UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CÂMPUS PROF. DR. SÉRGIO JACINTHO LEONOR
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

DEINY DHULY M. OLIVEIRA DA PAIXÃO

NÚMEROS IRRACIONAIS

ARRAIAS-TO
2022

DEINY DHULY M. OLIVEIRA DA PAIXÃO

NÚMEROS IRRACIONAIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Thiago Rodrigues Cavalcante.

ARRAIAS-TO
2022

A minha família, aos meus amigos e a todos aqueles que contribuíram para realização deste sonho. Em especial a meu esposo Gabriel Nunes R. Costa, a minha mãe Ernestina M. Oliveira, a meu padrasto Antônio D. Pereira, a meus Irmãos, Gleicivan, Antoniel e Maria Eduarda e a todos os meus amigos.

Agradecimentos

Em primeiro lugar a Deus, por propiciar as condições necessárias às conquistas e dar a força suficiente para vencer os desafios;

A meu orientador, Prof. Dr. Thiago Rodrigues Cavalcante, que contribuiu significativamente para a construção deste trabalho;

A minha família pelo apoio, paciência e compreensão;

Aos meus amigos que cobraram a minha presença, mas compreenderam as razões da minha ausência;

Aos meus colegas de curso pelas ajudas múltiplas em todo o percurso e pela amizade a vida toda;

Aos meus professores que transbordaram as barreiras do ensinar: instruíram, muniram;

À UFT pela oportunidade de formação ofertada;

Enfim, a todos que foram envolvidos de alguma forma e contribuíram para a realização deste trabalho.

Se procurar a sabedoria como se procura a prata e buscá-la como quem busca um tesouro escondido, então você entenderá o que é temer o Senhor e achará o conhecimento de Deus. Pois o Senhor é quem dá sabedoria; de sua boca procedem o conhecimento e discernimento.

(Salmos 2.4-6)

Resumo

Esta dissertação tem como objetivo realizar um estudo sobre os números irracionais. No decorrer deste trabalho, fizemos uma exposição de algumas propriedades dos números racionais e irracionais e apresentamos diversos exemplos de números irracionais, além disso, caracterizamos os números quanto a sua natureza algébrica ou transcendental. Considerando que os números irracionais é conteúdo abordado na Educação Básica, foram desenvolvidas propostas de atividades para serem executadas pelo professor na introdução do conteúdo nos anos finais do Ensino Fundamental. A pesquisa que mais se adequou ao nosso projeto foi a bibliográfica de uma metodologia exploratória, em que a consulta de materiais como artigos em revistas, dissertações, livros e outras fontes, são primordiais.

Palavras-Chave: Números Irracionais; Números Algébricos e Transcendentes; Educação Básica.

Abstract

This dissertation aims to carry out a study on irrational numbers. In the course of this work, we presented some properties of rational and irrational numbers and presented several examples of irrational numbers, in addition, we characterized the numbers in terms of their algebraic or transcendental nature. Considering that the irrational numbers ánd content covered in Basic Education, proposals for activities were developed to be performed by the teacher in the introduction of content in the final years of Elementary School. The research that best suited our project was the bibliography of an exploratory methodology, in which the consultation of materials such as articles in magazines, dissertations, books and other sources, are essential.

Keywords: Rational Numbers; Irrational Numbers; Algebraic and Transcendent Numbers; Basic education.

Sumário

1 INTRODUÇÃO

Esta pesquisa tem como objetivo realizar um estudo bibliográfico dos números irracionais e por fim propor quatro atividades que auxiliem o estudo desses números e a abordagem destes no ensino fundamental. Os números irracionais faz parte do conteúdo abordado nos últimos anos do ensino fundamental, mais precisamente no 8º e 9º ano e, de acordo com as orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) no que se refere ao ensino dos números irracionais no 9º ano do ensino fundamental, o aluno deve desenvolver a habilidade de,

> Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica. ([2], 2018, p. 317)

É importante salientar que, para que o aluno consiga reconhecer e entender um número irracional como propõe a BNCC, é essencial que ele saiba primeiro que no campo dos números racionais ocorrem duas possíveis representações, a fracionária e a decimal e, esta por sua vez, pode ser finita ou infinita periódica (a partir de uma sentença os algarismos começam a repetirem), ou seja, para a compreensão dos números irracionais é necessário e extremamente importante um entendimento básico sobre os números racionais.

O que acontece, na grande maiorias das vezes, é que apesar dos alunos compreenderem e saberem trabalhar com os números naturais, números inteiros, números fracionários, números decimais e dízimas periódicas, eles não conseguem associar estes com os termos racional e irracional. Os alunos não possuem familiaridades com as propriedades destes números. Com relação a essa dificuldade Mendes [11] afirma que os alunos,

> [...] não conseguem distinguir a diferença entre um número racional e um irracional; números com infinitas casas decimais periódicas são confundidos com irracionais; não há uma ideia formada sobre o infinito; não há uma justificativa para adquirir conhecimentos sobre os números irracionais. ([11], 2012, p. 29)

De acordo com essas considerações e outras com mesmo sentido, surgiu o interesse de pesquisar sobre o tema Números Irracionais. O objetivo era explorar mais o tema e aprofundar o conhecimento do professor do ensino básico sobre o assunto e, encontrar ou criar propostas de atividades que auxiliassem no estudo de números irracionais nos anos finais do ensino fundamental. Em suma, a pergunta motivadora para este trabalho foi: *De que forma apresentar os números irracionais para o aluno do ensino fundamental?*

Na intenção de realizar um estudo sobre os números irracionais com uma breve aplicação no ensino fundamental, este trabalho está organizado em 5 capítulos. Especificadamente, no primeiro capítulo, fazemos considerações iniciais a respeito do trabalho, motivação para o mesmo e um breve resumo do que é abordado em cada capítulo do texto.

No segundo capítulo, introduzimos conceitos e propriedades sobre os números racionais, tais como, a construção, operações e representação dos números racionais, que pode ser fracionária ou decimal, com a finalidade de construir a teoria necessária para o entendimento dos próximos capítulos e de todo trabalho de um modo geral.

No terceiro capítulo, definimos números irracionais e apresentamos alguns exemplos de números irracionais. Em destaque neste capítulo, mostramos a irracionalidade de números conhecidos na teoria, dentre eles destacamos o π e do número de Euler e.

Já no quarto capítulo, definimos números algébricos, apresentamos algumas propriedades desses números que são pertinentes para o nosso trabalho e mostramos a existência dos números transcendentes, em paralelo apresentamos exemplos para facilitar a compreensão das definições. Finalizamos o capítulo com um estudo dos primeiros exemplos de transcendentes, os Números de Liouville e apresentamos algumas propriedades dos números transcendentes.

E no quinto capítulo, apresentamos quatro propostas didáticas para a introdução da temática números irracionais no ensino fundamental, descrevemos o passo a passo desse roteiro para auxiliar o docente quanto ao conhecimento matemático e sua prática em sala de aula.

2 NÚMEROS RACIONAIS

Neste capítulo faremos uma abordagem sobre o conjunto dos Números Racionais $\mathbb{Q}$ com a intenção de tornar a leitura mais acessível. Vamos considerar a existência e propriedades do conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$) e dos números inteiros ($\mathbb{Z}$) que são subconjuntos de $\mathbb{Q}$. O objetivo aqui é, a partir das definições, proposições, teoremas e operações do conjunto dos números racionais, construir a teoria necessária para fundamentar o estudo dos números irracionais, que será feita no próximo capítulo. Para o desenvolvimento deste capítulo utilizaremos [4] e [12].

O conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{1,2,3,4,5,...\}$ é fechado em relação a adição e a multiplicação, ou seja, para quaisquer m e n naturais temos que a soma $m+n \in \mathbb{N}$ e o produto $m \cdot n \in \mathbb{N}$. Entretanto, temos que a subtração $m-n \notin \mathbb{N}$, para $n \geq m$. Desta forma, surge a necessidade da construção do conjunto dos números inteiros, ou seja, $\mathbb{Z} = \{..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$, o qual é fechado em relação a adição, subtração e multiplicação.

No entanto, nem os naturais, nem os inteiros são fechados com relação a divisão, ou seja, para alguns p e q inteiros, temos que a fração $\frac{p}{q} \notin \mathbb{Z}$. Neste caso, a divisão de inteiros gera frações que não são números inteiros, como exemplo podemos citar $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{6}$, $\frac{-15}{11}$, etc. Estas frações fazem com que seja necessário o estudo do conjunto que é tema central deste capítulo, o conjunto dos números racionais.

Definição 2.0.1. *Um número racional é um número que pode ser representado na forma $\frac{m}{n}$, onde m e n são inteiros e n é diferente de zero. Na fração $\frac{m}{n}$, m é chamado numerador e n denominador e o conjunto dos números racionais será denotado por $\mathbb{Q}$.*

No que segue, serão apresentados alguns exemplos de números racionais e faremos algumas observações relacionadas a definição dada anteriormente.

Exemplo 2.0.1. *Na fração $\dfrac{3}{2}$, 3 é o numerador e 2 o denominador.*

Exemplo 2.0.2. *Na fração $\dfrac{9}{6}$, 9 é o numerador e 6 o denominador.*

Exemplo 2.0.3. *Na fração $\dfrac{-15}{11}$, -15 é o numerador e 11 o denominador.*

Observação 2.0.1. *Todo número inteiro é racional, pois podem ser escritos na forma*

$$...,, \frac{-4}{1}, \frac{-3}{1}, \frac{-2}{1}, \frac{1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, ...,$$

onde a cada número inteiro, tem-se o número 1 como denominador.

A seguir, definiremos frações irredutíveis, para isso, traremos antes a definição de divisor, números primos entre si, e máximo divisor comum. Tais definições são necessárias para o desenvolvimento e entendimento das próximas seções e capítulos.

Definição 2.0.2. *Diz-se que um número inteiro a divide um número inteiro b se $b = ac$ para algum $c \in \mathbb{Z}$. Quando isso acontece também-se diz que a é divisor de b ou que b é divisível por a. O elemento c tal que $b = ac$ é chamado quociente de b por a e é indicado por $c = \dfrac{a}{b}$.*

Usaremos a notação $a \mid b$ para a divide b e $a \nmid b$, caso contrário.

Exemplo 2.0.4. *Note que $1 \mid 2$, pois existe um inteiro $c = 2$, tal que $2 = 1.2$.*

Exemplo 2.0.5. *Observe que $2 \nmid 5$, pois não existe um inteiro c, tal que $5 = 2.c$.*

Definição 2.0.3. *Um número natural maior que 1 é dito primo se possui como divisores somente 1 e ele mesmo. Todo número maior que 1 que não for primo é dito como composto.*

Exemplo 2.0.6. *Os números 2, 3, 5 são exemplos de números primos, já os números 4, 6, 8 são números compostos.*

Definição 2.0.4. *Um número d é o máximo divisor comum de a e b, indicamos por $mdc(a,b) = d$, para $a, b \in \mathbb{Z}$ se, e somente se d satisfaz*

i) $d \geqslant 0$;

ii) $d \mid a$ *e* $d \mid b$;

iii) *Se existe um inteiro c, tal que $c \mid a$ e $c \mid b$, então $c \mid d$.*

Em outras palavras, dados dois inteiros a e b distintos ou não, um inteiro d será dito um divisor comum de a e b se $d \mid a$ *e* $d \mid b$. Os números ± 1, ± 3 e± 9 são os divisores comuns de 9 e 18, e o máximo divisor comum é o maior divisor comum de 9 e 18, ou seja, $mdc(9,18) = 9$. Vejamos a seguir , mais alguns exemplos.

Exemplo 2.0.7. $mdc(-4,8) = mdc(4,8) = 4$.

Exemplo 2.0.8. $mdc(-3,-5) = mdc(3,5) = 1$.

Exemplo 2.0.9. $mdc(0,-9) = mdc(0,9) = 9$.

Para mais detalhes e propriedades sobre Máximo Divisor Comum , consultar [7].

Definição 2.0.5. *Se o $mdc(a,b) = 1$, diz-se que a e b são primos entre si.*

Exemplo 2.0.10. *Os inteiros 3 e 5 são primos entre si, pois o $mdc(3,5) = 1$.*

Definição 2.0.6. *A fração* $\frac{m}{n}$ *chama-se irredutível se* m *e* n *são primos entre si, em outras palavras,* $\frac{m}{n}$ *irredutível se* $mdc(m,n) = 1$.

Exemplo 2.0.11. $\frac{1}{2}$ *e* $\frac{5}{2}$ *são frações irredutíveis.*

Exemplo 2.0.12. *As frações* $\frac{-21}{9}$, $\frac{10}{5}$ *e* $\frac{3}{3}$ *não são irredutíveis.*

Definiremos agora o conjunto dos números racionais, este representado por $\mathbb{Q}$.

Definição 2.0.7. *O conjunto do números racionais é definido como o conjunto dos números que podem ser representados na forma* $\frac{m}{n}$, *onde* m *e* n *são inteiros e* n *é diferente de zero, isto é*

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0\right\}. \tag{2.1}$$

No conjunto dos números racionais podemos definir as operações de adição e Multiplicação. Dedicamos a próxima seção ao estudo dessas operações, entendendo que elas vão ser necessárias para a compreensão de números irracionais.

2.1 Operações em $\mathbb{Q}$

Nesta seção definiremos as operações de adição e subtração no conjunto dos números racionais, para isso, definiremos a seguir frações equivalentes, pois tal conceito é importante para a compreensão desta seção.

Dois elementos $a = \frac{m}{n}$ e $b = \frac{r}{s}$ de $\mathbb{Q}$ são iguais, se $\frac{m}{n} = \frac{r}{s} \Leftrightarrow m.s = r.n$. Vejamos alguns exemplos

Exemplo 2.1.1. *As frações* $a = \frac{4}{6}$ *e* $b = \frac{6}{9}$ *são iguais, pois* $4.9 = 6.6$.

Exemplo 2.1.2. *As frações* $a = \frac{9}{15}$ *e* $b = \frac{3}{5}$ *são iguais, pois* $9.5 = 15.3$.

Perceba nos exemplos anteriores que, apesar das frações terem representações diferentes, elas representam o mesmo número, para isso, basta simplificarmos as frações pelo mdc do númerador e denominador. Frações como estas chamamos de frações equivalentes, pois quando se tornam irredutíveis elas são idênticas.

2.1.1 Adição em $\mathbb{Q}$

Definição 2.1.1. *Sejam $a = \dfrac{m}{n}$ e $b = \dfrac{r}{s}$ dois elementos arbitrários em $\mathbb{Q}$. Defini-se a adição de a com b, indicada por $a+b$, o elemento de $\mathbb{Q}$ definido da seguinte maneira:*

$$a+b = \frac{ms+nr}{ns}.$$

Exemplo 2.1.3. $\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{7} = \dfrac{3\cdot 7+5\cdot 2}{2\cdot 7} = \dfrac{35+10}{14} = \dfrac{45}{14}$.

No que segue, mostraremos que a adição de dois números racionais $a+b$ não depende da escolha do representante da fração equivalente tomadas para a e b.

Teorema 2.1.1. *Se $a = \dfrac{m}{n} = \dfrac{m^{'}}{n^{'}}$ e $b = \dfrac{r}{s} = \dfrac{r^{'}}{s^{'}}$, então $\dfrac{ms+rn}{ns} = \dfrac{m^{'}s^{'}+r^{'}n^{'}}{n^{'}s^{'}}$.*

Demonstração. Por hipótese, temos que $\dfrac{m}{n} = \dfrac{m^{'}}{n^{'}}$ e $\dfrac{r}{s} = \dfrac{r^{'}}{s^{'}}$, então

$$mn^{'} = nm^{'} \text{ e } rs^{'} = sr^{'}.$$

Temos que

$$\frac{m}{n}+\frac{r}{s} = \frac{ms+nr}{ns} \tag{2.2}$$

e

$$\frac{m'}{n'}+\frac{r'}{s'} = \frac{m's'+n'r'}{n's'}. \tag{2.3}$$

Queremos provar que as somas (2.2) e (2.3) são iguais, isto é, $(ms+rn)n^{'}s^{'} = ns(m^{'}s^{'}+r^{'}n^{'})$, ou seja, $msn^{'}s^{'}+rns^{'}n^{'} = nsm^{'}s^{'}+nsr^{'}n^{'}$, o que é de fato, pois, $mn^{'} = nm^{'}$ e $rs^{'} = sr^{'}$.

□

Exemplo 2.1.4. *Se $\dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{6}$ e $\dfrac{2}{5} = \dfrac{4}{10}$, o que é verdade, pois $1\cdot 6 = 3\cdot 2$ e $2\cdot 10 = 5\cdot 4$. Então*

$$\frac{1.5+2.3}{3.5} = \frac{2.10+6.4}{6.10}.$$

Com a adição podemos estabelecer também a subtração de dois números racionais. A subtração é definida como a soma do primeiro elemento com o oposto do segundo elemento, veja a seguir:

$$\frac{m}{n}+(-\frac{r}{s}) = \frac{m}{n}-\frac{r}{s}.$$

Exemplo 2.1.5. *A subtração de $a = \dfrac{2}{3}$ por $b = \dfrac{1}{5}$ é dada por*

$$\frac{2}{3}+\left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{2}{3}-\frac{1}{5}.$$

2.1.2 Multiplicação em $\mathbb{Q}$

Definição 2.1.2. *Sejam* $a = \dfrac{m}{n}$ *e* $b = \dfrac{r}{s}$ *dois elementos arbitrários em* $\mathbb{Q}$*. Defini-se a multiplicação de* a *por* b*, indicada por* $a \cdot b$ *o elemento de* $\mathbb{Q}$ *definido da seguinte maneira.*

$$ab = a \cdot b = \frac{mr}{ns}.$$

Exemplo 2.1.6. $\dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{5}{7} = \dfrac{3 \cdot 5}{2 \cdot 7} = \dfrac{15}{14}.$

Assim como na soma , a multiplicação $a \cdot b$ não depende da escolha do representante da fração equivalente tomadas para a e b.

Teorema 2.1.2. *Se* $\dfrac{m}{n} = \dfrac{m'}{n'}$ *e* $\dfrac{r}{s} = \dfrac{r'}{s'}$*, então* $\dfrac{mr}{ns} = \dfrac{m'r'}{n's'}$.

