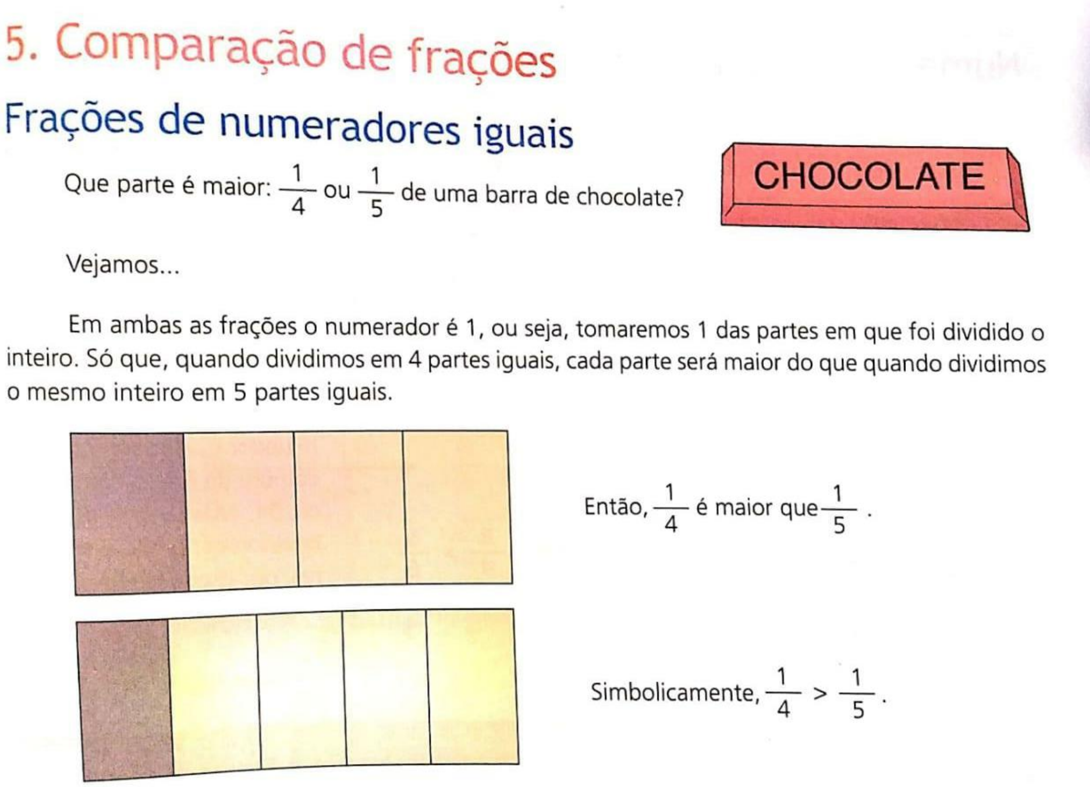
Todos os anos, as cheias do rio Nilo carregavam as marcações que limitavam os terrenos e as medidas tinham de ser refeitas. Por causa do uso das cordas, os funcionários encarregados da demarcação das terras eram chamados de estiradores de cordas.

O rio Nilo fica na África e é o segundo maior rio do mundo em extensão, com 6 741 km. Entre junho e setembro, o nível das águas do Nilo sobe, inundando uma vasta região. Quando volta ao seu leito, deixa essas terras muito férteis.

Fonte: Álvaro Andrini e Maria José Vasconcellos (2002. P. 168.)

Parte em que os autores comparam as frações, como veremos na Figura 17, ilustra de maneira bem peculiar os exemplos, causando um desinteresse no aluno em comparar as frações, onde sabemos que é do interesse da humanidade fazer essas comparações, pois foi uma das motivações que levou a criação desses números.

Figura 17 - Lendo as frações.


5. Comparação de frações

Frações de numeradores iguais

Que parte é maior: $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{5}$ de uma barra de chocolate?

Vejamos...

Em ambas as frações o numerador é 1, ou seja, tomaremos 1 das partes em que foi dividido o inteiro. Só que, quando dividimos em 4 partes iguais, cada parte será maior do que quando dividimos o mesmo inteiro em 5 partes iguais.

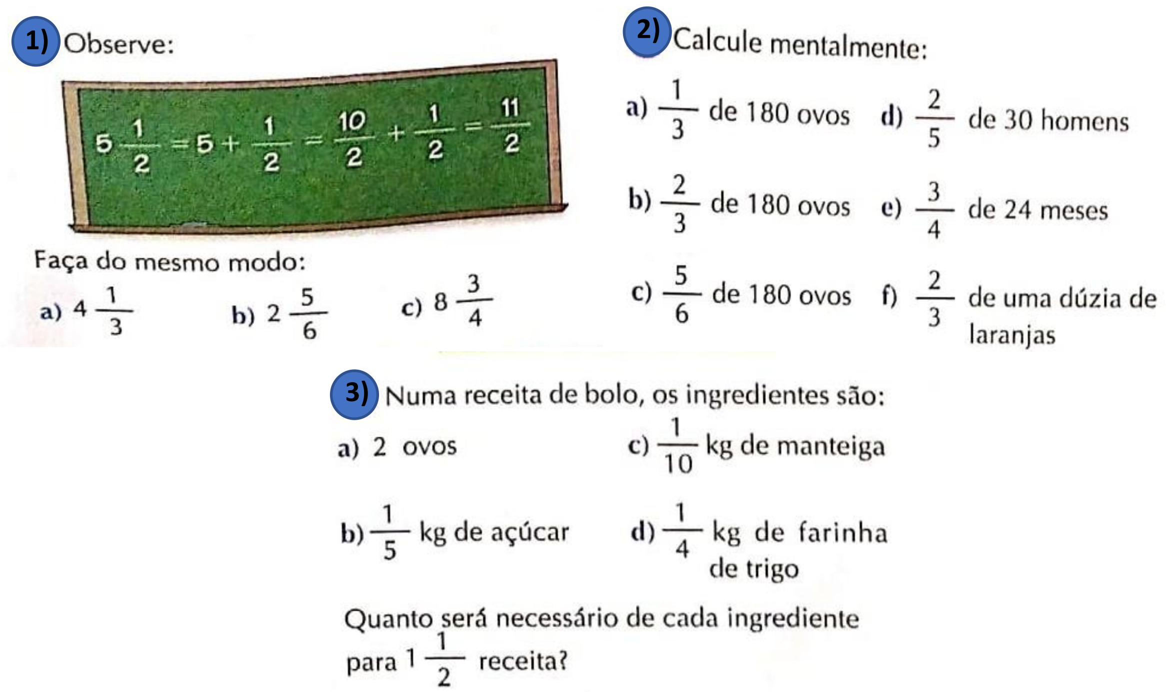
Então, $\frac{1}{4}$ é maior que $\frac{1}{5}$.

Simbolicamente, $\frac{1}{4} > \frac{1}{5}$.

Fonte: Álvaro Andrini e Maria José Vasconcellos (2002. p. 177.)

Por fim, os exercícios deixados pelos autores coincidem com o que foi abordado por todo o livro, exercícios mecanizados e sem contextualização, o que deixa o aluno sem criatividade e motivação, alguns exemplos na Figura 18.

Figura 18 - Exercícios propostos.



1) Observe:

$5\frac{1}{2} = 5 + \frac{1}{2} = \frac{10}{2} + \frac{1}{2} = \frac{11}{2}$

Faça do mesmo modo:

a) $4\frac{1}{3}$ b) $2\frac{5}{6}$ c) $8\frac{3}{4}$

2) Calcule mentalmente:

a) $\frac{1}{3}$ de 180 ovos d) $\frac{2}{5}$ de 30 homens

b) $\frac{2}{3}$ de 180 ovos e) $\frac{3}{4}$ de 24 meses

c) $\frac{5}{6}$ de 180 ovos f) $\frac{2}{3}$ de uma dúzia de laranjas

3) Numa receita de bolo, os ingredientes são:

a) 2 ovos c) $\frac{1}{10}$ kg de manteiga

b) $\frac{1}{5}$ kg de açúcar d) $\frac{1}{4}$ kg de farinha de trigo

Quanto será necessário de cada ingrediente para $1\frac{1}{2}$ receita?

