Universidade Regional do Cariri - URCA
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Utilizando Progressões Aritméticas na Resolução de Certos Problemas de Funções

Filipe Lemos Soares Rocha Lima

Juazeiro do Norte - CE

2021

Utilizando Progressões Aritméticas na Resolução de Certos Problemas de Funções

Filipe Lemos Soares Rocha Lima

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Regional do Cariri como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em matemática.

Orientador: Prof. Dr. Paulo César Cavalcante de Oliveira

Juazeiro do Norte - CE

2021

Ficha Catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade Regional do Cariri – URCA
Bibliotecária: Ana Paula Saraiva de Sousa CRB 3/1000

Lima, Filipe Lemos Soares Rocha.
L732u Utilizando progressões aritméticas na resolução de certos problemas de funções/ Filipe Lemos Soares Rocha Lima. – Juazeiro do Norte-CE, 2021
83p.

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Regional do Cariri – URCA
Orientador: Prof. Dr. Paulo César Cavalcante de Oliveira
Coorientador: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves

1. Função polinomial, 2. Função quadrática, 3. Sequências, 4. Progressões aritméticas; I. Título.

CDD: 513

Utilizando Progressões Aritméticas na Resolução de Certos Problemas de Funções

Filipe Lemos Soares Rocha Lima

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Regional do Cariri como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em matemática.

Orientador: Prof. Dr. Paulo César Cavalcante de Oliveira

Utilizando Progressões Aritméticas na Resolução de Certos Problemas de Funções

Filipe Lemos Soares Rocha Lima

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Regional do Cariri como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título mestre em matemática.

Aprovada em 29/01/2021

Paulo César Cavalcante de Oliveira

Prof. Dr. Paulo César Cavalcante de Oliveira(Orientador)
Universidade Regional do Cariri(URCA)

Francisco Régis Vieira Alves

Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves(Coorientador)
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia - *campus* Fortaleza

Jocel Faustino Norberto de Oliveira

Prof. Dr. Jocel Faustino Norberto de Oliveira
Universidade Regional do Cariri(URCA)

Antonio Edinardo de Oliveira

Prof. Me. Antonio Edinardo de Oliveira
Universidade Regional do Cariri(URCA)

Darilene Mª Ribeiro Macedo

Profa. Ma. Darilene Maria Ribeiro Macedo
Centro de Educação de Jovens e Adultos(CEJA)

Dedico a meus pais, Raimundo e Mary, que foram os responsáveis pela minha educação, e por exemplo e dedicação me incentivaram desde a tenra idade a me dedicar aos estudos. Aos meus irmãos, Davi e Izabel, pelo carinho e amizade. Também dedico à minha esposa, Maria Camila Ferreira dos Santos Lemos Rocha. Esta me deu forças nos momentos mais difíceis, motivou-me a prosseguir na busca por esta formação nos momento que até eu mesmo estava a desistir. E por fim, dedico às minhas duas filhas, Laura e Lis por serem, junto a minha esposa, as pessoas para as quais dedico toda e qualquer conquista que alcance.

Agradecimentos

Agradeço ao Deus Eterno que criou todas as coisas pelo poder de Sua Palavra, por me proporcionar esta conquista mesmo após tantas lutas durante quase uma década. Aos meus familiares por todo o carinho e assistência. E agradeço com toda minha gratidão ao grupo docente do Departamento de Matemática da Universidade Regional do Cariri, em especial aos coordenadores Prof. Dr. Flávio França Cruz e Prof. Dr. Paulo César Cavalcante de Oliveira, representantes dos professores do Programa que possibilitaram que eu pudesse realizar o ENA e o ENQ em horário alternativo por ser Adventista do Sétimo Dia. Meu muito obrigado a todos!

“Combati o bom combate, [...] guardei a fé.”(2 Timóteo 4:7)

Resumo

Entendemos que os problemas matemáticos são resolvidos por determinadas técnicas ou métodos. Dessa forma, os mais diversos problemas poderiam ser agrupados pelas técnicas que os resolveriam. Em geral, a partir dos dados fornecidos no problema de forma explícita ou implícita caraterizamos uma "classe de problemas".

Este trabalho se propõe a apresentar um método de resolução para uma classe de problemas de função. Apresentaremos com mais detalhes o método aplicado na resolução de situações com funções quadráticas a saber: dados três pontos pertencentes ao gráfico de uma função quadrática, determinar a imagem de um quarto valor do domínio.

Essa técnica se baseia no uso da caracterização da função quadrática associado às características das Progressões Aritméticas de ordem superior. Para uso na educação básica, o método requer que os valores do domínio estejam em P.A., o domínio elementar de equação e da operação subtração. Porém, apresentamos no trabalho a validade para valores do domínio que não estejam em P.A.

No decorrer do trabalho, fazemos considerações sobre os objetos de estudo: Progressões, Polinômios e Funções polinomiais, bem como mencionamos orientações sobre terminologias usadas comumente por professores da educação básica e estudos sobre mudanças no Currículo da Matemática.

Palavras-chave: Função polinomial, função quadrática, sequências, progressões aritméticas.

Abstract

We understand that mathematical problems are solved by certain techniques or methods. In this way, the most diverse problems could be grouped by the techniques that would solve them. In general, from the data provided in the problem explicitly or implicitly, we characterize a “class of problems”.

This work proposes to present a method of solving a class of function problems. We will present in more detail the method applied in solving situations with quadratic functions, namely: given three points belonging to the graph of a quadratic function, determine the image of a fourth value of the domain.

This technique is based on the use of the characterization of the quadratic function associated with the characteristics of higher order Arithmetic Progressions. For use in K-12 education, the method requires the domain values to be in P.A., the elementary domain of equation and subtraction operation. However, we present in the work the validity for domain values that are not in P.A.

In the course of the work, we make considerations about the objects of study: Progressions, Polynomials and Polynomial Functions, as well as mention guidelines on terminology commonly used by basic education teachers and studies on changes in the Mathematics Curriculum.

Keywords

Polynomial function, quadratic function, sequences, arithmetic progressions.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

No Ensino Fundamental, séries finais, precisamente no 9º ano, são vistos os primeiros conceitos de função e, em seguida, a função afim e a quadrática. Porém, o ensino de progressões na Educação Básica é realizada detalhadamente apenas no Nível Médio. Sabendo que a caracterização destas funções, segundo Lima et al. [6], relaciona-se com os conceitos de progressões aritméticas, o professor fica restrito a métodos repetitivos e, para a classe de problemas que trabalharemos, resolução de sistemas. Baseada em nossa experiência em sala de aula, conhecer outros métodos e mais características das funções afim e quadrática é fundamental para o educando ter resultados satisfatórios em avaliações como SPAECE (Sistema Permanente da Avaliação da Educação Básica no Ceará) ou ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio no Brasil). Das funções, estas são as mais utilizadas como se pode verificar nas provas aplicadas. Para consulta das provas do ENEM busque na página oficial do Inep [3]. Já as avaliações do SPAECE não são disponibilizadas para consulta.

Aproveitamos para corroborar, em partes, com a pesquisa de Flores [2] no que se refere ao estudo das progressões ainda no Ensino Fundamental. Porém, acreditamos que seria ideal que não apenas a P.A. (Progressão Aritmética) de primeira ordem, mas também a de segunda ordem fosse abordada no Ensino Fundamental. A nossa proposta, com este trabalho, é usar as progressões aritméticas de segunda ordem para resolver uma classe de problemas envolvendo funções quadráticas.

Em geral, usamos os sistemas de equações para definir as leis de associação de uma função partindo dos pontos dados. No caso da função afim, temos uma sistema 2x2 que facilmente é resolvido por uma subtração das equações do sistema. Mas, no caso da função quadrática tal problema não é abordado no Fundamental, pois, em geral, deveria se resolver um sistema 3x3, que é trabalhado apenas no Ensino Médio. Com os conceitos de progressões, lançando mão da caracterização da função quadrática, podemos determinar a lei de associação desta função sem usar o método de sistemas.

O presente trabalho faz uma aplicação de progressão aritmética de segunda ordem no estudo de funções quadráticas. Ele está organizado em cinco capítulos. No primeiro, em que nos encontramos, fazemos uma apresentação sucinta do trabalho. No segundo capítulo, apresentamos as progressões aritméticas, harmônicas, geométricas e aritmético-geométrica. Neste, damos destaque aos detalhes apresentados no estudo das progressões aritméticas, vistas em duas seções, e a conceituação da aritmético-geométrica, por ser quase desconhecida dentre os professores da Educação Básica. Seguimos para o estudo dos polinômios e das funções polinomiais no terceiro capítulo. E, por fim, chegamos no método desenvolvido para resolver a classe de problemas no capítulo quatro.

Capítulo 2

Progressões

2.1 Progressão Aritmética

Dada uma sequência numérica (a_n), finita ou não, dizemos que esta é uma Progressão Aritmética, ou simplesmente P.A., se a diferença de qualquer termo, a partir do segundo, pelo seu antecessor for constante chamada *razão*, denotada por r. Ou seja, se para todo $n > 1$, com $n \in \mathbb{N}, r = a_n - a_{n-1}$, então dizemos que a sequência a_n é uma P.A.. A esta diferença realizada entre dois termos consecutivos, que chamamos de operador Δ. Ao aplicar-se tal operador em uma sequência e constatar-se que $\Delta(a_n)$ é uma constante maior que zero, dizemos que esta é uma P.A. *crescente*. No caso, que $\Delta(a_n)$ ser uma constante menor que zero, então a progressão aritmética é dita *decrescente*. E para diferença nula, temos uma P.A. *constante* ou *degenerada*.

Dessa forma, podemos definir tais sequências como uma recorrência $a_n = a_{n-1} + r$. Mas tal definição não ajuda muito para se determinar elementos, pois para encontrar o n-ésimo termo seria necessário obter cada termo, a partir do primeiro, até o de posição n. Assim, faz-se necessária uma relação que não seja por recorrência, como segue:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= a_1 \\
a_2 &= a_1 + r \\
a_3 &= a_2 + r = (a_1 + r) + r = a_1 + 2r \\
a_4 &= a_3 + r = (a_1 + 2r) + r = a_1 + 3r \\
&\vdots \\
a_n &= a_1 + (n-1)r \; .
\end{aligned}
$$

Esta relação encontrada é denominada **fórmula do termo geral**. Observe que assim definimos o n-ésimo a partir do primeiro elemento a_1 e da razão r, que são valores conhecidos, e, portanto, em função de n. Então, podemos escrever a seguinte função afim $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_1 + (n-1)r \\
a_n &= a_1 + rn - r \\
a_n &= rn + (a_1 - r) \; .
\end{aligned}
$$

Portanto, $f(n) = rn + (a_1 - r)$. Note que a razão r corresponde à taxa de variação a da função afim $f(x) = ax + b$, que é o coeficiente angular da reta associada; e $(a_1 - r)$ corresponde ao valor fixo, ou valor inicial da função, e define o valor que a reta associada secciona o eixo das ordenadas. Perceba que este valor corresponde a um elemento fictício que seria o antecessor do primeiro termo da P.A., logo $a_1 - r = a_0 = b$.

Por outro lado, podemos não dispor do primeiro elemento. A seguir, definiremos uma relação que pode determinar o n-ésimo termo a partir da razão e de qualquer elemento dado. Para tanto, vamos tomar o k-ésimo elemento da P.A. como sendo a informação conhecida. Escrevendo a_k pela fórmula do termo geral e isolando a_1, segue que:

$$\begin{aligned} a_k &= a_1 + (k-1)r \\ a_1 &= a_k + (1-k)r \ . \end{aligned}$$

Reescrevendo a fórmula do termo geral, fazendo a substituição da igualdade obtida acima, temos:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)r \\ &= a_k + (1-k)r + (n-1)r \\ &= a_k + (1-k+n-1)r \\ &= a_k + (n-k)r \ . \end{aligned}$$

Definimos **termos equidistantes dos extremos** quando o número de termos que antecede um deles é igual ao número de elementos que sucede o outro. Dessa forma, numa P.A., com n elementos, temos os seguintes pares de termos equidistantes dos extremos: a_1 e a_n; a_2 e a_{n-1}; a_3 e a_{n-2}; ...; a_i e a_{n-i+1}. Observe que dados dois termos quaisquer equidistantes dos extremos, a soma dos seus índices é constante, igual a $n+1$. Denotamos a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética por S_n.

Teorema 2.1. *A soma dos n primeiros termos de uma P.A. é dada por:*

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Demonstração: Usando a comutatividade da adição, some as equações uma a uma de S_n duas vezes e, observando os termos são equidistante dos extremos, obtemos:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n \\ S_n &= a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1 \ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2S_n &= (a_1 + a_n)n \\ \therefore S_n &= \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \ . \end{aligned}$$

■

Aplicando o termo geral, em função de n, na fórmula da soma dos n primeiros termos, escrevemo-la em função de n, obtendo uma função quadrática $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, como segue:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \\ &= \frac{[a_1 + rn + (a_1 - r)]n}{2} \\ &= a_1 n + r\frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore f(n) = \frac{r}{2}n^2 + \frac{2a_1 - r}{2}n \ .$$

2.2 Progressão Aritmética de Ordem Superior

Dizemos que uma P.A. é de ordem 1 quando aplicamos o operador Δ nos seus termos e obtém-se como resultado uma sequência de números constante, diferente de zero. Ou seja, esta é a P.A. convencional que tratamos anteriormente.

Por outro lado, chamamos uma sequência numérica de P.A. de ordem 2 quando ao aplicarmos o operador Δ nos seus elementos, obtemos uma sequência (α_n) que é uma P.A. não estacionária. Logo, ao aplicar o operador nessa sequência (α_n), obtém-se uma sequência constante não nula. Generalizando o raciocínio, dizemos que uma sequência é uma P.A. de ordem n se ao aplicar o operador diferença n vezes, obtivermos uma sequência constante não nula.

Consideremos a sequência (b_n), uma P.A. de segunda ordem. Sabemos que a diferença dos elementos consecutivos de b_n forma uma sequência de números que estão em P.A. não constante, que denotaremos por (α_n). Vamos determinar a fórmula do termo geral da progressão de ordem 2. Para tanto, considere as seguintes equações e somemos uma a uma.

$$\begin{array}{rcl} b_2 - b_1 & = & \alpha_1 \\ b_3 - b_2 & = & \alpha_2 \\ b_4 - b_3 & = & \alpha_3 \\ & \vdots & \\ b_n - b_{n-1} & = & \alpha_{n-1} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \therefore b_n - b_1 & = & \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1} \\ b_n & = & b_1 + \alpha_1(n-1) + r\dfrac{(n-1)(n-2)}{2} \ . \end{array}$$

Note que, para a relação encontrada depender apenas de n é necessário ser dado os valores das constantes b_1, α_1 e r, onde r é a razão da P.A., obtida pela aplicação do operador Δ.

Determinaremos a soma dos termos de uma progressão aritmética de segunda ordem, denotaremos essa soma por S^{II}. A seguir, faremos uma afirmação quanto à esta fórmula.