Demonstração. Por hipótese temos, $\dfrac{m}{n} = \dfrac{m'}{n'}$ e $\dfrac{r}{s} = \dfrac{r'}{s'}$, o que implica $mn' = nm'$ e $rs' = sr'$.

Temos que,

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{r}{s} = \frac{m \cdot r}{n \cdot s} \tag{2.4}$$

e

$$\frac{m'}{n'} \cdot \frac{r'}{s'} = \frac{m' \cdot r'}{n' \cdot s'}. \tag{2.5}$$

Queremos provar que $\dfrac{m \cdot r}{n \cdot s} = \dfrac{m' \cdot r'}{n' \cdot s'}$, isto é , $mr \cdot n's' = ns \cdot m'r'$, ou, $(mn')(rs') = (nm')(sr')$, o que segue imediatamente da hipótese $mn' = nm'$ e $rs' = sr'$.

□

Exemplo 2.1.7. *Se* $\dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{6}$ *e* $\dfrac{2}{5} = \dfrac{4}{10}$*, o que é verdade, pois* $1 \cdot 6 = 3 \cdot 2$ *e* $2 \cdot 10 = 5 \cdot 4$*. Então*

$$\frac{1.2}{3.5} = \frac{2.4}{6.10}.$$

Com a multiplicação podemos estabelecer também a divisão de dois números racionais. A divisão de um número racional por outro número racional, é definida como a multiplicação da primeira fração pelo inverso da segunda fração, ou seja, $a : b = ab^{-1}$.

O elemento $a : b$ representa a divisão a por b e b^{-1} representa o inverso multiplicativo de b.

Exemplo 2.1.8. *Se* $a = \frac{2}{3}$ *e* $b = \frac{7}{5}$, *então*

$$\begin{aligned} a\colon b &= \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{7}{5}\right)^{-1} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} \\ &= \frac{10}{21}. \end{aligned}$$

Exemplo 2.1.9. *Se* $a = \frac{5}{3}$ *e* $b = \frac{1}{4}$, *então*

$$\begin{aligned} a\colon b &= \frac{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} \\ &= \frac{5}{3} \cdot \frac{4}{1} \\ &= \frac{20}{3}. \end{aligned}$$

Vimos até aqui, que os números racionais são todas as frações na forma $\frac{m}{n}$, onde m e n são inteiros e n é diferente de zero, e que o conjunto dos números racionais é fechado para as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, ou seja, ao efetuarmos essas operações com números racionais, obtemos como resultado números também racionais.

Existe uma outra representação do número racional que é diferente da forma $\frac{m}{n}$, a saber, a representação decimal. Através da representação decimal conseguimos identificar se um número é ou não racional. Sendo assim, na próxima seção, o nosso objetivo será apresentar alguns resultados sobre essa representação decimal dos números racionais.

2.2 Representação de um Número Racional($\mathbb{Q}$)

A representação decimal de um número racional, pode ser obtida por meio das frações, dividindo o numerador pelo denominador, em outras palavras, obtém-se uma representação decimal do número racional $\frac{m}{n}$, dividindo o inteiro m pelo inteiro n e n diferente de zero.

A representação decimal de alguns números racionais são finitas:

Exemplo 2.2.1. $\frac{1}{2} = 0,5$ *, para obter o decimal* $0,5$*, dividimos o inteiro* 1 *pelo inteiro* 2.

Exemplo 2.2.2. $\frac{3}{20} = 0,15$*, para obter o decimal* $0,15$*, dividimos o inteiro* 3 *pelo inteiro* 20.

Exemplo 2.2.3. $\frac{11}{8} = 1,375$*, para obter o decimal* $1,375$*, dividimos o inteiro* 11 *pelo inteiro* 8.

Já outros números racionais, possuem uma representação infinita, e essa representação infinita pode ser periódica ou não periódica. O termo periódica vem no sentido de que a partir de uma parcela, os termos formam um padrão e começam a se repetir, como exemplo destes últimos, temos :

Exemplo 2.2.4. $\dfrac{1}{3} = 0,33333333333333333....$

Exemplo 2.2.5. $\dfrac{3}{21} = 0,142857142857142857142857142857142857....$

Exemplo 2.2.6. $\dfrac{11}{9} = 1,2222222222222222222222222222222....$

Note que nos exemplos 2.2.1, 2.2.2 e 2.2.3 foram alterados uma unidade a mais no denominador e a representação decimal do número racional se tornou infinita periódica. Esta por sua vez recebe o nome de dízima periódica, e ela nos ajudará na compreensão da representação decimal dos racionais e servirá de base para definirmos os números irracionais. Mais precisamente, definimos:

Definição 2.2.1. *Chama- se dízima periódica, uma representação decimal de um número racional* $\frac{m}{n}$*, na qual, após um número finito de termos, aparece um bloco (chamado período) e a partir daí a decimal é constituída pela repetição sucessiva desse período, isto é,*

$$\frac{m}{n} = x, a_1a_2a_3...a_m\overline{b_1b_2b_3...b_n}, \quad com\ x \in \mathbb{Z},\ e\, a_i, b_j \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

onde a barra sobre o bloco $b_1b_2b_3...b_n$ *indica que ele irá se repetir indefinidamente.*

Alguns exemplos de números racionais que possuem representação decimal infinita periódica foram listados no exemplos 2.2.4, 2.2.5 e 2.2.6.

Quando a representação decimal infinita não possuir um período, diremos que ela é não periódica e estas serão tratadas no próximo capítulo, quando estaremos estudando os números irracionais.

A partir deste momento, apresentaremos algumas proposições sobre a representação dos números racionais. No que segue, vamos tentar entender como que partimos alterando em uma unidade os denominadores dos exemplos 2.2.1, 2.2.2 e 2.2.3, transformamos as representações finitas em dízimas periódicas nos exemplos 2.2.4, 2.2.5 e 2.2.6.

Proposição 2.2.1. *Um número racional, na forma irredutível* $\dfrac{m}{n}$*, tem representação decimal finita se, e somente se, o denominador* n *não tiver outros fatores primos além de* 2 *e* 5*.*

Demonstração. A parte *se* da proposição afirma que, se o inteiro n não tiver outros fatores primos além de 2 e 5, então o número racional $\dfrac{m}{n}$, com m e n primos entre si, terá uma representação decimal finita.

Seja n da forma $2^r \cdot 5^s$, com r e s inteiros positivos ou nulos. Analisaremos os inteiros r e s. Sabemos pela tricotomia, que s é menor do que ou igual a r ($s \leqslant r$), ou então, s é maior do que r ($s > r$).

Supondo que ($s \leqslant r$), multiplicaremos o numerador e o denominador de $\frac{m}{n}$, por 5^{r-s}, obtendo

$$\begin{aligned}\frac{m}{n} &= \frac{m}{2^r.5^s}\\ &= \frac{m.5^{r-s}}{2^r.5^s.5^{r-s}}\\ &= \frac{m.5^{r-s}}{2^r.5^r}\\ &= \frac{m.5^{r-s}}{10^r}.\end{aligned}$$

Sendo $r - s$ positivo ou nulo, 5^{r-s} será um inteiro e, portanto, $m.5^{r-s}$ também será um inteiro, então podemos escrever $m.5^{r-s}$ igual a um a, logo

$$\frac{m}{n} = \frac{a}{10^r}.$$

E como a divisão do inteiro a por 10^r requer apenas que coloquemos a vírgula no lugar correto, obteremos para $\frac{m}{n}$ uma representação decimal finita.

Agora se $s > r$, multiplicaremos o numerador e o denominador de $\frac{m}{n}$ por 2^{s-r}, assim

$$\begin{aligned}\frac{m}{n} &= \frac{m}{2^r.5^s}\\ &= \frac{m.2^{s-r}}{2^r.5^s.2^{s-r}}\\ &= \frac{m.2^{s-r}}{2^s.5^s}\\ &= \frac{m.2^{s-r}}{10^s}.\end{aligned}$$

Fazendo $m.2^{s-r} = b$, obteremos

$$\frac{m}{n} = \frac{b}{10^s}.$$

observe que $\frac{b}{10^s}$ representa um decimal finito, para isso, basta dividir o inteiro b, pelo inteiro 10^s.

A recíproca deste resultado segue de forma direta, pois se o $\frac{m}{n}$ tem representação finita, obrigatoriamente devemos ter

$$\begin{aligned}\frac{m}{n} &= \frac{n}{10^t}, \text{ para algum } \ t \in \mathbb{Z}\\ &= \frac{m}{5^t \cdot 2^t}.\end{aligned}$$

$\square$

Na proposição anterior, mostramos que um número racional $\frac{m}{n}$ possui representação finita, se e somente se, quando escrito na forma irredutível, a decomposição de n em fatores primos forem iguais a potências dos primos 2 e 5. Para obter a representação decimal desse racional $\frac{m}{n}$ é necessário transformá-lo em outra fração, cujo o denominador seja uma potência de 10, para tal, basta multiplicar o numerador e o denominador de $\frac{m}{n}$ por uma potência de 2 ou 5 conveniente.

Exemplo 2.2.7.

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3 \cdot 5^0} = \frac{1 \cdot 5^3}{2^3 \cdot 5^0 \cdot 5^3} = \frac{125}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{125}{10^3} = 0,125.$$

Exemplo 2.2.8.

$$\frac{2}{25} = \frac{2}{2^0 \cdot 5^2} = \frac{2 \cdot 2^2}{2^0 \cdot 5^2 \cdot 2^2} = \frac{8}{2^2 \cdot 5^2} = \frac{8}{10^2} = 0,08.$$

Exemplo 2.2.9.

$$\frac{7}{20} = \frac{7}{2^2 \cdot 5} = \frac{7 \cdot 5}{2^2 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{35}{2^2 \cdot 5^2} = \frac{35}{10^2} = 0,35.$$

Segue da Proposição anterior que, quando um número racional na sua forma irredutível possuir algum fator primo diferente de 2 e 5, a sua representação decimal será infinita periódica.

Exemplo 2.2.10.

$$\frac{m}{n} = \frac{3}{18} = \frac{3}{2 \cdot 3^2} = 0,1666... = 0,1\overline{6}.$$

Em relação a representação de um número racional, tem-se que ele pode ser representando por um número decimal finito ou infinito períodico. Veremos a partir de agora que a recíproca também é verdadeira.

Proposição 2.2.2. *Todo decimal finito ou periódico é racional.*

Demonstração. Se x ́decimal finito, então ele pode ser escrito na forma $x = a_0, a_1a_2...a_r$, com $0 \leqslant a_i \leqslant 9$ $(i = 1, 2, ..., r)$, $r \in \mathbb{N}$ e $a_0 \in \mathbb{Z}$.

Multiplicando x por 10^r, tem-se

$$\begin{aligned} 10^r.x &= 10^r.(a_0, a_1a_2...a_r) \\ 10^r x &= a_0a_1a_2...a_r \\ x &= \frac{a_0a_1a_2...a_r}{10^r}. \end{aligned}$$

Como $a_0a_1a_2...a_r$ é inteiro e 10^r também é inteiro, então x é racional.

Para um número decimal periódico, vamos considerar que podemos escrever qualquer dízima periódica (sem a parte inteira) como

$$x = 0, a_1 a_2 ... a_s \overline{b_1 b_2 b_3 ... b_t}, \tag{2.6}$$

onde $a_1 a_2 ... a_s$ representam a parte não periódica e $b_1 b_2 b_3 ... b_t$ representam os t algarismos do período.

Multiplicando x por 10^{s+t} tem-se,

$$\begin{aligned} 10^{s+t}.x &= 10^{s+t}.(0, a_1 a_2 ... a_s \overline{b_1 b_2 b_3 ... b_t}) \\ 10^{s+t}x &= a_1 a_2 ... a_s b_1 b_2 b_3 ... b_t + 0, \overline{b_1 b_2 b_3 ... b_t}. \end{aligned}$$

Agora multiplicando x por 10^s tem-se,

$$\begin{aligned} 10^{s}.x &= 10^{s}.(a_1 a_2 ... a_s \overline{b_1 b_2 b_3 ... b_t}) \\ 10^{s}.x &= a_1 a_2 ... a_s + 0, \overline{b_1 b_2 b_3 ... b_t}. \end{aligned}$$

Subtraindo $10^{s+t}x$ por $10^s.x$ obtém-se,

$$\begin{aligned} 10^{s+t}x - 10^{s}.x &= a_1 a_2 ... a_s b_1 b_2 b_3 ... b_t + 0, \overline{b_1 b_2 b_3 ... b_t} - (a_1 a_2 ... a_s + 0, \overline{b_1 b_2 b_3 ... b_t}) \\ (10^{s+t} - 10^{s})x &= a_1 a_2 ... a_s b_1 b_2 b_3 ... b_t - a_1 a_2 ... a_s \\ x &= \frac{a_1 a_2 ... a_s b_1 b_2 b_3 ... b_t - a_1 a_2 ... a_s}{10^{s+t} - 10^{s}}. \end{aligned}$$

Como $a_1 a_2 ... a_s b_1 b_2 b_3 ... b_t - a_1 a_2 ... a_s$ é inteiro e $10^{s+t} - 10^s$ também é inteiro, concluí-se que x é racional. □

Para obter a representação fracionária de um número decimal finito, basta multiplicar x por uma potência de 10 conveniente. Já Para obter a representação fracionária de um número decimal infinito periódico, inicialmente multiplica-se por um número e, depois, por outro, de modo que aos subtrairmos os dois produtos obtidos, as parte periódica infinita irá desaparecer. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 2.2.11. *Encontre a fração que representa a decimal* $x = 3,265$.
Solução. *Para encontrar a fração que representa dízima periódica*

$$x = 3,265, \tag{2.7}$$

basta multiplicar os dois lados da equação (2.7) *por uma potência de* 10 *conveniente, neste caso, multiplicaremos por* 10^3*:*

$$\begin{aligned} 10^3.x &= 10^3.3,265 \\ 10^3x &= 3265 \\ 1000x &= 3265 \\ x &= \frac{3265}{1000}. \end{aligned}$$

Portanto, a decimal $x = 3,265$*, pode ser representada pela fração* $\frac{3265}{1000}$.

Exemplo 2.2.12. *Encontre a fração que representa a decimal* $x = 0,363636...$.
Solução: *Para encontrar a fração que representa dízima periódica*

$$x = 0,363636..., \tag{2.8}$$

primeiro multiplicaremos os dois lados da igualdade da equação (2.8) *por um múltiplo de 10, de acordo com a quantidade de algarismo do período,*

$$\begin{aligned} 100.x &= 100\ .\ 0,363636... \\ 100x &= 36,363636... \end{aligned} \tag{2.9}$$

O próximo passo é fazer a subtração de (2.9) *por* (2.8)

$$\begin{aligned} 100x - x &= 36,363636... - 0,363636... \\ 99x &= 36 \\ x &= \frac{36}{99} \\ x &= \frac{4}{11}. \end{aligned}$$

Portanto dízima periódica $0,363636...$ *pode ser representada pela fração* $\frac{4}{11}$.

Exemplo 2.2.13. *Encontre a fração que representa a decimal* $x = 2,579191...$.
Solução: *Para encontrar a fração que representa dízima periódica*

$$x = 2,579191...$$

Iniciaremos multiplicando x *por duas potências de* 10 *diferentes, primeiro multiplicaremos por* 10^4*, depois por* 10^2*, obtendo*

$$10^4x = 25791,919191... \tag{2.10}$$

$$10^2x = 257,919191... \tag{2.11}$$

Subtraindo (2.10) *por* (2.11), *temos*

$$\begin{aligned} 10^4x - 10^2x &= 25791,919191... - 257,919191... \\ \left(10^4 - 10^2\right)x &= 25534 \\ 9900x &= 25534 \\ x &= \frac{25534}{9900}. \end{aligned}$$

Portanto, $2,579191...$ *pode ser representada pela fração* $\dfrac{25534}{9900}$.

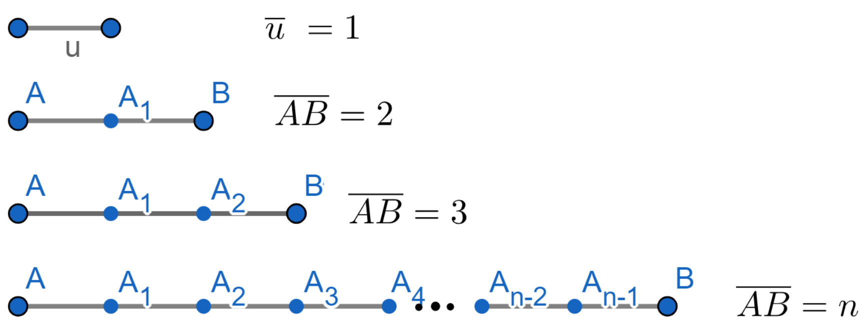
Neste capítulo mostramos que os números racionais são frações do tipo $\dfrac{m}{n}$, onde m e n são números inteiros, e estas frações podem ser representadas por decimais finitos ou decimais infinitos periódicos. Existem também aqueles números que tem uma representação infinita e não periódica, falar sobre os números que apresentam essas características é o assunto que apresentaremos no próximo capítulo.

3 NÚMEROS IRRACIONAIS

No cápitulo anterior vimos que o conjunto dos números racionais é formado por todos os números que podem ser escrito como uma fração de inteiros, e que essas frações possuem uma representação decimal finita ou infinita periódica. Além dos racionais, existem os números que tem representação decimal infinita e não periódica, chamados de Irracionais. Historicamente, o surgimento desses números esta ligado a ideia da incomensurabilidade, assim, neste capítulo, além de apresentar algumas propriedades do conjunto dos números irracionais e mostrar a irracionalidade de alguns números como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, a raíz quadrada de um número primo qualquer , o número π e o número de Euler(e), vamos discorrer um pouco sobre a incomensurabilidade dos irracionais. Para isso, utilizaremos [1], [5], [6], [7], [8], [10], [12] e [15].

3.1 Grandezas comensuráveis e incomensuráveis

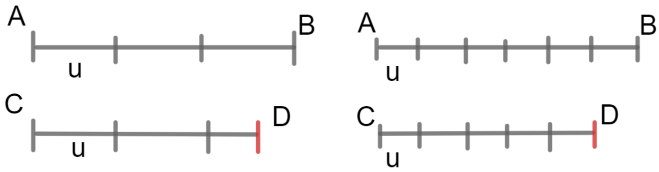
Sejam $\overline{AB}$ um segmento de reta e u uma unidade de medida ou segmento unitário. No que segue, vamos entender como segmentos congruentes os que possuem mesma medida. Supondo que $\overline{AB}$ seja decomposto, por $(n-1)$ pontos interiores, em n segmentos justapostos, então a medida de $\overline{AB}$, denotada por AB será a soma destes n segmentos. Veja a seguir,



Fonte: Próprio Autor.