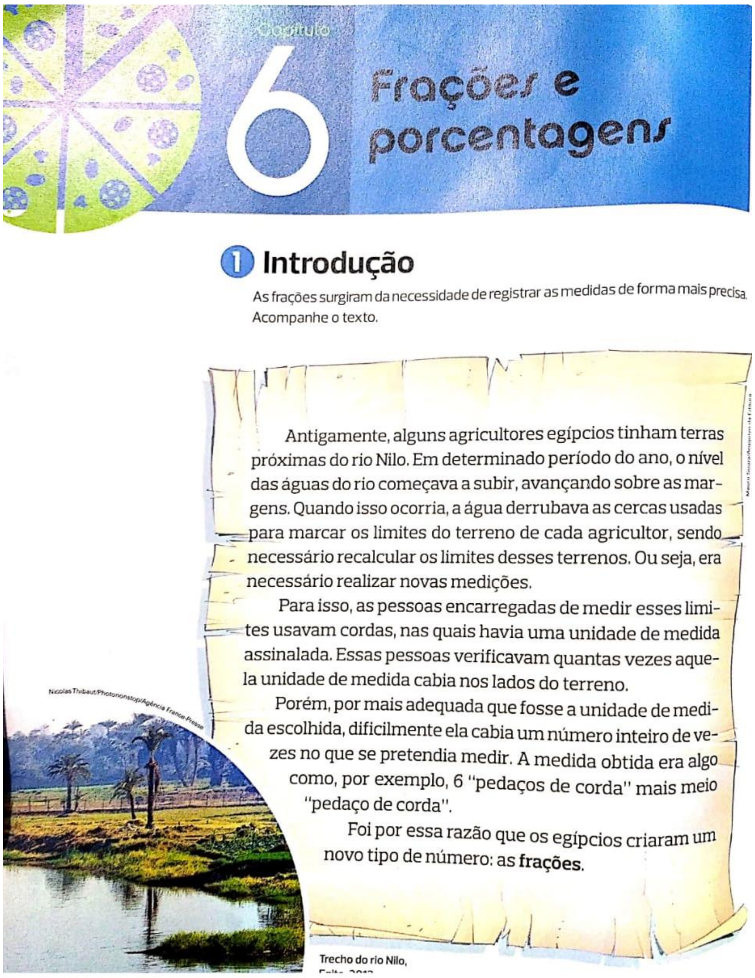
Fonte: Álvaro Andrini e Maria José Vasconcellos (2002. p. 182.)

Os modelos dos exercícios são divergentes às propostas apresentadas por Toledo e Toledo (1997) ao enfatizar a importância de o aluno ser independente e construir suas próprias ideias através da experimentação e verificação diante de situações problema convenientemente apresentadas.

4.1.3 Livro Didático "PROJETO TELÁRIS" – 6º ano

Nessa coleção, Luiz Roberto Dante (2015) começa de maneira bastante interessante e plausível, conforme veremos na Figura 19, o autor introduz o conteúdo falando da história das frações, ou seja, o autor está preocupado em motivar o aluno a estudar sobre o conteúdo de fração, relacionando seu uso no dia a dia.

Figura 19 - História das frações.


Capítulo 6

Frações e porcentagens

1 Introdução

As frações surgiram da necessidade de registrar as medidas de forma mais precisa. Acompanhe o texto.

Antigamente, alguns agricultores egípcios tinham terras próximas do rio Nilo. Em determinado período do ano, o nível das águas do rio começava a subir, avançando sobre as margens. Quando isso ocorria, a água derrubava as cercas usadas para marcar os limites do terreno de cada agricultor, sendo necessário recalcular os limites desses terrenos. Ou seja, era necessário realizar novas medições.

Para isso, as pessoas encarregadas de medir esses limites usavam cordas, nas quais havia uma unidade de medida assinalada. Essas pessoas verificavam quantas vezes aquela unidade de medida cabia nos lados do terreno.

Porém, por mais adequada que fosse a unidade de medida escolhida, dificilmente ela cabia um número inteiro de vezes no que se pretendia medir. A medida obtida era algo como, por exemplo, 6 "pedaços de corda" mais meio "pedaço de corda".

Foi por essa razão que os egípcios criaram um novo tipo de número: as **frações**.

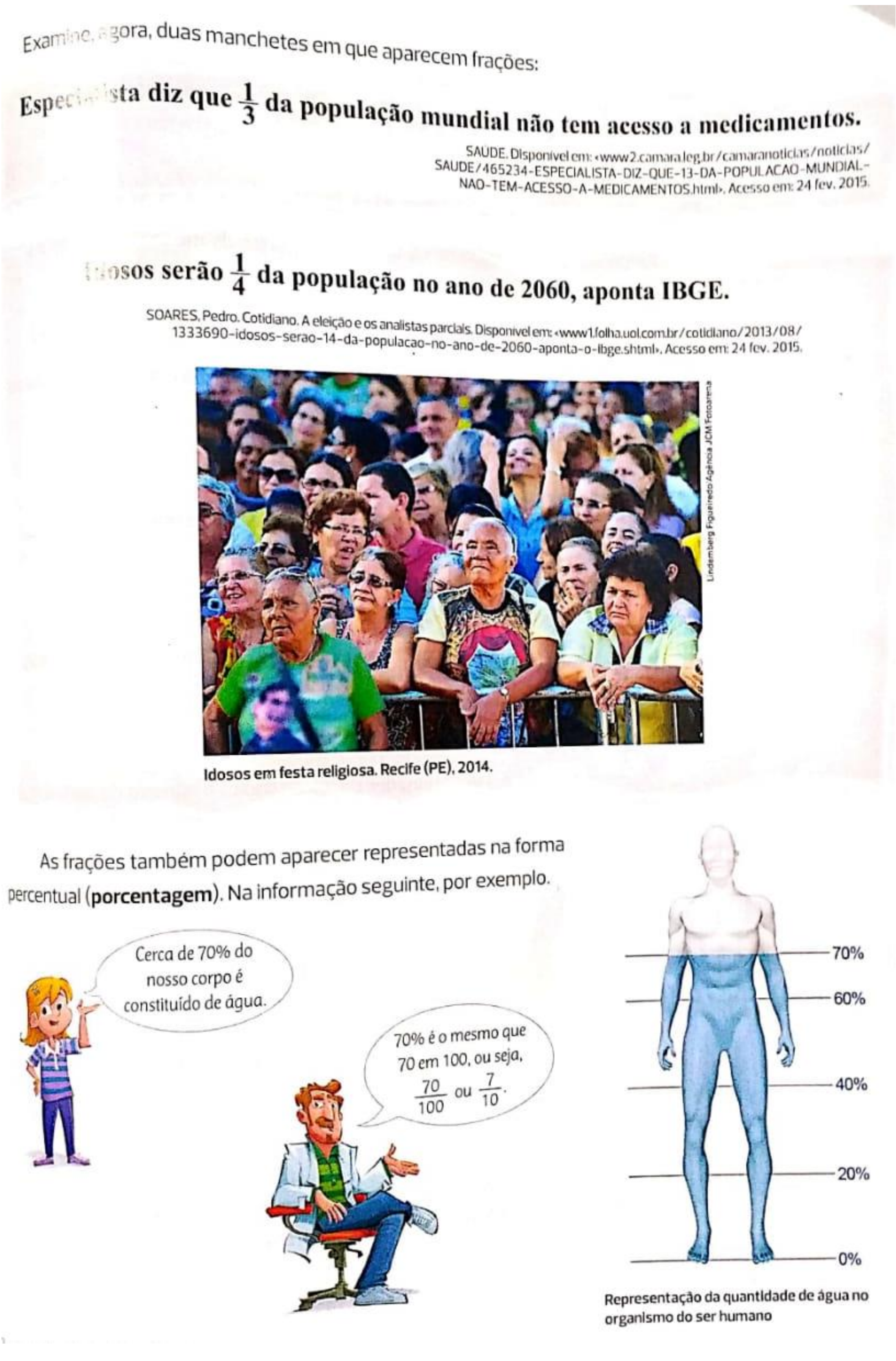
Nicolas Thibaut/Photononstop/Agência France-Presse

Trecho do rio Nilo,

Fonte: Luiz Roberto Dante (2002. p. 170.)

Dando continuidade ao conteúdo o autor introduz o conteúdo em diversas situações do cotidiano, na ocasião, o autor já apresenta que outra forma de representação das frações é a forma de porcentagem, Figura 20.

Figura 20 - Motivando o aluno estudar.



Examine, agora, duas manchetes em que aparecem frações:

Especialista diz que $\frac{1}{3}$ da população mundial não tem acesso a medicamentos.

SAUDE. Disponível em: ‹www2.camara.leg.br/camaranoticias/noticias/SAUDE/465234-ESPECIALISTA-DIZ-QUE-13-DA-POPULACAO-MUNDIAL-NAO-TEM-ACESSO-A-MEDICAMENTOS.html›. Acesso em: 24 fev. 2015.

Idosos serão $\frac{1}{4}$ da população no ano de 2060, aponta IBGE.

SOARES, Pedro. Cotidiano. A eleição e os analistas parciais. Disponível em: ‹www1.folha.uol.com.br/cotidiano/2013/08/1333690-idosos-serao-14-da-populacao-no-ano-de-2060-aponta-o-ibge.shtml›. Acesso em: 24 fev. 2015.

Lindemberg Figueiredo/Agência JCM/Fotoarena

Idosos em festa religiosa. Recife (PE), 2014.

As frações também podem aparecer representadas na forma percentual (**porcentagem**). Na informação seguinte, por exemplo.

