UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

FELIPE LIMA CAVALCANTE

ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÕES: problemas utilizando o Princípio Multiplicativo em Análise Combinatória.

Bragança/PA
2022

FELIPE LIMA CAVALCANTE

ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÕES: problemas utilizando o PrincípioMultiplicativo em Análise Combinatória

Trabalho apresentando ao Programa de Pós-Graduação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal do Pará, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profª. Drª Maria Augusta Raposo de Barros Brito.

Bragança/PA
2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

C376e Cavalcante, Felipe Lima.
Estratégias de resoluções : problemas utilizando o Princípio Multiplicativo em Análise Combinatória / Felipe Lima Cavalcante. — 2022.
46 f. : il.

Orientador(a): Profª. Dra. Maria Augusta Raposo de Barros Brito
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de Bragança, Programa de Mestrado Profissional em Ensino da Matemática, Bragança, 2022.

1. Matemática. 2. Contagem. 3. Ensino. 4. Análise Combinatória. I. Título.

CDD 510.7

FELIPE LIMA CAVALCANTE

ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÕES: problemas utilizando o PrincípioMultiplicativo em Análise Combinatória

Trabalho apresentando ao Programa de Pós-Graduação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal do Pará, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Data de aprovação: ___/____/____

Banca examinadora:

____

Profa. Dra. Maria Augusta Raposo de Barros Brito - UFPA - Orientadora

____

Prof. Me. Leandro Santos Ribeiro – UFPA – Membro Interno

____

Prof. Dr. Denivaldo Pantoja da Silva – UFPA – Membro Externo

Bragança/PA
2022

Dedico este trabalho de forma especial a Deus, por me proporcionar força e saúde diante de um momento tão delicado que estamos vivenciando, também aos meus pais, minha família, e com todo carinho, amor a minha esposa Joelma. E todos aqueles que são especiais em minha vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço

Em primeiro lugar a Deus, pela força, saúde e determinação que tens me dado, por muitas vezes pensei em desisti, especialmente durante a essa pandemia do COVID-19, onde essa fase tem alterado o psicológico das pessoas, e modificado todauma rotina acadêmica.

Em segundo lugar aos meus pais por todo apoio e dedicação. Agradeço de uma forma especial a minha esposa (que está grávida esperando por nossa primeira graça), agradeço a essa mulher incrível que sempre me deu todo suporte durante a construção desse trabalho, uma parceria e companheirismo sem definição.

Agradeço também a minha orientadora Doutora Maria Augusta Raposo pela paciência e dedicação no desenvolvimento, construção e orientações para procedência desse estudo, sem seu suporte talvez não seria possível essa construção.

Meu agradecimento a todos aqueles que direta ou indiretamente contribuíram com este estudo.

“O professor só pode ensinar
quando está disposto a aprender”.
(Janoí Mamedes)

RESUMO

A resolução de problemas matemáticos tem sido amplamente estudada e discutida na comunidade de Educação Matemática. Objetivando averiguar em que termos o ensino da Análise Combinatória maximiza a compreensão do aluno sobre contagem. A aplicação das atividades devido à pandemia COVID-19, foi realizada na forma de ensino híbrido (remota e presencialmente), com o auxílio de uma sala de aula virtual, formulários online e vídeo chamadas em uma plataforma gratuita, em uma turma do segundo ano do Ensino Médio, situada na cidade de Capanema no nordeste paraense. No decorrer da aplicação foi notado o interesse, participação e motivação dos alunos. Como resultado foi percebido na análise das respostas propostas, o indicativo de aprendizagem significativa sobre o tema abordado, o que nos mostra que não há necessidade de trabalhar atividade com fórmulas, isso para facilita o processo de ensino aprendizagem trazendo ótimos resultados.

Palavras-chave: Matemática; Contagem; Ensino; Análise Combinatória.

ABSTRACT

The resolution of mathematical problems has been widely studied and discussed in the Mathematics Education community. Aiming to find out in what terms the teaching of Combinatorial Analysis maximizes the student's understanding of counting. The application of activities due to the COVID-19 pandemic was carried out in the form of hybrid teaching (remotely and in person), with the help of a virtual classroom, online forms and video calls on a free platform, in a second year class. of High School, located in the city of Capanema in the northeast of Pará.In the observations made during the application, the interest, participation, and motivation of the students were noticed. As a result, it was noticed in the analysis of the proposed answers, the indicative of significant learning on the topic addressed, which shows us that there is no need to work with formulas, this to facilitate the teaching-learning process bringing great results.

Key words: Math; Score; Teaching; Combinatorial Analysis.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Matemática como ciência do raciocínio surgiu a partir dos problemas encontrados pela humanidade, sendo uma das áreas base do conhecimento e de grande importância em nosso cotidiano (RODA, 2018). Para Souza (2005), a essência da Matemática é a resolução de problemas. Por este motivo é fundamental que o professor seja criativo e faça seus alunos participarem de tarefas em que a resolução de problemas seja uma metodologia para a autonomia e para a criatividade de resoluções de tarefas pelos alunos, tornando-se eficaz justamente por desenvolver o raciocínio prático e motivar os discentes para o estudo da Matemática.

Dentre os temas de ensino da matemática temos a Análise Combinatória, que segundo Roda (2018, p. 13),

> Análise Combinatória não se torna uma matéria que apresenta apenas fórmulas complicadas para os alunos terem que decorar, mas uma matéria em que o aluno terá que analisar cada situação,cada exercício, tornando-se a matéria mais atrativa.

Deste modo, a Análise Combinatória pode ser apresentada em problemas que possam envolver os alunos (RODA, 2018, p.13) tais como exercicios de contagem que estão totalmente ligados ao dia a dia do aluno, porém, o que se tem visto no Ensino Médio nem sempre atende ao que é proposto. Roda (2018), já citado, corrobora com Lima (2006), ao afirmar que um dos aspectos que pode contribuir para o sucesso dos estudantes do Ensino Médio, quando se refere à aprendizagem da Análise Combinatória, é evitar o uso abusivo ou excesso de casos particulares, que obscurece as ideias gerais e torna o entendimento do assunto mais complicado. No entanto, as tarefas a respeito deste tema pouco atendem as ideias expostas, bem como, ainda permanencem distantes das orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2017).

Esse trabaho fundamenta-se e justificativa-se em uma abordagem no ensino da Análise Combinatória sem o uso de fórmulas como fator preponderante da didática. Por este motivo, a proposta é usar o Princípio Fundamental da Contagem - PFC, como uma ferramenta principal nas aulas de Matemática, pois consideramos importante desenvolver e realizar um estudo para investigar questões relacionadas às estratégias de resoluções envolvendo Análise Combinatória.

Vasquez e Noguti (2004, p. 6), postulam que “o princípio fundamental da contagem é um conteúdo interessante e que pode ser entendido por meio de raciocínios, primeiramente simples para depois começar a se explorar problemas mais complexos”. Ressaltamos que, nesta investigação a maneira de resolver as situações problemas de Análise de Combinatória é um pouco diferente das orientações apresentadas em alguns livros didáticos, pois estes, em grande parte utilizam as fórmulas de Análise de Combinatória para a resolução de problemas, e essa didática pode tornar mecânico todo o processo pedagógico, limitando-se à utilização, memorização de fórmulas e algoritmos. Pois,

> [...] a sala de aula se torna ambiente agradável quando se apresenta práticas motivadoras e criativas com perfeita sintonia com o mundo moderno, recheado de indivíduos de raciocínio lógico apurado, intuitivos e de pensamento matemático aumentado (PONTES, 2019, p.3).

Nesta direção, o sucesso de uma aula de Matemática necessita está balizada em tarefas válidas e que possam envolver os alunos em um ambiente de aprendizagem estimulante proporcionando discussões e reflexões entre os alunos e professores. Contudo, em diversas escolas brasileiras ainda identificamos o ensino de Análise Combinatória com resolução de questões, que não favorece aprendizagem, para a resolução de problemas. È possível indicarmos que mesmo com o avanço da literatura na Educação Matemática as escolas ainda permanecem num ritual em que a postura é pouco critica. Corroboramos com Polya, ao afirmar que:

> [...] a matemática não é um esporte para espectadores: não pode ser apreciada e aprendida sem participação ativa, de modo que o princípio da aprendizagem ativa é particularmente importante para nós, matemáticos professores, tanto mais se tivermos como objetivo principal, ou como um dos objetivos mais importantes, ensinar as crianças a pensar. (POLYA,1985, p.13).

Desta forma, a Análise Combinatória não pode se tornar um conteúdo matemático que apresente apenas fórmulas complicadas em que os alunos devam decorar, mas um conteúdo em que o docente favoreça ao aluno a compreensão das tarefas, por meio de situações do cotidiano, utilizando o raciocínio, sem se preocupar excessivamente com fórmulas. Neste estudo, teremos como referência o Princípio Multiplicativo como Princípio Fundamental da Contagem (PFC).

A resolução de problemas matemáticos tem sido amplamente estudada e discutida na comunidade de Educação Matemática. Para Souza (2005, p. 01) “A Resolução de Problemas é um método eficaz para desenvolver o raciocínio e para motivar os alunos para o estudo da Matemática". O processo de ensino e aprendizagem pode ser desenvolvido por meio de problemas desafiadores, interessantes que possam ser explorados e não apenas resolvidos.

Nesse seguimento, realizamos uma investigação voltada para a compreensão dos processos de aprendizagem dos alunos quanto às resoluções de problemas em Análise Combinatória, presentes em situações matemáticas formais como as que se apresentam em materiais didáticos tradicionais, quanto situações do cotidiano, contudo, sem o uso de fórmula. Diante disto, apresento a seguinte questão norteadora: *De que maneira as tarefas que envolvem Contagem podem potencializar a aprendizagem de Análise Combinatória no 2º ano do Ensino Médio?*

Para responder a essa inquietação apresentamos os seguintes objetivos:

Objetivo Geral

Averiguar em que termos tarefas usando o principio da contagem maximinizam a aprendizagem da Análise Combinatória de alunos do Ensino Médio.

Objetivos Específicos

- ✓ Planejar um conjunto de tarefas matemáticas sobre análise combinatória;
- ✓ Identificar elementos que evidenciam a aprendizagem conceitual da análise combinatória como elemento fortalecedor do processo de contagem;
- ✓ Analisar as estratégias que os alunos expressam na Resolução dos Problemas envolvendo Análise Combinatória por meio do Principio Multiplicativo.