Observação 3.1.1. *i) Note que u cabe n vezes em $\overline{AB}$. Similarmente, $AB = n \cdot u = n$.*

ii) Se não existir um um inteiro n tal que $AB = n \cdot u$, podemos subdividir o segmento u, obtendo u' de modo que $AB = n \cdot u'$.



Fonte: Próprio Autor.

Dados dois segmentos quaisquer, é sempre possível encontrar uma unidade comum a elas, de modo que ambas tenham medidas decimais finitas? A resposta para essa pergunta é não.

Exemplo 3.1.1. *i) A diagonal d e o lado l de um quadrado, são tais que :* $\frac{d}{l} = \sqrt{2}$*;*

ii) O comprimento C e o diâmetro d de um círculo são tais que: $\frac{C}{d} = \pi$.

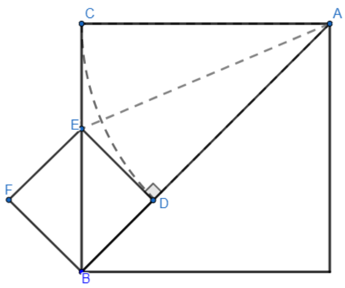
A seguir, apresentaremos a definição de segmentos comensuráveis e incomensuráveis que irá responder os questionamentos anteriores.

Definição 3.1.1 (Segmentos Comensuráveis)**.** *Sejam AB e CD dois segmentos. Se existem um segmento unitário u e dois inteiros m e n tais que $AB = m \cdot u$ e $CD = n \cdot u$, dizemos que AB e CD são segmentos comensuráveis. Caso contrário AB e CD são ditos incomensuráveis.*

As grandezas incomensuráveis, foram descobertas pelos Pitagóricos, com argumentos geométricos, mostrando que o lado e a diagonal de um quadrado são segmentos incomensuráveis. Descreveremos esse resultado no exemplo a seguir.

Exemplo 3.1.2. *Mostre que o lado de um quadrado e a sua diagonal são segmentos incomensuráveis.*

Solução 3.1.1. *A figura a seguir ilustra um quadrado cuja diagonal é denotada por $\delta = AB$ e cujo lado é $\lambda = AC$.*



Fonte: Próprio Autor.

Suponhamos que δ e λ sejam comensuráveis. Então existirá um terceiro segmento σ que seja um submúltiplo comum de δ e λ. Fazemos agora a seguinte construção: traçamos o arco CD com o centro em A e o segmento ED tangente a esse arco em D, de sorte que $AD = AC$.

Então, nos triângulos retângulos ACE e ADE, os catetos AC e AD são iguais, e como a hipotenusa AE é comum, concluímos que são também iguais os catetos CE e DE. Portanto,

$$\delta = AB = AD + BD = \lambda + BD,$$
$$\lambda = BC = BE + EC = BE + BD,$$

ou seja,

$$\delta = \lambda + BD, \tag{3.1}$$
$$\lambda = BE + BD. \tag{3.2}$$

Como o segmento σ é submúltiplo comum de δ e λ, concluímos por $\delta = \lambda + BD$, que σ é submúltiplo de BD. Daqui e de $\lambda = BE + BD$ segue que σ também é submúltiplo de BE. Provamos assim que, se houver um segmento σ que seja submúltiplo comum de $\delta = AB$ e $\lambda = AC$, então o mesmo segmento σ será submúltiplo de BE e BD, segmento esses que são a diagonal e o lado do quadrado $BDEF$. Ora, a mesma construção geométrica que nos permitiu passar do quadrado original para o quadrado $BDEF$ pode ser repetida com esse último para chegarmos a um quadrado menor ainda, e assim por diante, indefinidamente; e esses quadrados vão se tornando arbitrariamente pequenos, pois, as dimensões de cada quadrado diminuem em mais da metade quando passamos de um deles a seu sucessor. Dessa maneira, provamos que o segmento σ deverá ser submúltiplo comum do lado e da diagonal de um quadrado tão pequeno quanto desejamos, o que é um absurdo. O absurdo provém da suposição inicial de comensurabilidade de AC e AB. Concluímos pois que o lado e a diagonal de qualquer quadrado são grandezas incomensuráveis.

A existência de segmentos incomensuráveis significa que os números racionais não são suficientes para medir todos os segmentos de reta, sendo necessário ampliar o conceito de número, introduzindo os chamados números irracionais.

A seguir, apresentaremos a definição de números irracionais.

Definição 3.1.2. *Um número irracional é qualquer número que possui representação decimal infinita e não periódica, ou seja, são números que não podem ser expressos como razão $\frac{m}{n}$ de dois inteiros.*

Exemplo 3.1.3. *O número* $1,414213562373095048...$ *é um número decimal infinito não periódico, portanto um número irracional.*

Exemplo 3.1.4. *O número* $0,12345678910111213...$ *é um decimal infinito não periódico, portanto um número irracional.*

A reunião de todos o números que apresentam a característica enunciada acima formam o conjunto dos números irracionais, e este conjunto é geralmente indicado pela letra $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

Nesta seção nos dedicamos a definir os números irracionais e o conjunto dos números irracionais, na próxima seção apresentaremos algumas propriedades referentes a esse conjunto.

3.2 Propriedades dos números irracionais

Diferente do conjunto dos números racionais, o conjunto dos números irracionais não é fechado em relação a adição e a multiplicação, ou seja, dado dois números irracionais, não podemos afirmar que a soma desses números seja irracional e nem que o produto desse número seja irracional. Em outras palavras dados α e β tal que $\alpha,\beta \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, não podemos afirmar que $\alpha+\beta \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ e nem que $\alpha.\beta \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

Exemplo 3.2.1. *Consideremos* $\alpha = \sqrt{2} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ *e* $\beta = 1-\sqrt{2} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, *temos que* $\alpha+\beta = \sqrt{2}+(1-\sqrt{2}) = 1$, *mas* $1 \in \mathbb{Q}$.

Exemplo 3.2.2. *Fazendo* $\alpha = \sqrt{2} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ *e* $\beta = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, *temos que* $\alpha.\beta = \sqrt{2}.\sqrt{8}) = \sqrt{16} = 4$, *mas* $4 \in \mathbb{Q}$.

No entanto, existem algumas propriedades operacionais relativas aos números irracionais. Vamos apresentar tais propriedades atráves do seguinte teorema:

Teorema 3.2.1. *Seja* α *um número irracional qualquer e* r *um número racional diferente de zero, então:*

I) $-\alpha$ *é irracional;*

II) $\alpha+r$, $\alpha-r$ *e* $r-\alpha$ *são irracionais;*

III) $\alpha.r$ *é irracional;*

IV) $\dfrac{\alpha}{r}$ *é irracional;*

IV) $\dfrac{r}{\alpha}$ *e* α^{-1} *são irracionais.*

Demonstração. Faremos a demonstração desse teorema separada em casos, conforme os itens apresentados:

I) Irracionalidade de $(-\alpha)$. Por hipótese, temos que $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Suponhamos, por contradição, que $-\alpha$ seja racional , ou seja, $-\alpha = r_1$, onde r_1 é um número racional. Segue que,

$$\begin{aligned} -\alpha &= r_1 \\ \alpha &= -r_1, \end{aligned}$$

o que é uma contradição pois α é irracional. Portanto $(-\alpha) \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

II) Irracionalidade de $(\alpha+r)$.

Novamente, utilizando a técnica de prova por contradição, suponhamos que $\alpha+r \in \mathbb{Q}$, ou seja, $\alpha+r = r_2$, onde r_2 é um número racional. Segue que

$$\begin{aligned} \alpha+r &= r_2 \\ \alpha &= r_2 - r. \end{aligned}$$

Pela propriedade dos conjuntos dos racionais, temos que o segundo membro da equação acima é racional, logo α é racional, o que é uma contradição. Portanto deve ter obrigatoriamente $(\alpha+r) \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. De maneira similar, mostramos a irracionalidade de $(\alpha-r)$ e de $(r-\alpha) = -(\alpha-r)$, que por I) é um número irracional.

III) Irracionalidade de $(r\alpha)$.

Suponhamos $r.\alpha \in \mathbb{Q}$, ou seja, $r.\alpha = r_3$, com $r_3 \in \mathbb{Q}$, assim

$$\begin{aligned} r.\alpha &= r_3 \\ \alpha &= \frac{r_3}{r}. \end{aligned}$$

Temos que o segundo membro da equação $\alpha = \dfrac{r_3}{r}$ é um número racional, porém essa igualdade não é verdadeira pois α é irracional. Logo $r.\alpha$ é irracional.

IV) Irracionalidade de $\dfrac{\alpha}{r}$.

Novamente, suponhamos $\dfrac{\alpha}{r} \in \mathbb{Q}$, isto é, $\dfrac{\alpha}{r} = r_4$, com $r_4 \in \mathbb{Q}$, então

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{r} &= r_4 \\ \alpha &= \frac{r}{r_4} \in \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

Pela propriedade dos racionais temos que o segundo membro da equação $\alpha = \dfrac{r}{r_4}$ é um número racional, porém essa igualdade não é verdadeira pois α é irracional. Logo $\dfrac{\alpha}{r}$ é irracional.

V) Irracionalidade de α^{-1}. Observemos inicialmente que $\alpha^{-1} = \dfrac{r}{\alpha}$ com $r = 1$. Então para provar a irracionalidade de α^{-1} basta provar a irracionalidade de $\dfrac{r}{\alpha}$.

Se $\dfrac{r}{\alpha} \in \mathbb{Q}$, então temos a seguinte equação

$$\frac{r}{\alpha} = r_5.$$

Resolvendo essas equação em α, obtemos

$$r = \alpha.r_5$$
$$\frac{r}{r_5} = \alpha.$$

O primeiro membro da equação $\dfrac{r}{r_5} = \alpha$ é um número racional pela propriedade dos racionais, porém essa igualdade não é verdadeira pois α é irracional. Logo $\dfrac{\alpha}{r}$ é irracional.

□

Como uma infinidade de números racionais pode ser usada em cada afirmação do teorema (3.2.1), podemos produzir uma infinidade de números irracionais, basta tomarmos nas operações de adição, subtração, multiplicação e divisão um número irracional com números racionais.. Além de que, qualquer um dos números assim construídos, pode agora ser usado como um novo número α no teorema, e assim podemos construir uma nova infinidade de números irracionais.

Na próxima seção apresentaremos alguns exemplos de números irracionais, com a finalidade de ampliar o conhecimento do conjunto dos números irracionais.

3.3 Algumas irracionalidades

Nesta seção apresentaremos alguns resultados de números irracionais.

Proposição 3.3.1. *O número $\sqrt{2}$ não é um número racional, ou seja, não existem inteiros p e q, $q \neq 0$, tais que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$.*

Antes de provar a irracionalidade de $\sqrt{2}$, é importante fazermos a observação a seguir.

Se p^2 é par, então p é par. De fato, suponha que p fosse ímpar, então p seria da forma $p = 2l+1$, $\forall\ l\ \in\ \mathbb{Z}$. Daí teríamos,

$$\begin{aligned} p^2 &= (2l+1)^2 \\ p^2 &= 4l_2+4l+1 \\ p^2 &= 2(2l^2+2l)+1, \end{aligned}$$

fazendo $2l^2+2l = k$, $k \in \mathbb{Z}$, temos $p^2 = 2k+1$. Dessa forma, obtemos p^2 ímpar, o que é um absurdo, pois partimos da suposição de que p^2 é par. Portanto se p^2 for par p também é par.

Segue abaixo a demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$.

Demonstração. A técnica utilizada aqui nesta demonstração será a de contrariar a hipótese, com uma determinada afirmação e, esta por sua vez, faz com que se obtenha um absurdo referente a tese. Este fato faz com que a afirmação seja falsa e portanto *contrariar a hipótese* é falso, ou seja, a hipótese é verdadeira.

Neste caso, a hipótese é de que $\sqrt{2}$ não é um número racional, ou seja, não existem inteiros p e q, $q \neq 0$, tais que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, com $\frac{p}{q}$ irredutível, já que se essa fração for redutível, teremos que $\sqrt{2} \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Para contrariar a hipótese, suponhamos que existem p e q tais que

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}. \tag{3.3}$$

Agora vamos fazer algumas manipulações na equação (3.3) de modo a obter uma contradição. Elevando ao quadrado ambos os membros da identidade (3.3), temos que

$$\begin{aligned} (\sqrt{2})^2 &= \left(\frac{p}{q}\right)^2 \\ 2 &= \frac{p^2}{q^2} \\ 2\cdot q^2 &= p^2. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Segue portanto que p^2 é um número par e consequentemente p é par. Então, temos que $p = 2\cdot k$, para algum $k \in \mathbb{N}$, Substituindo este valor de p em (3.4), obtemos que

$$\begin{aligned} 2\cdot q^2 &= (2k)^2 \\ 2\cdot q^2 &= 4k^2, \end{aligned}$$

donde segue que $q^2 = 2k^2$. Logo, argumentando como foi feito anteriormente, temos que q é par. O que nega a hipótese da irredutibilidade de $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. A contradição se deve à hipótese de que $\sqrt{2}$ é racional. Portanto, não existem p e q, $q \neq 0$, tais que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, ou seja, $\sqrt{2}$ não é racional. $\square$

Proposição 3.3.2. *O número $\sqrt{3}$ não é um número racional, ou seja, não existem inteiros p e q, $q \neq 0$, tais que $\sqrt{3} = \dfrac{p}{q}$.*

Demonstração. Para essa demosntração provaremos, como resultado preliminar, que o quadrado de um inteiro é divisível por 3 se, e somente se, o inteiro em si for divisível por 3.

Observemos inicialmente que um inteiro divisível por 3 é da forma $3n$, enquanto que um inteiro não divisível por 3 é da forma $3n+1$ ou $3n+2$

Daí temos:

$$\begin{aligned} (3n)^2 &= 9n^2 \\ &= 3.(3n)^2. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Veja nas equações a seguir que se o inteiro não é divisível por 3, o seu quadrado também não é divisível por 3:

$$\begin{aligned} (3n+1)^2 &= 9n^2+6n+1 \\ &= 3(3n^2+2n)+1, \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned} (3n+2)^2 &= 9n^2+12n+4 \\ &= 3(3n^2+4n+1)+1. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Agora, suponhamos que $\sqrt{3}$ seja um número racional, ou seja, $\sqrt{3} = \dfrac{p}{q}$, onde p e q são inteiros e p e q primos entre si. Elevando ambos os lados da equação $\sqrt{3} = \dfrac{p}{q}$ ao quadrado, obtemos

$$\begin{aligned} (\sqrt{3})^2 &= (\frac{p}{q})^2 \\ 3 &= \frac{p^2}{q^2} \\ p^2 &= 3q^2. \end{aligned}$$

Desta última igualdade, temos que o inteiro $3q^2$ é divisível por 3, isto é, p^2 é divisível por 3. Portanto, p é divisível por 3 como mostramos na equação (3.5), então podemos escrever $p = 3c$, onde c é inteiro. Substituindo p por $3c$ em $p^2 = 3q^2$, tem-se

$$(3c)^2 = 3q^2,$$

$$\begin{aligned} 9c^2 &= 3q^2 \\ 3c^2 &= q^2. \end{aligned} \tag{3.8}$$

O que mostra que q^2 é divisível por 3. Logo q é divisível por 3. Assim p e q são ambos divisíveis por 3 e isso contraria a hipótese inicial de p e q serem primos entre si. Portanto $\sqrt{3}$ é irracional. $\square$

Proposição 3.3.3. *O número $\sqrt{6}$ não é um número racional, ou seja, não existem inteiros p e q, $q \neq 0$, tais que $\sqrt{6} = \dfrac{p}{q}$.*

Demonstração. A demonstração de $\sqrt{6}$ pode ser feita de modo a recair na divisibilidade por 2 ou 3. Acompanhando a demonstração feita para $\sqrt{2}$, podemos supor que

$$\sqrt{6} = \frac{p}{q}, \tag{3.9}$$

onde os inteiros p e q não são ambos pares. Elevando a equação (3.9) ao quadrado, obtemos

$$\begin{aligned} 6 &= \frac{p^2}{q^2} \\ 6q^2 &= p^2. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Por (3.10) tem que p^2 é par, pois $6q^2$ é par, ou seja, podemos escrever $p = 2c$. Então,

$$\begin{aligned} 6q^2 &= p^2 \\ 6q^2 &= (2c)^2 \\ 6q^2 &= 4c^2 \\ 3q^2 &= 2c^2. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Assim temos que $3q^2$, de modo que q^2 é par, logo, q é par. Mas supomos que p e q não fossem ambos pares, concluímos assim que $\sqrt{6}$ é irracional. $\square$

Proposição 3.3.4. *O número $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ não é um número racional, ou seja, não existem inteiros p e q, $q \neq 0$, tais que $\sqrt{2}+\sqrt{3} = \dfrac{p}{q}$.*

Demonstração. Vamos provar a irracionalidade de $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ fazendo a demonstração recair na irracionalidade de $\sqrt{6}$. Suponhamos que $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ fosse um número racional, ou seja $\sqrt{2}+\sqrt{3} = \dfrac{p}{q}$, façamos $\dfrac{p}{q} = r$, temos

$$r = \sqrt{2}+\sqrt{3}. \tag{3.12}$$

Elevando (3.12) ao quadrado obtemos

$$\begin{aligned} r^2 &= (\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 \\ r^2 &= 2+2\sqrt{6}+3 \\ 2\sqrt{6} &= r^2 - 5 \\ \sqrt{6} &= \frac{r^2-5}{2}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Como vimos no capítulo 1, os números racionais são fechados em relação as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão (exeto por zero), então temos que $\dfrac{r^2-5}{2}$ é racional, logo $\sqrt{6}$ é racional, o que é um absurdo, pois mostramos $\sqrt{6}$ é irracional. Logo $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ é irracional. □

Provamos até aqui a irracionalidade de $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ e de $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, os próximos resultados são uma generalização desses exemplos.