Proposição 2.2. *A soma dos n primeiros termos de uma P.A. de ordem 2 é dada por $S_n^{II} = b_1 n + \alpha_1 \dfrac{n(n-1)}{2} + r\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$, em que (b_n) é a P.A de segunda ordem e*

(α_n) é uma P.A. de razão r resultante de $\Delta(b_n)$.

Demonstração: Por meio de indução finita, provaremos que S_n^{II} é válida para todo n natural. Note que para o caso $n = 1$ é válido.

$$\begin{aligned} S_1^{II} &= b_1 \cdot 1 + \alpha_1 \frac{1 \cdot 0}{2} + r \frac{1 \cdot 0 \cdot (-1)}{6} \\ &= b_1 \end{aligned}$$

Suponhamos, por hipótese de indução, que é válido para n. Provaremos que vale para o seu sucessor $(n+1)$.

$$\begin{aligned} S_n^{II} &= b_1 + b_2 + \cdots + b_n \Rightarrow S_{n+1}^{II} = S_n^{II} + b_{n+1} \\ S_{n+1}^{II} &= b_1 n + \alpha_1 \frac{n(n-1)}{2} + r \frac{n(n-1)(n-2)}{6} + b_{n+1} \,. \end{aligned}$$

Usando a fórmula do termo geral para P.A. de ordem 2, como definimos acima, temos:

$$\begin{aligned} S_{n+1}^{II} &= b_1 n + \alpha_1 \frac{n(n-1)}{2} + r \frac{n(n-1)(n-2)}{6} + b_1 + \alpha_1 (n) + r \frac{n(n-1)}{2} \\ &= b_1(n+1) + \alpha_1 \left(\frac{n(n-1)}{2} + n \right) + r \left(\frac{n(n-1)(n-2)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} \right) \\ &= b_1(n+1) + \alpha_1 \frac{(n+1)n}{2} + r \frac{(n+1)n(n-1)}{6} \,. \end{aligned}$$

Como queríamos provar. Logo $S_n^{II} = b_1 n + \alpha_1 \dfrac{n(n-1)}{2} + r \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$. ■

A seguir, caracterizaremos o termo geral da sequência (c_n), uma P.A. de terceira ordem. De forma análoga, realizaremos a diferença dos elementos consecutivos desta, resultando na P.A. de segunda ordem (β_n). Usando as relações obtidas anteriormente, no que se refere a tais tipos de sequências, chegaremos à seguinte relação em que (α_n) é a P.A. resultante de $\Delta(\beta_n)$. Em seguida, somaremos as equações uma a uma como segue:

$$
\begin{aligned}
c_2 - c_1 &= \beta_1 \\
c_3 - c_2 &= \beta_2 \\
c_4 - c_3 &= \beta_3 \\
&\vdots \\
c_n - c_{n-1} &= \beta_n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore c_n - c_1 &= \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_{n-1} \\
c_n &= c_1 + \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_{n-1} \\
c_n &= c_1 + \beta_1(n-1) + \alpha_1\frac{(n-1)(n-2)}{2} + r\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}\ .
\end{aligned}
$$

Denotaremos a soma dos n primeiros termos de uma P.A. de terceira ordem por S^{III}. E expressaremos essa relação por meio da seguinte proposição.

Proposição 2.3. *A soma dos n primeiros termos de uma P.A. de ordem 3 (c_n) é dada por $S_n^{III} = c_1 n + \beta_1\frac{n(n-1)}{2} + \alpha_1\frac{n(n-1)(n-2)}{6} + r\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$, em que (β_n) é a P.A. de segunda ordem advinda de $\Delta(c_n)$ e (α_n) é uma P.A. de razão r resultante de $\Delta(\beta_n)$.*

Demonstração: Provaremos por indução finita. Note que para $n = 1$ é verdade:

$$
\begin{aligned}
S_1^{III} &= c_1 n + \beta_1\frac{0}{2} + \alpha_1\frac{0}{6} + r\frac{0}{24} \\
&= c_1\ .
\end{aligned}
$$

Suponhamos, por hipótese de indução, que é válido para n. Provaremos que vale para o seu sucessor $(n+1)$.

$$\begin{aligned} S_n^{III} &= c_1 + c_2 + \cdots + c_n \Rightarrow S_{n+1}^{III} = S_n^{III} + c_{n+1} \\ S_{n+1}^{III} &= c_1 n + \beta_1 \frac{n(n-1)}{2} + \alpha_1 \frac{n(n-1)(n-2)}{6} + r\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} + c_{n+1}\ . \end{aligned}$$

Usando a fórmula do termo geral para P.A. de ordem 3, como definimos acima, temos:

$$\begin{aligned} S_{n+1}^{III} &= c_1 n + \beta_1 \frac{n(n-1)}{2} + \alpha_1 \frac{n(n-1)(n-2)}{6} + r\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} + c_1 + \beta_1(n) \\ &+ \alpha_1 \frac{n(n-1)}{2} + r\frac{n(n-1)(n-2)}{6} \\ &= c_1(n+1) + \beta_1 \frac{n(n-1)+2n}{2} + \alpha_1 \frac{n(n-1)(n-2)+3n(n-1)}{6} \\ &+ r\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)+4n(n-1)(n-2)}{24} \\ &= c_1(n+1) + \beta_1 \frac{n(n+1)}{2} + \alpha_1 \frac{(n+1)n(n-1)}{6} + r\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{24}\ . \end{aligned}$$

Portanto, $S_n^{III} = b_1 n + \alpha_1 \frac{n(n-1)}{2} + r\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ é válida para todo n natural.

■

Sabendo que nas relações acima r é a diferença dos termos da P.A. (α_n), faz-se necessário que esta apresente, no mínimo, dois termos para ser possível se chegar ao valor da razão. Decorrendo disso, para se obter estes dois termos é necessário aplicar o operador Δ em uma P.A. de segunda ordem composta de, pelo menos, três elementos. De forma análoga, para se determinar a razão de α_n e escrever S_n^{III} ou c_n como apresentado acima, é necessário que c_n apresente, pelo menos, quatro termos. Do contrário, não teremos informações suficientes para caracterizar a sequência numérica. Veja o exemplo a seguir.

Exemplo 2.1. *A sequência* $(5, 7, 12, ...)$ *é uma progressão aritmética de terceira ordem. Queremos determinar seu quarto termo.*

Para isso, seja $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = (5, 7, 12, ...)$, aplicando o operador Δ sucessivas vezes obtemos a P.A. de ordem 2, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} = (2, 5, ...)$, e a P.A. de primeira ordem, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} = (3, ...)$. Porém, α_n não está bem definida, pois não há elementos suficientes para saber quanto vale r. Consequentemente, para cada r teremos uma c_n, ou seja, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = (5, 7, 12, 20 + r, ...)$, a P.A. de ordem 2 $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} = (2, 5, 8 + r, ...)$, e a P.A. $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} = (3, 3 + r, ...)$. Generalizando esta questão, temos que uma P.A. de ordem n estará bem definida se forem dados $n + 1$ dos seus elementos.

Feita esta observação, note que cada uma das relações que definem o termo geral e a soma dos n primeiros termos das progressões até aqui estudadas podemos substituir em cada parcela as expressões de n por números binomiais. Observe a seguir.

P.A.

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)r \\ &= \tbinom{n-1}{0}a_1 + \tbinom{n-1}{1}r \ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 n + \frac{n(n-1)}{2}r \\ &= \tbinom{n}{1}a_1 + \tbinom{n}{2}r \ , \end{aligned}$$

P.A. de ordem 2

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + (n-1)\alpha_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}r \\ &= \tbinom{n-1}{0}b_1 + \tbinom{n-1}{1}\alpha_1 + \tbinom{n-1}{2}r \ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_n^{II} &= b_1 n + \frac{n(n-1)}{2}\alpha_1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}r \\ &= \tbinom{n}{1}b_1 + \tbinom{n}{2}\alpha_1 + \tbinom{n}{3}r \ , \end{aligned}$$

P.A. de ordem 3

$$\begin{aligned} c_n &= c_1 + (n-1)\beta_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\alpha_1 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}r \\ &= \tbinom{n-1}{0}c_1 + \tbinom{n-1}{1}\beta_1 + \tbinom{n-1}{2}\alpha_1 + \tbinom{n-1}{3}r \ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_n^{III} &= c_1 n + \frac{n(n-1)}{2}\beta_1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}\alpha_1 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}r \\ &= \tbinom{n}{1}c_1 + \tbinom{n}{2}\beta_1 + \tbinom{n}{3}\alpha_1 + \tbinom{n}{4}r \ . \end{aligned}$$

A indagação que segue naturalmente é se isso seria válido para uma P.A. de ordem n. Mas, para trabalharmos esse questionamento, faremos uma mudança na forma que representamos as progressões, pois para representarmos progressões de ordem muito alta não haveria letra suficiente no alfabeto $(a_n, b_n, c_n, ..., z_n)$. Assim, usaremos um índice sobrescrito em algarismo romano para não confundir com a operação potência. E para generalizar a ordem da P.A. usaremos o índice N, uma vez que não há número romano representado por tal letra. Logo, fazendo referência à notação inicialmente usada, temos: $a_n = a_n^I, b_n = a_n^{II}, c_n = a_n^{III}, ..., z_n = a_n^{XXVI}, ..., a_n^N, ...$

Teorema 2.4. *O termo geral de uma P.A. de ordem n* (a_n^N) *é dada por*

$$a_n^N = \binom{n-1}{0}a_1^N + \binom{n-1}{1}a_1^{N-1} + \cdots + \binom{n-1}{N-1}a_1^I + \binom{n-1}{N}r.$$

Demonstração: Provaremos usando indução finita em N, a ordem da progressão. Constatamos que o caso base é válido para a P.A. de ordem 1 (a_n^I), como já apresentamos anteriormente. Vamos supor, como hipótese de indução, que é válido para uma P.A. de ordem N, (a_n^N), e, decorrendo disso, provaremos que é válido para a P.A. de ordem $N+1$. A P.A. de ordem $N+1$ deve ser uma sucessão tal que $\Delta(a_n^{N+1}) = a_n^N$, e disso decorre as seguintes equações que, somadas uma a uma, nos dão:

$$
\begin{aligned}
a_2^{N+1} - a_1^{N+1} &= a_1^N \\
a_3^{N+1} - a_2^{N+1} &= a_2^N \\
a_4^{N+1} - a_3^{N+1} &= a_3^N \\
&\vdots \\
a_n^{N+1} - a_{n-1}^{N+1} &= a_{n-1}^N
\end{aligned}
$$

$$
a_n^{N+1} = a_1^{N+1} + a_1^N + a_2^N + a_3^N + \cdots + a_{n-1}^N \ .
$$

Para que a_n^N esteja bem definida, é necessário que $n-1 = N+1$. Tomando a hipótese de indução e aplicando em cada uma das parcelas, que são elementos da P.A. de ordem N, segue

$$
\begin{aligned}
a_1^N &= \binom{0}{0} a_1^N \\
a_2^N &= \binom{1}{0} a_1^N + \binom{1}{1} a_1^{N-1} \\
a_3^N &= \binom{2}{0} a_1^N + \binom{2}{1} a_1^{N-1} + \binom{2}{2} a_1^{N-2} \\
&\vdots \\
a_{n-2}^N &= \binom{n-3}{0} a_1^N + \binom{n-3}{1} a_1^{N-1} + \binom{n-3}{2} a_1^{N-2} + \cdots + \binom{n-3}{N-1} a_1^I \\
a_{n-1}^N &= \binom{n-2}{0} a_1^N + \binom{n-2}{1} a_1^{N-1} + \binom{n-2}{2} a_1^{N-2} + \cdots + \binom{n-2}{N-1} a_1^I + \binom{n-2}{N} r \ .
\end{aligned}
$$

Somando estas equações e usando o ***Teorema da Colunas***, do triângulo de *Pascal*, temos que:

$$
\begin{aligned}
a_n^{N+1} &= a_1^{N+1} + \binom{n-1}{1} a_1^N + \binom{n-1}{2} a_1^{N-1} + \binom{n-1}{3} a_1^{N-2} + \cdots + \binom{n-1}{N} a_1^I + \binom{n-1}{N+1} r \\
&= \binom{n-1}{0} a_1^{N+1} + \binom{n-1}{1} a_1^N + \binom{n-1}{2} a_1^{N-1} + \binom{n-1}{3} a_1^{N-2} + \cdots + \binom{n-1}{N} a_1^I + \binom{n-1}{N+1} r \ .
\end{aligned}
$$

Assim, fica provado o teorema. ■

Teorema 2.5. *A soma dos n primeiros termos de uma P.A. de ordem n (S_n^N) é dada por*

$$S_n^N = \binom{n}{1}a_1^N + \binom{n}{2}a_1^{N-1} + \binom{n}{3}a_1^{N-2} + \cdots + \binom{n}{N}a_1^I + \binom{n}{N+1}r.$$

Demonstração: A demonstração será feita de forma direta usando as definições já conhecidas e o resultado do Teorema anterior. Também destacamos que para a progressão estar bem definida estamos considerando que $n = N + 1$, ou seja, a quantidade de termos mínima é uma unidade maior que o valor da ordem da progressão.

$$S_n^N = a_1^N + a_2^N + a_3^N + \cdots + a_{n-1}^N + a_n^N \ .$$

Aplicando a fórmula do termo geral em cada parcela e somando as equações uma a uma usando o ***Teorema da Colunas*** do triângulo de *Pascal*, obtemos:

$$\begin{aligned}
a_1^N &= \tbinom{0}{0}a_1^N \\
a_2^N &= \tbinom{1}{0}a_1^N + \tbinom{1}{1}a_1^{N-1} \\
a_3^N &= \tbinom{2}{0}a_1^N + \tbinom{2}{1}a_1^{N-1} + \tbinom{2}{2}a_1^{N-2} \\
&\vdots \\
a_{n-1}^N &= \tbinom{n-2}{0}a_1^N + \tbinom{n-2}{1}a_1^{N-1} + \tbinom{n-2}{2}a_1^{N-2} + \cdots + \tbinom{n-2}{N-1}a_1^I \\
a_n^N &= \tbinom{n-1}{0}a_1^N + \tbinom{n-1}{1}a_1^{N-1} + \tbinom{n-1}{2}a_1^{N-2} + \cdots + \tbinom{n-1}{N-1}a_1^I + \tbinom{n-1}{N}r \\
\\
S_n^N &= \tbinom{n}{1}a_1^N + \tbinom{n}{2}a_1^{N-1} + \tbinom{n}{3}a_1^{N-2} + \cdots + \tbinom{n}{N}a_1^I + \tbinom{n}{N+1}r \ .
\end{aligned}$$

■

2.3 Progressão Harmônica

As progressões harmônicas tem em sua definição conceitos que derivam da progressão aritmética. Por esta razão, sem entrar nos méritos das aplicações, já poderíamos estudar a viabilidade de se incluir o estudo dessas sequências numéricas na educação básica. Aqui fazemos um destaque que, em particular, as universidades deveriam cobrar tal conteúdo com maior frequência, através de suas bancas de concursos/vestibular, pois ainda temos o modelo de estudo voltado para o que se cobra com maior frequência nas avaliações. Logo o currículo, na prática, não é definido pelos documentos oficiais, mas pelo que a banca tem cobrado nos últimos anos.

