Universidade Estadual de Londrina

DANILO ORDONE LOPES

LUGARES GEOMÉTRICOS:

UMA COLETÂNEA DE PROBLEMAS PARA APLICAÇÃO DESDE O ENSINO FUNDAMENTAL ATÉ O ENSINO MÉDIO

Londrina
2022

DANILO ORDONE LOPES

LUGARES GEOMÉTRICOS:

UMA COLETÂNEA DE PROBLEMAS PARA APLICAÇÃO DESDE O ENSINO FUNDAMENTAL ATÉ O ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Profª. Drª Neuza Teramon

Londrina
2022

Lopes, Danilo Ordone.

LUGARES GEOMÉTRICOS: : UMA COLETÂNEA DE PROBLEMAS PARA APLICAÇÃO DESDE O ENSINO FUNDAMENTAL ATÉ O ENSINO MÉDIO /

Danilo Ordone Lopes. - Londrina, 2022. 75 f.

Orientador: Neuza Teramon.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, 2022.

Inclui bibliografia.

1. Desenho Geométrico - Tese. 2. Lugares Geométricos - Tese. 3. GeoGebra - Tese. 4. Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs) - Tese. I. Teramon, Neuza . II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDU 51

DANILO ORDONE LOPES

LUGARES GEOMÉTRICOS:

UMA COLETÂNEA DE PROBLEMAS PARA APLICAÇÃO DESDE O ENSINO FUNDAMENTAL ATÉ O ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

____
Prof. Drª. Neuza Teramon
Universidade Estadual de Londrina - UEL

____
Prof. Drª. Ana Lucia da Silva
Universidade Estadual de Londrina - UEL

____
Prof. Drª. Michele de Oliveira Alves
Universidade Estadual de Londrina - UEL

____

Londrina, _____de ___________de _____.

AGRADECIMENTOS

A toda a minha família, em especial meus pais e irmão pelo apoio em toda a minha vida acadêmica.

A todos meus amigos, em especial Gabriel Vasques Bonato e Thays Costa Lopes por me incentivarem e auxiliarem na produção desde trabalho.

À minha namorada Nathália Katerine Oldemburgo Silva por todo apoio e paciência nos meus dias difíceis.

À minha orientadora Prof. Drª. Neuza Teramon, por acreditar em mim, além de ser uma ótima influência.

Às professoras Doutoras Ana Lúcia da Silva e Michele de Oliveira Alves, por aceitarem serem membros da banca, por todo cuidado que tiveram na leitura do trabalho.

LOPES, Danilo Ordone. **Lugares Geométricos:** Uma coletânea de problemas para aplicação desde o Ensino Fundamental até o Ensino Médio. 2022. 75f. Dissertação em Programa de Mestrado Profissional em Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2022.

RESUMO

O Desenho Geométrico é uma área do conhecimento que contribui para o ensino da Geometria, pois tem a capacidade de aproximar o aluno ao conhecimento geométrico, além de desenvolver habilidades importantes como organização, coordenação e visão plana e espacial das construções geométricas. Atrelar o Desenho Geométrico às Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs) é uma forma de complementar o processo do ensino e da aprendizagem em Geometria, tornando a aula mais significativa e dinâmica. Este trabalho tem como objetivo apresentar uma série de problemas de Lugares Geométricos a serem trabalhados em aulas de Desenho Geométrico e Geometria, com o auxílio do aplicativo de geometria dinâmica GeoGebra, e trazer o questionamento do quanto essas áreas do conhecimento são importantes para o desenvolvimento do raciocínio geométrico, apesar de serem pouco exploradas no Ensino Básico. Para atingir este objetivo foram feitas pesquisas bibliográficas apoiadas em autores especialistas no ensino da Geometria por meio do Desenho Geométrico, no Ensino Básico e no Ensino Superior. Durante a pesquisa foi observada uma certa escassez de materiais referentes ao Desenho Geométrico, poucos livros didáticos abordam este tema e quando abordado, ocorre de forma superficial. Os problemas sobre Lugares Geométricos que são apresentados neste trabalho podem ser desenvolvidos em diversas etapas do ensino e da aprendizagem, uma vez que contém diferentes níveis de dificuldade e abrangem diferentes tópicos da Geometria.

Palavras-chave: Geometria Euclidiana; Desenho Geométrico; Lugares Geométricos; GeoGebra; Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs).

LOPES, Danilo Ordone. **Locus:** A collection for application from Elementary School to High School. 2022. 75f. Dissertation in Professional Master's Program in Mathematics, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2022.

ABSTRACT

Geometric Design is an area of knowledge that contributes to the Geometry teaching, as it has the ability to bring the student closer to geometric knowledge, in addition to developing important skills such as organization, coordination and plan and spatial vision of geometric constructions. Linking Geometric Design to Information and Communication Technologies (ICTs) is a way of complementing the teaching and learning process in Geometry, making the class more meaningful and dynamic. This paper aims to present a series of problems of Locus to be worked in Geometric Design and Geometry classes, with the use of the dynamic geometry application GeoGebra, and to raise the question of how important these areas of knowledge are for the development of the geometric reasoning, despite being little explored in Basic Education. To achieve this objective, bibliographic research was carried out supported by authors specialized in the teaching of Geometry through Geometric Design, in Basic Education and in Higher Education. During the research, a certain scarcity of materials related to Geometric Design was observed, few textbooks address this topic and when approached, it occurs in a superficial way. The problems about Locus that are presented in this paper can be developed in different stages of teaching and learning, since they contain different levels of difficulty and cover different topics of Geometry.

Key-words: Euclidean Geometry Geometric Design, Locus, GeoGebra, Information and Communication Technologies (ICTs)

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O Desenho Geométrico compõe a grade curricular de cursos de graduação em Engenharias e Arquitetura, de muitas instituições de nível superior. Infelizmente, ainda não há oportunidade concreta de trabalhar efetivamente com Desenho Geométrico na Educação Básica. Tão pouco, o conteúdo Lugares Geométricos tem sido abordado, com maior ênfase, no Ensino Básico, pois este conteúdo matemático não pertence ao currículo deste nível de ensino no Brasil.

No curso de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, no primeiro ano de graduação, pode-se ter um contato com a disciplina de Desenho Geométrico, quando são feitas as construções geométricas por meio de régua e compasso. Durante essas aulas, pode-se perceber a aproximação e conexão com estudo da Geometria Euclidiana, envolvendo e articulando muito mais elementos do que apenas certas propriedades e definições relacionadas a esta disciplina que, geralmente, são decoradas para a realização de vestibular.

Ultrapassando a utilização de régua e compasso, o uso do software *GeoGebra,* por meio de aparelhos celulares, proporciona um trabalho com Desenho Geométrico de maneira mais dinâmica e atrativa aos alunos, tendo em vista que régua e compasso são instrumentos pouco presentes no dia a dia, enquanto o telefone celular é um dos objetos mais usados pelos estudantes. Além disso, o manuseio planejado e correto, em sala de aula, de Tecnologias de Informação e Comunicação pode ser um agente motivador. Lembramos que o software *GeoGebra* pode ser facilmente instalado em um aparelho celular e utilizado para o ensino de Desenho Geométrico.

Nesse sentido, exponho a experiência vivenciada pelo autor desta monografia. Trabalhei como professor de Matemática em uma escola privada, atuando nas quatro séries do Ensino Fundamental – Anos Finais. A disciplina de Desenho Geométrico era oferecida nesta escola e eu a ministrei durante três anos. A escola adotava um material didático (apostila) para esta disciplina e a proposta apresentada neste material era somente a utilização de régua e compasso, porém incentivei a realização das construções geométricas por meio do aplicativo *GeoGebra,* instalado no telefone celular de cada aluno.

Foi notória a melhora no aprendizado de Geometria, sendo que os alunos se mostravam mais familiarizados com as figuras geométricas e seus elementos, pois em um primeiro momento, os alunos faziam as construções geométricas usando o *GeoGebra,* e em um segundo momento que se trabalhava as definições e propriedades das figuras. Desta forma os alunos conseguiram fixar os conceitos, desenvolver seu raciocínio geométrico, inclusive resolvendo problemas de lugares geométricos. A metodologia de ensino, empregada no Desenho Geométrico, despertou o interesse da maioria dos alunos, eles perceberam a conexão existente entre a teoria estudada na Geometria Euclidiana com as construções geométricas executadas no *GeoGebra*, resultando em diversos depoimentos positivos, tanto dos pais quanto dos alunos, frases como “a aula está mais legal”, “meu filho agora está gostando de Matemática” ou “professor, agora eu entendi” eram frequentes.

Considerando a possibilidade de utilizar ferramentas otimizadoras de ensino, bem como a capacidade de ajudar desenvolver o raciocínio dos alunos, visando, também, prepará-los para o Ensino Superior, para cursos que necessitem desses aprendizados é imprescindível trabalhar com Desenho Geométrico e lugares geométricos, utilizando softwares de Geometria dinâmica como o *GeoGebra*.

Com a finalidade de facilitar o entendimento por parte do leitor, a seguir faremos um breve resumo de cada capítulo deste trabalho.

No primeiro capítulo, em sua primeira seção abordamos a importância da Geometria no estudo da Matemática, com algumas contextualizações históricas para compreendermos os diferentes olhares sobre essa disciplina com o passar dos anos. Na segunda seção, exploramos o quanto o desenho é presente e relevante no nosso dia-dia, mas principalmente, o quanto o Desenho Geométrico é uma área do conhecimento importante para o trabalho da Geometria na sala de aula, apesar de não pertencer mais ao currículo do Ensino Básico. Na terceira seção, vimos o quanto as tecnologias de informação estão presentes no cotidiano das pessoas e por isso não deve ser ignorada no âmbito escolar, as TICs podem favorecer na construção do conhecimento. Na quarta seção, apresentamos um resumo da história dos Lugares Geométricos, passando por Platão, Fermat e chegando aos dias atuais,

No capítulo Lugares Geométricos, é apresentada uma lista de problemas de Lugares Geométricos, desde os mais elementares, que podem ser trabalhados no Ensino Básico, até Lugares Geométricos mais complexos que podem ser estudados inclusive no Ensino Superior. Nestes problemas estão presentes a resolução, o passo a passo da construção pelo software de geometria dinâmica *GeoGebra* e a demonstração.

Por fim, trazemos as Considerações Finais, refletindo sobre o trabalho desenvolvido e suas contribuições.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

No capítulo que se segue, vamos desenvolver todo corpo do trabalho. Nas seções que compõem este capítulo, iremos nos aprofundar em cada aspecto relevante para o trabalho da Geometria em sala de aula, com ênfase no Desenho Geométrico e Lugares Geométricos.

2.1 Geometria

Pela necessidade do Homem em compreender e descrever o seu meio, tanto físico quanto mental, é que as imagens representadas por meio de desenhos foram lentamente conceitualizadas até adquirirem um significado matemático e juntamente com a necessidade do homem de medir, comparar e resolver problemas práticos, a Geometria desenvolveu-se ao longo de séculos até culminar nos Elementos de Euclides, onde os conhecimentos matemáticos da época foram sistematizados. Ao leitor interessado no desenvolvimento histórico da Geometria recomendam-se as obras de Boyer (2012), Eves (2011) e Roque e Pitombeira (2012). De forma análoga, os estudantes desenvolvem seu pensamento geométrico, para depois se aprofundar em seus conceitos e propriedades, ou seja,

> O pensamento geométrico desenvolve-se inicialmente pela visualização: as crianças conhecem o espaço como algo que existe ao redor delas. As figuras geométricas são reconhecidas por suas formas, por sua aparência física, em sua totalidade, e não por suas partes ou propriedades. Por meio da observação e experimentação elas começam a discernir as características de uma figura, e a usar as propriedades para conceituar classes de formas. (PCN – Ensino Básico, livro 2, p. 82)

Por muito tempo a Geometria foi ensinada na sua forma dedutiva. Ainda assim, esta área da Matemática formava a base das Ciências Exatas, da Engenharia, da Arquitetura e do desenvolvimento tecnológico. A partir da metade do século passado, o chamado movimento da “Matemática Moderna” levou os matemáticos a desprezarem a abrangência conceitual e filosófica da Geometria Euclidiana. Podemos notar esse fato, quando Lorenzato (1995, p.4) diz que:

> O movimento da Matemática Moderna também tem sua parcela de contribuição no atual caos do ensino da Geometria: antes de sua chegada ao Brasil, nosso ensino geométrico era marcantemente lógico-dedutivo, com demonstrações, e nossos alunos o detestavam. A proposta da Matemática Moderna de algebrizar a Geometria não vingou no Brasil, mas conseguiu eliminar o modelo anterior, criando

> assim uma lacuna nas nossas práticas pedagógicas, que perdura até hoje.

A partir dos anos de 1970, iniciou-se, em todo o mundo, um movimento a favor do resgate do ensino da Geometria, visando ampliar sua participação na formação integral do educando. Segundo Kaleff (1994), dentre os objetivos a serem alcançados foram priorizados os seguintes:

- Induzir no aluno o entendimento de aspectos espaciais do mundo físico e desenvolver sua intuição e seu raciocínio espaciais;
- Desenvolver no aluno a capacidade de ler e interpretar argumentos matemáticos, utilizando a Geometria como meio para representar conceitos e as relações Matemáticas;
- Proporcionar ao aluno meios de estabelecer o conhecimento necessário para auxiliá-lo no estudo de outros ramos da Matemática e de outras disciplinas, visando uma interdisciplinaridade dinâmica e efetiva;
- Desenvolver no aluno habilidades que favoreçam a construção do seu pensamento lógico, preparando-o para os estudos mais avançados em outros níveis de escolaridade.

Dessa forma podemos notar que a Geometria não deve ser trabalhada de forma mecânica e repetitiva, assim como reforça a BNCC,

> […] a Geometria não pode ficar reduzida a mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas sobre relações de proporcionalidade em situações relativas a feixes de retas paralelas cortadas por retas secantes ou do teorema de Pitágoras. (BRASIL, 2018, p 272)

Assim como o ensino da Matemática em geral, a Geometria deve ajudar a desenvolver o imaginário do aluno, ajudando-o a compreender e interpretar o mundo que está ao seu redor, isto é,

> No Ensino Fundamental, essa área, por meio da articulação de seus diversos campos – Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade –, precisa garantir que os alunos relacionem observações empíricas do mundo real a representações (tabelas, figuras e esquemas) e associem essas representações a uma atividade matemática (conceitos e propriedades), fazendo induções e conjecturas. (BRASIL, 2018, p 265)

Sem estudar Geometria as pessoas não desenvolvem o pensar geométrico ou o raciocínio visual e, sem essa habilidade, elas dificilmente conseguirão resolver as situações de vida que forem geometrizadas. Segundo Lorenzato (1995) sem conhecer Geometria, a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das ideias fica reduzida e a visão da Matemática torna-se distorcida. Nesta mesma perspectiva, os PCN expressam que,

> A Geometria é um campo fértil para se trabalhar com situações-

> problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula a criança a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades e vice-versa. (PCN – Ensino Básico, livro 2, p. 39)

Aproveitando esse interesse natural dos alunos pela Geometria deve-se estimular a sua imaginação para entender as relações entre as diferentes formas no espaço e assim possibilitar uma melhor compreensão do objeto de estudo. Nesse sentido,

> A **Geometria** envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, nessa unidade temática, estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes. (BRASIL, 2018, p. 271, grifo do autor)

Nesta seção, por meio de consultas a trabalhos acadêmicos e aos documentos oficiais, destacamos a relevância do estudo da Geometria e da importância deste conhecimento para a formação integral dos estudantes.

2.2 DESENHO GEOMÉTRICO

O desenho é a forma de manifestação artística mais antiga do homem, por meio de gravuras nas paredes das cavernas ele se expressou com desenhos que representavam o seu cotidiano ou informações que julgava ser importante, deixando indicadores importantes para os pesquisadores modernos estudarem nossos ancestrais. O desenho representa um avanço na cognição humana, pois ilustra figuras semelhantes à formas do dia-dia e conservar padrões e relações exige uma grande abstração.

Os desenhos são encontrados em abundância ao nosso redor, de acordo com Jorge (2002) a linguagem gráfica é universal, pois independentemente do idioma, ela proporciona compreensão imediata e interpretação exata dos símbolos usados. Por exemplo, um técnico brasileiro pode construir fielmente algo projetado por um técnico chinês. Da mesma forma, uma pessoa pode ir a qualquer lugar orientando-se apenas por mapas e símbolos visuais. Atualmente constatamos a onipresença dos “emojis” na comunicação via redes sociais, uma vez que os “emojis” representam ideias, sentimentos e até mesmo uma frase completa por meio de um único símbolo.

Dada a importância do desenho para a sociedade, podemos concluir também a sua notoriedade no aprendizado da Geometria. As construções com régua e compasso são fundamentais para a Matemática desde o século V a.C., época dos pitagóricos que tiveram enorme importância no desenvolvimento da Matemática grega. Foram eles que deram um molde dedutivo à Matemática. A obra Elementos de Euclides (323 - 285 a.C.) possui um valor inestimado, nesse livro a Geometria é tratada de forma bem elaborada e é na Grécia também que se inicia o conceito de Desenho Geométrico, para eles não existia diferenciação entre Geometria e Desenho Geométrico.

O Desenho Geométrico tem sido entendido como forma de concretizar os conhecimentos teóricos da Geometria na forma gráfica. O Desenho Geométrico possui a capacidade de promover o entendimento de outros conhecimentos, em vários campos da atividade humana. Essa disciplina também ajuda a desenvolver o raciocínio logico, a organização e criatividade.

Tendo em vista a relevância do Desenho Geométrico para o estudo da Geometria, podemos imaginar que seu estudo faz parte das aulas de Matemática no Brasil, mas a realidade nos mostra algo bem diferente. Em 1971, com a promulgação da *Lei 5692 de diretrizes e base da educação nacional* (BRASIL, 1971), o ensino desse campo de estudo foi excluído do currículo escolar brasileiro, assim como apontado por Alves (2017). Isso ocasionou a exclusão do Desenho Geométrico dos vestibulares de Arquitetura e Engenharia, tornando assim, uma disciplina praticamente abandonada na matriz curricular do Ensino Fundamental e Médio.