Proposição 3.3.5. *Se p é um número primo, então $\sqrt{p}$ não é um número racional.*

Demonstração. Suponha por contradição que $\sqrt{p}$ seja racional, ou seja, existem inteiros $a, b \in \mathbb{Z}$, tais que

$$\sqrt{p} = \frac{a}{b}. \tag{3.14}$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que $mdc(a,b) = 1$, ou seja, a e b são tomados primos entre si, com $b \neq 0$. Segue da equação (3.14) que,

$$\begin{aligned} p &= \frac{a^2}{b^2} \\ a^2 &= pb^2. \end{aligned}$$

Desta última igualdade, tem-se que p divide a^2. Como p é um número primo, necessariamente devemos ter que p divide a, ou seja, $a = pk$ para algum k inteiro. Logo, temos que

$$\begin{aligned} a^2 &= p^2k^2 \\ pb^2 &= p^2k^2. \end{aligned}$$

Simplificando a equação anterior obtemos que $b^2 = pk^2$. Isso nos diz que p divide b^2 e consequentemente p divide b. Logo, p divide a e b, o que contraria a hipótese de que o $mdc(a,b) = 1$. Portanto, temos que $\sqrt{p}$ é um número irracional. □

Proposição 3.3.6. *Se p e q são primos inteiros positivos e primos distintos, então $\sqrt{pq}$ é um número irracional.*

Demonstração. Suponha que $\sqrt{pq}$ é um número racional, ou seja, $\sqrt{pq} = \dfrac{a}{b}$, onde a e b são inteiros e a e b primos entre si. Elevando ambos os lados da igualdade $\sqrt{pq} = \dfrac{a}{b}$ ao quadrado, obtemos

$$\begin{aligned} pq &= \frac{a^2}{b^2} \\ a^2 &= pqb^2. \end{aligned}$$

Observemos que na equação $a^2 = pqb^2$, podemos escrever $a^2 = pk_1$, com $k_1 = qb^2$ ou $a^2 = qk_2$ com $k_2 = pb^2$, daí temos que a^2 é múltiplo de p ou q, e assim recair na demonstração anterior, chegando a uma contradição, pois a e b não podem ser ambos múltiplos de p ou ambos múltiplos de q. Portanto $\sqrt{pq}$ é um número irracional. □

Proposição 3.3.7. *Se $k \in \mathbb{N}$ não é um quadrado perfeito , então $\sqrt{k}$ é um número irracional.*

Demonstração. Assim como nas demonstrações anteriores, suponha por absurdo, que $\sqrt{k}$ é racional, isto é existem a, b inteiros, primos entre si, tais que $\sqrt{k} = \dfrac{a}{b}$. Se $k = 1$, $\sqrt{k}$ será inteiro, nessa situação k seria um quadrado perfeito, o que estamos excluindo da nossa hipótese. Então vamos supor que $k \neq 1$, neste caso, k tem um fator primo p. Vamos verificar que este p é comum de a e b.

Elevando $\sqrt{k} = \dfrac{a}{b}$ ao quadrado obtemos $k = \dfrac{a^2}{b^2}$ o que implica $kb^2 = a^2$, como consequência dessa última igualdade temos que p é fator primo de a, assim $a = p.c$, para algum c inteiro. Substituindo $a = p.c$ em $kb^2 = a^2$ temos

$$\begin{aligned} kb^2 &= (pc)^2 \\ kb^2 &= p^2c^2. \end{aligned}$$

Como p é fator primo de k, temos $k = pd$ para algum d inteiro, assim $db^2 = pc^2$, por essa igualdade temos que p divide b^2, logo p divide b pois p é primo. Concluímos assim que p é fator primo de a e b, o que é uma contradição, pois a e b são primos entre si. Portanto, $\sqrt{k}$ é irracional.

□

As proposições que apresentamos até o momento, mostram que as raízes dos números que não são quadrados perfeitos são números irracionais, já a proposição que traremos a seguir mostra que números como $\sqrt[3]{5}$ também são números irracionais.

Proposição 3.3.8. *Dado um número composto m, existem primos $p_1 < p_2 < p_3 < ...p_k$ e $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_k$, tal que*

$$m = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.p_3^{\alpha_3}.....p_k^{\alpha_k}.$$

Se existir um α_i, para $i \in (1,2,...,k)$, da forma $\alpha_i = n.q + r$, onde $q \in \mathbb{Z}$ e $0 < r < n$, então para $n \geqslant 2$ temos que $\sqrt[n]{m}$ será irracional.

Demonstração. Seja m um número composto, vamos supor que $\sqrt[n]{m}$ seja racional, isto é, $\sqrt[n]{m} = \dfrac{a}{b}$, tal que a e b naturais e $mdc(a,b) = 1$. Elevando ambos os lados de $\sqrt[n]{m} = \dfrac{a}{b}$ à potência n, obtemos

$$m = \frac{a^n}{b^n},$$

o que acarreta em

$$b^n.m = a^n. \tag{3.15}$$

Tomemos α_k expoente de p_k, como expoente da hipótese, ou seja, $\alpha_k = n.q + r$, daí temos que

$$m = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.p_3^{\alpha_3}.....p_k^{n.q+r},$$

substituindo na equação (3.15), obtemos

$$b^n.p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.p_3^{\alpha_3}.....p_k^{n.q+r} = a^n. \tag{3.16}$$

Assim, por (3.16) temos que p_k divide a, e consequentemente p_k não divide b pois $mdc(a,b) = 1$. Dessa forma, ainda (3.16) observa- se de um lado da equação a elevado a n o que implica que todos os fatores primos de sua decomposição tem como expoente múltiplos de n, por outro lado, temos pelo menos o fator p_k^r, cujo expoente não é múltiplo de n, o que contraria o Teorema fundamental da Aritmética que diz que todo número natural maior que 1 ou é primo ou se escreve de modo único(a menos da ordem dos fatores) como um produto de números primos. Logo $\sqrt[n]{m}$ é irracional. □

Além das raízes dos números que não são quadrados perfeitos, existem outros números irracionais, apresentaremos agora a demonstração da irracionalidade de dois números bastante conhecidos, o número de Euler representado pela constante e e o número pi cuja representação é π. A prova da irracionalidade desses dois números exige conceitos mais complexos do que os que foram apresentados até aqui, portanto, faremos as mesmas nas subseções a seguir.

3.3.1 Irracionalidade do número e

Apresentaremos nesta seção a demonstração da irracionalidade de e, para melhor compreensão, traremos a seguir a sua definição.

A função $\log : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $\log x = \int_1^x \frac{dt}{t}$ é bijetiva e o número e é definido como o único real satisfazendo $\log e = 1$. Esta constante, conhecida como o Número de Euler, pode também ser escrita como um limite, $e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, ou como uma série, $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

Para a demonstrar a irracionalidade de e, utilizaremos $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$, isto é,

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... \tag{3.17}$$

Suponhamos e racional, ou seja , $e = \frac{p}{q}$, onde $p, q \in \mathbb{N}$, são primos entre si. De (3.17), segue -se

$$\begin{aligned} e &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... \\ \frac{p}{q} &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{q!} + \frac{1}{(q+1)!} + \frac{1}{(q+2)!} + ... \end{aligned}$$

Daí, tem-se que,

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{q!}\right) &= \left(\frac{1}{(q+1)!} + \frac{1}{(q+2)!} + ...\right) \\ \frac{p}{q} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{q!}\right) &= \sum_{h=q+1}^{\infty} \frac{1}{h!}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

O termo $\sum_{h=q+1}^{\infty} \frac{1}{h!}$ pode ser analisado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \sum_{h=q+1}^{\infty} \frac{1}{h!} &= \left(\frac{1}{(q+1)!} + \frac{1}{(q+2)!} + \frac{1}{(q+3)!} + ...\right) \\ \sum_{h=q+1}^{\infty} \frac{1}{h!} &= \left(\frac{1}{(q+1)q!} + \frac{1}{(q+2)(q+1)q!} + \frac{1}{(q+3)(q+2)(q+1)q!} + ...\right) \\ \sum_{h=q+1}^{\infty} \frac{1}{h!} &= \frac{1}{q!}\left(\frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+3)(q+2)(q+1)} + ...\right). \end{aligned}$$

Note que

$$(q+1)(q+2) = (q+1)(q+1+1) \Longrightarrow (q+1)(q+2) > (q+1)(q+1) = (q+1)^2,$$

e daí, temos

$$\frac{1}{(q+1)(q+2)} < \frac{1}{(q+1)^2}.$$

Deste modo,

$$\sum_{h=q+1}^{\infty} \frac{1}{h!} < \frac{1}{q!}\left(\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^3} + ...\right). \tag{3.19}$$

Observe que $\left(\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^3} + ...\right)$ é a soma dos termos de uma série geométrica infinita $\left(\frac{1}{q+1}, \frac{1}{(q+1)^2}, \frac{1}{(q+1)^3}, ...\right)$, onde o primeiro termo é $\frac{1}{q+1}$ e a razão $\frac{1}{q+1}$.

Logo,

$$\left(\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)^2}+\frac{1}{(q+1)^3}+...\right)=\frac{\dfrac{1}{q+1}}{1-\dfrac{1}{q+1}}=\frac{\dfrac{1}{q+1}}{\dfrac{q+1-1}{q+1}}=\frac{\dfrac{1}{q+1}}{\dfrac{q}{q+1}}=\frac{1}{q}.$$

Substituindo o resultado anterior em (3.19), obtemos

$$\sum_{h=q+1}^{\infty}\frac{1}{h!}<\frac{1}{q!}\frac{1}{q}. \tag{3.20}$$

Voltando a (3.18) com estimativa em (3.20), temos

$$0<\frac{p}{q}-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{q!}\right)<\frac{1}{q!}\frac{1}{q},$$

e daí,

$$0<q!\left(\frac{p}{q}-1-\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}-...-\frac{1}{q!}\right)<\frac{1}{q}. \tag{3.21}$$

Agora, vamos analisar o termos central de (3.21), mais precisamente temos que,

$$\begin{aligned} q!\left(\frac{p}{q}-1-\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}-...-\frac{1}{q!}\right) &= q!\left(\frac{p}{q}-1-\frac{1}{q!}-\frac{1}{(q-1)!}-\frac{1}{(q-2)!}...-\frac{1}{2!}-\frac{1}{1!}\right) \\ &= p(q-1)!-q!-1-q-q(q-1)-q(q-1)(q-2)-\dots \\ &- q(q-1)(q-2)...3-q! \end{aligned}$$

é inteiro, o que é um absurdo devido exibirmos um inteiro entre 0 e $\frac{1}{q}$ e este provém da hipótese feita inicialmente que e fosse um número racional. Logo, e é irracional.

3.3.2 Irracionalidade de π

A irracionalidade de π foi demonstrada pela primeira vez pelo matemático francês J. H. Lambert, em 1761, usando frações contínuas. A demonstração de π que daremos a seguir, é devida a I. Niven, que utilizou o método de Hermite para tal, caso o leitor sinta curiosidade em conhecer este método, poderá encontrá-lo em [10].

Para mostrar a irracionalidade de π, consideremos a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\frac{x^n(1-x)^n}{n!}, \tag{3.22}$$

onde n é um número inteiro positivo.

Observe que a função f é um polinômio de grau $2n$, pois f é obtida a partir do produto $x^n(1-x)^n$ e que,

$$
\begin{aligned}
f(1-x) &= \frac{(1-x)^n(1-(1-x))^n}{n!} \\
&= \frac{(1-x)^n(x)^n}{n!} \\
&= \frac{(x)^n(1-x)^n}{n!} \\
&= f(x).
\end{aligned}
$$

A seguir, apresentaremos dois lemas necessários para a demonstração de π, o objetivo é mostrar que $D^k f(0)$ e $D^k f(1)$ são inteiros para qualquer $k = 0, 1, 2, ...$, utilizaremos a notação D^k para indicar derivadas, mais precisamente a $k-$ ésima derivada.

Lema 3.3.1. *$D^k f(0)$ é um inteiro para qualquer $k = 0, 1, 2, ...$, onde $D^k f$ representa a k - ésima derivada de f, e $D^0 f = f$.*

Demonstração. Vamos utilizar a chamada fórmula de Leibnitz para as derivadas de um produto de duas funções , g e h:

$$
D^k(gh) = \sum_{j=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} D^j g . D^{k-j} h, \tag{3.23}
$$

onde $\begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} = \dfrac{k!}{j!(k-j)!}$ representam os coeficientes do Binômio de Newton.

A prova desta igualdade pode ser dada por indução finita, deixaremos a mesma a cargo do leitor.

Note que a função (3.22) pode ser escrita como os produtos das funções $g(x) = \dfrac{1}{n!} x^2$ e $h(x) = (1-x)^n$.

Aplicando a fórmula (3.23) a função (3.22), obtemos

$$
D^k f = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} D^j x^n . D^{k-j} (1-x)^n. \tag{3.24}
$$

Por outro lado, temos que

- Se $j < n$ então, $D^j x^n|_{x=0} = n.(n-1)...(n-j)x^{n-j}|_{x=0} = 0$.
- Se $j = n$ então, $D^j x^n|_{x=0} = n.(n-1).(n-2)...3.2.1|_{x=0} = n!$.
- Se $j > n$ então, $D^j x^n|_{x=0} = 0|_{x=0} = 0$.

Ou seja,

$$
D^j x^n|_{x=0} = \begin{cases} 0, & se\ j < n \\ n!, & se\ j = n \\ 0, & se\ j > n. \end{cases} \tag{3.25}
$$

Observe agora que $D^k f(0)$ é escrita na forma,

$$D^k f(0) = \frac{1}{n!}\begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix}.(D^n x^n|_{x=0}).(D^{k-n}(1-x)^n|_{x=0}).$$

Aplicando (3.25) nesta equação, temos o seguinte

i) Se $k < n$, $D^k f(0) = 0$, portanto $D^k f(0) \in \mathbb{Z}$ se $k < n$.

ii) Se $k \geqslant n$,

$$\begin{aligned} D^k f(0) &= \frac{1}{n!}\begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} n! D^{k-n}(1-x)^n|_{x=0}, \\ D^k f(0) &= \begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} D^{k-n}(1-0)^n = \begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Para verificar essa última igualdade, basta calcular $(D^{k-n}(1-x)^n|_{x=0})$.

Considerando $t = k - n$ e utilizando a regra da cadeia, temos

$$D^t(1-x)^n = \begin{cases} (-1)^l n(n-1)...(n+1-t)(1-x)^{n-t} & se\ 1 \leqslant t < n \\ (-1)^n n! \quad se\ t = n \\ 0 \quad se\ t > n. \end{cases}$$

Substituindo t por $k - n$, obtemos

$$D^{k-n}(1-x)^n = \begin{cases} (-1)^{k-n} n(n-1)...(2n+1-k)(1-x)^{n-(n-k)} & se\ 1 \leqslant k < 2n \\ (-1)^n n! \quad se\ k = 2n \\ 0 \quad se\ k > 2n. \end{cases}$$

Assim, segue que a expressão no segundo membro de (3.26) é inteiro. Portanto, $D^k f(0) \in \mathbb{Z}$ para qualquer $k = 0, 1, 2, ...$ □

Lema 3.3.2. *$D^k f(1)$ é um número inteiro para qualquer $k = 0, 1, 2, ...$*

Demonstração. A demonstração segue do lema anterior e da observação de que,

$$f(1-x) = f(x).$$

De fato, como $D^k f(1-x) = D^k f(x)$, temos para $x = 0$, que

$$D^k f(1) = D^k f(0).$$

Como $D^k f(0)$ é um número inteiro segue que $D^k f(1)$ também é um inteiro. □

Feito essas considerações, passaremos agora para a demonstração da irracionalidade de π.

Teorema 3.3.1. *π é um número irracional.*

Demonstração. Para essa demonstração, suponha $\pi^2 = \dfrac{p}{q}$, com p e q inteiros e $mdc(p,q) = 1$. O nosso objetivo com essa suposição é mostrar que π^2 não é racional, e, consequentemente, mostrar que π também não pode ser racional, pois o quadrado de um racional é racional.

Para isso, consideremos a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por,

$$F(x) = q^n \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \pi^{2n-2j} D^{2j} f(x) = q^n \left\{ \pi^{2n} f(x) - \pi^{2n-2} D^2 f(x) + ... + (-1)^n D^{2n} f(x) \right\}. \tag{3.27}$$

onde $f(x) = \dfrac{x^n(1-x)^n}{n!}$.

Em consequência dos lemas (3.3.1) e (3.3.2), da hipótese $\pi^2 = \dfrac{p}{q}$, e de que

$$q^n \pi^{2n-2j} = q^n (\pi^2)^{n-j} = q^n (\frac{p}{q})^{n-j} = q^n \frac{p^{n-j}}{q^{n-j}} = p^{n-j} q^j$$

é um número inteiro sempre que $j \leqslant n$. Tem -se que

$$F(0) \ \ e \, F(1) \ \ \textit{são números inteiros}. \tag{3.28}$$

Pois,

$$\begin{aligned} F(0) &= q^n \left\{ (\frac{p}{q})^n f(0) - (\frac{p}{q})^{n-1} D^2 f(0) + ... + (-1)^n D^{2n} f(0) \right\} \\ &= -q^n \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} D^2 f(0) + ... + (-1)^n q^n D^{2n} f(0) \\ &= -qp^{(n-1)} D^2 f(0) + ... + (-1)^n q^n D^{2n} f(0) \ \in \ \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

e

$$F(1) = -qp^{(n-1)} D^2 f(1) + ... + (-1)^n q^n D^{2n} f(1) \ \in \ \mathbb{Z}.$$

Considerando que a $\ '$ representa a derivada de uma função, temos as seguintes relações,

$$\begin{aligned} \left\{ F'(x)\,\mathrm{sen}\pi x - \pi F(x) \cos \pi x \right\} &= F''(x)\,\mathrm{sen}\pi x + F'(x)\pi \cos \pi x - \pi F'(x) \cos \pi x + \pi^2 F(x)\,\mathrm{sen}\pi x \\ \left\{ F'(x)\,\mathrm{sen}\pi x - \pi F(x) \cos \pi x \right\} &= F''(x)\,\mathrm{sen}\pi x + \pi^2 F(x)\,\mathrm{sen}\pi x \\ \left\{ F'(x)\,\mathrm{sen}\pi x - \pi F(x) \cos \pi x \right\} &= \mathrm{sen}\pi x \left(F''(x) + \pi^2 F(x) \right). \end{aligned}$$

Agora calculando a derivada segunda F'' de F temos,

$$\begin{aligned} F'(x) &= q^n \left\{ \pi^{2n} D^1 f(x) - \pi^{2n-2} D^3 f(x) + ... + (-1)^n D^{2n+1} f(x) \right\}, \\ F''(x) &= q^n \left\{ \pi^{2n} D^2 f(x) - \pi^{2n-2} D^4 f(x) + ... + (-1)^n D^{2n+2} f(x) \right\}. \end{aligned}$$

Fazendo $F''(x)+\pi^2F(x)$, obtemos

$$
\begin{aligned}
F''(x)+\pi^2F(x) &= q^n\left\{\pi^{2n}D^2f(x)-\pi^{2n-2}D^4f(x)+...+(-1)^nD^{2n+2}f(x)\right\}+\\
&+ q^n\left\{\pi^{2n+2}f(x)-\pi^{2n}D^2f(x)+...+(-1)^n\pi^2D^{2n}f(x)\right\}\\
&= q^n\left\{(-1)^nD^{2n+2}f(x)+\pi^{2n+2}f(x)\right\}.
\end{aligned}
$$

Como $D^{2n+2}f(x)=0$, segue que $(-1)^nD^{2n+2}f(x)=0$. Portanto, $F''(x)+\pi^2F(x)=q^n\pi^{2n+2}f(x)$.