É relevante investir em pesquisas cujo tema envolve a Análise Combinatória, porém não somente voltadas ao processo de compreensão do Princípio Fundamental de Contagem (PFC), mas favorecendo o desenvolvimento do raciocínio lógico e combinatório do aluno, tendo em vistas tarefas padronizadas e tarefas envolvendo o cotidiano.

Este texto apresenta cinco seções, a primeira, já exposta acima, a segunda seção que revisão teórica do estudo, a terceira seção que corresponde aos percursos metodológicos, e a quarta seção em que apresentaremos os resultados e discussão, e por fim, na quinta seção, com as considerações finais. Desta apresentação inicial, prosseguimos para seção da Revisão Teórica, tendo como base os autores que contemplam temas de análise combinatória.

2. REVISÃO TEÓRICA

Nessa seção encontra-se a base teórica, introduzindo a Análise Combinatória conforme os princípios da Base Comum Nacional Curricular (BNCC), na sequência explicaremos sobre: Análise combinatória, A Análise Combinatória segundo Base Comum Nacional Curricular (BNCC), Princípio Fundamental da Contagem, Arranjo, Arranjo com repetição, Combinação Simples, a resolução de problemas, estratégia didática e cognitiva, e o Princípio Fundamental da Contagem (PFC).

Os conhecimentos matemáticos são ferramentas essenciais em muitas situações do cotidiano, em diversas atividades profissionais e em diferentes áreas do conhecimento como engenharia, saúde, economia, entre outras. Além disso, está disciplina desempenha um papel importante naformação do indivíduo, já que auxilia no desenvolvimento de competências, na organização do pensamento e do raciocínio dedutivo.

A ideia principal da resolução de problemas é habituar o aluno a analisar cuidadosamente cada problema. Portanto, para resolver problemas de contagem o aluno precisará de um senso crítico na análise do problema, ter calma ao resolver, não ser precipitado em suas decisões. Para tanto, o professor necessita tornar seus alunos sujeitos ativos e participantes no processo de ensino e aprendizagem.

2.1 A Análise Combinatória

De acordo com Morgado *et al* (1991), a Análise Combinatória, tem se mostrado um tema bastante relevante na grade curricular do Ensino Médio, e se configura como um assunto de grandes dificuldades para os discentes. A forma como a Análise Combinatória está sendo abordada na maioria dos estabelecimentos de ensino, promovendo, muitas dúvidas aos alunos, e como consequência, esse conteúdo acaba não se encaixando devidamente nas propostas curriculares.

Desde o Ensino Fundamental, alguns alunos apresentam dificuldades em resolver situações problemas com probabilidade e contagem, e ao ser deparar com esse conteúdo no Ensino Médio em que se exige maior habilidade intuitiva, este conteúdo passa a ser visto como aquele com habilidades de difícil domínio. É expresso que há falhas nos processos de ensino e aprendizagem desde do fundamental e que se tornam mais críticos no Ensino Médio.

Dessa forma, o professor percebe as grandes dificuldades em ensinar novos conteúdos e tentar amenizar as falhas educacionais oriundas do ensino fundamental. Ressaltamos principalmente o ensino de Análise Combinatória, pois justamente este requer pre requisito e uma lógica mais desenvolvida do alunado.

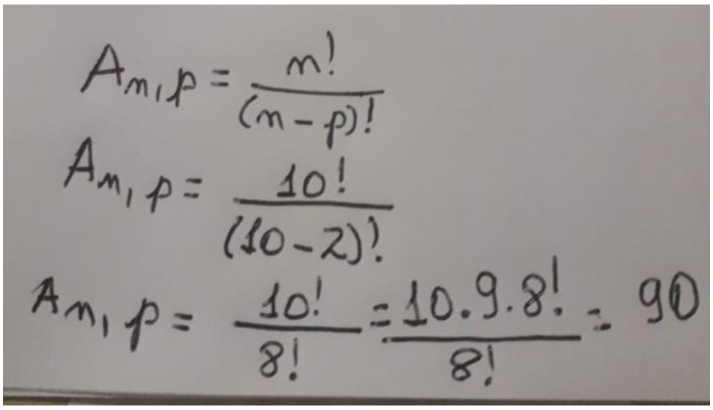
Por esse motivo, dentre os conteúdos que são trabalhados no Ensino Médio, a Análise Combinatória foi escolhida como objeto de pesquisa deste trabalho, devidoa sua possível elevação de complexidade e importância para resolução de problemasde contagem. Dentro do princípio da contagem, o aluno pode resolver problemas que afetam seu cotidiano, mostrando assim para os discentes as finalidades práticas da matemática, não a deixando em um campo de ensino meramente abstrato.Deste modo problematizar o ensino deste conteúdo e buscar subsídio que possam contribuir no processo de ensino e aprendizagem deste objeto matemático é uma necessidade para as escolas brasileiras. A Análise Combinatória foi escolhida como objeto de pesquisa deste trabalho, devido a sua importância para resolução de problemas de contagem.

A Análise Combinatória, segundo Morgado *et al* (1991) é um objeto da matemática que tem o intuito de analisar as estruturas e afinidades circunspectas, os autores descrevem dois tipos de problemas que incidemcom mais constâncias, que são: no primeiro momento a de demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um contíguo finito dado e que contentam adequadas espécies; e no segundo momento é o de contar ou agrupar os subconjuntos de um conjunto finito e que agradam espécies oferecidas.

A partir disto, vale ressaltar que tarefas com contagem devem possibilitar aprendizagem nas mais diversas situações do cotidiano. Entretanto, a Análise Combinatória visa desenvolver meios que permitam contar o número de elementos de um conjunto, sendo estes elementos agrupamentos formados sob certas condições. À primeira vista pode parecer fácil se o número de elementos que queremos contar for pequeno. Entretanto, se o número de elementos a serem contados for grande, esse trabalho torna-se quase impossível sem o uso de métodos especiais (HAZZAN, 1993).

Na figura a seguir ilustramos uma das fórmulas da análise combinatória, relacionada a contagem de arranjos, em que a ordem ou natureza dos elementos influencia no processo de contagem.

Figura 1 - Análise Combinatória: fórmula recorrente ao arranjo A10,2.



Fonte: Fonte: Autor, dados da pesquisa, 2022

Aquino (2013) afirma que os professores têm dificuldades em resolver problemas de análise combinatória, tais como: falta de um programa sistemático que lhes permita enumerar todas as possibilidades, soluções numéricas sem motivo, não utilização da árvore de possibilidades, onde ou a sua estrutura é insuficiente, e é difícil identificar quando a ordem é importante; e todos esses fatores dificultam o ensino desses conteúdos pelos professores, principalmente no ensino fundamental.

A autora explica que estes fatores provocam insegurança, devido à falta de conhecimentos básicos sobre o assunto e assim, apresentam dificuldade em resolver problemas. Como disse a autora, um dos pontos mais preocupantes é o despreparo dos professores de matemática no ensino de seus conteúdos, principalmente da análise combinatória.

Embora o processo de contagem exista em nosso cotidiano, quando enumeramos e contamos objetos, seja pelo princípio de adição ou multiplicação, na maioria dos casos, na Educação Básica, a análise combinatória só é utilizada no Ensino Médio. Quando esse método é realizado no Ensino Fundamental, percebe-se que sua utilização não é realizado de forma significativa porque o principal subsídio para os professores aindasão os livros didáticos (AQUINO, 2013).

Segundo Aquino (2013) a análise combinatória e a pesquisa do Ensino Fundamental ao Superior são essenciais para a formação de indivíduos conscientes e críticos, pois existem em situações cotidianas simples. Neste caso, as habilidades incluem observação, investigação de hipóteses, sistematização, generalização e a síntese do processo.

A intensão desta investigação está na formação discente para além da simples abordagem das duas últimas etapas do ciclo citado acima, em que ocorre o fato de

> O aluno mecanizado a apenas aprender análise combinatória por fórmula - aplicação tem dificuldade de resolver com mais certeza problemas de contagem ou resolvem sem entender os processos que estão sendo trabalhos no problema, contudo, as aplicações do Princípio Fundamental da Contagem aqui propostas poderão ajudar para que o aluno perceba a lógicamatemática que há por trás de todo processo da resolução de problema de análise combinatória. (CONCEIÇÃO, 2019, p.32).

A busca por uma interpretação para as capacidades estudantis a serem desenvolvidas no cerne das três primeiras etapas, estas se compõem/reproduzem o processo histórico desenvolvido na matemática aqui em específico, Análise Combinatória.

2.2. A Análise Combinatória segundo a Base Comum Nacional Curricular (BNCC)

A Análise Combinatória é enfatizada em alguns documentos oficiais e deve ser abordada pelos docentes desde o Ensino Fundamental (BNCC, 2017), e ser ensinada de forma interativa entre professores e alunos, destacando ideias comuns, novas formas de pensar e interagir com as informações propostas.

No que tange as inclinações para ensinar a Matemática no Ensino Médio, é conveniente que a Análise Combinatória seja fundamental para o desenvolvimento do raciocínio logico dos alunos, pois Roda (2018, p.23) afirma que esse mesmo raciocínio colabora para a operação e resolução de problemas do cotidiano.

Essa parte do conteúdo foi incluída recentemente no currículo brasileiro e deve ser estudada em todos os níveis da Educação Básica, desde o Ensino Fundamental até o Ensino Médio, para complementar e aprofundar os conceitos matemáticos envolvidos.

Roda (2018, p. 23) afirma ainda que ensinar Análise Combinatória em salasde aula do Ensino Fundamental e Médio tem sido um problema difícil de resolver para muitos professores de Matemática. Buscar subsídios que possam contribuir no processo de ensino e aprendizagem deste conteúdo, presente na matriz curricular de várias escolas de Ensino Médio e até mesmo em algumas escolas do Ensino Fundamental, é uma necessidade que se verifica não apenas no Brasil, mas em diversos países (AQUINO, 2013).

Enfatizamos que, de acordo com à competência específica 3, prescrita na BNCC, quanto a AnáliseCombinatória ser anunciada na habilidade EM13MAT310, informa,

> Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo diferentes tipos de agrupamento de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas como o diagrama de árvore (BRASIL, 2018, p.529).

Ressaltamos que, o Princípio Multiplicativo, também denominado como Princípio Fundamental da Contagem (PFC), nos fornece o instrumento básico para a Análise Combinatória; entretanto, sua aplicação direta na resolução de problemas pode às vezes tornar-se mais trabalhosa (HAZZAN, 1993).