Atualmente, o Desenho Geométrico é considerado uma disciplina independente, sendo que poucas escolas, em nível da Educação Básica, mantêm esse campo do conhecimento em sua matriz, consequentemente os professores não recebem uma formação adequada em Desenho Geométrico. Isso criou uma lacuna na formação dos alunos, de acordo com Oliveira (2005), ao observar as dificuldades encontradas pelos alunos de Engenharia Civil e Elétrica, Matemática, Arquitetura e Artes. Ele lembra que a maioria dos alunos não foi estimulado suficientemente para trabalhar com a visão espacial, por isso existe uma dificuldade em aprender a disciplina. De acordo com Kalter (apud OLIVEIRA, 2005, p. 4) “o ensino do desenho é essencial para que não haja o bloqueio das capacidades de planejar, projetar ou abstrair, estabelecendo assim uma relação contínua entre a percepção visual e o raciocínio espacial".

Na Arquitetura, o Desenho Geométrico é capaz de desenvolver o que Howard Gardner chama de "inteligência espacial"

> Centrais à inteligência espacial estão as capacidades de perceber o mundo visual com precisão, efetuar transformações e modificações sobre as percepções iniciais e ser capaz de recriar aspectos da experiência visual, mesmo na ausência de estímulos físicos relevantes. Pode-se ser solicitado a produzir formas ou simplesmente manipular as que foram fornecidas. (GARDNER, 1994)

Neste capítulo com base em pesquisas bibliográficas, podemos observar que o desenho é fundamental para humanidade bem como para o estudo e ensino da geometria e Matemática como um todo.

2.3 TECNOLOGIAS DE INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO (TICS)

Com o desenvolvimento das tecnologias é inevitável o uso de softwares de geometria dinâmica no ensino de Geometria, com isso a Matemática se aproxima do cotidiano do aluno. Nesse sentido,

> [...] a BNCC orienta-se pelo pressuposto de que a aprendizagem em Matemática está intrinsecamente relacionada à compreensão, ou seja, à apreensão de significados dos objetos matemáticos, sem deixar de lado suas aplicações. Os significados desses objetos resultam das conexões que os alunos estabelecem entre eles e os demais componentes, entre eles e seu cotidiano e entre os diferentes temas matemáticos. Desse modo, recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas. (BRASIL, 2018, p 276)

O uso das tecnologias digitais na contemporaneidade exige uma nova realidade de conhecimento, indiscutivelmente necessária para a educação do século XXI, pois ela se encontra em todo o âmbito da Matemática, por exemplo, nas transformações no plano, geometria isométrica, ângulos, paralelismos. Essas

> Atividades investigativas com softwares dinâmicos que inter-relacionem movimento e posição podem também promover o desenvolvimento dessas ideias, importantes em cartografia e na movimentação diária do cidadão comum. Por vivermos em um mundo conectado com celulares às mãos, aparelhos de geolocalização, TVs a cabo, câmeras de vigilância etc., o estudo do movimento e posição tem muitas finalidades em diversas áreas (BRASIL, 2018, p 521)

Ainda nesse sentido, o uso desse recurso deve ser feito com responsabilidade, pois o objetivo é contribuir com o processo de ensino e aprendizagem e não apenas tornar a aula mais “divertida”, como salienta o PCN:

> Recursos didáticos como jogos, livros, vídeos, calculadoras, computadores e outros materiais têm um papel importante no processo de ensino e aprendizagem. Contudo, eles precisam estar integrados a situações que levem ao exercício da análise e da reflexão, em última instância, a base da atividade matemática. (PCN – Ensino Básico, livro 2, p. 19)

Dentre os softwares de geometria dinâmica, pode-se citar o *GeoGebra*, nele é possível construir figuras, encontrar lugares geométricos e trabalhar com o plano cartesiano, fazendo-se útil na Geometria Analítica. Por meio dele é possível abordar aspectos relevantes da Geometria. Quanto aos softwares educacionais

> [...] é fundamental que o professor aprenda a escolhê-los em função dos objetivos que pretende atingir e de sua própria concepção de conhecimento e de aprendizagem, distinguindo os que se prestam mais a um trabalho dirigido para testar conhecimentos dos que procuram levar o aluno a interagir com o programa de forma a construir conhecimento. (PCN – Ensino Básico, livro 2, p. 35)

Esta sessão, orientada pelos documentos norteadores do Ensino Básico (BNCC e PCN), discutimos a importância do uso de novas tecnologias na sala de aula, desde que seja planejado e alinhado com a proposta da aula.

2.4 HISTÓRIA DO LUGAR GEOMÉTRICO

Inicialmente lembramos que lugar geométrico é um conjunto de pontos, do plano ou do espaço, que deve estar bem definido. Se um ponto P possuir uma característica ∟, pode-se imaginar o conjunto formado por todos os pontos P que podem assumir a propriedade ∟. Deste modo, o conjunto de pontos que possuem a propriedade ∟ é o *lugar geométrico* da propriedade ∟. Neste trabalho, serão abordados somente lugares geométricos no plano.

É difícil precisar exatamente o início dos estudos a respeito de lugares geométricos. Segundo Netto (1957), a teoria dos lugares geométricos é atribuída a Platão (430 – 347 A. C), mas ela foi desenvolvida e estudada de forma mais concisa por Euclides em seu livro Elementos. Segundo Braviano (2017) sabemos que Euclides abordou lugares geométricos e cônicos, mas usando conhecimentos de outros estudiosos anteriores a ele, como Platão e Aristóteles. Em edições mais recentes dos Elementos, podemos extrair informações de autores posteriores a Euclides, como Pappus e Proclus, já que os Elementos sofreram diversas reedições, e em diversas línguas.

Após o estudo dos gregos, a geometria passou por uma lacuna histórica durante a Idade Média, voltando a ser desenvolvida no século XVI. Nesse contexto:

> [...] em 1588, da *Coleção Matemática* de Pappus, ressurgiu o interesse pelas construções dos gregos, chamadas de *problemas de lugares geométricos*. Tais construções foram classificadas, pelo próprio Pappus, como: problemas planos (construídos com régua e compasso), problemas sólidos (construídos por meio de cônicas) e problemas lineares (construídos usando curvas mais gerais). (BRAVIANO, 2017, p. 37-38, grifo do autor)

Por muito tempo o estudo de lugares geométricos se limitou a construções com régua e compasso, mas no século XVII o estudo sobre os lugares geométricos ganhou nova forma, agora com o uso de equações. Em seu livro, intitulado *Lugares geométricos planos*, Netto (1957) explica que equações de um lugar geométrico é a equação em que as variáveis são as coordenadas dos pontos que descreve o lugar geométrico e exprime a condição necessária e suficiente para que o ponto pertença ao lugar. Esse estudo se desenvolveu principalmente pelos matemáticos Fermat e Descartes, em que, eles buscaram relacionar o lugar geométrico com demonstrações algébricas.

> Foi em 1637 que Fermat anunciou seu trabalho *Introdução aos Lugares Geométricos Planos e Sólidos*, ao mesmo tempo em que surgiram as provas do livro *Discurso do Método* de Descartes, contendo *A Geometria*. Ambos haviam estabelecido, nesses textos, técnicas semelhantes para tratar problemas de lugares geométricos de modo algébrico. Em seguida, Fermat passou a estudar as equações de segundo grau. Para cada caso, tratou de mostrar que o lugar geométrico dos pontos que satisfazem a equação é um círculo ou uma cônica. (BRAVIANO, 2017, p. 40, grifo do autor)

Deste modo, a Geometria analítica como conhecemos atualmente, consiste em duas associações recíprocas: (i) dado um lugar geométrico, encontrar a equação que seus pontos satisfazem; e (ii) dada uma equação, encontrar o lugar geométrico dos pontos que a satisfazem. Segundo Braviano (2017), Descartes estudou o problema de acordo com a primeira associação, mas Fermat foi pioneiro em estudar o problema através da segunda. Braviano afirma também que Descartes defendia que não haveria razão para excluir curvas construídas por outras máquinas tão acuradas quanto a régua e o compasso, e hoje podemos perceber que ele estava certo. Estamos em uma época em que os computadores possibilitam a construção de figuras por meio de traçados muito mais complexos se comparados àqueles feitos à mão. E os lugares geométricos, com o avanço da informática, também receberam atenção especial.

Até recentemente a forma de se trabalhar com lugares geométricos se dava com uma sequência de traçados pré-estabelecidos, em que o estudante deveria segui-los para obter a resolução gráfica. Isso fazia com que a resolução do problema fosse obtida de forma mecânica e apresentasse poucos desafios. Como conta Braviano (2017) em seu trabalho

> Até a década de 1960 (e em alguns livros atuais também), a forma tradicional de apresentar o conteúdo nas obras didáticas se dava pelo enunciado de um problema seguido de uma série de passos que levavam à sua resolução geométrica [...]. Apesar de levar em conta as relações geométricas entre os elementos que constituem o problema, esta forma de apresentar o conteúdo não prioriza que o aluno se posicione proativamente frente à situação dada, apenas o situa como reprodutor de uma ‘receita’ fornecida passo a passo. (p.38)

Com o auxílio de softwares de geometria dinâmica o trabalho com lugares geométricos se expandiu para construções e abstrações mais complexas, pois agora o aluno não precisa atentar aos detalhes da construção e sim a figura como um todo, segundo Braviano (2017). Agora pode-se obter a visualização da trajetória de um ponto que se movimenta a partir da modificação de elementos previamente construídos. Fica evidente, então o papel das ferramentas de rastro nos softwares. Assim a resolução de problemas gráficos, se distancia de forma significativa da época em que os alunos reproduziam meramente construções passo a passo, conforme receitas apresentadas em um livro didático. Observação essa feita também por Araujo (2011, p. 82):

> O uso dos instrumentos euclidianos na elaboração de construções geométricas via papel e lápis sofre muitos empecilhos quando comparado às construções feitas fazendo uso de um software de Geometria Dinâmica. Gravina (1996) afirma que um dos fatores desfavoráveis quanto ao uso do primeiro meio é a impossibilidade de variarmos a posição da figura. Não existe assim, formas viáveis de fazer novas conjecturas. No caso de construções envolvendo lugares geométricos, este fator se torna preponderante, pois muitas vezes a construção será feita usando uma nêusis como no caso da trissecção de um ângulo usando a conchóide de Nicomedes. O ajuste da figura será feito de forma bem mais fácil, usando o ambiente de Geometria Dinâmica.

Dessa forma podemos concluir que o estudo de lugares geométricos se fez presente no desenvolvimento histórico da geometria, sendo objeto de estudo de diversos matemáticos e auxiliando o professor na construção do conhecimento de seus alunos. Atualmente com o avanço da tecnologia e a possibilidade de se utilizar softwares de geometria dinâmica para a resolução gráfica de problemas, os lugares geométricos se mostram ainda mais interessantes para ser trabalhados em sala de aula.

3 LUGARES GEOMÉTRICOS

Neste capítulo está o núcleo deste trabalho. Nele é proposto uma série de problemas sobre lugares geométricos, com o passo a passo da resolução, que pode ser feita utilizando régua e compasso ou o software de geometria dinâmica *GeoGebra*. Seguem também neste capítulo, demonstrações acerca dos lugares geométricos mais relevantes, como por exemplo; bissetriz, arco capaz, retas paralelas etc. Os problemas abrangem vários conteúdos da Geometria e apresentam níveis de dificuldades diferentes, dessa forma podem ser aplicados desde o Ensino Fundamental – Anos Finais, passando pelo Ensino Médio e até mesmo em cursos do Ensino Superior como Matemática, Engenharia Civil e Arquitetura.

No que se segue adotaremos as seguintes notações:

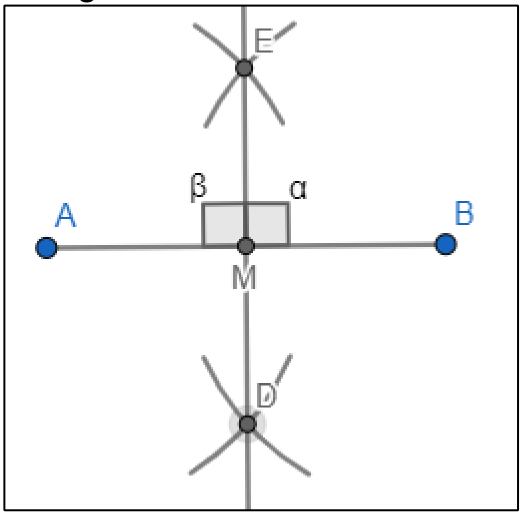
- AB: segmento de reta com extremos A e B.
- $\overline{AB}$: medida do segmento de reta com extremos A e B.
- $\overrightarrow{AB}$: semirreta de origem A passando pelo ponto B.
- $\overleftrightarrow{AB}$: reta determinada pelos pontos A e B.
- $A\hat{B}C$: ângulo de vértice B com lados passando pelos pontos A e C.

1. A mediatriz do segmento AB é o lugar geométrico dos pontos que equidistam de A e de B.

Construção:

i. Dado o segmento AB, ponta seca em A, abertura maior que a metade do comprimento do segmento $\overline{AB}$, traçam-se dois arcos, inferior e superior ao segmento dado.
ii. Ponta seca em B, mesma abertura, repetir o procedimento.
iii. Os pontos E e D (intercessão dos arcos superior e inferior, respectivamente) definem a mediatriz.

Figura 1: Mediatriz



Fonte: O autor

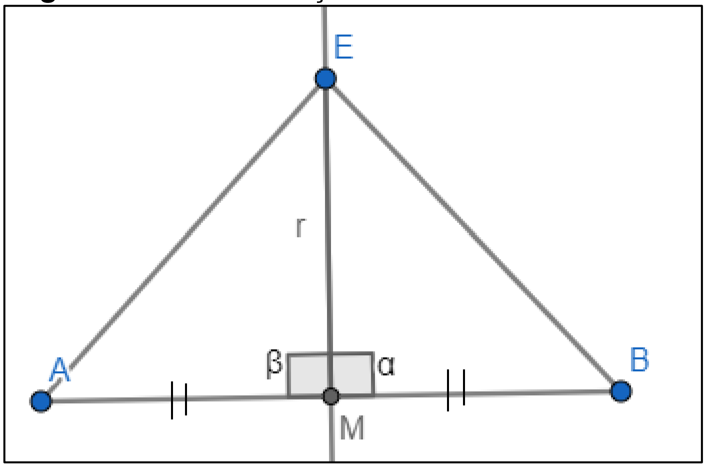
A mediatriz foi apresentada na figura 1 em termos de um lugar geométrico, entretanto a mediatriz também é definida como segue:

Definição: Mediatriz é a reta perpendicular a um segmento de reta que passa pelo seu ponto médio.

A seguir apresentamos a demonstração de que pontos da mediatriz do segmento AB são equidistantes de A e B e reciprocamente.

Demonstração:

Figura 2: Demonstração da mediatriz



Fonte: O autor

1ª parte: Todo ponto da mediatriz de AB é equidistante de A e B.

Seja E um ponto qualquer pertencente à mediatriz de AB. Nos triângulos EAM

e EBM temos $\overline{AM} = \overline{BM}$ (M é ponto médio), $\alpha = \beta$ (ambos são retos) e EM é lado comum. Portanto, o triângulo AEM é congruente ao triângulo BEM por LAL, logo, lados e ângulos correspondentes são congruentes, ou seja, $\overline{EA} = \overline{EB}$, portanto E é equidistante de A e B.

2ª parte: Todo ponto equidistante de A e B pertence à mediatriz de AB.

Seja E um ponto equidistante de A e B. Traçamos a reta r perpendicular a AB passando por E, vamos provar que r é a mediatriz de AB isto é, que r passa pelo ponto médio de AB.

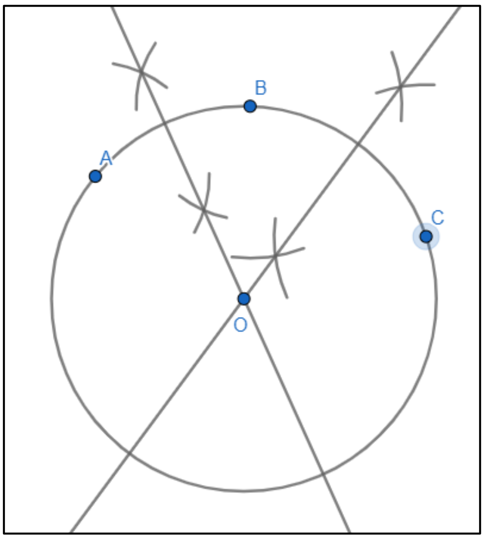
Seja M o ponto de interseção de r e AB. Como EM é a altura relativa à base de AB do triângulo isósceles EAB, então EM também é mediana, isto é, M é o ponto médio de AB. Logo E pertence à mediatriz de AB.

2. Qual é o lugar geométrico dos pontos equidistantes de três pontos A, B e C, não colineares?

Construção:

i. Traçar os segmentos AB e BC
ii. Construir a mediatriz dos segmentos AB e BC
iii. O ponto O é o encontro das mediatrizes e, portanto, equidistante de A, B e C.

Figura 3: Centro de uma circunferência



Fonte: O autor

Logo o ponto O é o centro da circunferência que contêm os pontos A, B e C não colineares.

Podemos fazer três observações importantes nesta atividade

i. O lugar geométrico pode ser apenas um ponto.

ii. Nesta atividade utiliza-se um lugar geométrico (mediatriz) para encontrar outro, a atividade pode ser aplicada para verificar se os alunos compreenderam todos os conceitos envolvidos na reta mediatriz.

iii. Uma consequência desta atividade é o fato de que qualquer triângulo pode ser inscrito em uma circunferência.

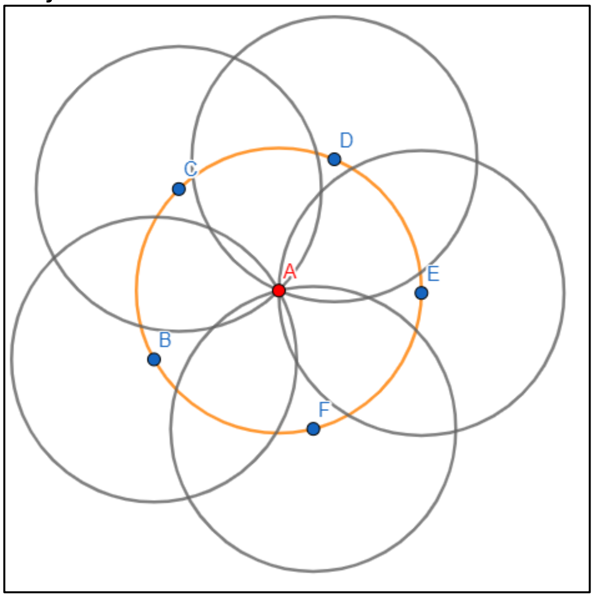
3. Descreva o lugar geométrico do conjunto de centros de circunferências de raio r, que passam por um ponto fixo A.