Como não é nosso objetivo discorrer quanto à questão curricular, nem aprofundar a sequência que leva o nome dessa seção, adiante apresentaremos as principais definições da progressão harmônica segundo LOPES [4].

Definimos a *Progressão Harmônica*, ou simplesmente P.H., como sendo a sequência de números a_n, cujo inverso forma uma P.A.

$$\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}P.H. \Leftrightarrow \left\{\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \ldots, \frac{1}{a_n}\right\} P.A.$$

Assim, partindo da definição de P.A., poderia se construir e apresentar facilmente a P.H. A seguir, apresentamos um simples exemplo introdutório, que poderia constar no plano do professor que se proponha a trabalhar tal componente curricular.

Exemplo 2.2. *A partir das progressões aritméticas caracterizadas abaixo, determinaremos as progressões harmônicas associadas a estas.*

a. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$*;*

b. Sequência dos números pares positivos menores que 100*;*

c. Sequência numérica tal que

$$\begin{cases} a_1 & = & -8 \\ a_n & = & a_{n-1}+5 \end{cases}$$

As soluções dos itens propostos são facilmente determinados por qualquer aluno do ensino médio que tenha sido apresentado a definição de inverso. Por uma questão de organização listamos as soluções por item abaixo.

- Item a

$$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right\}$$

- Item b

$$\{2,4,6,8,\ldots,98\} \text{ é a P.A.} \Rightarrow \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{98}\right\} \text{ é a P.H. desejada}$$

- Item c

$$\{-8,-3,2,7,\ldots\} \text{ é a P.A.} \Rightarrow \left\{-\frac{1}{8}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{7}, \ldots\right\} \text{ é a P.H. procurada}$$

Assim, como as progressões aritméticas, podemos classificar e representar as harmônicas entre *finita* ou *infinita*. Por exemplo, nos casos citados acima temos que os itens "a" e "b" representam progressões harmônicas finitas. Por outro lado, o item "c" é infinita.

Teorema 2.6. *Se a_n é uma progressão harmônica, então o termo geral será dado por*

$$a_n = \frac{a_1 a_2}{a_2 + (n-1)(a_1 - a_2)}$$

Demonstração: Para provarmos tomaremos uma P.A. auxiliar b_n, que está associada à P.H. a_n. Assim $b_n = \dfrac{1}{a_n} \Leftrightarrow a_n = \dfrac{1}{b_n}$. Daí,

$$r = b_1 - b_2 \Rightarrow r = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} = \frac{a_1 - a_2}{a_1 a_2} \; .$$

Usando a fórmula do termo geral da P.A. segue que

$$b_n = b_1 + (n-1)r \Rightarrow \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} + (n-1)\frac{a_1 - a_2}{a_1 a_2} = \frac{a_2 + (n-1)(a_1 - a_2)}{a_1 a_2}$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{b_n} \Rightarrow a_n = \frac{a_1 a_2}{a_2 + (n-1)(a_1 - a_2)} \; .$$

Também poderíamos representar o termo geral da harmônica usando uma lei de recorrência. Usando um processo análogo ao descrito anteriormente, temos que $b_n = b_{n-1} + r$. Logo

$$\begin{cases} a_n & = & a_1 ; n = 1 \\ \dfrac{1}{a_n} & = & \dfrac{1}{a_{n-1}} + r \; , \; n > 1 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} a_n & = & a_1 ; n = 1 \\ a_n & = & \dfrac{a_{n-1}}{1 + r a_{n-1}} \; , \; n > 1 \end{cases}$$

Assim finalizamos esta apresentação, pois julgamos suficiente para o que nos propomos. Todavia, recomendamos ao leitor uma consulta ao trabalho de NASCIMENTO (2017) [8] que toma a progressão harmônica como um dos objetos de estudo na sua pesquisa e que serviu de referência para o que apresentamos.

2.4 Progressão Geométrica

As progressões geométricas são trabalhadas na educação básica, mas esta não constitui o principal objeto de estudo nosso. Apresentaremos as principais definições com a finalidade de citar as progressões aritmético-geométrico, que será abordado na seção seguinte. Lembramos que o trabalho atual se baseia em um método que usa a caracterização da função quadrática para resolver uma classe de problemas. Talvez seja o caso de uma futura investigação para constatar se a caracterização da função exponencial resolveria alguma classe de problemas com o auxílio das progressões geométricas.

Dada uma sequência numérica (a_n), finita ou não, esta será uma *Progressão Geométrica* (P.G.), se a razão entre todo termo e o seu antecessor for constante. A esta chamamos *razão* e denotamo-la por q. Logo,

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \cdots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = q.$$

Desta relação é possível estabelecer uma definição por recorrência.

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q \Rightarrow a_n = a_{n-1} \cdot q$$

Todavia, a relação por recorrência não é tão usual por apresentar algumas limitações no que se refere à praticidade de encontrar o valor de um termo da progressão em função de sua ordem (posição). Para determinar esta relação, multiplique as igualdades a seguir isolando o termo geral a_n.

$$
\begin{aligned}
a_1 &= a_1 \\
a_2 &= a_1 q \\
a_3 &= a_2 q \\
a_4 &= a_3 q \\
&\vdots \\
a_{n-1} &= a_{n-2} q \\
a_n &= a_{n-1} q
\end{aligned}
$$

$$\therefore a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n = a_1 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot q^{n-1}$$

$$\therefore a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \ .$$

Ainda é possível realizarmos uma generalização da fórmula do termo geral descrita acima. Caso não tenhamos o primeiro elemento da sequência, mas seja conhecido um termo de ordem k. Note que $a_k = a_1 \cdot q^{k-1}$, logo $a_1 = \frac{a_k}{q^{k-1}}$. Substituindo, temos

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Leftrightarrow a_n = \frac{a_k}{q^{k-1}} \cdot q^{n-1} \Leftrightarrow a_n = a_k \cdot q^{n-k}.$$

Quanto à classificação de uma P.G., temos dois aspectos a serem considerados. Quanto ao número de termo, ela pode ser finita ou infinita. Quanto ao comportamento dos elementos, temos quatro casos que dependem do intervalo que a razão pertence e o sinal dos elementos: crescente, decrescente, constante ou alternante. Apresentaremos os quatros casos, suas condições e respectivos sub casos sem nos determos a maiores explicações.

- **Crescente**, se cada termo a_n é maior que o seu antecessor a_{n-1}

    1. Se os termos são positivos e $q > 1$

    2. Se os termos são negativos e $0 < q < 1$

- **Decrescente**, se cada termo a_n é menor que o seu antecessor a_{n-1}

    1. Se os termos são positivos e $0 < q < 1$

    2. Se os termos são negativos e $q > 1$

- **Constante**, se cada termo a_n é igual ao seu antecessor a_{n-1}

    1. Independente do sinal dos elementos $q = 1$

- **Alternante**, se cada termo a_n tem sinal oposto ao do seu antecessor a_{n-1}

    1. Independente do sinal de um elemento considerado, nota-se $q < 0$

Quanto a soma dos termos de uma progressão geométrica, temos um diferencial. Enquanto que na P.A., somamos apenas sequências finitas (ou os n termos de uma P.A. qualquer), na P.G. podemos, além de somar uma quantidade finita de elementos da sequência numérica, também somar infinitos elementos, por conta da convergência da série. Dessa forma, é possível somar os infinitos termos da progressão geométrica decrescente de termos positivos, bem como a crescente de termos negativos.

Iniciaremos apresentando a relação que determina a soma finita dos n primeiros termos de uma P.G. Para tanto, somemos as equações uma a uma e, em seguida, isolemos o termo que representa a soma dos n primeiros termos S_n.

$$
\begin{aligned}
a_1 &= a_1 \\
a_2 &= a_1 q \\
a_3 &= a_2 q \\
a_4 &= a_3 q \\
&\vdots \\
a_{n-1} &= a_{n-2} q \\
a_n &= a_{n-1} q
\end{aligned}
$$

$$\therefore S_n = a_1 + q(S_n - a_n) \Leftrightarrow S_n - qS_n = a_1 - qa_n \Leftrightarrow S_n(1-q) = a_1 - a_1 q^n$$

$$\therefore S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} \; .$$

Observe que, realizando uma multiplicação conveniente $\left(1 = \frac{-1}{-1}\right)$, trocamos os sinais do numerador e denominador, ficando

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Para determinarmos a soma do infinitos termos S de uma P.G., obedecendo os critérios já apresentados, basta tomarmos a primeira relação e aplicarmos o limite para n tendendo ao infinito. Ou seja,

$$S = \lim_{n \to \infty} a_1 \frac{1-q^n}{1-q} = a_1 \frac{1}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}.$$

Embora haja outras características interessantes referentes a este tema, furtarnos-emos a realizar tais abordagens. Na próxima seção, apresentaremos um tipo de sequência que não é trabalhada na educação básica e certamente não consta em boa parte das ementas de cursos de licenciatura. Embora não tenha sido feito uma pesquisa estatística com dados para fazer tal afirmação. Baseio-me no fato de mesmo finalizada a disciplina de Matemática Discreta do PROFMAT, nunca ouvira sobre tais sequências. Logo, julgamos de suma importância destacá-las para que o leitor tenha acesso a informações elementares sobre tais progressões.

2.5 Progressão Aritmético-geométrica

Como dito, foi a produção desse trabalho mediante pesquisa em materiais sugeridos, a saber o livro Manual de Progressões de Luís Lopes (LOPES, 1998) [4], que nos colocou em contato com este tipo de progressões. Assim, apresentaremos alguns conceitos apresentados nesta literatura, desenvolvendo de forma mais clara algumas definições e encadeamento de equações para, por meio da nossa pesquisa, contribuir com a formação de professores da Educação Básica.

Definição 1. *Uma sequência numérica de termos não nulos a_n será denominada progressão aritmético-geométrica, PA-G, se, e somente se,*

$$a_n = [a_1 + (n-1)\, r]\, q^{n-1}, \quad \forall n \geq 1 \ ,$$

onde $r \neq 0$, $q \neq 0$ e $q \neq 1$.

Exemplo 2.3. *A seguir apresentamos exemplos de PA-G*

a. $\left\{ \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{7}{16} \right\}$;

b. $\left\{2, -\frac{5}{2}, 3, -\frac{7}{2}, 4, \ldots\right\}$;

c. $\{1, 2x, 3x^2, 4x^3, \ldots\}$.

Note que em cada um dos casos, mais claramente no *item c*, cada termo da PA-G (a_n) é um elemento de uma PA (b_n) multiplicado por um termo de PG (c_n). A seguir reescreveremos os elementos de cada item de forma a explicitar tal característica.

a. $\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{7}{16}\right\}$

$$\left\{1 \cdot \frac{1}{2}, 3 \cdot \frac{1}{4}, 5 \cdot \frac{1}{8}, 7 \cdot \frac{1}{16}\right\} .$$

Repare que a PA-G tem seus elementos definidos tal que $a_n = b_n \cdot c_n$, sendo $b_n = (1, 3, 5, \ldots)$ e $c_n = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots)$.

b. $\left\{2, -\frac{5}{2}, 3, -\frac{7}{2}, 4, \ldots\right\}$

$$\left\{-\frac{4}{2} \cdot (-1), -\frac{5}{2} \cdot (1), -\frac{6}{2} \cdot (-1), -\frac{7}{2} \cdot (1) \cdots\right\}$$

Note que nesta PA-G os seus elementos também são tipo $a_n = b_n \cdot c_n$, sendo $b_n = (-\frac{4}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{6}{2}, \ldots)$ e $c_n = (-1, 1, -1, 1, \ldots)$.

c. $\{1, 2x, 3x^2, 4x^3, \ldots\}$

Aqui temos o caso mais claro, e sem delongas, temos $b_n = (1, 2, 3, 4, \ldots)$ e $c_n = (1, x, x^2, x^3, \ldots)$.

Esta observação feita se aplica a nível de identificação visual na tentativa de se obter a PA e PG que formam a PA-G. No que se refere à classificação, LOPES (1998) [4] apresenta apenas a classificação quanto a quantidade de elementos: finita ou infinita.

A soma dos n primeiros temos de uma progressão aritmético-geométrica pode ser dada a partir do seguinte Teorema.

Teorema 2.7. *A soma S_n dos n primeiros elementos de uma PA-G em que q não nula e diferente da unidade é dada por*

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} + \frac{rq(1-nq^{n-1}+(n-1)q^n)}{(1-q)^2} \; .$$

Demonstração: Tomemos a definição de PA-G, que apresenta a fórmula do termo geral em função de n, e procedamos como de forma análoga ao que é feito para demonstrar a soma dos n termos de uma progressão geométrica, como segue.

$$\begin{aligned}
S_n &= a_1 + (a_1+r)q + (a_1+2r)q^2 + \cdots + (a_1+(n-2)r)q^{n-2} + (a_1+(n-1)r)q^{n-1} \\
&= a_1 + a_1q + rq + a_1q^2 + 2rq^2 + \cdots + a_1q^{n-2} + (n-2)rq^{n-2} + a_1q^{n-1} + (n-1)rq^{n-1} \\
&= a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1} + \\
&\quad + rq + 2rq^2 + 3rq^3 + \cdots + (n-2)rq^{n-2} + (n-1)rq^{n-1} \; .
\end{aligned}$$

Por outro lado se multiplicarmos S_n por q segue que:

$$\begin{aligned}
qS_n &= a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1} + a_1q^n + \\
&\quad + rq^2 + 2rq^3 + \cdots + (n-3)rq^{n-2} + (n-2)rq^{n-1} + (n-1)rq^n \; .
\end{aligned}$$

Subtraindo a última da primeira, obtemos:

$$\begin{aligned}
S_n - qS_n &= a_1 - a_1q^n + rq + rq^2 + rq^3 + \cdots + rq^{n-2} + rq^{n-1} - (n-1)rq^n \\
&= a_1 + rq + rq^2 + rq^3 + \cdots + rq^{n-2} + rq^{n-1} - (a_1+(n-1)r)q^n \; .
\end{aligned}$$

Repare que na expressão acima temos uma soma de uma PG como mostramos abaixo e substituímos em seguida

$$rq + rq^2 + rq^3 + \cdots + rq^{n-2} + rq^{n-1} = rq\frac{1 - q^{n-1}}{1 - q}\ .$$

$$\begin{aligned}
\therefore S_n - qS_n &= a_1 + rq + rq^2 + rq^3 + \cdots + rq^{n-2} + rq^{n-1} - (a_1 + (n-1)r)q^n \\
&= a_1 + \frac{rq(1 - q^{n-1})}{1 - q} - (a_1 + (n-1)r)q^n \\
&= a_1 - a_1q^n + \frac{rq(1 - q^{n-1})}{1 - q} - (n-1)rq^n \\
&= a_1(1 - q^n) + \frac{rq(1 - q^{n-1}) - (1-q)(n-1)rq^n}{1 - q} \\
\Rightarrow (1 - q)S_n &= a_1(1 - q^n) + \frac{rq(1 - q^{n-1}) - (n-1)rq^n + (n-1)rq^{n+1}}{1 - q} \\
\Rightarrow S_n &= \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} + \frac{rq(1 - q^{n-1} - (n-1)q^{n-1} + (n-1)q^n)}{(1 - q)^2} \\
\Rightarrow S_n &= \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} + \frac{rq(1 - nq^{n-1} + (n-1)q^n)}{(1 - q)^2}\ .
\end{aligned}$$

■

De forma análoga às progressões geométricas, as aritmético-geométricas que possuem a constante q pertencente ao intervalo $]-1;1[$, e por definição $q \neq 0$, então é possível encontrar a soma dos infinitos termos dessa PA-G. Este valor é encontrado, também aplicando o limite em S_n com n tendendo a infinito. Logo,

$$S = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} + \frac{rq(1 - nq^{n-1} + (n-1)q^n)}{(1 - q)^2} = \frac{a_1}{1 - q} + \frac{rq}{(1 - q)^2}.$$

Dessa forma, finalizamos este capítulo dedicado à apresentação das principais características das progressões. Demos destaque às aritméticas por serem a ferramenta que usaremos para resolver uma classe de problemas de função quadrática, como nos propomos neste trabalho.