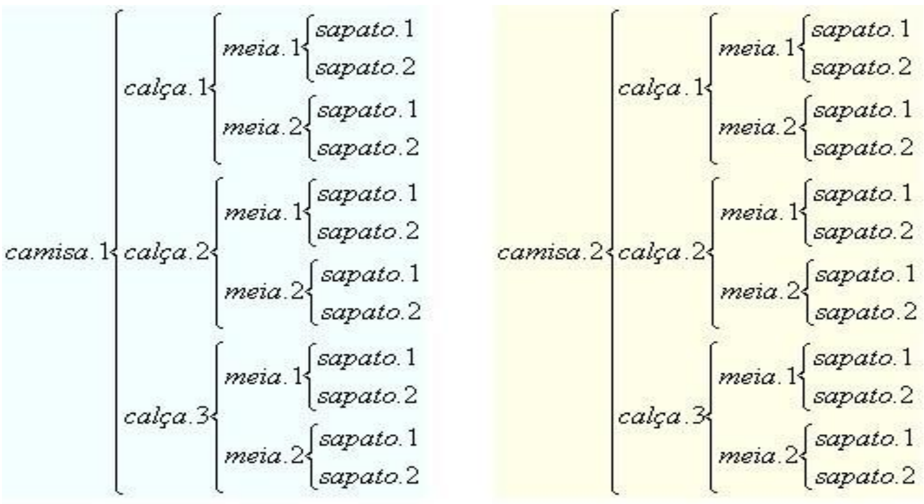
Tomando por base tal argumento, aprofundaremos nossos estudos sobre a abordagem do Princípio Fundamental da Contagem (PFC) como processo pedagógico.

2.3 Princípio Fundamental da Contagem

O Princípio Fundamental da Contagem (PFC) diz que se há **x** modos de tomar uma decisão **D1** e, tomada a decisão **D1**, há **y** modos de tomar a decisão **D2**, então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões **D1** e **D2** é **xy**. (LIMA et al, 1998, p. 85).

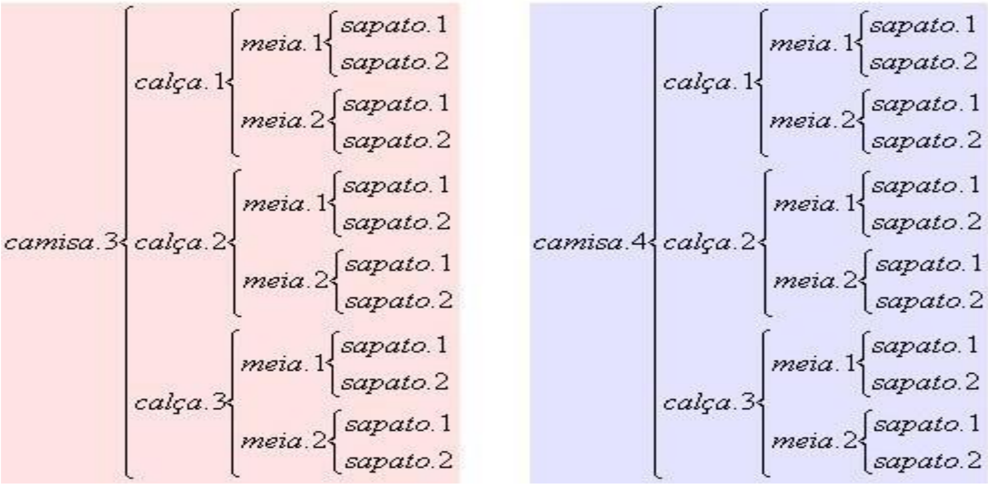
Para compreendermos melhor o Princípio Fundamental da Contagem, a seguir apresentaremos a seguinte situação como exemplo: Pedro tem 4 (quatro) camisas, e 3 (três) calças, 2 (dois) pares de meio e 2 (dois) sapatos. *De quantas maneiras distintas Pedro pode se vestir?*

Resolução*:*



Fonte: Alves, 2015.

Resolução:



Fonte: Alves, 2015.

Em cada esquema se apresenta todas as possíveis combinações correspondente aos objetos do vestuário de Pedro. Uma forma mais simplificada e eficiente de resolver essa situação consiste em determinar a multiplicação no que tange a quantidade de elementos de cada conjunto.

Resolução: **4 x 3 x 2 x 2 = 48 combinações.**

Conforme o Princípio Básico da Contagem (PBC), se um evento consiste em duas ou mais etapas consecutivas, o número de combinações será determinado pelo produto das possibilidades de cada conjunto. Ou seja: sendo um certo evento n em que cada etapa do seu processo de contagem apresenta p1, p2, p3, ..., pn possibilidades em cada etapa, logo o resultado final desse processo de contagem será dado por: **p1 . p2 . p3................................... pn.**

Exemplos:

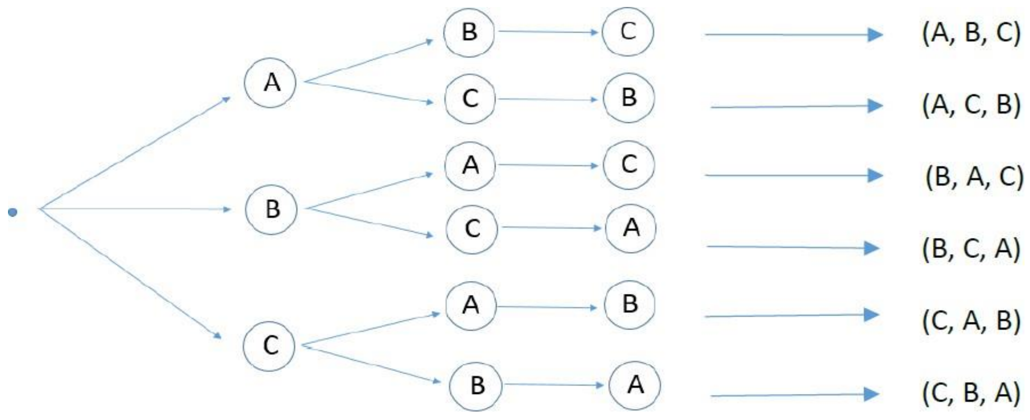
Três skatistas participam de um evento de Skate. Quantos maneiras existem para o 1º, 2 º e o 3º lugares.

Resolução:

Cada forma consta como uma “tripla ordenada” exemplo: (A, B, C) de forma que A representa o Skatistas que chegou em 1º lugar, B o que chegou em 2º lugar, e o C o que chegou em último lugar.

A, B e C competem ao conjunto dos Skatistas e A ≠ B, A ≠ C e B ≠ C. Pode-se obter os conjuntos possíveis, usando o diagrama de árvores de possibilidades.

Sequências possíveis:



Fonte: Info escola (navegando em aprendizado).

Por meio do Princípio Fundamental da Contagem (PFC), o resultado corresponde é: 3 x 2 x 1 = 6.

Segundo Lima (2015) ressalta que o trabalho com combinatória aplicado em sala de aula, pode ser eficiente a partir do uso do princípio fundamental da contagem na resolução dos diversos tipos de problemas combinatórios.

Esse princípio caracteriza-se no ensino da matemática por priorizar objetivos que se restringem ao treino/desenvolvimento de habilidades estritamente técnicas. O aluno deve realizar uma série de exercícios do tipo: “resolva os exercícios abaixo, seguindo o seguinte modelo”.

Lima (2015, p.23) ainda enfatiza que:

> Não podemos usar a matemática pela matemática, suas fórmulas, seus aspectos estruturais, suas definições (iniciando geralmente por elas), em detrimento da essência e do significado na construção de seus conceitos. Osprofessores preocupam-se exageradamente com a linguagem matemática, com o uso correto dos símbolos, com a precisão, com o rigor, sem dar atenção aos processos que os produzem; porque enfatiza o lógico sobre o psicológico, o formal sobre o social, o sistemático-estruturado sobre o histórico; porque trata a matemática como se ela fosse neutra e não tivesse relação com interesses sociais e políticos (LIMA, 2015, p. 23).

Nesse pressuposto, ao usar o mecanismo do princípio fundamental da contagem (PFC), sem recorrer ao uso extensível de fórmulas faremos com que os alunos interajam e sobretudo se interessem pelos conteúdos estudados, desse modo, ao tentar utilizar esse mecanismo na disciplina de matemática com os alunos, faremos com que os alunos tenham melhores resultados, sem precisar utilizar inúmeras fórmulas no estudo da contagem.

O professor passa aos alunos o que deve ser feito, tomando como base exemplos repetitivos, levando o aluno a realizar atividade de maneira mecânica, repetindo diversas vezes a mesma coisa, dessa maneira, o ensino tradicional da matemática é possível observar que é uma forma de ensino onde somente o professor transmite conhecimento e os alunos apenas recebem de maneira mecanizada esse conhecimento (FREIRE, 1987).

Um dos aspectos que pode contribuir para o sucesso dos estudantes do Ensino Médio, quando se refere à aprendizagem da Análise Combinatória, é evitar o uso abusivo ou excesso de casos particulares, que obscurece as ideias gerais e torna o entendimento do assunto mais complicado (LIMA,1998).

De fato, quando temos um problema que o aluno precisa somente de fórmulas para resolvê-lo, esse tipo de problema é o que os alunos menos gostam pelo motivo de ter que “decorar” tais fórmulas.

Com base nessa análise os docentes de Matemática são os principais mediadores de ensino e aprendizagem para os alunos, compreendendo sempre que os alunos são estimulados para manter e adotarem uma postura reflexiva e mentalmente crítica quando se trata de resolução de problemas em contagem, não devendo agir de forma mecânica tentando memorizar fórmulas. Pois segundo Roda (2018) se os alunos gravarem as fórmulas agirão como um robô e nãoaprendendo o que o professor está ensinando ou tentando ensinar dentro da vivênciaparticular de cada um.

2.4 Fatorial

Nesse momento será, explicação as fórmulas que são usadas nas aulas de matematica, no assunto fatorial, e na seção 4.1 será explicado o conteúdo sem o uso de fórmulas. Dito isso, a fim de simplificar as fórmulas do número de arranjos e do número de permutação, a seguir será definido o símbolo fatorial. Seja *m* um número interio não negativo (*m* Є IN). Definimos fatorial de *m* (e indicamos por *m!)* por meio da relação:

$$M! = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot 3.2.1 \text{ para } m \geq 2$$

1! = 1

0! = 1

As definições *1!* E *0!* Serão justificadas posteriomente.