Construção:

i. Dado o ponto A, marcar os pontos B, C, D, E e F que distam r de A.

ii. Construir circunferências de raio r com centros nos pontos B, C, D, E e F.

Figura 4: Conjunto de centros das circunferências



Fonte: O autor

Podemos notar que o lugar geométrico dos centros é uma circunferência de centro A e raio r, uma vez que a distância dos centros ao ponto A é constante e igual a r.

4. Determine o lugar geométrico dos pontos que distam $a\ cm$ do círculo de raio igual a $b\ cm$ (considere os casos $a = b, a < b$ e $a > b$).

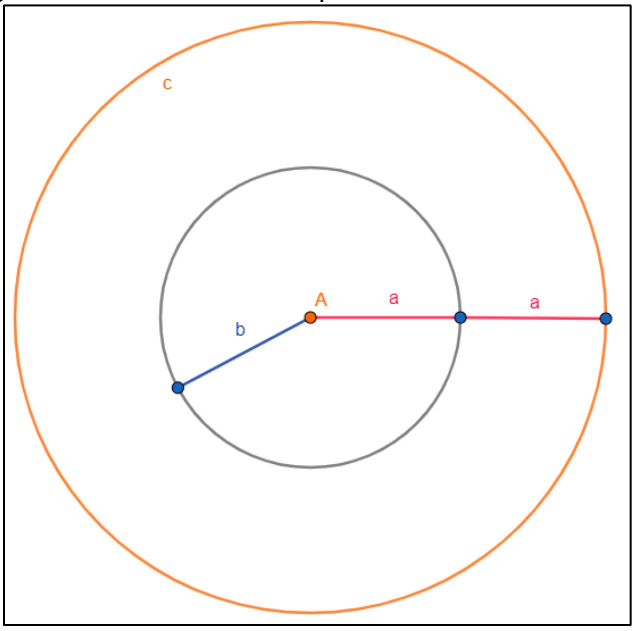
Seja A um ponto arbitrário

- Para $a = b$

Construção:

i. Construir uma circunferência com raio b e centro em A
ii. Construir uma circunferência com raio $a + b$ e centro em A

Figura 5: Circunferência para $a = b$



Fonte: O autor

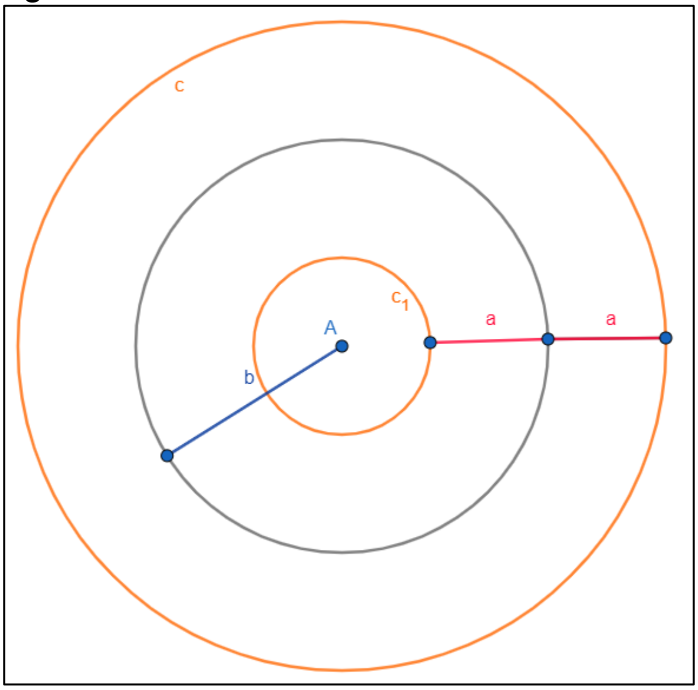
Nesse caso o lugar geométrico será a circunferência c com raio $2a$ ou $a + b$ e o centro A

- Para $a < b$

Construção:

i. Construir uma circunferência de raio b e centro em A
ii. Construir uma circunferência de raio $b - a$ e de $a + b$, ambas com centro em A

Figura 6: Circunferência de $a < b$



Fonte: O autor

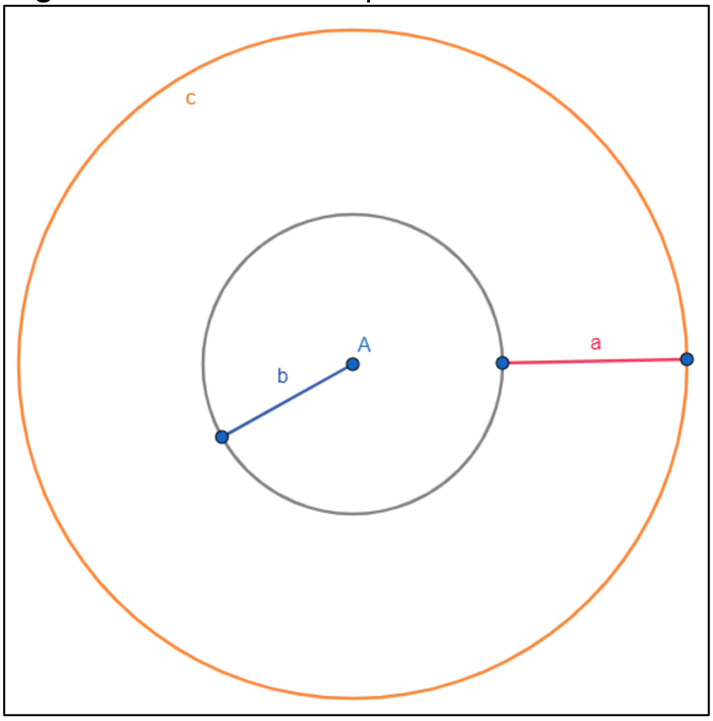
Nesse caso o lugar geométrico será duas circunferências c e c_1 com raios $b + a$ e $b - a$.

- Para $a > b$

<u>Construção:</u>

i. Construir uma circunferência de raio b e centro em A
ii. Construir uma circunferência de raio a + b e centro em A

Figura 7: Circunferência para $a > b$



Fonte: O autor

Neste caso o lugar geométrico é uma circunferência de raio $a + b$.

Observação: Neste exercício podemos notar que o lugar geométrico nem sempre é apenas uma figura, ele pode ser também duas figuras iguais ou duas figuras diferentes.

5. Descreva o lugar geométrico dos centros das circunferências tangentes à duas circunferências concêntricas c_1 e c_2 de raio r_1 e r_2, respectivamente.

Construção:

i. Construir duas circunferências concêntricas c_1 e c_2 de raio r_1 e r_2, respectivamente.

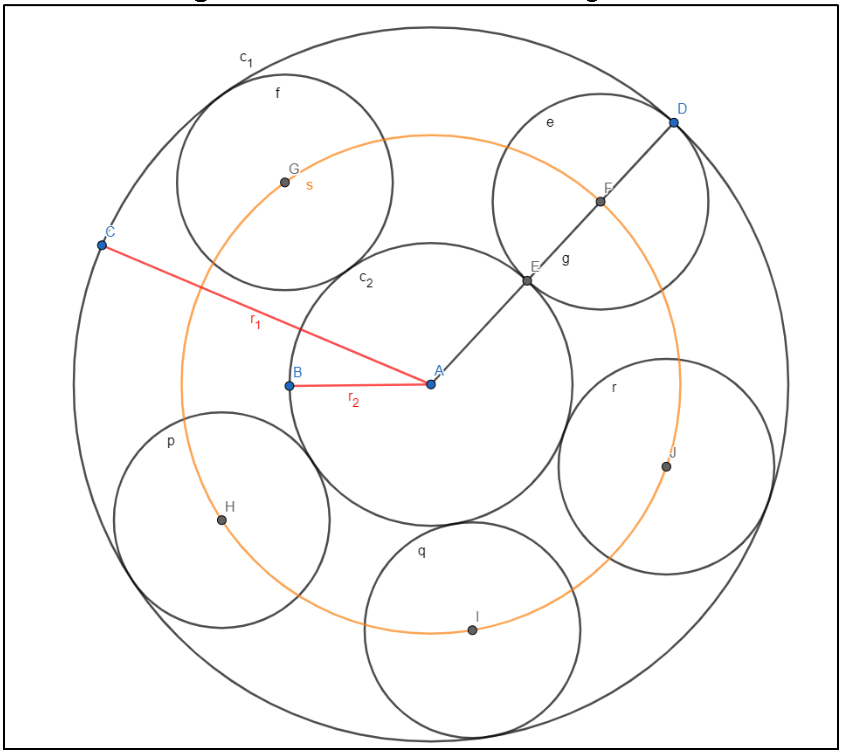
ii. Construir um segmento AD unindo o centro das circunferências a um ponto D qualquer da circunferência c_1 e assim determinar o ponto E de intercecção entre o segmento AD e a circunferência c_2.

iii. Determinar o ponto médio F do segmento ED e encontrando assim o centro de uma circunferência tangente a c_1 e c_2.

iv. Repetir o processo sobre outros pontos da circunferência c_1 e encontrar os pontos G, H, I e J (centros das circunferências tangentes).

Podemos notar que os centros formam uma circunferência concêntrica as circunferências c_1 e c_2.

Figura 8: Circunferências tangentes



Fonte: O autor

Para determinar o raio r da circunferência (lugar geométrico), podemos efetuar o seguinte cálculo

$$r = \frac{r_1 - r_2}{2}.$$

6. A bissetriz de um ângulo é o lugar geométrico dos pontos que equidistam das semirretas $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OA}$

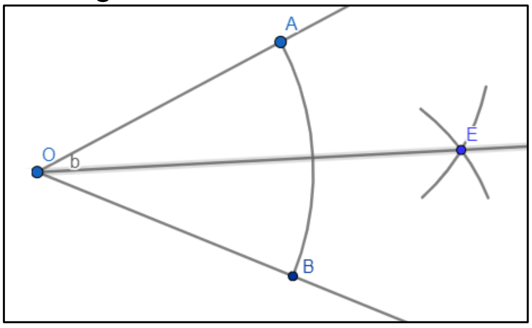
Construção:

i. A partir de um ângulo dado, ponta seca do compasso em O, abertura qualquer determinando os pontos A e B, equidistantes do vértice O.

ii. Ponta seca em A e, posteriormente em B, com mesma abertura determina-se o ponto E.

iii. A semirreta $\overrightarrow{OE}$ é a bissetriz do ângulo dado.

Figura 9: Bissetriz

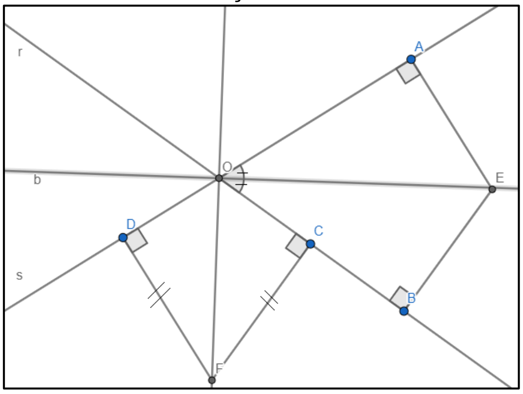


Fonte: O autor

Demonstração:

Sejam r e s retas concorrentes no ponto O, b a bissetriz do ângulo formado por r e s.

Figura 10: Demonstração da bissetriz



Fonte: O autor

1ª parte: Todo ponto da bissetriz b equidista dos lados do ângulo $A\hat{O}B$

Seja E um ponto que pertence à reta b, ou seja, $E \in b$.

Como as distâncias do ponto E aos lados do ângulo são medidas segundo segmentos, com um extremo em $E,$ perpendiculares aos lados do ângulo $A\hat{O}B$, então $\overline{EA}$ = $dist(E,r)$ e $\overline{EB}$ = $dist\ (E,s)$

Nos triângulos EOB e EOA, OE é lado comum, $E\hat{O}A$ = $E\hat{O}B$ (pois E pertence à bissetriz) e $O\hat{B}E$ = $O\hat{A}E$ = $90°$. Assim, pelo caso de congruência $LAAo$, os triângulos EOA e EOB são congruentes. Logo $\overline{EA} = \overline{EB}$ ou seja, E equidista de r e s.

2ª parte: Todo ponto que é equidistante dos lados de um ângulo pertence à *b.*

Considere um ponto F equidistante de r e s, e a semirreta $\overrightarrow{OF}$. Provaremos que $\overrightarrow{OF}$ é a bissetriz do ângulo formado pelas retas

Como F é equidistante de r e s, teremos dist(F,r) = dist(F,s). Considere dist(F,r) = $\overline{FC}$ e dist(F,s) = $\overline{FD}$. Assim temos que $\overline{FC}$ = $\overline{FD}$

Nos triângulos FOC e FOD, temos OF é lado comum, $\overline{FC}$ = $\overline{FD}$ (hipótese) $e\ F\hat{C}O\ =\ F\widehat{D}O\ =\ 90°$.

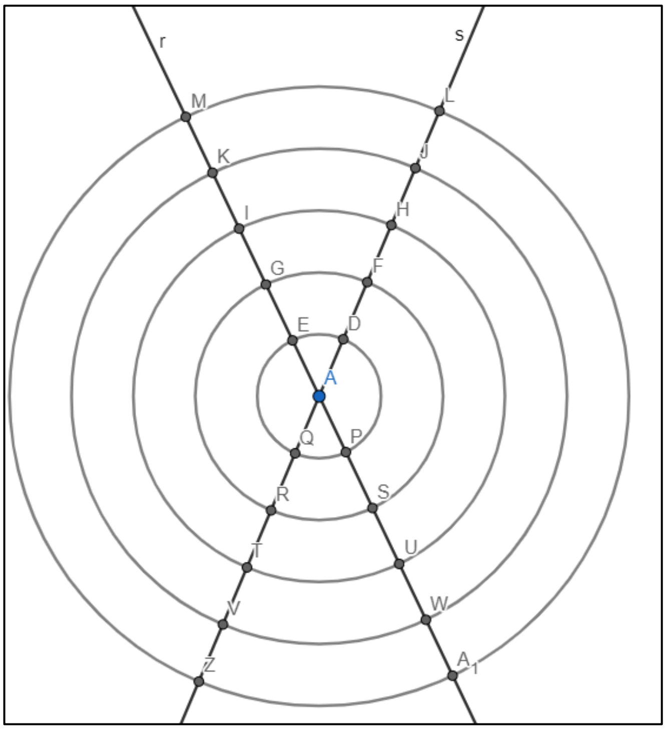
Assim, pelo caso especial hipotenusa/cateto de congruência de triângulos retângulos, concluímos que $F\hat{O}C$ = $F\hat{O}D$ são congruentes. Logo $\overrightarrow{FO}$ é bissetriz.

7. Descreva o lugar geométrico dos centros das circunferências tangentes à duas retas concorrentes r e s.

<u>Construção</u>:

i. Dado o ponto A, intercessão entre as retas r e s, construir circunferências de raios diferentes com centro em A, para encontrar pares de pontos equidistantes de A.

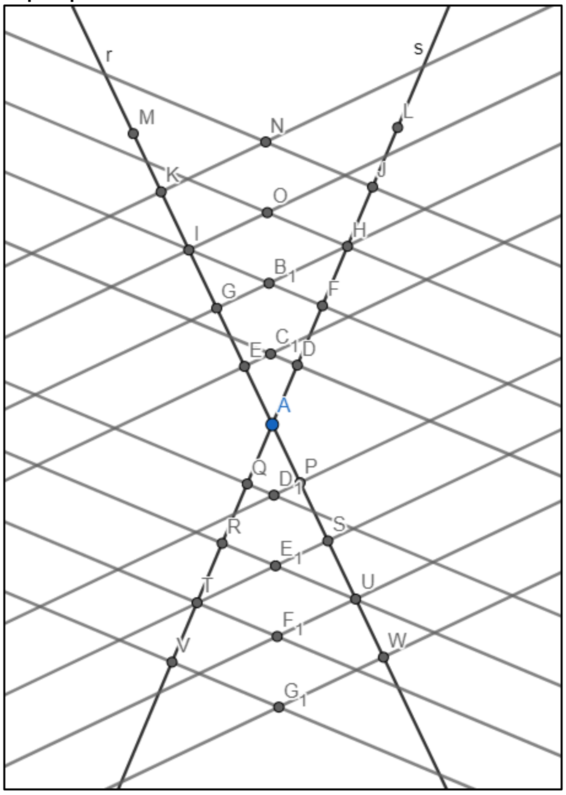
Figura 11: Circunferências com centro em A



Fonte: O autor

ii. Sobre os pares de pontos equidistantes de A, construir retas perpendiculares à r e s. A interseção destas perpendiculares são os centros das circunferências tangentes.

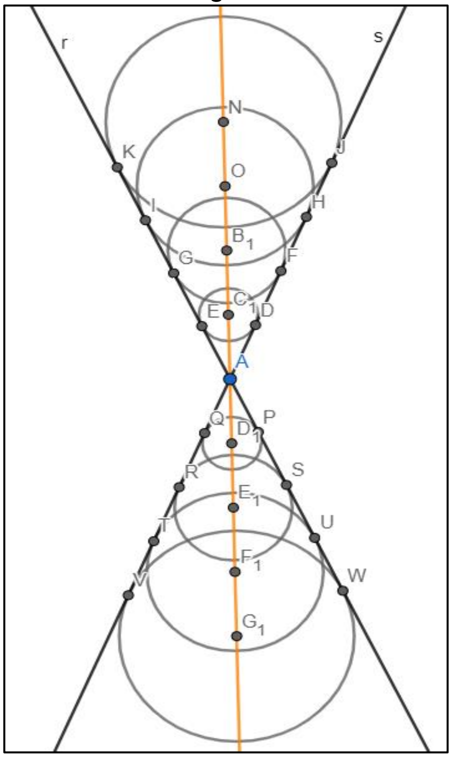
Figura 12: Retas perpendiculares a duas retas concorrentes



Fonte: O autor

Podemos construir as circunferências e estas são de fato tangentes às retas r e s, pois o raio que une o centro ao ponto de tangência é perpendicular às retas r e s.

