UNIVERSIDADE FEDERAL DOS VALES DO JEQUITINHONHA E MUCURI
FACULDADE DE CIÊNCIA, ENGENHARIA E TECNOLOGIA
CURSO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

NÚMEROS COMPLEXOS: uma proposta para a abordagem exploratória dos números imaginários

Alexandre Nascimento Amorim

Teófilo Otoni

2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DOS VALES DO JEQUITINHONHA E MUCURI
FACULDADE DE CIÊNCIA, ENGENHARIA E TECNOLOGIA

NÚMEROS COMPLEXOS: uma proposta para a abordagem exploratória dos números imaginários

Alexandre Nascimento Amorim

Orientador(a):

Fábio Silva de Souza

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, como parte dos requisitos exigidos para a conclusão do curso.

Teófilo Otoni

2022

Catalogação na fonte - Sisbi/UFVJM

A524n Amorim, Alexandre Nascimento
2022 Números complexos [manuscrito] : uma proposta para a abordagem exploratória dos números imaginários / Alexandre Nascimento Amorim. -- Teófilo Otoni, 2022.
68 p. : il.

Orientador: Prof. Fábio Silva de Souza.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) -- Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Teófilo Otoni, 2022.

1. Matemática. 2. Educação Matemática. 3. Números complexos. I. Souza, Fábio Silva de. II. Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri. III. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da UFVJM com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Este produto é resultado do trabalho conjunto entre o bibliotecário Rodrigo Martins Cruz/CRB6-2886
e a equipe do setor Portal/Diretoria de Comunicação Social da UFVJM

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DOS VALES DO JEQUITINHONHA E MUCURI

ALEXANDRE NASCIMENTO AMORIM

NÚMEROS COMPLEXOS: UMA PROPOSTA PARA A ABORDAGEM EXPLORATÓRIA DOS NÚMEROS IMAGINÁRIOS

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação **Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional** da Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, **nível de Mestrado,** como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática.**

Orientador: Prof. **Dr. Fábio Silva de Souza**

Data de aprovação 06/05/2022.

Prof. Dr. Fábio Silva de Souza - (UFVJM)

Profa. Dra. Sílvia Swain Canôas - (UFVJM)

Profa. Dra. Gisiane Santos Simão Ferreira - (CEFET/RJ)

AGRADECIMENTO

Primeiramente agradeço a Deus, por toda bondade e bênçãos sobre a minha vida.

Agradeço aos meus pais Antônio e Ivanildes que nunca mediram esforços para que eu seguisse a vida acadêmica independente das dificuldades e realidades enfrentadas por nós. Em especial também a minha segunda mãe Graça por todo carinho, juntamente com minha irmã, amiga e parceira Nathália por sempre me incentivar e apoiar.

A minha amada esposa Ana Lúcia meu principal alicerce, sonhando junto a mim e fazendo com que tudo isso fosse possível. Em sua companhia foi possível idealizar e realizar sonhos antes nunca imaginados, como este.

Aos meus colegas de profissão, em especial Sirlane e Ana Cristina por todo encorajamento durante minha carreira profissional.

Aos meus queridos amigos Luiz Otávio, Franksilane, Dionízio, Daniele e Adriany. Por todas as horas de estudo, apoio, companheirismo, diversão e risadas. Sem vocês seria impossível a conquista desta vitória.

Ao professor Fábio pela orientação, amizade, paciência, e exemplo de bom homem e excelente profissional, sem sua parceria este trabalho não se realizaria.

Aos professores do PROFMAT, que durante esses anos contribuíram de algum modo para o nosso enriquecimento pessoal e profissional, sendo exemplos de profissionais.

“Agradeçamos a Deus o presente que Ele nos dá, um presente que palavras não podem descrever”.

2 Coríntios 9:15 - Bíblia Sagrada.

RESUMO

O presente estudo se trata de uma pesquisa de caráter exploratório, que visa a análise do estudo dos números complexos na Educação Básica. Apesar de sua relevância e riqueza de estruturação, parte dos alunos recém formados no Ensino Médio não possuem conhecimento técnico do conteúdo e o tema é visto com ar de complexidade ao ser ensinado. Diante da experiência docente do autor, como professor regente de Matemática e durante o cumprimento deste curso de mestrado surgiu a seguinte questão norteadora sobre o tema: dentro do processo de ensino e aprendizagem de Matemática, no que diz respeito ao ensino e abordagem dos números complexos, como abordar o tema de modo a promover o aprendizado do conjunto relacionando-a com a Matemática estudada em sala de aula? A procura da resposta para esta questão tem como principal objetivo: elaborar material didático que forneça aos professores de Matemática e alunos um plano para o estudo referentes à descoberta, estruturação e exploração do conjunto dos números complexos. Assim, com o apoio da SRE – Guanhães/MG, foi possível conhecer um pouco da realidade das aulas de Matemática da região de Peçanha/MG, possibilitando a criação de uma sequência lógica, vista como um material de apoio para o estudo dos números complexos. Considera-se por fim a relevância do estudo mesmo à frente da realidade educacional, evidenciando a necessidade de promover uma comunicação livre entre aluno e professor, onde termos matemáticos vão além da simbologia, uma linguagem clara e incentivadora para as aulas.

Palavras-chave: Números Complexos, Educação Básica, Ensino de Matemática.

ABSTRACT

The present study is an exploratory research, which aims to analyze the study of complex numbers in Basic Education. Despite its relevance and richness of structuring, some of the newly graduated high school students do not have technical knowledge about the content and the subject is seen with an air of complexity when taught. In view of the author's teaching experience, as a Mathematics teacher and during the fulfillment of this master's course, the following guiding question on the subject arose: within the teaching and learning process of Mathematics, with regard to the teaching and approach of complex numbers, how to approach the theme in order to promote the learning of the set relating it to the mathematics studied in the classroom? The search for the answer to this question has as its main objective: to develop didactic material that provides Mathematics teachers and students with a plan for the study regarding the discovery, structuring and exploration of the set of complex numbers. Thus, with the support of SRE – Guanhães/MG, it was possible to know a little about the reality of Mathematics classes in the region of Peçanha/MG, enabling the creation of a logical sequence, seen as a support material for the study of complex numbers. Finally, the relevance of the study is considered even ahead of the educational reality, highlighting the need to promote free communication between student and teacher, where mathematical terms go beyond symbology, a clear and encouraging language for classes.

Keywords: Complex Numbers, Basic Education, Mathematics Teaching.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O conjunto dos números complexos é conhecido como uma extensão dos números reais, e atualmente seu estudo está endereçado ao Ensino Médio de modo facultativo.

Apesar de sua relevância e riqueza de estruturação, parte dos alunos recém formados no Ensino Médio não possuem conhecimento técnico do conteúdo ou, em algumas vezes, não ouviu falar sobre sua existência. O tema é visto com ar de complexidade para ser ensinado para o aluno na Educação Básica, seja pela flexibilidade já dita, pela deficiência na formação do professor ou até mesmo por não ser parte da matriz curricular do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

Nos dias que correm, o país caminha para a uniformização no currículo do Ensino Básico, e diferentemente dos antigos Parâmetros Curriculares Nacionais (PNC's) que sugeriam o ensino dos números complexos como facultativo, a Base Nacional Curricular Comum (BNCC), já em vigor no país, nem menciona o ensino do conjunto em seu corpo.

Isto pode ser visto como um reflexo da inflexão e inadequação do ensino do conteúdo, que em geral é desenvolvido nos livros didáticos como um recurso para a descoberta das raízes de polinômios não pertencentes ao conjunto dos números reais. O ponto principal é que mesmo considerado uma extensão dos reais, os números complexos não manifestam grande importância ou, ao menos, não instigam nos alunos e professores a curiosidade da exploração de um conteúdo tão rico.

Deve-se então pensar neste conjunto não de modo flexível, mas como essencial, devido a sua importância dentro da construção do conhecimento matemático e de todas as contribuições para o desenvolvimento científico da sociedade.

Mas diante de um cenário educativo ao qual deixa como opcional ou até mesmo suprime o ensino de um conteúdo de suma relevância na área de Matemática, reflete-se sobre as propostas de estudo e o tratamento que o conjunto tem recebido. Dentro deste cenário destaca-se o papel do professor, mediador entre o ensino e aprendizado - talvez um passo adiante ao perceber a importância teórica para a Matemática; postura interessante ao conhecimento que se ensina/aprende.

O aluno é outro elemento importante pois, ao estudar Matemática ele deve abrir sua mente para os caminhos que a disciplina pode proporcionar. Almeja-se que ele seja um estudante curioso e que tenha em si a essência de um explorador, disposto a conhecer os desfechos desta ciência.

Assim justifica-se a escolha do tema para esta pesquisa, diante dos fatos relatados acima e da experiência docente do autor como professor regente de Matemática no 8º e 9º anos do Ensino Fundamental e nos três anos que compõem o Ensino Médio entre os anos de 2016 a 2021, na cidade de Peçanha, interior de Minas Gerais.

Durante os anos de experiência, o autor notou que o conjunto dos números complexos tem sido negligenciado, não só onde atua como professor, mas também ao observar discussões feitas no meio acadêmico e escolar. Isso se dá ao fato de, principalmente, existir a necessidade em cumprir com eficácia e prioridade a matriz curricular do ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), o qual não aborda o conjunto; o que acarreta seu ensino superficial. Assim como afirma Beltrão, Vítor e Barbosa (2017, p.142), ao dizer que os "números complexos não têm um ensino eficaz em sala de aula, seja pela complexidade do ensino dos seus conceitos ou, talvez, pela crença de que os conhecimentos de seus conceitos não têm aplicabilidade prática no cotidiano dos alunos".

Ao encontro do que foi relatado acima, pode-se também levar em consideração a falta de interesse, ou por muitas vezes, insegurança do professor em trabalhar com os complexos em sala de aula. Este comportamento foi visto diversas vezes pelo autor ao trabalhar ou estagiar com outros professores de Matemática de escolas vizinhas, onde grande parte declarou, em conversas informais, ou reuniões de planejamento, que o mesmo nem é visto pelos alunos.

Mas, foi durante o cumprimento deste curso de mestrado que houve uma maior reflexão por parte do autor. Ao se aprofundar em conteúdos propostos para o Ensino Médio e estendê-los além do que a sala de aula proporcionou nestes anos de experiência, foi percebido que muitos conteúdos são vistos e não estudados.

Neste momento, os olhos se abriram para uma reflexão: a Matemática deve ser considerada como um mundo onde os tópicos estudados não devem ser vistos como capítulos distintos e sim uma teia que se entrelaça e constrói algo maior. Não um quebra-cabeça e sim um organismo com partes que possuem seus papéis específicos, mas que, funcionam em sintonia e harmonização com as outras. Então, por que com o conjunto dos números complexos seria diferente? Não há como estudar o todo sem conhecer as partes.

À frente desta realidade imposta ao estudo dos números complexos e das experiências adquiridas pelo autor surge a seguinte questão norteadora: dentro do processo de ensino e aprendizagem de Matemática, no que diz respeito ao ensino e abordagem dos números complexos, como abordar o tema de modo a promover o aprendizado do conjunto relacionando-a com a Matemática estudada em sala de aula?

Como hipótese dessa pesquisa, acredita-se que o estudo de Matemática e seu desenvolvimento está diretamente associado na forma em que ela é transmitida ao aluno, seja oralmente ou de modo escrito. Ela possui uma linguagem própria que deve receber atenção, pois uma falha na comunicação acarreta diversas consequências.

Se faz necessário assim promover uma comunicação livre entre aluno e professor, onde termos matemáticos vão além da simbologia, se tornando uma linguagem clara e incentivadora para as aulas. Comunicar-se de forma objetiva na Matemática é essencial para o desenvolvimento de qualquer conteúdo, seja a comunicação feita oralmente, por símbolos ou pela escrita. Não há como aprender ou ensinar sem que a linguagem entre os indivíduos e elementos envolvidos seja objetiva. Smole e Diniz (2009, p.15) diz que "a comunicação tem um papel fundamental para ajudar os alunos a construírem um vínculo entre suas noções informais e intuitivas e a linguagem abstrata e simbólica da matemática".

Assim, sendo o professor o mediador do estudo e o aluno aquele que explora, seria viável que ambos tivessem em mãos uma ferramenta de suporte que refletisse parte da extensão do conjunto dos números complexos, que transmita com clareza e objetividade os conceitos que norteiam o conteúdo e os instigue a desenvolver a aula além das exigências dos documentos oficiais.

É necessário um material que comunique ao mesmo tempo com o professor/mediador e com o aluno/investigador, promovendo um ambiente exploratório que permita aprofundar nos estudos e suas ramificações. Além de proporcionar o entendimento entre as relações do conteúdo, da realidade escolar e da realidade cotidiana.

Portanto, esta pesquisa busca propor um material de apoio a professores e alunos quanto a exploração dos números complexos. Espera-se, assim, que o resultado deste trabalho auxilie na comunicação dos agentes envolvidos e impulsione o desenvolvimento do conhecimento matemático.

Logo, tem-se como objetivo geral da pesquisa a elaboração de um material didático que forneça aos professores de Matemática e alunos um plano para o estudo referente à descoberta, estruturação e exploração do conjunto dos números complexos. E para alcançar este objetivo espera-se:

- Averiguar como o ensino dos números complexos é visto entre os professores de matemática da região onde a pesquisa será aplicada;
- Analisar as propostas de abordagem dos números complexos através dos livros didáticos utilizados na região;
- Investigar os métodos e cenários nos quais os professores de Matemática trabalham os números complexos em suas aulas;
- Propor um cenário exploratório para o ensino e aprendizagem dos números complexos.

Esta pesquisa apresenta em primeiro momento uma breve revisão histórica da construção do conjunto dos números complexos, evidenciando os principais matemáticos e feitos realizados por eles sobre o tema. Logo após, são feitas reflexões sobre o ensino do conjunto dentro do Ensino Básico, abordagem, currículo e aplicações. Em seguida são apresentados os procedimentos e métodos utilizados para alcançar os objetivos propostos e procurar responder a questão norteadora.

Por fim, são feitas discussões sobre a opinião dos professores quanto a abordagem do tema no Ensino Básico, a análise de livros didáticos utilizados.Finalizando este trabalho, apresentaremos o material didático voltado para professores de Matemática cujo principal enfoque são os números complexos.

2 REVISÃO DE LITERATURA

Neste capítulo, faremos uma descrição histórica do surgimento dos números complexos, destacando os principais estudiosos envolvidos. Em seguida, será realizada uma análise do currículo do Ensino Básico quanto ao ensino dos números complexos, suas contribuições e empecilhos no estudo da Matemática. Por fim, reconheceremos os possíveis pontos de impacto do currículo do Ensino Básico no Ensino Superior no que se refere ao conteúdo dos números complexos, bem como a imprescindibilidade do estudo deste conjunto numérico para o desenvolvimento da Matemática e outras áreas do conhecimento.

2.1 Uma síntese da descoberta dos números complexos

Este tópico está destinado a uma breve revisão dos fatos históricos que constituíram os conceitos que fundamentam os números complexos. O objetivo aqui não é descrever os problemas encontrados e cálculos que levaram a descoberta do conjunto, mas sim pontuar fatos históricos e nomes que contribuíram para o desenvolvimento do conhecimento.

Pode-se dizer que a discussão sobre a existência dos números complexos tem sua primeira fagulha acesa devido a um problema encontrado em uma obra de Herão de Alexandria (10 d.C - 70 d.C), que ao estudar a área de estereometria (parte da matemática dedicada ao estudo do volume de sólidos), descreve o seguinte problema:

> Depois de ter dado uma fórmula correta para a determinação do volume de um tronco de uma pirâmide de base quadrada e aplicada com sucesso no caso em que o lado da base inferior é 10, do superior 2, e a borda 9, o autor se esforça para resolver o problema em que o lado da base inferior é 28, do superior 4 e a borda 15. Em vez da raiz quadrada de $81 - 144$ exigida pela fórmula, ele obtém a raiz quadrada de $144 - 81$ [...], ou seja, ele substitui $\sqrt{-1}$ por 1, e não consegue observar que o problema conforme declarado é impossível. Não se pode determinar se esse erro foi devido a Herão ou à ignorância de alguém que transcreveu. (BEMAN, 1897, appud, NAHIN, 2010, p.4)(Tradução própria)

Perceba que, ao contrário do que muitos afirmam, principalmente em aulas no Ensino Básico, que o conceito de raiz quadrada de um número negativo não surgiu da resolução de equações de segundo grau, mas sim de uma afirmação equivocada nas notações de Herão ou na transcrição errônea de seus pensamentos. Certamente, Herão estava consciente da aparição da raiz negativa, apesar de ter manipulado a sua aritmética para favorecer a resolução do problema. Contudo, ao omiti-la fez com que o sólido fosse impossível de ser construído.

Algo semelhante aconteceu com Diofanto cerca de dois séculos depois. Famoso por seus trabalhos no campo da Aritmética, ele se deparou certa vez com um problema. A questão foi enunciada por Nahin (2010, p.5) da seguinte forma: “Dado um triângulo retângulo com área 7 e perímetro 12, encontre seus lados"(Tradução própria). Este problema pode ser examinado pelo sistema de equações:

$$\begin{cases} \dfrac{x \cdot y}{2} = 7 \\ x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 12 \end{cases}$$

onde x e y são os catetos do triângulo e $\sqrt{x^2 + y^2}$ é a hipotenusa. E ao desenvolver o caso, Diofanto se depara com a equação $24x^2 + 172x + 336 = 0$.

Propõe-se neste momento uma reflexão acerca da resolução desta equação. Diofanto não tinha conhecimento da "fórmula de Bhaskara", que foi sintetizada cerca de um milênio à frente de seu tempo, porém, a mesma será utilizada aqui para exemplificação da situação, uma vez que provavelmente é do conhecimento do leitor. Assim, se o processo já conhecido por essa fórmula fosse utilizado, resultaria em um valor negativo para o discriminante, ou seja, a equação não possui solução presente no conjunto dos números reais. De maneira diferente de Herão, Diofanto assume o obstáculo encontrado, porém, não se aprofunda nos termos que o compõe.

Aqui, destaca-se somente um arranhão na superfície do iceberg, pois, durante muito tempo, a raiz quadrada de números negativos ficou sem uma significativa dedicação. Isso mudaria com a aparição da chamada cúbica deprimida. Esta ferramenta se trata de uma cúbica incompleta, na qual o termo ao quadrado se encontra ausente, podendo ser derivada da própria cúbica geral. A equação obtida neste procedimento é $x^3 + px = q$.

Scipione del Ferro (1465–1526) foi quem desenvolveu trabalhos acerca deste problema. Seu objetivo era calcular $f(x) = 0$, ou seja, encontrar algum valor para a raiz do polinômio que satisfizesse a cúbica. E aí está o impasse. Apesar de Del Ferro conseguir avançar muito na resolução deste problema, ele estava concentrado em encontrar um único valor para sua solução e, por isso, não se ateve a outras situações que ocorriam na resolução, como as raízes que, atualmente, chamamos de complexas. Talvez, Del Ferro neste momento seguiu o exemplo de outros matemáticos na aversão do trabalho com números negativos.

Del Ferro mantinha segredo sobre a proposta de resolução que desenvolveu, como de costume entre os matemáticos da época, devido ao fato de que naquele tempo era comum a participação em concursos públicos de resolução de problemas, cujos os prêmios envolviam em geral retorno financeiro e reconhecimento. Por isso, Del Ferro guardava para si essa carta na manga, e entre os poucos conhecidos que sabiam sobre estava Antonio Maria Del Fiore. Diferentemente de Del Ferro, Fiore não manteve segredo da descoberta. Ao tomar conhecimento de que outro estudioso havia encontrado um meio para resolução de equações cúbicas, resolveu desafiá-lo. Niccolò Fontana (1500 - 1557), mais conhecido como Tartaglia, era quem estava a estudar equações e, subestimado por Fiore, aceitou o desafio em um concurso público.

No fim da competição, Tartaglia demonstrou, em seus esforços para vencer Fontana, que conhecia um método para esta equações e, portanto, saiu como vencedor. Apesar de sua vitória, Tartaglia teve o mesmo princípio que Del Ferro mantendo para si sua descoberta. Chegou, inclusive, a pensar em posteriormente publicar sobre suas reflexões acerca da resolução de equações cúbicas, o que nunca veio a acontecer.

Entretanto, sendo este um concurso destinado ao público, a notícia de que era possível a resolução de equações cúbicas começou a se espalhar, chegando aos ouvidos de Girolamo Cardano (1501 - 1576). Cardano, incessavelmente questionou Tartaglia sobre sua descoberta, até que o segredo foi revelado a ele sob sigilo.

Cardano era um homem de palavra e cumpriu por certo tempo a promessa de não divulgar a descoberta compartilhada por Tartaglia. Porém, Cardano tomou conhecimentos das descobertas de Del Ferro. Neste sentido, ele enxergou nesse momento uma brecha, na qual ele poderia publicar sobre a resolução de equações cúbicas sem ferir o voto de sigilo que fez a Tartaglia, pois, Del Ferro também havia realizado este feito.

Assim, Cardano, no ano de 1545, publicou sua obra *Ars Magna*, que em seu decorrer possuía a discussão sobre a redescoberta da resolução de equações cúbicas. Nesta obra deu créditos a Tartaglia e Del Ferro.

Pode parecer que até o momento que a história dos números complexos foi deixada para trás, mas mesmo que a resolução de equações cúbicas resultassem em soluções complexas, isso ainda não era alvo de dedicação por parte dos matemáticos.

Entretanto, por mais que Cardano não desse atenção aos complexos, referia-se a estes números como "sofisticados", afirmando sutileza e inutilidade dos mesmos. (JÚNIOR, 2009, p.23). Em meio as pesquisas de Cardano surgiu a seguinte reflexão citada por Nahin (2010, p.17): "o que realmente deixou Cardano perplexo foi o caso de tais raízes quadradas de números negativos ocorrendo em sua fórmula para equações cúbicas que claramente tinham apenas soluções reais". (Tradução Própria)

Assim, em seus estudos, Cardano conclui que uma equação cúbica deveria possuir três raízes, embora não tenha apresentado um método para descobri-las. Rafael Bombelli (1526-1572) por sua vez, com uma nova visão da Matemática, na qual a mesma ocupa um espaço não só para a resolução de problemas práticos, promove pela primeira vez uma discussão sobre os números imaginários. Como afirma Júnior (2009, p.25), "os números imaginários são abordados em seu primeiro livro, juntamente com definições de conceitos elementares, como potências, raízes, binômios e as operações que os envolvem. Ele reconhece a existência das raízes negativas e segue adiante afirmando que estas expressões são mais "sofisticadas" que reais".

Bombelli reflete que a afirmação já mencionada aqui por Cardano é verídica. Para ele, as equações cúbicas "irredutíveis" possuem três raízes reais e distintas. Assim, Bombelli reparou em uma de suas resoluções que,

> de maneira paradoxal, tínhamos, de um lado, uma situação em que a fórmula produzia um número não reconhecido como tal e, de outro, três boas soluções que podiam ser descobertas por esta fórmula. Bombelli foi o primeiro matemático com coragem suficiente para aceitar a existência dos números imaginários, dando uma nova luz ao quebra-cabeça das equações cúbicas. Sua habilidade em operar com números imaginários o capacitou a demonstrar a aplicabilidade da fórmula de Cardano até nos casos irredutíveis de uma equação cúbica. (JÚNIOR, 2009, p.27)

Pouco tempo depois, chega a vez de René Descartes (1596-1650) discutir um pouco sobre a existência dos números complexos, e mesmo que o termo imaginário tenha sido usado algumas vezes durante este resumo histórico, cabe à Descartes a sua autoria. Além de nomear os números até então "sofisticados", Descartes traz uma nova reflexão acerca do tema: a possibilidade da representação geométrica dos imaginários.

Descartes destacou-se ao promover resoluções para alguns de seus problemas algébricos por meio da geometria, o que era uma exploração comum em seu tempo, devido a frequente necessidade de relacionar a Matemática com a realidade vivida. O matemático já trabalhava por um bom tempo com o estudo de equações e teve destaque na representação das raízes reais por meio geométrico.

Descartes conhecia as relações que envolviam o estudos das raízes de equações e sabia que, mesmo havendo a inexistência delas (chamado de conjunto dos números reais), era possível fazer operações com as mesmas sem conhecê-las. Então partiu para a tentativa da representação geométrica destas raízes desconhecidas, mas não teve êxito, chegando a afirmar a impossibilidade de tal representação. Pode-se complementar o estudo através do exemplo das relações de Albert Girard (1595-1632) ao operar raízes complexas, estudadas no Ensino Básico mesmo que não se conheçam o conjunto dos complexos.

Por mais que Descartes não tenha conquistado a representação geométrica para os números imaginários, abriu oportunidades para que outros matemáticos desenvolvessem este trabalho. John Wallis (1616-1703) foi um deles, que chegou bem perto desta representação. Por mais que não tenha conseguido realizá-la, Wallis percebeu que era possível fazê-la, diferentemente das conclusões de Descartes.

Os trabalhos desenvolvidos por Descartes e Wallis abriram espaço para a chegada de John Wessel (1745 - 1818), que promoveu um grande avanço, o qual até o momento não havia sido conseguido pelos matemáticos que se dedicaram a representação geométrica. Foi devido a ele que hoje conhece-se os números complexos como $z = a + bi$, onde a e b são números reais e i o que entende-se por unidade imaginária. Essa nomenclatura é a mais recorrente no Ensino Médio e em outros estudos.

Wessel vislumbra uma nova percepção para a representação destes números. Seu pensamento baseia-se no plano cartesiano, já utilizado na época para a representação de pares ordenados. Ao criar um paralelo com suas propriedades, ele associa o eixo das abcissas a um eixo que denomina para os reais, e o eixo das ordenadas ao números imaginários, bem como o número complexo $z = a + bi$ é um vetor direcionado da origem do plano às coordenadas apresentadas.

Apesar de haver pistas de que Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) também teve uma ideia semelhante a Del Ferro e Tartaglia, não há registros públicos de tal feito. Wessel também não chegou a publicar seu trabalho, e apenas no ano de 1806 que Jean-Robert Argand (1768 - 1822) teve acesso a algumas dessas publicações, na qual desencadeou o trabalho de onde Wessel havia parado.

Argand agregou muito às contribuições de Wessel e chegou a fazer uma publicação de seu trabalho, distribuindo entre amigos e correspondentes. Das pessoas que recebeu uma das cópias do trabalho de Argand foi Adrien-Marie Legendre (1752 - 1833) como relata Nahin.

> Quem recebeu uma cópia do trabalho de Argand foi o grande matemático francês Adrien-Marie Legendre (1752-1833), que por sua vez o mencionou em uma carta a François Francais (1768-1810) [...] Quando ele morreu, seu irmão mais novo Jacques (1775-1833) herdou os papéis do irmão mais velho. [...] Jacques era um matemático e, enquanto examinava os papéis de seu falecido irmão, encontrou a carta de Legendre de 1806 descrevendo a matemática no panfleto de Argand - mas ele não sabia o nome de Argand, pois Legendre não o mencionou carta. (NAHIN, 2010, p.73) (Tradução própria)

Jacques chegou a publicar em uma revista as escritas de Legendre presentes no panfleto encontrado, porém reconheceu e declarou que o trabalho publicado não era dele e nem de seu irmão, mas que não conhecia o autor. Em resposta a publicação de Jacques, Argand manifestou através de uma nota à mesma revista sua autoria, sendo declarado então o primeiro a desenvolver a geometria dos imaginários tornando esquecido quase por completo o trabalho de Wessel.

Por fim, chegou a vez de falar um pouco sobre Gauss, já citado anteriormente por rumores de trabalhos com a representação geométrica dos números complexos. Por exemplo, o termo “complexo” é de sua autoria. Gauss progrediu muito no estudo destes números, ganhando fama e prestígio por suas realizações. Em sua homenagem, alguns conceitos da teoria do números complexos ganharam ou foram inspiradas em seu nome, como por exemplo: plano gaussiano ou plano de Argand-Gauss, e números inteiros de

Gauss - que são números complexos $a+bi$, onde a e b são inteiros.

Em sua dissertação de doutorado, Gauss apresenta o Teorema Fundamental da Álgebra, ao qual enuncia: *"Todo e qualquer polinômio com coeficientes complexos, com uma única variável e grau $n \geq 1$, possui ao menos uma raiz complexa"*. Este foi construído ao longo do tempo com contribuições de diversos matemáticos, mas foi Gauss que findou o processo de construção e foi o primeiro a demonstrar assertivamente, como apresentado por Rocha (2014).

> 1799 - Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Em sua tese de doutorado intitulada: "Nova Demonstração do Teorema que Toda Função Algébrica racional Inteira em uma Variável pode ser Decomposta em Fatores reais de Primeiro ou Segundo Grau", apresenta a primeira demonstração correta das quatro provas do Teorema Fundamental da Álgebra, que ele publicou ao longo de sua vida. (ROCHA et al., 2014, p.20)

Alguns nomes que também contribuíram para o desenvolvimento do conjunto dos números complexos não foram citados, como por exemplo Abraham de Moivre (1667-1754) que explorou a relação destes números com a trigonometria. Não se quis em momento algum diminuir os feitos realizados por pesquisadores como de Moivre. Pelo contrário, apenas quisemos obter uma linha temporal. Tais nomes surgirão durante o decorrer desta pesquisa.

Conclui-se portanto a trajetória da estruturação do conceito de número complexo, desde situações onde era necessário conhecer e solucionar os problemas com raízes quadradas de números negativos, a chegar nos obstáculos encontrados no cálculo das raízes de equações. Frisando o pontapé inicial que ocorreu na afirmação de Herão, percorrendo as descobertas de Del Ferro, Tartaglia, Cardano, Descartes, Wallis, Wessel, Argand até as conclusões de Gauss.

No próximo tópico, será realizado um grande salto temporal nos estudos do conjunto dos números complexos, de Gauss ao dias atuais. Por mais que outros estudiosos tenham contribuído neste intervalo de tempo para o desenvolvimento do conteúdo, o objetivo agora é averiguar como o conjunto é discutido atualmente.

2.2 Os números complexos do Ensino Básico a possíveis aplicações

Como descrito no tópico anterior, foi pouco mais de um milênio e meio repleto de indagações e momentos de reflexão sobre a existência e influência dos números complexos na sociedade. Este exemplo reflete o modo como era vista a Matemática em tempos antigos: um instrumento para solução de situações/problemas. Já nos dias atuais, o processo de aprendizado da disciplina é realizado por meio da explanação de conteúdo e não da investigação, mesmo que existam metodologias que prezam este pensamento.

Na atualidade, a disciplina faz parte das matrizes curriculares em todo o processo de ensino e aprendizagem, sendo um dos principais pilares para o desenvolvimento do estudante. Por isso, faz-se necessário o estudo de diversos conteúdos que a compõe no intuito de abranger e preparar para os possíveis obstáculos encontrados no caminho que o aluno irá trilhar ao longo da vida.

A Matemática do Ensino Básico encontra-se carregada devido a grande quantidade de conteúdos exigidos durante os anos escolares, o que mina o tempo disponível para a exploração detalhada de cada conteúdo. É pouco o tempo para promover um estudo aprofundado de cada conceito, o que indiretamente cria um descompasso na linha de aprendizado do aluno.

Pires e Silva (2011), ao analisar o progresso do currículo de Matemática no Brasil, expõe os desafios e consequências da tentativa de inserção de temas que promovam o aprendizado de diversos conteúdos. Ao dar prioridade ao ensino de diferentes itens, há uma inflação no livro didático que torna o currículo inoportuno para uma aprendizagem eficaz, não saciando a demanda das necessidades de ensino e aprendizado. (PIRES; SILVA, 2011, p.68)

Um dos campos da Matemática que sofre com este processo inflacionário presente nos currículos é o estudo de conjuntos numéricos, pois seu conteúdo é extenso mas é repassado de forma escassa, mesmo usando do artificio de associação histórica para o ensino do tema. Baseando nesse aspecto, pode-se exemplificar a visão do autor segundo sua experiência em sala de aula, que o ensino dos números naturais estão associados à necessidade do homem de contar, os números inteiros à representação de dívidas e os números racionais à compreensão da existência de um conjunto de números. Este por sua vez exprime a ideia de valores que preencheriam um “vazio\lacuna” existente entre dois números inteiros. Esta seria a abordagem adotada pelas escolas atualmente, ou pelo menos a sugestão mais comum que se encontra.

Entretanto, o conjunto dos números irracionais por exemplo, por promover uma discussão mais complexa e abstrata dentro da Matemática, acaba recebendo um tratamento superficial dentre os conjuntos numéricos. Claro que isso é também influenciado pelo nível escolar em que o estudante se encontra. Afinal o processo de ensino e aprendizagem é gradativo e depende do patamar de aprendizagem em que se encontra para que qualquer discussão mais enigmática seja promovida.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), atualmente implantada nas escolas do país, orienta como trabalhar com o eixo temático dos números, destacando a perspectiva visada pelo sistema educacional para englobar e atender as demandas sociais, culturais e acadêmica dos alunos.