Exemplo:

3! = 3.2.1 = 6

4! = 4.3.2.1 = 24

5! = 5.4.3.2.1 = 120

O cáculo de *m!,* diretamente, torna-se trabalhsos à medida que aumenta. (10! = 3 628 800).

Entretanto, muitos cáculos podem ser simplificados se notamos que:

$$(n+1)! = (n + 1) \,.\, \underbrace{n \,.\, (n-1) \cdots 3.2.1}_{n!} = (n+1) \,.\, n!$$

Exemplos

a) Calcular $\frac{10!}{9!}$

Temos: $\frac{10}{9!} = \frac{10 \,.\, \cancel{9!}}{\cancel{9!}} = 10.$

b) Calcular $\frac{10!}{8!}$

Temos: $\frac{10}{8!} = \frac{10 \,.\, 9 \,.\, \cancel{8!}}{\cancel{8!}} = 90.$

c) Calcular $\frac{12!}{9!\,3!}$

Temos: $\frac{12!}{9!\,3!} = \frac{12.\,11.10.\,\cancel{9!}}{\cancel{9!}\,3!} = \frac{12.11.10}{3.2.1} = 220.$

2.5 Arranjo

Seja *M* um conjunto com m elementos, isto é, M = { a 1, a 2, ...a m }. Chamamos de arranjo dos *m* elementos tomados *r* a *r* (1 ≤ r ≤ *m*) a qualquer *r-upla* (sequênciade *r* elementos) formada com elementos de M, todos distintos.

Exemplo

M = { a, b, c, d}.

Os arranjos dos quatro elementos de M, tomados Dois a dois, são os pares ordenados (x, y) formados com elementos distintos de M.

Pelo princípio fundamental da contagem (parte B), o número de pares ordenados é:

$$4.3 = 12.$$

Fórmula do número de arranjo

Seja M= {a 1, a2, ..., am} e indiquemos por $A_{m,\,r}$ o número de arranjos dos *m* elementos tomados *r a r.*

Cada arranjo é uma sequência de *r* elementos, em que cada elemento pertence a M, e são todos distintos.

$$\underbrace{(\ -,\ -,-,\ .....,\ -)}$$

será: Pelo princípio fundamental da contagem (parte B), o número de arranjos $A_{m,\,r}$

$$\boxed{A_{m,\,r} = \underbrace{m\ .\ (m-1) ....[m - (r-1)]}_{r\ fatores}}$$

Em particular, ser *r* = 1, é fácil perceber que $A_{m,\,1} = m$. Notemos ainda que, deacordo com a definição que demos de arranjo, temos necessariamente $1 \leq r \leq m$.

As fórmulas do número de arranjo e do número de permutações também podem ser simplificadas com a notação fatorial.

De fato:

$P_m = m\ .\ (m-1)\ ....\ 3.\ 2.\ 1 = m!$

$A_{m,\,r} = m\ .\ (m-1)\ ....(m - r + 1) =$

$$= m\ .\ (m-1)\ . . . (m - r + 1)\ \frac{.\ (m - r)\ .\ (m-r-1)\ ....3.2.1}{(m - r)\ .\ (m-r-1)\ .....3.2.1}$$

$$\boxed{A_{m,\,r} = \frac{m!}{(m - r)!}}$$

$1! = 1$

Em particular

E a fórmula $P_m = m!$ é válido $\forall m \in$ $P_1 = 1$

IN *E ainda:

Em particular
$$\begin{cases} A_{m,1} = m \quad \forall m \in \mathbb{N}^* \\ \dfrac{m!}{(m-1)!} = m \quad \forall m \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

2.5.1 Arranjo com repetição

Seja M um conjunto com M elementos, isto é, $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Chamamos arranjo com repetição dos *M* elementos, tomados *r* a *r*, toda *r-upla* ordenada (sequência de tamanho *r*) formada com elementos de *M* não necessariamente distintos.

Exemplo:

Uma urna contém uma bola vermelha (*V),* uma branca (B) e uma azul (A). Uma bola é extraída, observada sua cor e reposta na urna. Em seguida outra bola é extraída e observada sua cor. Quantas são as possíveis sequências de cores observadas?

Temos:

Cada sequência é um par ordenado de cores (x, y) em que $x, y \in M = \{V, B, A\}$.

Logo, pelo princípio fundamental da contagem (parte A), o número de pares é:

$$3.\ 3. = 9$$

Fórmula do número de arranjo com repetição

Seja $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ e indiquemos por $(AR)_{m,r}$ o número de arranjos comrepetição de *m* elementos tomados *r* a *r.*

Cada arranjo com repetição é uma sequência de *r* elementos, em que cada elementos pertence a M.

$$\underbrace{(-, -, -, \ldots, -)}_{r \text{ elementos}}$$

Pelo princípio fundamental da contagem (parte A), o número de arranjos (*AR*) $_{m,\,r}$ será:

$$\boxed{(AR)_{m,\,r} = \underbrace{m \,.\, m \,......m}_{r \text{ vezes}} = m^{r}}$$

Observamos que, se r = 1, $(AR)_{m,\,1} = m$ e a fórmula acima continua válida ~~∀~~ r

Є *IN*.*

2.6 Permutação Simples

Seja M um conjunto com *m* elementos, isto é, M = {a1, a2,......., am}. Chamamaos de permutação dos *m* elementos a todo arranjo em que *r = m.*

Exemplo: Seja M = {a, b, c}.

As permutação dos elementos de M são todos os arranjos constituídos de 3 elementos. São eles: (a, b, c) (b,a, c) (c, a, b) (a, c, b) (b, c, a) (c, b, a).

Fórmula do número de permutações.

Seja M o conjunto M = {a1, a2,......., am} e indiquemos por P_m o número de permutações dos *m* elementos de M.

Temos:

$$P_m = A_{m,m}$$

Logo: $P_m = m\,(m-1)\,.\,(m-2) \cdot\!\!\ldots\!\cdot [\,m-(m-1)]$

$$\boxed{P_m = m \,.\, (m-1) \,.\, (m-2) \cdot\!\!\ldots\!\cdot\; 3.\,2.\,1}$$

Em particular, se m = 1, é fácil perceber que $P_1 = 1$

2.7 Combinação Simples

De acordo com Vasconcelos e Rocha (2019), postulam que quando estudamos arranjos simples de n objetos de p a p, onde 1 ≤ p ≤ n, vemos que eles consistem em selecionar e ordenar p desses objetos.

Então para os números 2, 3, 4 e 5, se escolhermos 3 e 4, por exemplo, podemos ordená-los de duas maneiras: 34 ou 43; se escolhermos os números 2 e 5, também podemos ordená-los em dois formas classificado por: 25 ou 52; escolha os números 2, 3 e 5 e podemos classificá-los de seis maneiras: 235, 253, 325, 352, 523 ou 532. Pode-se ver que para cada escolha de p entre n objetos dados, temos múltiplas ordenações consistentes com o número de permutações de p objetos, ou seja, é igual a pp.

Fórmula

$$C_{m,r} = X = \binom{m}{r} = \frac{m!}{r!\,(m-r)!}$$

Seja *M* um conjunto com m elementos, isto é, *M* = {*a1, a2, ..., am*}. Chamamos decombinações dos *m* elementos, tomados *r* a *r*, aos subconjuntos de M constituídos de*r* elementos.

Exemplo

M = {a,b,c,d}.

As combinações dos 4 elementos, tomados dois a dois, são os subconjuntos:

{a,b} {b,c} {c,d}

{a,b} {b,d}

{a,d}

Notemos que {a,b} = {b,a} pois, conforme definimos, combinação é um conjunto, portanto não depende da ordem dos elementos. É importante notar a diferença entre uma combinação (conjunto) e uma sequência, pois numa combinação não importa a ordem dos elementos. A própria natureza do problema a ser resolvido nos dirá se os agrupamentos a serem formados dependem ou não da ordem em que figuram os elementos.

2.8 Permutação com elemetos repetidos

Consideramos a palavra ANA e procuramos seus anagramas. Vamos indiar por *A** o segundo A. Teremos, então:

ANA * , A A * N, N A A *, N A* A, A* N A, A* A N

(1) (2) (3) (4) (5) (6)

Notemos que as permutações:

(1) e (5) são iguais

(2) e (6) são iguais

(3) e (4) são iguais

Na verdade, não temos 3! = 6 permutações distintas, mas apenas 3, que são:

ANA, AAN, N A A.

Essa diminuição do número de permutação decorreu do fato de termos duas letras iguais, *A* e *A,* no conjunto das letras a serem permutadas. É intuitivo perceber que o fato de existirem letras repetidas para serem permutadas acareta uma diminuição do número de permutações, em relação ao número que teríamos, se todas fossem distintas.

2.9 A resolução de problemas: estratégia didática e cognitiva

"A Resolução de Problemas é um método eficaz para desenvolver o raciocínio e para motivar os alunos para o estudo da Matemática. O processo ensino e aprendizagem pode ser desenvolvido através de desafios, problemas interessantes que possam ser explorados e não apenas resolvidos" (Lupinacci e Botin, 2004).No entanto,

> em sala de aula, constata-se um uso exagerado de regras, resoluções por meio de procedimentos padronizados, desinteressantes para professores e alunos, empregando-se problemas rotineiros e que não desenvolvem a criatividade e autonomia em matemática (SOUZA, 2005, p.01).

Souza (2005), um dos principais problemas relacionado ao ensino de Matemática corresponde na relação entre a Matemática aplicada no cotidiano e a Matemática que é ensinada na escola, que privilegia a memorização, ou seja, a repetição. Esse processo de ensino faz com queos alunos quase não alcancem uma visão do seu próprio conhecimento ou onde se deparar com situações específicas fora do contexto escolar.

Isso faz com que os alunos esqueçam com facilidade, apresentando uma dificuldade no que corresponde aos níveis de ensino. As críticas a esses aspectos têm apontado a necessidade de contextualizar os conteúdos a seremtrabalhados na escola, de forma a torná-los mais significativos. Nesse contexto, a resolução de problemas tem se mostrado uma das alternativas que podem contribuir para melhorar o processo de compreensão dos alunos.