Assim,

$$\left\{F'(x)\operatorname{sen}\pi x-\pi F(x)\cos\pi x\right\}'=\operatorname{sen}(\pi x)q^n\pi^{2n+2}f(x).$$

Veja que, $q^n\pi^{2n+2}=q^n\pi^{2n}.\pi^2=q^n.\dfrac{p^n}{q^n}.\pi^2=p^n.\pi^2$. Logo,

$$\left\{F'(x)s\operatorname{sen}\pi x-\pi F(x)\cos\pi x\right\}'=p^n\pi^2f(x)s\operatorname{sen}\pi x. \tag{3.29}$$

Agora, vamos necessitar do teorema fundamental do cálculo integral que diz: "Se $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ é uma função continuamente derivável em $[0,1]$, então $\int_0^1 g'(x)dx=g(1)-g(0)$". Usando esse teorema para a função $g(x)=F'(x)\operatorname{sen}\pi x-\pi F(x)\cos\pi x$, em virtude de (3.29), obtemos que

$$
\begin{aligned}
p^n\pi^2\int_0^1 f(x)\operatorname{sen}\pi x dx &= F'(1)\operatorname{sen}\pi+\pi F(1)\cos\pi-\left[F'(0)\operatorname{sen}0+\pi F(0)\cos 0\right]\\
&= \pi F(1)+\pi F(0),
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$p^n\pi\int_0^1 f(x)\operatorname{sen}\pi x dx=F(1)+F(0). \tag{3.30}$$

Como já foi demonstrado, temos que $F(1)+F(0)$ é inteiro em virtude de (3.28), portando, para concluir a demonstração basta mostrarmos que para um n conveniente, o lado esquerdo de (3.30) é um número positivo estritamente menor que 1, e então teremos o absurdo procurado.

Para isso, vamos necessitar do lema a seguir.

Lema 3.3.3. *Seja* $f(x)=\dfrac{x^n(1-x)^n}{n!}$. *Se* $0<x<1$ *então* $0<f(x)<\dfrac{1}{n!}$.

Demonstração. Se $0<x<1$ então $0<x^n<1$. Além do fato anterior, tem-se que $0<x<1$, então $-1<-x<0$. Assim, $0<1-x<1$, e consequentemente, $0<(1-x)^n<1$.

Dessa forma, para $0<x<1$ tem-se que

$$0<x^n(1-x)^n<1.$$

Assim,

$$0 < \frac{x^n(1-x)^n}{n!} < \frac{1}{n!}.$$

Logo, para $0 < x < 1$, temos

$$0 < f(x) < \frac{1}{n!}. \tag{3.31}$$

□

Aplicando (3.31) em (3.30), temos

$$0 < p^n\pi \int_0^1 f(x)sen\pi x \; dx < \pi p^n \int_0^1 \frac{1}{n!}sen\pi x \; dx. \tag{3.32}$$

Note que,

$$\pi p^n \int_0^1 \frac{1}{n!}sen\pi x \; dx = \pi \frac{p^n}{n!} \int_0^1 sen\pi x \; dx.$$

Vamos integrar a função acima, para isso faremos a mudança de variável,

$$\begin{array}{rcl} u & = & \pi x \\ ,\dfrac{du}{dx} & = & \pi \Longrightarrow dx = \dfrac{1}{\pi}du. \end{array}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \pi\frac{p^n}{n!}\int_0^1 sen\pi x \; dx = \pi p^n \frac{1}{\pi n!}\int_0^\pi senu \; du &= \frac{p^n}{n!}[-cosu] \mid_0^\pi \\ &= \frac{p^n}{n!}[-(cos\pi) - (-cos0)] \\ &= \frac{p^n}{n!}[-(-1)+1] \\ &= \frac{2p^n}{n!}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$0 < p^n\pi \int_0^1 f(x)sen\pi x \; dx < \frac{2p^n}{n!}.$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{p^n}{n!} = 0$, temos que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2p^n}{n!} = 0$ assim, podemos tomar um $n \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{2p^n}{n!} < 1$, e nosso objetivo foi atingido, ou seja, π^2 é um número irracional. Portanto π é um número irracional. □

Apresentamos até então, alguns exemplos e algumas propriedades do conjunto dos números irracionais. Os números racionais junto com os números irracionais formam o conjunto dos números reais, os números reais são separados em algébricos e transcendentes, falar sobre esses números será o assunto do nosso próximo capítulo, com o foco nos números irracionais.

4 NÚMEROS ALGÉBRICOS E TRANSCENDENTES

Nos capítulos anteriores apresentamos algumas propriedades e alguns exemplos de números racionais e irracionais. O conjunto formado por todos os números racionais e irracionais é denominado conjunto dos reais, representado por $\mathbb{R}$. Um número real pode ser classificado como um número algébrico ou como um número transcendente. Assim, neste capítulo, iremos definir e apresentar algumas propriedades do conjunto dos números algébricos e também definir e apresentar alguns exemplos de números transcendentes, com foco no estudo dos números irracionais. Para o desenvolvimento deste capítulo, utilizaremos [5], [10] e [12].

Na seção a seguir, faremos um estudo sobre os números algébricos. A partir das definições, teoremas, proposições e operações dos números algébricos, vamos construir a teoria necessária para o estudo dos números transcendentes. É importante ressaltar que, neste trabalho, direcionaremos o nosso foco em apresentar alguns exemplos de números transcendentes, com o intuito de ampliar o conhecimento sobre o conjunto dos números irracionais.

4.1 Números algébricos

Para estudarmos os números algébricos é importante iniciarmos definindo equação polinomial, pois é de fundamental importância para o entendimento do que segue.

Definição 4.1.1. *Uma equação polinomial é da forma* $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x^1 + a_0 = 0$*, onde* $a_0, a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{Z}$ *são chamados coeficientes,*

Exemplo 4.1.1. $2x + 1 = 0$ *é uma equação polinômial de grau 1.*

Exemplo 4.1.2. $-x^2 + 3x - 3 = 0$ *é uma equação polinômial de grau 2.*

Exemplo 4.1.3. $3z^2 + 2z + 1 = 0$ *é uma equação polinômial de grau 3.*

Exemplo 4.1.4. $2y^7 + y^5 - y^4 + 4 = 0$ *é uma equação polinômial de grau 7.*

Definição 4.1.2. *Um número real algébrico é dito um número que é raiz de uma equação polinomial com coeficiente inteiros, ou seja,* s *é um número algébrico se* $f(s) = 0$ *para alguma função* $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$*, onde* $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ *são inteiros e* $a_n \neq 0$.

Seguem alguns exemplos de números algébricos.

Exemplo 4.1.5. *Qualquer número racional,* $a = \dfrac{m}{n}$*, é algébrico, pois a é raiz da equação* $nx - m = 0$ *, onde m e n são inteiros e n diferente de zero.*

Existem também números irracionais que são algébricos.

Exemplo 4.1.6. $\sqrt{2}$*,* $\sqrt{3}$ *e* $\sqrt{5}$*, pois são respectivamente raízes das equações* $x^2 - 2 = 0$*,* $x^2 - 3 = 0$ *e* $x^2 - 5 = 0$*.*

Exemplo 4.1.7. $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ *é um inteiro algébrico, pois é solução de* $x^4 - 4x^2 + 1 = 0$*. Fazendo* $y = \sqrt{2+\sqrt{3}}$ *e elevando ambos os lados dessa equação ao quadrado, obtemos*

$$\begin{aligned} y^2 &= (\sqrt{2+\sqrt{3}})^2 \\ y^2 &= 2+\sqrt{3} \\ y^2 - 2 &= \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Elevando $y^2 - 2 = \sqrt{3}$ *ao quadrado, temos*

$$\begin{aligned} y^4 - 4y + 4 &= 3 \\ y^4 - 4y + 4 - 3 &= 0 \\ y^4 - 4y + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Observe que a equação $x^4 - 4x^2 + 1 = 0$ *é da forma* $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + x^n = 0$*.*

Além disso, existem números complexos algébricos, não exploraremos esse assunto, pois não se enquadra no objetivo deste trabalho.

Exemplo 4.1.8. $i = \sqrt{-1}$ *e* $-i$ *são algébricos, pois são solução de* $x^2 + 1 = 0$*.*

Apresentaremos a partir de agora algumas propriedades dos números algébricos e ainda nessa seção mostraremos a existência dos números não algébricos, conhecidos com números transcendentes.

Proposição 4.1.1. *Um inteiro algébrico real é inteiro ou é irracional.*

Demonstração. Vamos mostrar que um número real algébrico α é um inteiro ou um irracional. Suponhamos, por contradição que $\alpha = \dfrac{p}{q}$, onde $p \in \mathbb{Z}$, com p e q primos entre si e $q \in \mathbb{N}$. Como α é uma solução de uma equação $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x^1 + a_0 = 0$, onde $a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}$ são inteiros, temos que

$$\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + ... + a_1\alpha^1 + a_0 = 0,$$

de onde segue que,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{p}{q}\right)^n &+a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}+...+a_1\left(\frac{p}{q}\right)+a_0=0\\
\frac{p^n}{q^n} &+a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}}+...+a_1\frac{p}{q}+a_0=0\\
\frac{p^n}{q^n} &=-a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}}-...-a_1\frac{p}{q}-a_0.
\end{aligned}$$

Multiplicando por q^n ambos os membros da igualdade anterior temos,

$$p^n=-p^{n-1}.a_{n-1}.q-...-pa_1q^{n-1}-a_0q^n$$
$$p^n=q(-p^{n-1}.a_{n-1}-...-pa_1q^{n-2}-a_0q^{n-1}). \tag{4.1}$$

Por (4.1) tem-se que, q divide p^n. Agora, seja r um fator primo de $q(r=q$ se q for primo), então r divide p^n o que implica que r divide p. Concluímos assim que r divide p e r divide q, o que é um absurdo pois p e q são primos entre si. O absurdo ocorreu ao supor $\alpha=\dfrac{p}{q}$, ou seja, α racional. Portanto, α é um número inteiro ou irracional como queríamos mostrar. $\square$

No que segue, vamos necessitar de um resultado sobre formas lineares com coeficientes racionais. Mas antes de enunciarmos esse resultado vamos definir o que é uma Forma Linear.

Definição 4.1.3. *Uma forma linear com coeficientes racionais é uma expressão da forma*

$$X=q_1x_1+q_2x_2+...+q_nx_n,$$

onde $q_1,...,q_n$ são racionais.(Os x_i,s são chamados indeterminadas).

Lema 4.1.1. *Dados $n+1$ formas lineares*

$$\begin{gathered}
X_1=q_{11}x_1+q_2x_2+...+q_{1n}x_n\\
,\\
\vdots\\
X_{n+1}=q_{n+1,1}x_1+q_2x_2+...+q_{n+1,n}x_n,
\end{gathered}$$

elas são linearmente dependentes sobre os racionais, isto é, existem, $r_1,...,r_{n+1}\in\mathbb{Q}$, com alguns(ou todos) diferentes de zero, tais que

$$r_1X_1+...+r_{n+1}X_{n+1}=0.$$

A demonstraçaõ do lema (4.1.1) pode ser vista em [5], ou fica a cargo do leitor, pois exige uma teoria que não é abordada neste trabalho.

Nas próximas proposições mostraremos que a soma, o produto, o simétrico e o inverso de números algébricos são também números algébricos.

Proposição 4.1.2. *A soma de dois números algébricos é algébrico.*

Demonstração. Sejam α e β números algébricos. Então existem equações polinomiais,

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x^1 + a_0 = 0, \tag{4.2}$$

$$x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1x^1 + b_0 = 0, \tag{4.3}$$

com coeficientes racionais, tais que α seja raiz de (4.2) e β seja raiz de (4.3).

Substituindo α em (4.2), temos

$$\begin{aligned} \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + ... + a_1\alpha^1 + a_0 &= 0 \\ \alpha^n &= -a_{n-1}\alpha^{n-1} - ... - a_1\alpha^1 - a_0, \end{aligned} \tag{4.4}$$

que é combinação linear de $1, \alpha, ..., \alpha^{n-1}$, usando coeficientes racionais. Agora multiplicando (4.4) por α, obtemos

$$\alpha^{n+1} = -a_{n-1}\alpha^n - ... - a_1\alpha^2 - a_0\alpha,$$

que é combinação linear dos mesmos $1, \alpha, ..., \alpha^{n-1}$, usando coeficientes racionais.

Substituindo β em (4.3), temos

$$\begin{aligned} \beta^m + b_{m-1}\beta^{m-1} + ... + b_1\beta^1 + b_0 &= 0 \\ \beta^m = -b_{m-1}\beta^{m-1} - ... - b_1\beta^1 - b_0 &= 0. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Seguindo o mesmo raciocínio usado pra α^n podemos verificar que que as potências β^m pode ser exibidas como combinações lineares de $1, \beta, ..., \beta^{n-1}$, usando coeficientes racionais.

Agora, o nosso objetivo é mostrar que $\alpha + \beta$ é solução de uma equação polinomial de grau mn com coeficientes racionais, e dessa forma, concluir que $\alpha + \beta$ é algébrico. Para isso, considere os $mn + 1$ números

$$1, \alpha + \beta, (\alpha + \beta)^2, ..., (\alpha + \beta)^{mn}. \tag{4.6}$$

Desenvolvendo as potências α^j com $j \leqslant n$ e β^k com $k \leqslant m$, obtemos que os números em (4.6) podem ser expressos como combinações lineares dos mn números $\alpha^j\beta^k$ com

$0 \leqslant j \leqslant n-1$ e $0 \leqslant k \leqslant m-1$, com coeficientes racionais. Aplicando (4.1.1) temos que os $X_{i,s}$ são os $mn+1$ números de (4.6), e os $x_{i,s}$ são os mn números de $\alpha^j\beta^k$. Logo existem racionais $r_0, r_1, ..., r_{mn}$, tais que

$$r_0 + r_1(\alpha+\beta), ..., r_{mn}(\alpha+\beta)^{mn} = 0,$$

o que mostra que $\alpha+\beta$ satisfaz uma equação polinomial de grau mn com coeficientes racionais. Assim, concluímos que a soma de algébricos é algébrico. □

Proposição 4.1.3. *O produto de dois números algébricos é algébrico.*

Deixaremos a demonstração dessa proposição a cargo do leitor, para tal, seguir as mesmas linhas da demonstração anterior, e ao invés de $1, \alpha+\beta, (\alpha+\beta)^2, ..., (\alpha+\beta)^{mn}$, consideraremos as potências $1, \alpha\beta, (\alpha\beta)^2, ..., (\alpha\beta)^{mn}$.

Proposição 4.1.4. *O simétrico $-\alpha$ de um número algébrico α é algébrico.*

Demonstração. Se α é algébrico, então ele satisfaz uma equação polinomial,

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x^1 + a_0 = 0.$$

Logo $-\alpha$ é raíz da equação

$$(-1)^n a_n x^n + (-1)^{n-1} a_{n-1} x^{n-1} + ... + (-1) a_1 x^1 + a_0 = 0.$$

□

Proposição 4.1.5. *O inverso α^{-1}, de um número algébrico $\alpha \neq 0$ é algébrico.*

Demonstração. Se $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x^1 + a_0 = 0$ e $\alpha \neq 0$, então

$$a_n \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + ... + a_1 \alpha^1 + a_0 = 0,$$

dividindo os dois membros da equação por α^n, obtemos

$$a_n + a_{n-1}\alpha^{-1} + ... + a_1 \alpha^{n-1} + a_0 \alpha^{-n} = 0,$$

ou seja, α^{-1} satisfaz a equação

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} x^1 + a_n = 0.$$

Concluímos assim que $-\alpha$ é algébrico. □

Uma outra característica importante do conjunto dos números algébricos é que ele é enumerável, ou seja, possui a mesma cardinalidade dos naturais. De forma mais precisa definimos conjunto enumerável da seguinte forma:

Definição 4.1.4. *Um conjunto X diz-se enumerável se seus elementos puderem ser postos em correspondência com os números naturais, ou seja, X é enumerável se existir uma função bijetiva $f : \mathbb{N} \to X$.*

Exemplo 4.1.9. *O conjunto dos números pares (positivos) $P = \{2,4,6,8,...\}$ é enumerável. Basta tomar $f : \mathbb{N} \longrightarrow P$, pomdo $f(n) = 2n$.*

Tem-se que f é injetiva, pois $f(n_1) = f(n_2) \Longrightarrow 2n_1 = 2n_2 \Longrightarrow n_1 = n_2$.

E f é sobrejetiva, pois $\forall \ \ p \in P, \dfrac{p}{2} \in \mathbb{N}$ e $f\left(\dfrac{p}{2}\right) = p$.

Exemplo 4.1.10. *O conjunto dos números ímpares (positivos) é enumerável: Basta considerar $f(n) = 2n - 1$.*

A seguir, apresentaremos dois teoremas necessários para a compreensão da enumerabilidade do conjunto dos números algébricos, e logo após, mostraremos que o conjunto dos números algébricos é enumerável.