> a expectativa é a de que os alunos resolvam problemas com números naturais, inteiros e racionais, envolvendo as operações fundamentais, com seus diferentes significados, e utilizando estratégias diversas, com compreensão dos processos neles envolvidos. Para que aprofundem a noção de número, é importante colocá-los diante de problemas, sobretudo os geométricos, nos quais os números racionais não são suficientes para resolvê-los, de modo que eles reconheçam a necessidade de outros números: os irracionais.(BRASIL, 2018, p. 269)

Perceba que é esperado que o aluno desenvolva a habilidade de manipular as operações nos principais conjuntos numéricos estudados, porém, é preciso atentar-se à existência dos números irracionais. Para que isso ocorra, a relação entre esses conjuntos precisa estar bem estabelecida, ou seja, compreender a estrutura de um influencia diretamente no aprendizado do outro.

Por mais que a orientação cite especificamente que durante o plano de estudo o aluno reconheça a necessidade do conjunto dos números irracionais, existe a necessidade da expansão da esfera que detém estes conhecimentos, promovendo o trabalho com outros números que proporcione o aprofundamento do estudante no alicerce desta teoria e de outras derivadas.

A BNCC já destacou como citado acima que é importante colocar os alunos diante de problemas nos quais os números racionais não possuem recursos que proporcionem a resolução, levando-os a estudar os números irracionais e por consequência a compreensão da existência dos números reais.

Entretanto, se o objetivo do estudante é resolver problemas encontrados no percorrer do seu caminho, fazendo alusão ao processo histórico que promoveu a construção dos conjuntos numéricos e a realidade por ele vivida, ilustra-se aqui um deles. Pense em um cenário hipotético onde se encontra uma turma do 8º ano do Ensino Fundamental. Um dos objetivos deste ano é a apresentação dos conjunto dos números racionais, irracionais e a conclusão da existência dos números reais. Assim, o aluno é munido de novas ferramentas para operar dentro do campo dos números.

Dentro deste cenário, pode-se ilustrar o estudo das propriedades de potenciação e radiciação. Questiona-se: como justificar que a solução para raiz quadrada de um número inteiro negativo não possui solução? Ou melhor, não pertence a nenhum conjunto conhecido? E talvez uma pergunta mais investigativa: onde encontrar tal solução?

Espera-se que os alunos já tenham acumulado certa bagagem matemática até esse ano de ensino. O ideal seria explicá-los que a operação não possui solução no conjunto dos números reais, e que existe um conjunto numérico onde ela é satisfeita, mas que ele não é objeto de estudo no momento. Esta simples declaração poderia desencadear no aluno a curiosidade para uma investigação pessoal, porém, na maioria das ocasiões, o que acaba sendo dito é que a operação não possui solução.

É preciso um novo olhar para esse momento. Essa atitude se assemelha a dizer ao aluno nos anos iniciais do Ensino Fundamental que ele não pode operar $(-8+15)$ e sim $(15-8)$ e, ao chegar no 7º ano, ensiná-lo sobre o conjunto dos números inteiros. Sabe-se que alguns conteúdos da disciplina precisam de outros para seu desenvolvimento, mas isso não impede de acender na mente do aluno uma chama de investigador matemático.

No que refere aos números complexos, pode-se destacar o mesmo ideal, privar o aluno da existência do conjunto até que ele seja “necessário” é o mesmo que podar uma árvore antes que seus galhos cresçam o suficiente para frutificar. É minar as possibilidades abertas pelo estudo dos números reais quando ele começa a se tornar natural para os alunos.

Portolan (2017, p. 39) afirma o papel dos conjunto dos números complexos nesta visão ao escrever que “mesmo com poucas aplicações diretas dos números complexos no dia-a-dia, há muitas aplicações indiretas. Propriedades dos números reais só se tornam conhecidas quando são vistas como parte do conjunto dos números complexos”.

Os pesquisadores Pires e Silva (2011) refletem sobre essa concepção de aplicação prática matemática que prejudica a abordagem investigativa.

> Diante de observações sobre a aversão de grande parte dos alunos pela Matemática e que este seria um dos grandes motivos responsáveis pelo “fracasso” dos estudantes nesta disciplina, muitas iniciativas foram desencadeadas no sentido de divulgar a Matemática como importante e possível de ser aprendida. [...] Nesse processo, tiveram especial ênfase a importância das aplicações da Matemática no mundo de hoje (nas ciências, nas tecnologias, nas comunicações e na economia), fazendo com que se coloque maior ênfase numa Matemática com aplicações práticas em detrimento de explorações matemáticas sem aplicação imediata, como se as palavras de ordem fossem “algo que não se aplica na prática, não precisa ser ensinado”.(PIRES; SILVA, 2011, p.68)

De fato, talvez por não ter muitas aplicações imediatas no cotidiano, a discussão não agregaria muito ao objetivo da aula no ideal que o ensino tem visado, mas este pensamento vai de encontro ao cerne inicial, onde o objetivo é construir conjuntos numéricos para solucionar problemas. Portanto, os números complexos poderiam sanar alguns dos impasses encontrados no estudo do números reais, além de promover ao aluno o papel desejado pela educação, o de ser pensante, autônomo e questionador.

Apesar do conjunto dos números complexos ser atualmente discutido em aulas do 3º ano do Ensino Médio, algumas reflexões como a solução da raiz quadrada de números inteiros negativos poderia ser discutida já com alunos do 8º ano do Ensino Fundamental. Deveria ser plantada ali a semente, para que o tempo pudesse florescer o conhecimento não sendo necessário o aprofundamento nos conceitos que envolvem o conteúdo, mas apresentando a existência e as possibilidades que um simples questionamento proporciona dentro dos estudo da Matemática.

O aluno encontrará em seu caminho outro momentos além do 8º ano onde os números complexos seriam a resposta para alguns problemas. Por exemplo, a resolução de equações do segundo grau, geralmente já discutidas no ano seguinte (9º ano do Ensino Fundamental), que remete em alguns casos, novamente, à resolução da raiz quadrada de um número inteiro negativo. Perceba que o obstáculo encontrado no ano anterior volta a assolar a vida acadêmica do aluno.

Outra vez, pode-se pensar na construção de gráficos de funções também com início no 9º ano estendido ao 1º e 2º anos do Ensino Médio. Mais uma vez uma pergunta sem reposta, devido a omissão nos anos anteriores. Barros esclarece sua perspectiva quanto ao ensino de equações do segundo grau, ao dizer que:

> A primeira abordagem sobre este tópico deve ser pautada no surgimento dos números complexos, como se deu e por que se deu. Tudo isso pelo fato de que a partir deste momento, o paradigma de que algumas equações não possuíam solução será quebrado e todo esse processo pode ser "perigoso", caso não seja claro e explicativo. (BARROS, 2014, p. 10)

A Matemática é uma teia de conhecimentos bem tecida e é difícil imaginar um cenário educativo que mine essa riqueza da disciplina. Assim, entende-se que além de todos os questionamentos sobre a raiz quadrada de um inteiro negativo, os alunos também se envolvem no estudo de polinômios. Esta seria uma oportunidade para a menção ao Teorema Fundamental da Álgebra e a existência dos números complexos.

Não se espera que alunos do Ensino Fundamental consolidem as definições e propriedades que regem o conteúdo do números complexos, mas não é justo resguardar o conhecimento. Afinal, o objetivo é formar seres autônomos e pensantes. É dever de todos os envolvidos no processo de ensino e aprendizagem proporcionar um ambiente para que a Matemática seja potencializada e construída seguindo uma linha tênue que respeite sua evolução.

Segundo ressalva a BNCC ao falar sobre o desenvolvimento da Matemática do Ensino Médio, Brasil (2018, p. 528) na qual, "tem a responsabilidade de aproveitar todo o potencial já constituído por esses estudantes no Ensino Fundamental [...] Isso significa que novos conhecimentos específicos devem estimular processos mais elaborados de reflexão e de abstração [...]".

Porém, nos dias atuais, o conjunto dos números complexos passou a ser um conteúdo optativo para as escolas. A matriz curricular de Matemática exige a exploração da noção de número, mas não o ensino dos números complexos, o que cria abertura para que os professores e instituições educacionais não os adotem em seu planejamento. Seja porque o conjunto apresenta espaço para investigações mais complicadas do que o comum no campo da Matemática, o que por muitas vezes acaba intimidando o professor, ou pela visão conteudista do Ensino Médio, já inundado com diversos conhecimentos a serem explorados em poucos anos de estudo.

De acordo com Júnior (2009):

> É frequente percebermos, entre os professores de matemática, uma resistência em abordar este tema. Embora conheçam a teoria, que envolve definições, operações e as diferentes formas de representar estes números, eles parecem tímidos quanto à legitimidade de se ensinar este tópico, o que vêm provocando a sua eliminação prática de muitos currículos escolares. Muitos justificam este movimento por uma falta de aplicação concreta dos números complexos e pouco de discute sobre a importância destes entes matemáticos no desenvolvimento da própria ciência. (JÚNIOR, 2009, p.8)

Além da intimidação dos professores por parte do tema, o estudo do conjunto dos números complexos dedicado algumas vezes ao 3º ano do Ensino Médio encontra outro fator negativo para a exploração dessa temática: a matriz curricular do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).Isso ocorre, apesar do fato de que o nível de estudo forneça ferramentas e maturidade acadêmica pra lidar com discussões mais complexas.

O ENEM foi criado em 1998 e é atualmente a principal porta de entrada para os estudantes em universidades públicas ou privadas. O objetivo do exame é avaliar o desempenho dos estudantes ao final do Ensino Básico, oportunizando o ingresso no ensino superior e construção de sua carreira acadêmica e profissional.

Segundo Silva (2016, p. 1), ao falar sobre a inclusão dos números complexos nos processos de ingresso no Ensino Superior, destaca que geralmente é adotado "o Sistema de Seleção Unificada (SISU) como processo seletivo. A classificação no SISU se baseia na nota do candidato no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), que nos seus objetos do conhecimento não contempla o estudo dos números complexos".

A disciplina de Matemática dispõe de um importante papel na realização do exame, são 45 questões que representam 25% das questões de múltipla escolha, dentre as doze matérias exigidas. Apesar de possuir uma posição relevante na execução do exame, é inviável abranger todos os conhecimentos adquiridos durante os três anos de estudos do Ensino Médio, uma vez que a Matemática é uma disciplina acumulativa.

Este fato mina ainda mais a participação do conjunto dos números complexos da matriz curricular, sendo que o ENEM visa a promoção de questões interdisciplinares que se aproximam da realidade "palpável" do estudante, refletindo a perspectiva de ensino idealizada pela BNCC que não exige o ensino dos números complexos.

Entretanto, isso não diminui a relevância do conteúdo, que, em contrapartida, em alguns vestibulares é exigido como parte dos conhecimentos prévios para o ingresso em algumas universidades. Isto pode ser enxergado como um fator que ressalte a necessidade da exploração em sala de aula do conjunto em questão.

Silva (2016, p. 1) em sua pesquisa discorre que "os números complexos são tradicionalmente abordados nos itens de algumas instituições de ensino superior que possuem processo seletivo próprio, como a Universidade de Brasília, o Instituto Militar de Engenharia e a Universidade Federal de São Paulo". Ele sugere que com o surgimento da BNCC, o espaço para o aprendizado dos números complexos está sendo minado. Segundo o autor,

> É evidente que a uniformização do currículo fortalece ainda mais o ENEM como principal exame de acesso para o ensino superior. Seguindo essa tendência, os números complexos serão estudados por poucos alunos no ensino médio e a abordagem desse conteúdo nos vestibulares ficará limitada ás instituições de ensino superior que ainda possuem processo seletivo próprio. (SILVA, 2016, p. 70)

Assim, o conjunto está limitado a estudantes que queiram ingressar em universidades com processos próprios, que talvez pelo currículo de sua escola não tem acesso a este conhecimento. Entretanto, a existência ou não do conteúdo nas matrizes curriculares do ENEM, vestibulares ou do Ensino Básico, não altera o papel desempenhado pelas aplicações do conjunto no estudo de Matemática e outras áreas, pensamento evidenciado por Portolan (2017) em sua pesquisa.

> A Matemática do Ensino Médio não está voltada somente para o treinamento de pessoas interessadas no acesso a universidades, seu objetivo é muito maior que isso, a matemática está presente para a formação do cidadão, trazendo a ele o conhecimento para que possa utilizá-lo em seu cotidiano. E ao se tratar do conjunto dos números complexos, podemos relacioná-lo a parte cultural da humanidade, pois foi ela que o desenvolveu, logo faz parte de nossa cultura. (PORTOLAN, 2017, p. 40)

Dessa forma, as investigações dos problemas que aparecem durante o processo de ensino e aprendizagem, o anseio do aluno em conhecer mais sobre os desfechos que a disciplina desencadeia e reafirmam a necessidade da caminhada pelas diversas ramificações da matéria, bem como a abordagem do conjunto dos números complexos.

Desde que haja o incentivo e a oportunidade para o aluno, uma trajetória enriquecedora será percorrida pelo estudante. Afinal, como acrescenta Barros (2014, p. 54), "o ensino dos números complexos pode se tornar muito motivador a partir do momento em que o aluno conseguir percebê-los".

O ponto principal nessa discussão é abrir uma reflexão acerca do momento em que o conjunto dos números complexos começa a ter atenção no estudo da Matemática. Seja pela necessidade do currículo ou pelo anseio do estudante em aprofundar mais no estudo da matéria, é de grande valor salientar o momento onde o estudo do conjunto deixa de ser optativo e passa a exercer um papel fundamental na construção do universo criado por esta ciência exata.

Assim, na construção dos conjuntos numéricos chega-se aos complexos que auxiliam o conjunto dos números reais na solução de problemas. Porém, devido ao seu campo de interação ser restrito, atinge alguns saberes não estudados no Ensino Médio. Estes números só passam a ter espaço em cursos de Ensino Superior ou em particular para algumas situações na Matemática. (PORTOLAN, 2017, p.41)

Portanto, vale a pena ressaltar a pertinência do estudo dos números complexos para o ingresso no Ensino Superior, para o crescimento individual, pessoal e acadêmico do estudante, bem como suas possíveis aplicações em Matemática e outras áreas do conhecimento.

Mesmo que o conteúdo não seja parte da matriz curricular do ENEM, já foi visto que se faz presente em alguns vestibulares que prezam pelo desenvolvimento da área das ciências exatas. Tais vestibulares são o ingresso em cursos superiores ou técnicos que veem o aprendizado da matéria como essencial devido as possíveis aplicações, não restringindo o estudo apenas à área de Matemática.

Caon et al. (2013, p.61), cita este papel ao dizer que os complexos "não são exclusividade da Matemática e ultrapassam as barreiras da disciplina com aplicações em outras áreas do conhecimento." Um bom exemplo para enfatizar a importância dos números complexos no ensino além do básico se caracteriza pelo estudo da área de eletricidade. Santos (2018) comenta sobre o uso dos números complexos no processo de ensino e aprendizagem.

> [...] não se restringe a conceitos e propriedades algébricas do referido conjunto visto nas escolas, mas sim, uma de suas inúmeras aplicações no mundo real prático. Esta aplicação em circuitos elétricos, provam que os conhecimentos adquiridos no âmbito escolar em certo ponto, trazem consigo algumas dificuldades de interpretação, por parte dos alunos ao referido conteúdo. (SANTOS, 2018, p.13)

E Mello (2005) reafirma a colocação de Silva (2018) ao exemplificar o uso dos números complexos dentro do estudo de circuitos elétricos.

> Como sabemos, um número complexo tem um módulo e um argumento (ângulo), que é semelhante a um fasor que apresenta um módulo e um ângulo inicial, possibilitando, assim, a representação de um sinal senoidal por um número complexo. O número complexo representa o sinal de uma maneira mais simples, informando a sua amplitude e o ângulo inicial, elementos necessários para operarmos sinais diferentes. (MELLO, 2005, p.100)

Este é o exemplo mais comum que pode-se encontrar da aplicação dos números complexos fora do Ensino Básico onde o mesmo torna-se uma ferramenta poderosa para o desenvolvimento do conteúdo de Eletricidade. É perceptível o quão significativo a teoria pode impacta no andamento de outras ciências como neste caso, o da Física. Caon et al. (2013, p.61) diz que "algumas aplicações podem ser exploradas com mais detalhes no

Ensino Médio, outras podem apenas ser comentadas, pois os conteúdos envolvidos estão além do currículo desse nível de ensino."

É possível também pensar nas potencialidades que a temática pode causar dentro da própria Matemática, o aprofundamento no estudo da Geometria e Álgebra por exemplo, como é o caso do tratamento vetorial deste números ou pode-se listar aplicações como na aerodinâmica, fractais, etc. Isto abre portas para momentos de interdisciplinariedade, conceito que é visto como a oportunidade de resgate para que o processo de ensino e aprendizagem passe a ser mais natural ao estudante, favorecendo sua aprendizagem como discorre Caon et. al. (2013).

> Conhecer e explorar os aspectos históricos , algébricos dos Números Complexos, bem como suas diversas aplicações na Matemática e em outras áreas do conhecimento permite aos professores do Ensino Médio desenvolver novas formas de abordagem para tratar do conteúdos de forma mais significativa e interessante, favorecendo a aprendizagem.(CAON et al., 2013, p.68)

Enfatizamos como este conteúdo tão enriquecedor passa despercebido por tantos estudantes durante sua trajetória de aprendizado. A preocupação com aplicações torna o aprendizado árduo e carente como menciona Pires e Silva (2011, p.68) ao dizerem que, "embora avaliando importante a preocupação com as aplicações práticas, consideramos que esse caminho pode representar um empobrecimento dos currículos de Matemática".

Portanto, vale a pena pensar em metodologias para compreensão dos números complexos que torne o processo de ensino e aprendizagem mais prazeroso, sem que prejudique a riqueza do currículo e que promova no aluno o anseio pelo conhecimento respeitando seus limites e tempo.

Além do tratamento através do currículo, materiais didáticos e didática do professor, outro ponto importante no aprendizado de Matemática está diretamente associado na forma em que ela é transmitida ao aluno, seja por fala ou pela escrita nos materiais de estudo. Essa por sua vez possui uma linguagem própria que deve receber atenção, pois, uma falha na comunicação pode acarretar diversas consequências.

É preciso olhar através dos olhos dos alunos e ver qual linguagem matemática que ele compreende. Menezes (2000) fala sobre esse leque de oportunidades e riquezas que a linguagem matemática gera.

> Sendo a matemática uma área do saber de enorme riqueza, é natural que seja pródiga em inúmeras facetas; uma delas é, precisamente, ser possuidora de uma linguagem própria, que em alguns casos e em certos momentos históricos se confundiu com a própria matemática. Se atendermos à conceptualização que apresentamos para linguagem, facilmente admitimos esta particularidade na matemática. Na realidade, estamos perante um meio de comunicação, possuidor de um código próprio, com uma gramática e que é utilizado por uma certa comunidade. (MENEZES, 2000, p.181)

À vista disso, faz-se necessário promover uma comunicação livre entre aluno e professor, estudante e mediador; uma ponte onde “termos matemáticos” vão além da simbologia, mas que criam uma linguagem clara e de incentivo.

Não há como aprender ou ensinar sem que a linguagem entre os indivíduos e elementos envolvidos seja objetiva, completa e acima de tudo motivadora.

Segundo Smole e Diniz (2009, p.15) “a comunicação tem um papel fundamental para ajudar os alunos a construírem um vínculo entre suas noções informais e intuitivas e a linguagem abstrata e simbólica da matemática”.

Portanto, dentro do processo de ensino e aprendizado da Matemática, em especial aqui os números complexos, surge a oportunidade de abrir espaço para um processo autônomo. É relevante que exista uma linguagem que comunique diretamente com o estudante e com sua essência. Ele pode ir além do que é proposto em sala de aula, mediado pelo professor. O aluno pode enxergar dentro da Matemática a chance de mergulhar no universo rico do conjunto dos números complexos.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

No decorrer deste capítulo serão tratados os procedimentos metodológicos realizados na elaboração da pesquisa. Estes serão apresentados para caracterizar o tipo de pesquisa que foi realizada, esclarecer o instrumento utilizado para coleta de dados e, por fim, descrever os processos para análise e obtenção dos resultados.

3.1 Caracterização da pesquisa

Com o propósito de atingir os objetivos propostos nesta pesquisa, constatamos que seu caráter é exploratório, pois sua proposta de execução foi estruturada em busca de conhecer a realidade do processo de ensino e aprendizagem dos números complexos. O caráter escolhido está fundamentado na obra do pesquisador Gil (2002) que define o objetivo deste tipo de pesquisa.

> proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito ou a constituir hipóteses. Pode-se dizer que estas pesquisas têm como objetivo principal o aprimoramento de ideias ou a descoberta de intuições. Seu planejamento é, portanto, bastante flexível, de modo que possibilite a consideração dos mais variados aspectos relativos ao fato estudado. (GIL et al., 2002, p.41)

Assim, a possibilidade da criação de um material de apoio para o ensino dos complexos é viável através da execução desta pesquisa, uma vez que será elaborado tendo em vista a visão de alguns professores de Matemática, a perspectiva do autor sobre a abordagem do tema e os dados colhidos durante a organização da fundamentação teórica.

3.2 Objeto de coleta de dados

Através das primeiras sondagens feitas pelo autor durante no levantamento bibliográfico, percebe-se a escassez do estudo dos números complexos dentro do Ensino Básico, além de sua importância no ingresso de alguns cursos superiores. E munido das suas experiências adquiridas ao longo de seis anos como docente principalmente em turmas do 8º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio, foi considerado a indispensabilidade da disponibilização de um questionário, que está disponível no apêndice A, para compor o processo de elaboração da pesquisa.

O principal objetivo do questionário era vislumbrar a visão do professor de Matemática da região quanto ao processo de ensino e aprendizagem dos números complexos no Ensino Básico e o compartilhamento de experiências sobre o ensino do tema. Composto por questões fechadas sobre a experiência e conhecimento dos docentes quanto ao conjunto dos complexos e de questões abertas para permitir a comunicação livre entre pesquisador e professores, este instrumento teve como cerne ponderar a teoria com a realidade de modo a conhecer as dificuldades e facilidades no trabalho com este conjunto numérico.

Em busca de respostas para as reflexões feitas acerca do tema sem a intenção de definir ou generalizar aspectos que influenciam no sistema de educação da região, este questionário foi tratado como uma pesquisa de opinião e destinado aos professores de Matemática que atuam ou já atuaram nas instituições de ensino da região entorno da cidade Peçanha (MG), onde o autor da pesquisa reside.

Ao tratar do entorno da cidade de Peçanha, o autor levou em conta como referência as escolas pertencentes a Secretária Regional de Ensino (SRE) da região de Guanhães (MG), da qual a cidade faz parte.

Para que os professores pudessem ter acesso ao questionário, foi feito um convite à SRE com o objetivo de criar uma parceria destinada a sua veiculação. O convite foi feito via email e contato por telefone primeiramente a conhecidos do autor que trabalham na secretaria, o que possibilitou a veiculação do pedido para a superintendente regional de ensino. Através do email, a secretaria obteve informações formais sobre a pesquisa, além de ter acesso ao projeto elaborado para apresentar o tema, objetivo e procedimentos.

De acordo com a proposta apresentada pelo autor, a SRE autorizou a execução da pesquisa nas escolas que estão em seu domínio. Essa parceria foi firmada (documento disponível no Apêndice B), e ficou a cargo da secretaria o envio do questionário para as escolas através do link compartilhável, que por sua vez foram instruídos a convidar os professores que atuavam na área de Matemática.

Como a região também conta com uma unidade do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais em São João Evangelista, onde o autor tem sua graduação em Licenciatura em Matemática, o convite também foi enviado a alguns dos professores de matemática desta instituição.

Devido a pesquisa ser realizada em meio ao período de quarentena[1] estabelecida devido a pandemia Covid-19[2], a aplicação do questionário foi feita através do aplicativo de gerenciamento de pesquisas *Google Forms*, disponibilizado o acesso através de um link compartilhável.

[1]Período de isolamento social e redução de trabalhos não essenciais tomado pela ”Lei nº 13.979, de 6 de fevereiro de 2020.

[2]”A Covid-19 é uma infecção respiratória aguda causada pelo coronavírus SARS-CoV-2, potencialmente grave, de elevada transmissibilidade e de distribuição global. O SARS-CoV-2 é um betacoronavírus descoberto em amostras de lavado broncoalveolar obtidas de pacientes com pneumonia de causa desconhecida na cidade de Wuhan, província de Hubei, China, em dezembro de 2019”. Texto disponível em: https://coronavirus.saude.gov.br/sobre-a-doenca . Acesso dia 30 de abril de 2021.

A proposta para aplicação desta ferramenta para coleta de informações é explanada por Marconi e Lakatos (2003) que apresentam as vantagens da aplicação de questionários em pesquisas.

> a) Economiza tempo, viagens e obtém grande número de dados. b) Atinge maior número de pessoas simultaneamente. c) Abrange uma área geográfica mais ampla. d) Economiza pessoal, tanto em adestramento quanto em trabalho de campo. e) Obtém respostas mais rápidas e mais precisas. f) Há maior liberdade nas respostas, em razão do anonimato. g) Há mais segurança, pelo fato de as respostas não serem identificadas. h) Há menos risco de distorção, pela não influência do pesquisador. i) Há mais tempo para responder e em hora mais favorável. j) Há mais uniformidade na avaliação, em virtude da natureza impessoal do instrumento. I) Obtém respostas que materialmente seriam inacessíveis. (MARCONI; LAKATOS, 2003, p.201)

Ao aceitar o convite e acessar o questionário, os professores foram apresentados à proposta através do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE - constante do Apêndice C), ao qual autoriza por parte dos pesquisados a publicação dos resultados preservando suas identidades.

O questionário realiza primeiramente uma abordagem sobre a formação do professor norteadas por oito perguntas acerca de sua experiência docente, conhecimento sobre números complexos e ensino do tema em suas aulas na escola básica.

Posteriormente ele é direcionado a duas etapas diferentes em relação a sua experiência de trabalho com o tema. A primeira etapa diz respeito aos professores que já ensinaram sobre o conjunto, com o objetivo de conhecer mais sobre sua abordagem ao lecionar sobre o conteúdo e o tipo de material que utilizava como suporte.

A segunda etapa direcionada aos professores que não tinham experiência no ensino dos números complexos. O objetivo era conhecer quais as dificuldades e porque eles não tiveram a oportunidade de lecionar sobre o tema.

Ambos os grupos também opinaram sobre a relevância do estudo do conjunto no ensino básico, além de citar as cidades que já lecionaram, sendo este dado para controle de região do pesquisador.

3.3 Tratamento dos dados

A análise dos questionários configura a segunda etapa no processo de realização desta pesquisa. Executada com o auxílio da planilha de resultados fornecidas pela plataforma *Google Forms*, e do software Microsoft Excel[3]. Buscou-se conhecer o perfil do professor de Matemática destacando sua experiência com a docência e seu estilo de trabalho no que se refere especialmente ao ensino de números complexos. Esta análise está

[3]MICROSOFT. Microsof excel (versão 2013). Microsoft Corporation, S.l., 2013.

detalhada no próximo capítulo.

Através do acesso às informações colhidas e com um perfil traçado para os professores, o próximo passo foi explorar o livro didático sugerido pelos professores para o ensino dos números complexos. O acesso a estes foi através de acervo físico e digital, porém a análise foi realizada somente em alguns dos livros mencionados que estavam disponíveis para consulta.

Foi realizada uma descrição geral sobre a proposta de trabalho de cada livro destacando a abordagem aos principais pontos do conteúdo e menções a partes históricas ou possíveis aplicações. Em todos os casos o autor menciona sua visão acerca da proposta apresentada. Esta análise esta presente no próximo capítulo.

Por fim, após estas duas etapas, o autor apresenta uma proposta para o trabalho com os números complexos para alunos do Ensino Médio presente no apêndice D. A proposta é associar a estruturação do conjunto em sintonia com os conhecimentos adquiridos nas ciências exatas durante a vida escolar do estudante baseado nas demandas e possibilidades criadas pela BNCC, além de fundamentar-se nas discussões pleiteadas no decorrer desta pesquisa e nas opiniões dos professores.

O material preza pelo contexto exploratório nas aulas de Matemática e teve como principal ideal manter uma comunicação livre e clara com o leitor, caracterizando como material de apoio para estudos extracurriculares ou não.

4 DISCUSSÃO

Este capítulo tem como objetivo discutir a respeito dos resultados da análise dos questionários preenchidos pelos docentes e dos livros didáticos indicados por eles. Para iniciar, será proposta uma discussão sobre a visão dos professores da região em torno da cidade de Peçanha (MG), sobre as propostas no processo de ensino e aprendizagem dos números complexos, baseada nas reflexões já feitas, na revisão bibliográfica e nas considerações levantadas pelos professores pesquisados.

Posteriormente, será analisada a proposta de ensino do conjunto do números complexos de alguns livros didáticos utilizados e mencionados pelos professores que se dispuseram a participar da pesquisa, buscando exemplificar pontos positivos e negativos embasado no sistema de ensino atual.

Por fim, será apresentado o produto desta dissertação, uma sequência lógica elaborada com a proposta de ensino diversificada para os números complexos, considerando os levantamentos feitos, a visão dos professores pesquisados, as propostas presentes nos livros didáticos analisados e inserção de um trabalho exploratório que promova ao estudante a possibilidade de conhecer o conjunto em uma perspectiva mais abrangente.

4.1 Análise dos questionários

Esta seção está destinada a conhecer um pouco do perfil dos professores que se disponibilizaram a participar da pesquisa de opinião. Serão discutidas as perguntas presentes no questionário e as relações entre as respostas e considerações obtidas.

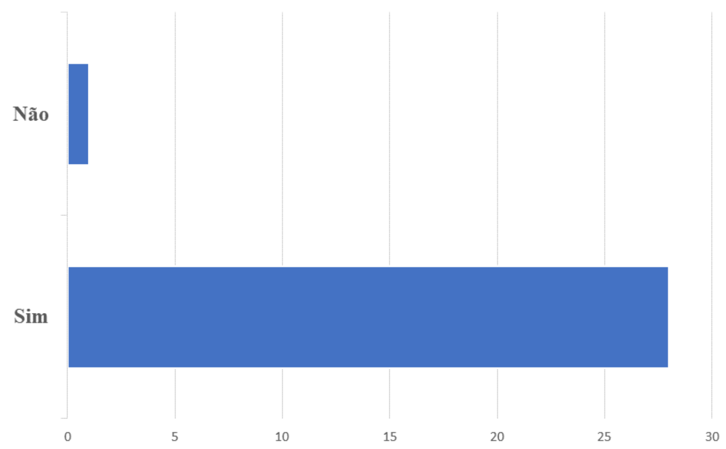
Prezando a identidade dos participantes, estes serão nomeados como ”Professor (número)”de acordo com a ordem em que foram recebidas as respostas. Assim, o primeiro professor a responder será chamado de Professor (1), e assim por diante.

Como mencionado na metodologia, a pesquisa contou com o auxílio da Superintendência Regional de Ensino de Guanhães-MG que enviou o questionário às escolas de vinte e duas cidades a qual abrange. Assim, a pesquisa contou com a colaboração de vinte e nove professores, o que permite caracterizar a aplicação deste questionário como uma pesquisa de opinião, inferindo sobre a pouca relevância dada ao conteúdos dos números complexos por parte dos professores da região. Tal afirmação é também observada por Sousa (2021).

> Sabemos que a abordagem dos Números Complexos em sala de aula, por vezes, não conta com a empatia de muitos professores de Matemática do ensino médio. Alguns julgam desnecessário, pois não vislumbram aplicações práticas para tal, outros não compreendem esse conteúdo e por consequência disso decidem não incluí-lo em seus planos de aula. (SOUSA, 2021, p.12)

A primeira série de perguntas foi destinada a traçar o perfil do professor, sua formação, experiência e conhecimento sobre o conjuntos dos números complexos. Segundo as informações obtidas no gráfico 1 nota-se a predominância de professores com formação em Matemática no total de vinte e oito docentes, o que influência o trabalho em sala de aula.

Gráfico 1: Você possui formação em Matemática?



Fonte: Autor, 2021.