Figura 13: Circunferências tangentes a duas retas concorrentes



Fonte: O autor

Logo, o lugar geométrico dos centros das circunferências é uma reta que contém o ponto A. Podemos afirmar também que este lugar geométrico é a bissetriz das retas r e s, pois todos os centros são equidistantes delas, sendo essa distância o raio de cada circunferência.

8. Retas paralelas é o lugar geométrico dos pontos equidistantes de uma reta dada.

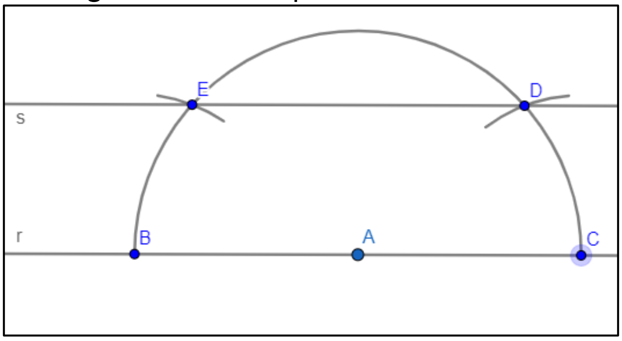
<u>Construção:</u>

Dada a reta r, vamos construir a reta s paralela a reta r.

i. Com a ponta seca sobre o ponto A e com abertura qualquer do compasso fazer um arco que intercepte a reta r em dois pontos B e C
ii. Com a ponta seca sobre o ponto B e abertura qualquer do compasso fazer um arco que intercepte o arco construído no item anterior no ponto E, repetir este processo sobre o ponto C gerando o ponto D.
iii. Construir a reta s que passe por E e D

A reta s é paralela à reta r

Figura 14: Retas paralelas



Fonte: O autor

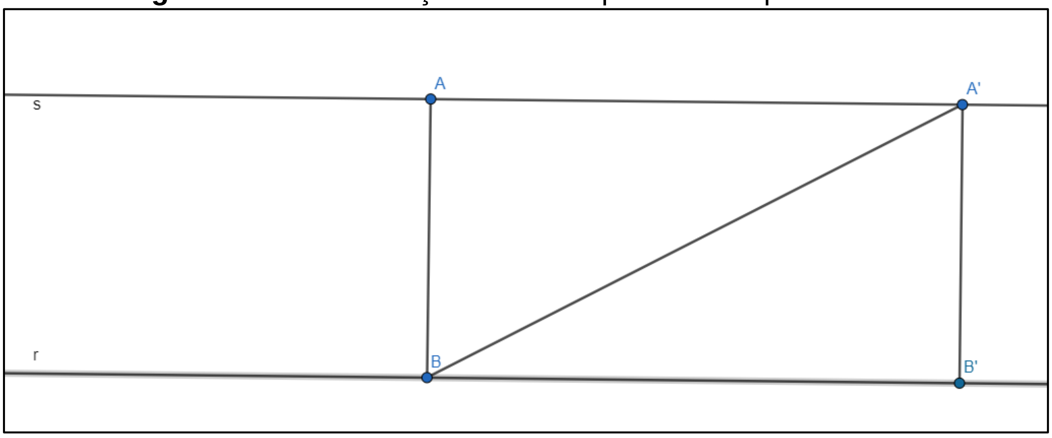
Demonstração:

1ª parte: Se s e r são paralelas, então todos os pontos de s estão à mesma distância de r.

Sejam s e r retas paralelas. Sobre s, tome dois pontos A e A', e a partir destes pontos baixe perpendiculares à reta r. Sejam B e B' respectivamente os pés destas perpendiculares. Devemos provar que $\overline{AB} = \overline{A'B'}$.

Para isto, trace $A'B$ como indicado na Figura 15.

Figura 15: Demonstração das retas paralelas 1ª parte



Fonte: O autor

Observe que $A\widehat{A'}B = A'\hat{B}B'$ e que $A'\hat{A}B = 90°$. Isto é uma decorrência de que s e r são paralelas e de que $A'B$ e AB são transversais. Portanto, os triângulos $AA'B$ e $B'BA'$ são triângulos retângulos com um ângulo agudo e hipotenusa (comum) congruentes. Pelo caso de congruência LAA_o que eles são congruentes. A congruência é a que leva A em B', A' em B e B em A'. Logo, $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, como queríamos demonstrar.

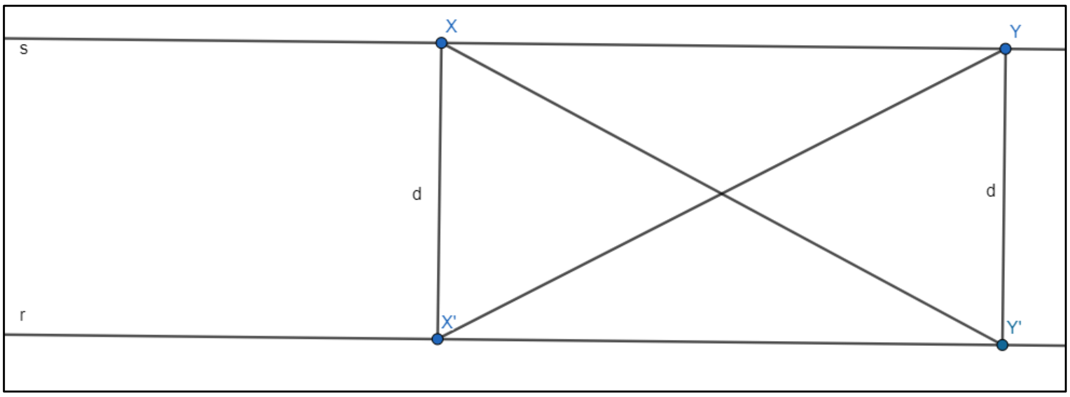
2ª parte: Todos os pontos que distam d da reta r pertencem à s.

Sobre a reta s considere os pontos X e Y. Baixar retas perpendiculares à reta

s passando por X e Y com distância d e encontrando os pontos X' e Y', respectivamente. Devemos provar que os segmentos XY e $X'Y'$ são paralelos e, portanto, $X'Y'$ pertence a reta r.

Para isso vamos traçar o segmento YX' e XY' como na Figura 16

Figura 16: Demonstração das retas paralelas 2ª parte



Fonte: O autor

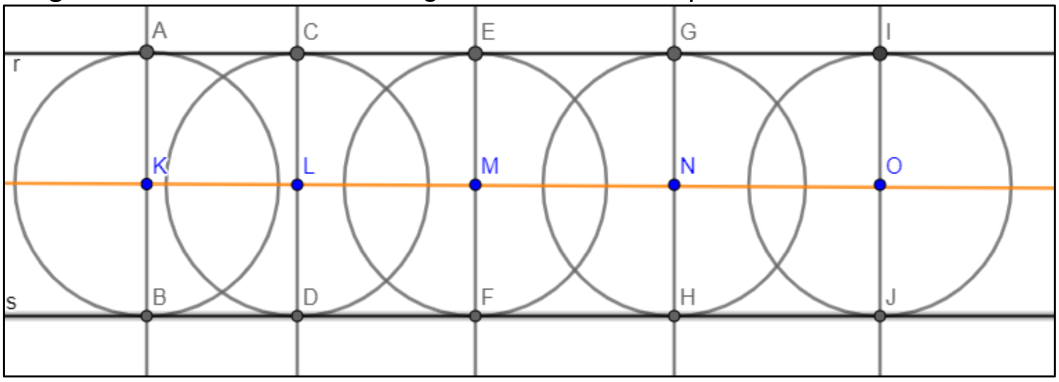
Observe que os triângulos $XX'Y$ e $YY'X$ são retângulos pois os segmentos XX' e YY' são perpendiculares à reta s. Além disso podemos notar que $\overline{XX'} = \overline{YY'} = d$ e que XY é lado comum aos dois triângulos. Logo podemos concluir pelo caso de congruência LAL que os triângulos $XX'Y$ e $YY'X$ são congruentes e portanto os segmentos $\overline{XY'}$ e $\overline{YX'}$ possuem a mesma medida. Como XY' e YX' são diagonais de um quadrilátero, podemos concluir que esse quadrilátero é um retângulo, ou seja, os segmentos XY e $X'Y'$ são paralelos e portanto, os pontos X' e Y' pertencem à reta r, como queríamos demonstrar.

9. Qual é o lugar geométrico dos centros de circunferências tangentes a duas retas paralelas r e s.

Construção:

i. Sobre as retas paralelas, construir retas perpendiculares e assim encontrar pares de pontos que representam a intercessão das perpendiculares com as paralelas.
ii. Encontrar o ponto médio de cada par de pontos que pertencem a mesma perpendicular e assim encontrar os centros das circunferências
iii. Construir as circunferências com centro em K, L, M, N e O.

Figura 17: Circunferências tangentes a duas retas paralelas



Fonte: O autor

O lugar geométrico encontrado é uma reta, podemos concluir também que esta reta é paralela a r e s, pois possui a mesma distância delas, sendo essa distância o raio das circunferências.

10. Determine o lugar geométrico do vértice A de um triângulo ABC onde o lado BC é fixo e o comprimento da altura AH é constante.

<u>Construção:</u>

i. Determinar um ponto qualquer H sobre o segmento BC.

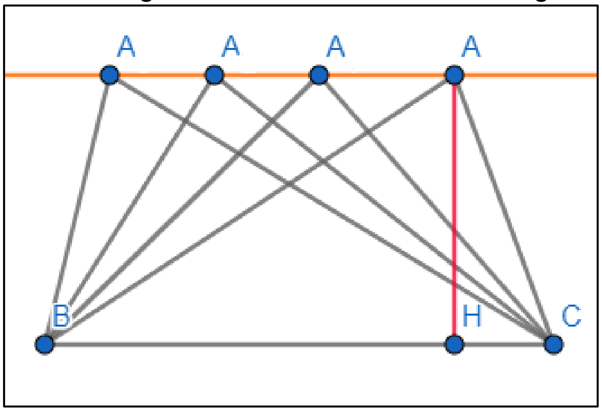
ii. Construir uma reta perpendicular ao segmento BC passando por H.

iii. Sobre a reta perpendicular, marcar o ponto A, obtendo assim o segmento AH.

iv. Sobre outros pontos da reta BC, repetir o procedimento e encontrar outros lugares possíveis para o ponto A.

Podemos notar que os pontos A formam uma reta paralela ao segmento BC e esta reta é o lugar geométrico procurado.

Figura 18: Triângulos com base fixa e alturas iguais



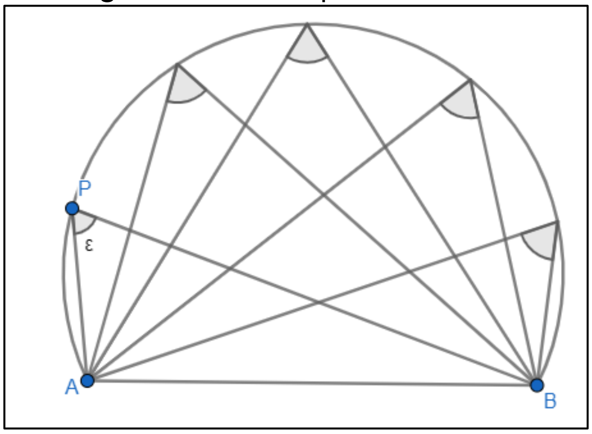
Fonte: O autor

Este exercício pode ser usado para introduzir a ideia de triângulos com áreas equivalentes, pois todos os triângulos formados pelo segmento BC e vértice A sobre a reta paralela à tal segmento terão a mesma área, já que as medidas da base BC e da altura do triângulo são conservadas e a área do triângulo é calculada pela fórmula $A = \frac{b\,.\,h}{2}$, sendo b e h medidas da base e da altura, respectivamente.

11. Dados um segmento AB e um ângulo ε, com $0° < \varepsilon < 180°$, determine o lugar geométrico dos pontos P do plano, tais que $A\hat{P}B = \varepsilon$.

Veremos que o lugar geométrico procurado é a reunião de dois arcos de círculo simétricos em relação à reta $\overleftrightarrow{AB}$ e tendo os pontos A e B em comum. Tais arcos são os arcos capazes, segundo o ângulo ε, em relação ao segmento AB.

Figura 19: Arco capaz



Fonte: O autor

<u>Construção:</u>

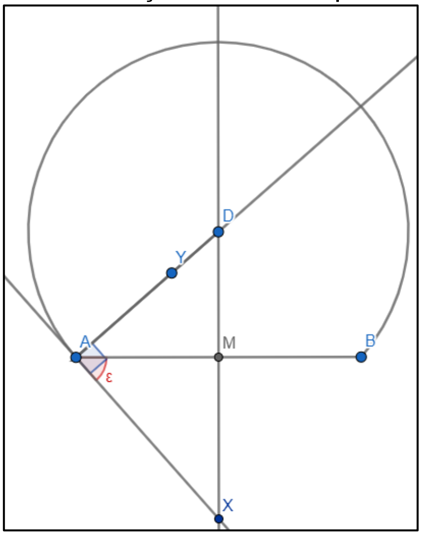
i. Traçamos a mediatriz de AB.

ii. No semiplano determinado pela reta que passa por AB, oposto ao do arco capaz desejado, traçamos a semirreta $\overrightarrow{AX}$ com $X\hat{A}M = \varepsilon$.

iii. Traçamos a semirreta $\overrightarrow{AY}$ perpendicular a $\overrightarrow{AX}$.

iv. A interseção de $\overrightarrow{AY}$ com a mediatriz de AB é o centro D do arco capaz.

Figura 20: Construção do arco capaz



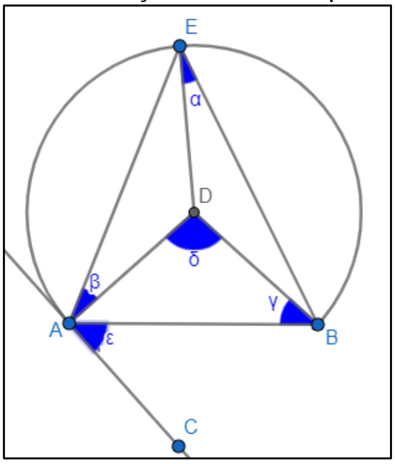
Fonte: O autor

Demonstração:

1ª parte: todos os pontos do arco capaz construído veem o segmento de reta AB por um ângulo ε.

Na imagem a seguir, acrescentamos um ponto E sobre o arco obtido, as cordas que ligam esse ponto aos pontos A e B, e os triângulos ABD, EDA e EDB.

Figura 21: Demonstração do arco capaz 1



Fonte: O autor

Os triângulos com vértices no centro do círculo são isósceles, pois dois de seus lados são os raios do círculo. Destes três triângulos e do contorno em torno do ponto D, extraímos as seguintes igualdades:

$$\delta + 2\gamma = 180°,$$

$$\delta_a + 2\beta = 180°,$$

$$\delta_a + 2\alpha = 180°,$$

$$\delta + \delta_a + \delta_b = 360°.$$

Onde $\delta_a = A\hat{D}E$ e $\delta_b = E\hat{D}B$. Somando as três primeiras equações e usando a última, obtemos o seguinte:

$$2(\gamma + \beta + \alpha) = 180°$$

E, pela construção do arco, o ângulo entre o segmento AD e a reta $\overleftrightarrow{AC}$ é reto. Isto é,

$$\gamma + \varepsilon = 90°.$$

Substituindo as duas equações temos:

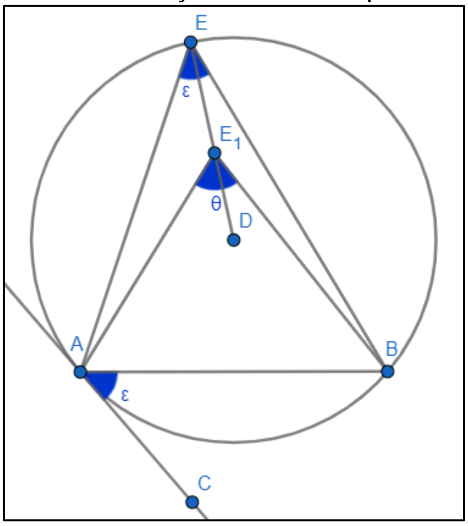
$$\beta + \alpha = \varepsilon.$$

Em outras palavras, o ângulo $A\hat{E}B = \beta + \alpha$ é o próprio ângulo ε da construção do arco capaz. Note que o ponto E pode estar em qualquer outra posição do arco construído. Portanto, todos os pontos pertencentes ao arco capaz veem o segmento AB sob o ângulo ε, assim como queríamos demonstrar.

2ª parte: se algum ponto vê o segmento AB sob um ângulo ε, então ele pertence ao arco capaz deste segmento.

Considere a figura acima com o segmento AB e o seu arco capaz para o ângulo ε já construído. Considere também um ponto E_1 dentro da região determinada pelo arco e pelo segmento AB. Vamos supor que E_1 também enxerga AB sob o ângulo ε. Agora, tracemos um raio na circunferência que determina o arco capaz passando por E_1. Note que, para qualquer ponto E_1, existe um ponto E ao longo do raio que pertence ao arco capaz. Na figura abaixo, a hipótese é que $\theta = \varepsilon$.

Figura 22: Demonstração do arco capaz 2



Fonte: O autor

Sabemos que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a $360°$, portanto, analisando o quadrilátero EAE_1B, temos que:

$$\varepsilon + (360 - \theta) + E\hat{A}E_1 + E\hat{B}E_1 = 360°,$$

$$\varepsilon + (360 - \alpha) + E\hat{A}E_1 + E\hat{B}E_1 = 360°,$$

$$E\hat{A}E_1 + E\hat{B}E_1 = 0°.$$

Como $E\hat{A}E_1$ e $E\hat{B}E_1$ são positivos, isso é um absurdo. Portanto, todos os ângulos correspondentes dos triângulos AEB e AE_1B são congruentes e, como eles têm um lado em comum, todos os seus lados são congruentes, $E = E_1$. Em outras palavras, não há pontos no interior do arco capaz que também enxergam AB sob ε. O mesmo raciocínio pode ser aplicado ao caso do ponto E_1 externo à região delimitada pelo arco capaz e o segmento AB. Com isso, demonstramos que o lugar geométrico de todos os pontos que enxergam um determinado segmento sob um determinado ângulo é o arco capaz.