Vale dizer que desde 1970 estudos de revisão sistemáticas apontam sobre a resolução de problemas, justamente para enfatizar sobre adequação do ensino a essa metodologia, onde até nos dias atuais ainda esse trabalho em sala de aula ainda é insipiente e insuficiente para render os resultados desejados (GUIMARÃES, 2005).

Desse modo, todos esses fatores são defendidos por Onuchic (1999, p. 211)“a resolução de problemas como metodologia de ensino, o aluno tanto aprende matemática resolvendo problemas como aprende matemática para resolver problemas”.

Dessa forma, desde os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 2000, p. 44) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (2017) advertem que para o aluno resolver determinado problema faz-se necessário seguir alguns procedimentos dentre eles são: “elaborar um ou vários procedimentos de resolução (como, por exemplo, realizar simulações, fazer tentativas, formula hipóteses); comparar seus resultados com os de outros alunos; validar seus procedimentos”.

Existem maneiras que devem ser disponibilizadas para os launos, para que possa resolver um problema e não apenas passar aos alunos uma maneira mecânica de tentar aplicar e armazenar informação, “qualquer situação que peça uma solução, trazendo aos sujeitos a necessidade de descobrir relações e explorá-las, de elaborar hipóteses e verificá-las” (MORO, 1998, p. 7).

De acordo com Ponte e Serrazina (2000, p. 52), a “[...] resolução de um problema constitui um processo de elevado nível de complexidade, que envolve os processos mais simples de representar e relacionar”.

Fazendo-se necessário que os alunos compreendam e entendam a interpretação, os gráficos, as convenções, catalogações e sugere buscar regularidade e generalização entre diversos outros conceitos.

Ressalta-se que a resolução de problemas é um processo em que implica o sujeito à elaboração, em que os alunos estão sempre adaptados a encontrar a matemática de maneira mais geral e não na sua forma acabada. Isto muitas das vezes é refletido pelo professor, que acredita que está ensinando aos alunos a resolver determinada questão/problema, mostrando apenas uma maneira arcaica e mecânica na lousa, não tendo um retorno eficaz dos alunos noque tange ao processo de aprendizagem (TEXEIRA, *et al*., 2011).

Dessa maneira, ao tentar resolver qualquer problema os alunos devem criar mecanismos e estratégias, devem achar meios pertinentes para cada caso em questão, essa forma possibilita ao professor identificar diferentes raciocínios, no que corresponde principalmente ao processo multiplicativo.

3. PERCURSOS METODOLÓGICOS

3.1 A abordagem

A presente pesquisa de dissertação ocorreu especificamente com desenvolvimento do conteúdo de Análise Combinatória, tendo como participantes 12 alunos matriculados em uma turma de segundo ano de Ensino Médio de uma escola, localizada na cidade de Capanema, no Estado do Pará, com a faixa etária de 15 a 16 anos.

O conjunto de atividades desenvolvidas ao longo deste trabalho tem como produto educacional uma sequência didática baseada na Unidade de Ensino o princípio fundamental da contagem, sem o uso de fórmulas, e com base na visão dos alunos, para proporcionar uma aprendizagem significativa aos mesmos.

3.2 Produto Educacional

O trabalho foi desenvolvido na escola, por meio de aplicação de atividade, priorizando o conhecimento trazido pelo aluno, para que este possa ser relacionado de modo significativo com o que será abordado durante a aula.

O objetivo do estudo é possibilitar ao aluno a conhecer novos meios de ensino que o faça sair da rotina da aprendizagem mecânica, atiçando seu interesse em aprender, de maneira a considerar seu conhecimento e utilizando-o como instrumento para ajudar a aprender novos conceitos.

A revitalização deste estudo baseia-se na abordagem qualitativa. Para Bogdan e Biklen (1982, p.53), a abordagem qualitiva, "[...] envolve a obtenção de dados descritivos, obtidos no contato direto de pesquisador com a situação encontrada, enfatiza mais o processo do que o produto e se preocupa em retratar a perspectiva dos participantes".

Caracterizamos esta pesquisa como objetivos de cunho exploratória como design de Estudo de Caso a partir dos pressupostos de Yin (2010, p. 13) que enfatiza compreender a realidade como "uma investigação empírica que estuda um fenômeno contemporâneo dentro de vida real, especialmente quando as fronteiras entre o fenômeno e o contexto não são absolutamente evidentes".

É importante frisar que a abordagem utilizada no desenvolver do produto educacional buscou observar e analisar continuamente as respostas e conversas expostas pelos alunos de maneira individual e coletiva. "No espaço educativo, os processos são mais relevantes que os produtos, não fazendo jus à realidade, se reduzida apenas às manifestações empiricamente mensuráveis” (DEMO,2005, p.105).

A fim de tornar a investigação compatível com o período proposto, delimitamos o objeto de estudo, optando por trabalhar com uma turma específica. Para a construção dos dados a empiria ou as tarefas/atividades apoiaram-se na resolução de problemas. “A solução de problemas baseia-se na apresentação de situações abertas e sugestivas que exijam dos alunos uma atitude ativa ou um esforço para buscar suas próprias respostas, ou simplesmente suas próprias noções” (RODA,2018, p.45).

Como dinâmica foi ofertado momentos de aula em que de modo sistematizado, eu como professor da turma, ofertava explicação sobre o conteúdo abordado neste estudo e depois ofertamos momentos de vivências deste conteúdo fazendo com que os alunos, por meio da escrita explicitassem sua compreensão do objeto matemático.

O primeiro momento com a turma ocorreu em outubro e novembro do 2020, em que foram realizadas explanações do conteúdo de acordo com o horário escolar, terças e quintas-feiras. Em função da Pandemia do Covid-19, as aulas passaram a ser remotas, em que a continuação das aulas passaram a ser remotas, em que a continuação das aulas foram por meio de vídeo-conferências utilizando a plataforma Google.

Foram aplicadas um total de 6 (seis) hora-aulas, presencial. Na primeira e na segunda aula, ocorreu a explicação dos conteúdos de Análise Combinatória. Na terceira aula vivenciamos o ensino formal de Análise Combinatória de acordo com o ritual tradicional, com as fórmulas. Na quarta aula foi vivenciado o ensino deste mesmo assunto sem o uso de fómulas. Nessas seis aulas ocorreu: a) explicação do assunto; b) ensinando o assunto com as fórmulas; c) ensinando o assunto sem o uso de fórmulas; d) aplicação da atividade; e) resolução; f) correção das atvidades. As aulas com o uso de fórmulas e sem o uso de fórmulas, foi para mostrar aos alunos duas vertentes, com a fórmula e sem a fórmulas, ensinando a eles. E por fim, na quinta e na sexta aula foi vivenciado a execução das tarefas pelos alunos no próposito deste estudo com vistas a levantar dados para esta pesquisa e para a aprendizagem dos alunos nos diferentes tipos da aplicação do PFC em cada um desses problemas, buscamos verificar como os alunos do Ensino Médio resolveriam problemas envolvendo raciocínio combinatório.No decorrer do planejamento das aulas ministradas,os alunos não usaram as fómulas para resolver as atividades que serão apresentadas na seção 4.1 de Análise Combinatória e mantiveram o foco nas atividades do Princípio Fundamental da Contagem (PFC). A tarefa proposta – sequência didática – continha 12 itens envolvendo Análise Combinatória.

Essa atividade foi interessante tendo em vista que tivemos a oportunidade de realiza acompanhamento da aprendizagem. Em relação ao conteúdo, foi necessário retomarmos a explicação, quando os alunos não dominavam o objeto matemático, de modo mais específico os conceitos de Arranjo, Permutação e Combinação.

3.3 Sequência Didática

Com base nesse contexto o estudo se propõe em respondeer a seguinte pergunta de pesquisa: de que maneira as tarefas matemáticas envolvendo a contagem, realizadas em sala de aula, favorecem a aprendizagem de Análise Combinatória?

Tais resultados foram obtidos e compilados no capítulo IV deste trabalho.

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1 Aplicação do Princípio Fundamental da Contagem (PFC)

Nesse momento, apresentamos dois exemplos do Princípio Fundamental da Contagem (PFC) utilizado como método principal na resolução de exercícios da Análise Combinatória. A seguir apresenta-se o primeiro exemplo:

João tem 4 (quatro) calças (A, B, C, D) e 3 (três) camisas (a, b, c), João pode vestir de “x” maneiras diferentes, isto é:

1) A, a
2) A, b
3) A, c
4) B, a
5) B, b
6) B, c
7) C, a
8) C, b
9) C, c
10) D, a
11) D, b
12) D, c

Dessa forma percebe-se que João pode fazer até 12 (doze) combinações distintas para se vestir. Na análise combinatória é possível usar em operações pequenas o diagrama da árvore de possibilidades.

Destacamos que na maioria do processo de contagem para um conjunto pequeno de elementos o processo da árvore das possibilidades sempre será eficaz.

Exemplo 02:

Seu Adelson possui uma lanchonete que funciona na cantina da escola. Certatarde ele coloca à disposição de sua clientela 6 tipos de salgados e 4 tipos de suco.

De quantas maneiras diferentes um aluno poderá fazer a escolha de um lanchecomposto por um suco e um salgado?

Identificando os salgados por S1, S2, S3, S4, S5 e S6 e os sucos por s1, s2, s3 e s4, o total de possibilidades oferecidos pela árvore em questão seria:

1) S1, s1
2) S1, s2
3) S1, s3
4) S1, s4
5) S2, s1
6) S2, s2
7) S2, s3
8) S2, s4

Percebemos que o nosso universo de escolha para esse caso já é muito maior. E quanto mais aumentamos o número de elementos nos nossos conjuntos, maiores serão nossos resultados. Daí a importância de compreendermos o processo para bem utilizá-lo.

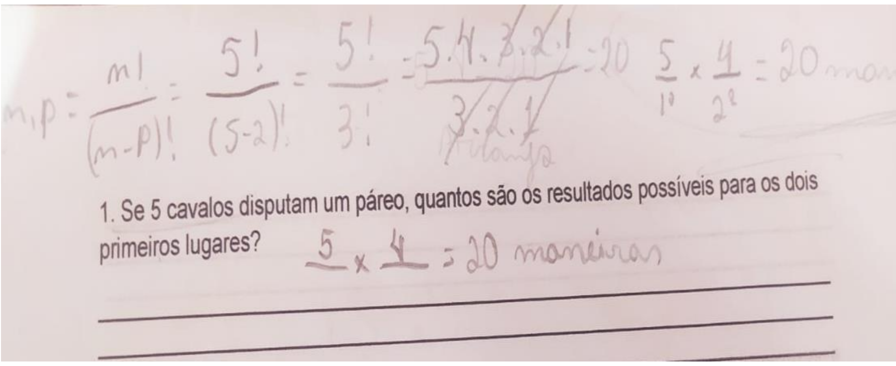
5. Resolução das atividades dos alunos

Esta atividade introdutória foi composta por um questionário de 13 (treze) itens mostrados nas figuras a seguir, que buscavam identificar o conhecimento dos alunos a respeito do assunto a ser trabalhado. Será descrito cada exercício que foi desenvolvidos com os alunos.