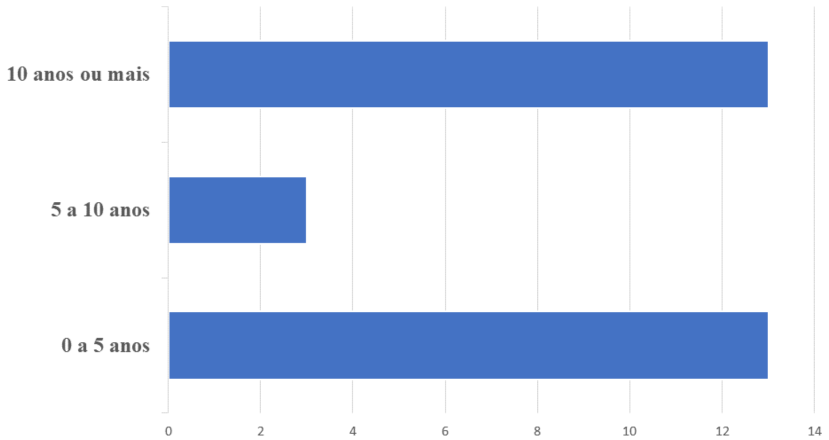
Essa formação é essencial para o desenvolvimento do ensino e aprendizagem da Matemática, pois ao se tratar da relação entre aluno e professor, a linguagem e o domínio adotados pelo docente são essencial para uma comunicação esclarecedora quanto ao uso de termos matemáticos. Essa comunicação dentro da disciplina torna-se eficaz quando mediada por um profissional qualificado na área.

Menezes (2000, p.182) discorre sobre a relevância deste fator ao dizer que "a linguagem da aula de matemática, além das concepções dos professores, é influenciada por outros factores (sic), como sejam as aprendizagens anteriores dos alunos, o nível sócio-cultural e a formação de professores".

Desta maneira, é importante pontuar que o professor que não possui formação na área é capaz de desenvolver boa comunicação nas aulas de Matemática. Contudo, a formação para a área influencia na prática didática. Durante a graduação, o professor conhece e discute sobre as possíveis dificuldades e facilidades do processo de ensino, bem como conhece o campo em que vai trabalhar cientificamente, socialmente e emocionalmente, o que são essenciais neste processo.

Ainda, vale ressaltar a experiência do professor que o prepara para as frequentes mudanças que ocorrem no sistema de ensino do país e influenciam diretamente em sua formação e didática. De acordo com o gráfico 2, treze dos entrevistados leciona há menos de 5 anos, mesma quantidade para quem possui mais de 10 anos de experiência em sala de aula.

Gráfico 2: A quanto tempo você leciona?

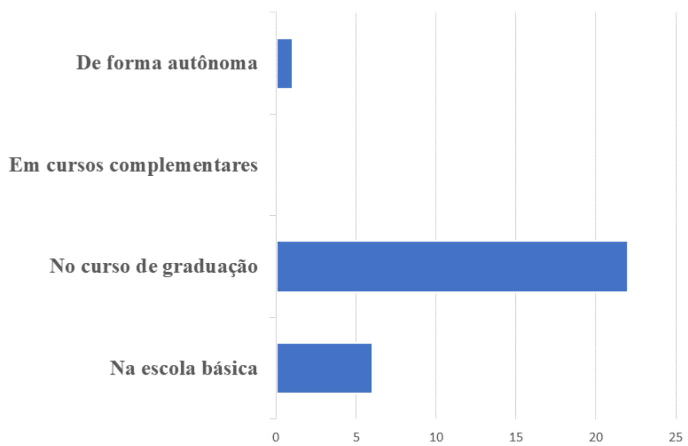


Fonte: Autor, 2021.

Isto permite visualizar a perspectiva de dois grupos diferentes de docentes no que concerne à faixa etária, abrangendo maior amplitude na amostra da pesquisa. É importante destacar que tais professores, provavelmente, possuíram formação com vertentes distintas e olhares diferentes quanto ao processo de ensino e aprendizagem.

Observando o gráfico 1, quase a totalidade dos professores tem formação em Matemática. Contudo, de acordo com o gráfico 3, o conjunto dos números complexos só foi estudado na graduação por vinte e dois deles.

Gráfico 3: Onde você aprendeu sobre o conjunto?

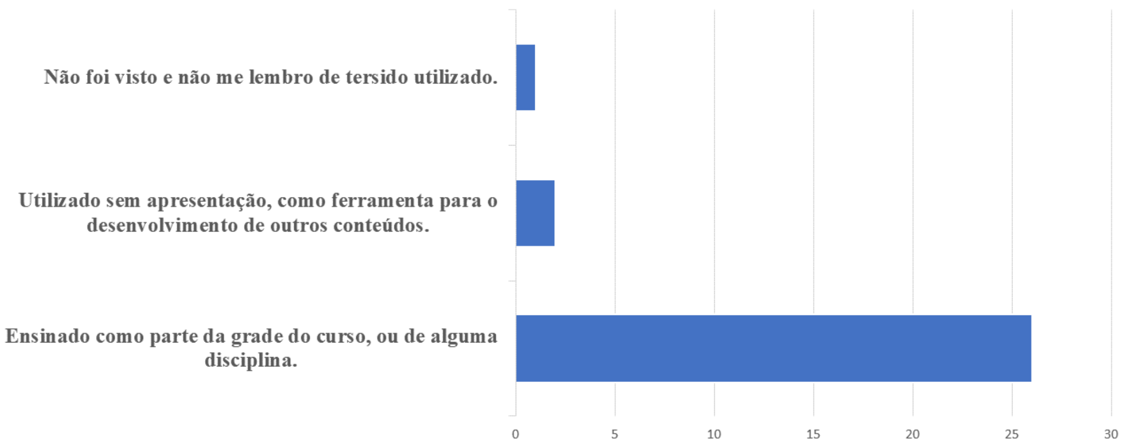


Fonte: Autor, 2021.

A maioria dos professores relatou que aprendeu sobre os complexos no curso de graduação o que é esperado, uma vez que na escola básica a inserção deste conteúdo é escassa. Assim, o docente precisa procurar outros meios para aprender o tema, muitas vezes de forma autônoma devido a necessidade do ensino e aplicação.

O gráfico 4 diz respeito ao processo de ensino dos números complexos na formação dos professores. Assim, podemos observar que, na graduação, vinte e seis professores estudaram os complexos em alguma disciplina específica.

Gráfico 4: Em sua formação, os números complexos era...



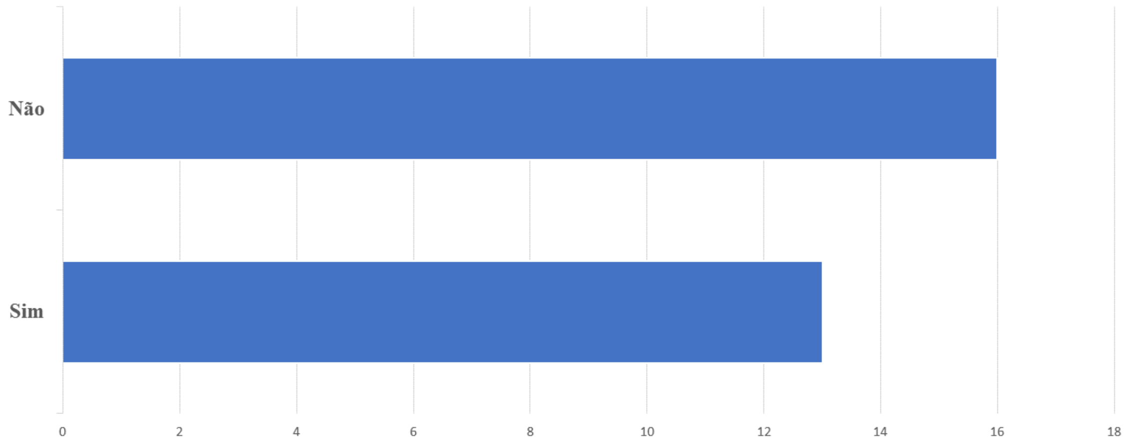
Fonte: Autor, 2021.

O pouco acesso ao conteúdo gera um reflexo da importância que o professor na Escola Básica demonstra a este. Isto ocorre considerando as respostas obtidas, visto que podemos visualizar o pouco uso dos números complexos no ensino. Perceba que uma parte dos entrevistados disseram que o conteúdo não foi visto e nem lembravam da sua utilização, e essa carência de conhecimento desta matéria é efetivamente causada pela falta de proximidade do professor com o tema.

Como acrescenta Barros (2014, p.10), "o ensino dos números complexos, muitas vezes, não é simpático ao aluno, por consequência da falta de conhecimento de alguns professores."

Ao serem indagados sobre o ensino do conjuntos dos números complexos durante suas aulas, houve equilíbrio entre as respostas. Como pode ser observado no gráfico 5, treze professores já ensinaram o conteúdo. Por outro lado, dezesseis professores nunca lecionaram sobre o conteúdo.

Gráfico 5: Você já ensinou números complexos durante suas aulas?



Fonte: Autor, 2021.

A partir deste momento, será apresentada a segunda seção, a qual é composta por perguntas dissertativas que facilitam a compreensão sobre o perfil dos professores e o reflexo do ensino dos números complexos em sala de aula.

Dessa forma, metade dos professores entrevistados possuía conhecimentos sobre o conjunto dos números complexos, mas não tiveram a oportunidade de ensiná-lo em sala de aula, pelo fato deste conteúdo não ter prioridade e, assim acaba não sendo ministrado no Ensino Médio. O professor (6) reflete sobre a pressão referente a quantidade de conteúdos direcionados aos alunos do ensino médio e a opção de não trabalhar com o conjunto. Segundo ele:

Professor (6): Porque é um conteúdo geralmente ensinado no terceiro ano do Ensino Médio, e como o tempo é pouco, sempre dei prioridade a outros conteúdos. (sic)

Esta posição é defendida por outros colegas ao serem questionados: *Você acredita que o ensino dos números complexos deve ser ensinado ou não no ensino básico? Por quê?* Como exemplo, o Professor (10) atuante no ensino público, e que conhece a realidade no contexto da matriz curricular, aponta defasagem no ensino uma vez que deve ser priorizado o conteúdo previsto pelo ENEM.

O Professor (10) declara que: *Não. Em se tratando de ensino público, pelo menos na realidade à qual eu pertenço, é bem difícil chegar em números complexos, visto que há muita dificuldade e defasagem de conteúdos. Por ser pouco cobrado inclusive pelo Enem, o professor acaba preferindo priorizar outros eixos temáticos.* (sic)

O Professor (11) complementa ao dizer que: *[...] não acho necessário, pois a aplicabilidade é ínfima diante do tempo e complexidade do tema. O conteúdo de Ensino*

Médio é muito inchado e vale mais a pena aprofundar em temas mais relevantes para esse nível de ensino. (sic)

Tais temas mencionados pelo professor provavelmente se referem aos temas discutidos nos eixos temáticos do ENEM. Como já apontado na revisão bibliográfica, sendo esta a principal porta de entrada dos jovens estudantes no ensino superior, o exame torna-se o foco dos docentes e discentes para que o resultado dos anos de estudos reflitam no acesso a um curso de graduação.

> É evidente que a uniformização do currículo fortalece ainda mais o ENEM como principal exame de acesso para o ensino superior. Seguindo essa tendência, os números complexos serão estudados por poucos alunos no ensino médio e a abordagem desse conteúdo nos vestibulares ficará limitada às instituições de ensino superior que ainda possuem processo seletivo próprio. (SILVA, 2016, p.70)

Em concordância com as ideias apresentadas por Silva (2016), um dos professores entrevistados expressa seu pensamento quanto as motivações para evitar o ensino dos complexos no ensino médio.

Segundo o Professor (9): *Atualmente acredito que não deveria ser ensinado no ensino básico porque este conhecimento não está sendo proposto pela Matriz de Referência do ENEM, na parte de Matemática e suas Tecnologias (2009). A primeira competência desta Matriz de Referência, que trata de conjuntos, aborda a construção de significados para números naturais, inteiros, racionais e reais. Não menciona o Conjunto dos Números Complexos. Como hoje a maioria dos estudantes da educação básica que pretendem dar continuidade em seus estudos necessitam fazer o ENEM e o mesmo não tem exigido este conhecimento em sua Matriz de Referência vejo como mais apropriado o ensino deste conjunto em cursos de graduação que cobraram o conhecimento do mesmo, ou em cursos preparatórios para concursos (ou vestibulares) onde este conhecimento seja pre-requisito e esteja no edital.* (sic)

Em outra vertente sem mencionar o acesso ao ensino superior, é preocupante por parte dos professores o ensino dos complexos pelas lacunas existentes no processo de ensino e aprendizagem de Matemática no ensino básico. Alguns professores expressam esta opinião:

Professor 18: Não. Apesar de não ter aplicado este conteúdo acho ele avançado para ensino básico. (sic)

Professor 22: Acho que ainda não deve ser lecionado por falta de base dos alunos. Mas acredito que haverá evolução na educação e será possível. (sic)

Esta defasagem no ensino de Matemática assola a Educação há tempos. Mesmo com as constantes mudanças e adaptações para atender as necessidades de cada região, este ainda é um desafio para todos. É interessante ainda ressaltar o comentário feito pelo Professor 29 em resposta a essa pergunta.

Professor 29: Não. Acho que tem outros conteúdos que já são ministrados e mereciam uma atenção especial e uma abordagem mais ampla sobre o assunto. Exemplo geometria. Que talvez depois desse trabalho fosse interessante o trabalho em cima de números complexos. (sic)

Sua consideração chama a atenção para a falta de relevância deste conjunto no aprendizado do estudante. Ele enfatiza o estudo de Geometria como um conteúdo que não recebe atenção e que seria necessário explorá-lo para depois estudar os complexos. Porém, a Matemática é uma disciplina construída através das diversas relações existentes entre seus conteúdos, os quais um não deve ter mais importância que o outro, justificado somente pela necessidade de cumprimento do currículo, o que remete ao ensino para acesso à vestibulares.

Em contrapartida, a posição assumida até o momento pelos professores quanto ao ensino dos números complexos, outros defendem o o estudo do conjunto na Escola Básica, como é o caso dos professores (21), (24) e (16), vejamos:

Professor (16): Acredito que a abordagem do conteúdo poderia ser feita rapidamente, sem muito aprofundamento, logo após função quadrática no primeiro ano do Ensino Médio, uma vez que a sua utilização e aplicação são pouco abordadas no cotidiano, por exemplo. A forma trigonométrica ou geométrica ou aprofundamentos poderiam ser tratado somente em cursos de graduação. A abordagem, logo após função quadrática seria mais afim de mostrar um novo conjunto que englobe as raízes negativas, a existência/criação do imaginário "i", etc. (sic)

Professor (21): Eu acredito que deve ser ensinado apenas o básico, apenas para mostrar o aluno a maneira de resolver uma raiz negativa, sem muito aprofundamento. (sic)

Professor (24): Acredito na importância e necessidade de todos os conteúdos. Mesmo que não dê tempo de aprofundar, mas pelo menos superficialmente. (sic)

Observa-se a fala dos professores (21) e (22) que mencionam a necessidade do aprendizado do conjunto, mesmo que seja para esclarecer o problema da raiz quadrada de um número negativo, principalmente no trabalho com a função quadrática.

Ao declarar sobre o ensino dos complexos, o professor (16) discorre sobre o tipo de abordagem que poderia ser utilizada visando a apresentação do , mas não o aprofundamento. Sua visão reflete inicialmente o método de ensino adotado por grande parte de materiais didáticos, trazendo uma discussão sob o problema das raízes não reais de um polinômio.

Entretanto, a apresentação do tema requer mais do que uma simples menção. Ao citar a existência do conjunto, automaticamente é apresentado uma gama de possibilidades que poderiam ser discutidas no ambiente escolar.

Outro ponto mencionado pelo Professor (16) é sobre a aplicação dos números complexos no cotidiano, porém, Pires e Silva (2011, p.69) chama a atenção para este fator na visão curricular ao afirmar que "é necessário ampliar o debate sobre o que significa "contextualizar" em Matemática, para que não caiamos na mera simplificação do "fazer parte do cotidiano ou da realidade"."

Ao falar sobre as possibilidades que irão ser discutidas, o ponto de referência são as possibilidades que o conjunto permite abranger e ao incentivo que este estudo proporciona ao estudante na exploração da disciplina de Matemática e sua aplicabilidade. Vejamos o posicionamento de dois professores que coincidiram com esta ideia:

Professor (4): Sim. Pois considero o conteúdo complementar para explicar conceitos em que não são possíveis serem abordados dentro dos números reais. (sic)

Professor (31): Sim, pois ampliaria o horizonte do saber e uma perspectiva do ponto de vista dos alunos. (sic)

Os horizontes devem ser ampliados conduzindo o processo de ensino e aprendizagem a um ambiente de maior liberdade e autonomia, fazendo da Matemática ensinada em sala de aula um instrumento para o avanço da ciência. Isto tem sido discutido com a reforma do Ensino Médio, indo ao encontro de seus objetivos quanto as novas propostas apresentadas. Ferretti (2018) discorre um pouco sobre a perspectiva da reforma.

> volta-se para a separação entre uma parte de formação comum a todos os alunos [...] no caso da implementação do regime de tempo integral, tendo por referência a Base Nacional Comum Curricular, e outra, diversificada em itinerários formativos por área (Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências Naturais e suas Tecnologias, Ciências Humanas e suas Tecnologias e Educação Profissional), estabelecendo, com isso, o acesso fragmentado aos mesmos conhecimentos. Essa formulação visa, de um lado, a diminuição do número de disciplinas que os alunos cursarão durante o Ensino Médio e, ao mesmo tempo, tornar atrativo cada itinerário formativo, estabelecidos, teoricamente, de acordo com os interesses pessoais de cada aluno, supondo que tais providências tornariam tal etapa da educação básica menos reprovadora. (FERRETTI, 2018, p.27)

Esta visão corrobora com a oportunidade da efetivação do ensino dos complexos na Educação Básica, uma vez que a disciplina de Matemática será desenvolvida com mais profundidade. Segundo os professores (5) e (12), é válido refletir sobre uma nova abordagem.

Professor (5): [...] devemos possibilitar aos alunos um conhecimento amplo de *toda matéria. Como não sabemos exatamente quais serão seus caminhos após a educação básica, acredito ser importante, pois em algum momento ele pode precisar deste conhecimento, mesmo que sendo a nível básico.* (sic)

Professor (12): Os números complexos devem ser ensinados na educação básica, porém, é preciso rever a forma da abordagem. Também, é preciso refletir sobre o espaço deste conteúdo diante da reforma do Ensino Médio. Ademais, é sempre bom frisar que a abordagem de todo e qualquer conteúdo na escola básica deve subsidiar, em primeira instância a formação integral do/a cidadã/o. (sic)

Entender o contexto em que a Educação esta inserida, o tipo de estudante ao qual o ensino está direcionado e como o atual sistema de Educação do país esta se desenvolvendo é essencial para um processo de ensino e aprendizagem eficaz. Isto motiva aos envolvidos à promoção de uma educação mais acessível.

Quanto ao ensino dos números complexos, ele deve refletir as necessidades apresentadas pelo estudante, o que geralmente não acontece. O tipo de abordagem para tratar do conteúdo é essencial. Portanto é válido contemplar as metodologias de ensino de alguns do professores entrevistados.

Professor (9): Normalmente abordava Números Complexos nas turmas de terceiro ano do Ensino Médio. Introduzia mostrando que para algumas equações do segundo grau o Conjunto do Números Reais não era suficiente para resolve-las e que com uma unidade imaginária era possível. O que nos levaria a um novo conjunto, o Conjunto dos Números Complexos. (sic)

Professor (10): Trabalhei poucas vezes com esse conteúdo. Praticamente seguia o livro didático. Fazia uma breve revisão sobre os conjuntos números, com exemplos e diagramas. Apresentava o conjunto, a forma algébrica, as operações, conjugado e propriedades. Sempre exemplificando e aplicando exercícios. Para explicar a forma trigonométrica, recorria a uma revisão sobre o ciclo trigonométrico e as razões trigonométricas, sempre demonstrando e exemplificando. (sic)

Professor (12): Para as aulas sobre Números Complexos na Educação Básica eu usava a perspectiva histórica, pois a Matemática é uma ciência que, ao longo da história, foi desenvolvida pelos enfrentamentos dos problemas pelos homens. Além disso, abordava a perspectiva que contempla os Números Complexos como ampliação da compreensão sobre conjuntos numéricos. (sic)

A abordagem se assemelha no aspecto da necessidade de mencionar os números complexos. Outro ponto importante é a menção do Professor (12) ao contexto histórico em que o conjunto está inserido, pois ele reflete a necessidade de evolução científica do

Homem.

Por fim, os professores (9) e (10) transparecem a associação que este conjunto, possui com outros conteúdos da disciplina, como conjuntos numéricos, equações, funções e trigonometria.

Enfim, destaca-se o comentário do Professor (10) quanto ao uso do livro didático e como ele servia de guia para a execução de sua aula. Diante disto, a próxima seção discorrerá sobre as abordagens utilizadas pelos livros didáticos utilizados e mencionados pelos professores na pesquisa.

Durante a realização da pesquisa, notou-se o desconforto de alguns professores em frente a essa temática. Mesmo que a maioria da amostra analisada nesta pesquisa conheça e já tenha trabalhado em algum momento com os complexos, é perceptível que os docentes evitam o ensino na Educação Básica, seja pelo currículo ou pela pouca relevância vista por eles. Mas é preciso relembrar que esta análise é uma inferência a partir de uma pequena amostra, o que não configura a caracterização do perfil dos professores da região.

4.2 Análise dos livros didáticos

Neste tópico, será feita uma análise da proposta de trabalho dos números complexos presentes em alguns livros didáticos citados pelos professores. Esta discussão será realizada visando ponderar os meios adotados e a extensão do conteúdo visto nos livros, dada a importância que possuem tanto para o professor, bem como para o aluno durante o processo de ensino e aprendizagem.

Não será discutido a pertinência de um livro em relação ao outro, mas sim a abordagem adotada para o tratamento do conteúdo, visando a melhor comunicação matemática para os envolvidos no cenário educativo atual. Por este motivo, foram escolhidos em maioria livros recentes, que vem ao encontro das discussões realizadas acerca da Educação Matemática na atualidade.

A ordem de escolha da análise não caracteriza relevância do livro didático. Para examinar a evolução, os livros foram dispostos cronologicamente. Buscaremos destacar a metodologia apresentada, a linguagem utilizada e, por fim, realizar um breve comentário do autor quanto à proposta.

É relevante levar em consideração o material didático usado pelos professores, pois eles caracterizam um dos pilares para que o processo de aprendizagem aconteça de forma eficaz. Quando não há comunicação entre o professor, aluno e o material, o processo se torna árduo e muitas vezes exaustivo para todos.

Dante (1996) fala sobre o papel do livro didático nas mãos do professor, além de destacar a complementação de conhecimento trago quando utilizado de forma eficaz.

> O livro didático de matemática, quando bem utilizado, tem um papel fundamental no processo ensino-aprendizagem por várias razões:—em geral, só a aula do professor não consegue fornecer todos os elementos necessários para a aprendizagem do aluno, uma parte deles como problemas, atividades e exercícios pode ser coberta recorrendo-se ao livro didático; [...] —a matemática é essencialmente sequencial, um assunto depende do outro, e o livro didático fornece uma ajuda útil para essa abordagem; —para professores com formação insuficiente em matemática, um livro didático correto e com enfoque adequado pode ajudar a suprir essa deficiência; —muitas escolas são limitadas em recursos como bibliotecas, materiais pedagógicos, equipamento de duplicação, vídeos, computadores, de modo que o livro didático constitui o básico, senão o único recurso didático do professor; [...] (DANTE, 1996, p.83)

Portanto, o livro é atualmente o principal objeto de auxílio para professores que não tenha recursos tecnológicos ou disponibilidade de acesso a um acervo rico na biblioteca local. Assim, o livro é uma ferramenta essencial para curar as feridas e estigmas presentes na realidade escolar brasileira.

4.2.1 Matemática aula por aula

O primeiro livro a ser analisado é o **Matemática aula por aula**, volume único para o Ensino Médio, dos autores Benigno Barreto Filho e Cláudio Xavier da Silva, publicado pela editora FTD (São Paulo, 2000). Ele traz a discussão sobre o conjunto dos números complexos em seus últimos capítulos, ou seja, direcionado para o último ano do Ensino Médio.

O autor introduz a ideia inicial utilizando o conceito de par ordenado,e desenvolve a representação na forma algébrica partindo da resolução da equação $x^2+1=0$. É válido frisar que, do mesmo modo que fora definido o conjunto, as definições para fundamentar a forma algébrica são obtidas através das operações com pares ordenados.

Definida a forma algébrica, o contexto para as definições das operações são vistas nesta perspectiva, abandonando de certo modo a abordagem por pares ordenados. Este tema é retomado de forma muito sutil na discussão sobre o plano de Argand-Gauss, construindo assim a ideia por trás da forma trigonométrica.

Todos os tópicos desta obra são trabalhados com foco no objetivo de passar as informações básicas e necessárias para o desenvolvimento do conteúdo, sem espaço para discussões que o tema possa gerar.

Durante a explanação, existem exemplos simples de aplicações diretas do que foi desenvolvido, seguido de exercícios resolvidos que elevam o grau de dificuldade da discussão assemelhando-se ao exercícios que serão propostos. Tais exercícios proporcionam a possibilidade de desenvolver o tema um pouco além do que foi proposto na apresentação e sempre ao findar de um tópico é abordado uma pequena série de atividades.

No final do capítulo, é apresentado uma seção de exercícios complementares e atividades para vestibulares nacionais. Também há uma ficha de resumo que tem como objetivo consolidar o tema. Os autores trazem ainda uma breve discussão sobre a potenciação de números complexos, mas não trazem nenhuma menção à radiciação.

O texto não utiliza muito rigor matemático, o que não permite a exploração do conteúdo pelo estudante. Tal abordagem difere daquela utilizada nas atividades propostas.

É válido ressaltar que o livro encerra cada unidade de estudo com uma seção intitulada “Saiba um pouco mais”, cujo objetivo é trazer artigos que apresentam abordagens relacionadas ao estudo da unidade e o cotidiano. Na unidade referente aos complexos, é exposto um pequeno comentário sobre a órbita do cometa Halley, porém em nenhum momento é mencionado o uso ou a influência do conjunto estudado, tornando a seção incoerente.

4.2.2 Fundamentos de matemática elementar, 6: complexos, polinômios, equações

Fundamentos de matemática elementar do autor Gelson Iezzi, publicado pela editora Atual (8 ed. São Paulo, 2013) é o segundo livro a ser analisado.

Em sua apresentação, o autor traz uma pequena introdução objetiva de sua obra. Ele destaca que este livro é o sexto de dez volumes de obras dedicadas ao desenvolvimento da Matemática elementar no objetivo de preparar o estudante para vestibulares com ênfase na exploração de temas tratados ao nível do Ensino Médio.

A ideia do autor para introduzir o conteúdo consiste na abordagem do conceito de produto cartesiano definindo o corpo dos números complexos como:

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R} \; e \; y \in \mathbb{R}\} \tag{4.1}$$

O conceito de par ordenado permite o primeiro desenvolvimento das definições do conjunto, como, por exemplo as operações. Desta forma, define-se o número complexo da seguinte maneira:

$$z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow z = (x,y) \mid x, y \in \mathbb{R} \tag{4.2}$$

Ainda sob as perspectivas apresentadas sobre pares ordenados, a noção intuitiva de função perfaz o segundo momento da apresentação do tema. É estabelecida a relação entre o conjunto dos números reais e complexos proporcionando uma nova visão dos números e o tratamento mais detalhado das operações em sua forma algébrica. Através da interpretação geométrica de pares ordenados, é vista a forma trigonométrica dos números complexos.

O livro traz seções que apresentam "Teoremas", com suas propriedades e demonstrações. Porém, tais demonstrações possuem linguagem puramente matemática o que não permite uma conversa clara com o leitor que não compreenda tal escrita.

De modo análogo, o tratamento das operações numéricas é feito sem qualquer tipo de contextualização ou introdução prévia. Assim, é destacada a mecanização dos algoritmos em uma série de exemplos que atendem somente o tópico discutido. Ainda, é discorrido a respeito de potenciação e radiciação destes números, destacando sua representação geométrica e aplicação na resolução de equações.

Quanto aos exercícios para exercitar o conteúdo, estes são complementos dos exemplos já citados, nos quais o principal objetivo é a repetição dos algoritmos e inserção de problemas apresentados em vestibulares de grandes universidades.

Apesar de ser uma coleção muito famosa entre professores universitários, ela pode se tornar de difícil acesso ao leitor que não possua experiência com a formalização matemática.

É relevante destacar o fato de que o livro não aponta a possibilidade para o crescimento no estudo do conteúdo, sendo uma base para o estudo posterior de polinômios.

4.2.3 Matemática: ciência e aplicações, volume 3: ensino médio

Novamente o autor Gelson Iezzi é mencionado pelos professores no livro **Matemática: ciência e aplicações**, publicado pela editora Saraiva (9 ed., São Paulo, 2016).

O livro inicia a apresentação do conjunto através de uma breve retomada histórica, partindo do problema da solução de uma equação quadrática que não possui solução real. Neste momento, surgem os nomes de Girolamo Cardano, Rafael Bombelli, Jean Robert Argand e Gauss, fazendo menção às suas contribuições para o desenvolvimento do tema.

A referência à história dos números complexos se dá pela citação das descobertas de Girolamo Cardano, afirmando que o primeiro grande avanço nessa teoria se deve a ele na tentativa de resolver o problema: "Dividir um segmento de comprimento 10 em duas partes cujo produto seja 40". Em seguida, é declarado pelos autores que os responsáveis pela legitimação de toda teoria dos números complexos estudada atualmente são a Gauss e Argand. Ainda, é feita uma menção a Willian R. Hamilton (1805-1866), por sua contribuição na teoria aritmética do conjunto visando os números como pares ordenados.

A apresentação do conjunto é exposta através dos conceitos de pares ordenados, definindo, com base nesta visão, a unidade imaginária e a relação com o plano de Argand-Gauss. Em seguida, as formas algébrica e trigonométrica são vistas com suas principais operações. Destaca-se o trabalho com a representação geométrica, ou seja, as coordenadas polares.

É presente no livro uma boa série de exemplos, exercícios resolvidos e que comunicam os tópicos do conteúdo, promovendo uma boa visão da relação dos números complexos e algumas de suas diferentes representações. É válido ressaltar que os conceitos de potenciação e radiciação não são explanados, ou seja, o estudante não tem contato direto com as fórmulas de De Moivre, apesar de possuir alguns exercícios que se baseiam em seus conceitos.

O livro possui uma linguagem rica em Matemática e propõe uma leitura suave. O aspecto geométrico dos complexos é explorado com os pares ordenados que definem este conjunto. Porém, não possui nenhuma seção que possibilite ao estudante continuar e aprofundar no estudo, apesar dela existir nos outros capítulos sob o título de "Aplicações".

4.2.4 Matemática: contexto e aplicações

Matemática: contexto e aplicações de Luiz Roberto Dante (São Paulo: Ática, 3 ed., 2016) traz uma abordagem mais atual do tema. O autor inicia a discussão já no início do capítulo trazendo o que chama de imagem de impacto. Esta imagem relaciona números complexos e eletricidade, o que já estimula a imersão no estudo.

Antes de começar a discussão sobre o tema, o autor prepara o estudante fazendo uma breve revisão acerca dos conjuntos numéricos. A proposta é instigar o leitor através de propostas de resoluções de equações, afim de perceber a necessidade da existência de um novo conjunto que atenda a solução de equações não encontradas nos reais. É sugerido ao estudante que resolva equações do tipo:

- Em $\mathbb{N} : 4x^2 - 25 = 0$
- Em $\mathbb{Z} : x^2 - 7 = 0$
- Em $\mathbb{Q} : x^2 - 7 = 0$
- Em $\mathbb{R} : x^2 + 1 = 0$

A ideia do autor se apresenta de forma gradual, com equações que possuem solução em cada conjunto e com equações que necessitam de um conjunto complementar para adquirir solução. Assim, na última equação listada, é necessário a criação de um novo conjunto que possua a solução.

Uma proposta de revisão histórica é o próximo passo adotado pelo autor. Neste momento, ele evidencia os trabalhos de Frei Luca Pacioli, Scipione del Ferro, Antonio Fiore, Niccolò Fontana de Brescia (Tartaglia), Girolamo Cardano, Rafael Bombelli, Leonhard Euler, Argand e Gauss. É feita uma reflexão acerca das discussões sobre a resolução de equações cúbicas que nortearam a descoberta dos números complexos e as contribuições de cada um desses nomes. O livro ainda relata no final do capítulo mais sobre os desfechos na descoberta do conjunto.

O conteúdo é apresentado seguindo o roteiro mais comum nos livros didáticos: forma algébrica e operações, forma trigonométrica e operações e as fórmulas de De Moivre. É interessante destacar a menção clara ao estudante sobre as coordenadas polares quando o autor discorre sobre o plano de Argand-Gauss, além da ênfase dada em alguns exercícios resolvidos. Destaca-se também a relação entre a radiciação e sua representação geométrica.

Os exercícios resolvidos são apresentados de modo coerente ao que está sendo explanado. O texto conversa diretamente com o leitor e promove possibilidades de aplicações com comentários e sugestões. Já os exercícios direcionados à prática transitam entre o reforço de algoritmos e a promoção de atividades com aplicabilidade e diferentes soluções. Além disso, há duas seções destinadas ao tema e sua ocorrência em questões do ENEM e de vestibulares nacionais.