Representação da quantidade de água no organismo do ser humano

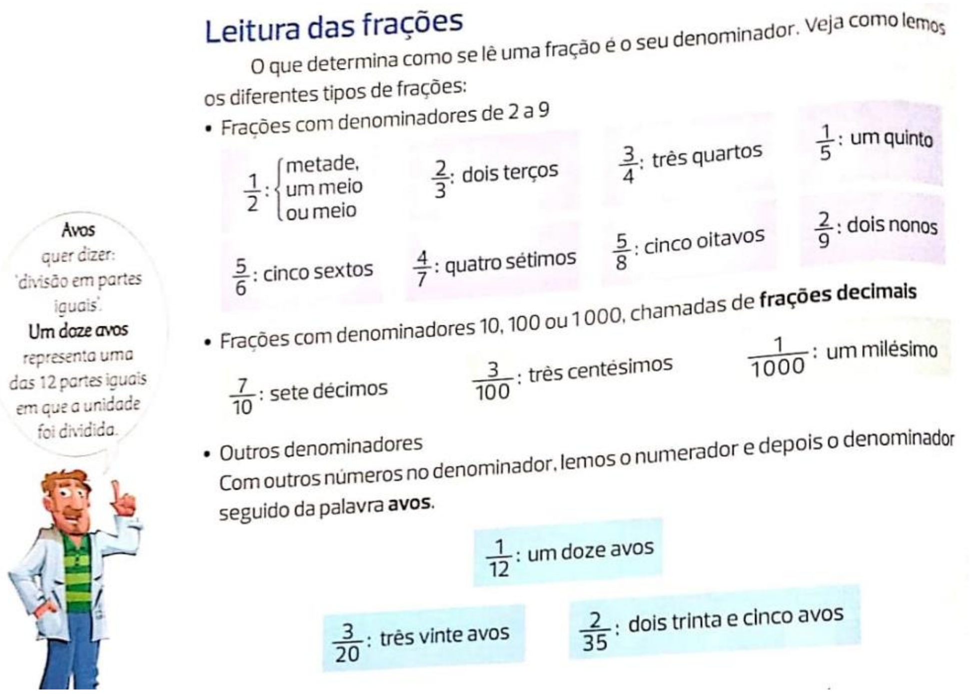
Fonte: Luiz Roberto Dante (2002. p. 171.)

Tais sugestões são convergentes às propostas apresentadas por Van Walle (2009, p.266), onde a ideia de apenas sugerir uma variedade de pontos de partida pode motivar os estudantes a alternativas mais proveitosas.

A leitura das frações é quase feita de maneira mecânica, não diferente das obras anteriores. O autor não se preocupa em dar exemplos práticos, como percebemos ele apenas dá alguns exemplos no início da página.

Vale ressaltar, que apesar do autor não dar tanta ênfase a esse tópico, leitura das frações, ele se preocupa em despertar a curiosidade do aluno deixando uma imagem do Papiro de Rhind, por exemplo, como veremos na Figura 21. Dessa forma, o livro didático analisado, vai na direção ao que se pede os PCN (BRASIL, 1997) que incentiva o caráter investigativo e pesquisador do aluno.

Figura 21 - Despertando a curiosidade.



Leitura das frações

O que determina como se lê uma fração é o seu denominador. Veja como lemos os diferentes tipos de frações:

- Frações com denominadores de 2 a 9

$\frac{1}{2}$: metade, um meio ou meio

$\frac{2}{3}$: dois terços

$\frac{3}{4}$: três quartos

$\frac{1}{5}$: um quinto

$\frac{5}{6}$: cinco sextos

$\frac{4}{7}$: quatro sétimos

$\frac{5}{8}$: cinco oitavos

$\frac{2}{9}$: dois nonos

- Frações com denominadores 10, 100 ou 1 000, chamadas de **frações decimais**

$\frac{7}{10}$: sete décimos

$\frac{3}{100}$: três centésimos

$\frac{1}{1000}$: um milésimo

- Outros denominadores

Com outros números no denominador, lemos o numerador e depois o denominador seguido da palavra **avos**.

$\frac{1}{12}$: um doze avos

$\frac{3}{20}$: três vinte avos

$\frac{2}{35}$: dois trinta e cinco avos

Fonte: Luiz Roberto Dante (2015. p. 174.)

Por fim, os exercícios deixados pelo autor coincidem com o que foi abordado por todo o livro, exercícios que se dividem em prática, cotidiano e reflexivo, o que deixa o aluno com criatividade e motivação, vejamos na Figura 22.

Figura 22 - Exercícios.

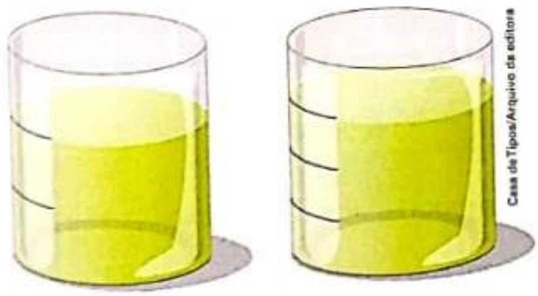
1. Examine a figura abaixo e indique a fração correspondente:

a) aos setores verde e vermelho juntos;
b) ao que o setor azul vale a mais do que o laranja;
c) ao que o setor vermelho vale a menos do que o azul;
d) ao setor amarelo.

2. Gilberto plantou $\frac{1}{4}$ de sua horta com tomates, $\frac{1}{5}$ com cenouras e o restante com alface. Que parte da horta foi plantada com alface?

Alface, tomate e cenoura.

3. As duas vasilhas são iguais e estão com suco de hortelã. Aproximadamente quanto a segunda tem a mais do que a primeira?



Fonte: Luiz Roberto Dante (2015. p. 193.)

Os modelos dos exercícios são convergentes às propostas apresentadas por Toledo e Toledo (1997, p. 351) ao enfatizar a importância de o aluno ser independente e construir suas próprias ideias através da experimentação e verificação diante de situações problema convenientemente apresentadas.

Quadro 1 – Resumo comparativo da análise das três coleções analisadas com os modelos apresentados

Livros didáticos de Matemática avaliados.	**Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997).**	**Toledo e Toledo (1997).**	**Van de Walle (2009).**
"Matemática" Edwaldo Bianchini (2006).	Contexto histórico de forma aleatória, não atendendo as propostas dos PCN (BRASIL, 997). O autor aborda os diferentes conceitos fracionários. Os exercícios são em sua maioria de caráter mecânico.	A forma que o autor aborda os conceitos fracionários diverge com as ideias de Toledo e Toledo (1997) ao expor de maneira sucinta o tema.	As ideias e conceitos fracionários vão em desencontro das ideias propostas por Van de Walle (2009) ao representar os exemplos de maneira não tão significativa.
"Praticando Matemática" Álvaro Andrini e Maria José Vasconcellos (2002).	As frações são exemplificadas de forma bastante peculiar de modo bastante incomum, divergindo assim das propostas apresentadas pelos PCN (BRASIL, 1997). A história das frações é abordada aleatório o que diverge das propostas dos PCN (BRASIL, 1997). Bastante rudimentar há abordagem dos diferentes conceitos parte-todo.	Os conceitos parte-todo deixam bem a quem com os modelos de grandeza contínua, propostos por Toledo e Toledo (1997).	É notório a discordância dos conceitos parte-todo sugeridas pelas propostas de Van de Walle (2009).
"Projeto Teláris" Luiz Roberto Dante (2015).	O espaço histórico é apresentado de maneira adequada no início do livro, sendo assim indo na direção das propostas dos PCN (BRASIL, 1997). O autor aborda os diferentes conceitos fracionários. Os exercícios são bastantes	Os conceitos parte-todo vem de forma bastante clara e explicativa relacionando-se com os modelos de grandeza contínua, propostos por Toledo e Toledo (1998).	Os conceitos fracionários se dão por meio de exemplos práticos e objetivos convergindo assim com as ideias apresentadas por Van de Walle (2009).

	diversificados.		

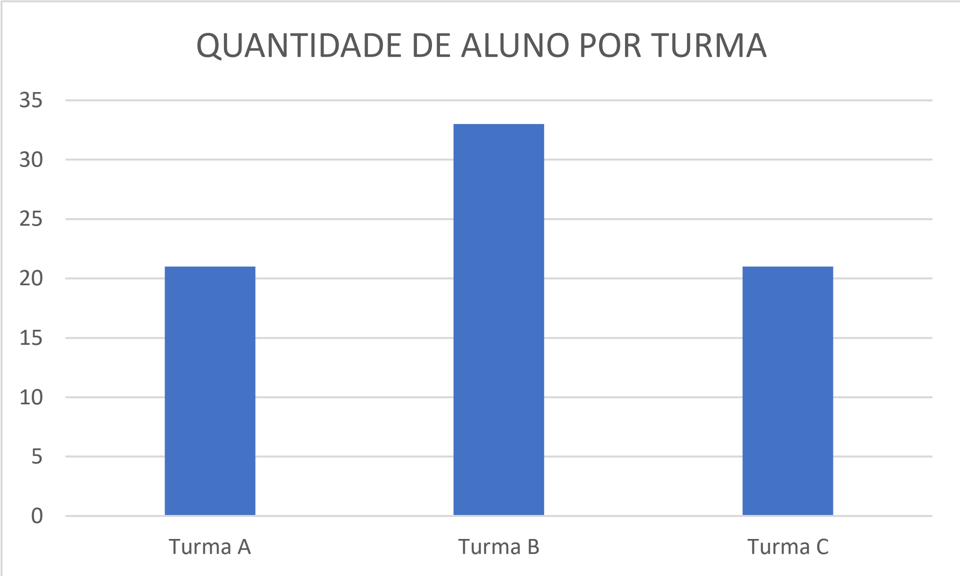
De uma maneira geral os autores estão preocupados em formalizarem os conceitos e definições de frações de modo que os estudantes compreendam o conteúdo, no entanto, alguns são insuficientes no ponto de vista de incentivar o estudante a ser mais independente e criativo. Dentro desse contexto, sugere-se que os professores tornem suas aulas mais dinâmicas e práticas para melhor entendimento dos alunos.