A ideia principal da resolução de problemas é habituar o aluno a analisar cuidadosamente cada problema. Portanto, para resolver problemas de contagem o aluno precisará de um senso crítico na análise do problema, ter calma ao resolver, não ser precipitado em suas decisões.

Problema 1 - Se 5 cavalos disputam um páreo, quantos são os resultados possíveis para os dois primeiros lugares.

Figura 3 - Resolução do aluno.

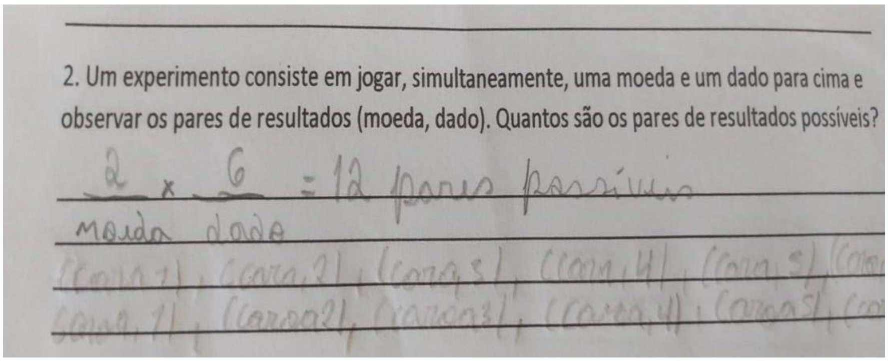


Fonte: Autor, dados da pesquisa, 2022.

Nessa atividade, o aluno viu que para o primeiro lugar, havia 5 possibilidades, e para o segundo lugar, como ele viu que já tinha uma possibilidade no primeiro, dentre as 5, restaram 4 possibilidades, para o segundo lugar. Logo, usando o princípio multiplicativo, o resultado deu 20 maneiras.

Problema 2 - Um experimento consiste em jogar, simultaneamente, uma moeda e um dado para cima e observar os pares de resultados (moeda, dado). Quantos são os pares de resultados possíveis?

Figura 4 - Resolução do aluno


2. Um experimento consiste em jogar, simultaneamente, uma moeda e um dado para cima e observar os pares de resultados (moeda, dado). Quantos são os pares de resultados possíveis?

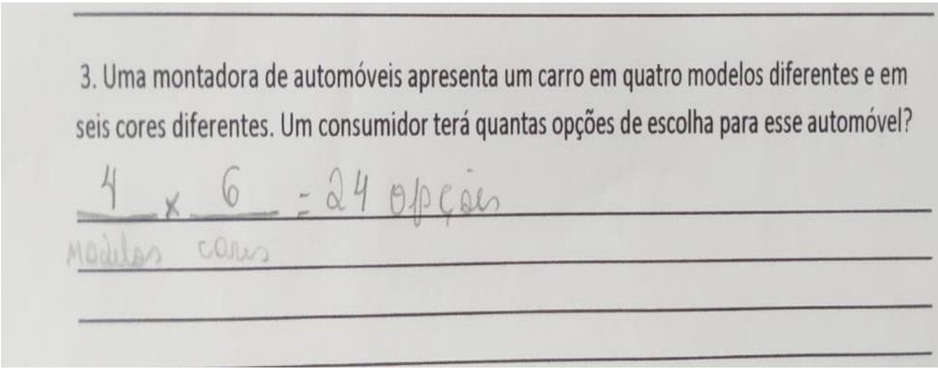
2 x 6 = 12 pares possíveis
moeda dado
(cara,1), (cara,2), (cara,3), (cara,4), (cara,5), (cara
(coroa,1), (coroa2), (coroa3), (coroa,4), (coroa5), (co

Fonte: Autor, dados da pesquisa, 2022

Nessa resolução, o aluno verificou, que em uma moeda só tem cara e coroa, e para o dado são seis possibilidades, logo, usou o princípio de multiplicativo, assim, obtendo dozes pares possíveis.

Problema 3- Uma montadora de automóveis apresenta um carro em quatro modelos diferentes e em seis cores diferentes. Um consumidor terá quantas opções de escolha para esse automóvel?

Figura 5 - Resolução do aluno


3. Uma montadora de automóveis apresenta um carro em quatro modelos diferentes e em seis cores diferentes. Um consumidor terá quantas opções de escolha para esse automóvel?

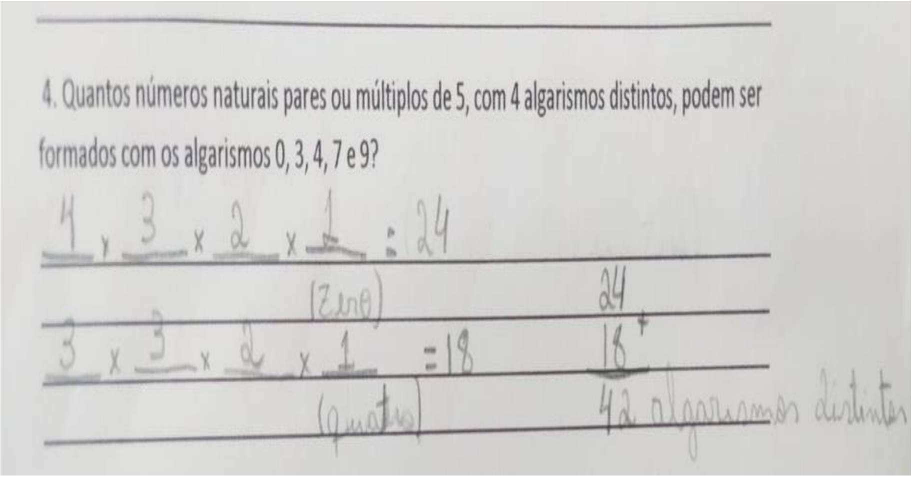
4 x 6 = 24 opções
modelos cores

Fonte: Autor, dados da pesquisa, 2022

Esse aluno chamou atenção, ao resolver a atividade usando a árvore de possibilidade, escrevendo de várias maneiras diferentes.

Problema 4 - Quantos números naturais pares ou múltiplos de 5, com 4 algarismos distintos, podem ser formados com os algarismos 0, 3, 4, 7 e 9?

Figura 6 - Resolução do aluno


4. Quantos números naturais pares ou múltiplos de 5, com 4 algarismos distintos, podem ser formados com os algarismos 0, 3, 4, 7 e 9?

4 x 3 x 2 x 1 = 24
(zero)
3 x 3 x 2 x 1 = 18
(quatro)
24 + 18 = 42 algarismos distintos

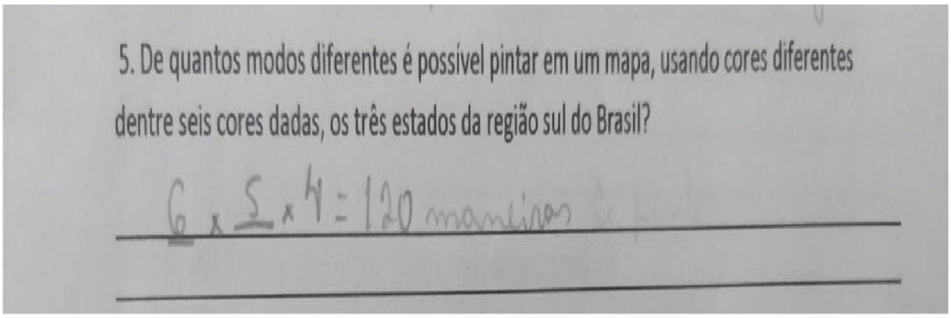
Fonte: Autor, dados da pesquisa, 2022

No primeiro momento, o aluno verificou, os números terminados em 0, que são pares e ao mesmo tempo são multiplico de 5, assim havendo 24 números naturais pares e multiplico de 5, para estes números terminados em 0.

No segundo momento, ele verificou os números terminado em 4, que são os números pares. Assim, havendo 18 números naturais pares.

Problema 5- De quantos modos diferentes é possível pintar em um mapa, usando cores diferentes dentre seis cores dadas, os três estados da região sul do Brasil?

Figura 7 - Resolução do aluno


5. De quantos modos diferentes é possível pintar em um mapa, usando cores diferentes dentre seis cores dadas, os três estados da região sul do Brasil?

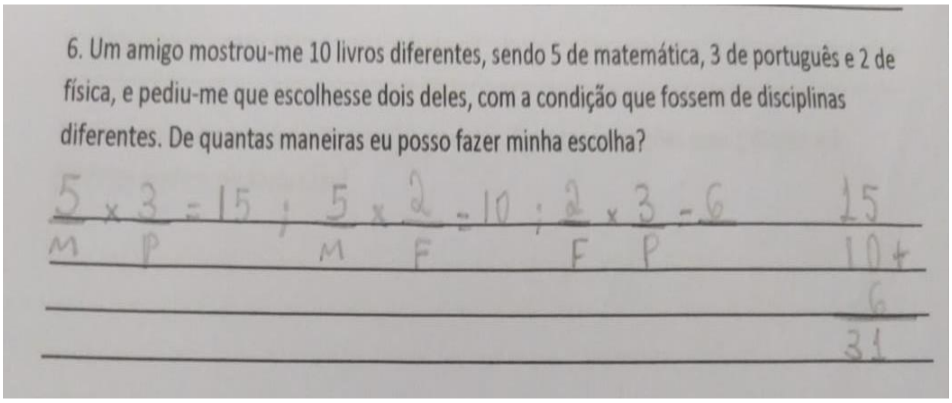
6 x 5 x 4 = 120 maneiras

Fonte: Autor, dados da pesquisa, 2022.

Para a primeira região o aluno verificou, que haveria 6 maneiras para pintar, assim, para a segunda restauram 5 maneiras, e para a terceira, restaram 4, logo usando o princípio multiplicativo, restaram 120 maneiras.