Capítulo 3

Polinômios e Funções Polinomiais

3.1 Polinômios

Os polinômios com suas características mais elementares são apresentados ainda no Ensino Fundamental, séries finais, especificamente no 8º ano. É resultado da maturação da conceituação de monômio/binômio/trinômio. Tal noção voltará a ser estudado, com maior profundidade pelo discente do Ensino Médio, geralmente no 3º ano, salvo os casos de redistribuições dos conteúdos para o último ano da educação básica, em que nesses casos é usado como "Revisão" (o famoso pré vestibular).

No Fundamental, o polinômio vai ser definido como a soma de vários monômios, por isso o prefixo *poli*. Segundo PEREIRA (2020, p.98) [9], o monômio é uma "expressão racional inteira formada ou por um número real ou por apenas uma variável real ou por uma multiplicação de números e variáveis reais".

No Ensino Médio, para apresentar a definição usual para este nível, citamos DANTE (2010, p. 174) [1]: "Chamemos *expressão polinomial* ou *polinômio* na variável complexa x toda expressão da forma

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0.''$$

Para esta expressão, temos que os número complexos $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ são chamados *coeficientes*. Enquanto que o maior expoente de x com coeficiente diferente de zero é denominado *grau* do polinômio.

Já no Ensino Superior, em literaturas para formação dos docentes de matemática, temos que segundo LIMA et al. (2012, p.181) [6], "um polinômio é uma expressão formal do tipo

$$p(X) = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0,$$

onde $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ é uma lista ordenada de números reais", sendo X^i uma abreviatura para $X \cdot X \cdot X \cdot \ldots \cdot X$ (i fatores). E, generalizando tal conceito, MUNIZ NETO (2016) [7] contribui, definindo que todo polinômio está associado a uma sequência ordenada, quase toda nula, em que suas coordenadas são os coeficientes do polinômio. Para tanto, este autor define previamente o que seriam tais sequências quase toda nula.

Dizemos que uma função é polinomial de grau n quando a lei de associação desta é dada por um polinômio de grau n. Como existe uma relação biunívoca entre polinômios de grau n e funções polinomiais, ou seja, para cada polinômio existe uma única função polinomial e para cada função polinomial há um único polinômio associado, logo não precisamos diferenciar entre uma definição e outra no trabalho prático. Nas seções a seguir, iremos abordar a *Função Quadrática* e a *Função Cúbica* cujas respectivas leis de formação são polinômios de grau 2 e grau 3, respectivamente. Destacamos ainda os comentários sobre terminologia de Lima (2017, p.83) [5], com a finalidade de evitar construções conceituais equivocadas no que se refere às expressões: função do 1º grau, função do 2º grau, e assim por diante. Na ocasião, é feita a pergunta retórica: "o que é o grau de uma função?" E completamos: Como calcularíamos o grau de uma função trigonométrica ou mesmo de uma função logarítmica? Ou seja, funções não possuem grau, mas os polinômios associados a estas sim. Logo, é conveniente usarmos os termos função polinomial de grau n, ou os nomes próprios para os polinômios de grau 1, 2 e 3, a saber: afim, quadrática e cúbica, respectivamente. E ainda sublinhamos a questão de muitas vezes a função afim ser tratada apenas como polinômio de primeiro grau, o que LIMA (2017) [5] discorda por apresentar a função constante como um caso particular de função afim.

3.2 Função Quadrática

Esta seção representa uma transcrição de notas de aulas usadas e escritas pelo autor durante o período que ministrou a disciplina de Matemática Básica 1 no curso de licenciatura em Matemática do IFCE - Campus Juazeiro do Norte. Para elaboração do material foram usados três fontes: Números e Funções Reais (Coleção PROFMAT); A Matemática do Ensino Médio, Volume 1; e Fundamentos de Matemática Elementar, Volume 1. Estas notas são o resultado de uma mescla dos estudos proporcionados da disciplina MA11 com a experiência construída durante oito anos ministrando tais conceitos no Ensino Médio. A partir do próximo parágrafo iniciamos as notas de aulas que poderão servir de fonte para professores ou alunos de graduação em Matemática.

Função Quadrática

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se *quadrática* quando são dados números reais a, b, c, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Proposição 3.1. *Dada* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = ax^2 + bx + c$ *e* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; g(x) = a'x^2 + b'x + c'$. *Se* $f(x) = g(x)$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$, *então* $a = a', b = b'$ *e* $c = c'$.

Demonstração:

De fato, pois se $f(x) = g(x)$, então temos $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular, tomando $x = 0$, concluímos que $c = c'$.

Se $c = c'$, a igualdade fica reduzida a $ax^2 + bx = a'x^2 + b'x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Tomando $x \neq 0$, podemos dividir toda a equação por x, resultando em $ax+b = a'x+b'$.

Substituindo $x = 1$ e $x = -1$, obtemos $a + b = a' + b'$ e $-a + b = -a' + b'$. Montando o sistema e somando as equações segue que:

$$\begin{cases} a + b = a' + b' \\ -a + b = -a' + b' \end{cases} \quad \therefore b = b' \Rightarrow a = a'$$

Logo, se duas funções quadráticas definem mesmas imagens para todo $x \in \mathbb{R}$, estas funções tem mesma lei de associação, ou seja, os coeficientes correspondentes são iguais. ■

Proposição 3.2. *Se duas funções quadráticas assumem os mesmos valores em três pontos distintos* x_1, x_2, x_3, *então essas funções são iguais, isto é, assumem o mesmo valor para qualquer número real* x.

Demonstração:

Suponhamos que existem duas funções diferentes $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = ax^2+bx+c$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; g(x) = a'x^2 + b'x + c'$, isto é, $a \neq a'$, $b \neq b'$ e $c \neq c'$. Porém, vamos considerar que f e g assumam mesmo valor em x_1, x_2 e x_3. Logo, estamos supondo que $f(x_1) = g(x_1)$, $f(x_2) = g(x_2)$ e $f(x_3) = g(x_3)$.

De $f(x_1) = g(x_1)$, temos:

$$
\begin{aligned}
ax_1^2 + bx_1 + c &= a'x_1^2 + b'x_1 + c' \\
ax_1^2 + bx_1 + c - a'x_1^2 - b'x_1 - c' &= 0 \\
x_1^2(a - a') + x_1(b - b') + (c - c') &= 0 \ .
\end{aligned}
$$

De $f(x_2) = g(x_2)$ e $f(x_3) = g(x_3)$, de forma semelhante obtemos:

$$
\begin{aligned}
x_2^2(a - a') + x_2(b - b') + (c - c') &= 0 \\
x_3^2(a - a') + x_3(b - b') + (c - c') &= 0 \ .
\end{aligned}
$$

Chamemos $\alpha = a - a'$, $\beta = b - b'$ e $\gamma = c - c'$. Temos o seguinte sistema 3x3 nas variáveis α, β, γ.

$$
\begin{cases}
x_1^2\alpha + x_1\beta + \gamma = 0(I) \\
x_2^2\alpha + x_2\beta + \gamma = 0(II) \\
x_3^2\alpha + x_3\beta + \gamma = 0(III)
\end{cases}
$$

Subtraindo as equação (I) das demais, segue que:

$$
\begin{aligned}
\alpha(x_2^2 - x_1^2) + \beta(x_2 - x_1) &= 0 \\
\alpha(x_3^2 - x_1^2) + \beta(x_3 - x_1) &= 0 \ .
\end{aligned}
$$

Como $x_2 \neq x_1$, então $x_2 - x_1 \neq 0$ e $x_3 \neq x_1$ temos $x_3 - x_1 \neq 0$, podemos dividir as duas equações anteriores por $x_2 - x_1$ e $x_3 - x_1$, respectivamente.

$$
\begin{aligned}
\alpha(x_2 + x_1) + \beta &= 0 \\
\alpha(x_3 + x_1) + \beta &= 0 \ .
\end{aligned}
$$

Subtraindo uma equação da outra, temos:

$$\alpha(x_2 + x_1 - x_3 - x_1) + \beta - \beta = 0$$
$$\alpha(x_2 - x_3) = 0 \ .$$

Como $x_2 \neq x_3$, então $x_2 - x_3 \neq 0$, podemos dividir a equação por $x_2 - x_3$. Assim, determinamos que $\alpha = 0$, ou seja, $a - a' = 0 \Rightarrow a = a'$. De $\alpha = 0$, segue nas substituições do sistema que $\beta = 0$ e $\gamma = 0$. Logo, existe uma única função f que $x_1 \mapsto f(x_1), x_2 \mapsto f(x_2)$ e $x_3 \mapsto f(x_3)$. ■

Determinando a lei de associação

Sabendo que dados três pontos $P = (x, f(x))$ distintos existe uma única função quadrática que faz essa associação $x \mapsto f(x)$, resta-nos saber o método usado para determinar a lei de associação que define a função em questão.

A lei de associação será determinada se soubermos os valores dos coeficientes a, b e c. Este é o conjunto solução do seguinte sistema:

$$\begin{cases} x_1^2 a + x_1 b + c = f(x_1) \\ x_2^2 a + x_2 b + c = f(x_2) \\ x_3^2 a + x_3 b + c = f(x_3) \end{cases} .$$

Uma condição para que exista uma função quadrática, ou em outras palavras, que exista solução para o sistema acima é que os pontos $P = (x, f(x))$ não estejam alinhados. Caso os pontos estejam alinhados, ao resolver o sistema teremos o coeficiente "a" anulado. Logo, a função será afim e não quadrática.

Exemplo 3.1. *Dados os três pontos a seguir, verifiquemos se estão alinhados. Em seguida, determinemos a função que associa a abscissa à ordenada respectiva no par ordenado.*

a. $P_1 = (1, -2), P_2 = (-1, 6), P_3 = (3, -6)$

b. $P_1 = (2, -1), P_2 = (6, -5), P_3 = (-2, 3)$

No item a, podemos verificar se os pontos estão alinhados usando um dentre os dois métodos apresentados no ensino médio: determinante 3x3 das coordenadas; coeficiente angular tomando os pontos dois a dois. Neste problema temos que os pontos não estão alinhados, pois usando o determinante teremos o determinante das coordenadas igual a $-8 \neq 0$ ou buscando os coeficientes angulares tomando os pontos dois a dois teremos $m_1 = 2 \neq m_2 = 0 \neq m_3 = -2$. Assim, vamos determinar os coeficientes resolvendo o sistema.

$$\begin{cases} a + b + c = -2 \\ a - b + c = -6 \\ 9a + 3b + c = -6 \end{cases} \quad \therefore S = (-1, 2, -3) \Rightarrow f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = -x^2 + 2x - 3 \; .$$

Por outro lado, no item b, usando qualquer um dos dois métodos, é fácil verificar que os pontos estão alinhados, pois determinante igual a 0, ou $m_1 = m_2 = m_3 = -1$. Dessa forma, temos que f é afim. Se conhecemos o coeficiente angular (m), então temos a constante "a" da função. Aplicando qualquer um dentre os três pontos, determinamos a constante "b". Usando o ponto P_1, por exemplo, temos:

$$y = -x + b \Rightarrow -1 = -2 + b \Rightarrow b = 1 \quad \therefore f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = -x + 1 \; .$$

Raízes da Função Quadrática

Toda função quadrática f tem sua lei de associação descrita pelo trinômio $ax^2 + bx + c$ em que $a \neq 0$. Logo, a imagem de x pode ser descrita pela forma canônica, como segue:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right] . \end{aligned}$$

A raiz da função é todo valor x que tenha imagem nula, ou seja, $f(x) = 0$. Como para toda função quadrática temos que a constante $a \neq 0$, determinamos as raízes de f da forma a seguir:

$$\begin{aligned} f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right] = 0 \Leftrightarrow \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \Leftrightarrow \\ x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Leftrightarrow \\ x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Leftrightarrow \ . \end{aligned}$$

$\therefore x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$.

Note que a quantidade de raízes reais da função quadrática depende do valor do discriminante Δ.

- Se $\Delta > 0$, então f possui duas raízes reais distintas ($x_1 \neq x_2$);
- Se $\Delta = 0$, então f possui uma única raiz real ($x_1 = x_2$);
- Se $\Delta < 0$, então f não possui raiz real.

Relações de Soma e Produto

Da relação acima, que determina as raízes da função quadrática, podemos definir uma nova relação a partir da soma das raízes e outra a partir do produto delas:

- Soma

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\
&= \frac{-2b}{2a} \\
&= \frac{-b}{a}\,.
\end{aligned}
$$

- Produto

$$
\begin{aligned}
x_1 x_2 &= \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \\
&= \frac{b^2-\Delta}{4a^2} \\
&= \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} \\
&= \frac{4ac}{4a^2} \\
&= \frac{c}{a}\,.
\end{aligned}
$$

Ainda podemos destacar uma característica muito importante. Observe que a média aritmética das raízes é dada por:

$$\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{-b/a}{2} = -\frac{b}{2a}\,.$$

Valor máximo/mínimo

Podemos reescrever a forma canônica com a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} f(x) &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right] \\ &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]. \end{aligned}$$

Note que para $\Delta = 0$ temos uma única raiz, chamada raiz dupla, igual a $-b/2a$.

$$f(x) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0 \Leftrightarrow$$
$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x+\frac{b}{2a} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}.$$

Observe que a função ou é ilimitada superiormente ou é ilimitada inferiormente, e essa característica está associada ao sinal da constante "a". Pois $\dfrac{\Delta}{4a^2}$ é uma constante e $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$ é sempre positivo. Assim, tome $a > 0$, e pela forma canônica é fácil ver que a função terá um valor mínimo e não é limitada superiormente. Por outro lado, se $a < 0$, percebe-se que f terá um valor máximo e, por sua vez, não será limitada inferiormente. Para ambos os casos, o máximo/mínimo é atingido quando $x = -\dfrac{b}{2a}$. Para esta conclusão, basta observar na forma canônica que o máximo/mínimo ocorrerá quando $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 = 0$. E, neste caso, teremos $f(-b/2a) = -\Delta/4a$.