Teorema 4.1.1. *(i) A união de um conjunto finito com um conjunto enumerável é enumerável.*

(ii) A união de dois conjuntos enumeráveis é enumerável.

(iii) A união de um número finito de conjuntos enumeráveis é enumerável.

(iv) A união de um conjunto enumerável de conjuntos finitos é enumerável.

(v) A união de um conjunto enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável.

Teorema 4.1.2. *O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais não é enumerável.*

As demonstrações dos teoremas (4.1.1) e (4.1.2) podem ser encontradas em [5].

Teorema 4.1.3. *O conjunto de todos os números algébricos é enumerável.*

Demonstração. Dado um polinômio com coeficientes inteiros

$$P(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0, \tag{4.7}$$

definimos sua altura como sendo o número natural

$$|P| = |a_n| + ... + |a_1| + |a_0| + n. \tag{4.8}$$

O teorema fundamental da álgebra nos diz que $P(x) = 0$, com $P(x)$ dado em (4.7), tem exatamente n raízes complexas. Todas, algumas ou nenhuma delas podem ser reais. Agora o número de polinômios do tipo (4.8) com uma dada altura é apenas um número finito. Portanto, as raízes de todos os polinômios de uma dada altura formam um conjunto finito. A seguir observamos que o conjunto de todas as raízes de todos os polinômios de todas as alturas formam um conjunto enumerável, pois ele é a união de um conjunto enumerável de conjuntos finitos. □

Uma consequência da enumerabilidade do conjunto dos números algébricos é a existência dos números transcendentes , mostraremos esse fato no teorema que segue.

Teorema 4.1.4. *Existem números transcendentes.*

Demonstração. Do teorema anterior segue que o conjunto dos algébricos reais é enumerável. Como o conjunto dos reais $\mathbb{R}$ é não enumerável, o que implica que o conjunto dos transcendentes reais deve ser não enumerável. O que de fato é, pois caso contrário, que $\mathbb{R}$ seria enumerável, pois pelo Teorema (4.1.1) a união de dois conjuntos enumeráveis é enumerável. □

Nesta seção foi demonstrado a existência de números transcendentes, um fato interessante para o estudo sobre os números transcendentes no nosso trabalho, é que todo transcendente é irracional, esse fato se dá a partir da observação (4.1.5) de que todo racional é algébrico. Assim, na próxima seção definiremos e apresentaremos alguns exemplos de números transcendentes.

4.2 Números transcendentes

Definição 4.2.1. *Números Reais transcendentes são aqueles que não são raízes de equações polinomiais com coeficientes inteiros.*

Em outras palavras, não conseguimos escrever um polinômio de coeficientes inteiros de forma que este tenha como raiz um número transcendente. A palavra transcendente, segundo Eules, significa que esses números transcendem o poder das operações algébricas.

Os primeiros exemplos que surgiram sobre números transcendentes foram os números de Liouville. J. Liouville, foi um matemático francês que criou um método para escrever alguns números transcendentes, tal método consiste em construir uma classe de números que são muito bem aproximados por números racionais. Assim, na próxima seção, apresentaremos alguns teoremas sobre aproximação de irracionais por racionais, entendendo que são importantes para a compreensão dos números de Lioville,

Aproximação de números irracionais por racionais

Mostraremos inicialmente que todo irracional pode ser aproximado pelo inteiro mais próximo a ele e o erro será menor ou igual a $\frac{1}{2}$.

Teorema 4.2.1. *Para qualquer números irracional α existe um único inteiro m, tal que*

$$\frac{-1}{2} < \alpha - m < \frac{1}{2}.$$

Demonstração. Sejam α um número irracional e m o inteiro mais próximo de α. Assim, m poderá ser o inteiro maior ou menor do que α.

Temos que a distância de α para o inteiro mais próximo na reta é menor do que $\frac{1}{2}$, caso contrário α estaria bem no meio de dois inteiros consecutivos, assim, α seria igual a $\frac{w}{2}$, onde $w \in \mathbb{Z}$, e portanto α seria racional, o que contraria a hipótese de α ser irracional.

Dessa forma, temos

$$\alpha - \frac{1}{2} < m < \alpha + \frac{1}{2}. \tag{4.9}$$

Sutraindo α em (4.9), obtemos

$$-\frac{1}{2} < m - \alpha < \frac{1}{2}.$$

E consequentemente,

$$-\frac{1}{2} < \alpha - m < \frac{1}{2}.$$

□

Os próximos resultados tem como objetivo melhorarem a aproximação apresentada no Teorema (4.2.1).

Teorema 4.2.2. *Seja α um número irracional e n um número inteiro positivo. Então existe um número racional $\frac{m}{n}$, tal que*

$$-\frac{1}{2n} < \alpha - \frac{m}{n} < \frac{1}{2n}.$$

Demonstração. Seja α um número irracional e n um número inteiro positivo. Pela propriedade dos irracionais temos que $n\alpha$ é irracional. Agora, tomemos m como o inteiro mais próximo de $n\alpha$. Pelo teorema (4.2.1) temos,

$$-\frac{1}{2} < n\alpha - m < \frac{1}{2}. \tag{4.10}$$

Dividindo a desigualdade (4.10) pelo inteiro n obtemos,

$$\frac{-1}{2n} < \alpha - \frac{m}{n} < \frac{1}{2n},$$

como queríamos mostrar. □

Exemplo 4.2.1. *Seja $\alpha = \sqrt{5}$ e $n = 23$. Considemos o número irracional $23\sqrt{5}$. Temos que*

$$\begin{aligned} \sqrt{5} &= 2,236067... \\ 23\sqrt{5} &= 51,4295.... \end{aligned}$$

Portanto, o inteiro mais próximo de $23\sqrt{5}$ é 51, ou seja, $m = 51$. Pelo teorema (4.2.1) *temos,*

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} &< 23\sqrt{5} - 51 < \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2.23} &< \sqrt{5} - \frac{51}{23} < \frac{1}{2.23}. \end{aligned}$$

Da última desigualdade observamos que para o irracional $\sqrt{5}$ e o inteiro $n = 23$, temos que o racional $\frac{51}{23}$ satisfaz o teorema (4.2.2).

Teorema 4.2.3. *Quaisquer que sejam o número irracional α e o inteiro positivo k, existe um número racional $\frac{m}{n}$, cujo denominador não excede k, tal que*

$$\frac{-1}{nk} < \alpha - \frac{m}{n} < \frac{1}{nk}.$$

Demonstração. Sejam um número irracional α e um número inteiro positivo n. Seja $n\alpha$, com n variando entre os inteiros de 1 até k, e $n\alpha$ podendo ser escrito como a soma de sua parte inteira β_k com a sua parte decimal γ_k, ou seja,

$$n\alpha = \beta_k + \gamma_k \Rightarrow n\alpha - \beta_k = \gamma_k.$$

Observe que $n\alpha - \beta_k$ pode assumir valores entre 0 e 1, e que $n\alpha - \beta_k$ é irracional, pois $n\alpha$ é irracional e β_k parte inteira de $n\alpha$.

Note também que, podemos dividir o intervalo de 0 e 1 em k partes, $I_1, I_2, I_3, ..., I_k$, tal que , $I_1 = \left[0, \frac{1}{k}\right], I_2 = \left[\frac{1}{k}, \frac{2}{k}\right], I_3 = \left[\frac{2}{k}, \frac{3}{k}\right], ..., I_k = \left[\frac{k-1}{k}, 1\right]$.

Perceba que cada um dos $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_k$ é irracional, logo, nenhum dos γ_s pode ser igual a qualquer um dos números racionais $\frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \frac{3}{k}, ..., \frac{k-1}{k}, \frac{k}{k}$. Portanto, cada γ_s está exatamente em um dos intervalos $I_1, I_2, I_3, ..., I_k$.

Podemos então considerar dois casos:

Caso I) O intervalo I_1 contém um dos γ_s. Portanto, existe um n, tal que

$$0 < n\alpha - \beta_n < \frac{1}{k}.$$

Assim,

$$-\frac{1}{k} < n\alpha - \beta_n < \frac{1}{k}, \tag{4.11}$$

pois I_1 é o intervalo de 0 até k. Dividindo (4.11) por n, obtemos

$$-\frac{1}{kn} < \alpha - \beta_n < \frac{1}{kn}.$$

Caso II) O intervalo I_1 não contém um dos γ_s. Neste caso, os k números estão nos $k-1$ intervalos. Pelo princípio da casa dos pombos segue que existe um intervalo contendo dois ou mais γ_s, uma vez que temos k números.

Consideremos então γ_r e γ_j distintos no mesmo intervalo. Suponhamos $j > r$, tal que, $j - r$ seja um inteiro positivo menor do que k.

Por estarem γ_r e γ_j no interior de mesmo intervalo de comprimento $\frac{1}{k}$, temos que

$$-\frac{1}{k} < \gamma_j - \gamma_r < \frac{1}{k}.$$

Como $\gamma_j = j\alpha - \beta_j$ e $\gamma_r = r\alpha - \beta_r$, segue que

$$-\frac{1}{k} < (j\alpha - \beta_j) - (r\alpha - \beta_r) < \frac{1}{k}.$$

Assim,

$$-\frac{1}{k} < (j - r)\alpha - (\beta_j - \beta_r) < \frac{1}{k}.$$

Chamando $(j-r)$ de n e $(\beta_j - \beta_r)$, chegamos em,

$$-\frac{1}{k} < n\alpha - m < \frac{1}{k}.$$

Para finalizar essa demonstração vamos dividir essa última desigualdade por n,

$$-\frac{1}{kn} < \alpha - \frac{m}{n} < \frac{1}{kn}.$$

Como $n = j-r$, temos que n é menor do que k.

□

Exemplo 4.2.2. *Vamos aproximar $\sqrt{5}$ pelo método apresentado no teorema acima, com $k=6$. Inicialmente, observe que*

$$\begin{aligned}
\sqrt{5} &= 2,236067... = 2+0,236067...,\\
2\sqrt{5} &= 4,472135... = 4+0,472135...,\\
3\sqrt{5} &= 6,70820393... = 6+0,70820393...,\\
4\sqrt{5} &= 8,94427190... = 8+0,9442719099...,\\
5\sqrt{5} &= 11,18033988... = 11+0,18033988...,\\
6\sqrt{5} &= 13,41640786... = 13+41640786....
\end{aligned}$$

Assim, as diferenças com suas respectivas partes inteiras, localizam -se em um dos 3 subintervalos $I_1 = \left[0,\frac{1}{6}\right]$, $I_2 = \left[\frac{1}{6},\frac{2}{6}\right]$, $I_3 = \left[\frac{2}{6},\frac{3}{6}\right]$, $I_4 = \left[\frac{3}{6},\frac{4}{6}\right]$, $I_5 = \left[\frac{4}{6},\frac{5}{6}\right]$, $I_6 = \left[\frac{5}{6},1\right]$, a saber ,

$$\begin{aligned}
\sqrt{5}-2 &= 0,236067... \in I_2,\\
2\sqrt{5}-4 &= 0,472135... \in I_3,\\
3\sqrt{5}-6 &= 0,70820393... \in I_5,\\
4\sqrt{5}-8 &= 0,94427190... \in I_6,\\
5\sqrt{5}-11 &= 0,18033988... \in I_2,\\
6\sqrt{5}-13 &= 0,41640786... \in I_2.
\end{aligned}$$

Logo, ou uma diferença está no intervalo I_1 e portanto entre os valores $-\frac{1}{6}$ e $\frac{1}{6}$, ou um dos intervalos possui duas diferenças. No nosso exemplo os valores $\sqrt{5}-2$ e $5\sqrt{5}-11$ estão em I_2, ou seja, a menos de $\frac{1}{6}$ um do outro. Dessa forma,

$$-\frac{1}{6} < \left(5\sqrt{5}-11\right) - \left(\sqrt{5}-2\right) < \frac{1}{6} \Rightarrow -\frac{1}{6} < 4\sqrt{5}-9 < \frac{1}{6} \Rightarrow -\frac{1}{6.4} < \sqrt{5} - \frac{9}{4} < \frac{1}{6.4}.$$

Da última desigualdade, observamos que para o irracional $\sqrt{5}$ *e o inteiro* $k=6$*, o racional* $\frac{9}{4}$ *satisfaz o teorema* (4.2.3).

Teorema 4.2.4. *Para todo número irracional* α*, existem infinitos números racionais* $\frac{m}{n}$ *em forma irredutível, tais que*

$$-\frac{1}{n^2} < \alpha - \frac{m}{n} < \frac{1}{n^2}.$$

Demonstração. Utilizando o Teorema (4.2.3) perceba que $k \geqslant n$ e consequentemente, $\frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{n}$ e $\frac{1}{kn} \leqslant \frac{1}{n^2}$.

Assim, segue que existe um racional $\frac{m}{n}$, tal que $\alpha - \frac{m}{n}$ esteja entre $-\frac{1}{n^2}$ e $\frac{1}{n^2}$. No entanto queremos $\frac{m}{n}$ irredutível que satisfaça as desigualdades do teorema, para isso, perceba que , se um racional $\frac{m}{n}$ na forma não irredutível satisfazer as desigualdades do teorema, então o mesmo número racional na forma não irredutível satisfará.

Diante disso, tomemos $\frac{M}{N}$ a forma irredutível de $\frac{m}{n}$, ou seja, $\frac{M}{N} = \frac{m}{n}$, onde $0 < N < n$. E então, $\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{N}$ e $\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{N^2}$.

Logo,

$$-\frac{1}{n^2} < \alpha - \frac{m}{n} < \frac{1}{n^2}.$$

O que implica,

$$-\frac{1}{N^2} < \alpha - \frac{M}{N} < \frac{1}{N^2}.$$

Para finalizar a demonstração, vamos mostrar que existe uma infinidade de números racionais que satisfazem essa última desigualdade.

Para isso, vamos supor que existe um número finito de números racionais,

$$\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \frac{m_3}{n_3}, ..., \frac{m_i}{n_i}$$

que satisfaçam.

Consideremos α irracional, então, os i números

$$\alpha - \frac{m_1}{n_1},\ \alpha - \frac{m_2}{n_2},\ \alpha - \frac{m_3}{n_3}, ..., \alpha - \frac{m_i}{n_i}$$

pelo Teorema (3.2.1) são todos irracionais, e portanto, todos diferentes de zero.

Agora, tome k um inteiro positivo, tão grande , que as desigualdades a seguir não sejam verdadeiras.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{k} &< \alpha - \frac{m_1}{n_1} < \frac{1}{k}, \\ -\frac{1}{k} &< \alpha - \frac{m_2}{n_2} < \frac{1}{k}, \\ &\vdots \\ -\frac{1}{k} &< \alpha - \frac{m_i}{n_i} < \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Como temos α irracional e k inteiro, pelo Teorema (4.2.3), segue que existe $\frac{m}{n}$ racional, tal que

$$-\frac{1}{kn} < \alpha - \frac{m}{n} < \frac{1}{kn}.$$

E daí,

$$-\frac{1}{k} < \alpha - \frac{m}{n} < \frac{1}{k}.$$

Observe que $\frac{m}{n}$ satisfaz as condições do teorema, mas não está listado. O que contrária a hipótese de existir finito números irracionais que satisfaz. Logo, existem infinitos números racionais como queríamos mostrar. □

Este último teorema diz que um número irracional α pode ser aproximado a menos de $\frac{1}{n^2}$. Em outras palavras, todo número irracional α é aproximável na ordem 2, o que garante que, existe uma constante $c > 0$ tal que $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{c}{q^2}$ se verifica para um número infinito de racionais $\frac{p}{q}$ distintos. A menor constante que satisfaz a desigualdade $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{c}{q^2}$ é $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Na próxima seção exibiremos um número que pode ser aproximado por infinitos números racionais, não apenas a menos $\frac{1}{q^2}$, mas a menos $\frac{1}{q^n}$, sendo n qualquer inteiro positivo, a saber, o número de Liouville.

O número de Liouville

O número de Liouville é dado por $\alpha = 0,110001000000000000000000010...$, onde os uns ocorrem nas casas decimais $1,2,6,24,120,720,5040,...$, isto é, nas casas decimais $1!,2!,3!,4!,5!,6!,....$

O símbolo (!) lê- se fatorial e $K!$ representa o produto de todos os números de 1 até k, assim

$$K! = 1.2.3.4.....(k-1).k.$$

Observe que todos os algarismos na representação de α, diferentes daqueles que estão nas casas decimais correspondentes aos fatoriais, são todos zeros. Dessa forma, podemos escrever α como uma soma de potências negativas de 10, ou seja,

$$\begin{aligned}\alpha &= 10^{-1!}+10^{-2!}+10^{-3!}+10^{-4!}+10^{-5!}+...\\ \alpha &= 10^{-1}+10^{-2}+10^{-6}+10^{-24}+10^{-120}+...\\ \alpha &= \frac{1}{10^1}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^6}+....\end{aligned}$$

A seguir, apresentaremos o teorema de Liouville, definiremos de uma forma mais geral os números de Liouville, e por fim, mostraremos a transcendência e irracionalidade desses números.

Na demonstração do Teorema de Liouville, necessitaremos do Teorema do Valor Médio. Segue abaixo o seu enunciado.

Teorema 4.2.5. *Seja f uma função contínua no intervalo $[a,b]$ e derivável em (a,b), então existe um c em (a,b) tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

A demonstração do teorema (4.2.5) *pode ser vista em* [15].

O Teorema de Liouville consiste em encontrar uma propriedade que é satisfeita por todos os números algébricos. E então, para construir um número transcendente, basta construir um número que não satisfaz tal propriedade.

Teorema 4.2.6. *(Liouville). Seja α uma raiz real de um polinômio irredutível $P(x) \in \mathbb{Z}(x)$ de grau n . Então existe uma constante positiva $c(\alpha) > 0$, tal que*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{c(\alpha)}{q^n}, \tag{4.12}$$

para todo racional $\frac{p}{q}$.

Demonstração. Como α é algébrico de grau n, ele é raíz de uma equação polinomial da forma

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x^1 + a_0 = 0,$$

em que $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x^1 + a_0$, com $f(x) = 0$.

Como todo polinômio não nulo tem uma quantidade finita de raízes, no caso de $f(x)$ tem no máximo n raízes, então, $\exists \;\; d > 0$, tal que no intervalo $[\alpha - d, \alpha + d]$ a única raíz de $f(x) = 0$ é α. A existência de d segue do fato de que a equação polinomial tem no máximo n raízes reais, logo, d pode ser qualquer número menor que a menor das distâncias de α às demais raízes reais.