A apresentação através dos outros conjuntos numéricos e o resgate histórico facilita a comunicação com o leitor. Os exemplos são bem trabalhados e permite bom entendimento do que cada tópico está propondo, uma vez que a linguagem matemática se relaciona a todo momento com as explicações por uma linguagem mais moderna.

Por fim, como o autor iniciou o capítulo mencionando os números complexos no cálculo das grandezas elétricas, seria de bom tom finalizar a discussão e mostrar a aplicação mencionada. Outro ponto a destacar é o fato de que o livro, em outros capítulos, traz uma seção intitulada "Matemática e tecnologia", o que seria viável para uma proposta de uso talvez do *software* Geogebra. Porém, o capítulo não possui esta seção.

4.2.5 Conexões com a Matemática

A análise agora será realizada no livro **Conexões com a Matemática** de Fábio Martins de Leonardo (São Paulo, Moderna, 2016). Este propõe uma retomada da história dos números complexos através de uma pequena linha do tempo, onde destacam-se os nomes e as contribuições de Niccolo Tartaglia, Girolamo Cardano, Raphael Bombelli, Leonard Euler e Gauss. Logo após é revista a relação entre os conjuntos numéricos já estudados.

A forma algébrica, trigonométrica e operações são discorridas de modo a destacar as propriedades algébricas e, principalmente, o plano de Argand-Gauss. Neste caso, o número complexo é apresentado como um vetor em sua forma geométrica, caracterizando indiretamente o conceito de coordenada polar.

As relações estabelecidas pelas fórmulas de De Moivre e suas aplicações através da interpretação geométrica da radiciação é outro assunto tratado pelo autor.

As discussões já realizadas são acompanhadas por exercícios resolvidos, os quais proporcionam um ambiente de exploração para o estudante. É válido também falar sobre pequenas caixinhas de texto que estão presentes em todo o capítulo com observações e propostas para reflexões, o que permite ao aluno caminhar um pouco além do proposto no capítulo.

Os exercícios para prática são em grande número e prezam pela fixação dos algoritmos discutidos. Isto faz uma ligação com algumas atividades com maior aplicabilidade. Os exercícios resolvidos permeiam entre vestibulares e aplicações com maior complexidade.

Vale realçar o trabalho que o livro faz ao longo do conteúdo mantendo uma conversa clara com o leitor, utilizando de exemplos claros e objetivos, o que proporciona uma linguagem que se adequa tanto à Matemática quanto à língua moderna. Além disso, há notas de observação e reflexão que possuem como objetivo enfatizar ou relembrar algum conceito, bem como busca desafiar o aluno.

Porém, todas as propostas são sucintas. Assim, um breve resumo de discussões poderia enriquecer mais o estudo. Há também a falta de uma abordagem tecnológica ou de textos que promovam o interesse em continuar o estudo do conjunto, sendo que este é um livro moderno e que possui seções em seus outros capítulos que usam a mesma abordagem.

4.2.6 Matemática, Bernoulli sistema de ensino

Por fim, a análise de um material destinado às escolas da rede privada. A apostila de Matemática do Bernoulli sistema de ensino (3ª série, 4 v., 2020) é uma revisão de conteúdos do Ensino Médio, focado diretamente na prática de exercícios que compõem os principais vestibulares nacionais e o ENEM. Ela inicia o tratamento do conteúdo com a resolução de uma equação do segundo grau que não possui solução real levando à unidade imaginária e aos nomes de Euler e Gauss por suas contribuições acerca do tema. O plano de Argand-Gauss é também mencionado como representação para o novo número.

As formas algébrica e trigonométrica, operações e as fórmulas de De Moivre são apresentadas resumidamente e com alguns escassos exemplos práticos. Já as atividades são direcionadas exclusivamente para o preparo de vestibulares.

Mesmo que seja o material mais atual analisado, sua defasagem no que se refere ao conteúdo dos complexos é enfática. Não que ele não atinja o objetivo proposto, sendo também que o conteúdo dos números complexos tem sido minado dos currículos deste tipo de exame, principalmente o ENEM. Porém, não permite ao aluno nem ao professor espaço para futuras discussões e não compõe um cenário para que o estudante possa ser protagonista no estudo. Há falta também da contextualização, aplicações e por mais que sejam mencionados Euler e Gauss, o resgate histórico não é satisfatório.

4.2.7 Considerações

Diante das observações feitas, pode-se considerar que o tratamento do conteúdo de números complexos está diretamente ligado ao objetivo de seu estudo. Em livros como os das subseções 4.2.1, 4.2.2 e 4.2.6, pode-se observar o trabalho com os números complexos em uma visão mecanizada e conteudista, rico na linguagem matemática, visto que o principal objetivo destes dois materiais é o preparo para vestibulares.

Já nos livros analisados nas subseções 4.2.3, 4.2.4 e 4.2.5, a proposta de trabalho norteia-se por uma conversa com o estudante de modo a tornar o estudo mais agradável e suave no que se refere ao termos e simbologia matemática, sem defasar a riqueza do tema.

Atenta-se ao fato do autor Gelson Iezzi fazer parte da montagem de dois livros com vertentes diferentes subseções 4.2.2 e 4.2.3, o que reafirma mais a ideia de que cada material foi desenvolvido para certo público em específico.

A linguagem deve se adequar ao tipo de leitor. Sendo ele um curioso, um prodígio ou alguém com defasagem na disciplina, a comunicação entre o material e o estudante é primordial. Sobre o ensino da Matemática através dos livros didáticos vale mencionar a fala de Dante (1996) sobre a importância da comunicação e linguagem.

> As narrativas contidas no livro didático de matemática devem ser claras e compreensíveis, colocadas numa linguagem interessante que estimule o pensamento do aluno. As explicações, definições, problemas e questões devem conter somente termos que os estudantes daquela série possam compreender.
> A linguagem matemática do livro didático, expressa pelos símbolos matemáticos, deve vir somente após a construção e a exploração intuitiva dos conceitos matemáticos. A linguagem matemática, colocada antes da construção e da exploração do conceito pelo aluno, fica sem sentido para ele e dificulta a compreensão do conceito. [...]
> Os símbolos matemáticos são representações de ideias ou conceitos matemáticos e, obviamente, devem vir depois que o aluno se apropriou deles. Quando a linguagem matemática é colocada precocemente antes da exploração da ideia, ela marginaliza a compreensão da mesma. (DANTE, 1996, p.85)

Deste modo, o próximo tópico abordará, segundo a perspectiva dos autores desta pesquisa uma proposta para o auxílio no processo de ensino e aprendizagem dos números complexos. Será feito um paralelo entre a visão dos professores que responderam a pesquisa de opinião, os materiais lidos para fundamentação deste trabalho, e as perspectivas adotadas pelo autor ao longo da elaboração desta pesquisa.

Buscaremos atender ao que julgamos como uma boa abordagem para o o ensino do tema, considerando o resgate histórico, a associação clara entre Álgebra e Geometria, o trabalho com a tecnologia, além do incentivo a exploração do tema. Desta forma, tentaremos abarcar aspectos positivos vistos nos materiais analisados num único texto. Priorizaremos assim, a linguagem matemática, a independência do estudante e as demandas e possibilidades fornecidas pela BNCC.

4.3 Apresentação da sequência lógica de exploração dos "Números Complexos"

As seções anteriores apresentaram um pouco sobre a realidade do ensino dos números complexos na região de Peçanha-MG. Percebe-se que enxergar o conjunto como uma extensão dos números reais é o caminho mais prático e utilizado atualmente, porém, a metodologia e as ferramentas divergem em relação à proposta de ensino.

Ao ter como objetivo a aprovação em vestibulares, os materiais priorizam ações no ensino que priorizam a mecanização do conteúdo, perfazendo superficialmente as propriedades e características do conjunto. Já os materiais direcionados ao aprendizado da Matemática no Ensino Médio espelham o olhar sucinto para a exploração de um conjunto repleto de riquezas.

São diversos os fatores que provocam ações positivas e negativas no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, especificamente neste caso dos números complexos. Assim, o objetivo não é apontar tais fatores ou solucioná-los, mas sim propor ao professor e ao estudante um material que promova o desenvolvimento natural do aprendizado do conjunto.

Através deste aprendizado, buscamos a possibilidade de discutir as propriedades e características através do diálogo entre todos os elementos envolvidos. Dessa forma, seria possível um tipo diferente de contextualização, não voltada para aplicações diretas ao cotidiano mas sim no corpo da própria disciplina.

De acordo com a visão discutida por Pires e Silva (2011) ao analisarem a construção dos currículos nacionais de Matemática, é preciso expandir essa ideia de aplicação no cotidiano, pois:

> há outras formas de contextualização igualmente ricas e importantes, como as que são feitas a partir da própria História da Matemática, de sua aplicação em outras áreas e as internas à própria Matemática, como as que relacionam aspectos numéricos, geométricos e algébricos de um mesmo conceito. (PIRES; SILVA, 2011, p.69)

Sabe-se que a ideia de conjuntos numéricos é discutida no Ensino Fundamental e o aprofundamento no conjunto dos complexos demanda de conhecimentos discutidos somente no Ensino Médio, mas nenhum conhecimento é inacessível ao aluno. Portanto, este material é dedicado a todo estudante curioso de Matemática.

Segundo Júnior (2009):

> Uma reestruturação na abordagem metodológica no ensino dos complexos representa mais do que fornecer uma "concretude" para estes novos entes matemáticos. Trata-se de abrir oportunidades para investigações que despertem o interesse pelo desenvolvimento da matemática. (JÚNIOR, 2009, p.82)

Em concordância com a ideia de Júnior (2009), a sequência lógica tem como meta o desenvolvimento do conteúdo, organizada metodologicamente para a realização de atividades. Assim, procura-se valorizar a relação entre professor, aluno e conteúdo, de forma que o estudante possa adquirir o conhecimento de forma independente.

Porém, nesta seção, a discussão será realizada a partir da visão do orientador do estudo caso houver, sendo este qualquer pessoa que tenha maior curiosidade em relação ao tema, ou o próprio estudante. Vale ressaltar que devido a alguns conteúdos utilizados na estruturação do estudo exigirem maior maturidade matemática, é sugerido o estudo por um aluno do segundo ou terceiro ano do Ensino Médio.

Como o estudante é o principal alvo do material proposto, a formatação não segue os padrões e normas estabelecidos pela ABNT, como no restante desta pesquisa. O objetivo desta abordagem é apresentar um material mais atrativo e cativante na visão do jovem estudante.

Deseja-se aqui direcionar o estudo de acordo com a proposta em que foi criado. Assim, essa seção servirá como um manual que complementa o estudo da sequência lógica trazendo as reflexões que não foram tratadas no material. É sugerido que a leitura seja feita com o acompanhamento do apêndice D.

4.3.1 Introdução

Como visto, na análise de livros didáticos é comum a utilização de equações do segundo grau como pontapé inicial no estudo dos números complexos, mas antes do desenvolvimento destas equações o problema com a raiz quadrada de um número negativo já assola o ensino da Matemática. Como meio de fuga para a solução deste problema, o professor apenas indica que a equação não possui solução.

Entretanto, este seria um bom momento para a apresentação do conjunto dos complexos, considerando que os alunos já tenham acesso ao tipo de conhecimento que fundamenta a operação de radiciação e da construção do conjunto dos números reais.

Como exemplo, dentro dos objetos de conhecimento a serem estudados pelo 8º ano do ensino fundamental, segundo a BNCC, estão o desenvolvimento da potenciação e radiciação e o trabalho com equações polinomiais do 2º grau do tipo $ax^2 = b$, o que possibilita a abordagem proposta neste primeiro tópico. (BRASIL, 2018, p.313). Essa é uma possibilidade, ao menos, para uma breve apresentação do conjunto.

Neste momento, iniciamos a discussão com a seguinte questão: Qual a solução para $\sqrt{-9}$? O processo deve ser iniciado através da evidência de que o conjunto dos números reais não possui recursos suficientes para apresentar a solução da questão. É sugerido que a exploração permeie a propriedade de radiciação: dados $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{Q}$, então, $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$. Assim é possível reescrever o problema enfatizando o valor de $\sqrt{-1}$. Está é a chave para a imersão no conjunto.

É propício neste momento mencionar um pouco sobre o trabalho de René Descartes, principalmente sobre a adoção da simbologia de i para a $\sqrt{-1}$. Assim, é possível a reescrita $\sqrt{-9} = 3i$, o que configura um exemplo de número imaginário.

Agora que o estudante conhece a origem da unidade imaginária, é fácil desenvolver a forma algébrica do número complexo destacando a parte real e a imaginária. Já citada a relação existente entre os conjuntos numéricos, é de suma importância o conhecimento de que o conjunto dos números reais está contido no conjunto dos números complexos.

É notório perceber que, quando o número não possui a parte imaginária, ele é considerado um número real. Porém, quando há a ausência da parte real, ele é denominado imaginário puro.

A associação com o plano complexo facilitará a compreensão do estudante. Uma referência visual auxilia na assimilação de termos mais abstratos dentro da disciplina. É relevante realçar o isomorfismo existente entre o plano de Argand-Gauss e o plano cartesiano, o que torna o novo conceito mais familiar.

A ideia deste primeiro capítulo é tornar o mais natural possível a descoberta dos números complexos seguindo o exemplo das civilizações antigas que desenvolviam a Matemática com o principal objetivo de resolver problemas, sendo eles cotidianos ou acadêmicos. De acordo com Júnior (2009):

> É notório, tanto nos livros didáticos, como na prática em sala de aula, que este conteúdo é usualmente exposto em uma ordem que não corresponde à história do desenvolvimento deste conceito, pois os números complexos são introduzidos após os números naturais, inteiros, racionais e reais. Isto dá a impressão de que a história dos conjuntos numéricos é linear e de que a ampliação destes conjuntos foi motivada somente pela necessidade de se resolver um número cada vez maior de equações. Isto não corresponde à ordem histórica, muito mais intrincada e complexa.

Portanto, é importante que a apresentação dos números complexos vá além desta expansão do conjunto dos números reais, mesmo sendo um bom ponto de partida para o começo dos estudos. É necessário perceber que o conjunto é construído de acordo com o desenvolvimento natural da Matemática. É preciso também instigar o estudante a buscar as respostas para a questões como a que iniciou esta discussão, levando o estudo ao desenvolvimento autônomo e produtivo.

4.3.2 Um pouco de história

De maneira similar a René Descartes, outros matemáticos foram fundamentais para a descoberta dos números complexos. Uma discussão sobre essa descoberta foi realizada na revisão bibliográfica desta pesquisa. De modo análogo, é de extrema importância a menção histórica no decorrer do material.

Além de Descartes, outros matemáticos são mencionados. O primeiro deles é Herão de Alexandria e o seu equivoco na resolução de um problema que proporcionou a primeira aparição sutil da $\sqrt{-1}$.

Diofanto também encontrou um problema semelhante. Mencionar Herão e Diofanto oportuniza perceber que a Matemática foi criada ao longo do tempo, mesmo que não houvesse tecnologia ou aplicação conhecida para o conteúdo, além de mostrar que o erro no estudo da disciplina não configura o fracasso, mas sim uma gama de possibilidades.

Del Ferro, Del Fiore, Tartaglia e Cardano são outros nomes que trabalhavam a Matemática para promover descobertas que alavancariam a ciência em sua época. É interessante também falar sobre o pequeno desentendimento entre estes nomes por trás das competições e desafios matemáticos realizados na Antiguidade e qual o reflexo obtido como consequência.

Em seguida, voltamos a Descartes em virtude de suas contribuições para o desenvolvimento do conjunto, principalmente mostrando a adoção do nome imaginário e das tentativas de associação do número complexo a uma representação geométrica, fato não realizado por nenhum matemático antes.

Por fim dá-se lugar a Gauss e ao Teorema Fundamental da Álgebra que garante a existência de raízes complexas em polinômios. A partir deste ponto, seria propícia a abordagem já mencionada de alguns livros didáticos para a apresentação dos números complexos através da resolução de equações do segundo grau sustentados pelo teorema.

O teorema anterior não foi desenvolvido somente por Gauss. Por exemplo, Cardano e Bombelli já haviam feito tal afirmação mas sem a demonstração, o que mostra que o resultado encontrado por Gauss é sustentado por todos os trabalhos desenvolvidos por seus antecessores. Este fato deve ficar claro para o estudante para ilustrar a riqueza da ciência matemática.

Ao se tratar do estudo da história dos números complexos, Silva (2016, p.1) assegura que "compreender o conjunto dos números complexos por um ponto de vista histórico, desperta um novo significado na importância do seu estudo."

Podemos afirmar ainda que a história da Matemática tem ganhado cada vez mais espaço no processo de ensino e aprendizagem da disciplina. Através dela é possível fazer um paralelo entre as perspectivas de grandes matemáticos e a Matemática moderna; este tipo de comparação torna o estudo rico em termos matemáticos, filosóficos, culturais e sociais. (JÚNIOR, 2009)

4.3.3 Geogebra

Nos dias atuais, é comum ver diversas esferas da sociedade sustentadas no desenvolvimento tecnológico. Saúde, economia e segurança são exemplos de esferas que tem se tornado mais eficazes por meio da utilização de novas tecnologias. Com a Educação não é diferente. Fernandes (2019) reflete sobre o tema.

> A inserção de inovações tecnológicas na sociedade tem ocasionado constantes mudanças nas práticas dos sujeitos, pois estas inovações criam possibilidades. Estas possibilidades tendem a facilitar o desenvolvimento de atividades que demandariam muito mais tempo e mão de obra sem o uso da ferramenta utilizada. (FERNANDES, 2019, p.28)

Nota-se que a Educação avança para o progresso tecnológico, o que tende a facilitar o desenvolvimento das disciplinas. Na Matemática, a tecnologia torna-se cada vez mais necessária para que o nível de abstração possa ser elevado levando os pesquisadores a discussões mais ricas e frutíferas. Uma destas tecnologias é o uso do *software* Geogebra, que possibilita o trabalho dinâmico com a Matemática, permitindo a manipulação de vários de seus aspectos e explorar a relação entre eles, principalmente a Geometria e a Álgebra.

As tecnologias impactam e estão presentes me diversas áreas da vida do estudante, tais como trabalho, estudo e vida social. Neste contexto, a BNCC (BRASIL, 2018, p.528) reflete sobre o uso de recursos tecnológicos no processo de ensino e aprendizagem ao destacar "a importância do recurso a tecnologias digitais e aplicativos tanto para a investigação matemática como para dar continuidade ao desenvolvimento do pensamento computacional, iniciado na etapa anterior". Portanto, é pertinente o uso do *software* para o estudo do conjunto. Assim, ele será utilizado a partir de agora para o desenvolvimento do tema.

Neste sentido, abordaremos as formas algébrica e geométrica dos complexos com a inserção de tais números no *software*.

É necessário então conhecer o Geogebra. Não queremos, neste material, desenvolver um estudo sobre ele, mas sim destacar as principais ferramentas que serão utilizadas no estudo.

É primordial que o primeiro contato seja exploratório por parte do estudante, exercitando vários exemplos e possibilidades para as representações ao indicar a disposição dos pontos que os representam no plano, bem como quando os números são reais e imaginários puros.

4.3.4 Vetores

Uma das possíveis representações para um número complexo é a interpretação vetorial. Do mesmo modo que a representação algébrica conversa com a geométrica, o estudo de vetores possui diferentes tipos de abordagem, o que torna o conteúdo repleto em ferramentas para o estudo do conjunto.

Como no ensino dos números complexos, o estudo de geometria analítica não é primordial nas matrizes curriculares nacionais de Matemática. Por isso, uma pequena revisão da ideia de vetor é necessária. Provavelmente, se o estudante estiver no Ensino Médio, o contato com a Física facilitará o compreendimento da ideia abordada.

Novamente, prezando pela acessibilidade fornecida pela visualização, a abordagem geométrica é explorada primeiro. E com o auxílio do Geogebra, a representação torna-se mais maleável através da ferramenta vetor.

Ao orientador aconselha-se que estimule o estudante a explorar a representação vetorial de alguns números complexos observando as duas janelas, uma com o plano e a outra com a representação algébrica. Ainda, recomenda-se que o estudante investigue as diferentes representações que os números complexos estão assumindo a partir do conceito de vetores.

A sugestão para o uso de vetores é um caminho para a associação mais acessível do conjunto a outros conteúdos da Matemática. Esta ideia é apoiada por Caon (2013).

> relacionar Números Complexos com outros conteúdos matemáticos, é bem proveitoso por promover o emprego de técnicas alternativas de demonstração, de resolução de problemas e também por resgatar resultados clássicos desses conteúdos. Dessa inter-relação, tanto os Números Complexos quanto os outros conteúdos são valorizados e revitalizados, abrindo-se a possibilidade de retomada de conceitos em vários momentos do processo de ensino e aprendizagem. (CAON et al., 2013, p.10)

Possibilitar ao estudante amplas das representações torna o aprendizado mais dinâmico e interativo, com comunicação direta com os envolvidos. A BNCC também defende o estimulo para a exploração de diferentes formas de representar e registrar a Matemática assegurando o desenvolvimento do raciocínio próprio.

> na Matemática, o uso dos registros de representação e das diferentes linguagens é, muitas vezes, necessário para a compreensão, a resolução e a comunicação de resultados de uma atividade. Por esse motivo, espera-se que os estudantes conheçam diversos registros de representação e possam mobilizá- los para modelar situações diversas por meio da linguagem específica da matemática – verificando que os recursos dessa linguagem são mais apropriados e seguros na busca de soluções e respostas – e, ao mesmo tempo, promover o desenvolvimento de seu próprio raciocínio. (BRASIL, 2018, p.529)

Portanto, o incetivo para conhecer as diferentes formas de representar e trabalhar com os números complexos torna-se fundamental no desenvolvimento do aprendizado.

4.3.5 Módulo, argumento e forma trigonométrica

Estabelecer e evidenciar a relação existente entre a 'nova e a velha' Matemática estudada é essencial para que o estudante entenda a ciência com um conceito construtivo. Assim, a ideia do módulo de um número complexo é discutida através de um dos principais teoremas usados nos Ensinos Fundamental e Médio, o Teorema de Pitágoras.

Com fácil entendimento e aplicação, a versatilidade do teorema permite ao estudante utilizá-lo em diferentes tipos de estudo dentro da disciplina, o que não é diferente no desenvolvimento dos números complexos. É recomendável que a aplicação seja sobre o triângulo retângulo criado pelas projeções ortogonais do afixo sobre os eixos e do vetor. Induzir a compreensão de que como as distâncias entre as projeções e a origem do plano são conhecidas, o teorema funcionará para a descoberta da medida do vetor, ou seja, seu módulo.

Por meio de um caminho já conhecido e dominado pelo estudante, o aprendizado torna-se natural sem a perda da essência e da riqueza da discussão. Os outros elementos como a nomenclatura de módulo podem ser acrescidos sem perda posterior das conclusões.

A prática em calcular o módulo também deve ser observada. Recomenda-se o treino com outros números complexos. A averiguação dos resultados é possível através do Geogebra e a ferramenta de cálculo de distância, o que permite ao estudante autonomia em seu estudo.

A associação que o conjunto têm com outros conteúdos da Matemática torna-se mais notável à medida que as características começam a surgir. Cita-se portanto a trigonometria e, na mesma estratégia utilizada anteriormente, é oportuno que a discussão ocorra naturalmente.

Segundo a BNCC, já no Ensino Fundamental o aluno deve utilizar as relações métricas, a trigonometria, inclusive as leis do seno e do cosseno, entre outras aplicações em triângulos para resolver e elaborar problemas que os envolvam, em variados contextos. (BRASIL, 2018, p.536)

A partir da análise do triângulo retângulo já descrito e associando os eixos vertical e horizontal, respectivamente, aos valores de seno e cosseno, é possível calcular o argumento de um número complexo com o auxílio de uma tabela trigonométrica. Apesar de não ser usada com tanta frequência atualmente, devido às tecnologias existentes, a apresentação desta é conveniente para que o estudante possa conhecer um pouco mais sobre a história e o trabalho que os antigos matemáticos desenvolviam, além de proporcionar maior imersão no conteúdo.

Para elevar o aprendizado, analisaremos o arco tangente. A utilização de uma calculadora científica também é benéfica para o cálculo do argumento, elevando o nível da discussão para um grau maior de dificuldade mas com maior acessibilidade com o recurso tecnológico. Ambas as abordagens são válidas e promovem a aquisição de novos conhecimentos.

Novamente, a prática levará ao sucesso do aprendizado. Portanto, é aconselhável que o estudante exercite o cálculo do argumento com diferentes números complexos utilizando quaisquer dos recursos apresentados. A averiguação do resultado pode ser feito por meio da ferramenta 'ângulo' no Geogebra, fortalecendo a independência no estudo.

Para a escrita de um número complexo em sua forma trigonométrica, é orientada a investigação a partir da análise das razões, na qual o principal aspecto a ser destacado é o fato de que a reescrita acontece de forma simples a partir da apresentação dos coeficientes a e b em função das razões seno e cosseno. Apesar da ideia ser intuitiva, é válida a análise de um exemplo para esclarecer possíveis dúvidas no processo.

Outro ponto importante a destacar reside no fato dessa forma ser também conhecida como forma polar de um número complexo, devido a sua relação direta com o módulo e o argumento.

4.3.6 Operações

As operações com números complexos tradicionalmente são apresentadas na forma algébrica e posteriormente na forma trigonométrica depois de alguns exemplos. Entretanto, a construção indicada neste material buscará o ensino das operações através da promoção da interlocução de todos os conteúdos até aqui explanados.

Para a adição e subtração de dois ou mais números complexos, o tratamento é indicado por meio da abordagem matricial, presente ao se discutir a representação do número através de vetores. Na verdade, não há grandes diferenças entre a operação por meio algébrico ou matricial, mas ao se tratar de vetores sugere-se utilizar uma representação que se assemelha aos conceitos envolvem o tema.

Como a representação utilizada no material é a vetorial, vale relembrar as operações entre vetores vista em Geometria Analítica ou na disciplina de Física, sendo fundamental o conhecimento prévio destes termos.

O desenvolvimento da multiplicação e divisão envolvem os conceitos de módulo e argumento, o que torna o estudo mais rico. Ao falar sobre o produto, existem dois pontos que devem ser destacados. Em primeiro lugar, o produto entre um número real e um número complexo, o que equivale ao produto de um vetor por um escalar. O outro ponto é o produto entre dois números complexos, ou seja em dois vetores.

O segundo caso é um pouco mais delicado. É indicado que o cálculo comece a ser explicitado através da observação dos valores dos argumentos e módulos dos números envolvidos. Na investigação, espera-se que o estudante perceba as relações existentes entre os módulos e argumentos dos fatores e do resultado. É satisfatório começar a perceber que as operações influenciam tanto métodos algébricos como geométricos. Bem findado a ideia do produto, a divisão torna-se consequência sendo o processo totalmente semelhante.

Através do Geogebra é possível perceber as conexões existentes entre a forma algébrica, geométrica e trigonométrica de um número complexo. Por meio da exploração sugerida, é possível observar o cálculo na forma algébrica associado à forma trigonométrica, tradicionais no ensino do conteúdo.

É relevante que as discussões sobre as potências da unidade imaginária sejam também exploradas. Assim como na divisão, para que a ideia de conjugado seja inserida, recomenda-se utilizar a racionalização.

Ao tratar de operações com números complexos, o ensino não fica mecanizado e preso à adoção de algoritmos, à liberdade no aprendizado, e ela deve ser explorada. Como menciona Caon et al. (2013, p.60) ao dizer que "existem várias conexões entre os números complexos e outros conteúdos matemáticos pertencentes ao currículo do Ensino Fundamental e Médio", o que reafirma a possibilidade de explorar conceitos do conjunto tais como as operações de modo a promover o aprendizado da disciplina como um só corpo, e não na ideia de segmentos separados e isolados.

4.3.7 De Moivre

Munidos de todas estas ferramentas e do conhecimento do Geogebra, acredita-se que a conquista evidenciada por Gauss na menção histórica pode ser levada em consideração na discussão. O Teorema Fundamental da Álgebra fará mais sentido a partir deste ponto.

A partir da investigação das raízes do polinômio $x^3 + 1$, é possível conhecer um pouco mais sobre a existência dos números complexos. Ainda, vale ressaltar a semelhança entre o cálculo da raiz do polinômio e da raiz cúbica de -1. O fato é que no conjunto dos números reais existe solução para $\sqrt[3]{-1}$, porém ela ainda não satisfaz o que o Teorema de Gauss afirma. Em vista disso, surge o questionamento de como buscar as demais raízes.

Um pouco de domínio de trigonometria aqui será necessário. Neste sentido, exploraremos a ideia destas raízes estarem sobre uma circunferência de raio igual ao módulo do número complexo, além do argumento determinar a posição onde o ponto irá ficar na representação destas raízes. É válido também destacar que os argumentos das raízes estão em progressão aritmética, o que sustenta ainda mais a idealização da construção do conhecimento matemático.

Por meio do Geogebra, é possível ver essas raízes dispostas sobre a circunferência, mas o principal destaque esta no modo em que estes pontos assumem o papel de vértice de um polígono regular. O cálculo da raiz de um número complexo reflete em uma representação geométrica uniforme.

De Moivre foi quem desenvolveu estudos sobre estes temas. Por isso, é válido mencionar a sua contribuição, além de apresentar suas duas fórmulas relacionadas ao cálculo das raízes como visto anteriormente.

É indicado ao estudante que veja mais sobre esta exploração através do cálculo de raízes n-ésimas de diferentes números complexos. Isso tornará seu conhecimento mais aguçado quanto ao tema.

Essa relação entre as fórmulas de De Moivre e a representação geométrica coaduna com a ideia presente na BNCC referente ao estudo da Matemática como potencializadora de conteúdos já estudados.

> novos conhecimentos específicos devem estimular processos mais elaborados de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar que permitam aos estudantes formular e resolver problemas em diversos contextos com mais autonomia e recursos matemáticos.
> Para que esses propósitos se concretizem nessa área, os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados.(BRASIL, 2018, p.529)

Ter a habilidade de enxergar um problema em perspectivas diferentes traz autonomia e torna o estudante protagonista no processo de ensino e aprendizagem.

4.3.8 Onde estão os complexos?

A ideia para o último capítulo do material é discutir um pouco sobre a aplicação e uso dos números complexos. A maioria das pessoas que tem conhecimento sobre o conjunto geralmente o associa ao estudo de correntes elétricas. Porém, com o intuito de aprofundar nossos estudos, vislumbraremos os fractais. Especificamente, cita-se os Conjuntos de Julia e Mandelbrot que são conhecidos pela apresentação de padrões dentro do plano complexo.

Inicialmente, incentiva-se conhecer um pouco sobre o Conjunto de Mandelbrot e como ele pode ser construído. Evidenciaremos que o objetivo não é aprofundar na análise e sim plantar uma semente na mente dos estudantes. Assim, por este motivo a ideia de funções complexas iterativas é apresentada de forma bem intuitiva, apenas para elucidar a construção de fractais.

Após, menciona-se o Conjunto de Julia que inspirou Benoit Mandelbrot a desenvolver suas pesquisas. Sugerimos uma pausa para apreciação das imagens e a análise de que, dependendo do valor atribuído para c, a iteração da função $f_c(z) = z^2 + c$ gera fractais distintos.

A influência dos fractais é outro fator a ser mencionado na Teoria do Caos, na qual buscamos encontrar padrões organizados de ações incorporados em sistemas que apresentam aleatoriedade. Quando discorreremos sobre caos, é comum pensarmos em algo sem ordem ou objetivo. Porém Fey e Rosa (2012, p.218) afirma que "a percepção e aceitação de que o Caos já não é apenas uma teoria científica de alto grau de complexidade e difícil compreensão. Tem se tornado a chave capaz de explicar fenômenos até então considerados inexplicáveis e, por isso, sem interesse científico". Os autores ainda afirmam que:

> A ciência dos Fractais, tida como linguagem do Caos, apresenta estruturas geométricas de grande complexidade e de beleza infinita, ligadas às formas da natureza e ao desenvolvimento da vida e à própria compreensão do universo. São imagens de objetos abstratos que possuem caráter de onipresença por terem as características do todo infinitamente multiplicadas dentro de cada parte. (FEY; ROSA, 2012, p.220)

O estudo de fractais é também incentivado pela BNCC como uma das habilidades a serem desenvolvidas dentro do campo de estudo de Geometria e Medidas no ensino médio.

> (EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras). (BRASIL, 2018, p.545)

Porém, pode-se observar que a menção ao conteúdo não é o principal foco, mas que existe atenção para iniciar estudos deste tipo. Com a semente plantada é finalizado este estudo na esperança de que este material auxilie no aprendizado e exploração do conjunto dos números complexos.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante das discussões realizadas no levantamento histórico dos números complexos do momento desde sua criação aos dias atuais, percebe-se a relevância do estudo diante do impacto que o mesmo tem sobre a Matemática básica, principalmente quando trata-se da construção da teoria dos conjuntos numéricos. Além da influência da ciência na realidade, que, apesar de não ser notória, é necessária para o desenvolvimento de diversas ciências.