O arco capaz é um lugar geométrico que, em sua construção, é necessário o uso de outro lugar geométrico, a mediatriz. Nesse caso ele pode ser usado na sala de aula para verificar se o aluno compreendeu todos os conceitos relacionados à reta mediatriz, além é claro de mostrar que um lugar geométrico pode ser também um arco.

12. No triângulo ABC os vértices A e B são fixos e o vértice C enxerga o lado AB segundo um ângulo que mede α. Considere o ponto C de um mesmo lado da reta AB. Determine o lugar geométrico dos incentros do triângulo ABC.

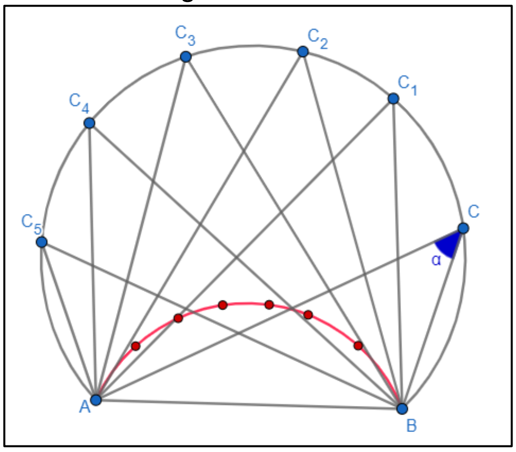
<u>Construção:</u>

Como os vértices A e B são fixos e vértice C sempre terá um ângulo α, podemos concluir que o vértice C ficará sobre o arco capaz do segmento AB.

i. Construir o arco capaz do segmento AB com ângulo α.
ii. Usando o triângulo ABC construir as bissetrizes de cada ângulo e assim determinar o incentro do triângulo ABC.
iii. Reproduzir o passo (ii) nos triângulos ABC_1, ABC_2, ABC_3, ABC_4 e ABC_5.

Podemos notar que os incentros, representados na cor vermelha, na Figura 23, formam o arco capaz do segmento AB.

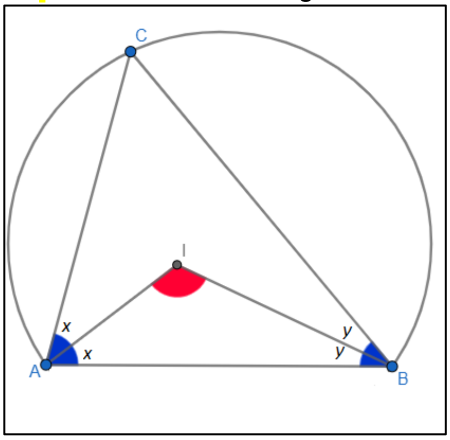
Figura 23: Incentros de triângulos com vértices no arco capaz



Fonte: O autor

<u>Demonstração:</u>

Figura 24: Demonstração do incentro de um triângulo com vértice no arco capaz



Fonte: O autor

Consideramos os ângulos $I\hat{A}B$ = $I\hat{A}C$ = x e $I\hat{B}A$ = $I\hat{B}C$ = y. No triângulo ABC temos:

$$2x + 2y + \alpha = 180^o,$$

$$x + y = 90^o - \frac{\alpha}{2}.$$

Logo o ângulo $A\hat{I}B$ será

$$A\hat{I}B = 180^o - \left(90^o - \frac{\alpha}{2}\right),$$

$$A\hat{I}B = 90^o + \frac{\alpha}{2}.$$

Ou seja, os incentros dos triângulos de vértices ABC formam um arco capaz do segmento AB segundo o ângulo de medida $90^o + \frac{\alpha}{2}$.

13. No triângulo ABC, o lado AB é fixo e o ângulo α é constante e dado. Determine o lugar geométrico do ortocentro do triângulo ABC.

Sabemos que o arco capaz é todo ponto que pode ver o segmento AB sob o ângulo α.

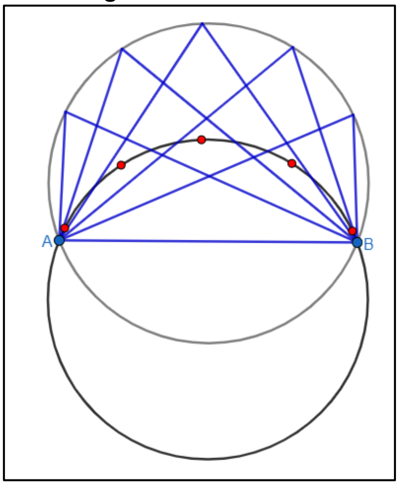
<u>Construção:</u>

i. Construir o arco capaz do segmento AB segundo o ângulo α.

ii. Encontrar o ortocentro de cada triângulo formado pelo segmento AB e os vértices dos ângulos sobre o arco capaz. Os ortocentros estão representados de vermelho.

- Podemos notar que o conjunto dos ortocentros dos triângulos forma uma circunferência, no que segue vamos determinar que circunferência é essa.

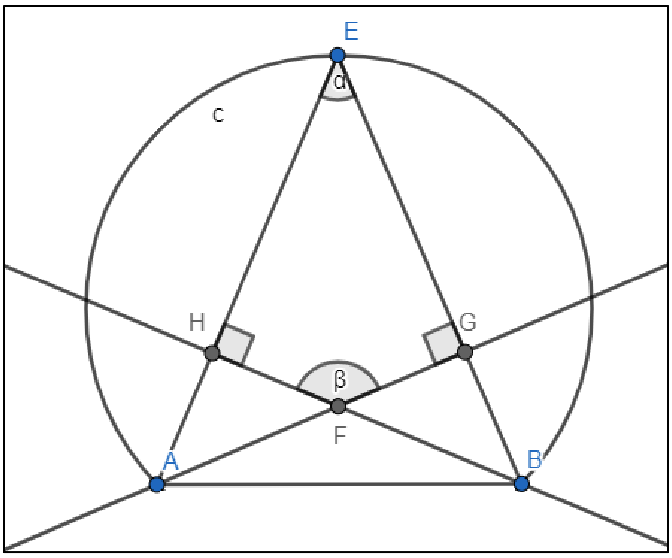
Figura 25: Ortocentro de triângulos com vértices no arco capaz



Fonte: O autor

Demonstração:

Figura 26: Medida do ângulo β em função de α

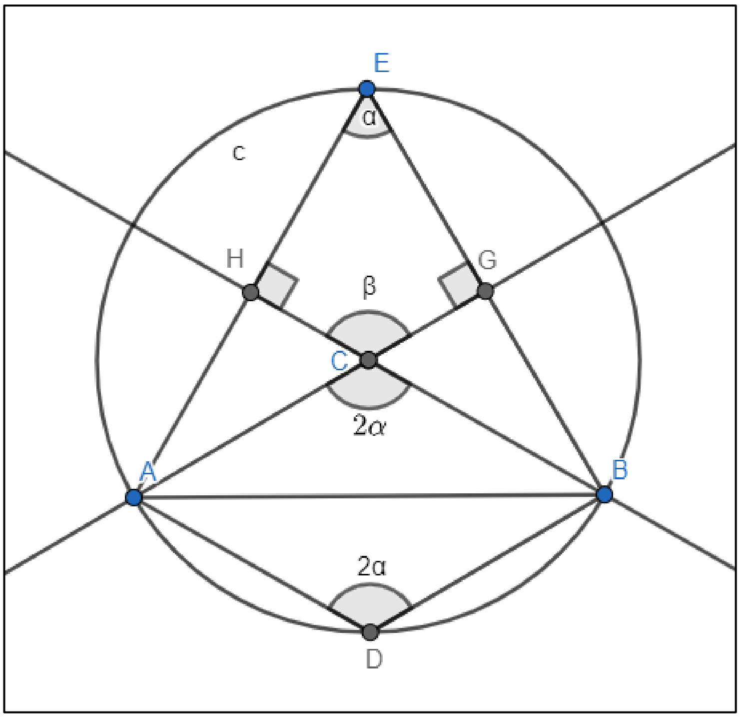


Fonte: O autor

Inicialmente, vamos determinar qual o ângulo formado pelas alturas relativas aos lados AE e BE do triângulo ABE. Sejam BH e AG tais alturas, temos que F é o ortocentro deste triângulo. Sabendo que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360° e observando o polígono $EHFG$ podemos concluir que o ângulo $\beta = 180^o - \alpha$. Desta forma como o ângulo $A\hat{F}B$ é oposto pelo vértice ao ângulo β, temos que $\beta = A\hat{F}B = 180° - \alpha$.

Vamos supor que o ortocentro coincida com o centro do arco capaz de AB segundo o ângulo α, como podemos observar na Figura 27.

Figura 27: Ortocentro no centro da circunferência



Fonte: O autor

Neste caso o ângulo $\beta = 2\alpha$, pois é ângulo central, sendo assim AC e BC são raios da circunferência. Analisando o $A\hat{D}B$ podemos notar que ele é ângulo inscrito que subtende arco AEB

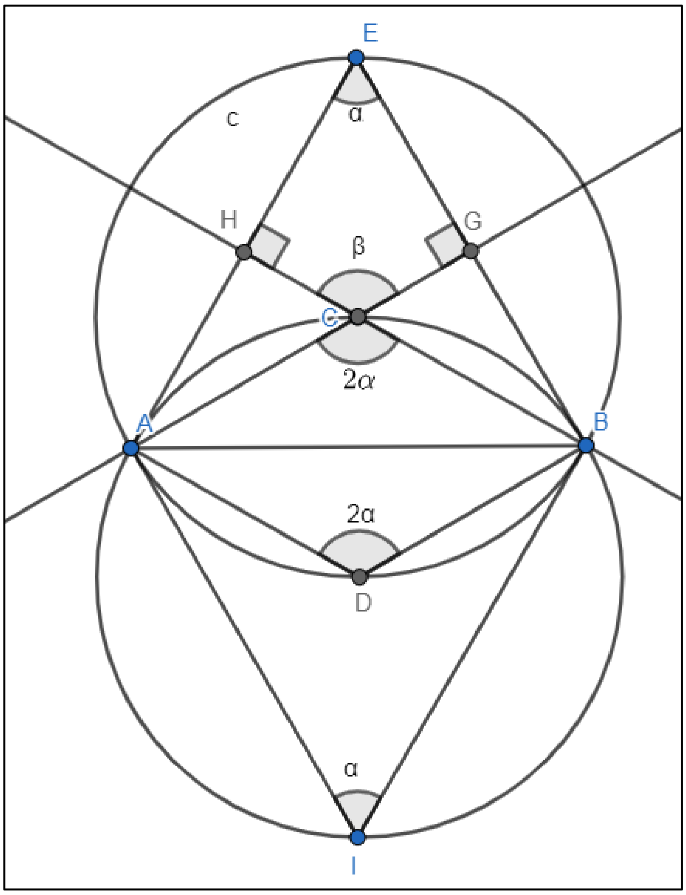
$A\hat{D}B = \frac{360-2\alpha}{2}$,

$A\hat{D}B = 180 - \alpha$,

ou seja, $A\hat{D}B = \beta = 2\alpha$.

Agora podemos concluir também que o quadrilátero $ADBC$ é um losango, portanto $\overline{AD} = \overline{DB} = \overline{BC} = \overline{CA}$ e ainda que os triângulos ABC e ABD são congruentes. Desta forma, podemos notar que o arco ADB é um conjunto de ortocentros de triângulos com base AB e ângulo α na parte inferior do segmento AB.

Figura 28: Circunferências de mesmo raio



Fonte: O autor

Como podemos observar as circunferências de centros C e D possuem o mesmo raio. Portanto os ortocentros percorrem o arco menor da circunferência de centro em D, cujo raio é o mesmo do arco capaz do segmento AB e ângulo α.

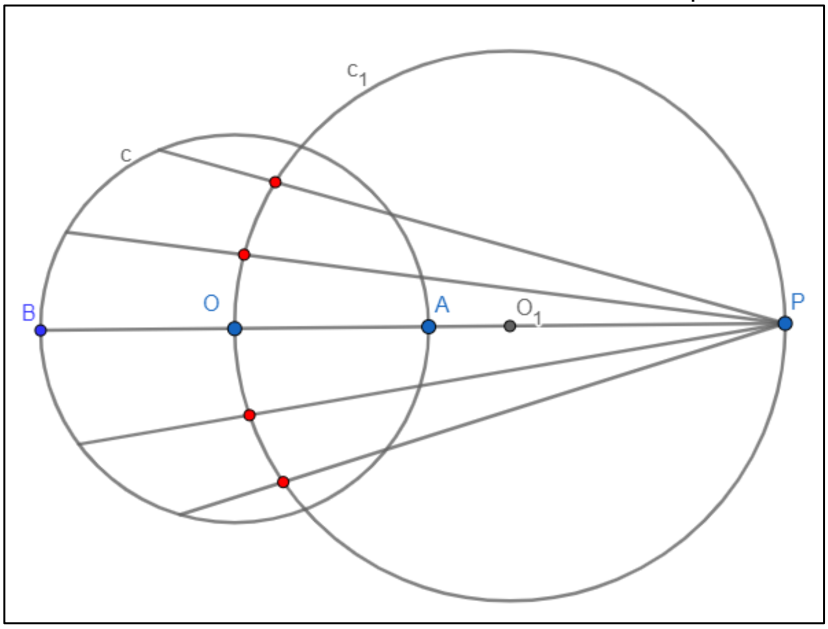
14. São dados uma circunferência e um ponto P fixo. Uma reta r variável passa por P e corta a circunferência em A e B. Determine o lugar geométrico do ponto médio da corda AB. Discuta os casos em que P é interior, exterior ou pertence à circunferência.

Construção:

i. Construir segmentos de retas que passam por P e são secantes à circunferência.
ii. Determinar os pontos médios das cordas (vermelho).

- Para P externo os pontos médios geram um arco de uma circunferência secante que contém o ponto P.

Figura 29: Ponto médio das cordas de uma circunferência com um ponto externo



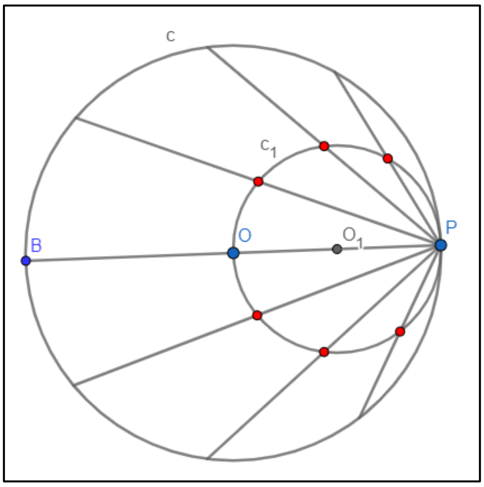
Fonte: O autor

Seja $\overline{PB}$ um segmento que passa pelos centros das circunferências c e c_1 e pelo ponto A pertencente à circunferência c, temos que $\overline{AB}$ é diâmetro de c e, portanto o seu ponto médio é o centro O, desta forma podemos concluir que $\overline{AO}$ é raio de c. Tomando $\overline{AO} = r$, $\overline{PA} = x$, temos,

$$\overline{PO_1} = \frac{x+r}{4}.$$

- Para P pertencente à circunferência, os pontos médios geram uma circunferência tangente interna que contém o ponto P.

Figura 30: Ponto médio das cordas de uma circunferência



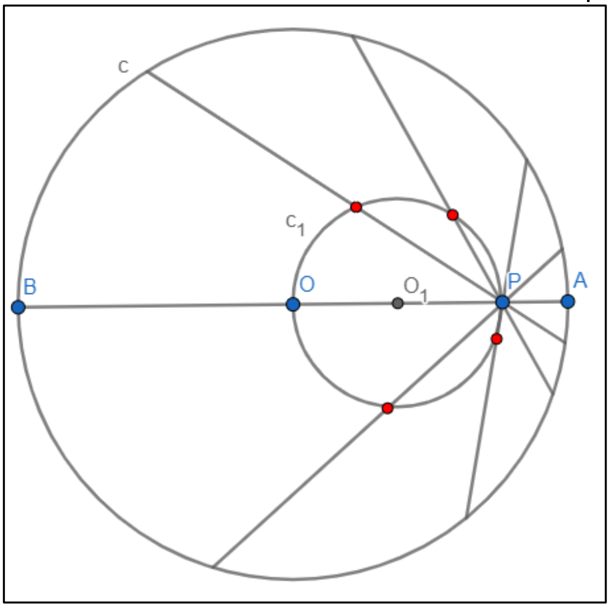
Fonte: O autor

Seja PB um segmento que passa pelos centros O e O_1, temos que, PB é diâmetro da circunferência c, desta forma o ponto médio de PB é o centro O e, portanto, podemos concluir que PO é raio da circunferência c e diâmetro da circunferência c_1. Tomando $\overline{PO} = r$, temos

$$\overline{PO_1} = \frac{r}{2}.$$

- Para P interno à circunferência, os pontos médios geram uma circunferência interna que também contém o ponto P.

Figura 31: Ponto médio das cordas de uma circunferência com um ponto interno



Fonte: O autor

Tomando o segmento AB passando pelo ponto P e pelos centros O e O_1, temos que AB é diâmetro de c e, portanto o seu ponto médio é o centro O. Tomando

$\overline{AO} = r$ e $\overline{PA} = x$, temos.

$$\overline{PO_1} = \frac{r-x}{2}.$$

15. No triângulo ABC a base AB é fixa e o vértice C percorre uma reta paralela a AB distando h do segmento AB. Determine o lugar geométrico do baricentro do triângulo ABC.