Agora, dado $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, e $q > 0$, temos duas possibilidades, ou $\frac{p}{q} \in [\alpha - d, \alpha + d]$ ou $\frac{p}{q} \notin [\alpha - d, \alpha + d]$.

I) Se $\frac{p}{q} \notin [\alpha - d, \alpha + d]$, significa que

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > d > \frac{d}{q^n},$$

pois $q \geqslant 1$.

II) Se $\frac{p}{q} \in [\alpha - d, \alpha + d]$. Temos que, f é contínua em $[\alpha - d, \alpha + d]$ e derivável no intervalo $(\alpha - d, \alpha + d)$. Então, pelo Teorema do valor Médio temos um $t \in (\alpha - d, \alpha + d)$, tal que

$$f'(t) = \frac{f(\alpha) - f(\frac{p}{q})}{\alpha - \frac{p}{q}}.$$

Utilizando a última igualdade e o fato de $f(\alpha) = 0$, obtemos que

$$\left|f(\frac{p}{q})\right| = |f'(t)| \left|\alpha - \frac{p}{q}\right|.$$

Observe que f' é contínua no intervalo fechado com extremos $\alpha - d, \alpha + d$, e que f' é um polinômio de grau $n - 1$, portanto, ela é limitada em qualquer intervalo fintito. Seja pois, $M > 0$, tal que $|f'(x)| \leqslant M, \;\; \forall\, x$ no intervalo de $[\alpha - d, \alpha + d]$.

Logo,

$$\left|f(\frac{p}{q})\right| = |f'(t)| \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leqslant M \left|\alpha - \frac{p}{q}\right|. \tag{4.13}$$

Para obter a desigualdade buscada, necessitamos de uma estimativa inferior para $f(\frac{p}{q})$.

Sabemos que $\left|f(\frac{p}{q})\right| \neq 0$, pois $\frac{p}{q}$ está no intervalo $[\alpha - d, \alpha + d]$, e note que

$$\begin{aligned} \left|f(\frac{p}{q})\right| &= \left|a_0 + a_1\frac{p}{q} + \ldots + a_n\frac{p^n}{q^n}\right| \\ &= \left|\frac{a_0q^n + a_1q^{n-1}p + \ldots + a_np^n}{q^n}\right| \geqslant \frac{1}{q^n}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

De (4.13) e (4.14), temos

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{Mq^n}.$$

Assim, tomando $c(\alpha) =$ mínimo $\left\{d, \frac{1}{M}\right\}$, temos

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{Mq^n} > \frac{C(\alpha)}{q^n} \quad \forall\ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}.$$

□

Agora, vamos definir os chamados números de Liouville.

Definição 4.2.2. *Um número real α é aproximável na ordem n por racionais, se existirem uma constante $C > 0$, e uma sequência $\left(\frac{p_j}{q_j}\right)_{j\leq 1}$ de racionais distintos, com $q_j > 1$ e $mdc(p_j, q_j) = 1$ tais que*

$$\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{C}{q_j^n}, \tag{4.15}$$

para todo $j \geqslant 1$.

Definição 4.2.3. *Um número real α é chamado número de Liouville se existir uma sequência de racionais $\left(\frac{p_j}{q_j}\right)_{j\leq 1}$, com $q_j \geqslant 1$, tal que*

$$\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{1}{q_j^j}, \quad para\,todo\; j \geqslant 1. \tag{4.16}$$

Exemplo 4.2.3. *Qualquer número da forma*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k},$$

onde a_k é um número dos algarismos de 1 a 9 é um número de Lioville.

Denotamos por $\mathbb{L}$ conjunto dos números de Liouville.

Proposição 4.2.1. *A sequência $(q_j)_{j\geqslant 1}$ é ilimitada.*

Demonstração. Seja α um número de Liouville, então, existi uma sequência de racionais $\left(\frac{p_j}{q_j}\right)_{j\leq 1}$, com $q_j \geqslant 1$, tal que

$$\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{1}{q_j^j}, \quad para\, todo\, j \geqslant 1.$$

Suponhamos agora, que $(q_j)_{j\geqslant 1}$ é limitada, assim existe $M > 0$, tal que $q_j \leqslant M$ para todo $j \geqslant 1$.

Como $\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < 1$, obtemos

$$|q_j\alpha - p_j| < q_j \leqslant M.$$

Assim,

$$\begin{aligned} &|p_j| - |q_j\alpha| \leqslant M \\ \Rightarrow \quad &|p_j| \leqslant M + |q_j\alpha| \leqslant M + |q_j||\alpha| \leqslant (|\alpha| + 1)\, M, \end{aligned} \tag{4.17}$$

o que implica uma limitação para $(p_j)_{j\geqslant 1}$, pois $|p_j| < (|\alpha| + 1)\, M$. O que contraria o fato de a sequência $\left(\frac{p_j}{q_j}\right)_{j\geqslant 1}$ ser infinita. □

Corolário 4.2.1. *Todo número de Liouville é irracional.*

Demonstração. Vamos supor por absurdo que $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ é número de Liouville. então existem infinitos $\frac{p_j}{q_j}$, diferentes de $\frac{p}{q}$, tais que

$$\frac{1}{q_j^j} > \left|\frac{p}{q} - \frac{p_j}{q_j}\right| = \left|\frac{pq_j - p_jq}{qq_j}\right| \geqslant \frac{1}{|q|q_j},$$

onde $pq_j - p_jq$ é inteiro diferente de zero. Logo,

$$\frac{1}{q_j^j} > \frac{1}{|q|q_j}.$$

Assim $q_j^{j-1} < |q|$ o que contraria a ilimitação de $(q_j)_j$. Portanto, todo número de Liouville é irracional. □

Teorema 4.2.7. *Todo número de Liouville é transcendente.*

Demonstração. Pelo Corolário (4.2.1) , um número de Liouville α não pode ser racional, ou seja, α não será raíz de um polinômio de grau 1 com coeficientes inteiros. Assim, suponhamos que α é algébrico de grau $n > 1$. Então pelo Teorema (4.2.6) segue que a relação (4.12) será válida para todo número racional. Em particular, para os $\frac{p_j}{q_j}$ da Definição (4.2.3). Segue então que,

$$\frac{c(\alpha)}{q_j^n} < \left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{1}{q_j^j}.$$

Assim, $q_j^{j-n} < \dfrac{1}{c(\alpha)}$, para todo $j \geqslant 1$, o que contraria a ilimitação da sequência (q_j^{j-n}) e portanto α não pode ser algébrico. □

No Teorema anterior mostramos que todo número de Liouville é transcendente, mas a reíproca não é verdadeira.

Exemplo 4.2.4. *A constante de Chanpernowne* $M := 0,12345678910111213...$ *é transcendente e não é número de Liouville.*

Além dos números de Liouville, existem outros números que também são transcendentes, como os números π e e. Aqui não apresentaremos a prova da transcendência desses números, pois não é o objetivo do nosso trabalho, caso o leitor sinta o desejo de ver as demonstrações desses números poderá encontrá-las em [5].

Outros números transcendentes

Teorema 4.2.8. *Seja* α *um número algébrico diferente de zero e* β *um número transcendente, então* $(\alpha+\beta)$, $(\alpha-\beta)$, $(\alpha.\beta)$ *e* $\dfrac{\alpha}{\beta}$ *são números transcendentes.*

Demonstração. Seja α um número algébrico diferente de zero e β um número transcendente.

Suponha $(\alpha+\beta) = \gamma_1$, $(\alpha-\beta) = \gamma_2$, $(\alpha.\beta) = \gamma_3$ e $\dfrac{\alpha}{\beta} = \gamma_4$, onde $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ são números algébricos.

Resolvendo essas equações em β, temos

$$\beta = \gamma_1 - \alpha, \quad \beta = \gamma_2 + \alpha, \quad \beta = \frac{\gamma_3}{\alpha} = \gamma_3.\alpha^{-1}, \quad \beta = \gamma_4.\alpha.$$

Pelas propriedades dos números algébricos, temos que o lado direito das equações acima, são números algébricos, e consequentemente β é algébrico, o que contraria a hipótese de β ser transcendente. □

Exemplo 4.2.5. *Tomando* $\alpha = 2$ *e* $\beta = \pi$*, temos pelo teorema que* $(2+\pi)$, $(2-\pi)$, $(2.\pi)$ *e* $\dfrac{2}{\pi}$ *são números transcendentes.*

Corolário 4.2.2. *Seja* β *um número transcendente, então* β^{-1} *é transcendente.*

Demonstração. No Teorema (4.2.8) mostramos que $\dfrac{\alpha}{\beta}$ é transcendente. Tomando $\alpha = 1$, temos

$$\frac{1}{\beta} = \beta^{-1}.$$

Portanto, β um número transcendente, então β^{-1} é transcendente. $\square$

O teorema a seguir, foi demonstrado independentemente por Gelfond em 1934 e Scheneider em 1935, como solução do sétimo problema Hilbert, onde se perguntava se o logaritmo de um número algébrico numa base algébrica deveria ser racional ou transcendente. Este problema era um dos 23 problemas que Hilbert propôs em 1990, no congresso internacional de matemática em Paris.

Teorema 4.2.9. *(Gelfond-Scheneider) Se α é algébrico diferente de 0 e 1, e β é algébrico, não racional, então α^{β} é transcendente.*

A demonstração do Teorema de Gelfond-Scheneider pode ser vista em [10], ou a demonstração fica a cargo do leitor, pois exige uma teoria que não é abordada neste trabalho. Uma consequência imediata deste teorema é a transcendencia dos números $2^{\sqrt{2}}$ e $\sqrt{2}^{\sqrt{3}}$.

Como ja citamos aqui neste capítulo, os números π e e são transcententes, mas até hoje, não conseguiu-se provar a transcendencia de $\pi + e$ e $\pi.e$. No entanto, sabe-se que pelo menos um desses números é transcendente. Mostraremos esse fato nos teoremas a seguir.

Teorema 4.2.10. *Sejam α e β números transcendentes, então pelo menos um dos números $(\alpha+\beta)$ e $(\alpha-\beta)$ é transcendente.*

Demonstração. Sejam α e β números transcendentes. Suponha que $(\alpha+\beta)$ e $(\alpha+\beta)$ sejam ambos algébricos.

Note que,

$$(\alpha+\beta)-(\alpha+\beta) = 2\alpha,$$

o que implica que 2α é algébrico, pois é resultado da soma de números algébricos. Assim, temos α algébrico. O que é um absurdo, pois por hipótese α é transcendente. Portanto, se α e β saõ números transcendentes, pelo menos um dos números $(\alpha+\beta)$ e $(\alpha-\beta)$ é transcendente. $\square$

Exemplo 4.2.6. *Tomando $\alpha = \pi$ e $\beta = e$, pelo teorema temos que pelo menos um dos números $\pi+e$ e $\pi-e$ é transcendente.*

Teorema 4.2.11. *Sejam α e β números transcendentes, então pelo menos um dos números $(\alpha+\beta)$ e $(\alpha.\beta)$ é transcendente.*

Demonstração. Suponha que $(\alpha+\beta)$ e $(\alpha.\beta)$ sejam algébricos. Veja que,

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta,$$

o que implica que $\alpha^2+\beta^2$, pois por hipóte $(\alpha+\beta)$ e $(\alpha.\beta)$ são algébricos, e pela propriedade dos algébricos, a diferença de dois algébricos é algébrico.

Por outro lado , temos que

$$(\alpha-\beta)^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta, \tag{4.18}$$

$$\alpha-\beta=(\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.19}$$

Observe em (4.18) que $(\alpha-\beta)^2$ é algébrico. o que implica $\alpha-\beta$ também algébrico, como podemos ver em (4.19). Assim, temos que $\alpha+\beta$ e $\alpha-\beta$ são ambos algébricos, o que é um absurdo, pois pelo teorema anterior provamos que ou $\alpha+\beta$ ou $\alpha-\beta$ é algébrico.

□

Neste capítulo apresentamos alguns exemplos e propriedades dos números algébricos e também alguns exemplos de números transcendentes. Estabelecer a transcendência de um número particular pode ser um tarefa difícil, e essa dificuldade decorre da própria definição de número transcendente. Mas, pelos teoremas apresentados até aqui, observa-se que podemos exibir exemplos de transcendentes. Através do estudo números transcendentes, ampliamos o nosso conhecimento sobre os números irracionais, alcançando então, o objetivo deste capítulo.

5 PROPOSTA DE ATIVIDADES

Nos cápitulos anteriores nos dedicamos a estudar os números irracionais, apresentando conceitos, propriedades e exemplos referente a este conjunto, neste capítulo apresentaremos como sugestão e como exemplos que servem de modelo, algumas propostas de atividades destinadas a turma do 9º ano do Ensino Fundamental, com foco no estudo do conjunto dos números irracionais, baseado no que é indicado na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e no Documento Curricular do Tocantins (DCT).

De acordo com a BNCC, no que se refere ao ensino dos números irracionais, o Ensino Básico tem como proposta que o aluno do 9º ano desenvolva as habilidades de,

> Reconhecer que, uma vez que fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se torna a medida de cada lado como unidade). ([2], 2018, p. 317)

> Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica. ([2], 2018, p. 317)

E aos cálculos numéricos com aproximação, de acordo com o DCT, convém observar que no campo dos racionais ocorrem duas representações, a fracionária e a decimal, que pode ser finita ou infinita periódica. E que os irracionais podem ser aproximados tanto quanto se queira por números racionais, e que a sua representação decimal é necessariamente infinita e não periódica.

> Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica. ([14], 2019, p. 138)

Além disso, a BNCC orienta que na construção da noção de números, os alunos precisam

> Desenvolver, entre outras, as ideias de aproximação, proporcionalidade, equivalência e ordem, noções fundamentais da Matemática. Para essa construção, é importante propor, por meio de situações significativas, sucessivas ampliações dos campos numéricos. No estudo desses campos numéricos, devem ser enfatizados registros, usos, significados e operações. ([2], 2018, p. 368)

e que eles também,

> ... resolvam problemas com números naturais, inteiros e racionais, envolvendo as operações fundamentais, com seus diferentes significados, e utilizando estratégias diversas, com compreensão dos processos neles envolvidos. Para que aprofundem a noção de número, é importante colocá-los diante de problemas, sobretudo os geométricos, nos quais os números racionais não são suficientes para resolvê-los, de modo que eles reconheçam a necessidade de outros números: os irracionais. ([2], 2018, p. 369)

Assim, com a intenção de desenvolver no aluno do 9º ano do ensino fundamental as habilidades aqui citadas, elaboramos 4 propostas didáticas. Apresentaremos as propostas didáticas separadas em seções.

5.1 Proposta didática 01

Proposta 01: Identificar números irracionais.

Público Alvo: Alunos do 9º ano do ensino Fundamental.

Conteúdo: Conjunto dos Números Irracionais.

Objetivo: Espera-se que o aluno consiga classificar um número como racional ou irracional.

Pré-requisitos: Para o desenvolvimento dessa aula é necessário que o aluno sabia as definições de números racionais e irracionais, bem como as características das representações de tais números.

Duração: 1 aula de 50 minutos.

Avaliação: A avaliação será processual e contínua, observando aspectos quantitativos e qualitativos como um todo. A qualidade será através do acompanhamento do desempenho do aluno no que se refere a sua participação, produtividade, interesse, colaboração, clarezas de ideias e no desenvolvimento das atividades orais e escritas no decorrer das aulas.

Recursos Pedagógicos: Lousa, calculadora, pincel e apagador.

Desenvolvimento da atividade:

Primeiro momento: O professor poderá iniciar a atividade apresentando as seguintes definições:

Números racionais são aqueles que possuem representação decimal finita ou represent-ção decimal infinita e periódica.

Exemplo 5.1.1. *Os números* $-4,13$, $\frac{2}{3}$, $4,523$ *e* $1,363636...$ *são números racionais.*

Números irracionais são aqueles que possuem representação decimal infinita e não periódica.

Exemplo 5.1.2. *Os números* $0,10010001000100001...$ *e* $\sqrt{2}$ *são números irracionais.*

Em seguida o professor poderá propor o seguinte exercício de fixação:

Exercício de fixação:

1) Dos números listados abaixo identifique os que são:

$$\frac{1}{2} \quad -4 \quad \sqrt{16} \quad 0 \quad 2,5 \quad \sqrt{7} \quad \frac{22}{7} \quad 6,4545... \quad \sqrt{6} \quad 3,14159265358979...$$

a) racionais:

b) irracionais:

2) Escreva:

a) Três números racionais positivos.

b) Três números racionais negativos.

c) Três números não racionais positivos.

d) Três números não racionais negativos.

5.2 Proposta didática 02

Proposta 02: Mostrar a existência de infinitos números irracionais.

Público Alvo: Alunos do 9º ano do ensino Fundamental.

Conteúdo: Conjunto dos Números Irracionais.

Objetivo: Espera-se que o aluno perceba que é possível demonstrar a irracionalidade de alguns números e que $\sqrt{a}$, quando a não for quadrado perfeito é irracional.

Pré-requisitos: Para o desenvolvimento dessa aula é necessário que o aluno sabia calcular calcular as raízes quadradas de quadrados perfeitos e bem como operar números racionais.

Duração: 3 aulas de 50 minutos cada.

Avaliação: A avaliação será processual e contínua, observando aspectos quantitativos e qualitativos como um todo. A qualidade será através do acompanhamento do desempenho do aluno no que se refere a sua participação, produtividade, interesse, colaboração, clarezas de ideias e no desenvolvimento das atividades orais e escritas no decorrer das aulas.

Recursos Pedagógicos: Lousa, calculadora, pincel e apagador.