4.2 RESULTADOS DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Com o objetivo de formalizar a Engenharia Didática como recurso para o ensino das frações, três turmas do 1° ano do ensino médio, foram submetidas, durante três semanas, às quatro etapas da Engenharia Didática, de acordo com as divisões de Pommer (2013).

Para atender o objetivo citado, foi realizada a prática de diagnóstico dos possíveis danos decorrentes das dificuldades trazidas ao longo dos anos de estudos e os ocasionados pela pandemia sobre o aprendizado dos estudantes com a utilização da Engenharia Didática como recurso para solucionar tais danos. Participaram desta prática 75 (setenta e cinco) estudantes, dos quais, 21 pertencem ao curso A, 33 pertencem ao curso B e 21 pertencem ao curso C, conforme o Gráfico 1:

Gráfico 1 - Estudantes de acordo com os cursos.



Fonte: Igor Marinho Feitosa, 2022.

Etapa 1 - Análises preliminares:

As análises preliminares seguiram as etapas:

i) Apresentar o teste e seus objetivos;

ii) Compartilhar o material necessário para o desenvolvimento da atividade;

iii) Fazer a leitura e orientar os estudantes em relação ao desenvolvimento da atividade;

iv) Pedir que os estudantes anotem as respostas de cada tarefa;

v) Pedir que apresentem suas respostas;

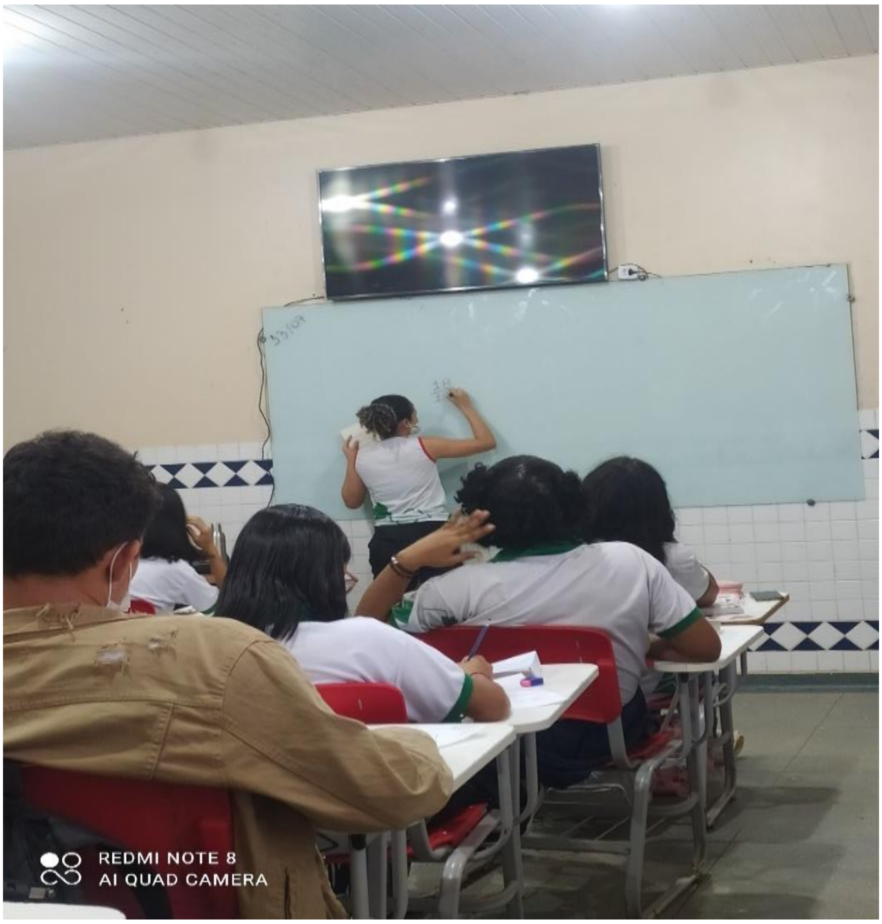
vi) Anotar todos os aspectos que dizem respeito ao processo de solução das atividades pelos estudantes.

Assim como foi sugerido na análise preliminar, foi cumprido todos os tópicos que essa etapa aborda, como mostra as Figuras 23 e 24. Essa fase teve duração de 2 horas/ aulas.

Figura 23 - Leitura e compartilhamento do teste Etapa 1.

Fonte: Igor Marinho Feitosa, 2022.

Figura 24 - Apresentação das respostas pelos alunos, etapa 5.



Fonte: Igor Marinho Feitosa, 2022.

Etapa 2 - Concepção e Análise a Priori:

Essa etapa foi a mais longa de todo o processo, várias estratégias foram usadas para que os alunos se motivassem a estudar e de fato aprendessem o assunto, pois os resultados obtidos na etapa 1 foi muito aquém do esperado, algumas das estratégias propostas dessa etapa foram levar os alunos para o laboratório de informática e atividades em equipes para incentivá-los através de alguns jogos e atividades, sugerido na sequência didática, o interesse pelo assunto, como mostra as Figuras 25 e 26.

Figura 25 - Laboratório de informática.

Fonte: Igor Marinho Feitosa, 2022.

Figura 26 - Atividade em grupo Etapa 2.

Fonte: Igor Marinho Feitosa, 2022.

A fase mais loganga de todas etapas, com duração de 10 horas/aulas.

Etapa 3 - Experimentação:

Percebi que essa etapa foi a que mais gerou suspense nos alunos, pois era o momento de verificar se a metodologia havia funcionado. Saber se a metodologia realmente funcionou. Como sugerido nessa etapa, foi bem detalhado o objetivo desse teste de avaliação da aplicação da prática, e foi dado um tempo maior para a realização do mesmo, como mostra a Figura 27.

Figura 27 - Aplicação pós-prática.

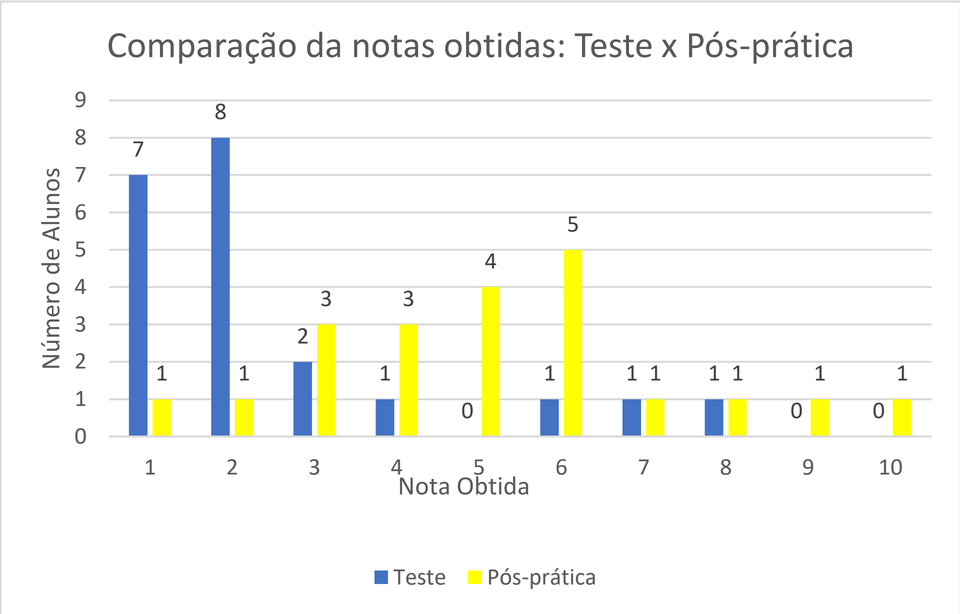
Fonte: Igor Marinho Feitosa, 2022.

Essa fase teve duração de 3 horas/aulas.