Considera-se também que o conteúdo, por mais que seja negligenciado no Ensino Básico, não perde sua relevância por estar inserido tanto em cursos de nível médio ou no Ensino Superior.

Quanto à relação dos professores de Matemática da região da cidade de Peçanha-MG com o tema, mesmo que a aplicação do questionário não tenha atingido um número expressivo destes, foi possível conhecer a realidade vivenciada por eles, além de constatar a intimidação causada neles pelo conteúdo. Tal fato indica a opção de não ensinar esta temática.

No que se trata dos livros didáticos analisados, percebe-se o reflexo das instituições educacionais e do perfil dos professores de Matemática alcançados pela pesquisa de opinião. Estes livros vêm na atualidade se adequando aos conteúdos exigidos pelos vestibulares e ENEM. Assim, devido a composição de suas matrizes, os números complexos estão perdendo espaço de estudo.

Ao conhecer um pouco da realidade dos professores entrevistados foi possível investigar moderadamente sobre o ensino dos números complexos na região, e assim propor através do material a composição de um cenário alternativo que permita a autonomia e independência do aluno no estudo do tema.

Portanto, considera-se que o objetivo desta pesquisa foi alcançado, por meio da elaboração de um material que anela a possibilidade do professor e aluno de estudar a descoberta, estruturação e promover a exploração dos complexos, procurando atender as necessidades encontradas nas análises realizadas durante a execução da pesquisa.

Não é julgada neste trabalho a necessidade do estudo dos números complexos, pois, acredita-se que esta discussão seja mais vasta do que a levantada na pesquisa. Mas espera-se que o material criado sirva como fonte de inspiração e incentivo para que jovens estudantes busquem aprofundar-se no conhecimento do tema e suas possíveis aplicações.

Por fim, espera-se que esta pesquisa contribua para o desenvolvimento da Educação, principalmente para o estudo da Matemática. Anseia-se também a futura aplicação do material criado, o que não ocorreu devido a instabilidade criada pela pandemia do Covid-19.

REFERÊNCIAS

BARROS, A. L. C. de. **Números Complexos no Ensino Médio**. Tese (Doutorado) — PUC-Rio, 2014.

BELTRÃO, I. d. S. L.; VÍTOR, C. B.; BARBOSA, I. dos S. Software geogebra: uma ferramenta na prática docente para o ensino dos números complexos no ensino médio. **Revista de Estudos e Pesquisas sobre Ensino Tecnológico (EDUCITEC)**, v. 3, n. 05, 2017.

BEMAN, W. W. A chapter in the history of mathematics. **Science**, JSTOR, v. 6, n. 139, p. 297–307, 1897.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: Ministério da Educação, 2018.

CAON, F. et al. Números complexos: inter-relação entre conteúdos e aplicações. UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA, 2013.

DANTE, L. Livro didático de matemática: uso ou abuso? **Em aberto**, v. 16, n. 69, 1996.

FERNANDES, N. R. O uso de softwares educacionais por professores de matemática. UFVJM, 2019.

FERRETTI, C. J. A reforma do ensino médio e sua questionável concepção de qualidade da educação. **Estudos avançados**, SciELO Brasil, v. 32, p. 25–42, 2018.

FEY, F.; ROSA, J. Teoria do caos: a ordem na não-linearidade. **Universo Acadêmico**, v. 5, n. 1, p. 217–32, 2012.

GIL, A. C. et al. **Como elaborar projetos de pesquisa**. [S.l.]: Atlas São Paulo, 2002.

JÚNIOR, U. P. A história dos números complexos:“das quantidades sofisticadas de cardano às linhas orientadas de argand”. 2009.

MARCONI, M. d. A.; LAKATOS, E. M. **Fundamentos de metodologia científica**. [S.l.]: 5. ed.-São Paulo: Atlas, 2003.

MELLO, S. Q. de. O ensino de matemática e a educação profissional: a aplicabilidade dos números complexos na análise de circuitos elétricos. **Teses e Dissertações PPGECIM**, 2005.

MENEZES, L. Matemática, linguagem e comunicação. **Millenium**, Instituto Politécnico de Viseu, 2000.

NAHIN, P. J. **An imaginary tale**. [S.l.]: Princeton University Press, 2010.

PIRES, C.; SILVA, M. A. Desenvolvimento curricular em matemática no brasil: trajetórias e desafios. **Quadrante**, v. 20, n. 2, p. 57–80, 2011.

PORTOLAN, J. **A importância do ensino de números complexos no ensino médio, na visão dos professores de matemática, em alguns municípios da região oeste do Paraná**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2017.

ROCHA, V. J. et al. Números complexos e o teorema fundamental da álgebra. Universidade Federal de Goiás, 2014.

SANTOS, D. M. d. Os números complexos e suas aplicações na eletricidade: estudo de caso nas séries secundárias. Universidade Federal da Paraíba, 2018.

SILVA, J. M. N. A. Números complexos: uma análise dos itens de vestibulares. 2016.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. **Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática**. [S.l.]: Artmed Editora, 2009.

SOUSA, A. M. C. d. O corpo dos numeros complexos sob a optica historica, pratica e didatica. UNIVERSIDADE FEDERAL DE LAVRAS, 2021.

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO AOS PROFESSORES

APRESENTAÇÃO

Caro(a) colega,

Meu nome é Alexandre Nascimento Amorim, sou discente do programa de Mestrado Profissional em Matemática, PROFMAT, na Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, Campus Mucuri (Teófilo Otoni - MG), sob a orientação do Professor Dr. Fábio Silva de Souza.

Pesquisarei sobre o desenvolvimento e aplicação do ensino do Conjunto dos Números Complexos na educação básica, e venho aqui pedir encarecidamente sua colaboração para o desenvolvimento da pesquisa.

Utilizarei de um formulário para coletar informações sobre sua experiência profissional. Sua contribuição é muito importante para esse estudo, e caso aceite colaborar, sua participação será mantida em sigilo.

Quaisquer outras informações estou a disposição para esclarecimento, através do telefone (**) * ** ****-****, ou pelo e-mail ******************************.

Peço que leia atentamente as informações a seguir, e informe se concorda em participar do estudo.

Desde já agradeço sua gentileza e atenção!

QUESTIONÁRIO

1. Nome Completo.

2. E-mail.

3. Você possui formação em Matemática?

   ( ) Sim.

   ( ) Não.

4. A quanto tempo você leciona?

   ( ) 0 a 5 anos.

   ( ) 5 a 10 anos.

   ( ) 10 anos ou mais.

5. Você tem conhecimento sobre os números complexos?

   ( ) Sim.

( ) Não.

6. Onde você aprendeu sobre este conjunto?

   ( ) Na escola básica.

   ( ) No curso de graduação.

   ( ) Em cursos complementares.

   ( ) De forma autônoma.

7. Em sua formação, os números complexos era...

   ( ) Ensinado como parte da grade do curso, ou de alguma disciplina.

   ( ) Utilizado sem apresentação, como ferramenta para o desenvolvimento de outros conteúdos.

   ( ) Não foi visto e não me lembro de ter sido utilizado.

8. Você já ensinou números complexos durante suas aulas?

   ( ) Sim.

   ( ) Não.

Seção destinada aos professores que possuem experiência no ensino dos números complexos.

Aqui, deseja-se que você nos conte um pouco sobre suas experiências, perspectivas, desejos e receios ao ensinar o conteúdo dos números complexos. Peço que seja o mais didático possível, nosso objetivo é vivenciar através de suas palavras o que deseja nos contar.

1. Poderia dizer como era a abordagem utilizada? (como foi feita a explanação do conteúdo, se utilizou algum método especial, se utilizou algum recurso ou material, dentre outras coisas).

2. Você possui alguma experiência em relação ao ensino desse conjunto que possa apresentar?

3. Qual o material didático que você utilizava? Poderia citar o livro didático e o autor? (neste caso, o mais específico que puder ser quanto a descrição do livro melhor).

4. Você acredita que o ensino dos números complexos deve ser ensinado ou não no ensino básico? Por quê?

5. Você conhece alguma aplicação ou extensão para o conjunto dos números complexos? Se sim, qual(is)?

6. Em qual(is) cidade(s) você já lecionou, ou trabalhou com a disciplina de matemática?

Seção destinada aos professores que não possuem experiência no ensino dos números complexos.

Aqui, deseja-se saber sobre os empecilhos que enfrentou ou enfrenta para ensinar os números complexos. Também, saber sobre suas perspectivas para o ensino deste conjunto futuramente.

1. Se não, por quê?

2. Você acredita que o ensino dos números complexos deve ser ensinado ou não no ensino básico? Por quê?

3. Você conhece alguma aplicação ou extensão para o conjunto dos números complexos? Se sim, qual(is)?

4. Em qual(is) cidade(s) você já lecionou, ou trabalhou com a disciplina de matemática?

APÊNDICE B – TCLE - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado(a) a participar de uma pesquisa intitulada: “NÚMEROS COMPLEXOS: UMA PROPOSTA PARA A ABORDAGEM INVESTIGATIVA DOS NÚMEROS IMAGINÁRIOS”, em virtude da necessidade de elaboração da dissertação de mestrado do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), coordenada pelo(a) Professor(a) Dr. Fábio Silva de Souza.

A sua participação não é obrigatória sendo que, a qualquer momento da pesquisa, você poderá desistir e retirar seu consentimento. Sua recusa não trará nenhum prejuízo para sua relação com o pesquisador ou com a UFVJM.

Os objetivos desta pesquisa são: Geral: Elaborar material didático que forneça aos professores de matemática um plano para realização de suas aulas referentes à descoberta, estruturação e exploração do Conjunto dos Números Complexos. Específicos: Averiguar como o ensino dos números complexos é visto entre os professores de Matemática da região onde a pesquisa será aplicada; Analisar as propostas de abordagem dos Números Complexos através dos livros didáticos utilizados na região; Averiguar os métodos e cenários nos quais os professores de Matemática trabalham os Números Complexos em suas aulas; Propor um cenário investigativo para o ensino e aprendizagem dos Números Complexos; e, Analisar e explorar aplicações para os Números Complexos e seu tratamento em sala de aula; Incentivar a autonomia e a independência do aluno quanto a construção dos conhecimentos matemáticos.

Caso você decida aceitar o convite, será submetido(a) ao(s) seguinte(s) procedimentos: Aplicação de um questionário do *Google Forms*.

Não á riscos relacionados à sua participação, sua identidade será preservada e você deverá ceder apenas alguns minutos de seu tempo para responder o questionário.

O benefício relacionado à sua participação é relativo à aprendizagem, será sua contribuição para o desenvolvimento de um material que reflita sua perspectiva sobre o processo de ensino e aprendizagem dos Números Complexos.

Os resultados desta pesquisa poderão ser apresentados em seminários, congressos e similares, entretanto, os dados/informações pessoais obtidos por meio da sua participação serão confidenciais e sigilosos, não possibilitando sua identificação.

Não há remuneração com sua participação, bem como a de todas as partes envolvidas.

Não está previsto indenização por sua participação, mas em qualquer momento se você sofrer algum dano, comprovadamente decorrente desta pesquisa, terá direito à indenização.

Você receberá uma via deste termo onde constam o telefone e o endereço do pesquisador principal, podendo tirar suas dúvidas sobre o projeto e sobre sua participação agora ou em qualquer momento.

Coordenador(a) do Projeto Alexandre Nascimento Amorim.

APÊNDICE C – DECLARAÇÃO SRE

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DOS VALES DO JEQUITINHONHA E MUCURI
TEÓFILO OTONI – MINAS GERAIS

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

prppg

DECLARAÇÃO

Declaro, para os devidos fins que, a Superintendência Regional de Ensino de Guanhães (MG) está ciente do desenvolvimento da pesquisa intitulada: **"NÚMEROS COMPLEXOS: uma proposta para a abordagem exploratória dos números imaginários"**, a ser desenvolvida por Alexandre Nascimento Amorim, aluno regularmente matriculado no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) pela Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, Campus Mucuri (Teófilo Otoni – MG), orientada pelo Prof. Dr. Fábio Silva de Souza. Bem como, manifesta por meio deste, disponibilidade em encaminhar o *link* de acesso ao questionário de pesquisa, a ser realizado com professores de Matemática da região, através do *e-mail* das instituições. Ao receberem a correspondência eletrônica, o servidor responsável pela manutenção do mesmo irá tomar as medidas possíveis para que os professores tenham acesso ao *link* e possam responder ao questionário.

Guanhães (MG), 24 de maio de 2021.

Iza Pires dos Santos Silva. Diretora Educacional

Assinatura do Responsável – Masp: 949.320-6

(Carimbo se possível) SRE/ Guanhães

Página 1 de 1

APÊNDICE D – PROPOSTA DE MATERIAL

Como o material foi elaborado visando ser explorado juntamente ou a parte da dissertação ele estará disponível nas próximas páginas.

Exploração dos números

COMPLEXOS

PROFMAT UFVJM

SUMÁRIO

Este material de estudos é resultado da pesquisa de dissertação intitulada "Números complexos: uma proposta para a abordagem exploratória do números imaginários", elaborada por Alexandre Nascimento Amorim, discente do curso de Mestrado em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) pela Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, orientado pelo Prof. Dr. Fábio Silva de Souza.

Desejamos um estudo agradável e gratificante.

Teófilo Otoni, 2022.

INTRODUÇÃO

No estudo da Matemática Básica tem-se a análise de potenciação e radiciação. Este conteúdo expande os domínios dos conceitos de aritmética, tornando-se instrumento indispensável para o desenvolvimento da Matemática.

Ao discorrer o estudo do conteúdo citado acima, é comum depararmos com os problemas de raízes enésimas, essas com índice par e radicando negativos. Diante desta situação, os docentes enfatizam no ensino regular que não existe solução para o problema dentro do conjunto dos números reais.

Pense na questão: Qual a solução para $\sqrt{-9}$?

Note que não existe nenhum número real no qual o produto com ele mesmo resulte em -9. E este problema se alastra para outros temas na área da Matemática.

Vale relembrar que o resultado está sendo procurado dentro do conjunto dos números reais, composto pelos subconjuntos dos números naturais, inteiros, racionais e irracionais. Tais conjuntos surgiram da necessidade do homem em solucionar problemas cotidianos e, ao decorrer do tempo, temas mais abstratos.

O problema de obter $\sqrt{-9}$ é uma situação que requer um passo inovador em referência a visão limitada que o conjunto dos números reais proporciona neste momento.

Dentro do estudo das propriedades de radiciação, destaca-se a que expressa a seguinte verdade: $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$. Ao aplicá-la na situação imposta temos:

$$\sqrt{-9} = \sqrt{9.(-1)} = \sqrt{9}.\sqrt{-1} = 3.\sqrt{-1}.$$

E aí, melhorou?

Um antigo matemático e filósofo chamado René Descartes, nascido em 1596 na França, se deparou com um problema semelhante ao discutido até o momento. Descartes usou o termo imaginário para denominar números que possuíam como fator $\sqrt{-1}$. Na verdade, Descartes não foi o primeiro e nem o último matemático a discutir a existência destes números.

A Matemática foi desenvolvida com base em solucionar problemas encontrados pelo homem, e este problema para $\sqrt{-1}$ já era tema de discussões há muitos séculos. Porém, as abordagens propostas eram vistas por meio de soluções algébricas e Descartes inovou ao pensar em uma perspectiva geométrica para representar estes números, que será evidenciada ao longo deste estudo.

Com a unidade imaginária denominada como "*i*", ou seja, $\boldsymbol{i} = \sqrt{-\mathbf{1}}$, é possível reescrever o problema inicial:

$$\sqrt{-9} = \sqrt{9.(-1)} = \sqrt{9}.\sqrt{-1} = 3.\sqrt{-1} = 3i$$

É válido destacar a relação existente entre o conjunto dos números complexos e o conjunto dos números reais. Salienta-se que o conjunto dos números naturais está contido no conjunto dos números inteiros, e este contido no conjunto dos números racionais. A união deste com os irracionais determinam o conjunto dos números reais.

Por sua vez, estes conjuntos foram criados para sanar as deficiências apresentadas pelo outro. Assim, pode-se dizer que o conjunto dos reais está contido no conjunto dos complexos. Em linguagem matemática temos:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

$$\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Os números complexos possuem uma forma algébrica de fácil entendimento. Chamamos $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{bi}$ um número complexo onde a e b são números reais, sendo $\boldsymbol{z}$ apenas uma representação para este novo número. Assim, poderemos também utilizar outras letras para diferenciar os números complexos. Quando $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$, temos um número como $\mathbf{3}\boldsymbol{i}$, caso particular que se nomeia número imaginário puro, mas quando $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$ a parte imaginária não existe, ou seja, este número é chamado real.

Após os estudos de Descartes, outros matemáticos associaram estes números a um plano de coordenadas isomorfo ao plano cartesiano. O plano de Argand-Gauss, ou plano complexo, difere-se nas representações de seus eixos antes denominados de eixo das abcissas (eixo x – horizontal) e ordenadas (eixo y – vertical) estes receberão um novo nome e uma nova perspectiva.

O Plano Cartesiano é uma ferramenta matemática criada por René Descartes composto por duas retas perpendiculares. Estas retas nomeadas como eixo das abcissas e eixo das ordenadas geram a origem do plano em sua interseção. Seu principal uso está em dispor a localização de pontos em um sistema de coordenadas.

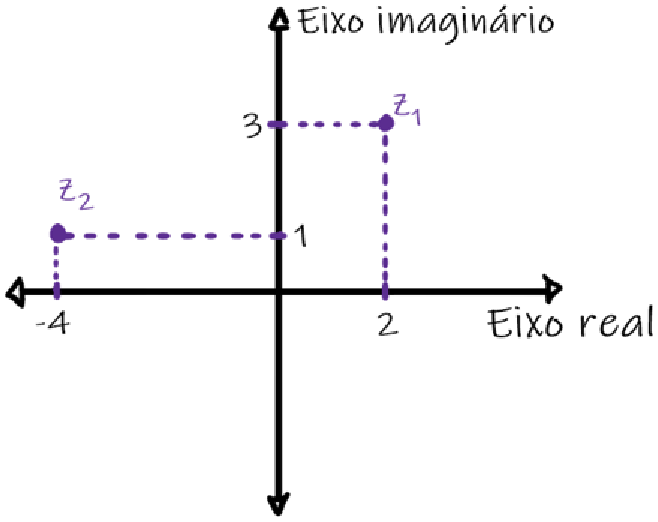
No plano cartesiano, estes eixos eram uma representação dos números reais. Por sua vez, no plano complexo será necessário associar o termo imaginário para representar os números complexos. Ao eixo horizontal associaremos a parte real do número complexo, e ao eixo vertical a parte imaginária.

Com a ajuda deste plano, é possível representar os números complexos através de uma interpretação geométrica, utilizando o mesmo princípio de coordenadas cartesianas, com $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$. Por exemplo, considere os números complexos $\boldsymbol{z_1} = \mathbf{2} + \mathbf{3}\boldsymbol{i}$ e $\boldsymbol{z_2} = -\mathbf{4} + \boldsymbol{i}$, temos que:

Número complexo	Parte real (a)	Parte Imaginária (b)
$\boldsymbol{z_1 = 2 + 3i}$	2	3
$\boldsymbol{z_2 = -4 + i}$	-4	1

Então sua representação geométrica seria:

Figura 1: Representação geométrica dos complexos z_1 e z_2.



Fonte: Autor, 2021.

Fácil, não é?!

UM POUCO DE HISTÓRIA

Como já mencionado antes outros matemáticos além de Descartes foram essenciais para o desenvolvimento dos números complexos. A discussão começou há cerca de 2100 anos atrás com Herão de Alexandria. Em um de seus estudos, ele acaba encontrando a $\sqrt{-1}$ e equivocadamente a substitui por 1 em seus cálculos. Herão não percebeu o grande erro que estava cometendo e nem a grandiosidade que este número representaria.

Herão de Alexandria
(10 d. C – 70 d. C)
Matemático grego.

Fonte: Adaptado de http://www.xtec.es/~jcanadil/imatges/personatges/actius/Heron.jp

Cerca de 200 anos se passaram e Diofanto encontra um problema semelhante ao de Herão, porém, ele assume o erro que encontrou, mas não se aprofunda nas possibilidades que geraria.

Era comum na antiguidade que grandes matemáticos desenvolvessem pesquisas e as mantivessem em segredo com receios da ocorrência de plágios de suas obras. Neste mesmo tempo, era normal disputas entre estes estudiosos, seja para atrair a atenção de investidores para suas pesquisas ou simplesmente para alimentar seus egos.

Niccolò Fontana Tartaglia
(1500 – 1557)
Matemático italiano.

Fonte: Adaptado de https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Niccol%C3%B2_Tartaglia_Quesiti_et_inventioni_diverse.jpg

Alguns matemáticos como Del Ferro e seu discípulo Del Fiore desenvolviam em segredo grandes trabalhos, e Del Ferro acabou um dia encontrando a solução para um problema sobre equações cúbicas que por muito tempo estava sendo um problema para os matemáticos. Com medo de sua descoberta ser plagiada, Del Ferro manteve segredo, porém seu discípulo não. Desafiou Tartaglia, matemático da época a resolução de uma equação deste tipo.

Del Fiore tinha certeza de que venceria pois conhecia o método de Del Ferro, porém Tartaglia também tinha desenvolvido algo semelhante, e assim venceu o desafio.

Cardando foi outro matemático que se apossou das ideias de seus colegas. Fascinado pelo desempenho de Tartaglia, adquiriu junto a ele o conhecimento para a solução de equações cúbicas, mas diferente de seus colegas preferiu publicar a descoberta em seu livro *Ars Magna* (1545).

Girolamo Cardano
(1501 – 1576)
Filósofo, astrônomo, matemático e físico italiano.

Fonte: Adaptado de https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Jer%C3%B4me_Cardan.jpg

Neste momento, você deve estar se perguntando onde estão os números complexos, mas a sua descoberta abrange muito mais do que a exploração da $\sqrt{-1}$. Na verdade, elas estão presentes nas afirmações feitas por Cardano e Bombelli, sobre a existência de raízes polinomiais que não poderiam ser encontradas dentro do conjunto dos números reais. No caso, eles sabiam que uma equação cúbica possuía três raízes, mas não sabiam como encontrá-las.

Muito se caminhou até que enfim Descartes tivesse a possibilidade de ter seu papel no desenvolvimento do conjunto. Cabe ao matemático as primeiras fagulhas de uma abordagem geométrica para os números complexos. Apesar de não ter sido o principal percursor dessa abordagem, seus trabalhos serviram de inspiração para que outros matemáticos chegassem ao desenvolvimento do tema. Vale ainda ressaltar que o termo *"imaginário"* foi criado por Descartes.

René Descarte
(1596 – 1650)
Matemático, físico e filósofo francês.

Fonte: Adaptado de https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Frans_Hals_-_Portret_van_Ren%C3%A9_Descartes.jpg

Gauss foi quem uniu todas estas contribuições e chegou ao desfecho que chamamos atualmente de Teorema Fundamental da Álgebra que descreve o seguinte: *"Todo e qualquer polinômio com coeficientes complexos, com uma única variável e grau n≥1, possui ao menos uma raiz complexa"*. Em termos mais simples, podemos interpretar o teorema de modo que, não importa qual o grau do polinômio, existirá um número de raízes igual a este grau, sendo elas reais ou complexas. Portanto, a existência dos números complexas é averiguada. Perceba que Gauss compilou os estudos feitos por mais de 1700 anos até a sua época, chegando na mesma afirmação já feita por Cardano e Bombelli, porém, ele foi capaz de demonstrar tal afirmação. Cabe a ele o nome **Números Complexos.**

Johann Carl Friedrich Gauss
(1777 – 1855)
Matemático e físico alemão.

Fonte: Adaptado de https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Carl_Friedrich_Gauss.jpg

É fascinante perceber como a Matemática não surgiu de um momento para o outro, mas da união de diversos estudos ao longo do tempo, de diferentes mentes que procuravam uma solução para algum problema da sociedade.

OBSERVAÇÃO

Diofanto de Alexandria (aproximadamente 201 -284). Matemático grego.

Scipione Del Ferro (1465 - 1526). Matemático italiano.

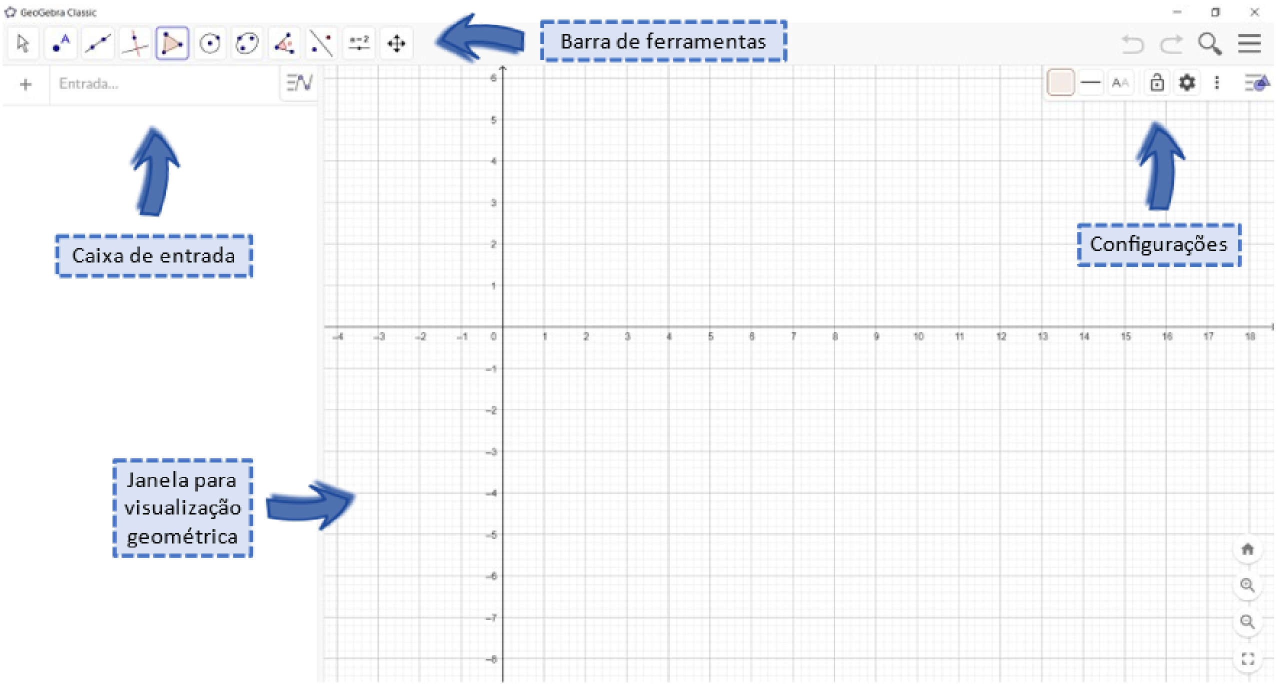
Antonio Maria Del Fiore (século XV - XVI). Matemático italiano.

Rafael Bombelli (1526 - 1572). Matemático italiano.

GEOGEBRA

Para uma exploração mais dinâmica e de fácil manipulação, a partir deste ponto será utilizado o *software Geogebra*, o qual nos permitirá visualizar e manipular noções algébricas no âmbito geométrico.

Figura 2: Apresentação da interface básica do Geogebra.

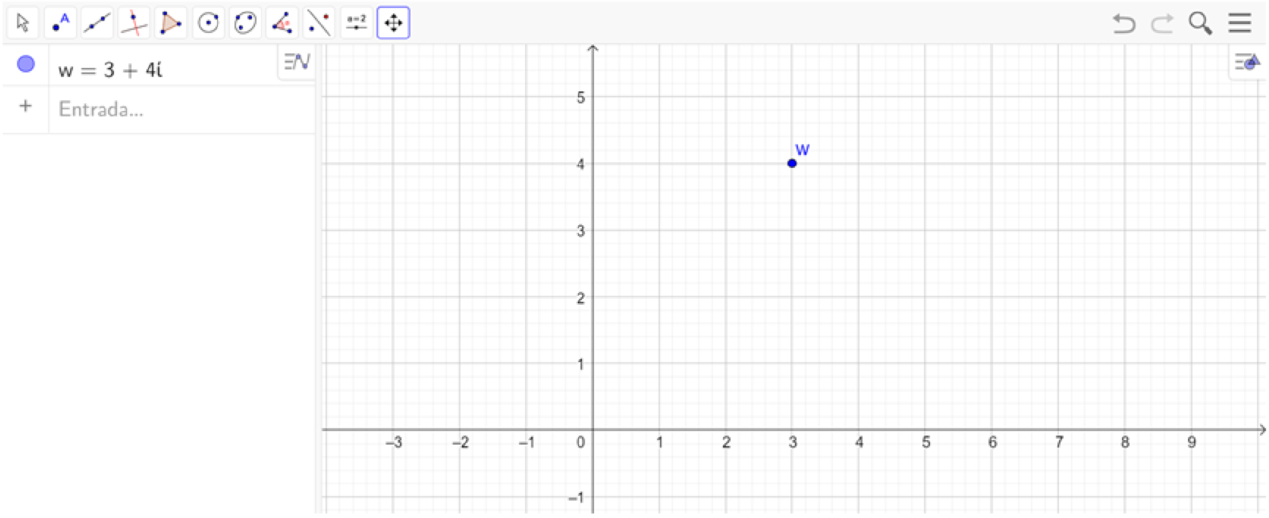


Fonte:Autor, 2021.

O GeoGebra é um software de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos em um único pacote fácil de se usar. O GeoGebra possui uma comunidade de milhões de usuários em praticamente todos os países. O GeoGebra se tornou um líder na área de softwares de matemática dinâmica, apoiando o ensino e a aprendizagem em Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática.
Descrição e download disponível em:
https://www.geogebra.org/

Não é necessário fazer nenhum tipo de configuração prévia para trabalhar a representação de números complexos, apesar do software possuir uma gama de possibilidades, ao inserir o número automaticamente será reconhecida o trabalho no plano complexo. Experimente inserindo o número $\boldsymbol{w = 3 + 4i}$ na janela de entrada e clique "enter".

Figura 3: Representação do número complexo w

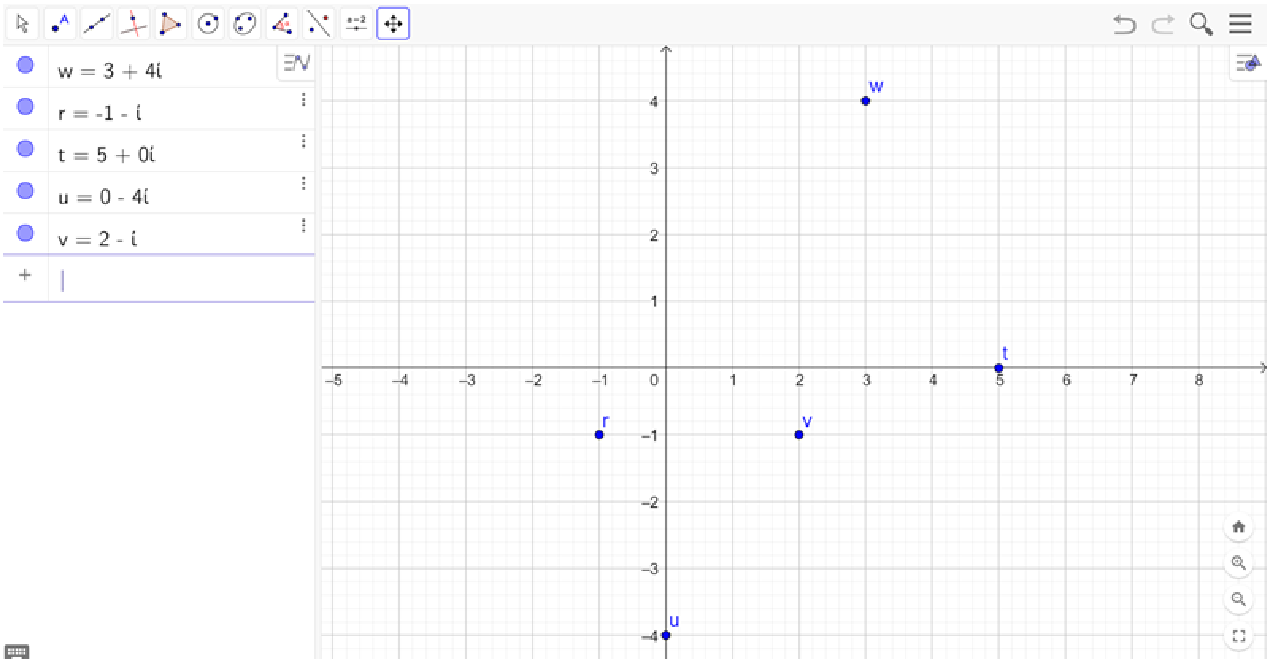


Fonte:Autor, 2021.