Desenvolvimento da atividade:

Primeiro momento: Para esse primeiro momento da atividade é necessário que os alunos já saibam calcular as raízes de alguns números, chamados quadrados perfeitos. O professor pedirá para que os alunos preencham a seguinte tabela, dizendo quais números possuem valor inteiro como resultado.

números	**raíz quadrada**	**valor inteiro da raíz quadrada**
1	$\sqrt{1}$	1
2	$\sqrt{2}$	não possui
3	$\sqrt{3}$	não possui
4	$\sqrt{4}$	2
5	$\sqrt{5}$	não possui
6	$\sqrt{6}$	não possui
7	$\sqrt{7}$	não possui
8	$\sqrt{8}$	não possui
9	$\sqrt{9}$	3
10	$\sqrt{10}$	não possui
11	$\sqrt{11}$	não possui
12	$\sqrt{12}$	não possui
13	$\sqrt{13}$	não possui
14	$\sqrt{14}$	não possui

Após o preenchimento da tabela o professor deverá fazer os seguintes questionamentos: Quais raízes possuem resultados inteiros? Quais não possuem? Como cálcular o valor dessas raízes que não possuem como resultado um valor inteiro?

Logo após fazer esses questionamentos o professor deve mostrar pelo processo de aproximações sucessivas como obter o valor de $\sqrt{2}$.

I Com o auxílio da tabela mostrar que número $\sqrt{2}$ está entre os quadrados perfeitos 1 e 4, pois $1 = 1^2$ e $4 = 2^2$. Então fazer tentativas:
$(1,1)^2 = 1,21 \longrightarrow 1,21 < 2.$
$(1,2)^2 = 1,44 \longrightarrow 1,44 < 2.$
$(1,3)^2 = 1,69 \longrightarrow 1,69 < 2.$
$(1,4)^2 = 1,96 \longrightarrow 1,96 < 2.$
$(1,5)^2 = 2,25 \longrightarrow 2,25 > 2.$

Observar que $\sqrt{2}$ está entre $1,4$ e $1,5$. Continuando o cálculo temos:

$(1,41)^2 = 1,9881 \longrightarrow 1,9881 < 2.$
$(1,42)^2 = 2,0164 \longrightarrow 2,0164 > 2.$

Então $\sqrt{2}$ está entre $(1,41)$ e $(1,42)$. Prosseguindo com o cálculo temos:

$(1,411)^2 = 1,990921 \longrightarrow 1,990921 < 2.$
$(1,412)^2 = 1,993744 \longrightarrow 1,993744 < 2.$
$(1,413)^2 = 1,996569 \longrightarrow 1,996569 < 2.$

$(1,414)^2 = 1,999396 \longrightarrow 1,999396 < 2.$
$(1,415)^2 = 2,002225 \longrightarrow 2,002225 > 2.$

Assim, $\sqrt{2}$ está entre $(1,414)$ e $(1,425)$, Prosseguindo com o cálculo temos:

$(1,4141)^2 = 1,99967881 \longrightarrow 1,99967881 < 2.$
$(1,4142)^2 = 1,99996164 \longrightarrow 1,99996164 < 2.$
$(1,4143)^2 = 2,00024449 \longrightarrow 2,00024449 > 2.$

Observar que $\sqrt{2}$ está entre $(1,4142)$ e $(1,4143)$, Prosseguindo com o cálculo temos:

$(1,41421)^2 = 1,99998992 \longrightarrow 1,99998992 < 2.$
$(1,41422)^2 = 2,00001820 \longrightarrow 2,00001820 > 2.$

Observar que $\sqrt{2}$ está entre $(1,41421)$ e $(1,41422)$. Prosseguindo com o cálculo temos:

$(1,414211)^2 = 1,99999275 \longrightarrow 1,99999275 < 2.$
$(1,414212)^2 = 1,99999558 \longrightarrow 1,99999558 < 2.$
$(1,414213)^2 = 1,99999840 \longrightarrow 1,99999840 < 2.$
$(1,414214)^2 = 2,00000123 \longrightarrow 2,00000123 > 2.$

Observar que $\sqrt{2}$ está entre $(1,414213)$ e $(1,414214)$. Prosseguindo com o cálculo temos: $(1,4142131)^2 = 1,99999869 \longrightarrow 1,99999869 < 2.$
$(1,4142132)^2 = 1,99999897 \longrightarrow 1,99999897 < 2.$
$(1,4142133)^2 = 1,99999925 \longrightarrow 1,99999925 < 2.$
$(1,4142134)^2 = 1,99999954 \longrightarrow 1,99999954 < 2.$
$(1,4142135)^2 = 1,99999882 \longrightarrow 1,99999882 < 2.$
$(1,4142136)^2 = 2,00000010 \longrightarrow 2,00000010 > 2.$

O professor e os alunos poderão utilizar a calculadora como instrumento para efetuar os cálculos, porém, devem observar que a partir de um dado momento alguns resultados obtidos na calculadora serão valores aproximados. Concluir que $\sqrt{2} = 1,4142135...$ ou $\sqrt{2} \cong 1,4142135$.

Após a realização das aproximações, o professor deverá fazer os seguintes questionamentos: "a representação de $\sqrt{2}$ na sua forma decimal é finita ou infinita? Se infinita, é periódica ou não periódica? Podemos concluir que $\sqrt{2}$ é irracional?"

Exercício de fixação

1) Com base no exemplo apresentado, utilizando a calculadora calcule $\sqrt{5}$. Faça o mesmo procedimento do item anterior, ou seja, calcule o quadrado do número encontrado apenas com uma cada decimal, depois com duas casas, depois com três e finalmente com quatro casas. Registre os resultados e observe como eles se aproximam cada vez mais de $\sqrt{5}$.

2) Sem utilizar a calculadora, estime, com uma casa decimal, a melhor aproximação para $\sqrt{11}$.

3) Sem utilizar a calculadora, estime, com duas casas decimais, a melhor aproximação para $\sqrt{11}$.

Segundo momento: O professor poderá começar esse momento fazendo um resumo do que foi feito na atividade anterior: Na atividade anterior mostramos uma forma de calcular o valor aproximado de algumas raízes quadradas que não possuem valor inteiro como resultado. Ficando para ser respondido o seguinte questionamento: "$\sqrt{2}$ é um número racional ou irracional?"

A resposta é que $\sqrt{2}$ é um número irracional, e nessa atividade vamos apresentar uma demonstração desse fato. A técnica utilizada será a prova por absurdo, que consiste em contrariar a hipótese, com uma determinada afirmação. Este fato faz com que a afirmação seja falsa e portanto *contrariar a hipótese* é falso, ou seja, a hipótese é verdadeira.

Para isso vamos utilizar a seguinte definição de número irracional: Um número irracional é um número que não pode ser representado como razão de dois inteiros, ou seja, não pode ser escrito como $\frac{a}{b}$ sendo a e b inteiros.

Para a demonstração, a hipótese é que $\sqrt{2}$ é um número racional, ou seja, é possível termos uma fração irredutível $\frac{a}{b}$ a e b, $b \neq 0$, tais que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Neste caso podemos escrever

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= \frac{a}{b} \\ \sqrt{2}^2 &= (\frac{a}{b})^2 \\ 2 &= \frac{a^2}{b^2} \\ 2b^2 &= a^2. \end{aligned}$$

Agora temos a seguinte situação, o membro da esquerda é par, portanto o da direita também será. Contudo não podemos ter a^2 par se a não for par. Sendo assim, podemos escrever $a = 2k$, para algum $k \in \mathbb{Z}$, então

$$\begin{aligned} a &= 2k \\ a^2 &= (2k)^2 \\ a^2 &= 4k^2. \end{aligned}$$

Voltando a equação $2b^2 = a^2$ e substituindo o a^2 pelo $4k^2$ ficamos com

$$2b^2 = a^2$$
$$2b^2 = 4k^2$$
$$b^2 = 2k^2.$$

Dessa forma, temos a seguinte situação, o membro da direita é par, portanto o da esquerda também será. Contudo não podemos ter b^2 par se b não for par, logo b é par.

Neste momento é importante que os alunos observem que se a é par e b é par, então podemos escrever $\frac{a}{b} = \frac{2k}{2q}$ com k e q inteiros, o que contradiz a nossa suposição inicial, pois tínhamos assumido que a fração $\frac{a}{b}$ era irredutível. Essa contradição mostra que a suposição inicial é falsa, ou seja, $\sqrt{2}$ não é racional. Portanto $\sqrt{2}$ irracional.

Exercício de Fixação 1) (Exercício retirado da OBMEP [13]) Prove que não é possível escrever:

a) $\sqrt{3}$ como uma fração de inteiros. Ou seja, prove que $\sqrt{3}$ não é racional.

b) $\sqrt{5}$ como uma fração de inteiros. Ou seja, prove que $\sqrt{5}$ não é racional.

c) $\sqrt{p}$ como uma fração de inteiros, sendo p um número primo. Ou seja, prove que $\sqrt{p}$ não é racional.

Comentários: No primeiro momento dessa atividade é importante que o aluno perceba que é possível determinar uma aproximação decimal de raízes de números que não são quadrados perfeitos, mas esta por sua vez não garante a irracionalidade de tais números. Já no segundo o aluno deve perceber que é possível provar a irracionalidade de alguns números fazendo uso de conceitos já conhecidos por eles.

5.3 Proposta didática 03

Proposta 03:. obter números irracionais

Público Alvo: Alunos do 9º ano do ensino Fundamental.

Conteúdo: Radicais.

Objetivo: Reconhecer o número π como um número irracional, e reconhecer números irracionais. .

Pré-requisitos: Números racionais.

Duração: 2 aulas de 50 min cada.

Avaliação: A avaliação será processual e contínua, observando aspectos quantitativos e qualitativos como um todo. A qualidade será através do acompanhamento do desempenho do aluno no que se refere a sua participação, produtividade, interesse, colaboração, clarezas de ideias e no desenvolvimento das atividades orais e escritas no decorrer das aulas.

Recursos Pedagógicos: Lousa, calculadora, barbante, fita métrica, pincel e apagador.

Desenvolvimento da atividade:

No primeiro momento o professor orientará os alunos a formarem grupos e a construirem com barbante circunferências de diferentes tamanhos e com o auxílio de uma régua ou fita métrica medirem o comprimento e o diâmetro dessas circunferências, logo em seguida pedir aos alunos para que calculem a razão da medida do comprimento da circunferência pela medida de seu diâmetro e anotar todos os resultados obtidos em uma tabela.

Após os resultados, o professor deverá fazer o seguinte questionamento aos alunos: O que tem em comum os valores encontrados? O que significa esse resultado? Por que isso acontece?

Feito o questionamento o professor deverá mostrar aos alunos que esses valores encontrados representa o número Pi, cuja representação é π e o seu valor é $3,14159265358979...$, mostrar também que utilizamos o seu valor aproximado para cálculo da razão, e que o valor aproximado mais utilizado é $3,14$.

Nesse momento é importante que o professor faça a observação que π está sendo representado por uma fração, mas o numerador e/ou denominador dessa fração não serão números inteiros, em outras palavras, o comprimento da circunferência e/ou o seu diâmetro é um número irracional.

A partir desse momento o professor poderá mostrar que as operações (adição, subtração , multiplicação e divisão) entre um número racional e um número irracional geram números irracionais. Apresentar exemplos: $2+\sqrt{2}$, $5-\sqrt{3}$, $4\sqrt{7}$, $\dfrac{8}{\sqrt{17}}$ etc. Espera-se que os alunos percebam que com esta propriedade é possível construir infinitos números irracionais.

Exercício de fixação

1) Dê exemplos de irracionais cuja soma seja um número:

a) racional.

b) irracional.

2) Dê exemplos de irracionais cuja subtração seja um número:

a) racional.

b) irracional.

3) Dê exemplos de irracionais cuja multiplicação seja um número:

a) racional.

b) irracional.

3) Dê exemplos de irracionais cuja divisão seja um número:

a) racional.

b) irracional.

5.4 Proposta didática 04

Proposta 04: Construir segmentos com medida irracional .

Público Alvo: Alunos do 9º ano do ensino Fundamental.

Conteúdo: Conjuntos Numéricos.

Objetivo: Utilizar o Teorema de Pitágoras para descobrir os valores das hipotenusas com medidas irracionais dos triângulos na espiral;. .

Pré-requisitos: Os alunos devem saber utilizar o Teorema de Pitágoras.

Duração: 2 aulas de 50 min cada.

Avaliação: A avaliação será processual e contínua, observando aspectos quantitativos e qualitativos como um todo. A qualidade será através do acompanhamento do desempenho do aluno no que se refere a sua participação, produtividade, interesse, colaboração, clarezas de ideias e no desenvolvimento das atividades orais e escritas no decorrer das aulas.

Recursos Pedagógicos: Lousa, pincel e apagador, lápis de cor

Desenvolvimento da atividade: O professor poderá inciar a aula apresentando uma contextualização sobre os espirais Pitagóricos.

O espirail pitagórico é uma figura obtida de uma sequência de triângulos retângulos com um vértice em comum, em que o primeiro é isósceles de catetos unitários e em cada tiângulo sucessivo um cateto é a hipotenusa do triângulo anterior e o outro cateto(oposto ao vértice comum) tem comprimento unitário, o espiral pitagórico também é conhecido como espiral de Teodoro de Cirene.

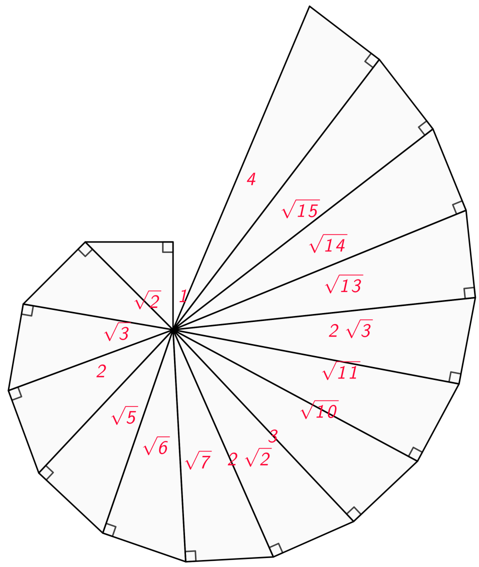
Em seguida o professor poderá propor aos alunos que construam um espiral pitágorico seguindo os seguintes passos:

- Desenhar um triângulo retângulo de catetos 1 e 1.
- descobrir a hipotenusa triângulo retângulo.
- Desenhar um segmento de medida 1 formando um ângulo de 90 graus com o triângulo anterior.
- Calcular a hipotenusa deste novo triângulo retângulo que surgiu.

e assim seguir sucessivamente.

O professor deve orientar os alunos a utilizarem o teorema de pitágoras para cálculo da hipotenusa dos trângulos construídos.

Após os alunos concluírem o espiral pitágórico o professor deverá fazer os seguintes questionamentos:



Fonte: Próprio autor.

Questionamento 1: Existem segmentos cujas medidas pertencem ao conjunto dos números racionais e outros ao conjunto dos irracionais?

Questionamento 2: Todas as medidas dos segmentos que são as hipotenusas dos triângulos construídos pertencem ao conjunto dos números racionais ou conjunto dos irracionais?

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho fizemos uma breve exposição dos números racionais e irracionais, abordamos o conceito de números algébricos e transcendentes de modo a proporcionar um conhecimento mais amplo e significativo sobre o conjunto dos irracionais, em relação aos números algébricos concluímos que um número algébrico pode ser inteiro ou irracional, já o estudo dos transcendentes nos permitiu conhecer outros exemplos e métodos de encontrar números irracionais. Nesse sentido, temos que os números irracionais são todos aqueles números que possuem uma representação infinita e não periódica, alguns exemplos interessantes são o número π, o número e e os números de Liouville.

Algumas propriedades e demonstrações sobre os números irracionais são complexas e de difícil entendimento, principalmente para alunos do ensino fundamental, porém, o estudo dos números irracionais nos possibilitou selecionar e descrever algumas propostas de atividades de forma a contribuir para o ensino dos números irracionais nesse seguimento de ensino, baseado no que é indicado nos documentos que orientam a Educação Básica. Nas propostas de atividades focamos em não só trazer exemplos isolados sobre números irracionais, mas em apresentar ao aluno propriedades e demonstrações que possibilitem uma melhor compreensão do conjunto dos números irracionais.

Os conceitos e propriedades apresentados aqui, é apenas um pouco daquilo que se pode ser explorado sobre os números irracionais, no entanto, acreditamos que este trabalho possa servir como fonte de consulta e também como um estimulo para a busca aprofundada no que diz respeito aos números irracionais para outros professores da educação básica.

Referências

[1] ÁVILA, Geraldo S. **Análise Matemática para Licenciatura**. Edgard Blücher Ltda, 3ª edição, SP, 2006.

[2] BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF, 2018.

[3] CARVALHO, Wagner Wilson Pereira de. **Números Transcendentes**. João Pessoa, 2018.

[4] DOMINGUES, H. H. **Fundamentos de Aritmética**. Atual Editora. Fundamentos de Matemática. CIP, 1991.

[5] FIGUEIREDO, D. G de. **Números irracionais e transcendentes** . 3.ed . SBM, 2011.

[6] GUIDORIZZI, H.L. **Um Curso de Cálculo**. Volume 1, 5ª edição, Rio de Janeiro: LTC, 2001.

[7] HEFEZ, Abramo. **Aritmética**. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

[8] LIMA, Elon Lages . **Números e Funções Reais** . Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[9] MAFFI, Caroline; FRAGA, Francieli Bandeira de; MATOS, Diego de Vargas. **O ensino de Matemática em uma perspectiva investigativa: a construção de alguns números irracionais**. REMAT – Revista Eletrônica da Matemática, Caxias do Sul, v. 1, n. 2, 2015. Disponível em: https://periodicos.ifrs.edu.br/index.php/REMAT/article/view/1246 acesso em: 22 jan. 2021.

[10] MARQUES, D . **Teoria dos números transcendentes** . Textos Universitários. 1.ed, SBM, 2013.

[11] MENDES, S. C. C. **Práticas pedagógicas para o ensino dos Números Irracionais**. Dissertação. Universidade Severino Sombra. Vassouras. 2012. http://livrozilla.com/doc/746932/pr

[12] NIVEN, Ivan . **Números racionais e irracionais**. Coleção Fundamentos da Matemática Elementar, SBM, 1984.

[13] **Números Irracionais e Reais**, Portal da Matemática – OBMEP, Rio de Janeiro, disponível em: https://portaldaobmep.impa.br/uploads/material/irracionais.pdf Acesso em: 22 jan. 2021

[14] TOCANTINS, Secretária de Estado da Educação e Cultura **Documento Curricular do Tocantins**. Secretária de Estado da Educação e Cultura. 2019. Disponível em: https://central.to.gov.br/download/209821.

[15] STEWART, James. **Cálculo**. Volume 1,– São Paulo: Cengage Learning, 2013.