Conjunto Imagem da Função Quadrática

Pelas características descritas anteriormente, é possível definir o conjunto imagem da função quadrática, em dois casos, a partir dos valores máximo ou mínimo.

- Caso 1: $a > 0$

$$Imf = \left\{ y \in \mathbb{R}; y \geq -\frac{\Delta}{4a} \right\} .$$

- Caso 2: $a < 0$

$$Imf = \left\{ y \in \mathbb{R}; y \leq -\frac{\Delta}{4a} \right\} .$$

Exemplo 3.2. *Reescreveremos a função quadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = 2x^2 + 4x - 6$ usando a forma canônica, determinaremos as raízes usando a forma canônica, verificaremos se a função possui valor máximo ou mínimo e o valor de x em que isso ocorre e sua respectiva imagem. Por fim, descreveremos o conjunto imagem da função f.*

Reescrevendo, usando a forma canônica, temos

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 + 4x - 6 \\ &= 2[x^2 + 2x - 3] \\ &= 2[x^2 + 2x + 1 - 1 - 3] \\ &= 2[(x+1)^2 - 4] . \end{aligned}$$

Para determinar as raízes, usando a forma canônica, resolveremos a equação que segue

$$\begin{aligned} f(x) = 2[(x+1)^2 - 4] &= 0 \\ (x+1)^2 - 4 &= 0 \\ (x+1)^2 &= 4 \\ x &= -1 \pm 2 . \end{aligned}$$

$\therefore x = -3$ ou $x = 1$.

Como $a = 2 > 0$, então f possui valor mínimo. Este valor ocorrerá para

$x = -b/2a = -1$. Substituindo tal valor na função determinaremos sua imagem:

$$f(-1) = 2(-1)^2 + 4(-1) - 6 = -8 \; .$$

Veja que $a = 2 > 0$, então f é ilimitada superiormente e tem imagem mínima em $y = -8$. Logo,

$$Imf = \{y \in \mathbb{R}; y \geq -8\}$$

Sinal da Função Quadrática

Consideremos a função quadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$ em que $a \neq 0$. Vamos resolver o problema: "para que valores de $x \in \mathbb{R}$ temos $f(x) > 0$, $f(x) = 0$ e $f(x) < 0$?"

Na determinação do sinal da função quadrática, devemos começar pelo cálculo do discriminante Δ, no qual três casos distintos podem aparecer: $\Delta < 0, \Delta = 0$ e $\Delta > 0$.

Caso 1: $\Delta < 0 \Rightarrow -\Delta > 0$

Da forma canônica temos

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \Rightarrow af(x) = a^2\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \Rightarrow af(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}.$$

Note que o produto $a^2[\dots]$ é positivo. O termo entre colchetes é positivo por se tratar de uma soma de termos positivos, uma vez que o primeiro parêntese é não negativo e o segundo parêntese é positivo, pela hipótese deste caso $(-\Delta > 0)$.

Caso 2: $\Delta = 0$

Da forma canônica segue que

$$af(x) = a^2\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(-\frac{\Delta}{4a^2}\right)\right] \Rightarrow af(x) = a^2\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \Rightarrow af(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}.$$

Isso significa que a função f, quando $\Delta = 0$, tem o sinal da constante "a" para todo $x \in \mathbb{R} - \{x_1\}$, sendo $x_1 = \dfrac{-b}{2a}$.

Caso 3: $\Delta > 0$

Da forma canônica é possível chegar à forma fatorada

$$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2) \Rightarrow af(x) = a^2(x-x_1)(x-x_2).$$

Existem três subcasos a considerarmos o valor de x em relação às raízes. Tomando $x_1 < x_2$ segue que:

Subcaso a: $x < x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} x - x_1 & < & 0 \\ x - x_2 & < & 0 \end{cases} \therefore af(x) = a^2(x-x_1)(x-x_2) > 0 \Rightarrow$ $af(x) > 0$, pois $af(x) = (+)(-)(-)$.

Subcaso b: $x_1 < x < x_2 \Rightarrow \begin{cases} x - x_1 > 0 \\ x - x_2 < 0 \end{cases} \therefore af(x) = a^2(x - x_1)(x - x_2) < 0 \Rightarrow$ $af(x) < 0$, pois $af(x) = (+)(+)(-)$.

Subcaso c: $x_1 < x_2 < x \Rightarrow \begin{cases} x - x_1 > 0 \\ x - x_2 > 0 \end{cases} \therefore af(x) = a^2(x - x_1)(x - x_2) > 0 \Rightarrow$ $af(x) > 0$, pois $af(x) = (+)(+)(+)$.

Gráfico da Função Quadrática

Dada a função quadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = ax^2 + bx + c$, o gráfico de f é o conjunto dos pontos do plano dado por $G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = ax^2 + bx + c\}$.

Proposição 3.3. *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é quadrática se, e somente se, seu gráfico é uma parábola.*

Demonstração: Queremos demonstrar que se temos uma função quadrática, o conjunto $G_f \subset \mathbb{R}^2$ é uma parábola; e se temos uma parábola, então todos seus pontos são descritos por meio de uma função quadrática.

Primeiro demonstraremos a "volta" da afirmação, isto é, se temos uma parábola, então seus pontos são descritos por uma função quadrática. Para isso, relembremos a definição de parábola:

Dado um ponto F chamado foco e uma reta r chamada diretriz. Ao conjunto de pontos equidistantes ao foco e à reta diretriz chamamos de parábola.

Sem perda de generalidade, vamos descrever a equação que caracteriza todos os

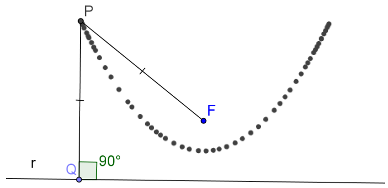

Figura 3.2.1: Parábola 1

pontos de uma parábola cujo eixo de simetria está sobre o eixo das ordenadas e que tem foco $F = (0, d)$. Dessa forma, a reta diretriz será dada por $r : x = -d$.

$$\begin{aligned} d_{P,F} = d_{P,r} \quad &\Rightarrow \quad \sqrt{x^2 + (d-y)^2} = \sqrt{(y-d)^2} \\ &\Rightarrow \quad x^2 + d^2 - 2dy + y^2 = y^2 + 2dy + d^2 \\ &\Rightarrow \quad x^2 - 2dy = 2dy \\ &\Rightarrow \quad x^2 = 4dy \ , \end{aligned}$$

$$\therefore y = \frac{x^2}{4d} \ .$$

Associando à expressão da função quadrática temos que $a = \dfrac{1}{4d}$, em que d é a distância do vértice ao foco da parábola, ou do vértice à reta diretriz.

Substituindo x por $\bar{x} + k$ temos: $a(\bar{x} + k)^2 = y$.

O valor k é o comprimento da translação horizontal feita na parábola. Se $k > 0$, então transladamos a parábola para esquerda em $|k|$ unidades. Se $k < 0$, então transladamos a parábola para direita em $|k|$ unidades.

Para realizar uma translação vertical, basta adicionarmos um valor t à expressão como segue:

$$y = a(\bar{x} + k)^2 + t\ .$$

Ora, mas essa é a expressão da forma canônica da função quadrática, em que $k = -x_v$ e $t = y_v$.

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}\ ,$$

$\therefore a(x - x_v)^2 + y_v = f(x)$.

A ida da demonstração desta afirmação é trivial, pois basta reescrever a função quadrática na forma canônica e usar a relação $a = \dfrac{1}{4d}$ para determinar $d = \dfrac{1}{4a}$.

Assim a parábola terá foco $F = (x_v, y_v + d)$ e a equação da reta diretriz será $r : y = y_v - d$. Destacamos que o caso para $a < 0$ é análogo. ■

Exemplo 3.3. *A partir das informações obtidas acima e dada a função quadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = x^2 - 6x + 5$. Encontraremos a seguir um ponto P que pertence ao gráfico de f, a distância focal d da parábola, as coordenadas do foco e a equação da reta diretriz. Também verificaremos se o ponto P encontrado satisfaz às condições da definição de parábola.*

Tome $x = 2$,

$$f(2) = 2^2 - 6 \cdot 2 + 5 = -3$$

,

$$P = (2, -3)$$

Reescrevendo, pela forma canônica, podemos destacar os seguintes elementos,

$$f(x) = y = x^2 - 6x + 5 \Rightarrow y = (x-3)^2 - 4$$

$$\therefore a = 1, x_v = 3, y_v = -4$$

Como $d = \dfrac{1}{4a} \Rightarrow d = \dfrac{1}{4}$. O foco da parábola é do tipo $F = (x_v, y_v + d) \Rightarrow F = (3, -\dfrac{16}{4})$. A equação da reta diretriz obedece à relação $r : y = y_v - d \Rightarrow y = -\dfrac{17}{4}$.

Queremos mostrar que P é equidistante a F e a r. Para tanto, vamos calcular as duas distâncias e verificar que de fato são iguais.

$$\begin{aligned} d_{P,F} &= \sqrt{1 + \left(-3 + \frac{15}{4}\right)^2} \\ &= \sqrt{1 + \frac{9}{16}} \\ &= \sqrt{\frac{25}{16}} \\ &= \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{P,r} &= \sqrt{\left(-3 + \frac{17}{4}\right)^2} \\ &= \left(\frac{-12 + 17}{4}\right) \\ &= \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Interpretação geométrica a partir dos coeficientes

- **Coeficiente a**

Pela forma canônica é fácil perceber que f será ilimitada superiormente, tendo um valor mínimo em $f\left(\dfrac{-b}{2a}\right) = \dfrac{-\Delta}{4a}$ quando $a > 0$; ou ilimitada inferiormente, tendo um valor máximo em $f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{-\Delta}{4a}$ se $a < 0$.

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}\right] \Leftrightarrow f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v \ .$$

- **Coeficiente b**

Analisando o sinal do $x_v = \frac{-b}{2a}$, temos uma interpretação muito importante para a construção do gráfico de f. Vamos considerar o caso em que $a > 0$, sendo análogo o caso $a < 0$. Para $a > 0$ temos que analisar o sinal de x_v em três casos $(b < 0, b = 0, b > 0)$.

<u>Caso 1</u>: $a > 0, b < 0 \Rightarrow -b > 0$

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{(+)}{(+)} = (+) > 0 \ .$$

O vértice está à direita do eixo Y.

<u>Caso 2</u>: $a > 0, b = 0 \Rightarrow -b = 0$

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{2a} = 0 \ .$$

O vértice pertence ao eixo y.

<u>Caso 3</u>: $a > 0, b > 0 \Rightarrow -b < 0$

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{(-)}{(+)} = (-) < 0 \ .$$

O vértice está à esquerda do eixo y.

Repare que podemos associar o sinal de "b" com o comportamento da função em $x = 0$, usando os conceitos de derivada. Ou seja, se $b > 0$ o braço crescente da parábola toca o eixo Y (a reta tangente no ponto $x = 0$ é crescente); se $b < 0$ o braço decrescente da parábola toca o eixo Y (a reta tangente à parábola no ponto $x = 0$ é decrescente); e, se $b = 0$ o vértice está sobre o eixo Y.

- **Coeficiente c**

Sendo o termo independente da expressão de $f(x)$, basta perceber que "c" é o valor assumido para $x = 0$, isto é, $f(0) = c(0 \mapsto c)$ significa que a constante "c" informa a que altura do eixo Y o gráfico de f passa.

Interpretação geométrica do discriminante e raízes

Sabemos que as raízes da função quadrática estão associadas ao discriminante Δ. Como esses valores do domínio tem imagem nula, concluímos que estes pontos do gráfico tocam o eixo das abscissas. Assim, se $\Delta > 0$, o gráfico tocará no eixo x duas vezes, pois terá duas raízes reais; se $\Delta = 0$, a parábola tocará no eixo das abscissas uma única vez (será tangente ao eixo), pois terá uma única raiz real; caso $\Delta < 0$, o gráfico não tocará o eixo horizontal, pois não tem solução nos números reais.

Interpretação geométrica do vértice

Como já mencionado, temos que o vértice da parábola será o ponto $V = (x_v, y_v)$ que descreve o valor máximo ou mínimo da função. Aqui destacamos e nos propomos a corrigir determinados vícios cometidos pelos docentes, sobretudo da Educação Básica. É fácil encontrar professores que apresentam as características do gráfico ensinando que “se $a > 0$ a função cresce e se $a < 0$ a função decresce”. Veja que a ideia por traz desta fala é o conceito da função ser ilimitada superior ou inferiormente. Pois, na verdade o vértice é o ponto de mudança do comportamento da função de decrescente para crescente ou vice-versa (ponto em que a derivada muda de sinal).

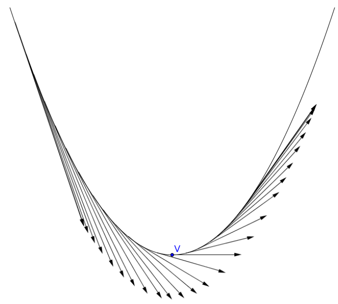

Figura 3.2.2: Parábola 2

Com tais informações apresentadas sobre a interpretação geométrica da função quadrática, os alunos terão ferramentas poderosas para resolver uma grande quantidade de questões de interpretação de gráfico. Sublinhamos nessa interpretação o fato já mencionado do x_v ser a média aritmética das raízes. Esse fato pode colaborar de forma significativa com a interpretação feita pelo aluno.

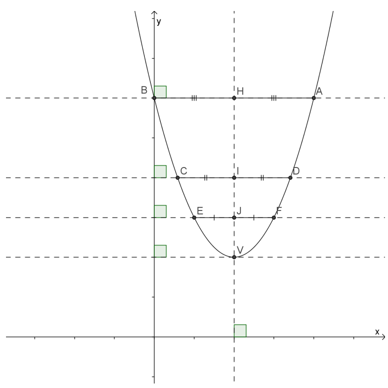

Figura 3.2.3: Parábola 3

Interpretação geométrica no estudo do sinal

Como o estudo do sinal é dividido basicamente em descobrir os valores x do domínio que tem imagens y positivas e quais valores de x tem imagens negativas, basta perceber que as raízes são os valores limites, pois elas têm imagens iguais a zero.

Graficamente é muito fácil fazer o estudo do sinal, pois o intervalo de x que tiver o gráfico acima do eixo das abscissas terá imagem com sinal positivo; por outro lado, o intervalo que tiver o gráfico abaixo do mesmo eixo terá imagem com sinal negativo. Considerando os possíveis sinais do coeficiente "a" temos as seis situações apresentadas a seguir na imagem.