O ponto que surge no plano é o afixo do número complexo escolhido. Experimente com outros números complexos, como por exemplo:

$$\boldsymbol{r = -1 - i, t = 5 + 0i, u = 0 - 4i, \ \ v = 2 - i}.$$

Figura 4: Representações dos números complexos w, r, t, u, v



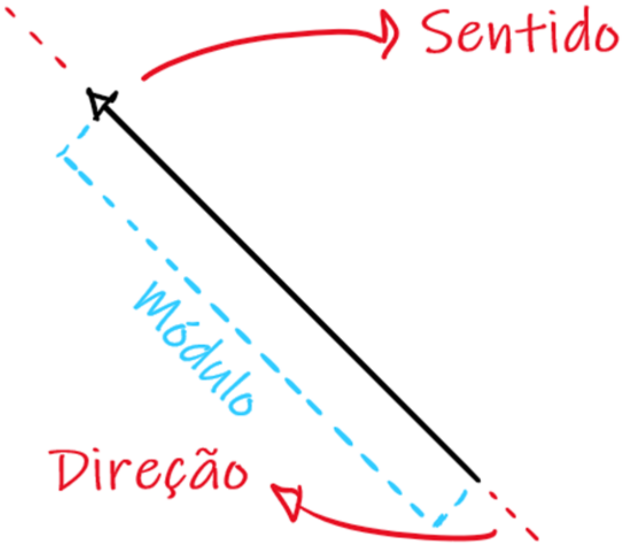
Fonte:Autor, 2021.

VETORES

É interessante pensar que esta representação por coordenadas de um número complexo permite a análise das operações presentes no conjunto, porém é necessário um conhecimento básico sobre vetores.

Sendo assim, entende-se por vetor um segmento de reta orientado que possui direção, sentido e módulo (tamanho). A utilização de vetores está associada a expressão de grandezas vetoriais; assim, só pode ser completamente compreendida se forem conhecidas seu valor numérico, seu sentido (pra cima ou para baixo) e a direção que operam.

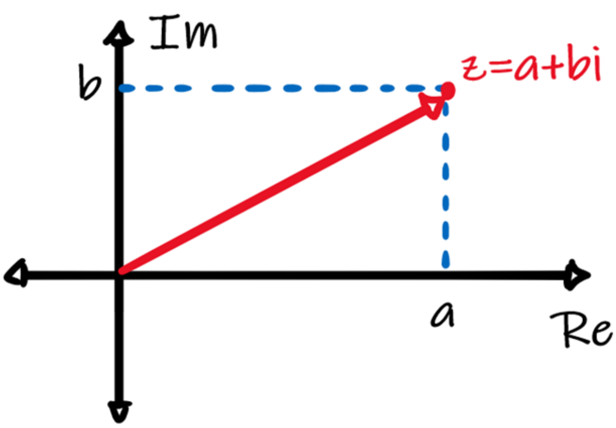
Figura 5: Representação de um vetor.



Fonte: Autor, 2021.

Abaixo, pode-se observar o número complexo representado no plano de *Argand-Gauss,* definido por um vetor com extremidades na origem do plano e no afixo do número. Veja na figura 6.

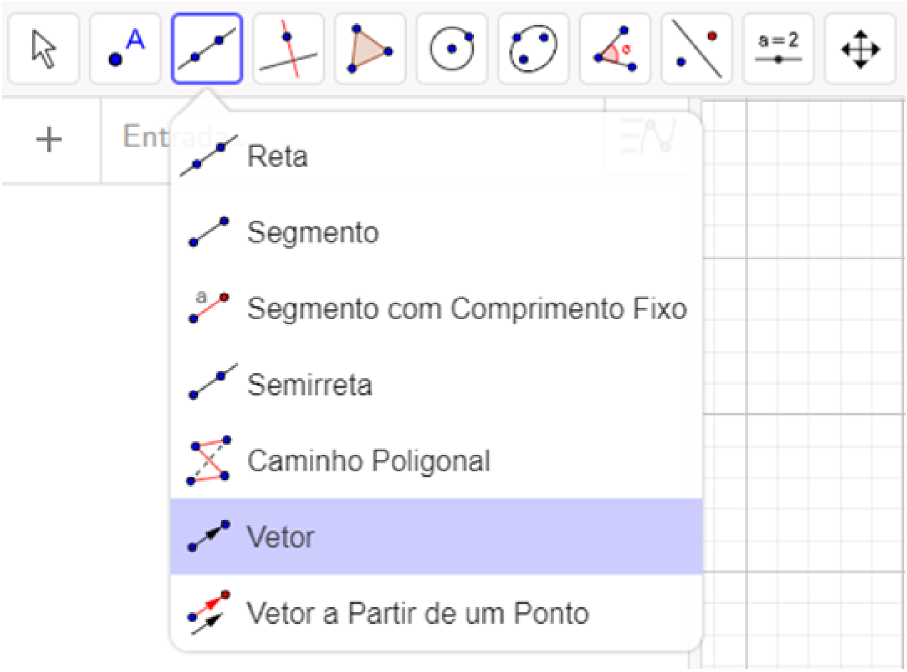
Figura 6: Representação vetorial do complexo z.



Fonte: Autor, 2021.

Através do Geogebra, é possível visualizar essa representação vetorial. Inicialmente acesse a ferramenta vetor.

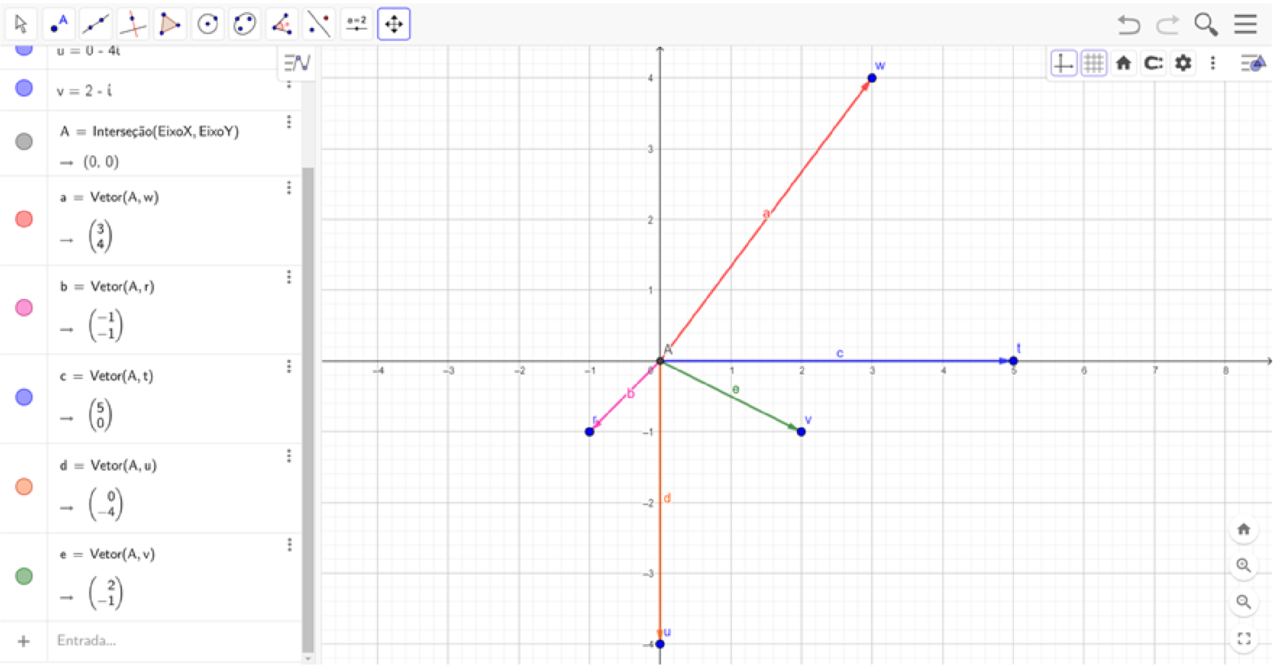
Figura 7: Acessando a ferramenta vetor



Fonte: Autor, 2021.

Escolha um número complexo já representado no plano e a seguir clique nas extremidades, origem e afixo, respectivamente. Observe na figura 8 as representações vetoriais dos números complexos da figura 4.

Figura 8: Vetores associados aos números complexos



Fonte: Autor, 2021.

Todas as vezes que você criar um novo elemento no plano, sua representação algébrica aparecerá também, ou, se inserir no campo algébrico, o geométrico aparecerá. Este é o caso dos vetores representados a esquerda da imagem.

Observe por exemplo o vetor indicado como $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{vetor}\,(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{w}) \implies \begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \end{pmatrix}$, neste caso, o $\boldsymbol{vetor}\,(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{w})$ indica que o vetor em questão tem extremidades no ponto $\boldsymbol{A}$ (origem do plano) e $\boldsymbol{w}$ (afixo do número complexo).

Já no caso da expressão $\begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \end{pmatrix}$, trata-se de uma representação matricial de fácil entendimento. Ao expressar um vetor por meio de uma matriz $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ indica-se as coordenadas o qual o afixo está no plano.

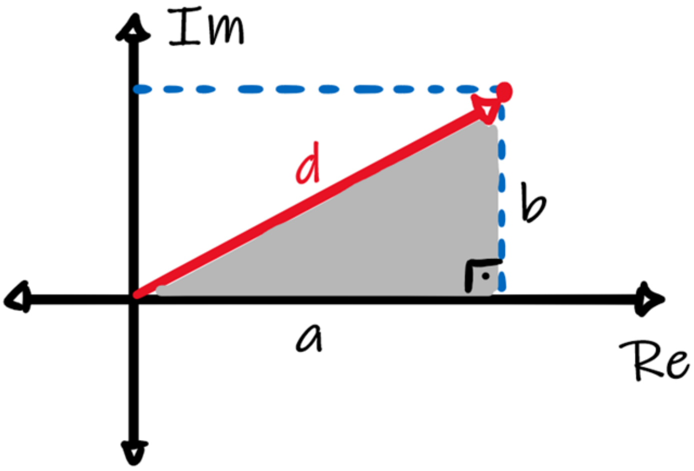
É interessante observar a versatilidade que a representação de um número complexo possui, e todas elas conversam entre si, permitindo visualizar operações dentro do conjunto de diversos modos.

MÓDULO

O conceito básico de vetor citado anteriormente permite o cálculo de seu módulo. Em outras palavras, a distância do afixo a origem do plano. Para esta investigação, suponha um número complexo $\boldsymbol{z = a + bi}$, com $\boldsymbol{a, b}$ reais positivos. Uma possível ilustração no plano de *Argand-Gauss* para situação seria dada pela figura 6.

Observe que a distância $(\boldsymbol{d})$ procurada é dada pela hipotenusa do triângulo retângulo de catetos medindo $\boldsymbol{a}$ ***e*** $\boldsymbol{b}$ (figura 9). Logo, pelo Teorema de Pitágoras o cálculo se torna fácil.

Figura 9: Representação do módulo (d) de um número complexo.



Fonte: Autor, 2021.

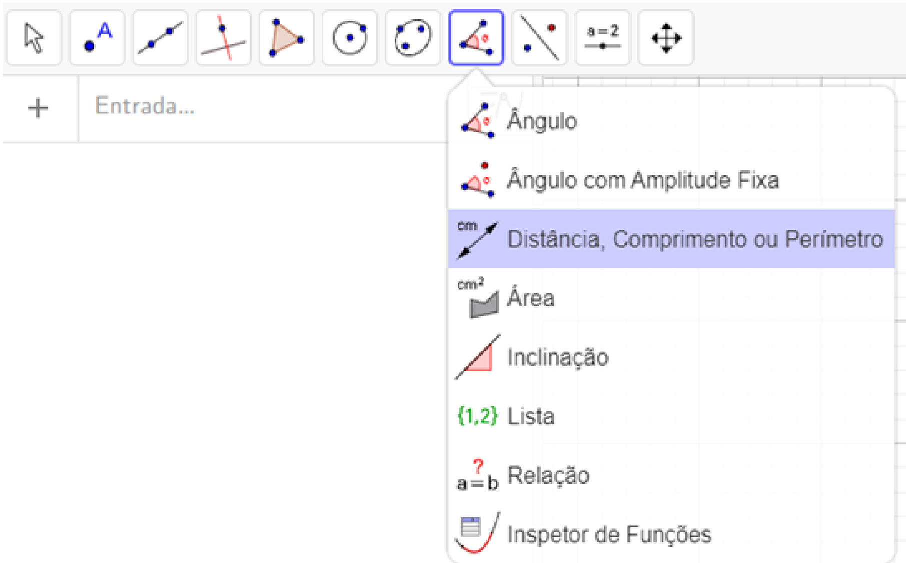
$$\boxed{\boldsymbol{d^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow d = \sqrt{a^2 + b^2}}}$$

Essa distância nomeada *"d"* é o módulo do vetor, e diante do estudo aqui desenvolvido pode-se afirmar que se trata do módulo de um número complexo.

Para fim de notações, não se indica como *"d"* a distância encontrada, mas sim por $|\boldsymbol{z}|$ ***ou*** $\boldsymbol{\rho}$ (Rô – letra grega), ou seja, $|\boldsymbol{z}| = \boldsymbol{\rho} = \sqrt{\boldsymbol{a^2 + b^2}}$. Perceba que não é necessária a representação geométrica do número complexo para o cálculo de seu módulo, basta conhecer os coeficientes.

Por meio do Geogebra, a determinação do valor deste módulo se torna mais simples. Neste caso o software realiza o cálculo para você. Basta a utilização de outra ferramenta, conforme as figuras 10 e 11.

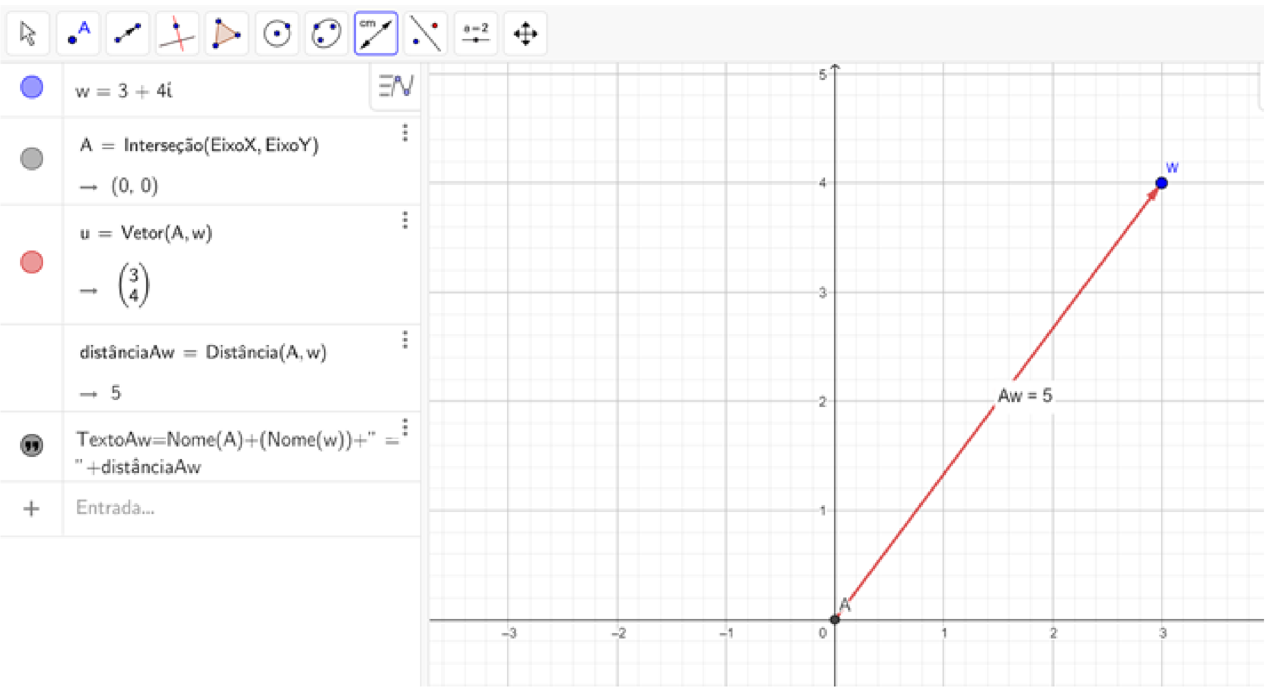
Figura 10: Acessando a ferramenta distância



Fonte: Autor, 2021.

Selecione a opção distância e clique nos extremos do vetor. Por exemplo, sabemos que o módulo de $\boldsymbol{w = 3 + 4i}$ é dado por $\boldsymbol{\rho = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5}$. Experimente agora no aplicativo (figura 11).

Figura 11: Módulo do número complexo



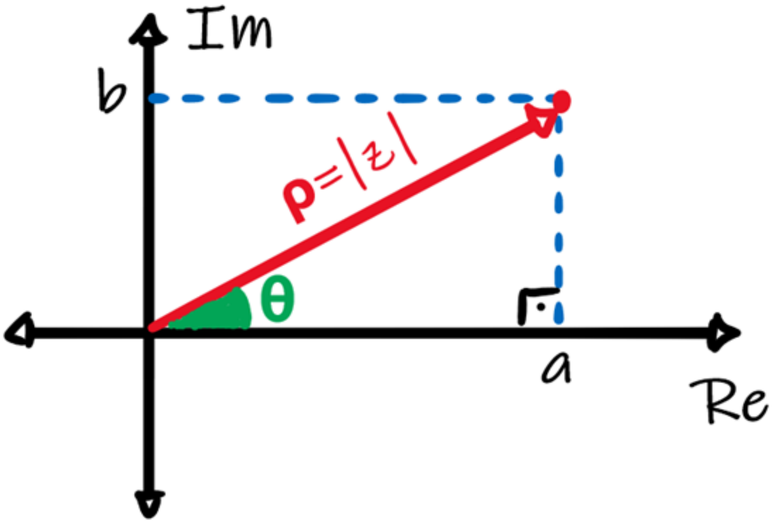
Fonte: Autor, 2021.

$\boldsymbol{Aw = 5}$ representa a distância, ou seja, o módulo do número complexo.

ARGUMENTO

Na representação geométrica, outro elemento relevante de um número complexo é o argumento. Trata-se do ângulo formado pelo eixo real e pela rotação do vetor no sentido anti-horário.

Figura 12: Representação do argumento de um número complexo.



Fonte: Autor, 2021.

Este ângulo que aqui chamado de “θ” (teta – letra grega) é denominado argumento de um número complexo e seu valor pode ser encontrado por meio de razões trigonométricas. Você sabe dizer como?

Pense na trigonometria no triângulo retângulo e relembre as razões seno e cosseno em perspectiva ao ângulo teta e ao triângulo retângulo da figura 12. Portanto:

$$\boldsymbol{Sen\ \theta = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} = \frac{b}{\rho}}$$

$$\boldsymbol{Cos\ \theta = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa} = \frac{a}{\rho}}$$

Assim, se houver conhecimento dos valores de seno e cosseno pode-se determinar o valor do argumento com o auxílio de uma tabela trigonométrica. Por outro lado, podemos utilizar de um modo mais sofisticado o cálculo:

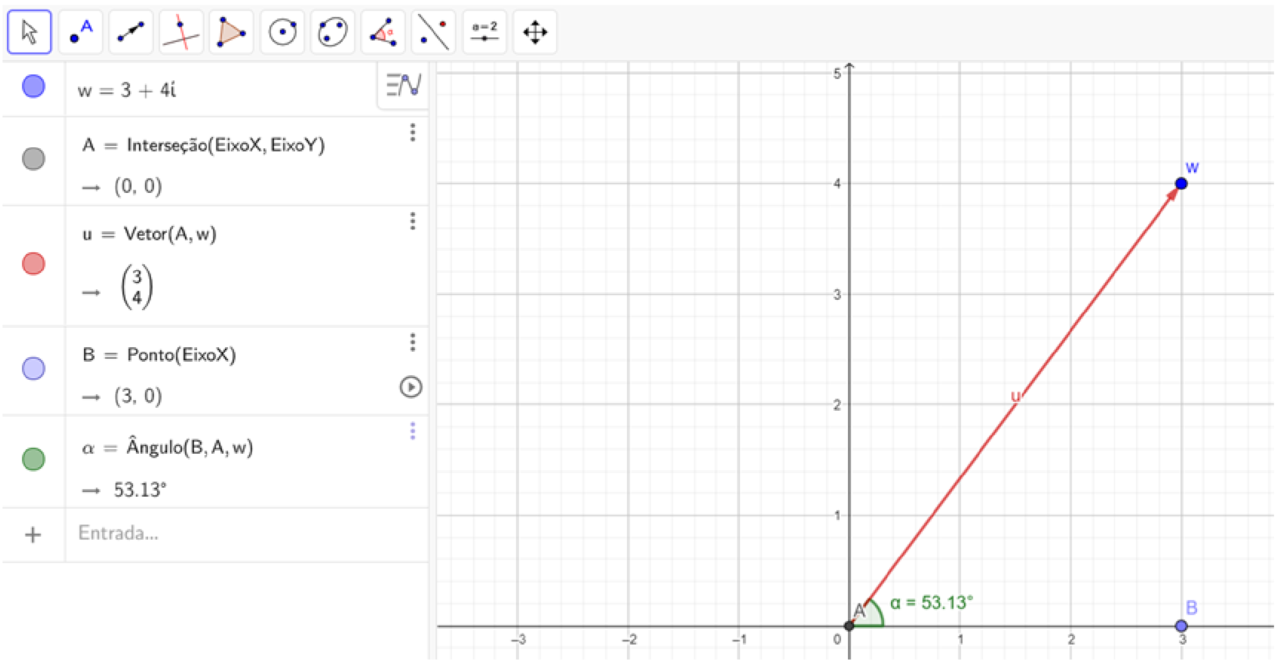
$$\boldsymbol{arc\ tg\left(\frac{b}{a}\right) = \theta.}$$

Criada com o objetivo de auxiliar nos cálculos que compreendem problemas trigonométricos, uma tabela trigonométrica é uma lista de valores para os senos, cossenos e tangentes de ângulos. Como na Antiguidade não havia calculadora, essa era uma ferramenta de extrema importânica.

Para calcular o valor do argumento através do Geogebra, siga as seguintes orientações:

i. Crie um ponto qualquer com abcissa positiva não nula;
ii. Selecione a ferramenta ângulo;
iii. Clique no ponto criado, na origem do plano e no afixo do número complexo, nessa ordem;
iv. A medida do ângulo aparecerá (figura 13).

Figura 13: Argumento do número complexo



Fonte: Autor, 2021.

O cálculo para o argumento do número $\boldsymbol{w = 3 + 4i}$ poderia ser realizado também manualmente utilizando a trigonometria já mencionada. Como já sabemos:

$$|w| = \rho = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$Sen\ \theta = \frac{b}{\rho} = \frac{4}{5} = 0,8$$

$$Cos\ \theta = \frac{a}{\rho} = \frac{3}{5} = 0,6$$

Analisando a tabela trigonométrica constata-se que o ângulo desejado é aproximadamente **53°**.

Outro meio seria a utilização do arco tangente. Neste caso o uso de uma calculadora seria conveniente. Basta calcular:

$$\boldsymbol{arc\,tg}\left(\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}\right) = \boldsymbol{tan^{-1}}\left(\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}\right) = \mathbf{53,13°}$$

Exercite um pouco o cálculo da distância e do argumento através do aplicativo. Utilize os números complexos aqui já listados ou outros. Aproveite para treinar seu cálculo, realizando o procedimento de modo tradicional com o auxílio de uma tabela trigonométrica ou uma calculadora e verifique os resultados através do Geogebra.

FORMA TRIGONOMÉTRICA

Vale neste ponto demonstrar um novo modo para escrever os números complexos, denominado forma trigonométrica. Considere as relações estabelecidas anteriormente junto as razões seno e cosseno.

$$\boldsymbol{Sen\ \theta = \frac{b}{\rho} \Rightarrow b = \rho . sen\ \theta}$$

$$\boldsymbol{Cos\ \theta = \frac{a}{\rho} \Rightarrow a = \rho . cos\ \theta}$$

Assim, substituindo as novas representações de a e b no número complexo $\boldsymbol{z = a + bi}$ temos $\boldsymbol{z = \rho . cos\ \theta + i . \rho . sen\ \theta}$. Colocando $\boldsymbol{\rho}$ em evidência temos por fim:

$$\boldsymbol{z = \rho . (cos\ \theta + i . sen\ \theta)}$$

Esta é a **forma trigonométrica** de um número complexo, também conhecida como forma polar.

Exemplo: Escreva na forma trigonométrica o número complexo $\boldsymbol{z = 2 + 2i}$.

Primeiramente calcule o módulo:

$$\boldsymbol{\rho = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}}$$

Agora,

$$\boldsymbol{Sen\ \theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} . \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\boldsymbol{Cos\ \theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} . \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Pense qual ângulo que possui o valor de seno e cosseno iguais à $\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}}$. *Pensou? Certamente você pensou em 45º.*

Assim,

$$\boldsymbol{z = \rho . (cos\ \theta + i . sen\ \theta)}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow\ z = 2\sqrt{2} . (cos\ 45° + i . sen\ 45°).}$$

Com este conhecimento você poderá partir da forma trigonométrica e chegar a forma algébrica.

OPERAÇÕES

Ao definir um número complexo em sua forma algébrica dada pelo modelo $\boldsymbol{z = a + bi}$, é possível realizar as operações fundamentais.

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO

É fácil imaginar nesta altura que a soma ou a subtração de dois números complexos no plano se relacione as operações entre vetores. Vamos por exemplo somar os números complexos já mencionados $\boldsymbol{w + v}$. Da análise matricial tem-se:

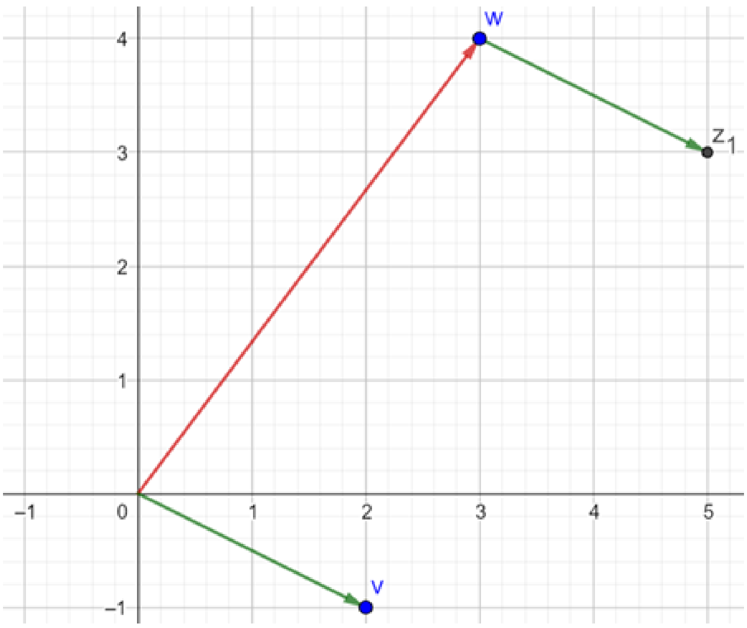
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \pm a \\ b_1 \pm b_2 \end{pmatrix}$$

Então:

$$w + v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = z_1$$

Com auxílio do Geogebra vamos analisar esta operação geometricamente (figura 14).

Figura 14: Soma de dois números complexos por vetores



Fonte: Autor, 2021.

Você também pode inserir no campo de entrada a expressão $\boldsymbol{w + v}$. Observe a criação do ponto $\boldsymbol{z_1}$.

De modo mais semelhante aos processos algébricos habituais tem-se:

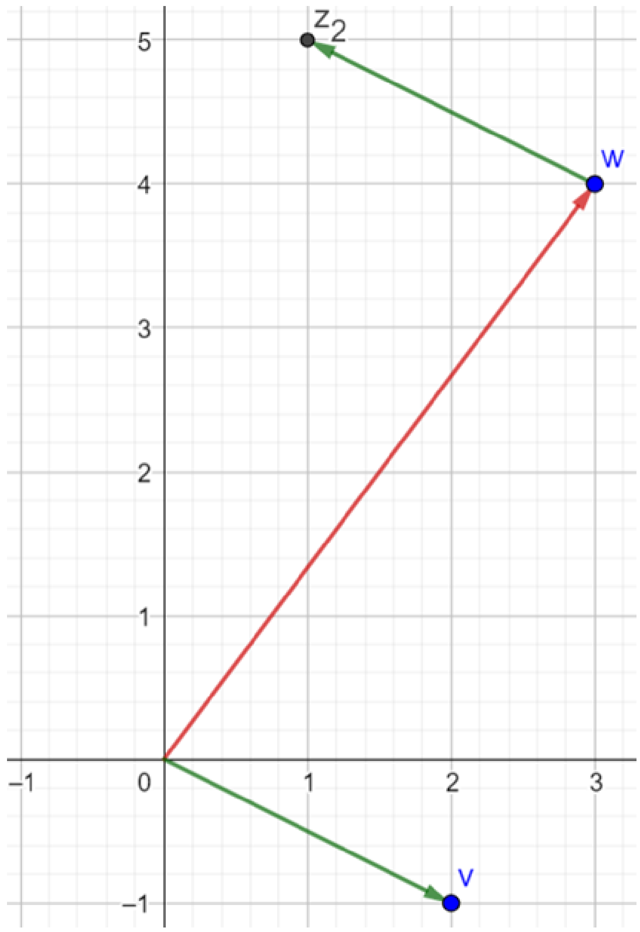
$$w + v = (3 + 4i) + (2 - i) = 5 + 3i$$

Já na subtração tem-se:

$$\boldsymbol{w} - \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{5} \end{pmatrix} = \boldsymbol{z_2}$$

Com auxílio do Geogebra vamos analisar esta operação geometricamente (figura 15).

Figura 15: Subtração de números complexos por vetores



Fonte: Autor, 2021.

Você também pode inserir no campo de entrada a expressão $\boldsymbol{w} - \boldsymbol{v}$. Observe a criação do ponto $\boldsymbol{z_2}$.