Etapa 4: Análise a posteriori e Validação:

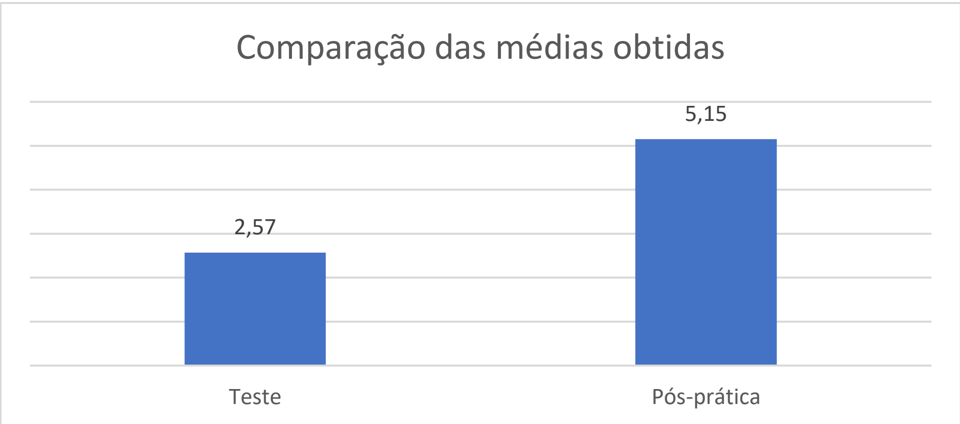
Momento de confrontar os dados como sugerido nessa etapa. Seguem os Gráficos 2, 3, 4, 5, 6 e 7 que mostram notas individuais e média geral de cada turma, do teste e teste de avaliação da aplicação da prática.

Gráfico 2 - Notas do teste e pós-prática: turma A.



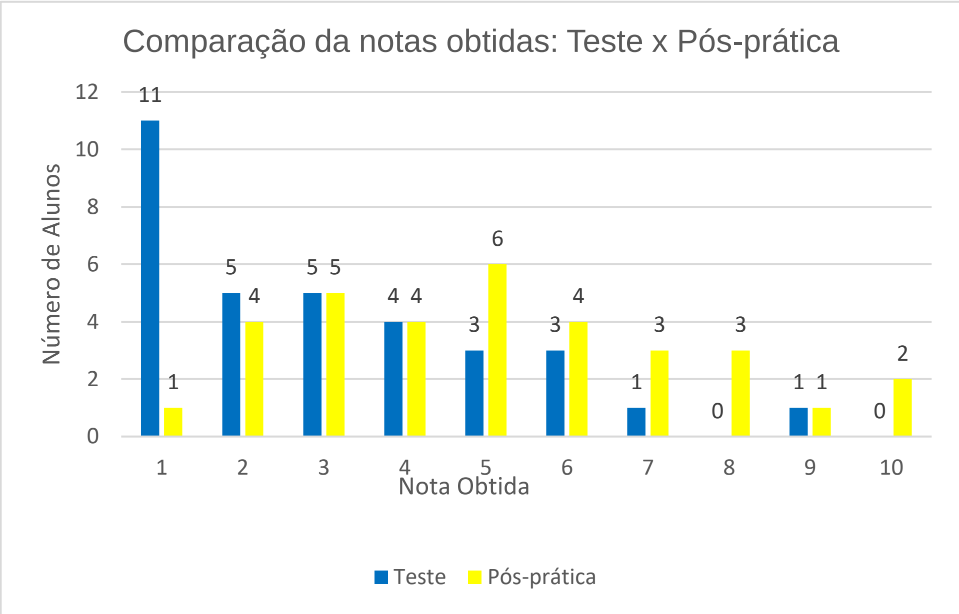
Fonte: Igor Marinho Feitosa, 2022.

Gráfico 3 - Comparação das médias: turma A.



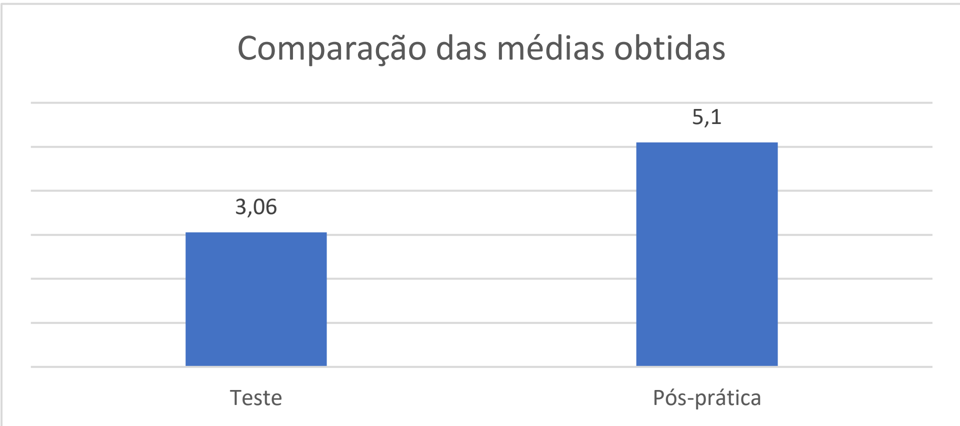
Fonte: Igor Marinho Feitosa, 2022.

Gráfico 4 – Notas do teste e pós-prática: turma B**.**



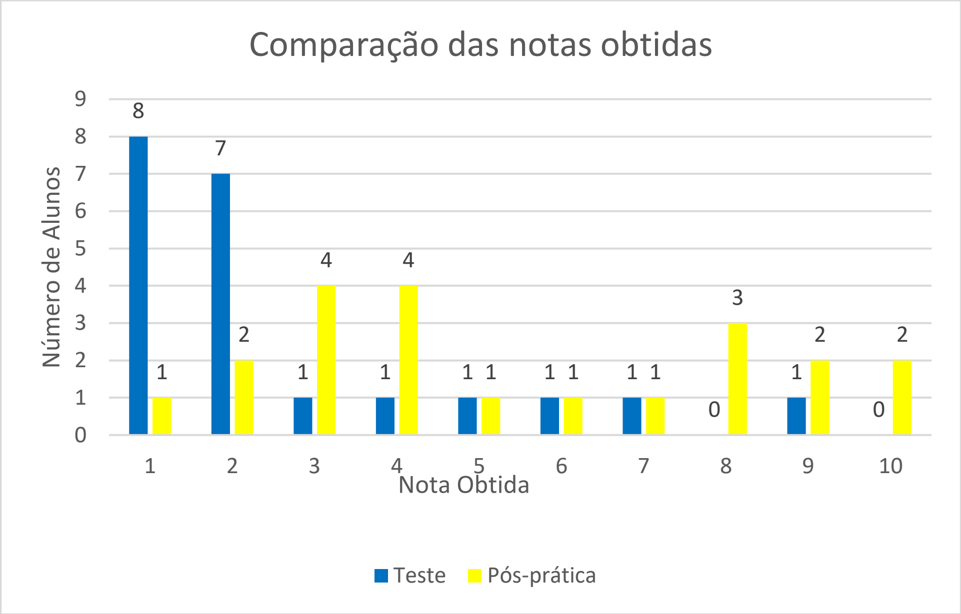
Fonte: Igor Marinho Feitosa, 2022.

Gráfico 5 - Comparação das médias: turma B.



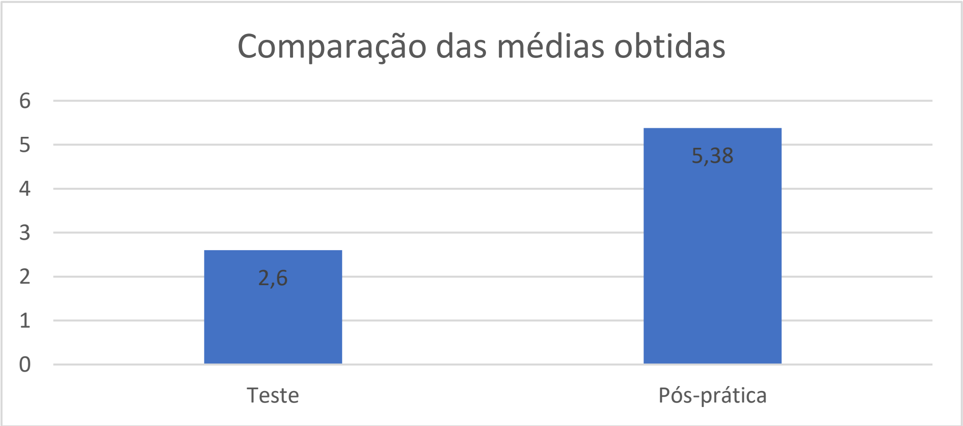
Fonte: Igor Marinho Feitosa, 2022.

Gráfico 6 – Notas do teste e pós-prática: turma C.



Fonte: Igor Marinho Feitosa, 2022.

Gráfico 7 – Comparação das médias: turma C.



Fonte: Igor Marinho Feitosa, 2022.

Pode-se afirmar, apesar do curto espaço de tempo, que um grande volume de conhecimento foi adquirido pelos discentes. As tabelas com notas individuais e a média geral de cada turma teve uma melhoria de grande expressão. Os questionários de diagnóstico e de avaliação da prática tiveram estruturas semelhantes, pois a maioria dos discentes mostrou possuir pouco ou quase nenhum conhecimento sobre o tema. Vale ressaltar que esse recurso, em seu contexto geral, teve muitos pontos positivos, algo que foi deixado bem claro pelos estudantes. Cada etapa da Engenharia Didática foi marcada pelo frequente diálogo entre docente e discente, que levaram para seu cotidiano bastante aprendizado, mostrando que de fato esse recurso funciona, e que não deixa dúvidas que pode sim ser usados em outros assuntos da matemática.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o presente estudo foi possível perceber como os alunos compreendem e interpretam o estudo das frações e suas abordagens no contexto escolar, e também identificar elementos que dificultam ou facilitam o processo de ensino e aprendizagem. Foi possível perceber que a maioria dos alunos não carregam consigo afinidade para desenvolverem e produzirem cálculos matemáticos envolvendo frações, entretanto, um dos fatores pode estar relacionado com a falta de domínio dos conceitos matemáticos básicos e ainda, a necessidade de aproximação do conteúdo com as situações problemas do cotidiano.