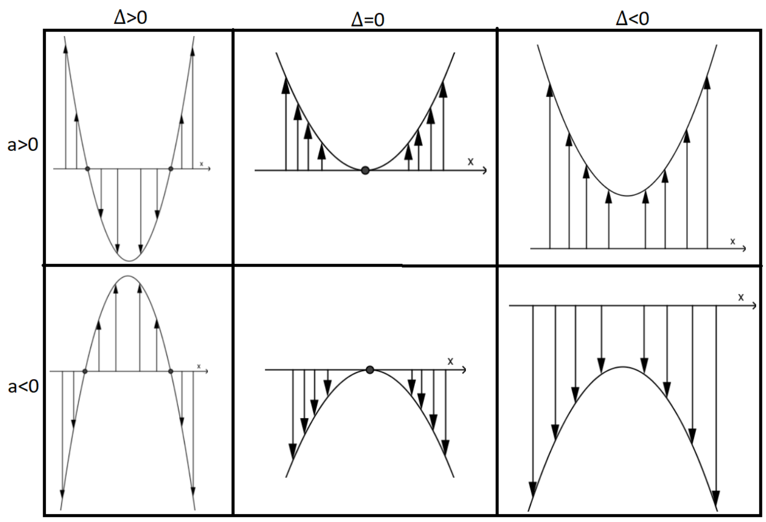

Figura 3.2.4: Estudo do sinal

Interpretação geométrica do conjunto imagem

Partindo do gráfico de uma função quadrática f, obtemos o conjunto imagem projetando perpendicularmente todos os pontos da parábola no eixo Y. Como apresentado, o conjunto imagem será limitado pela imagem máxima/mínima y_v. Assim, o conjunto imagem será uma semirreta real do eixo Y com origem no valor y_v e tende para $+\infty$ $(-\infty)$ se $a > 0$ $(a < 0)$.

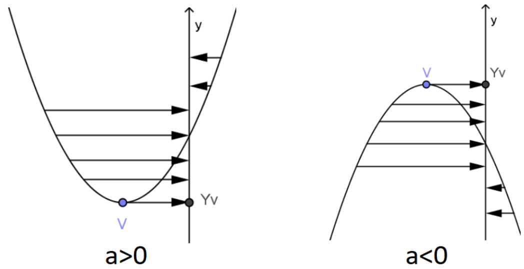

Figura 3.2.5: Estudo das imagens

3.3 Função Cúbica

A função cúbica é um conteúdo trabalhado superficialmente na Educação Básica. Este não é o nosso principal objeto de estudo neste trabalho. Porém decidimos apresentar algumas características referentes a esta função. Podemos defini-la por $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ou seja é a função polinomial do terceiro grau.

Para abordar algumas características, usaremos algumas técnicas usuais no estudo do Cálculo Diferencial, porém vamos tentar não usar os termos formais interpretando a ideia por trás deste. A princípio, vamos compreender como esta se comporta nos "extremos" dos números reais (estudo no infinito). Reescreveremos a lei de associação

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Leftrightarrow f(x) = x^3\left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \frac{d}{x^3}\right) .$$

Sem perda de generalidade, considerando $a > 0$, quando x cresce indefinidamente, cada fração dentro dos parênteses fica arbitrariamente próxima a zero. Assim, temos que, para x suficientemente grande, a imagem vai ser algo próximo a $f(x) = ax^3$. Pela nossa hipótese temos aqui um produto de números positivos, ou seja, $f(x)$ cresce indefinidamente. Por outro lado, se analisamos quando x decresce indefinidamente, pelo mesmo motivo, teremos que a imagem vai ser algo próximo a $f(x) = ax^3$, mas, neste caso, a imagem será negativa por conta da potência ímpar.

Dessa forma, para $a > 0$ temos que em um extremo a função cresce indefinidamente e no outro extremo decresce indefinidamente. Logo, há um valor x cuja imagem será zero (Teorema do anulamento ou de *Bolzano*). Tomando os resultados de polinômios no corpo dos números complexos e as consequências do Teorema Fundamental da Álgebra, temos que a função cúbica terá três raízes complexas. Como as raízes complexas não reais ocorrem em pares conjugadas, as raízes poderão ser: uma real e duas complexas não reais; três raízes reais sendo um destas dupla; e três raízes reais.

Considerando o gráfico da função cúbica e analisando a reta que tangencia esta curva, poderíamos nos perguntar quantas vezes esta reta assumirá a posição horizontal (derivada $f'(x) = 0$). Temos dois casos como resultado. O primeiro é que aplicando a derivada obteremos uma expressão quadrática que é um quadrado perfeito. Assim, igualando este quadrado perfeito a zero, obteremos um único valor de x tal que $f'(x) = 0$. O segundo caso resulta da derivação de uma função quadrática cujo discriminante é diferente zero e, portanto, teremos dois valores de x que tornarão horizontal a reta tangente ao gráfico da função. Estes dois pontos serão um máximo e o outro mínimo local.

Como já mencionado, este não é nosso principal objeto de estudo, por isso nos abstemos de maiores explicações e demonstrações. Deixamos como sugestão ao leitor para trabalhos futuros, o detalhamento do estudo da função cúbica como apresentado na seção anterior. Voltaremos a tratar rapidamente da função cúbica (polinômio de terceiro grau) no próximo capítulo quando apresentaremos a relação das funções polinomiais e as progressões aritméticas.

Capítulo 4

Funções e Progressões Aritméticas

Fazendo uso dos teoremas e proposições até aqui apresentados, queremos determinar um método prático capaz de encontrar a imagem de um elemento conhecido do domínio de uma função quadrática a partir de três pares ordenados dados desta função. Tal problema, pode ser resolvido via um sistema de ordem 3, usando os três pares ordenados cujas variáveis são os coeficientes da função quadrática desconhecida. Finalizada esta etapa, conhecendo-se a função, obtém-se a imagem desejada.

Por outro lado, observamos que existe uma relação entre expressões polinomiais e progressões aritméticas. Dessa forma enunciamos o seguinte teorema que nos auxiliará a construir o método prático desejado.

Teorema 4.1. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função quadrática. Então toda P.A. não constante $(x_1, x_2, x_3, ...)$ é transformada por f numa P.A. de ordem 2 não degenerada $(f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2, f(x_3) = y_3, ...)$.*

Demonstração: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^2+bx+c$. Como $(x_1, x_2, x_3, x_4, ...)$

é uma P.A., então

$$x_n = x_1 + (n-1)r,$$

onde r é a razão da P.A. Aplicando f em x_n teremos

$$\begin{aligned} f(x_n) &= a(x_1 + (n-1)r)^2 + b(x_1 + (n-1)r) + c \\ &= ax_1^2 + 2ax_1(n-1)r + a(n-1)^2r^2 + x_1b + b(n-1)r + c \\ &= (n-1)^2r^2a + (n-1)r(2ax_1 + b) + ax_1^2 + bx_1 + c\ . \end{aligned}$$

Para que $(f(x_n))$ seja uma P.A. de segunda ordem, devemos verificar se a sequência $\alpha_n = \Delta f(x_n) = f(x_{n+1}) - f(x_n)$ é uma P.A.

Calculando α_n temos

$$\begin{aligned} \alpha_n &= f(x_{n+1}) - f(x_n) \\ &= n^2r^2a + nr(2ax_1 + b) + ax_1^2 + bx_1 + c - (n-1)^2r^2 - (n-1)r(2ax_1 + b) \\ &- (ax_1^2 + bx_1 + c) \\ &= n^2r^2a + nr2ax_1 + nrb - n^2r^2a + 2nr^2a - r^2a^2 - nr2ax_1 + c2ax_1 - nrb + rb \\ &= n(2r^2a) + (2arx_1 - r^2a^2 + rb)\ . \end{aligned}$$

Assim,

$$\alpha_n = n(2r^2a) + (2arx_1 - r^2a^2 + rb)\ .$$

Para finalizarmos, basta constatar que a sequência α_n é uma P.A., ou seja, que a diferença $\alpha_{n+1} - \alpha_n$ é constante. Temos então

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} - \alpha_n &= (n+1)(2r^2a) + (2arx_1 - r^2a^2 + rb) - n(2r^2a) - (2arx_1 - r^2a^2 + rb) \\ &= n(2r^2a) + (2r^2a) - n(2r^2a) \\ &= 2ar^2\ . \end{aligned}$$

Assim, (α_n) é uma P.A. e, portanto, $(f(x_n))$ é uma P.A. de segunda ordem. ■

Exemplo 4.1. *Tome a função real de variável real, definida por* $f(x) = ax^2 + bx + c$*, é tal que* $f(1) = 2$*,* $f(2) = 5$ *e* $f(3) = 4$*, determinaremos o valor de* $f(4)$*.*

Note que os valores do domínio apresentados estão em P.A. $(1, 2, 3, 4)$. Chamemos $f(4) = y$. Do Teorema anterior (11), temos que suas respectivas imagens estão em P.A. de ordem 2 $(2, 5, 4, y)$. Aplicando o operador Δ obtemos a P.A. $(3, -1, y - 4)$, e assim determinamos a imagem de 4 por meio da seguinte equação, a partir da definição de razão de uma P.A.,

$$\begin{aligned} -1 - 3 &= y - 4 - (-1) \\ -4 &= y - 4 + 1 \\ y &= -1\ . \end{aligned}$$

Por outro lado, usando o sistema também chegaríamos ao mesmo resultado. Nesse caso, usaremos o escalonamento para obter os valores dos coeficientes da função quadrática, como segue:

$$\left\{\begin{aligned} f(1) &= 2 \\ f(2) &= 5 \\ f(3) &= 4 \end{aligned}\right. \Rightarrow \left\{\begin{aligned} a + b + c &= 2 \\ 4a + 2b + c &= 5[4L_1 - L_2] \\ 9a + 3b + c &= 4[9L_1 - L_3] \end{aligned}\right. \Rightarrow \left\{\begin{aligned} a + b + c &= 2 \\ 2b + 3c &= 3 \\ 6b + 8c &= 14[3L_2 - L_3] \end{aligned}\right. \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{aligned} a + b + c &= 2 \\ 2b + 3c &= 3 \\ c &= -5 \end{aligned}\right.$$

Realizando as substituições necessárias nas equações, temos do sistema escalonado que $a = -2$ e $b = 9$. Assim, a expressão de f é $f(x) = -2x^2 + 9x - 5$ e, consequentemente, a imagem de desejada é $f(4) = -32 + 36 - 5 = -1$, como esperávamos.

Exemplo 4.2. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função quadrática em que $f(-1) = 8$, $f(0) = 15$ e $f(1) = 24$, determinemos a imagem de -2.*

Para tanto, denotemos $f(-2) = y$. Observe que também neste caso os valores do domínio estão em P.A. $(-2, -1, 0, 1)$. De forma análoga, temos a P.A. de segunda ordem $(y, 8, 15, 24)$ e consequentemente a P.A. auxiliar $(8 - y, 7, 9)$. O que fica claro que $8 - y = 5$, logo $y = 3$.

Exemplo 4.3. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = ax^2 + bx + c$. Sabendo que $f(1) = 2$, $f(5) = -18$ e $f(7) = -40$, calcularemos $f(3)$.*

Adotando $f(3) = y$, definimos, respectivamente, a P.A. dos elementos do domínio, a P.A. de segunda ordem e a P.A. auxiliar. $(1, 3, 5, 7)$; $(2, y, -18, -40)$ e $(y - 2, -18 - y, -22)$. Logo

$$\begin{aligned} -18 - y - y + 2 &= -22 + 18 + y \\ -16 - 2y &= y - 4 \\ -12 &= 3y \\ y &= -4\,. \end{aligned}$$

Visto exemplos cujos elementos do domínio estão em P.A., de forma sucessiva, levantamos a indagação de como proceder caso os elementos do domínio estejam em P.A. mas não de forma sucessiva. Também questionamos a possibilidade de determinar a imagem de um quarto elemento do domínio, dado que os três não estão em P.A. A resposta para ambas as perguntas é: sim!

Todavia, por ora, trabalharemos casos em que os elementos do domínio são número naturais. Com uma adaptação faremos, mais adiante, exemplos com elementos do domínio inteiros e, logo após, com elementos racionais.

Considerando o resultado do Teorema 4.1, temos que f transforma a P.A. $(x_1, x_2, ...)$ em uma P.A. de ordem 2 $(y_1, y_2, ...)$. Também que $\Delta f(x_n) = y_n - y_{n-1} = \alpha_n$ é uma P.A. $(\alpha_1, \alpha_2, ...)$. Então considere as seguintes relações:

$$\begin{aligned} y_2 - y_1 &= \alpha_1 \\ y_3 - y_2 &= \alpha_2 \\ y_4 - y_3 &= \alpha_3 \\ &\vdots \\ y_n - y_{n-1} &= \alpha_{n-1} \end{aligned}$$

Somando as equações uma a uma obtemos a equação:

$$y_n - y_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1}.$$

Para generalizarmos a relação acima, tomemos um termo de posição k tal que $k < n$. Dessa forma, aplicando y_n e y_k para subtrairmos as equações uma a uma, decorre que

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{k-1} + \alpha_k + \alpha_{k+1} + \cdots + \alpha_{n-1} &= y_n - y_1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{k-1} &= y_k - y_1\ . \end{aligned}$$

Da subtração, resta

$$\alpha_k + \alpha_{k+1} + \cdots + \alpha_{n-1} = y_n - y_k.$$

Para que calculemos a imagem de um quarto elemento, independente de os três elementos dados do domínio estarem em P.A., vamos definir uma P.A. auxiliar de números naturais no domínio da função $(x_1 = 1, x_2 = 2, ...)$. Consequentemente teremos a P.A. de segunda ordem das imagens $(f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2, ...)$.

Exemplo 4.4. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função quadrática tal que os pares ordenados $(1,1)$, $(2,4)$, $(3,9)$ pertençam ao gráfico de f, calcularemos a ordenada do ponto $(7,y)$.*

Chamemos $y = y_7$. Observe que os valores do domínio estão em P.A., mas o elemento que buscamos a imagem não está na sequência dos três que foram dados. Usando a relação que definimos acima formaremos um sistema de ordem dois como segue.

$$y_2 - y_1 = \alpha_1 \Rightarrow 4 - 1 = \alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 = 3$$

$$y_3 - y_1 = \alpha_1 + \alpha_2 \Rightarrow 9 - 1 = 2\alpha_1 + r \Rightarrow r = 8 - 6 \Rightarrow r = 2$$

$$y_7 - y_1 = \alpha_1 + \cdots + \alpha_6 \Rightarrow y_7 - 1 = \frac{(\alpha_1 + \alpha_6)6}{2} \Rightarrow y_7 = (3 + 3 + 10)3 + 1 \Rightarrow y_7 = 49$$

Exemplo 4.5. *Determinaremos $f(12)$ sendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função quadrática e tal que $f(1) = 2$, $f(3) = -4$ e $f(7) = -40$.*

Note que os valores do domínio em questão não estão em P.A., então consideremos uma progressão auxiliar no domínio $(x_1 = 1, x_2 = 2, ...)$. Assim, os valores explicitos na questão serão denotados: $x_1 = 1, y_1 = 2, x_3 = 3, y_3 = -4, x_7 = 7, y_7 = -40, x_{12} = 12, y_{12} = f(12)$. Montando o sistema, temos as seguintes equações.