Problema 6 - Um amigo mostrou-me 10 livros diferentes, sendo 5 de matemática, 3 de português e 2 de física, e pediu-me que escolhesse dois deles, com a condição que fossem de disciplinas diferentes. De quantas maneiras eu posso fazer minha escolha?

Figura 8 - Resolução do aluno


6. Um amigo mostrou-me 10 livros diferentes, sendo 5 de matemática, 3 de português e 2 de física, e pediu-me que escolhesse dois deles, com a condição que fossem de disciplinas diferentes. De quantas maneiras eu posso fazer minha escolha?

5 x 3 = 15 ; 5 x 2 = 10 ; 2 x 3 = 6
M P M F F P

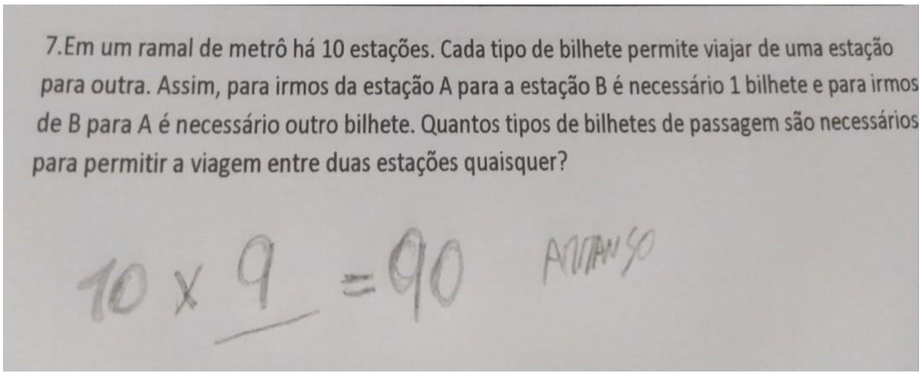
15
10 +
6
31

Fonte: Autor, dados da pesquisa, 2022

No primeiro momento o aluno, ele utilizou a possibilidade com o livro de matemática com o de português, assim, encontrando 15 maneiras. Entretanto, existe a possibilidade de utilizar o livro de matemática e o livro de física., que deram 10 maneiras, e por fim, também existe a possibilidade do livro de física e português, que deram um total de 6 maneiras, então, ele somou as 3 possibilidades, que deram um total de 31 maneiras.

Problema 7 - Em um ramal de metrô há 10 estações. Cada tipo de bilhete permite viajar de uma estação para outra. Assim, para irmos da estação A para a estação B é necessário 1 bilhete e para irmos de B para A é necessário outro bilhete. Quantos tipos de bilhetes de passagem são necessários para permitir a viagem entre duas estações quaisquer?

Figura 9 - Resolução do aluno

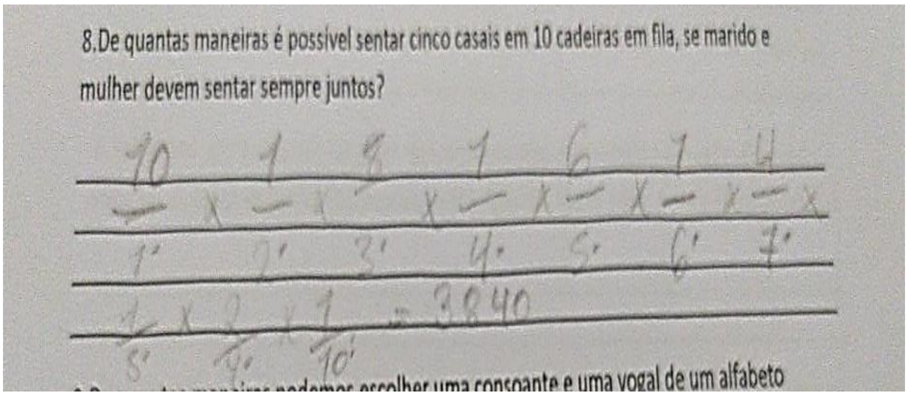


Fonte: Autor, dados da pesquisa, 2022

O aluno verificou que a viagem para duas avia 10 possibilidades, e para segunda havia o 9, usando o princípio multiplicativo, deram um total de 90 tipos de bilhetes.

Problema 8- De quantas maneiras é possível sentar cinco casais em 10 cadeiras em fila, se marido e mulher devem sentar-se sempre juntos?

Figura 10 - Resolução do aluno

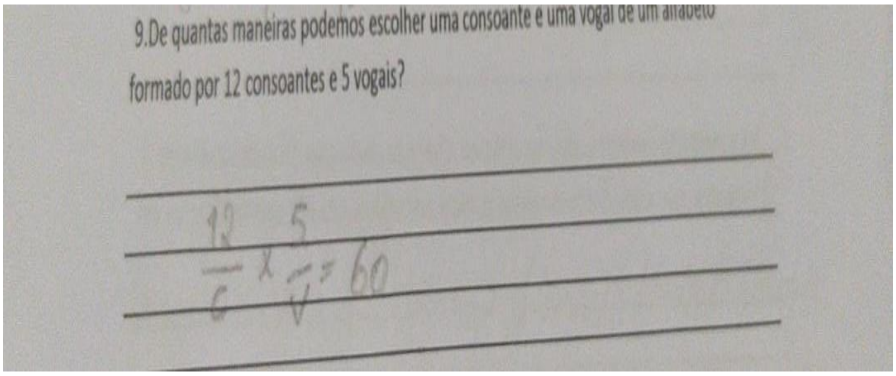


Fonte: Autor, dados da pesquisa, 2022.

A aluna verificou que para a primeira cadeira, havia 10 maneiras de uma das pessoas se sentarem, logo, na segunda cadeira, só haverá uma maneira, já que a questão diz que o marido e a mulher devem sentar sempre juntos. Usando o mesmo raciocínio para a mesmas cadeiras, a terceira cadeira, haverá 8 maneiras e para 4, apenas uma maneira. Usando o mesmo raciocínio até o final, a aluna obteve a multiplicação dessas possibilidades chegando ao um total de 3.840 maneiras dos casais se sentarem sempre juntos.

Problema 9 - De quantas maneiras podemos escolher uma consoante e uma vogal de um alfabeto formado por 12 consoantes e 5 vogais?

Figura 11 - Resolução do aluno

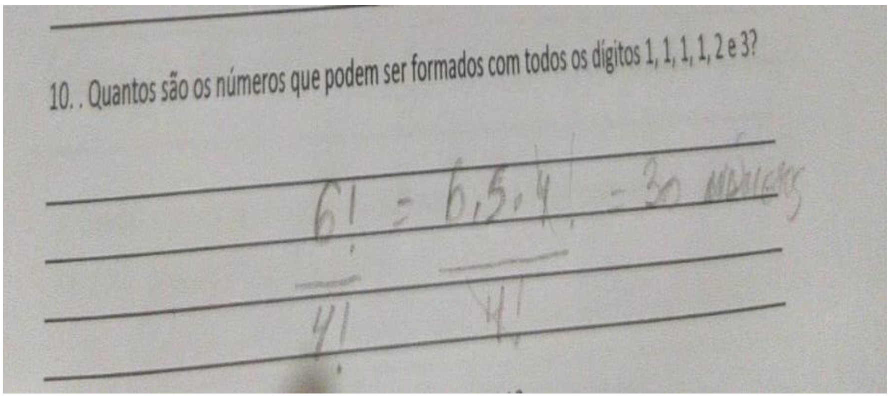


Fonte: Autor, dados da pesquisa, 2022

Nessa questão, a aluna verificou que para as consoantes temos 12 possibilidades e para as vogais 5 possibilidades, usando o princípio multiplicativos, tendo um total de 60 maneiras de escolher uma consoante e uma vogal.

Problema 10 - Quantos são os números que podem ser formados com todos os dígitos 1, 1, 1, 1, 2 e 3?

Figura 12 - Resolução do aluno

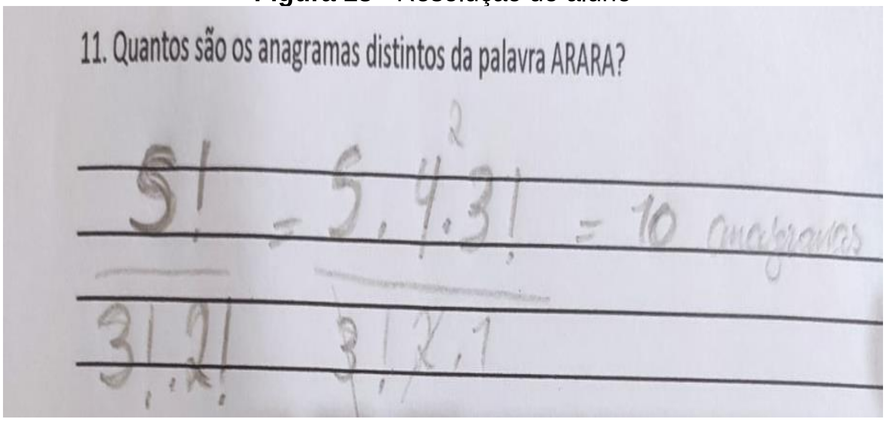


Fonte: Autor, dados da pesquisa, 2022

O aluno usou seu conhecimento em permutação com repetição, assim fazendo a razão entre seis fatoriais (que se trata do número de dígitos) sobre o quatro fatorial, que é o digito um que se repete quatro vezes. Assim havendo 30 números distintos.

Problema 11- Quantos são os anagramas distintos da palavra ARARA?

Figura 13 - Resolução do aluno

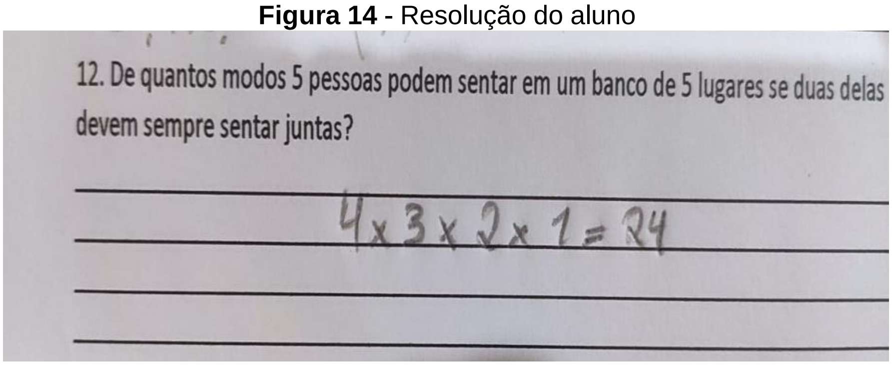


Fonte: Autor, dados da pesquisa, 2022

O aluno usou o conhecimento de permutação com repetição, assim fazendo a razão dentre 5 fatorial (que é o número de letras que tem na palavra ARARA), pela sua repetição de três fatorial e dois fatorial, (que é a letra A, que se repeti três vezes e a letra R, que se repete duas vezes), assim obtendo dez anagrama.