A respeito das frações, foi observado que os alunos afirmam que não gostam de matemática e ainda não dominam os conceitos básicos da fração. Tais dificuldades podem ser um dos motivos para os alunos justificarem que não gostam de matemática, visto que diversos outros assuntos que aparecem na vida escolar do aluno necessitam de recursos que envolvem frações. O que gera dificuldades e antipatia pela matemática.

Esperamos que esse trabalho possa ajudar na reflexão sobre o estudo das frações, tanto na vida do professor como na do aluno, identificando elementos que possam potencializar o ensino e aprendizagem das frações. Além disso, a partir da utilização da engenharia didática, é possível apresentar os conteúdos, em especial o de frações, que foi trabalhado ao longo do texto, de forma mais significativas, tentando utilizar da realidade dos alunos e, assim, fazendo com que os alunos enxerguem a importância da matemática além dos muros da escola.

Acreditamos que esse trabalho possa auxiliar outros professores em sua sala de aula e que possa contribuir para a verificação e correção da aprendizagem dos alunos, que, mesmo em assuntos considerados básicos e triviais, interferem de forma bastante expressiva em toda vida escolar.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da Didática da Matemática**. 3.ed. São Paulo: Editora UFPR, 2007.

ALMOULOUD, S. A.; COUTINHO, C. Q. D. E. S. **Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19/ANPEd**.

ANSHEL, M. M.; GOLDFELD, D. **Partitions, Egyptian fractions, and free products of finite abelian groups**, Proceedings of the American Mathematical Society, 111 (4): 889-899, 1991. doi: 10.1090 / S0002-9939-1991-1065083 - 1, MR 1065083.

ARRUDA, G. M. P. C. **A contribuição de João Amós Comenius para a Educação Infantil**. Universidade Presbiteriana Mckenzie. São Paulo, 2007.

ARTIGUE, M. **Engenharia Didática**, In: Didática das matemáticas. Brun, J. (Org.). Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

BERENGUER, M. I. S. **Aplicação da Engenharia Didática no ensino das ciências exatas**. 2010. Disponível em: http://www.avm.edu.br/docpdf/monografias_publicadas/t205982. Acesso em:21 de dezembro 2021.

BERTONI, N. E. **Educação e Linguagem Matemática IV: Frações e Números Fracionários.** Brasília: Universidade de Brasília, 2009.

BOYER, C. B. MERZBACH, U. C. **História da matemática.** Trad. Helena Castro. São Paulo: Blucher, 2012.

BOYER, C.B. MERZBACH, U. C. **História da matemática.** Trad. HELENA CASTRO. São Paulo: Blucher, 1996.

BRUN, J. **Didática das Matemáticas**. Instituto Piaget, Porto Alegre, 2000.

CARNEIRO, V. C. G. **Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de matemática**. Unicamp – v.13 – n. 23 – jan./jun. 2005. Disponível em https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646981/13882.

CASTRO, R. A. **Número fracionário: estudo histórico, epistemológico e da transposição didática**. Revista de educação, v. 12, n.13, p. 59-69, 2009.

COMENIUS, I., A. **Didactica magna** (1621-1657). Traduzido por Joaquim Ferreira Gomes, 2001. Disponível em: https://www2.unifap.br/edfisica/files/2014/12/A_didactica_magna_COMENIUS.pdf

FERREIRA, E. S.; Machado, R. M.; Paiva, A.; Paques, O. T. W.; Santinho, M. S. e Soares, M. Z. M. C. **Mini-curso: o uso de numeração e ábacos hiberoamericanos na educação básica.** LEM/IMECC – Unicamp. VII-Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática/UFAL-Maceió-AL-2014.

GIOVANNI, J. R. GIOVANNI JÚNIOR, J. R. **Matemática: pensar e descobrir** – 6º ano, Nova edição – FDT - São Paulo – 2005.

IFRAH, G. **Os números: a história de uma grande invenção.** 2. ed. São Paulo: Globo, 1986.

IFRAH, G. **Os números: a história de uma grande invenção.** 3. ed. São Paulo: Globo, 1989.

IFRAH, G. **Os números: a história de uma grande invenção**. 8. ed. São Paulo: Globo, 2005.

IFRAH, G. **Os números: a história de uma grande invenção**.1. ed. São Paulo: Globo, 1985.

IFRAH, G. **Os Números: a história e uma grande invenção**. 11. ed. Trad. STELLA MARIA DE FREITAS SENRA. São Paulo: Globo, 2010.

MACHADO, N. J. **Epistemologia e Didática: As Concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente.** São Paulo: Editora Cortez, 2011.

MEC/SEF, BRASIL, **Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos: Matemática.** Brasília: MECSEF, 1998.

NIVEN, I. **Números Racionais e Irracionais**. Editora: sbm. 1984.

NOGUEIRA, R. R. B. **Matemática – Uma abordagem histórica: Livro II**. São Paulo – SP, 1a Edição: 2015. ISBN: Não há. E-book disponível em: https://drive.google.com/file/d/1rsWLUQelNp35X1KYMJ_wTeKLf23TWjDc/view e https://cienciadegaragem.blogspot.com/2015/07/fracoes-um-giro-pela-historia.html

PAIS, L. C. **Didática da Matemática: uma análise da influência francesa**. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

PAIVA, M. H. P. **Aprendizagem de frações com *softwares* e aplicativos matemáticos *online*.** Lajedo, 2016.

POMMER, W. M. **A Engenharia Didática em sala de aula: Elementos básicos e uma ilustração envolvendo as Equações Diofantinas Lineares**. 2013. 72 p.ils.: Tabs.ISBN 978-85-914891-1-4.

PORTO, F. M. **Uma engenharia didática para o ensino das operações com frações e com produtos notáveis.** Santarém, 2019.

RIBEIRO, A. C.; SIEBRA, I. F. G.; DA SILVA, J. P. M. **Engenharia didática: Uma metodologia na arte de resolver problemas matemáticos de Geometria espacial.** V CONEDU – Congresso Nacional de Educação, 2018. Disponível em: https://editorarealize.com.br/editora/anais/conedu/2018/TRABALHO_EV117_MD1_SA13_ID6908_03082018105503.pdf

ROQUE, T.; PITOMBEIRA, J. **Tópicos de História da Matemática.** 1. ed. 2012.

SILVA, A. A. C. Sistema de Numeração Decimal. Disponível em: https://www.infoescola.com/matematica/sistema-de-numeracao-decimal/. Acessado em: 20/05/2022.

SILVA, R.; MARTINEZ, M. L. S. **Dificuldades na matemática básica: o processo de ensino-aprendizagem para a vida.** Anais do XIII Congresso Nacional de Educação, v. XIV, p. 11840-11850, 2017.

TOLEDO, M.; TOLEDO, M. **Didática da Matemática: como dois e dois**. São Paulo: FTD, 1997.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no Ensino Fundamental: Formação de professores e aplicação em sala de aula**. Tradução Paulo Henrique Coloneses. 6° ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VICENTINO, C. **Olhares da história: Brasil e mundo** / Cláudio Vicentino, José Bruno Vicentino; colaboração de Saverio Lavorato Junior. - 1. ed. - São Paulo Scipione, 2016.

ZABALA, A. **A prática educativa: como ensinar**. Porto Alegre: Artmed, 2007.

ANEXO 01

Figura 01 - Problema envolvendo Jogos.

MATEMÁTICA & JOGOS

Jogo dos resultados alinhados

Número de participantes: 2 jogadores.
Material:
- 2 canetas de cores diferentes
- papel sulfite

Regras:
- Os jogadores devem fazer dois tabuleiros numa folha de papel sulfite. Cada tabuleiro é formado por um quadrado dividido em 9 quadrados menores (casas).
- Um dos tabuleiros deve ser preenchido, conforme este modelo:

subtraia	some	multiplique por
divida por	**multiplique por 1**	subtraia
some	multiplique por	divida por

- Os dois jogadores devem escolher juntos um único número para colocar em cada operação, assim como foi feito com o número 1, no quadrado do meio (que é valor fixo).

  Esses números devem ser todos diferentes e escolhidos de 0 a 100, do seguinte modo:

  ⟶ 2 frações unitárias (numerador igual a 1)
  ⟶ 1 número primo
  ⟶ 1 número par
  ⟶ 1 número natural divisível por 5
  ⟶ 3 números naturais quaisquer diferentes dos demais
- Cada jogador pega uma das canetas coloridas, escolhe outro número de 0 a 100 e escreve no papel sulfite. Tiram par ou ímpar para ver quem começa o jogo.

Fonte: Edwaldo Bianchini (2006, p. 155).

Figura 02 - Problema envolvendo Jogos.