Construção:

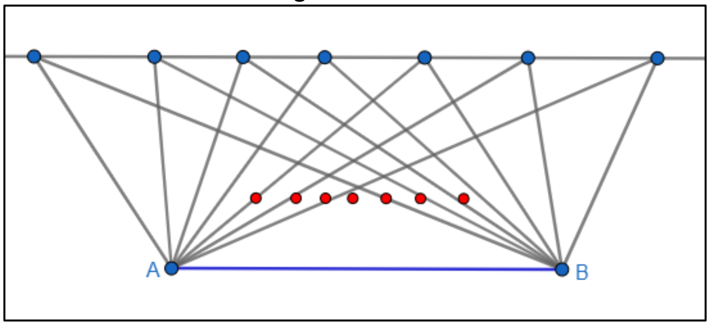
i. Construir uma reta paralela r ao segmento AB com distância h.

ii. Determinar triângulos com o segmento AB como base e o vértice oposto a base são os pontos sobre a reta r.

iii. Encontrar os baricentros de cada triângulo (vermelho).

- Podemos notar que a união dos baricentros gera um de reta paralelo ao segmento AB.

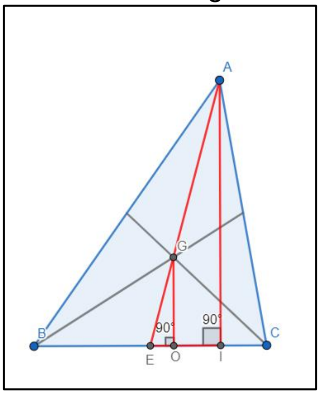
Figura 32: Baricentros de triângulos com base e altura fixas



Fonte: O autor

Demonstração:

Figura 33: Demonstração do baricentro de triângulos com base e altura fixas



Fonte: O autor

O baricentro G divide a mediana na proporção 2:1. Então, $\overline{EG} = \frac{1}{3}\overline{AE}$.

Seja O pertencente ao segmento BC, pé da perpendicular baixada de G. Observe os triângulos GEO e AEI. Eles são semelhantes, pois tem $\hat{E}$ ângulo comum e $\hat{O} = \hat{I} = 90°$.

Segue que

$$\frac{\overline{GO}}{\overline{AI}} = \frac{\overline{EG}}{\overline{AE}} \Rightarrow \frac{\overline{GO}}{h} = \frac{1/3\overline{AE}}{\overline{AE}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \overline{GO} = \frac{1}{3}h.$$

Logo os baricentros G dos triângulos formados percorrem a reta paralela ao lado BC que está distante de BC a uma altura igual a $\frac{1}{3}h$.

> 16. É dado no plano um segmento AB e um ponto P pertencente à AB. De um mesmo lado da reta AB, construímos os triângulos retângulos isósceles APQ e BPR de hipotenusa AP e BP, respectivamente. Em seguida, marcamos o ponto médio M do segmento QR. Encontre o lugar geométrico descrito pelo ponto M à medida que P varia sobre o segmento AB.

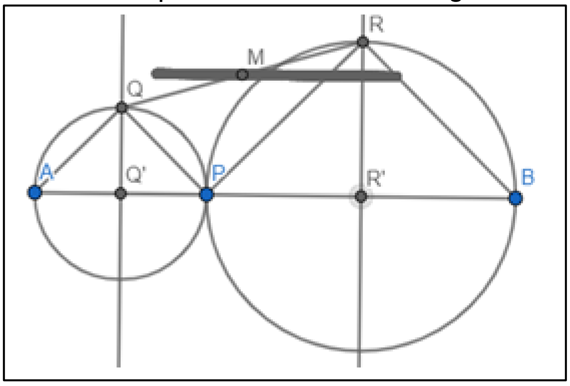
<u>Construção:</u>

i. Construir um segmento AB e um ponto P sobre o segmento
ii. Para determinar o ponto Q vamos construir uma mediatriz do segmento AP Determinando o ponto médio Q'.
iii. Construir uma circunferência com centro em Q' e raio $\overline{Q'P}$, o ponto de intercessão entre a circunferência e a mediatriz será o ponto Q. Assim determinamos o triângulo retângulo isósceles APQ, pois $\overline{AP}$ é diâmetro e Q é equidistante de A e P.
iv. A determinação do ponto R é análoga.
v. Construir o segmento QR e determinar o seu ponto médio M. Usar a ferramenta do *GeoGebra* “exibir rastro” do ponto P.

   Conforme o ponto P se desloca sobre AB, o ponto M descreve um segmento paralelo a AB.

Logo podemos perceber que o lugar geométrico procurado é um segmento de reta paralelo à AB.

Figura 34: Rastro do ponto médio de um segmento



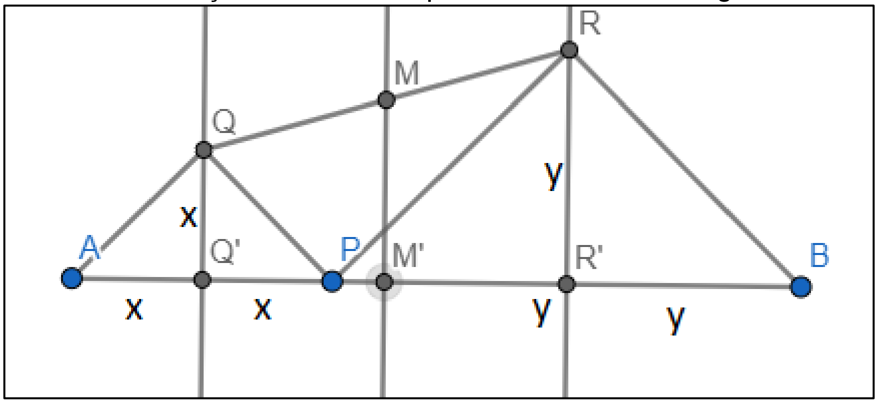
Fonte: O autor

Demonstração:

Vamos mostrar que a distância de M à reta r, que contém AB é constante.

A partir de Q, M, R baixe perpendiculares à reta r, obtendo os pontos Q', M' e R'.

Figura 35: Demonstração do rastro do ponto médio de um segmento



Fonte: O autor

Como as retas $\overleftrightarrow{QQ'}$, $\overleftrightarrow{MM'}$ e $\overleftrightarrow{RR'}$ são perpendiculares ao mesmo segmento AB, podemos concluir que são paralelas, sabendo que M é ponto médio de QR pelo teorema de Tales podemos concluir que M' é ponto médio de $Q'R'$. Agora vamos aplicar o teorema da base média para trapézios ao trapézio $QQ'R'R$.

Observe que APQ é triângulo isósceles e QQ' é altura em relação à base, segue que QQ' também é mediana. O triângulo APQ também é retângulo, logo a mediana mede metade da hipotenusa. Assim $\overline{AQ'} = \overline{Q'P} = \overline{QQ'} = x$ conforme a figura. Analogamente, estes resultados são válidos para o triângulo BPR. Assim $\overline{PR'} = \overline{R'B} = \overline{BR} = y$.

Pelo Teorema da Base Média para trapézios[1] temos

$$\overline{MM'} = \frac{1}{2}\left(\overline{QQ'} + \overline{RR'}\right) = \frac{1}{2}(x + y).$$

Observe que

$$\overline{AB} = 2x + 2y,$$

$$\frac{\overline{AB}}{2} = x + y.$$

Logo

$$\overline{MM'} = \frac{\overline{AB}}{4}.$$

Portanto o lugar geométrico descrito por M é um segmento paralelo à reta r que dista $\frac{\overline{AB}}{4}$ de r.

3.1 CÔNICAS

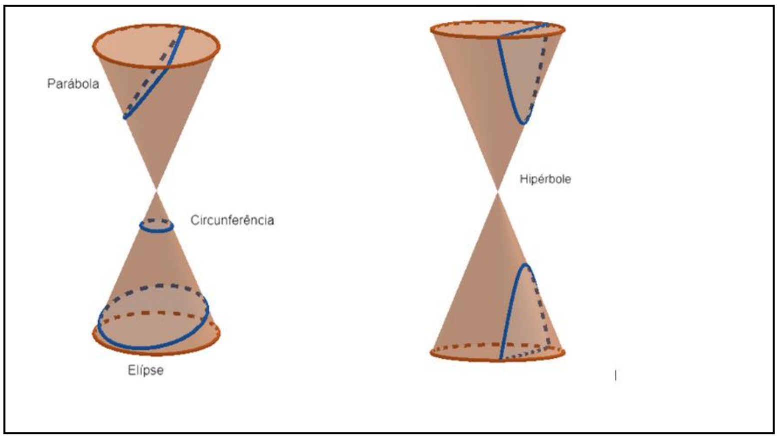
As cônicas são curvas importantes pois estão diretamente ligadas à diversos estudos, como na Física, com a trajetória de projéteis em um lançamento sob a força da gravidade, na Química, com as órbitas dos elétrons em torno do núcleo do átomo, na Engenharia, com as construções de pontes e até mesmo na Astronomia, pois Kepler demonstrou que os planetas no sistema solar possuem trajetórias elípticas. Essas são algumas das várias aplicações das cônicas.

A hipérbole, elipse, parábola e a circunferência formam as cônicas, pois elas podem ser obtidas através da intersecção de um plano com uma superfície cônica.

---

[1] Se um segmento tem extremidades nos pontos médios dos dois lados não paralelos de um trapézio, então esse segmento é paralelo às bases do trapézio e sua medida é igual a semi-soma das medidas de suas bases.

Figura 36: Cônicas



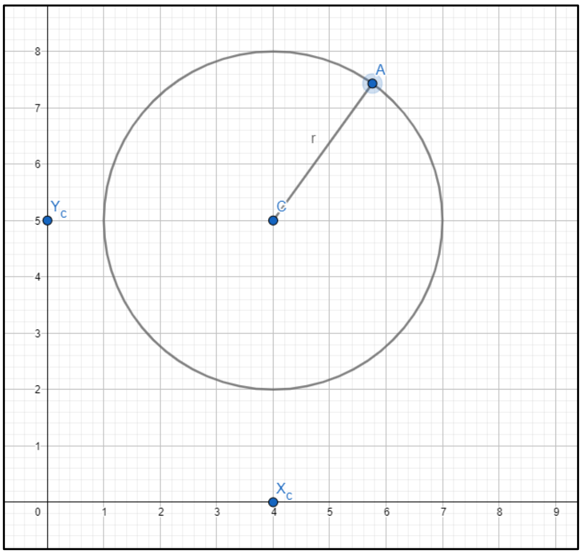
Fonte: O autor

Os problemas seguintes, desde o problema 17 ao 21, podem ser aplicados no Ensino Médio ou até mesmo no Ensino Superior, pois neles o conteúdo principal são as cônicas, que estão fortemente relacionadas com a Geometria Analítica. Serão apresentados os problemas e as demonstrações que podem ser resolvidos por meio destes lugares geométricos.

17. Circunferência

Definição: Dados, um ponto C e um segmento de medida r, a circunferência de centro C e raio r é o lugar geométrico dos pontos P que distam r de C.

Figura 37: Circunferência de raio r



Fonte: O autor

17.1 Dado um ponto C, determine a equação que representa o conjunto de pontos que distam r de C.

Demonstração:

Como vimos, o conjunto de pontos que distam r de C é a circunferência de centro C e raio r.

Seja o ponto $A(x, y)$ pertencente a esta circunferência e o ponto $C(x_c, y_c)$ o centro da circunferência, temos que $d(A, C) = r$, então

$$\sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2} = r.$$

Elevando ambos os lados ao quadrado

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2.$$

17.2 Um ponto se move de modo que o quadrado da sua distância até o ponto $A\ (0,1)$ é o dobro do quadrado da distância até o ponto $B\ (-2,3)$. Determine esse lugar geométrico.

Demonstração

Se $P\ (x, y)$ é um ponto do lugar descrito, temos:

$$D^2{}_{PA} = 2\,.\,D^2{}_{PB},$$

$$\left(\sqrt{x^2 + (y - 1)^2}\right)^2 = 2\,.\left(\sqrt{(x + 2)^2 + (y - 3)^2}\ \right)^2,$$

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 = 2\,.\,(x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9),$$

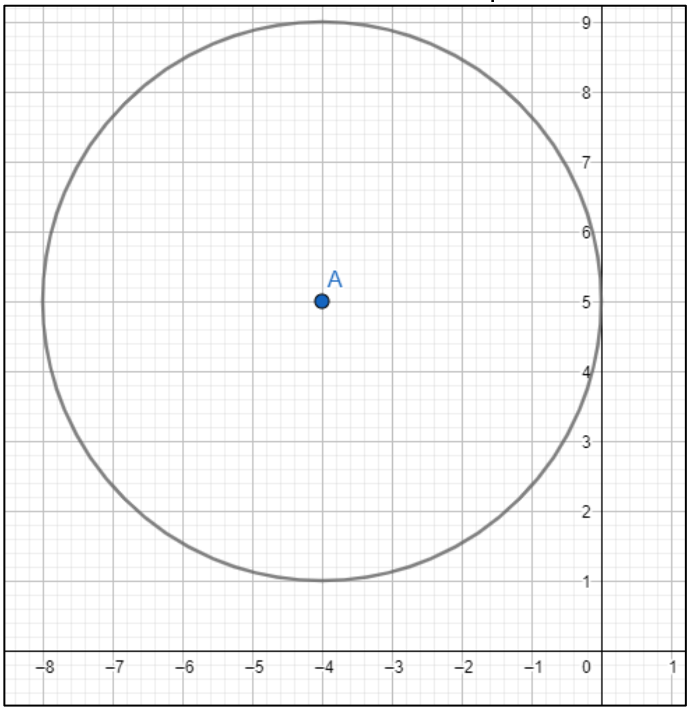
$$x^2 + y^2 - 2y + 1 = 2x^2 + 8x + 8 + 2y^2 - 12y + 18,$$

$$x^2 + 8x + y^2 - 10y + 25 = 0,$$

$$(x + 4)^2 + (y - 5)^2 = 4^2.$$

Logo, o lugar geométrico descrito é uma circunferência de raio igual a 4 e centro $(-4,5)$.

Figura 38: Circunferência com centro no ponto A



Fonte: O autor

18. Parábola

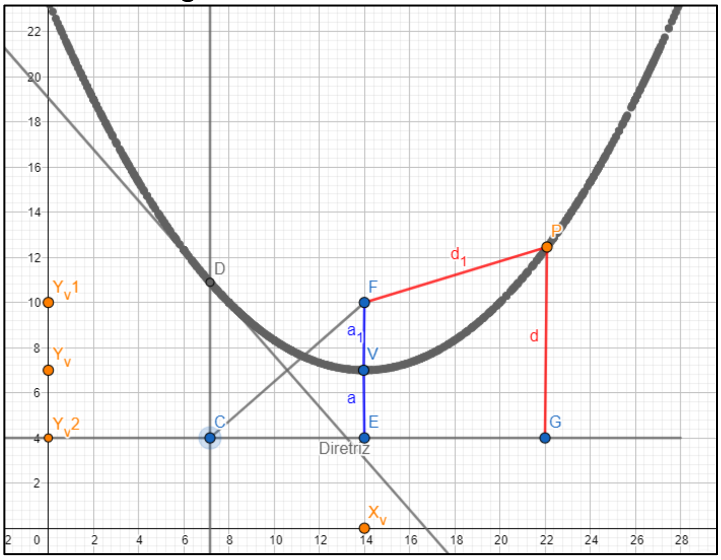
Definição: Considerando-se um ponto F(foco) e uma reta r(diretriz) no plano, o lugar geométrico dos pontos do plano cuja distância até F é igual à distância até r é chamado parábola.

Construção:

i. Construir uma reta qualquer que será a diretriz.
ii. Criar um ponto F qualquer que será o foco da parábola.
iii. Criar um ponto C sobre a diretriz e construir o segmento CF.
iv. Construir uma reta perpendicular à diretriz passando pelo ponto C.
v. Construir a mediatriz do segmento CF.
vi. Na intercessão da mediatriz de CF com a perpendicular à diretriz passando pelo ponto C, marque o ponto D.
vii. Usar a ferramenta do *GeoGebra* "criar rastro" sobre o ponto D, deslocar o ponto C sobre a diretriz.

O rastro criado pelo ponto D será a parábola de foco F.

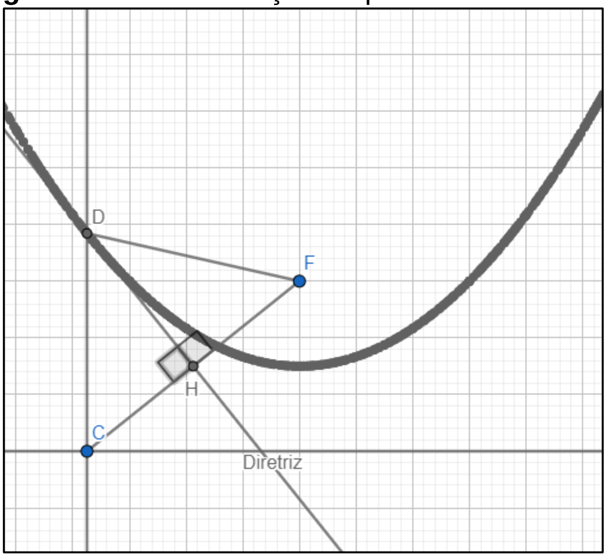
Figura 39: Parábola



Fonte: O autor

Agora vamos mostrar porque esta figura é uma parábola

Figura 40: Demonstração da parábola



Fonte: O autor

Podemos notar que o triângulo CDF foi subdividido em dois triângulos, CHD e DHF, vamos mostrar que eles são congruentes.

Sabemos que a reta $\overleftrightarrow{DH}$ é mediatriz do segmento CF e, portanto os ângulos $C\hat{H}D$ e $D\hat{H}F$ são retos e $\overline{CH}$ e $\overline{HF}$ são congruentes. Como o segmento DH é lado comum dos dois triângulos, pelo caso de congruência LAL temos que os triângulos CHD e FHD são congruentes.

Como a medida $\overline{CD}$ representa distância da reta diretriz até o ponto D, podemos concluir que $d(C,D) = d(D,F)$ e, portanto, o rastro do ponto D, formado pelo deslocamento do ponto C sobre a diretriz, gera uma parábola

> 18.1 Dado o ponto F e a reta r (diretriz), determine a equação do lugar geométrico dos pontos equidistantes de F e de r.

Demonstração: Na Figura 39, considere a seguinte notação:

- V: vértice da parábola.
- F: Foco da parábola.
- P: Ponto pertencente à parábola.
- d: Distância do ponto P a reta diretriz.
- d_1: Distância do ponto P ao ponto F.
- y_v: Coordenada y do ponto V.
- a_1: Distância do vértice ao foco da parábola.