De modo mais semelhante aos processos algébricos habituais tem-se:

$$\boldsymbol{w} - \boldsymbol{v} = (\mathbf{3} + \mathbf{4}\boldsymbol{i}) - (\mathbf{2} - \boldsymbol{i}) = \mathbf{1} + \mathbf{5}\boldsymbol{i}$$

PRODUTO

Ao efetuar o produto entre dois números complexos, uma análise vetorial também é possível. São duas situações a destacar:

1) Produto entre um número real e um número complexo. Neste caso pode-se associar com o produto de um vetor por um escalar, como por exemplo:

$$\mathbf{2 \cdot (3 + 4}\boldsymbol{i}\mathbf{) = 6 + 8}\boldsymbol{i}$$

2) Produto entre dois números complexos. Vamos analisar a seguinte situação:

Ao efetuar o produto entre $\boldsymbol{z_1} = (\mathbf{4 + 3}\boldsymbol{i})\ \boldsymbol{e}\ \boldsymbol{z_2} = \boldsymbol{i}$, podemos utilizar a propriedade distributiva da multiplicação. Assim:

$$\boldsymbol{z_1 \cdot z_2} = (\mathbf{4 + 3}\boldsymbol{i})\ \cdot \boldsymbol{i} = \mathbf{4}\boldsymbol{i} + \mathbf{3} \cdot \boldsymbol{i}^2$$

É fácil notar que: $\boldsymbol{i}^2 = (\sqrt{-\mathbf{1}})^2 = -\mathbf{1}$. Assim:

$$\mathbf{4}\boldsymbol{i} + \mathbf{3} \cdot \boldsymbol{i}^2 = \mathbf{4}\boldsymbol{i} + \mathbf{3} \cdot (-\mathbf{1}) = -\mathbf{3} + \mathbf{4}\boldsymbol{i} = \boldsymbol{z_3}$$

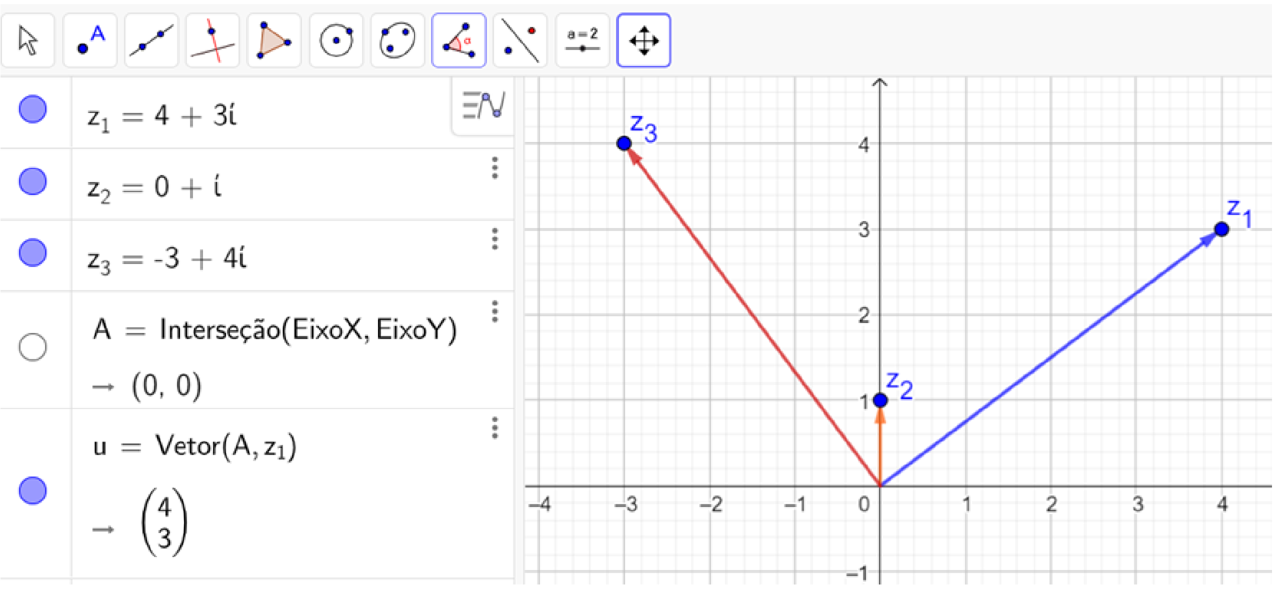
Note a seguinte curiosidade: O produto entre os módulos dos números complexos resulta no módulo da solução. Observe:

$$|\boldsymbol{z_1}| = \sqrt{\mathbf{4^2 + 3^2}} = \mathbf{5}$$

$$|\boldsymbol{z_2}| = \sqrt{\mathbf{0^2 + 1^2}} = \mathbf{1}$$

$$|\boldsymbol{z_3}| = \sqrt{(-\mathbf{3})^2 + \mathbf{4}^2} = \mathbf{5} \Leftrightarrow |\boldsymbol{z_1}| \cdot |\boldsymbol{z_2}| = |\boldsymbol{z_3}|$$

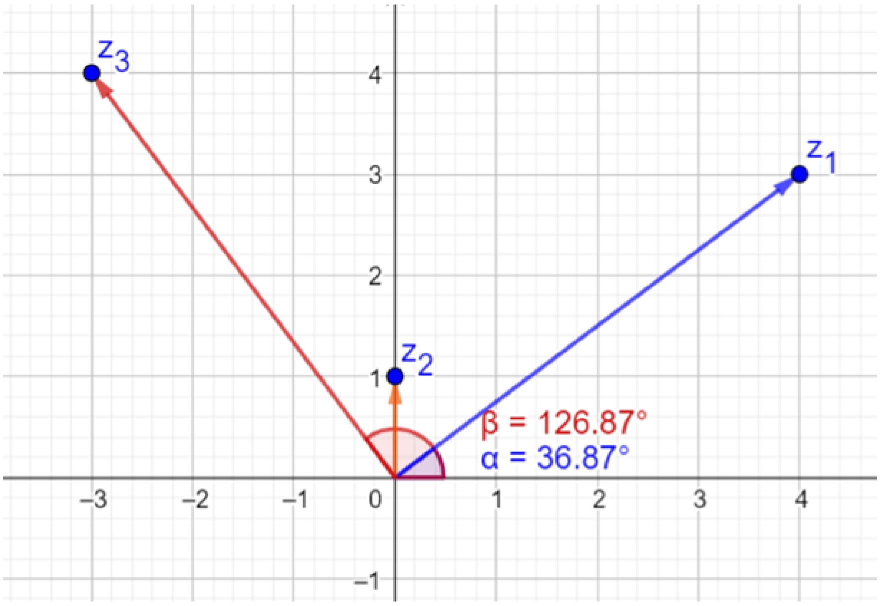
Figura 16: Representação dos fatores da multiplicação e do produto



Fonte: Autor, 2021.

Utilizando o Geogebra, é possível ver com mais clareza que a soma dos argumentos dos fatores é igual ao argumento do produto. Note na figura 17 que o argumento de z_1 mede $\alpha = 36,87°$, enquanto o argumento de z_2 é bem mais notório, medindo $90°$. Quando calculado o argumento de z_3 obtemos $\beta = 36,87° + 90° = 126,87°$.

Figura 17: Soma dos argumentos



Fonte: Autor, 2021.

Com este conhecimento, você poderá desenvolver a multiplicação através das observações geométricas propostas. Uma vez calculado o módulo $|z_1| \cdot |z_2| = |z_3| = 5$, e argumento $\beta = 36,87° + 90° = 126,87°$, basta utilizar a forma trigonométrica já vista.

$$z_3 = \rho.(\cos\beta + i.sen\,\beta)$$

$$\Rightarrow z_3 = 5.(\cos 126,87° + i.sen\,126,87°)$$

Utilizando a tabela trigonométrica e arredondando os valores tem-se:

$$z_3 = 5 \cdot (-0,6 + i \cdot 0,8)$$

$$\Rightarrow z_3 = 5 \cdot \left(-\frac{3}{5} + i \cdot \frac{4}{5}\right)$$

$$\Rightarrow z_3 = -3 + 4i$$

Note que podemos generalizar este resultado do seguinte modo: Sejam z_1 e z_2 números complexos não nulos de módulos ρ_1 e e ρ_2 e argumentos e θ_1 e θ_2. Assim estes números podem ser representados como:

$$z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i.sen\,\theta_2)$$

$$z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i.sen\,\theta_2)$$

Pelo desenvolvimento apresentado pode-se afirmar que:

$$\boxed{z_1 . z_2 = \rho_1 \rho_2 \left[\cos\left(\theta_1 + \theta_2\right) + \; i . sen\left(\theta_1 + \theta_2\right)\right]}$$

DIVISÃO

Após as explicações, espera-se que você deduza que o caso da divisão se assemelha à multiplicação. Porém, destacamos que ao dividir os módulos de dois números complexos, é relevante respeitar seus papéis de dividendo e divisor, respectivamente, resultando o módulo do quociente desta divisão.

Observe:

- Módulo $\rightarrow \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{5}{1} = 5$
- Argumento $\rightarrow 90° - 36,87° = 53,13°$

Assim, basta utilizar a forma trigonométrica:

$$z_3 = \rho . (\cos \beta + i . sen \, \beta)$$
$$\Longrightarrow z_3 = 5 . (\cos 53,13° + i . sen \, 53,13°)$$

Utilizando a tabela trigonométrica e arredondando os valores tem-se:

$$z_3 = 5 \cdot (0,6 + i \cdot 0,8)$$
$$\Longrightarrow z_3 = 5 \cdot \left(-\frac{3}{5} + i \cdot \frac{4}{5}\right)$$
$$\Longrightarrow z_3 = 3 + 4i$$

Outra abordagem seria o cálculo através da manipulação algébrica:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4 + 3i}{i}$$

É válido notar é que $i = \sqrt{-1}$, ou seja, a divisão possui um radical no denominador. Por meio dos conhecimentos de racionalização pode-se desenvolver:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4 + 3i}{i} = \frac{4 + 3 \cdot \sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} \cdot \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = \frac{4 \cdot \sqrt{-1} + 3 \cdot (-1)}{-1} = 4 \cdot \sqrt{-1} + 3 = 3 + 4i$$

Veja que, quando o denominador for um número complexo composto pela parte imaginária, será necessário o processo de racionalização. Portanto, é válido apresentar o conceito de conjugado de um número complexo.

Dado um número complexo $z = a + bi$, seu conjugado é dado por $z = a - bi$, ou seja:

- O conjugado de $z = 12 + i$ é $z = 12 - i$.
- O conjugado de $z = -20 - 9i$ é $z = -20 + 9i$.

Perceba que a ideia é eliminar a unidade imaginária, ou seja, raiz do denominador. Daí o fato de multiplicar no exemplo visto anteriormente por $\frac{i}{i}$, pois este resultado é igual a 1, elemento neutro da multiplicação. Seguindo a ideia de racionalização, em geral sendo o denominador na forma $a + bi$ a divisão será multiplicada por $\frac{a-bi}{a-bi}$.

Note que se pode generalizar este resultado do seguinte modo: Sejam z_1 e z_2 números complexos não nulos de módulos ρ_1 e ρ_2 e argumentos θ_1 e θ_2. Assim, estes números podem ser representados como:

$$z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i.sen\,\theta_2)$$
$$z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i.sen\,\theta_2)$$

Pelo desenvolvimento apresentado pode-se afirmar que:

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i.sen\,(\theta_1 - \theta_2)]}$$

POTÊNCIAS DE i

Você se lembra que agora a pouco falamos que $i^2 = -1$?

Podemos pensar assim para outras potências de *i*. Observe:

- $i^0 = 1$
- $i^1 = i$
- $i^2 = -1$
- $i^3 = i^2.i = (-1).i = -i$
- $i^4 = i^2.i^2 = (-1).(-1) = 1$

Observe que a cada grupo de quatro potências de *i* repetimos a sequência de resultados: $1, i, -1, -i$. Assim, o padrão continua.

Seja bem intuitivo e pense: qual o valor de $\boldsymbol{i^{70}}$?

Basta pensarmos nos grupos de quatro, assim, se dividirmos $\mathbf{70 \div 4}$ *obtemos 17 e resto 2. Ou seja, o grupo se repetirá 17 vezes e concluíra na segunda potência de i. Portanto,* $\boldsymbol{i^{70}} = \boldsymbol{i^{2}} = \mathbf{-1}$.

Muito tranquilo, não é?!

DE MOIVRE

Considere a seguinte equação composta por um polinômio do terceiro grau, $\boldsymbol{x^3 + 1 = 0}$. A equação poderia ser desenvolvida de modo a obter:

$$\boldsymbol{x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x^3 = -1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-1} \Rightarrow x = -1}$$

Esta provavelmente seria a proposta de solução esperada dentro do conjunto dos números reais, porém, em 1799 Gauss defendeu em sua tese de doutorado o Teorema Fundamental da Álgebra: *"Todo e qualquer polinômio com coeficientes complexos, com uma única variável e grau n≥1, possui ao menos uma raiz complexa"*. Em termos mais simples, o teorema afirma que qualquer polinômio de uma variável e grau maior que 1 possui o número de raízes iguais em mesmo número que seu grau, sendo elas reais puras ou complexas.

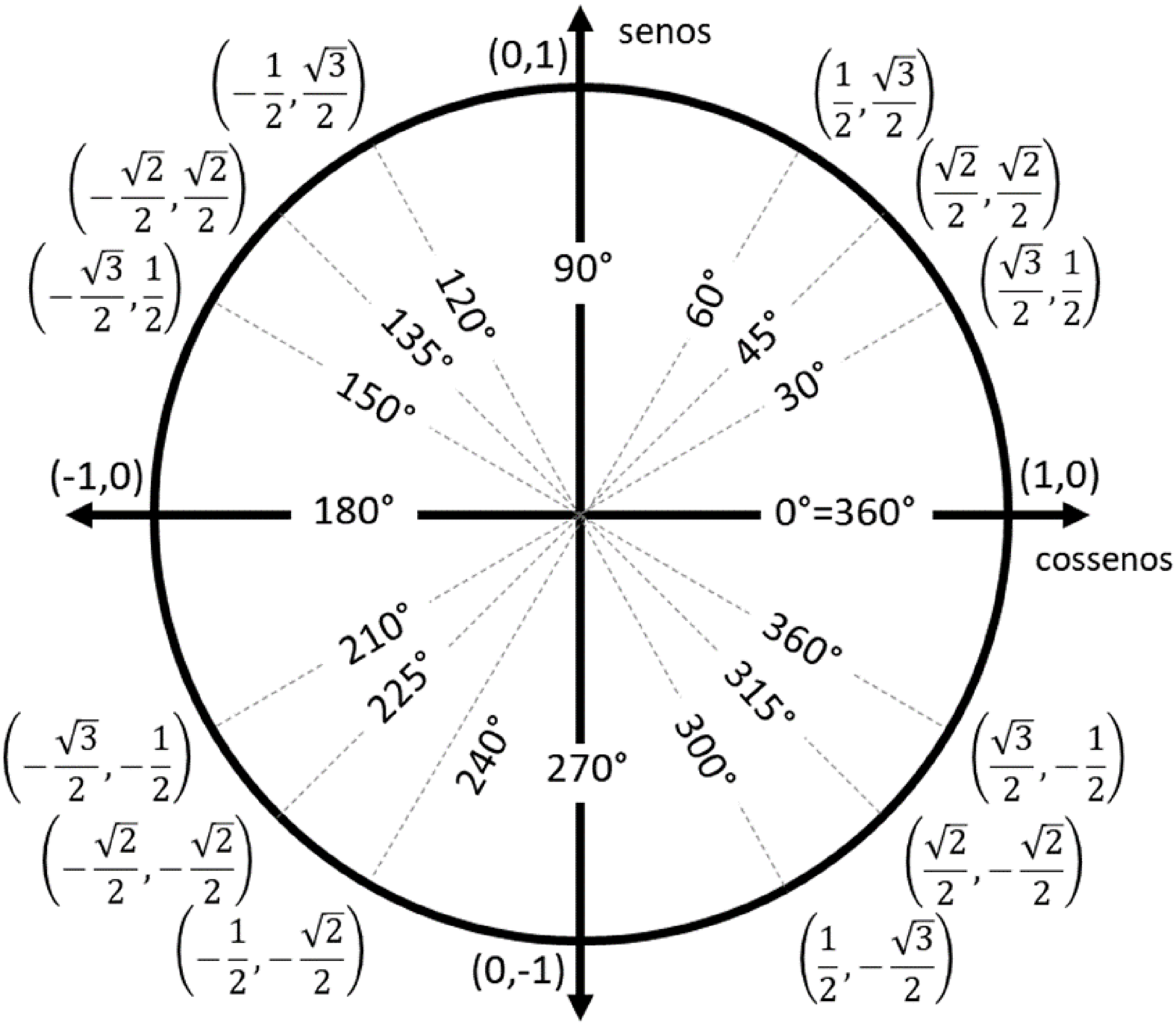
Portanto, dentro do conjunto dos números complexos será possível encontrar mais dois valores para $\boldsymbol{x}$. Parece pouco provável, mas fará mais sentido.

Primeiramente, observe que $\boldsymbol{x = -1}$ é uma das raízes, e, como o conjunto dos números reais está contido no conjunto dos números complexos, então -1 também é um número complexo, de módulo igual a 1 e argumento igual a $\boldsymbol{\pi}$. Imagine que esta raiz esteja representada no plano de *Argand-Gauss* com afixo pertencente a uma circunferência de centro na origem do plano e raio igual ao módulo ($\boldsymbol{r = 1}$).

Pelo Teorema Fundamental da Álgebra, existem três raízes no total que podem ser representadas no plano. Essas raízes também pertencem à circunferência descrita anteriormente, e como são 3, tem-se um espaçamento uniforme entre elas, descrito pelo arco $\boldsymbol{\frac{2\pi}{3}}$. Dessa forma, como $\boldsymbol{x = -1}$ já está sob o arco igual a $\boldsymbol{\pi}$, resta que as outras duas raízes estejam respectivamente sob o arco de $\boldsymbol{\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}}$ e, $\boldsymbol{\pi + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}}$.

As raízes do polinômio estão sobre o mesmo módulo e seus argumentos em progressão aritmética. Neste ponto, para representar as outras duas raízes no plano de *Argand-Gauss,* é essencial fazer uso de uma ferramenta de suma importância, o ciclo trigonométrico. Lembre-se de que com ele é possível determinar os valores de seno, cosseno e tangente dos ângulos, observe uma representação para valores de seno e cosseno.

Figura 18: Ciclo trigonométrico



Fonte: Autor, 2021.

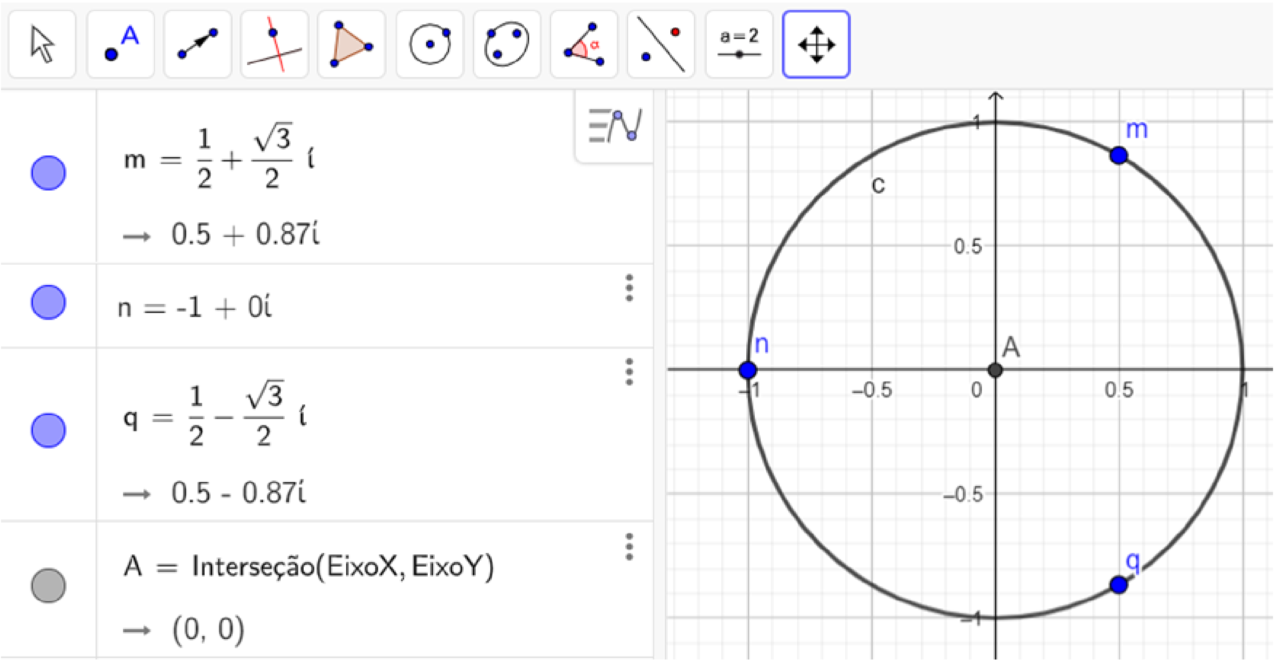
Partindo da primeira raiz encontrada e com as informações que já foram adquiridas, percebe-se que as raízes estarão sob os argumentos de $\frac{\pi}{3}, \boldsymbol{\pi}, \frac{5\pi}{3}$ que equivale respectivamente, $\mathbf{60°}, \mathbf{180°}\ \boldsymbol{e}\ \mathbf{300°}$.

Associando o ciclo trigonométrico ao plano complexo, sendo os valores de cosseno associados ao eixo real e seno ao eixo imaginário, temos que as raízes são:

- $\boldsymbol{x = n = -1}$, sob os valores de seno e cosseno de $\mathbf{0°}$.
- $\boldsymbol{x = m = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i}$, sob os valores de seno e cosseno de $\mathbf{120°}$.
- $\boldsymbol{x = q = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i}$, sob os valores de seno e cosseno de $\mathbf{240°}$.

Observe a figura 19.

Figura 19: Representação geométrica das raízes

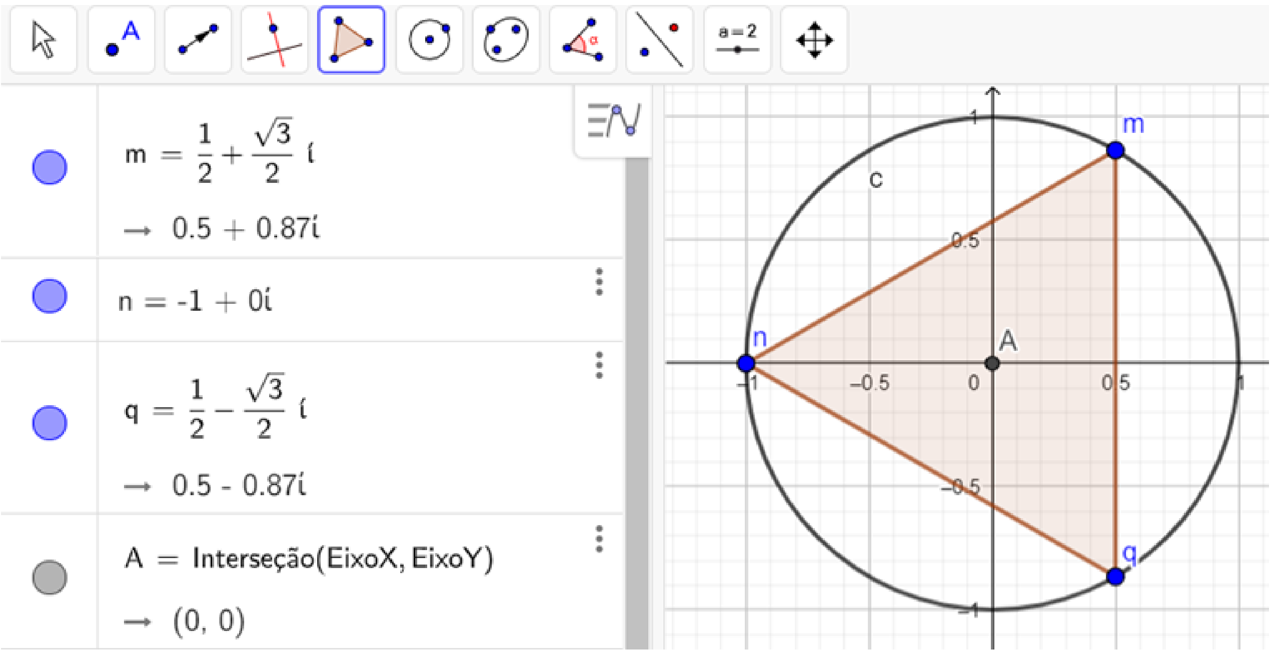


Fonte: Autor, 2021.

Você visualiza o que aconteceria em raízes aritméticas de índices maiores?

Bom, se você observar ao conectar os afixos, utilizando o Geogebra por exemplo, com o auxílio da ferramenta polígono é obtido um triângulo equilátero (figura 20). Assim, ao estabelecer o mesmo procedimento, pode-se concluir que ao calcular a raiz enésima aritmética de um número complexo obtemos os vértices de um polígono regular de $\boldsymbol{n}$ lados, com $\boldsymbol{n} > \mathbf{2}$.

Figura 20: Triângulo inscrito na circunferência de raio 1, com vértices nas raízes do polinômio



Fonte: Autor, 2021.

Há outro modo para o cálculo destas raízes dada uma estratégia algébrica, mas antes de citá-lo será definido dois resultados importantes dentro dos conjuntos dos números complexos: a 1ªe 2ª Fórmula de De Moivre.

Abraham de Moivre
(1667 – 1754)
Matemático francês.

Fonte: Adaptado de https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Abraham_de_moivre.jpg

A partir do resultado encontrado neste estudo, para o cálculo da multiplicação de dois números complexos na forma trigonométrica, podemos considerar a potenciação de um número complexo cujo expoente seja algum $\boldsymbol{n\ natural; n > 1}$. Assim:

$$\boldsymbol{z^n = [\rho(\cos\theta + i.sen\,\theta)]^n}$$

$$\boldsymbol{z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \cdots \cdot z}_{\text{“n” vezes}}}$$

$$\boldsymbol{z^n = \rho(\cos\theta + i.sen\,\theta) \cdot \rho(\cos\theta + i.sen\,\theta) \cdot \cdots \cdot \rho(\cos\theta + i.sen\,\theta)}$$

$$\boldsymbol{z^n = \rho \cdot \rho \cdot \cdots \cdot \rho \cdot \rho \cdot [\cos(\theta + \theta + \cdots + \theta) + i \cdot sen\,(\theta + \theta + \cdots + \theta)]}$$

$$\boxed{\boldsymbol{z^n = \rho^n \cdot (\cos n \cdot \theta + i \cdot sen\, n \cdot \theta)}}$$

Esta é chamada 1ª fórmula de De Moivre.

Vale ressaltar que para expoentes iguais a 0 e 1, os conceitos definidos no conjunto dos reais permanecem, ou seja $\mathbf{z^0 = 1}$ e $\mathbf{z^1 = z}$.

Outro ponto importante a relembrar é que o argumento deve estar sempre expresso no intervalo $\boldsymbol{0 \leq \theta < 2\pi}$. Então vale relembrar os conceitos de arcos côngruos.

Utilizando este resultado define-se que dado qualquer número complexo w tal que $\boldsymbol{w^n = z}$ é chamado de raiz enésima de z. Podemos, portanto, calcular a raiz enésima aritmética de $\boldsymbol{z = \rho(\cos\theta + i\,.sen\,\theta)}$ é dado da seguinte forma:

$$\boxed{\boldsymbol{w_k = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left[\cos\left(\frac{\theta + k \cdot 2\pi}{n}\right) + i \cdot sen\,\left(\frac{\theta + k \cdot 2\pi}{n}\right)\right]}}$$

onde k = 0, 1, 2, 3, ..., (n-1); com n natural e maior que 1. Neste caso k indica o número n de raízes distintas que z possui.

Veja um exemplo, o que facilitará a visualização da aplicação da fórmula.

Considere o número complexo $z = \cos \pi + i \,.\, sen\, \pi$ em sua forma algébrica $z = 1$, calcularemos a raiz cúbica de z. O mesmo que resolver a equação $x^3 + 1 = 0$.

Sabemos inicialmente que $\rho = 1$, *então* $\sqrt[3]{1} = 1$.

Para calcularmos a primeira raiz temos:

$$w_0 = 1 \cdot \left[cos\left(\frac{\pi + 0 \cdot 2\pi}{3}\right) + i \cdot sen\left(\frac{\pi + 0 \cdot 2\pi}{3}\right)\right]$$

Note que substituímos $\sqrt[n]{\rho} = \sqrt[3]{1} = 1; k = 0\,;\ \theta = \pi$. *Assim:*

$$w_0 = 1 \cdot \left[cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \cdot sen\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

Ou $w_0 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ *em sua forma algébrica.*

Agora faremos as mesmas substituições da etapa passada, porém, k=1.

$$w_1 = 1 \cdot \left[cos\left(\frac{\pi + 1 \cdot 2\pi}{3}\right) + i \cdot sen\left(\frac{\pi + 1 \cdot 2\pi}{3}\right)\right]$$

$$w_1 = [cos(\pi) + i \cdot sen\,(\pi)]$$

Ou $w_1 = -1$ *em sua forma algébrica.*

Agora para k=2.

$$w_2 = 1 \cdot \left[cos\left(\frac{\pi + 2 \cdot 2\pi}{3}\right) + i \cdot sen\left(\frac{\pi + 2 \cdot 2\pi}{3}\right)\right]$$

$$w_1 = \left[cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i \cdot sen\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right]$$

Ou $w_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$ *em sua forma algébrica.*

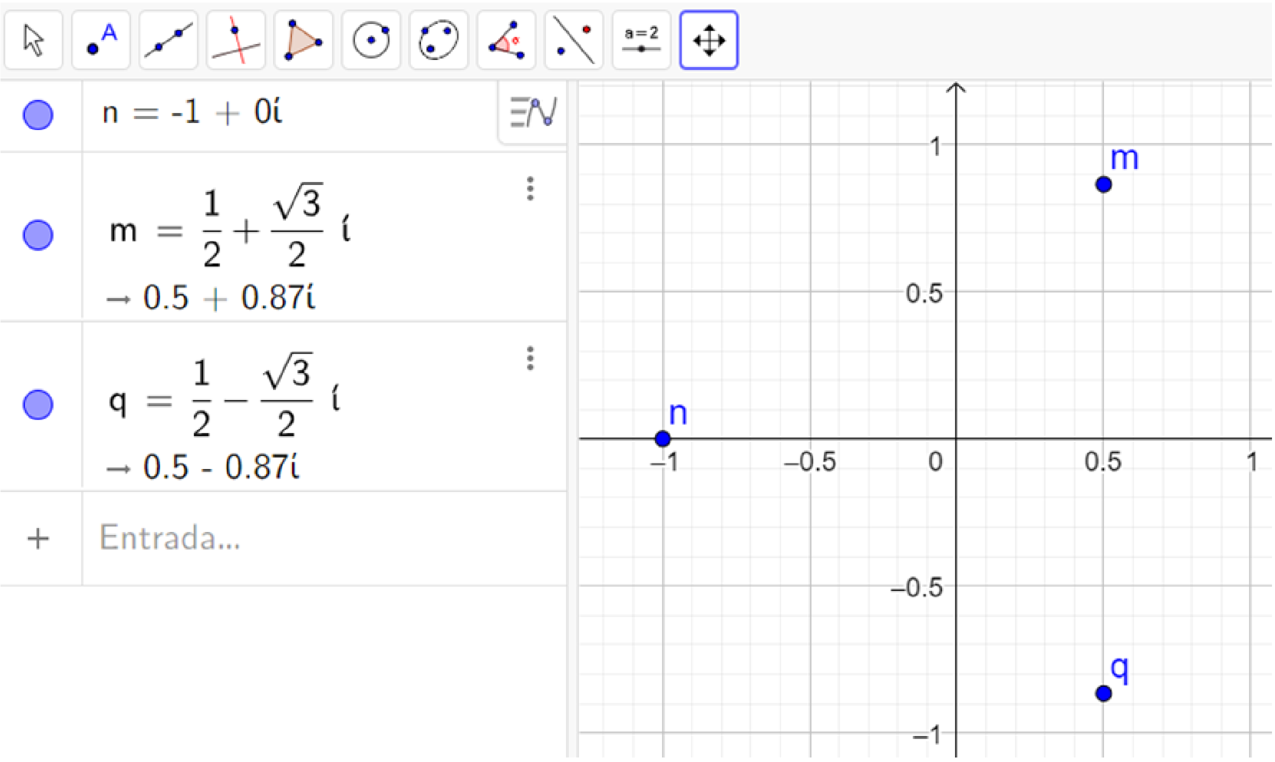
Logo as raízes são $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\,, -1\,, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$.

Esta é a 2ª Fórmula de De Moivre.

Agora que você já sabe calcular estas raízes, vale a pena destacar a construção do polígono pelo Geogebra.

Inicialmente digite as raízes encontradas no campo de entrada para álgebra. Para exemplificar a figura, pegaremos as mesmas raízes que estamos trabalhando no desenvolvimento do conteúdo. Observe a figura 21.

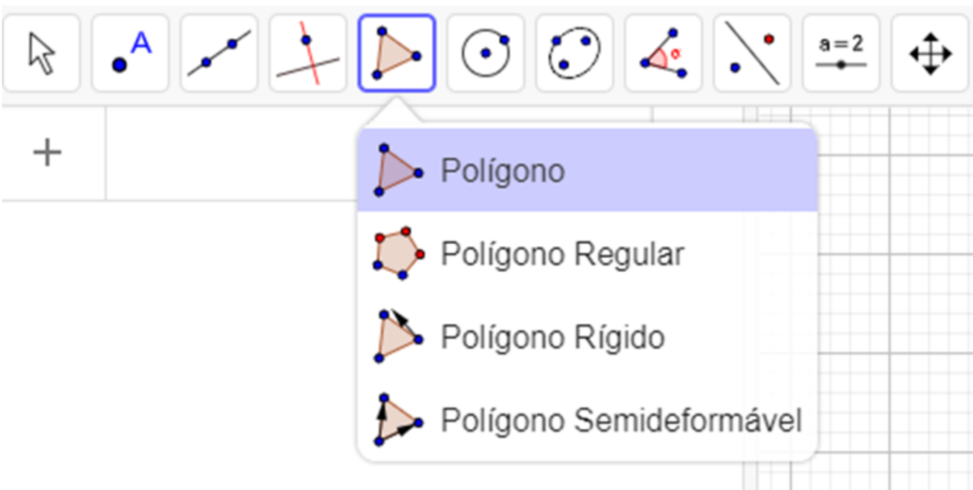
Figura 21: Inserindo as raízes (números complexos)



Fonte: Autor, 2021.

Em seguida, selecione a ferramenta "Polígono" como na figura 22.