- Depois, um de cada vez, escolhe uma casa do tabuleiro das operações (ainda não selecionada) e efetua a conta, na folha de sulfite, com o seu número. A seguir, escreve o resultado no outro tabuleiro, na casa correspondente da operação realizada.
- A partir da segunda jogada de cada um, as operações são efetuadas com o resultado da operação anterior do próprio jogador.
- O jogador que errar a operação perde a vez e não pode marcar nada na casa.
- Vence o jogo quem primeiro conseguir alinhar três resultados na horizontal, na vertical ou na diagonal.
- Caso nenhum jogador consiga alinhar três resultados numa rodada, outros números devem ser escolhidos e o jogo reinicia com o mesmo tabuleiro das operações.

Pensem na estrutura do jogo e analisem a seguinte situação.

Paulo e Patrícia montaram um tabuleiro para jogar:

subtraia 20	some 5	multiplique por 0
divida por 10	**multiplique por 1**	subtraia 18
some 15	multiplique por $\frac{1}{4}$	divida por $\frac{1}{2}$

a) Esse tabuleiro está dentro das especificações do jogo? Justifique.

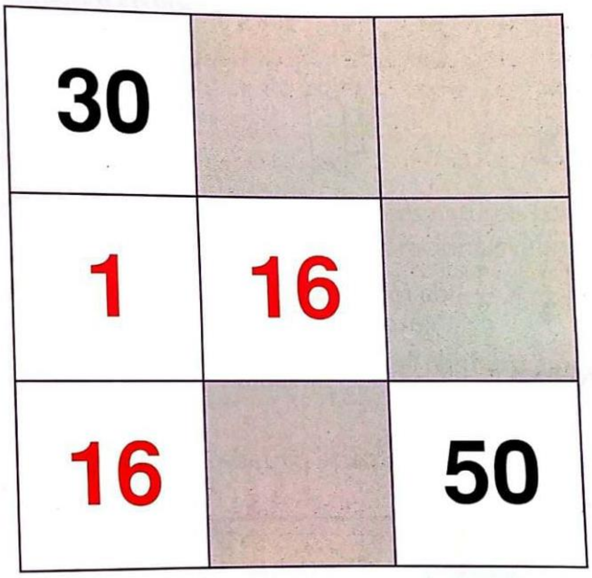
b) Patrícia escolhe o número 25 e Paulo o 10. Ele joga na 1ª vez. Existe alguma casa que Paulo não pode escolher?

c) Depois de algumas jogadas, veja como está o jogo:

	Paulo (cor vermelha)	Patrícia (cor azul)
início	10	25
1ª jogada	$10 : 10 = 1$	$25 : \frac{1}{2} = 50$
2ª jogada	$1 + 15 = 16$	$50 - 20 = 30$
3ª jogada	$16 \times 1 = 16$	ainda vai jogar

Fonte: Edwaldo Bianchini (2006, p. 156).

Figura 03 - Problema envolvendo Jogos.



É a vez de Patrícia jogar. O que ela deve fazer? Na situação apresentada, Paulo já ganhou o jogo? Justifique.

Fonte: Edwaldo Bianchini (2006, p. 157).

APÊNDICE A

Teste Diagnóstico

Objetivo Geral

Identificar as dificuldades ou habilidades dos alunos com as operações envolvendo frações.

Objetivos Específicos

- Constatar se o aluno conhece e sabe ler uma fração**;**
- Observar se o aluno tem o conhecimento da parte/todo**;**
- Avaliar se o aluno sabe operar com frações**;**
- Verificar se o aluno sabe localizar uma fração na reta numérica**.**

Metodologia

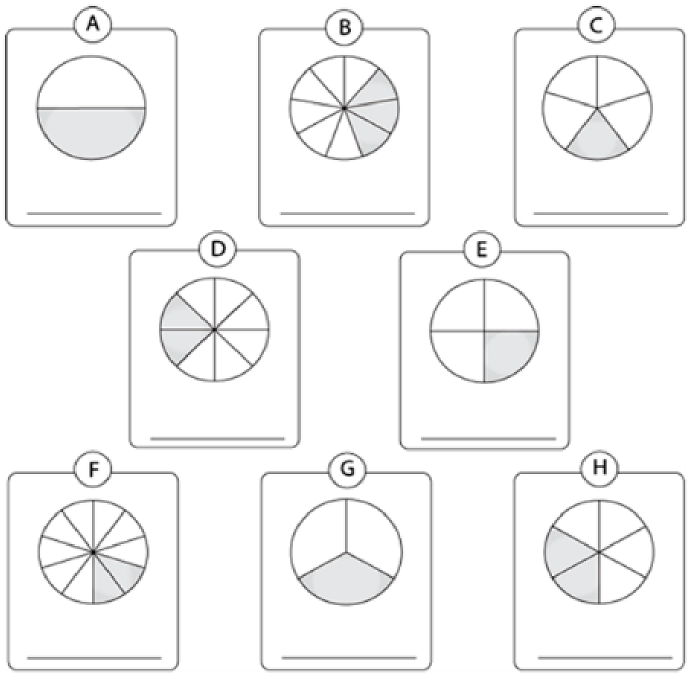
Revisão bibliográfica, aplicação de questionários e análise das respostas ao questionário.

Etapa 1

Defina com suas palavras o que é fração**;**

Dê exemplos de uma fração, e identifique o numerador e o denominador**;**

Escreva em algarismos e por extenso a parte que representa a parte pintada em cada figura abaixo:



Pinte as figuras de acordo com as frações indicadas.*Escreva ao lado a fração em algarismos:

Preencha os quadros, observando as figuras de acordo com o modelo:

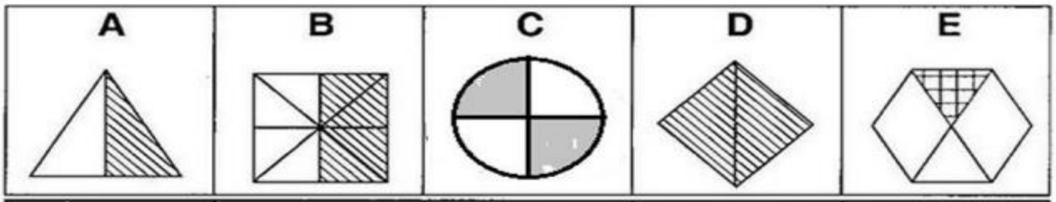
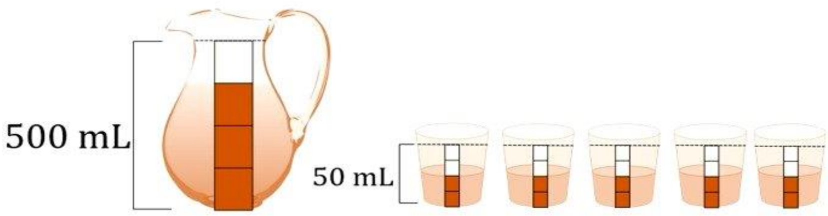


Figura	Partes pintadas	Total das partes	Fração	como se lê
A	1	2	$\frac{1}{2}$	um meio
B				
C				
D				
E				

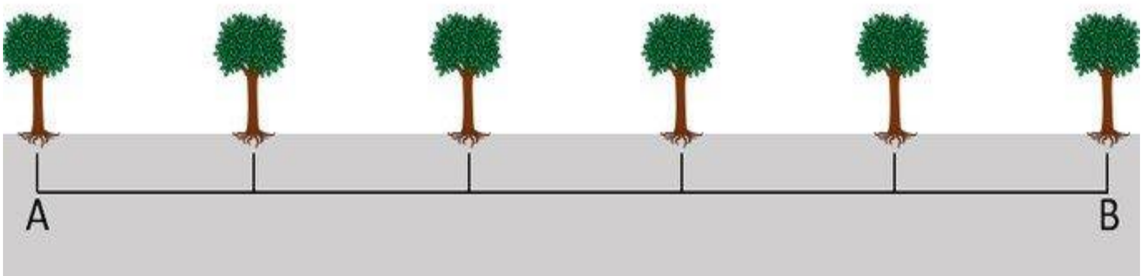
Etapa 2

1. Mário preencheu 3/4 de uma jarra de 500 mL com refresco. Na hora de servir a bebida, ele distribuiu o líquido igualmente em 5 copos de 50 mL, ocupando 2/4 da capacidade de cada um. Com base nestes dados responda: que fração de líquido restou na jarra?



7. As árvores de um parque estão dispostas de tal maneira que se construíssemos uma linha entre a primeira árvore (A) de um trecho e a última árvore (B)

conseguiríamos visualizar que elas estão situadas à mesma distância uma das outras. De acordo com a imagem acima, que fração que representa a distância entre a primeira e a segunda árvore?



8. 20 colegas de trabalho resolveram fazer uma aposta e premiar aqueles que mais acertassem os resultados dos jogos de um campeonato de futebol.

Sabendo que cada pessoa contribuiu com 30 reais e que os prêmios seriam distribuídos da seguinte forma:

- 1º primeiro colocado: 1/2 do valor arrecadado;
- 2º primeiro colocado: 1/3 do valor arrecadado;
- 3º primeiro colocado: recebe a quantia restante.