Temos $a_1 = a$, desta forma.

$y_{v1} = y_v + a$,

$y_{v2} = y_v - a$.

Dado um ponto $P(x,y)$ sobre a parábola, vamos supor que $d = d_1$. Sendo r a reta diretriz, temos

$$d\,(P,r) = d_1\,(P,F),$$

$$y - (y_v - a) = \sqrt{(x - x_v)^2 + \big(y - (y_v + a)\big)^2},$$

$$y - y_v + a = \sqrt{(x - x_v)^2 + (y - y_v - a)^2}.$$

Substituindo $Y = y - y_v$ e $X = x - x_v$, temos

$$Y + a = \sqrt{X^2 + (Y - a)^2}.$$

Elevando ambos os lados ao quadrado

$$(Y + a)^2 = (\sqrt{X^2 + (Y - a)^2})^2,$$

$$Y^2 + 2Ya + a^2 = X^2 + Y^2 - 2Ya + a^2.$$

Acrescentando $-y^2 - a^2 + 2Ya$ em ambos os lados

$$4Ya = X^2$$

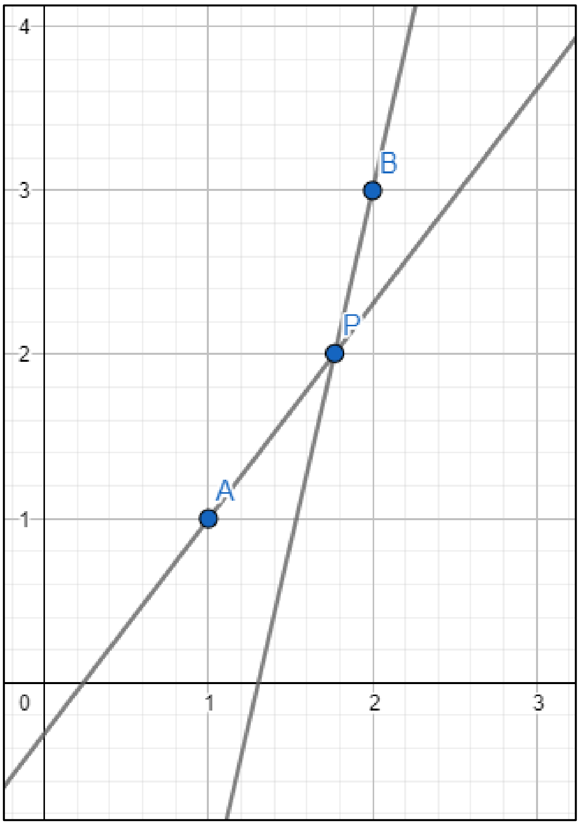
Como $Y = y - y_v$ e $X = x - x_v$, temos a equação da parábola:

$$4a\,(y - y_v) = (x - x_v)^2$$

Observação: Esta parábola está com eixo de simetria paralelo ao eixo y, o procedimento para construção e demonstração da parábola com eixo de simetria paralelo ao eixo x é análogo.

18.2 Determine o lugar geométrico do ponto P, sabendo que o coeficiente angular da reta $r = \overleftrightarrow{AP}$ acrescido de 3 unidades é igual ao coeficiente angular da reta $s = \overleftrightarrow{BP}$, onde $A = (1,1)$ e $B = (2,3)$.

Figura 41: Ponto de concorrência das retas r e s



Fonte: O autor

Seja o ponto $P\,(x, y)$, temos:

$$M_r = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y-1}{x-1}, x \neq 1,$$

$$M_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y-3}{x-2}, x \neq 2.$$

Segue que

$$M_r + 3 = M_s,$$

$$\frac{y-1}{x-1} + 3 = \frac{y-3}{x-2},$$

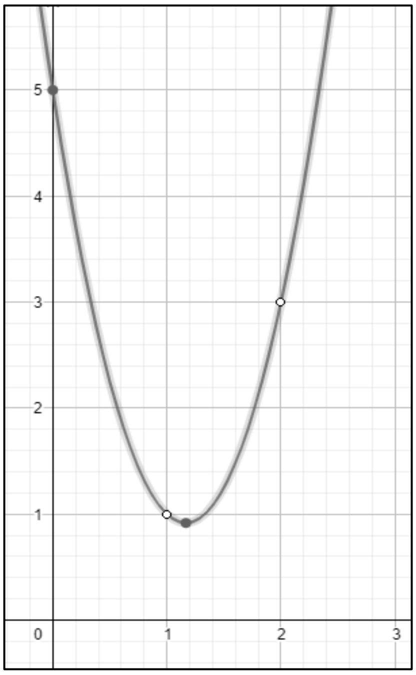
$(y-1)(x-2)+3(x-1)(x-2)=(y-3)(x-1),$

$y=3x^2-7x+5.$

Sabendo que o trinômio do 2º grau é $y = ax^2 + bx + c$, podemos concluir que a equação apresentada se refere a uma parábola, como os vértices da parábola tem coordenadas $(\frac{-b}{2a},\frac{-\Delta}{4a})$, concluimos neste caso que o vértice tem coordenadas $(\frac{7}{6},\frac{11}{12})$.

Como sabemos, a parábola não está definida para $x = 1$ e $x = 2$, logo os pontos $(1,1)$ e $(2,3)$ não são aceitos.

Figura 42: Parábola do Problema 18.2



Fonte: O autor

19. Elipse

Definição: O lugar geométrico dos pontos cuja soma das distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 é constante $(2a)$ e maior que a distância entre eles é chamado de elipse.

<u>Construção:</u>

i. Construir uma circunferência de centro F_1 (foco da elipse) e raio qualquer.
ii. Criar um ponto F_2 qualquer interno a circunferência.
iii. Criar um ponto A sobre a circunferência e construir os segmentos AF_1 e AF_2.

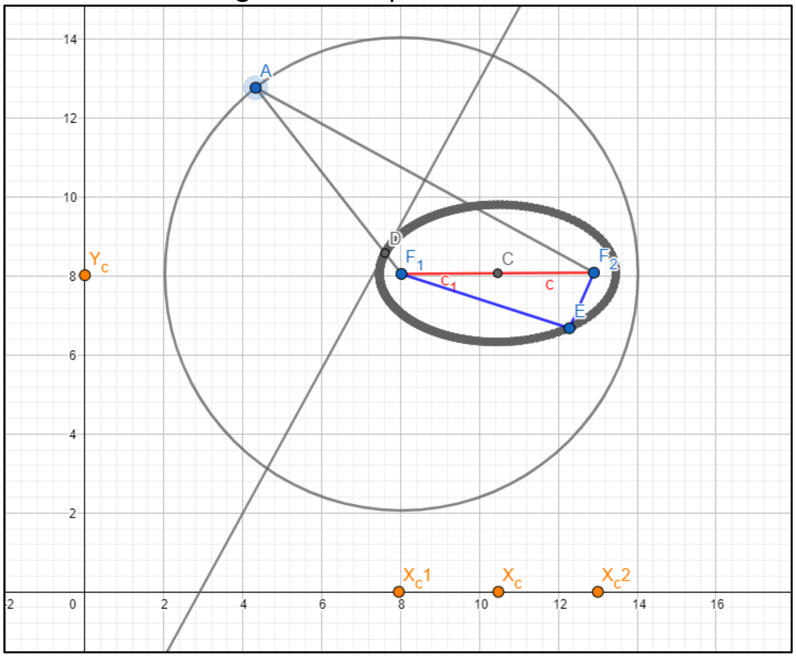
iv. Construir a mediatriz do segmento AF_2.

v. Criar o ponto D na intercessão da mediatriz e o segmento AF_1.

vi. Usar a ferramenta do *GeoGebra* “criar rastro” sobre o ponto D e deslocar o ponto A sobre a circunferência.

O rastro criado pelo ponto D será uma elipse de focos F_1 e F_2.

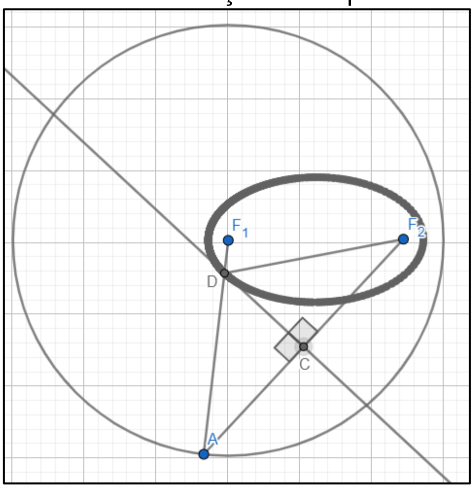
Figura 43: Elipse



Fonte: O autor

Agora vamos mostrar porque esta figura representa uma elipse.

Figura 44: Demonstração da elipse



Fonte: O autor

Podemos notar que o triângulo ADF_2 foi subdividido em dois triângulos menores, ADC e F_2DC, vamos mostrar que estes triângulos são congruentes.

Como a reta $\overleftrightarrow{DC}$ é mediatriz ao segmento AF_2 temos que os ângulos $A\hat{C}D$ e $D\hat{C}F_2$ são retos e que os segmentos AC e CF_2são congruentes, como o lado DC é comum aos dois triângulos, pelo caso de congruência LAL, temos que os triângulos ADC e F_2DCsão congruentes.

Agora que sabemos que os segmentos ADe DF_2são congruentes, podemos notar que $d(D,F_1)\ +\ d(D,A)\ =\ d(D,F_1)\ +\ d(D,F_2)\ =\ 2a$.

Logo concluímos que o rastro do ponto D forma uma elipse, cujo raio da circunferência é igual a $2a$.

19.1 Dados os pontos F_1 e F_2, determine a equação que representa o lugar geométrico dos pontos cuja soma das distancias aos pontos F_1 e F_2 é constante.

Demonstração: Considere na Figura 43 as seguintes notações:

- F_1: Foco 1 da elipse.
- F_2: Foco 2 da elipse.
- C: Ponto médio de F_1 e F_2.
- x_c: Coordenada x do ponto C.
- y_c: Coordenada y do ponto C.
- c: Distância do ponto F_1 até o ponto C
- c_1: Distância do ponto F_2 até o ponto C
- a: Medida constante

Sendo $c\ =\ c_1, x_{c1}$ possui coordenada $x\ =\ x_c - c$ e x_{c2} possui coordenada $x\ =\ x_c + c$.

Dado um ponto $E(x,y)$ sobre a elipse, vamos mostrar que $d(E,F_1)\ +\ d(E,F_2) =\ 2a$

$$d(E,F_1) = 2a - d(E,F_2),$$

$$\sqrt{\left(x-(x_c-c)\right)^2+(y-yc)^2} = 2a - \sqrt{\left(x-(x_c+c)\right)^2+(y-y_c)^2},$$

$$\sqrt{(x-x_c+c)^2+(y-y_c)^2} = 2a - \sqrt{(x-x_c-c)^2+(y-y_c)^2}.$$

Tomando $X\ =\ x - x_c$ e $Y\ =\ y - y_c$, temos.

$$\sqrt{(X+c)^2+Y^2} = 2a - \sqrt{(X-c)^2+Y^2}.$$

Elevando ambos os lados ao quadrado

$$(X+c)^2+Y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(X-c)^2+Y^2} + (X-c)^2+Y^2,$$

$$X^2+2Xc+c^2+Y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(X-c)^2+Y^2} + X^2-2Xc+c^2+Y^2.$$

Acrescentando $-X^2-Y^2-c^2+2Xc$ em ambos os lados

$$4Xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(X-c)^2+Y^2}.$$

Dividindo ambos os lados por 4

$$Xc - a^2 = a\sqrt{(X-c)^2+Y^2}.$$

Elevando ambos os lados ao quadrado

$$X^2c^2 - 2Xa^2c + a^4 = a^2((X-c)^2+Y^2),$$

$$X^2c^2 - 2Xa^2c + a^4 = a^2X^2 - 2Xa^2c + a^2c^2 + Y^2a^2.$$

Acrescentando $+2Xa^2c$

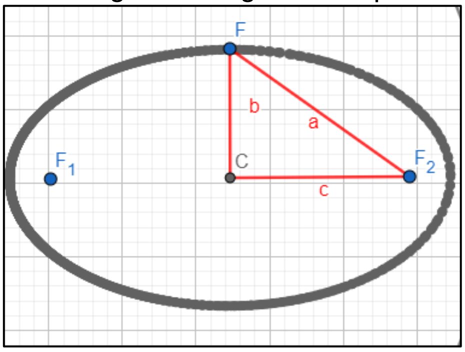
$$X^2c^2 + a^4 = a^2X^2 + a^2c^2 + Y^2a^2,$$

$$X^2c^2 - a^2X^2 - Y^2a^2 = a^2c^2 - a^4,$$

$$X^2(c^2-a^2) - Y^2a^2 = a^2(c^2-a^2).$$

Sabendo que na elipse $a^2 = b^2 + c^2$.

Figura 45: Triângulo retângulo na elipse



Fonte: O autor

Temos que $-b^2 = c^2 - a^2$, substituindo

$$-X^2b^2 + Y^2a^2 = -a^2b^2.$$

Dividindo ambos os lados por $-a^2b^2$

$$\frac{X^2b^2}{a^2b^2} - \frac{Y^2a^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2},$$

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

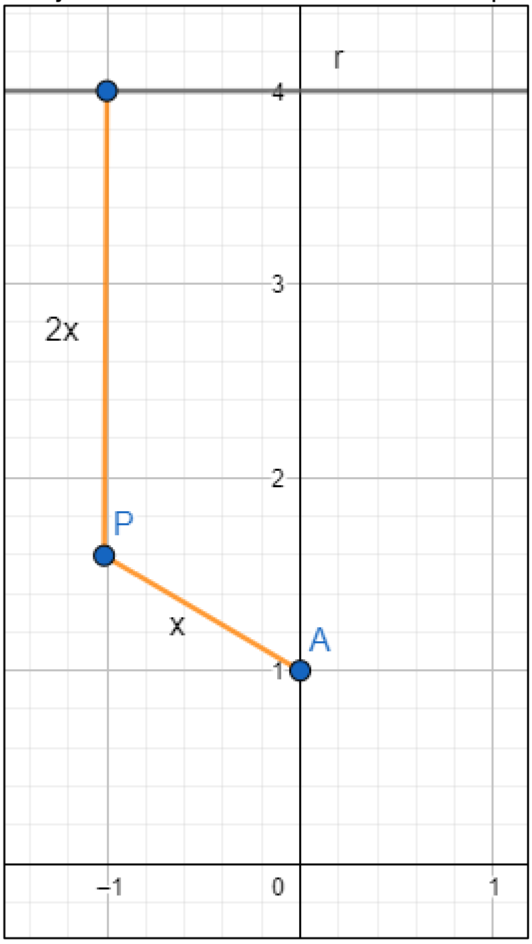
Como $X = x - x_c$ e $Y = y - y_c$

$$\frac{(x-x_c)^2}{a^2} - \frac{(y-y_c)^2}{b^2} = 1.$$

Observação: Esta elipse possui o eixo que contém os focos, paralelo ao eixo x, o procedimento para construção e demonstração da elipse com eixo focal paralelo ao eixo y é análogo.

19.2 Determine o lugar geométrico descrito pelos pontos cuja distância à reta r de equação $y - 4 = 0$ é o dobro de sua distância ao ponto $A\ (0{,}1)$.

Figura 46: Ponto cuja distância a reta r é o dobro do ponto A



Fonte: O autor

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer. Devemos ter

$D_{Pr} = |y - 4|$,

$D_{PA} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$.

Sabendo que $D_{Pr} = 2D_{PA}$ temos:

$|y - 4| = 2\sqrt{x^2 + (y-1)^2}$.

Elevando ambos os lados ao quadrado

$(y-4)^2 = 4[x^2 + (y-1)^2]$,

$y^2 - 8y + 16 = 4[x^2 + y^2 - 2y + 1]$,

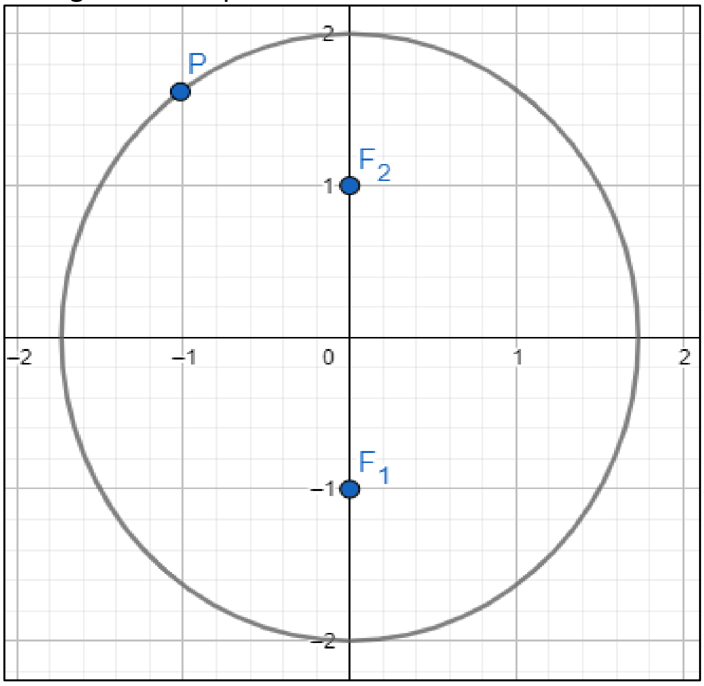
$y^2 - 8y + 16 = 4x^2 + 4y^2 - 8y + 4$,

$4x^2 + 3y^2 = 12$,

$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Ou seja, podemos ver que o lugar geométrico descrito é uma elipse que contém o eixo focal paralelo ao eixo y e temos, $a = 2$, $b = \sqrt{3}$ e $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 1$. Temos, a elipse de focos $F_1 = (0,-1)$ e $F_2 = (0,1)$, eixo maior $2a = 4$ e excentricidade $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$.

Figura 47: Elipse do Problema 19.2



Fonte: O autor

20. Hipérbole
Definição: Sejam F_1 e F_2 dois pontos do plano e seja $2c$ a distância entre eles, hipérbole é o lugar geométrico dos pontos do plano cuja diferença (em módulo) das distâncias à F_1 e F_2 é a constante $2a$ $(0 < 2a < 2c)$.