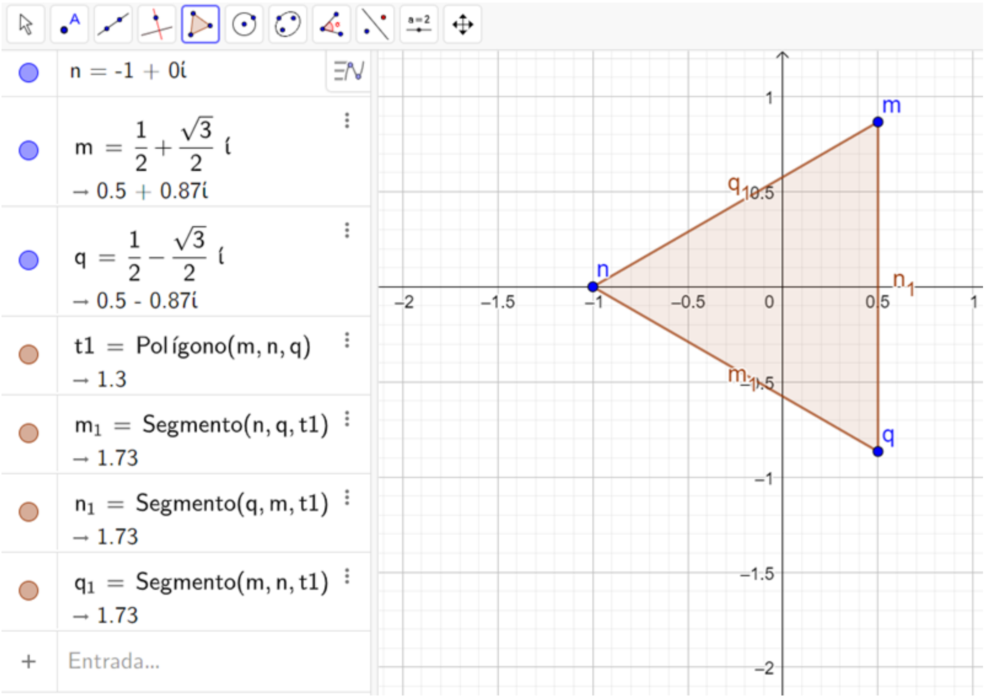
Figura 22: Selecionando a ferramenta "Polígono"



Fonte: Autor, 2021.

Selecione as raízes que constituíram os vértices do polígono e as conecte até fechar o polígono no vértice que iniciou, figura 23.

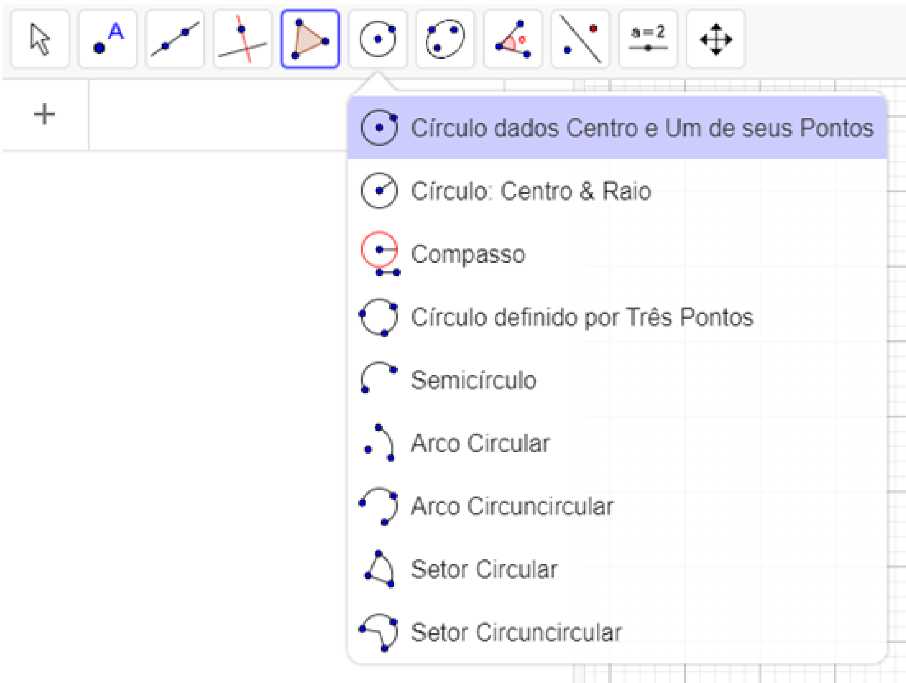
Figura 23: Construindo o polígono



Fonte: Autor, 2021.

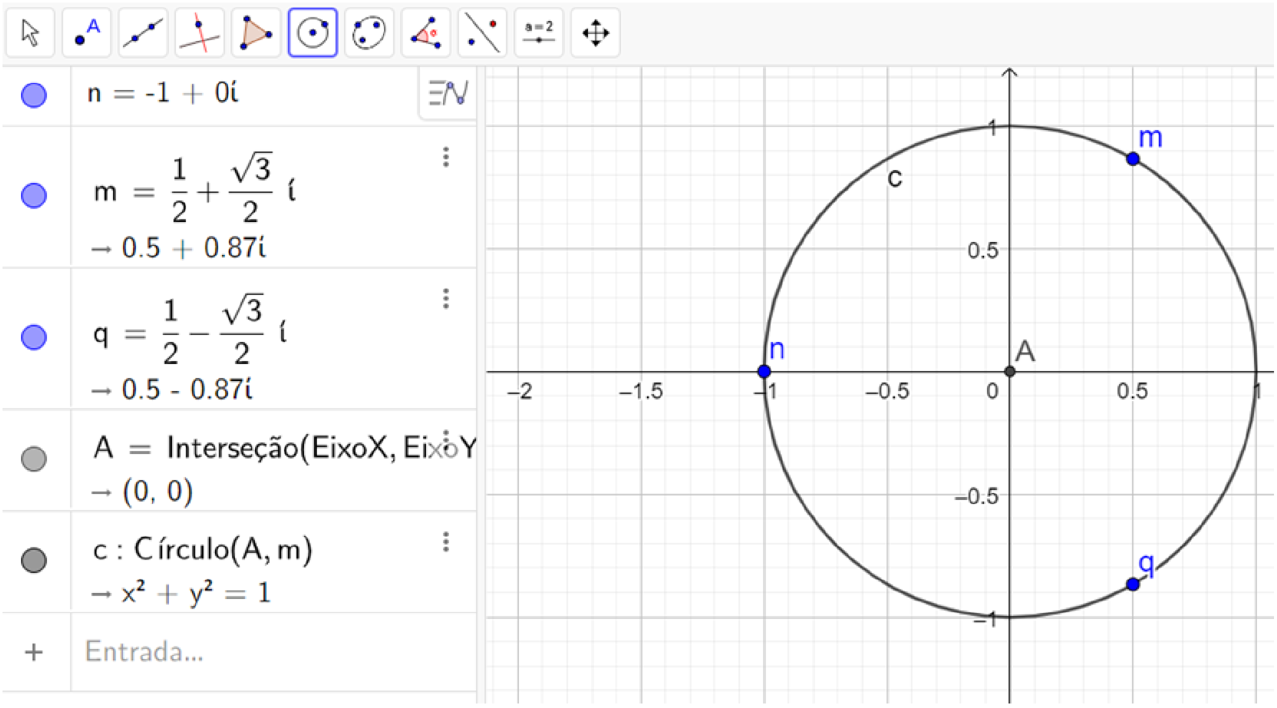
No caso da figura 20, nota-se a presença de uma circunferência. Ela está ali somente para evidenciar que as raízes possuem mesmo módulo. Acaso deseje desenhá-la, basta selecionar a ferramenta "Círculo dados Centro e Um de seus Pontos" (figura 24). Selecione a origem do plano e uma das raízes, obtêm-se então a circunferência (figura 25).

Figura 24: Acessando a ferramenta "Círculo dados Centro e Um de seus Pontos"



Fonte: Autor, 2021.

Figura 25: Circunferência de centro na origem e raio igual ao módulo dos números complexos



Fonte: Autor, 2021.

ONDE ESTÃO OS COMPLEXOS?

Para finalizar este estudo, vamos falar um pouco sobre a presença dos números complexos em outras áreas. Como qualquer número real, o complexo está presente em aplicações cotidianas e abstratas, porém para visualizá-lo é necessário um pouco mais de exploração.

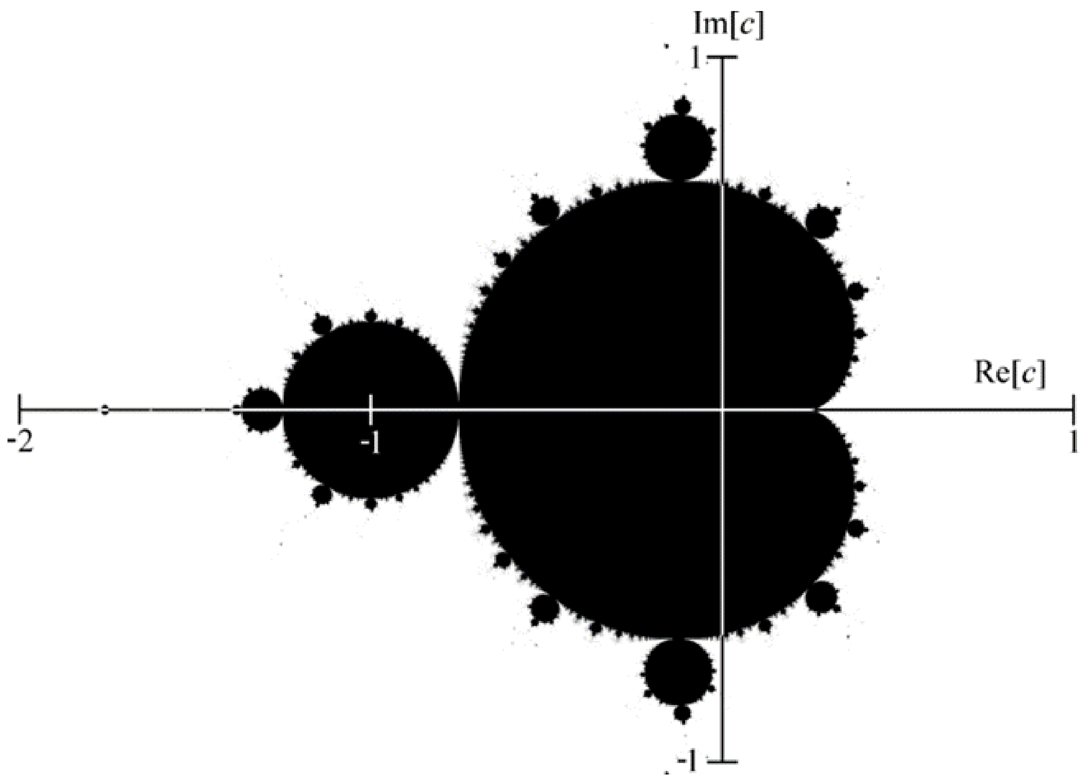
Mencionaremos a relação dos complexos ao estudo de fractais. Trata-se de uma figura diferente da geometria popularizada na escola. Na verdade, o conceito de fractal tem presença mais comum na natureza. É um elemento que apresenta padrões em suas partes. Explicando melhor, ao olhar o todo do objeto você observar pequenas ramificações que repetem o mesmo padrão cada vez em uma escala menor.

Ficou curioso? Então vamos saber mais um pouco.

CONJUNTOS DE MANDELBROT E JULIA

O conjunto de Mandelbrot é um fractal construído por meio da disposição do conjunto de pontos ***c*** no plano de complexo (Argand-Gauss).

Figura 26: Representação monocromática do Conjunto de Mandelbrot



Fonte: Por Connelly (discussão · contribs), Domínio público, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=16088

Esta figura é obtida através de $\boldsymbol{n}$ iterações sobre a função $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C}$ definida por $\boldsymbol{f_c}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{z^2} + \boldsymbol{c}$, no qual $\boldsymbol{c}$ é uma constante complexa.

Vamos tentar exemplificar uma noção intuitiva para a formação deste conjunto. Podemos pensar na função $\boldsymbol{f_c}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{z^2} + \boldsymbol{c}$ como $\boldsymbol{z_{n+1}} = \boldsymbol{z_n}^{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{c}$, o que facilitará a ideia de iterações que serão realizadas.

Suponhamos um valor inicial:

$$\boldsymbol{z_0 = 0 \;\Rightarrow z_1 = 0^2 + c = c}$$

$$\boldsymbol{z_1 = c \;\Rightarrow\; z_2 = c^2 + c}$$

$$\boldsymbol{z_2 = c^2 + c \;\Rightarrow\; z_3 = \left(c^2 + c\right)^2 + c}$$

Esse processo deve ser feito sucessivamente até obtermos a quantidade de iterações desejadas. Quanto maior a quantidade de iterações, mais clara a ideia de fractal ficará.

Perceba que toda a ideia depende do valor de $\boldsymbol{c = a + bi}$. A partir deste ponto basta supor valores para $\boldsymbol{c}$ e observar se com o processo de iterações a sequência de números tende ao infinito, neste caso elas não serão destacadas (coloridas de preto).

A ideia de sequência convergente não será discutida aqui, mas podemos ter uma visão intuitiva. Vamos pegar os números reais -2, -1 e 1, pelas iterações vistas acima temos:

- Para $\boldsymbol{c = -2}$

$$\boldsymbol{z_0 = 0 \;\Rightarrow z_1 = 0^2 - 2 = -2}$$

$$\boldsymbol{z_1 = -2 \;\Rightarrow\; z_2 = (-2)^2 - 2 = 2}$$

$$\boldsymbol{z_2 = 2 \;\Rightarrow\; z_3 = (2)^2 - 2 = 2}$$

$$\boldsymbol{z_3 = 2 \;\Rightarrow\; z_4 = (2)^2 - 2 = 2}$$

E assim por diante.

- Para $\boldsymbol{c = -1}$

$$\boldsymbol{z_0 = 0 \;\Rightarrow z_1 = 0^2 - 1 = -1}$$

$$\boldsymbol{z_1 = -1 \;\Rightarrow\; z_2 = (-1)^2 - 1 = 0}$$

$$\boldsymbol{z_2 = 0 \;\Rightarrow\; z_3 = (0)^2 - 1 = -1}$$

$$\boldsymbol{z_3 = -1 \Rightarrow\; z_4 = (-1)^2 - 1 = 0}$$

E assim por diante.

- Para $c = 1$

$$z_0 = 0 \Rightarrow z_1 = 0^2 + 1 = 1$$
$$z_1 = 1 \Rightarrow z_2 = (1)^2 + 1 = 2$$
$$z_2 = 2 \Rightarrow z_3 = (2)^2 + 1 = 3$$
$$z_3 = 3 \Rightarrow z_4 = (3)^2 + 1 = 4$$

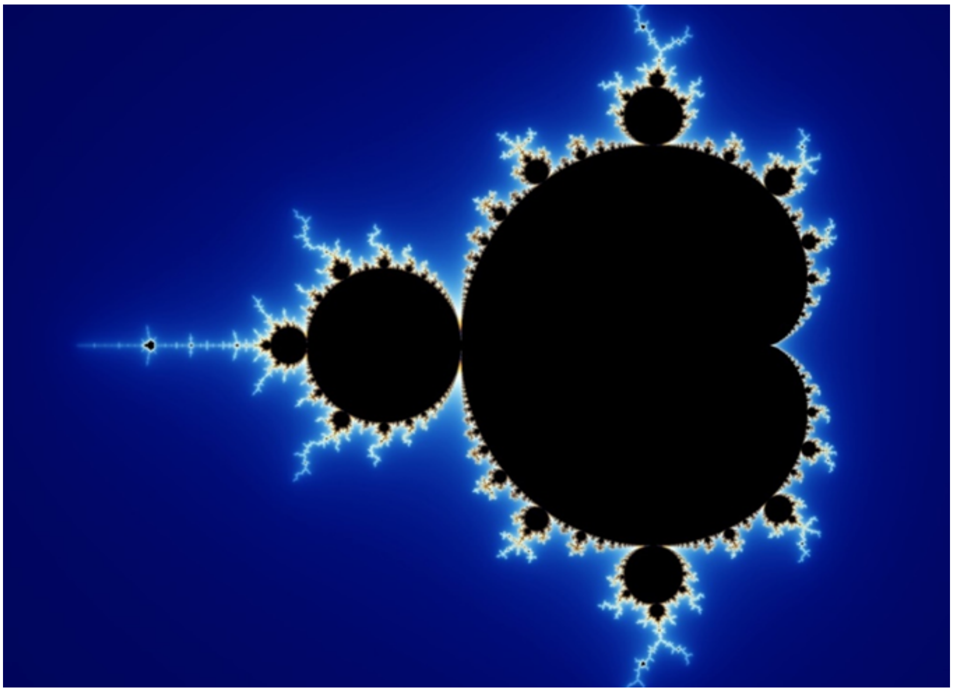
E assim por diante.

Observe que a ideia de convergir vem da análise de que por exemplo, para $c = -2$ a lista de números fixou no valor 2. Assim podemos dizer que a sequência tende a 2. Para $c = -1$ a sucessão de números oscila. Neste caso, ela também não tende ao infinito, pois o valor sempre será 0 e -1. Já no caso de $c = 1$, a sequência começa a crescer. Assim, quanto maior o número de iterações, maior fica o valor. Então, no plano complexo o ponto (2,0) não será destacado.

Claro que este pequeno senso intuitivo não engloba nem o início da discussão, mas a ideia para a construção do Conjunto de Mandelbrot dica plantada para futuros estudos.

Com maior dedicação ao estudo da Matemática e auxílio de recursos tecnológicos é possível construir imagens como a figura.

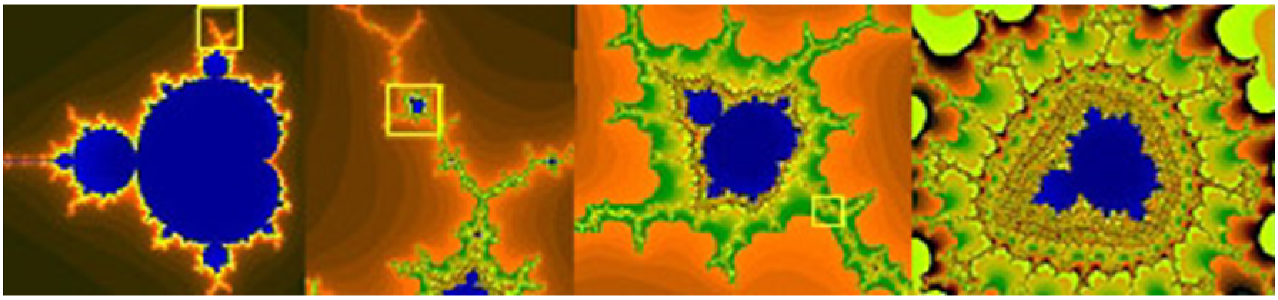
Figura 27: Versão do Conjunto de Mandelbrot em cores



Fonte: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Mandel_zoom_00_mandelbrot_set.jpg

Para observar a característica que torna o conjunto um fractal, basta ampliarmos as ramificações na imagem, o que permite perceber os padrões se repetindo.

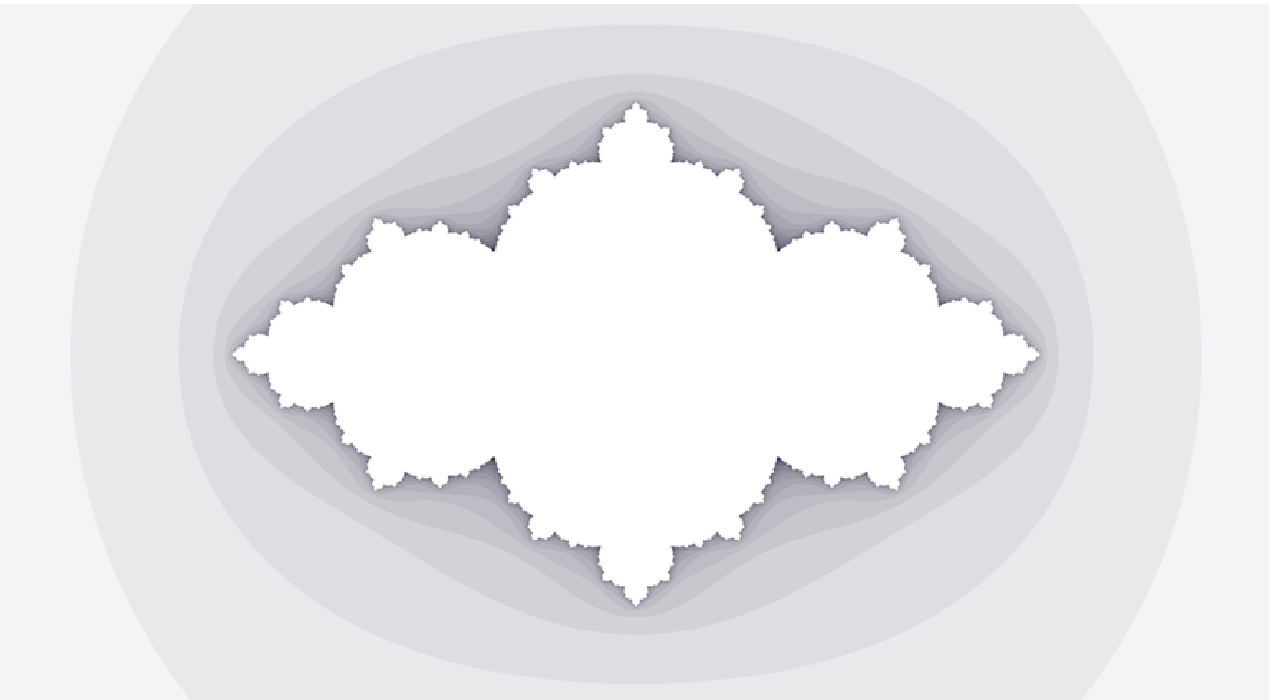
Figura 28: Ampliação de uma das ramificações do conjunto



Fonte: Por António Miguel de Campos - JAVA animation, Domínio público, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=604410

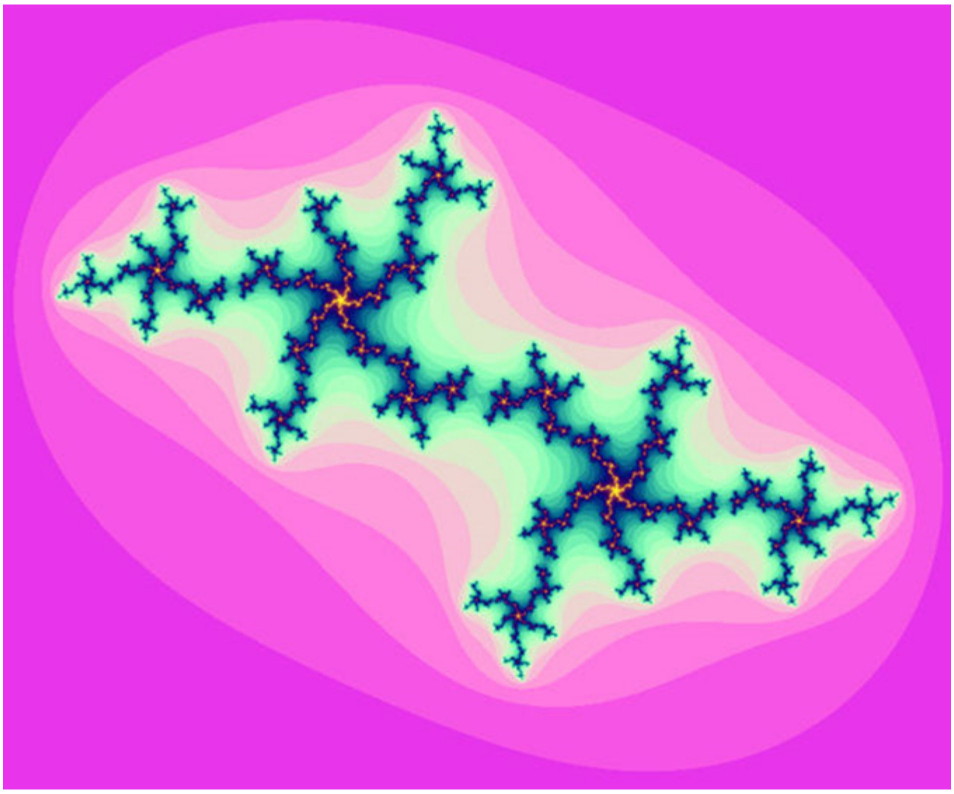
Na verdade, o matemático Benoit Mandelbrot (1924 – 2010) continuou os trabalhos desenvolvidos por Gaston Julia (1893 – 1978) que também estudava $\boldsymbol{f_c\,(z) = z^2 + c}$. Porém Mandelbrot dedicou-se ao estudo das iterações a partir das sequências com $\boldsymbol{z_0 = 0}$. Já Julia, apesar de ter abandonado o estudo, pensava em termos mais gerais.

Figura 29: Exemplo de um conjunto Julia para $f_c, c = 1 - \varphi$ onde φ é a razão áurea



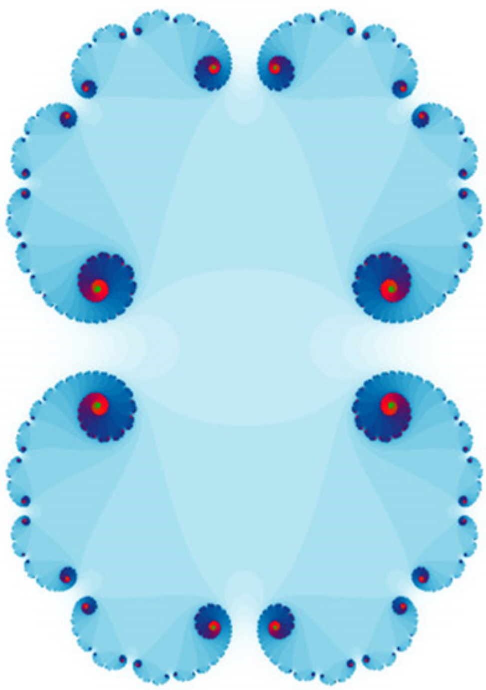
Fonte: Por PantheraLeo1359531 - Obra do próprio, CC0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=103475180

Figura 30: Exemplo de um conjunto Julia para $f_c, c = (\varphi - 2) + (\varphi - 1)i$



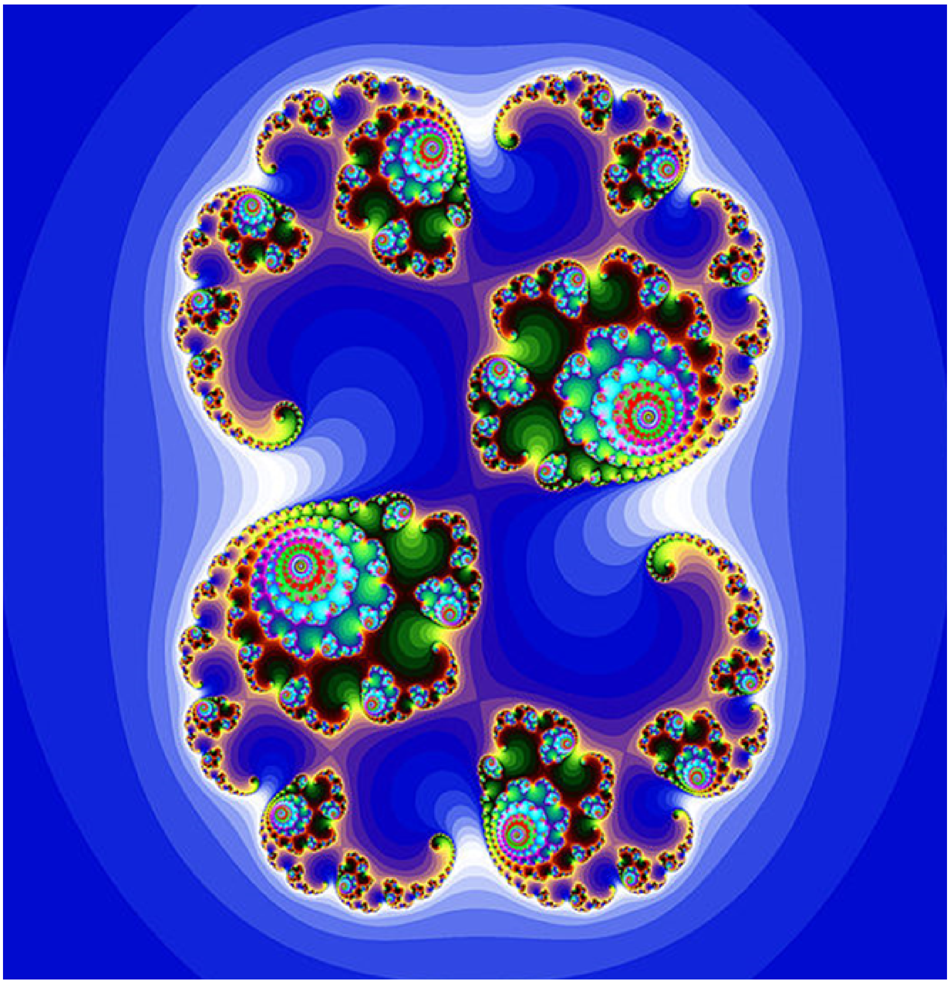
Fonte: Por Solkoll - Obra do próprio, Domínio público, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=466479

Figura 31: Exemplo de um conjunto Julia para $f_c, c = 0,285$



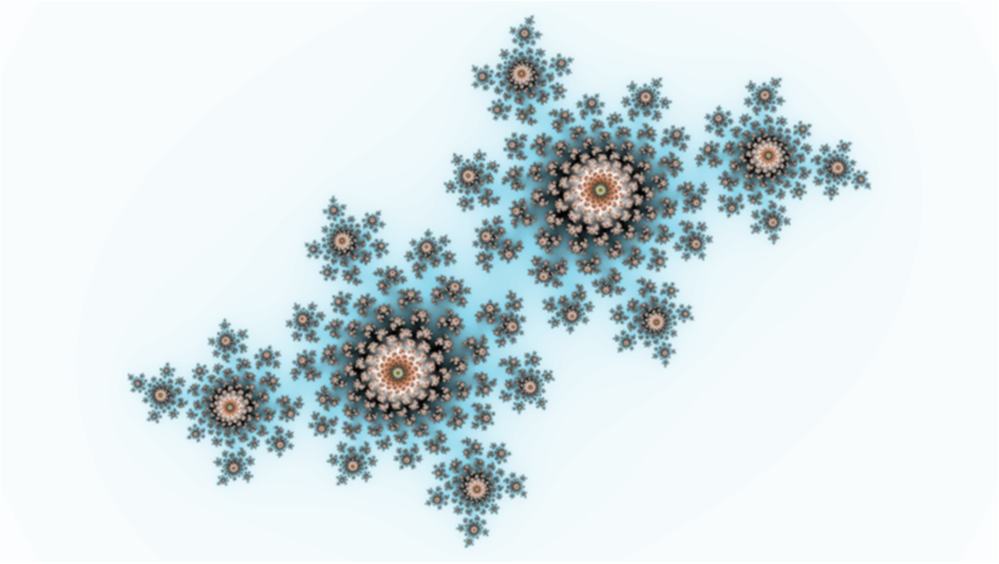
Fonte: Domínio público, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=466477

Figura 32: Exemplo de um conjunto Julia para $f_c, c = 0,285 + 0,01i$



Fonte: Por Solkoll - Obra do próprio, Domínio público, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=111840

Figura 33: Exemplo de um conjunto Julia para $f_c, c = z^2 - 0,4 + 0,6i$



Fonte: Por PantheraLeo1359531 - Obra do próprio, CC0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=103474209

O estudo de fractais está diretamente ligado à Teoria do Caos. Esta Teoria tem por objetivo encontrar padrões coordenados em sistemas que apresentam aleatoriedade. Tem-se como exemplo o estudo de fenômenos da natureza, Economia, Astronomia, Medicina, entre outros.

As análises de Mandelbrot estão associadas a temas dentro da Teoria do Caos como a geometria na natureza, ramificações de veias, artérias e topografia.

Figura 34: Brócolis Romanesco

Fonte: Por Ivar Leidus - Obra do próprio, CC BY-SA 4.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=100133434

CONSIDERAÇÕES

Chegamos ao final desta exploração, e esperamos que tenha sido gratificante a busca por mais conhecimento acerca da Matemática e dos números complexos. Lembre-se de que aqui não foi aprofundado o estudo de todos os conhecimentos que regem o conjunto, porém, começamos juntos o plantio de uma semente que florescerá e trará bons frutos em sua jornada acadêmica.

Compreender a Matemática como um todo e como os temas discutidos por ela se entrelaçam e influenciam no estudo é essencial. Assim, desejamos que você continue explorando mais sobre esta ciência, suas características, propriedades e aplicações cotidianas e abstratas.

Portanto, permita-se mergulhar no vasto conhecimento desta área, dando lugar a sua criatividade e curiosidade, e que elas te conduzam a lugares inimagináveis. Lembre-se de que antes de tudo o que conhecemos ser real e possível de ser estudado, na mente de grandes matemáticos tudo era apenas imaginário.

Exploração dos números

COMPLEXOS

PROFMAT UFVJM

AUTORIZAÇÃO

Autorizo a reprodução e/ou divulgação total ou parcial do presente trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, desde que citada a fonte.

Teófilo Otoni, ____ / ____ / ________.

____

Alexandre Nascimento Amorim

nascimento.alexandre@ufvjm.edu.br

Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri

Campus do Mucuri - Rua do Cruzeiro, n. 01 - Jardim São Paulo - CEP 39803-371.

UFVJM