Quanto, respectivamente, cada participante premiado recebeu?

9. Em uma disputa entre carros de corrida um competidor estava a 2/7 de terminar a prova quando sofreu um acidente e precisou abandoná-la. Sabendo que a competição foi realizada com 56 voltas no autódromo, em que volta o competidor foi retirado da pista?

10. Duas empreiteiras farão conjuntamente a pavimentação de uma estrada, cada uma trabalhando a partir de uma das extremidades. Se uma delas pavimentar 2/5 da estrada e a outra os 81 km restantes, qual é a extensão dessa estrada?

APÊNDICE B

Teste de avaliação da aplicação da prática

Objetivo Geral

- Identificar se houve aprendizado após as etapas da engenharia didática.

Objetivo específico

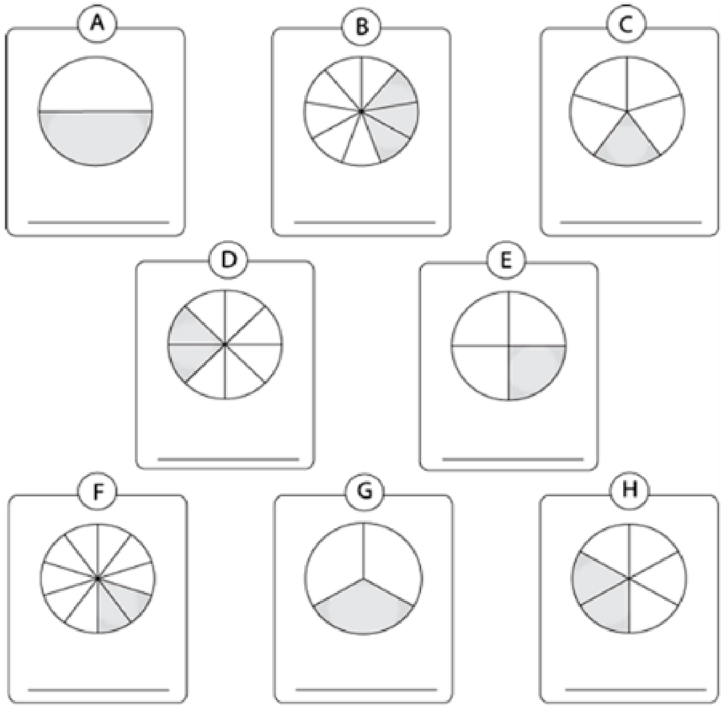
- Verificar se o aluno aprendeu a reconhecer e a ler uma fração**;**
- Constatar se o aluno aprendeu o conceito de parte/todo**;**
- Avaliar se o aluno aprendeu a operar com frações**;**
- Observar se o aluno aprendeu a localizar uma fração na reta numérica**.**

Metodologia

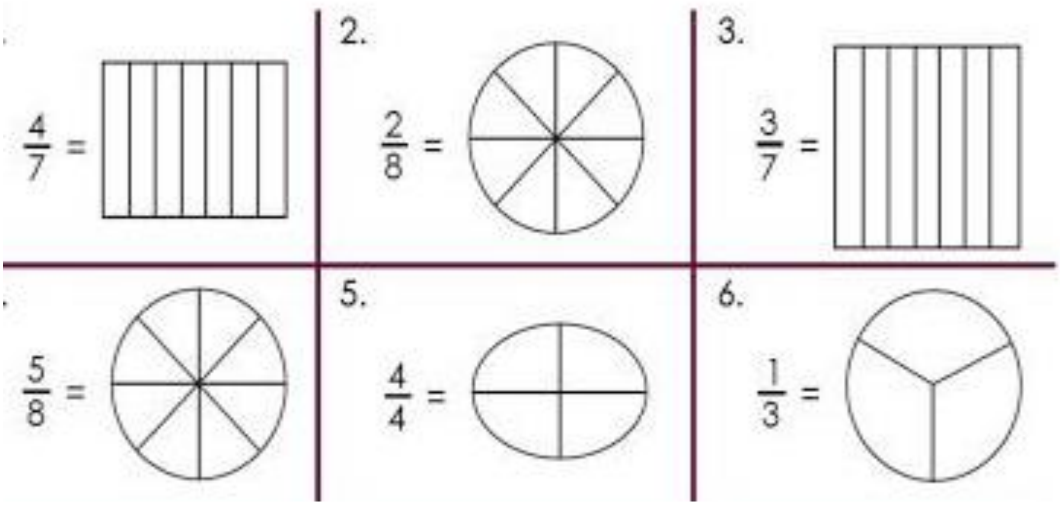
Revisão bibliográfica, aplicação de questionários e análise das respostas ao questionário.

Etapa 1

1. Defina com suas palavras o que é fração;
2. Dê exemplos de uma fração, e identifique o numerador e o denominador;
3. Escreva em algarismos e por extenso a parte que representa a parte pintada em cada figura abaixo:



4. Pinte as figuras de acordo com as frações indicadas. *Escreva ao lado a fração em algarismos:



5. Preencha os quadros, observando as figuras de acordo com o modelo:

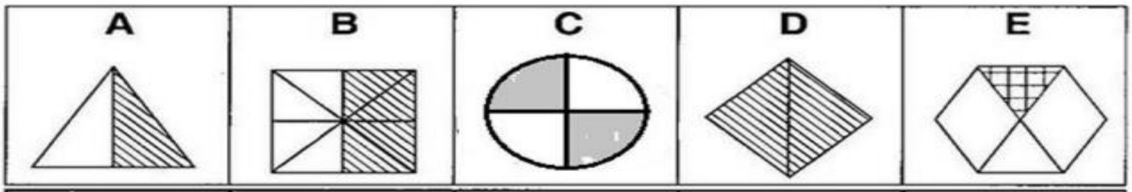
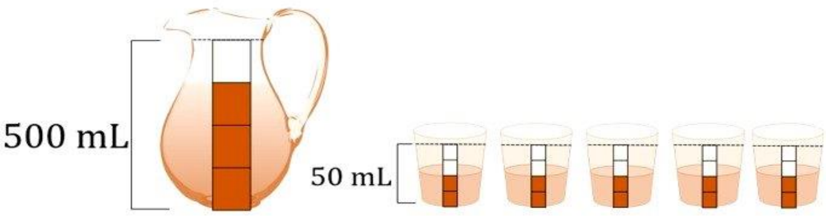


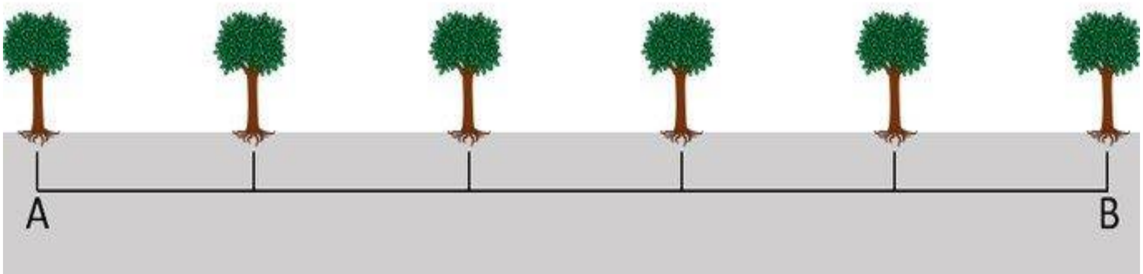
Figura	Partes pintadas	Total das partes	Fração	como se lê
A	1	2	$\frac{1}{2}$	um meio
B				
C				
D				
E				

Etapa 2

1. Mário preencheu 3/4 de uma jarra de 500 mL com refresco. Na hora de servir a bebida, ele distribuiu o líquido igualmente em 5 copos de 50 mL, ocupando 2/4 da capacidade de cada um. Com base nestes dados responda: que fração de líquido restou na jarra?



2. As árvores de um parque estão dispostas de tal maneira que se construíssemos uma linha entre a primeira árvore (A) de um trecho e a última árvore (B) conseguiríamos visualizar que elas estão situadas à mesma distância uma das outras. De acordo com a imagem acima, que fração que representa a distância entre a primeira e a terceira árvore?



3. 30 colegas de trabalho resolveram fazer uma aposta e premiar aqueles que mais acertassem os resultados dos jogos de um campeonato de futebol.

Sabendo que cada pessoa contribuiu com 50 reais e que os prêmios seriam distribuídos da seguinte forma:

1º primeiro colocado: 3/5 do valor arrecadado;

2º primeiro colocado: 1/3 do valor arrecadado;

3º primeiro colocado: recebe a quantia restante.

Quanto, respectivamente, cada participante premiado recebeu?

4. Em uma disputa entre carros de corrida um competidor estava a 5/7 de terminar a prova quando sofreu um acidente e precisou abandoná-la. Sabendo que a competição foi realizada com 112 voltas no autódromo, em que volta o competidor foi retirado da pista?
5. Duas empreiteiras farão conjuntamente a pavimentação de uma estrada, cada uma trabalhando a partir de uma das extremidades. Se uma delas pavimentar 2/5 da estrada e a outra os 72 km restantes, qual é a extensão dessa estrada?