$y_3 - y_1 = \alpha_1 + \alpha_2 = 2\alpha_1 + r$

$y_7 - y_1 = \alpha_1 + \cdots + \alpha_6 = \dfrac{(\alpha_1 + \alpha_1 + 5r)6}{2} \Rightarrow y_7 - y_1 = 6\alpha_1 + 15r$

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + r = -6 \Rightarrow r = -6 - 2\alpha_1 \\ 6\alpha_1 + 15r = -42 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 6\alpha_1 + 15(-6 - 2\alpha_1) &= -42 \\ 6\alpha_1 - 90 - 30\alpha_1 &= -42 \\ -24\alpha_1 &= 48 \\ \alpha_1 &= -2 \end{aligned}$$

Substituindo o valor de α_1 determinamos r.

$$\begin{aligned} r &= -6 - 2\alpha_1 \\ r &= -6 + 4 \\ r &= -2 \end{aligned}$$

Finalizamos determinando o valor de y_{12} com a substituição dos dados encontrados.

$$\begin{aligned} y_{12} - y_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{11} \\ y_{12} &= 2 + \frac{(\alpha_1 + \alpha_1 + 10r)11}{2} \\ &= 2 + \frac{(-4 - 20)11}{2} \\ &= 2 - 132 \\ &= -130 \end{aligned}$$

No exemplo a seguir, faremos a adaptação para elementos do domínio pertencente aos inteiros. Para tanto, consideraremos o menor elemento dentre os valores do domínio dado como o primeiro elemento da P.A. auxiliar (x_n). Depois monta-se as equações do sistema com os termos conhecidos desta P.A.

Exemplo 4.6. *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função quadrática. Dado* $f(-2) = 4$*,* $f(1) = 1$ *e* $f(8) = 134$*, vamos determinar a imagem de* 3 *conduzida por* f*.*

A priori, definamos a P.A. auxiliar $(x_1 = -2, x_2 = -1, x_3 = 0, ...)$. Note que esta adaptação tem o único propósito de simplificar a notação, pois de forma genérica poderíamos definir uma P.A. auxiliar cujo primeiro termo pode ser qualquer inteiro n menor que -1, ou seja, $(x_1 = n, ..., x_k = -2, x_{k+1} = -1, x_{k+2} = 0, ...)$. Dessa forma, usando $n = -2$, podemos destacar os termos apresentados na questão: $x_1 = -2, y_1 = 4, x_4 = 1, y_4 = 1, x_6 = 3, y_6 = f(3), x_{11} = 8, y_{11} = 134$. Com esta adaptação, basta aplicar o método já apresentado.

$$
\begin{aligned}
y_4 - y_1 &= \alpha_1 + \cdots + \alpha_3 \\
-3 &= \frac{(\alpha_1 + \alpha_1 + 2r)3}{2} \\
\alpha_1 + r &= -1 \\
\alpha_1 &= -1 - r
\end{aligned}
$$

Tomando y_{11} e y_1 temos a segunda equação. Nesta, substituiremos o valor de α_1 isolado na primeira equação, como segue.

$$
\begin{aligned}
y_{11} - y_1 &= \alpha_1 + \cdots + \alpha_{10} \\
130 &= \frac{(\alpha_1 + \alpha_1 + 9r)10}{2} \\
10\alpha_1 + 45r &= 130 \\
-10 - 10r + 45r &= 130 \\
35r &= 140 \\
r &= 4 \\
\therefore \alpha_1 &= -5
\end{aligned}
$$

Determinado os valores de α_1 e r, encontraremos o valor de $f(3) = y_6$.

$$
\begin{aligned}
y_6 - y_1 &= \alpha_1 + \cdots + \alpha_5 \\
y_6 - 4 &= \frac{(\alpha_1 + \alpha_1 + 4r)5}{2} \\
y_6 &= 5\alpha_1 + 10r + 4 \\
&= f(3) = 19\ .
\end{aligned}
$$

No próximo exemplo, determinaremos a imagem de um valor que é o menor dentre os números inteiros do domínio apresentados. Neste caso, usaremos a generalização da diferença entre dois termos quaisquer de uma P.A de segunda ordem. E também, a generalização do termo geral de uma P.A. ($a_n = a_k + (n-k)r$).

Exemplo 4.7. *Tomemos* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = ax^2 + bx + c$. *Sabendo que os pares ordenados* $(-1, 5)$, $(2, 2)$ *e* $(7, 37)$ *pertencem ao gráfico de* f, *vamos obter a ordenada do ponto cuja abscissa é* -3.

Ao definirmos a P.A. auxiliar, denotaremos o menor valor (-3) como o primeiro termo. Assim, temos: $x_1 = -3, y_1 = f(-3), x_3 = -1, y_3 = 5, x_6 = 2, y_6 = 2, x_{11} =$

$7, y_{11} = 37$. Aplicando o método com a generalização da fórmula, segue.

$$\begin{aligned}
y_6 - y_3 &= \alpha_3 + \cdots + \alpha_5 \\
-3 &= \frac{(\alpha_3 + \alpha_3 + 2r)3}{2} \\
\alpha_3 + r &= -1 \\
\alpha_3 &= -1 - r
\end{aligned}$$

Tomando o outro par ordenado determinamos a segunda equação, na qual substituiremos α_3.

$$\begin{aligned}
y_{11} - y_3 &= \alpha_3 + \cdots + \alpha_{10} \\
32 &= \frac{(\alpha_3 + \alpha_3 + 7r)8}{2} \\
2\alpha_3 + 7r &= 8 \\
-2 - 2r + 7r &= 8 \\
5r &= 10 \\
r &= 2 \\
\therefore \alpha_3 &= -3
\end{aligned}$$

Se $\alpha_3 = -3$ e $r = 2$, é fácil ver que $\alpha_2 = -5$ e $\alpha_1 = -7$. Sendo desnecessário, neste caso usar a generalização do termo geral de uma P.A.

$$\begin{aligned}
y_3 - y_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 \\
5 - y_1 &= -12 \\
y_1 &= f(-3) = 17
\end{aligned}$$

A seguir vamos fazer uma generalização para determinar as equações do sistema de ordem 2 cujas variáveis são a razão e o termo da P.A. resultante do operador Δ na

P.A. de segunda ordem, que são as imagens da função. Para tanto, considere $m > n$.

$$\begin{aligned} y_m - y_n &= \alpha_n + \cdots + \alpha_{m-1} \\ &= \frac{[\alpha_n + \alpha_n + (m-1-n)r](m-1-n+1)}{2} \\ &= \frac{[2\alpha_n + (m-n-1)r](m-n)}{2} \\ &= \frac{2\alpha_n(m-n) + (m-n)(m-1-n)r}{2} \end{aligned}$$

Repare que $(m-n)$ é um número natural e $(m-n-1)$ é o seu antecessor. Disso decorre que a expressão encontrada será simplificada pois na primeira parcela temos o fator 2, e na segunda temos o produto de dois números consecutivos, logo, um deles é par.

Findando as análises de casos em que os pontos possuem abscissas inteiras, segue-se o questionamento mais natural. Seria possível realizar tal processo para os números racionais? Certamente, pois usando a mesma adaptação podemos definir uma P.A. auxiliar no domínio. Observe que no caso em que os números apresentados são inteiros a P.A. auxiliar é de razão $r = 1$. Se a maior quantidade de casas decimais dentre as abscissas dadas for uma casa decimal, definiremos a P.A auxiliar de razão $r = 0,1$. Em casos com duas casas decimais, uma razão $r = 0,01$, e assim por diante.

Exemplo 4.8. *Dada a função real de variável real, definida por* $f(x) = ax^2 + bx + c$, *tal que* $f(2) = 6$, $f(3,2) = 12,24$ *e* $f(4) = 18$, *obteremos o valor de* $f(5,1)$.

Neste caso a nossa P.A. auxiliar terá razão $r = 0,1$. Sem perda de generalidade, tomando o menor valor apresentado como sendo o primeiro termo obtemos a sequência $(x_1 = 2; x_2 = 2,1; x_3 = 2,2; ...)$. Dessa forma, os valores apresentados na questão denotaremos por: $x_1 = 2; y_1 = 6; x_{13} = 3,2; y_{13} = 12,24; x_{21} = 4; y_{21} = 18; x_{32} = 5,1, y_{32} = f(5,1)$. De forma análoga aos exercícios anteriores e usando o método para obter as equações do sistema, chegamos aos resultados.

$$\begin{aligned}
y_{13} - y_1 &= \alpha_1 + \cdots + \alpha_{12} \\
6,24 &= 12\alpha_1 + 66r \\
2\alpha_1 + 11r &= 1,04\ .
\end{aligned}$$

Obtendo a segunda equação, temos.

$$\begin{aligned}
y_{21} - y_1 &= \alpha_1 + \cdots + \alpha_{20} \\
12 &= 20\alpha_1 + 190r \\
2\alpha_1 + 19r &= 1,2
\end{aligned}$$

Subtraindo a primeira da segunda, obtemos os valores de α_1 e r.

$$\begin{aligned}
2\alpha_1 + 19r - 2\alpha_1 - 11r &= 1,2 - 1,04 \\
8r &= 0,16 \\
r &= 0,02
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore 2\alpha_1 &= 1,2 - 0,38 \\
\alpha_1 &= 0,41
\end{aligned}$$

Para finalizarmos, substituiremos α_1 e r a seguir.

$$\begin{aligned}
y_{32} - y_1 &= \alpha_1 + \cdots + \alpha_{31} \\
y_{32} &= 31\alpha_1 + 465r + y_1 \\
&= 12,71 + 9,3 + 6 \\
&= f(5,1) = 28,01
\end{aligned}$$

Considere o seguinte exemplo e note o procedimento análogo para valores do domínio que possuem casas decimais exatas.

Exemplo 4.9. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função quadrática tal que $f(1,2) = 3,84$, $f(2,45) = 10,9025$ e $f(3,4) = 18,36$, determinaremos o valor de $f(5,7)$?*

Sem perda de generalidade, vamos tomar uma P.A. auxiliar conveniente. Como um dos valores do domínio apresenta duas casas decimais, tomaremos uma P.A. de razão $r = 0,01$. Então seja ela $\left(x_1 = 0,01 = \frac{1}{100}, x_2 = 0,02 = \frac{2}{100}, x_3 = 0,03 = \frac{3}{100}, ...\right)$. O que nos leva a reescrever as abscissas dadas e suas respectivas imagens como: $1,2 = \frac{120}{100} = x_{120}, y_{120} = 3,84, 2,45 = \frac{245}{100} = x_{245}, y_{245} = 10,9025, 3,4 = \frac{340}{100} = x_{340}, 5,7 = \frac{570}{100} = x_{570}$. Queremos determinar, portanto, y_{570}. Aplicando o método, obtemos.

$$\begin{aligned} y_{245} - y_{120} &= \alpha_{120} + \cdots + \alpha_{244} \\ 7,0625 &= 125\alpha_{120} + 7750r \\ \alpha_{120} + 62r &= 0,0565 \end{aligned}$$

Obtendo a segunda equação, temos.

$$\begin{aligned} y_{340} - y_{120} &= \alpha_{120} + \cdots + \alpha_{339} \\ 14,52 &= 220\alpha 120 + 24090r \\ 2\alpha_{120} + 219r &= 0,132 \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema de ordem 2, facilmente determinamos que $r = 0,0002$ e $\alpha_{120} = 0,0441$. Determinemos o valor de y_{570} aplicando método novamente.

$$\begin{aligned} y_{570} - y_{120} &= \alpha_{120} + \cdots + \alpha_{569} \\ y_{570} &= 450\alpha_{120} + 101025r + y_{120} \\ &= 19,845 + 20,205 + 3,84 \\ &= 43,89 \end{aligned}$$

Corolário 4.2. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função quadrática tal que $f(x_n) = y_n$ com $n \in \mathbb{N}$ e que (x_n) é uma P.A. e (y_n) uma P.A. de ordem 2. Se dados três pares ordenados pertencentes a f, $f(s) = S$, $f(t) = T$ e $f(u) = U$. Então podemos escrever $f(\delta)$ em função de s, t, u, S, T, U.*

Demonstração: Consideremos que os elementos tomados do domínio de f sejam $s, t, u \in \mathbb{Q}$, que possam ser escritos da forma decimal exata, isto é, $\dfrac{n}{10^k}$ onde $n \in \mathbb{Z}$ e $k \in \mathbb{N}$. Dessa forma, podemos denotar uma P.A. auxiliar conveniente a partir da representação decimal de s, t, u, tal que a razão $r = 10^{-k}$ e os termos sejam: $s = \dfrac{s'}{10^k} = x_{s'}, t = \dfrac{t'}{10^k} = x_{t'}, u = \dfrac{u'}{10^k} = x_{u'}, \delta = \dfrac{\delta'}{10^k} = x_{\delta'}$. Semelhantemente, as respectivas imagens serão denotadas por: $S = y_{s'}, T = y_{t'}, U = y_{u'}, f(\delta) = y_{\delta'}$. Já argumentamos e vimos exemplos de casos que podemos usar o teorema e o método prático para determinar a imagem do quarto elemento. Assim, tomando os dados, temos:

$$y_{t'} - y_{s'} = \alpha_{s'} + \cdots + \alpha_{t'-1}$$

$$\Rightarrow T - S = \frac{(\alpha_{s'} + \alpha_{t'-1})(t' - s')}{2}$$

$$\Rightarrow T - S = \frac{[\alpha_{s'} + \alpha_{s'} + (t' - s' - 1)r](t' - s')}{2}$$

$$\Rightarrow T - S = \frac{[2\alpha_{s'} + (t' - s' - 1)r](t' - s')}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2(T - S)}{t' - s'} = 2\alpha_{s'} + (t' - s' - 1)r \ (*)$$

$$y_{u'} - y_{s'} = \alpha_{s'} + \cdots + \alpha_{u'-1}$$

Analogamente, segue que:

$$U - S = \frac{[2\alpha_{s'} + (u' - s' - 1)r](u' - s')}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2(U - S)}{u' - s'} = 2\alpha_{s'} + (u' - s' - 1)r \ (**)$$

Fazendo $(*) - (**)$, obtemos a seguinte relação:

$$\frac{2(T-S)}{t'-s'} - \frac{2(U-S)}{u'-s'} = r(t'-u')$$
$$\Rightarrow r = \frac{2(T-S)}{(t'-s')(t'-u')} - \frac{2(U-S)}{(u'-s')(t'-u')} \quad (***)$$

Isolando $\alpha_{s'}$ em $(*)$, segue que:

$$\alpha_{s'} = \frac{(T-S)}{(t'-s')} + \frac{(s'+1-t')r}{2}$$

Substituindo r por $(***)$ na igualdade acima, obtemos:

$$\alpha_{s'} = \frac{(T-S)(s'+1-u')}{(t'-s')(t'-u')} - \frac{(U-S)(s'+1-t')}{(u'-s')(t'-u')}$$

Sabendo que

$$y_{\delta'} - y_{s'} = \alpha_{s'} + \cdots + \alpha_{\delta'-1}$$
$$\Rightarrow y_{\delta'} - S = \frac{[2\alpha_{s'} + (\delta' - s' - 1)r](\delta' - s')}{2}$$
$$\Rightarrow y_{\delta'} = S + \alpha_{s'}(\delta' - s') + \frac{(\delta' - s' - 1)(\delta' - s')r}{2}$$

Substituiremos os valores de $\alpha_{s'}$ e r encontrados no sistema anterior. Reorganizando, obtemos:

$$y_{\delta'} = S + \frac{\delta' - s'}{t' - u'}\left(\frac{(T-S)(\delta' - u')}{(t'-s')} - \frac{(U-S)(\delta' - t')}{(u'-s')}\right).$$

Reescrevendo $f(\delta)$ em função dos valores dados s, S, t, T, u, U e δ, sabendo que $s' = 10^k s, t' = 10^k t, u' = 10^k u$ e $\delta' = 10^k \delta$, segue que:

$$f(\delta) = y_{\delta'} = S + \frac{10^k\delta - 10^k s}{10^k t - 10^k u}\left(\frac{(T-S)(10^k\delta - 10^k u)}{(10^k t - 10^k s)} - \frac{(U-S)(10^k\delta - 10^k t)}{(10^k u - 10^k s)}\right)$$
$$\Rightarrow f(\delta) = S + \frac{\delta - s}{t - u}\left(\frac{(T-S)(\delta - u)}{(t-s)} - \frac{(U-S)(\delta - t)}{(u-s)}\right).$$

$\blacksquare$

Para estendermos a validade para o domínio formado pelos números reais, usamos o fato dos reais serem densos e que podemos aproximar qualquer número real por meio de números racionais.