Construção:

i. Construir uma circunferência de centro F_1 (foco 1 da hipérbole) e raio qualquer.

ii. Criar um ponto D sobre a circunferência e um ponto F_2 (foco 2 da hipérbole) externo a circunferência.

iii. Construir uma reta que passa pelos pontos D e F_1.

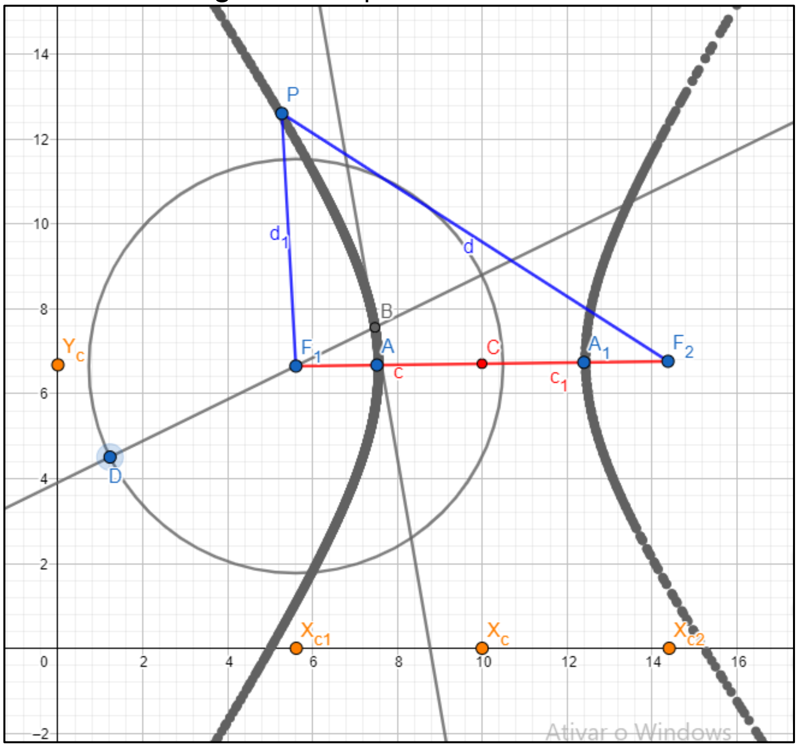
iv. Construir a mediatriz do segmento DF_1.

v. Criar um ponto B na intercessão da mediatriz e a reta DF_1.

vi. Usar a ferramenta do *GeoGebra* “criar rastro” sobre o ponto B e deslocar o ponto A sobre a circunferência.

O rastro criado pelo ponto B será uma hipérbole.

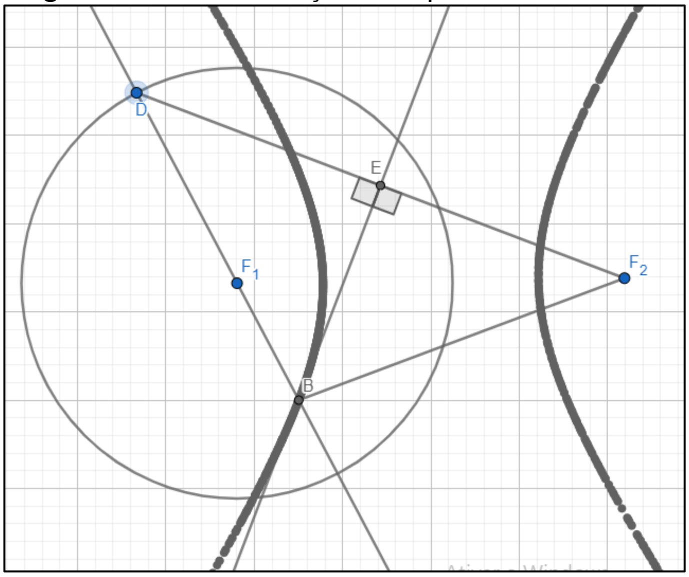
Figura 48: Hipérbole



Fonte: O autor

Agora vamos mostrar porque esta construção representa uma hipérbole

Figura 49: Demonstração da hipérbole



Fonte: O autor

Podemos notar que o triângulo BDF_2 foi subdividido em dois triângulos, BED e BEF_2. Vamos mostrar que são congruentes.

Como a reta $\overleftrightarrow{BE}$ é mediatriz do segmento DF_2, podemos concluir que os ângulos $B\hat{E}D$ e $B\hat{E}F_2$ são retos e os lados DE e EF_2 são congruentes. Como o segmento BE é lado comum, pelo caso de congruência LAL, podemos concluir que os triângulos BED e BEF_2 são congruentes.

Sendo assim os lados BD e BF_2.são congruentes, logo

$$d(B,F2) - d\,(B,F1) \;=\; d\,(B,F2) - [d(B,D) - d(D,F1)] \;=\; d(D,F1).$$

Então, podemos perceber que temos um lugar geométrico cuja diferença das distâncias para os pontos F_1 e F_2 são iguais, ou seja, uma hipérbole.

20.1 Dados os pontos F_1 e F_2 (focos) e uma medida a, determine a equação que representa o lugar geométrico dos pontos cuja diferença das distâncias aos pontos F_1 e F_2 é igual a $2a$.

Demonstração: Considere a Figura 48 e a seguinte notação:

- F_1 , F_2: Focos da hipérbole.
- C: Ponto médio entre os focos.
- X_c: Coordenada x do ponto C.
- Y_c: Coordenada y do ponto C.
- c: Distância do F_1 ao ponto C.

- c_1: Distância do F_2 ao ponto C.

Como $c = c_1, X_{c1}$ possui coordenada $x = x_c - c$ e X_{c2} coordenada $x = x_c + c$. Dado um ponto P sobre a hipérbole vamos supor que

$$d(P, F_2) - d(P, F_1) = \mp 2a,$$

$$d(P, F_1) = \mp 2a + d(P, F_2),$$

$$\sqrt{(x - (x_c + c))^2 + (y - y_c)^2} = \mp 2a + \sqrt{(x - (x_c - c))^2 + (y - y_c)^2},$$

$$\sqrt{(x - x_c - c)^2 + (y - y_c)^2} = \mp 2a + \sqrt{(x - x_c + c)^2 + (y - y_c)^2}.$$

Substituindo $X = x - x_c$ e $Y = y - y_c$, temos

$$\sqrt{(X - c)^2 + Y^2} = \mp 2a + \sqrt{(X + c)^2 + Y^2}.$$

Elevando ambos os lados ao quadrado

$$(X - c)^2 + Y^2 = 4a^2 \mp 4a\sqrt{(X + c)^2 + Y^2} + (X + c)^2 + Y^2.$$

Acrescentando $-Y^2$ em ambos os lados

$$X^2 - 2Xc + c^2 = 4a^2 \mp 4a\sqrt{(X + c)^2 + Y^2} + X^2 + 2Xc + c^2.$$

Acrescentando $-X^2 - c^2 - 2Xc$ em ambos os lados

$$-4Xc = 4a^2 \mp 4a\sqrt{(X + c)^2 + Y^2}.$$

Dividindo tudo por 4.

$$-Xc = a^2 \mp a\sqrt{(X + c)^2 + Y^2},$$

$$-Xc - a^2 = \mp a\sqrt{(X + c)^2 + Y^2}.$$

Elevando os dois lados ao quadrado

$$X^2c^2 + 2Xa^2c + a^4 = a^2\left((X + c)^2 + Y^2\right),$$

$$X^2c^2 + 2Xa^2c + a^4 = a^2(X^2 + 2Xc + c^2 + Y^2),$$

$$X^2c^2 + 2Xa^2c + a^4 = a^2X^2 + 2Xa^2c + a^2c^2 + a^2Y^2.$$

Acrescentando $-2Xa^2c$ em ambos os lados

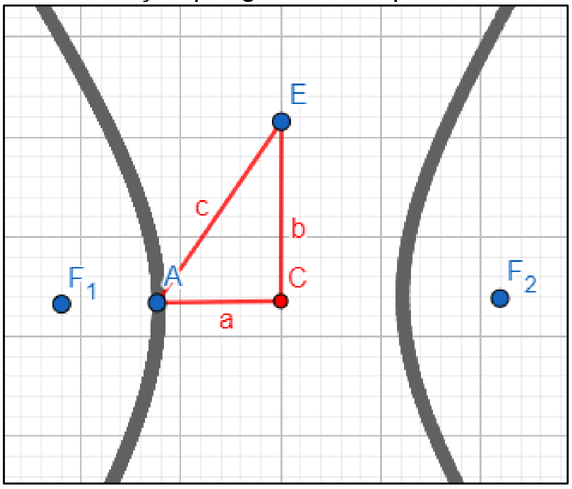
$$X^2c^2 + a^4 = a^2X^2 + a^2c^2 + a^2Y^2,$$

$$X^2c^2 - a^2X^2 - a^2Y^2 = a^2c^2 - a^4,$$

$$X^2(c^2 - a^2) - a^2Y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Sabemos que na hipérbole $c^2 = b^2 + a^2$

Figura 50: Relação pitagórica na hipérbole



Fonte: O autor

Substituindo $b^2 = c^2 - a^2$

$$X^2b^2 - a^2Y^2 = a^2b^2.$$

Dividindo por a^2b^2

$$\frac{X^2b^2}{a^2b^2} - \frac{a^2Y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2},$$

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1,$$

Como $X = x - x_c \ e \ Y = y - y_c$,

$$\frac{(x-x_c)^2}{a^2} - \frac{(y-y_c)^2}{b^2} = 1.$$

Observação: Esta hipérbole possui o eixo que contém os focos paralelos ao eixo x, o procedimento de construção e demonstração da hipérbole com eixo focal paralelo ao eixo y é análogo.

20.2 Um ponto P no plano cartesiano se move de forma que sua distância até o ponto A (8,0) é o dobro da sua distância até a reta r: x – 2 = 0. Determine o lugar geométrico descrito por P

Seja P (x,y) um ponto qualquer. Devemos ter

$$D_{PA} = \sqrt{(x-8)^2 + y^2},$$

$$D_{Pr} = |x - 2|.$$

Como $D_{PA} = 2D_{Pr}$, temos

$$\sqrt{(x-8)^2 + y^2} = 2|x - 2|,$$

$$\sqrt{(x-8)^2+y^2} = |2x-4|.$$

Elevando ambos os lados ao quadrado

$$x^2 - 16x + 64 + y^2 = 4x^2 - 16x + 16\ ,$$

$$3x^2 - y^2 - 48 = 0\ ,$$

$$3\ (x-0)^2 - (y-0)^2 = 48\ .$$

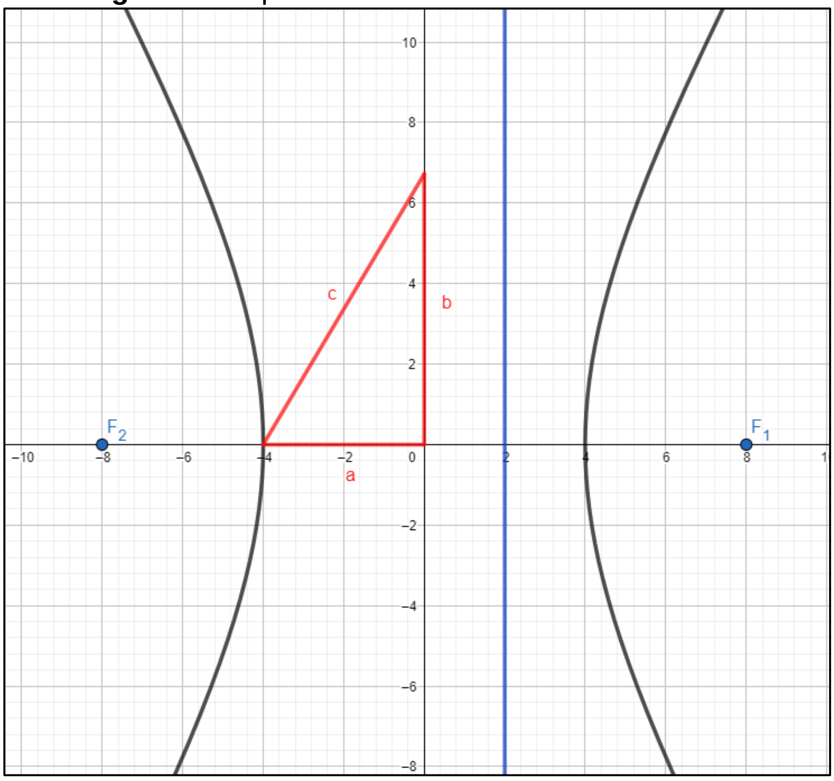
Dividindo ambos os lados por 48

$$\frac{(x-0)^2}{16} - \frac{(y-0)^2}{48} = 1\ ,$$

$$\frac{(x-0)^2}{4^2} - \frac{(y-0)^2}{(4\sqrt{3})^2} = 1\ ,$$

Ou seja, o lugar geométrico descrito é uma hipérbole com $a = 4$ e $b = 4\sqrt{3}$, como $c^2 = a^2 + b^2$, temos que $c = 8$. O ponto C está na origem e os focos têm coordenadas $(0{,}8)$ e $(0, -8)$.

Figura 51: Hipérbole do Problema 20.2



Fonte: O autor

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho buscou apresentar uma série de problemas que envolvem o conceito de Lugares Geométricos para serem resolvidos, utilizando o software de geometria dinâmica GeoGebra, tendo em vista que poucos livros didáticos apresentam conteúdos dessa área.

Desta forma, este trabalho pode ser empregado como um material de apoio para professores que se interessam em trabalhar com essa área do conhecimento. Os problemas apresentados possuem diferentes níveis de dificuldade e abrangem várias áreas da Geometria, podendo assim, serem trabalhados no Ensino Fundamental, Médio e Superior.

Em pesquisas bibliográficas aprendi muito no que se refere ao ensino da Geometria por meio do Desenho Geométrico. Percebi também o quanto são escassas as literaturas relacionadas a Lugares Geométricos o que tornou este trabalho mais complexo e gratificante.

Como professor dos Ensinos Fundamental (anos finais) e Médio, o Desenho Geométrico se tornou indispensável para minhas aulas de Geometria, assim como os conceitos de Lugares Geométricos. Nesses últimos anos promovi mudanças em todo o meu ambiente escolar. Materiais que antes eram ignorados pelos professores e pela escola, como esquadro, régua e compasso hoje são indispensáveis para o meu trabalho e consequentemente para os alunos. Além disso, incorporei, juntamente com meus alunos, o uso do Geogebra, por meio de aparelhos de telefone celulares, tendo percebido um maior engajamento dos alunos com a Geometria e suas áreas.

Aprendi também que o Desenho Geométrico e os Lugares Geométricos podem ser trabalhados em diferentes etapas do desenvolvimento do conteúdo, até mesmo na introdução de alguns assuntos, fazendo com que os alunos investiguem e reconheçam regularidades e assim identificar e definir as propriedades das figuras geométricas, para então formalizar o conteúdo, identificando os elementos presentes em uma fórmula e suas relações; e finalmente para fixação do conteúdo por meio da resolução de problemas envolvendo Lugares Geométricos.

Em se tratando de cônicas o meu aprendizado foi ainda maior, pois tive pouco contato com estas curvas enquanto professor de Desenho Geométrico. Em minha graduação, foi explorada a relação entre as cônicas e sua representação algébrica e como não tinha contato com Lugares Geométricos, não percebia a relação entre esses dois assuntos, mas após o contato intenso com os Lugares Geométricos neste trabalho, pude ver as cônicas sobre essa perspectiva, assim como problemas referentes às relações entre pontos e retas, que por meio de sua resolução algébrica, pude perceber que se tratavam de cônicas.

Resumidamente, pesquisar e escrever este trabalho ampliou os meus horizontes, apesar de já ter trabalhado com o GeoGebra, hoje vejo com maior clareza o quanto esta ferramenta pode contribuir nas aulas de Geometria, e claro Desenho Geométrico.

Vale ressaltar que os resultados obtidos neste trabalho são parciais e não esgotam o tema, pois o ensino de Geometria por meio de Desenho Geométricos e Lugares Geométricos é um assunto complexo que deveria ser mais explorado em diferentes pesquisas. Deixo, então como sugestão, para pesquisas posteriores, a aplicação destes problemas por meio de metodologias ativas de aprendizagem, como Resolução de Problemas, Investigação Matemática e Modelagem Matemática.

REFERÊNCIAS

ALVES, A. R. 2017. **O Desenho Geométrico no 9º ano como Estratégia Didática no Ensino da Geometria.** (Dissertação mestrado) – Universidade Estadual de Alagoas, Alagoas, 2017.

ARAÙJO, A. A. 2011. **Abordagem de alguns lugares geométricos planos em um ambiente de geometria dinâmica**. (Dissertação de Mestrado). Universidade Bandeirantes de São Paulo.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília, 2018.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 3 Ed. Trad. Helena Castro. São Paulo: Blucher, 2012.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. 5. Ed. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Unicamp, 2011.

GARDNER, H. **Estruturas da Mente: A Teoria das Inteligências Múltiplas.** Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1994.

JORGE, S.; **Desenho Geométrico: Idéias e Imagens.** 2ª Ed., Saraiva, São Paulo. 2002.

KALEFF, A. M. **Tomando o ensino da geometria em nossas mãos.** Educação Matemática em Revista, São Paulo, v. 1, 1994.

KALTER R. S. **Geometria e o Desenho Geométrico no ensino de 1º grau em Curitiba – Contribuições Para uma proposta de integração de conteúdos curriculares.** (Dissertação de mestrado) Curitiba : UFPR ,1986.

LACAZ NETTO, F. A. **Lugares Geométricos Planos.** 2 ed. São Paulo: Livraria Nobel S/A, 1957

LORENZATO, S. **Por que não ensinar geometria?** Educação Matemática em Revista, São Paulo, v. 4, 1995.

OLIVEIRA, C. L. **Importância do Desenho Geométrico. Trabalho de Conclusão de Curso.** Universidade Católica de Brasília. Brasília. 2005

Parâmetro Curriculares Nacionais (**PCNs**). Ensino Fundamental. Terceiro e quarto ciclos. Brasília> MEC/SEF, 1998

ROQUE, T. CARVALHO, J.B.P**. Tópicos de História da Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.