Teorema 4.3. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função cúbica. Então toda P.A. não constante $(x_1, x_2, x_3, ...)$ é transformada por f numa P.A. de ordem 3 não degenerada $(f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2, f(x_3) = y_3, ...)$.*

Demonstração: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Como $(x_1, x_2, x_3, ...)$ é uma P.A., então

$$x_n = x_1 + (n-1)r,$$

onde r é a razão da P.A. Aplicando f em x_n, teremos

$$\begin{aligned}
f(x_n) &= a(x_1 + (n-1)r)^3 + b(x_1 + (n-1)r)^2 + c(x_1 + (n-1)r) + d \\
&= a(x_1^3 + 3x_1^2(n-1)r + 3x_1(n-1)^2r^2 + (n-1)^3r^3) + b(x_1^2 + 2x_1(n-1)r \\
&+ +(n-1)^2r^2) + c(x_1 + (n-1)r) + d \\
&= ax_1^3 + 3ax_1^2rn - 3ax_1^2r + 3ax_1r^2n^2 - 6ax_1r^2n + 3ax_1r^2 + ar^3n^3 - 3ar^3n^2 \\
&+ 3ar^3n - ar^3 + bx_1^2 + 2bx_1rn - 2bx_1r + br^2n^2 - 2br^2n + br^2 + cx_1 + crn \\
&- cr + d \\
&= (ar^3)n^3 + (3ax_1r^2 - 3ar^3 + br^2)n^2 + (3ax_1^2r - 6ax_1r^2 + 3ar^3 + 2bx_1r \\
&- 2br^2 + cr)n + (ax_1^3 - 3ax_1^2r + 3ax_1r^2 - ar^3 + bx_1^2 - 2bx_1r - br^2 + cx_1 \\
&- cr + d)\ .
\end{aligned}$$

Para que $f(x)$ seja uma P.A. de terceira ordem, devemos verificar se a sequência $\beta_n =$

$\Delta f(x_n)$ é uma P.A de segunda ordem. Calculando $\beta_{n-1}, \beta_n, \beta_{n+1}$ temos

$$\begin{aligned}
\beta_{n-1} &= f(x_n) - f(x_{n-1}) \\
&= (ar^3)[n^3 - (n-1)^3] + (3ax_1r^2 - 3ar^3 + br^2)[n^2 - (n-1)^2] \\
&+ (3ax_1^2r - 6ax_1r^2 + 3ar^3 + 2bx_1r - 2br^2 + cr)[n - (n-1)] \\
&= (ar^3)(3n^2 - 3n + 1) + (3ax_1r^2 - 3ar^3 + br^2)(2n - 1) \\
&+ (3ax_1^2r - 6ax_1r^2 + 3ar^3 + 2bx_1r - 2br^2 + cr) \ ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_n &= f(x_{n+1}) - f(x_n) \\
&= (ar^3)[(n+1)^3 - n^3] + (3ax_1r^2 - 3ar^3 + br^2)[(n+1)^2 - n^2] \\
&+ (3ax_1^2r - 6ax_1r^2 + 3ar^3 + 2bx_1r - 2br^2 + cr)[(n+1) - n] \\
&= (ar^3)(3n^2 + 3n + 1) + (3ax_1r^2 - 3ar^3 + br^2)(2n + 1) \\
&+ (3ax_1^2r - 6ax_1r^2 + 3ar^3 + 2bx_1r - 2br^2 + cr) \ ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{n+1} &= f(x_{n+2}) - f(x_{n+1}) \\
&= (ar^3)[(n+2)^3 - (n+1)^3] + (3ax_1r^2 - 3ar^3 + br^2)[(n+2)^2 - (n+1)^2] \\
&+ (3ax_1^2r - 6ax_1r^2 + 3ar^3 + 2bx_1r - 2br^2 + cr)[(n+2) - (n+1)] \\
&= (ar^3)(3n^2 + 9n + 7) + (3ax_1r^2 - 3ar^3 + br^2)(2n + 3) \\
&+ (3ax_1^2r - 6ax_1r^2 + 3ar^3 + 2bx_1r - 2br^2 + cr) \ .
\end{aligned}$$

Para que β_n seja uma P.A. de ordem 2, devemos verificar se a sequência $\alpha_n = \Delta(\beta_n)$ é uma P.A. Calculando α_n e α_{n-1} teremos

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= \beta_{n+1} - \beta_n \\
&= (ar^3)(6n + 6) + (3ax_1r^2 - 3ar^3 + br^2)(2) \ ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{n-1} &= \beta_n - \beta_{n-1} \\ &= (ar^3)(6n) + (3ax_1r^2 - 3ar^3 + br^2)(2)\ . \end{aligned}$$

Para verificar que α_n é uma P.A., temos que constatar que $\alpha_n - \alpha_{n-1}$ é uma constante. De fato, pois

$$\alpha_n - \alpha_{n-1} = 6ar^3.$$

Assim, (α_n) é uma P.A. e, portanto, $(f(x_n))$ é uma P.A. de ordem 3. ■

Exemplo 4.10. *Se a função real de variável real, definida por* $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$, *é tal que* $f(-3) = -32$, $f(-1) = 6$, $f(1) = 4$ *e* $f(3) = 58$, *determinaremos o valor de* $f(5)$.

Observe que os valores do domínio estão em P.A. $(-3, -1, 1, 3, 5)$. Denotemos $f(5) = y$. Do Teorema 4.1, temos que suas respectivas imagens estão em P.A. de terceira ordem $(-32, 6, 4, 58, y)$. Para determinar y, aplicaremos o operador Δ nas imagens encontrando a P.A. de ordem 2 $(38, -2, 54, y - 58)$. Usando o operador diferença, pela segunda vez, teremos a P.A. de primeira ordem não degenerada $(-40, 56, y - 112)$. E, por fim, temos que a razão desta é não nula e, portanto,

$$\begin{aligned} 56 + 40 &= y - 112 - 56 \\ 96 &= y - 168 \\ y &= 264\ . \end{aligned}$$

A seguir resolveremos usando sistemas lineares.

$$\begin{cases} f(-3) & = & -32 \\ f(-1) & = & 6 \\ f(1) & = & 4 \\ f(3) & = & 58 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -27a+9b-3c+d & = & -32 \\ -a+b-c+d & = & 6 \\ a+b+c+d & = & 4 \\ 27a+9b+3c+d & = & 58 \end{cases}$$

Somando as equações 2 e 3, obtemos uma equação nas variáveis b e d. E somando as equações 1 e 4, obtemos outra equação nas variáveis b e d. Dessa forma, temos um sistema 2x2 que resolvemos abaixo.

$$\begin{cases} 2b+2d & = & 10 \\ 18b+2d & = & 26 \end{cases} \Rightarrow 16b = 16 \Rightarrow b = 1 \therefore d = 4$$

Aplicando os valores de b e d, encontrados nas equações 1 e 2, temos um novo sistema 2x2 nas variáveis a e c para finalizar o sistema original.

$$\begin{cases} -27a+9-3c+4 & = & -32 \\ -a+1-c+4 & = & 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -9a-c & = & -15 \\ a+c & = & -1 \end{cases} \Rightarrow a = 2 \therefore c = -3$$

Dessa forma, obtemos a expressão da função cúbica $f(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 4$. E assim, determinamos a imagem desejada:

$$\begin{aligned} f(5) &= 2(125) + 25 - 15 + 4 \\ &= 264\,. \end{aligned}$$

Neste caso observamos que o sistema foi facilmente transformado em outros mais simples devido às características dos elementos do domínio, mas no exemplo a seguir será diferente. Será necessário resolver o sistema $4x4$, que optamos em usar o método do escalonamento.

Exemplo 4.11. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função cúbica em que $f(1) = 3$, $f(2) = 0$, $f(3) = -1$ e $f(4) = 6$. Determinaremos a imagem de 5.*

De forma análoga, chamemos $f(5) = y$. Aplicando o Teorema 4.1, e usando o operador Δ nas imagens, encontramos a P.A. de ordem 2 $(-3, -1, 7, y-6)$. Repetindo a operação uma segunda vez, teremos a P.A. de primeira ordem não estacionária $(2, 8, y-13)$. Assim, temos que a razão desta é não nula e, portanto,

$$\begin{aligned} 8 - 2 &= y - 13 - 8 \\ 6 &= y - 21 \\ y &= 27\ . \end{aligned}$$

Mas, caso usássemos o sistema teríamos como solução algo semelhante ao que descrevemos a seguir.

$$\left\{ \begin{aligned} f(1) &= 3 \\ f(2) &= 0 \\ f(3) &= -1 \\ f(4) &= 6 \end{aligned} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} a + b + c + d &= 3 \\ 8a + 4b + 2c + d &= 0[8L_1 - L_2] \\ 27a + 9b + 3c + d &= -1[27L_1 - L_3] \\ 64a + 16b + 4c + d &= 6[64L_1 - L_4] \end{aligned} \right. \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{aligned} a + b + c + d &= 3 \\ 4b + 6c + 7d &= 24 \\ 18b + 24c + 26d &= 82[\tfrac{9}{2}L_2 - L_3] \\ 48b + 60c + 63d &= 186[12L_2 - L_4] \end{aligned} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} a + b + c + d &= 3 \\ 4b + 6c + 7d &= 24 \\ 3c + \tfrac{11}{2}d &= 26[2L_3] \\ 12c + 21d &= 102[4L_3 - L_4] \end{aligned} \right. \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a+b+c+d &= 3 \\ 4b+6c+7d &= 24 \\ 6c+11d &= 52 \\ d &= 2 \end{cases} \therefore a=1, b=-5, c=5, d=2.$$

Dessa forma, obtemos a lei matemática que descreve a função cúbica $f(x) = x^3 - 5x^2 + 5x + 2$, e, portanto, determinar a imagem de 5, como segue:

$$\begin{aligned} f(5) &= 125 - 5(25) - 25 + 2 \\ &= 125 - 125 + 27 \\ &= 27\ . \end{aligned}$$

É notório que em casos de funções polinomiais de grau maior que três o método se torna cada vez mais conveniente uma vez que a solução via sistema vai se tornando cada vez mais inviável. Salientamos que nos referimos nesta afirmação aos casos em que os elementos do domínio são dados em P.A.

Desse teorema podemos abordar ainda outras característica como apresentamos no exemplo que segue.

Exemplo 4.12. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função cúbica em que $f(1) = 3$, $f(2) = 0$, $f(3) = -1$ e $f(4) = 6$, vamos obter $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.*

Como sabemos, pelo Teorema 4.1, ao aplicarmos o operador Δ três vezes nas imagens, encontraremos a razão não nula que neste caso é $\rho = 6$. Por outro lado, temos que essa constante é dada por $6ar^3$ em que a é o coeficiente da função cúbica que influencia o comportamento da função quando x tende a infinito e r é a razão dos elementos do domínio em P.A. Ou seja,

$$\begin{aligned} 6ar^3 &= 6 \\ a &= 1\,. \end{aligned}$$

Dessa forma, concluímos que sendo $a = 1$, temos que f vai para mais infinito quando $x \to +\infty$. Note que diferenciamos a razão (r) dos termos do domínio da razão (ρ) da P.A. obtida pela aplicação do operador Δ n vezes nas imagens que formam uma P.A. de ordem n.

Agora apresentaremos uma aplicação comum no estudo de funções quadráticas que é a descrição da trajetória de um objeto em função do tempo, definindo uma função $h(t)$.

Exemplo 4.13. *Um objeto é arremessado de uma plataforma de 2 metros de altura num instante zero. Após o início do experimento, é registrado por meio de fotografias de alta precisão a altura do objeto nos dois primeiros segundos obtendo a relação* $h(1) = 4$ *e* $h(2) = 8$*. Determinaremos a altura atingida no terceiro segundo.*

Repare que o exemplo em discussão se aplica ao caso mais simples dos que foram apresentados anteriormente, pois embora tenhamos demonstrado situações que podem ser realizadas acomodações convenientes e demonstrações que generalizam o uso do método. Defendemos que a aplicação mais comum do método aqui exposto seja para os problemas que os elementos do domínio estejam em P.A. explícita. Assim, o exemplo em questão pode ser resolvido sem necessariamente passar pela determinação da lei matemática que descreve tal função. Logo, obtemos os valores do domínio apresentados em P.A. $(0, 1, 2, 3)$. Denotemos $h(3) = y$. Do Teorema 4.1, as respectivas imagens estão em P.A. de segunda ordem $(2, 4, 8, y)$. Aplicando o operador Δ obtemos a P.A. auxiliar $(2, 4, y-8)$, e assim calculamos a imagem de 3 a partir da equação

$$
\begin{aligned}
4-2 &= y-8-4 \\
2 &= y-12 \\
y &= 14\,.
\end{aligned}
$$

Referências

[1] Dante, Luiz Roberto, *Matemática: contexto e aplicações*, Ática, São Paulo, 2010.

[2] Flores, Bruno Xavier de Souza, *Progreções aritméticas na Educação Básica: uma abordagem expansiva*, Dissertação de Mestrado PROFMAT, Rio de Janeiro, 2017.

[3] Inep, *Provas e Gabaritos*, disponível em http://portal.inep.gov.br/web/guest/provas-e-gabaritos

[4] Lopes, Luis, *Manual de Progressões*, Interciência, Rio de Janeiro, 1998.

[5] Lima, Elon Lages, *Números e Funções Reais*, SBM, 2017.

[6] Lima, Elon Lages et al., *A matemática do ensino médio - volume 1*, SBM, 10a. ed., Rio de Janeiro, 2012.

[7] Muniz Neto, Antonio Caminha, *Tópicos de Matemática Elementar: polinômios*, SBM, 2a. ed., Rio de Janeiro, 2016.

[8] Nascimento, Geovane Pereira do, *Progressões aritméticas, geométricas, harmônicas: aplicações e propostas de atividades*, Dissertação de Mestrado PROFMAT, Paraná, 2017.

[9] Pereira, Thais Helena Miguel, *Livro integrado: 8o. ano v. 1*, Coleção SAS, Fortaleza, 2020.