Problema 12- De quantos modos 5 pessoas podem sentar-se em um banco de 5 lugares se duas delas devem sempre se sentar juntas?

Figura 14 - Resolução do aluno

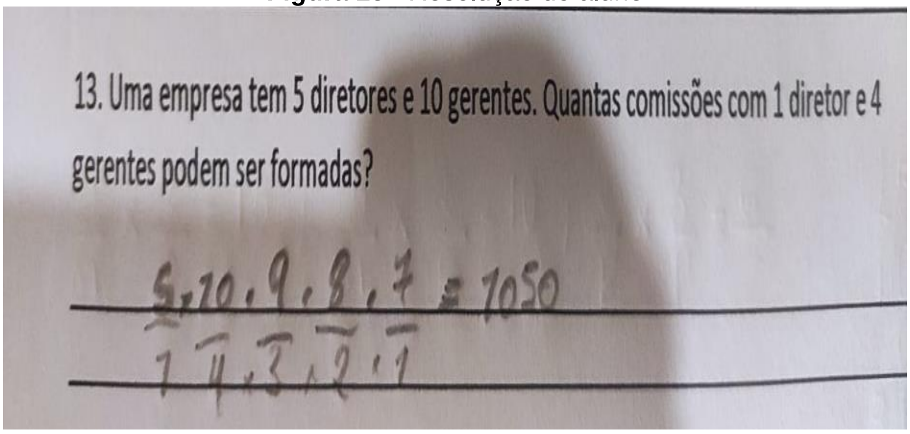


Fonte: Autor, dados da pesquisa, 2022

O aluno aplicou o conceito de permutação, e verificou que duas pessoas, tinham que estar sempre juntas, assim, ao invés de ser 5 fatorais, são 4 fatoriais, que deu 24 modos de se sentar.

Problema 13 - Uma empresa tem 5 diretores e 10 gerentes. Quantas comissões com 1 diretor e 4 gerentes podem ser formadas?

Figura 15 - Resolução do aluno



Fonte: Autor, dados da pesquisa, 2022

O aluno verificou que para o cargo de diretores, tem 5 possibilidades, e para o cargo de gerente, a primeira vaga, tem 10 gerentes disponíveis, e para segunda vaga 9, para terceira 8, e para a quarta 7. Como a ordem não importa, ele dividiu por4 fatorial. Então, ele pegou o número de diretores e multiplicou pelas possibilidades de número de gerente, que foram 210, obtendo o resultado de 1050 maneira de formaessa comissão.

A partir das informações obtidas, dos textos consultados e da pesquisa procedida com os alunos, extraímos os aspectos relacionados com as estratégias de resolução: problemas multiplicativos envolvendo combinatória, dessa maneira, foi possível verificar que problemas envolvendo diferentes tipos de agrupamentos no ensino médio podem ser resolvidos sem usar nenhuma das fórmulas que nos são passadas neste modelo de ensino.

Também é possível verificar que as principais fórmulas da análise combinatória vista no ensino médio, que são usadas para lidar com problemas de contagem são resultado direto do Princípio Fundamental da Contagem.

Como resultado, há uma boa compreensão na criatividade ao construir uma solução para um problema sem usar fórmulas tradicionais. Por isso, valorizamos o raciocínio lógico matemático e focamos em fórmulas que os alunos precisam memorizar na maior parte do tempo.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Consideramos que ao logo da construção das etapas das atividades houve a necessidade de uma adaptação para que fosse possível fazer a aplicação de maneira hibrida, uma vez que alguns alunos não poderiam participar de todas as aulas de modo presencial por conta da pandemia causada pelo COVID-19, porém isso não impede que os objetivos gerados por esta dissertação seja aplicado de maneira 100% presencial ou 100% online em um outro momento.

A dissertação aqui apresentada, tratou de averiguar em que termos o ensino da Análise Combinatória maximiza a compreensão do aluno sobre contagem, com o a intenção de despertar no aluno motivação, interesse em aprender e relacionar o conhecimento prévio dos mesmos com os conceitos apresentados durante as aulas. A aplicação ocorreu de maneira hibrida, devido ao momento de pandemia vivenciado por todos, sendo utilizado ferramentas gratuitas da plataforma Google para que os alunos que não pudessem estar presentes em sala de aula também tivessem a oportunidade de receber o conteúdo ministrado em sala.

Muitos são os casos em que os alunos não demonstram interesse em aprender, mas cabe ao professor buscar identificar o real motivo que leva a esta situação, que por diversas vezes está no desenvolvimento das aulas propostas pelo professor que não considera o conhecimento trazido no cognitivo do aluno, as vezes não utilizando-se outros recursos, como atividade sem o uso de formulas em sala para auxiliam no processo de ensino, que possam despertar a curiosidade do aluno e faça com eles continuem a buscar o conhecimento.

Adicionalmente se identificou que existem lacunas na literatura relacionadas com a Análise Combinatória, desse modo, com esta investigação pretendeu-se maximizar a compreensão dos alunos sobre contagem, sem a utilização de fórmulas mecanizadas de arranjos, permutação e combinações, sendo desenvolvido exercícios somente por meio do uso do PFC (Princípio Fundamental da Contagem).

Esse foi o objetivo central desse trabalho desenvolvido com os alunos, sempre acreditamos que o aluno não precisa decorar uma fórmula, como era e ainda é ensinado em sala de aula. Vale dizer que conforme a situação dos exercícios é possível desenvolver cálculos utilizando apenas o Princípio Fundamental da Contagem, como foi demostrado nos resultados.

Dessa forma, foi possível ver que os alunos resolveram os exercícios de permutação de objetos, e outros exercícios variados onde a ordem da colocação destes foi desprezada. Ressaltamos que a proposta desse trabalho foi mostrar na prática para o aluno que a Análise Combinatória não é “um bicho de sete cabeça” como muitos relatam, e que podemos resolver é possível resolver os exercícios de baixa, média ou alta complexidade sem a aplicação de inúmeras fórmulas para representar: arranjos, permutações ou combinações.

O que notamos alguns alunos que apresentaram dificuldade em resolver alguns exercícios, foi a falta de atenção ou compreensão do enunciado da questão, pois os demais exercidos todos conseguiram resolver, somente a questão B, que não foi absorvida por todos de forma mais geral.

Vale ressaltar que alguns alunos falam de dificuldades em relação a Análise Combinatória justamente pelo motivo de acreditar que o único meio de resolução destes exercícios é decorando fórmulas. No entanto, foi possível verificar no resultado deste trabalho que não é necessário utilizar fórmulas, isto é, os exercícios foram resolvidos com uma única ferramenta: O PFC.

As atividades geradas e planejadas para os alunos foram com o objetivo de realizar um conjunto de tarefas matemáticas sobre análise combinatória; sendo possível identificar os elementos que evidenciará a aprendizagem conceitual da análise combinatória como elemento fortalecedor do processo de contagem.

Com a resolução das atividades dos alunos foi possível analisar as estratégias que os alunos expressam na Resolução dos Problemas, conforme demostrado no resultado do estudo. Vale lembrar, que a partir do trabalho aqui descrito tem por finalidade trazer uma proposta de ensino que possa facilitar a aprendizagem do aluno e que possa ser usado por outros professores com esta intenção. Buscou-se manter um tempo de trabalho em sala que fosse compatível com o já disposto no planejamento escola para o desenvolvimento deste tema. Porém o produto não é fechado, podendo sofrer modificações de acordo com a necessidade e realidade do local e público que será aplicado.

A proposta de usar o PFC como metodologia de ensino na resolução de exercícios da Análise Combinatória foi executada com sucesso. Notamos que os alunos tiveram uma ótima interação e um excelente empenho, com acertos e erros, que são comuns em qualquer turma e em qualquer grau de escolaridade, mas os alunos conseguiram compreender e aprender a matéria e a metodologia que lhes foram ensinados. Esperamos que este estudo possa servir de base teórica para os outros autores, especialmente para os docentes da área, com intuito de apresentar os mecanismos por meio do uso da ferramenta PFC.

REFERÊNCIAS

AQUINO, Claudivania de Alencar de. **Introduzindo o Pensamento Combinatório nos Anos Finais do Ensino Fundamental: uma proposta de ensino.** Juazeiro-BA. 2013. Disponível em: https://portais.univasf.edu.br/profmat/dissertacoes/claudivania_de_alencar_de_aquino_turma_2011.pdf. Acesso em: 31, maio. 2021.

BOGDAN, R. e BIKLEN, S.K*.* **Qualitative research for education***.* Boston, Allynand Bacon, inc., 1982.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto/Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 2000. v. 3.

BRASIL. BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR, EDUCAÇÃO É BASE. 2017. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=79601-anexo-texto-bncc-reexportado-pdf-2&category_slug=dezembro-2017-pdf&Itemid=30192. Acesso em: 30, jun. 2021.

CONCEIÇÃO, Dérick de Carvalho.**O ensino de análise combinatória no ensino médio por atividades**.Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino deMatemática) –Universidade doEstado do Pará. Belém,2019.

DEMO, P. **Teoria e prática da avaliação qualitativa**. Rio de Janeiro: PERSPECTIVAS, Campos dos Goytacazes, v.4, n.7, p. 106-115, jan./jul.2005

FREIRE, Paulo. **Pedagogia do oprimido.** 17. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra,1987.

HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de matemática elementar:** combinatória probabilidade**.** 6. ed. São Paulo: Atual, 1993.

LIMA, Elon Lages; *et al*. **A Matemática do Ensino Médio**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LUPINACCI, M. L. V. e BOTIN, M. L. M. **Resolução de problemas no ensino de matemática.** Anais do VIII.Encontro Nacional de Educação Matemática, Recife, p. 1–5.

MORO, M. L. F. Adição/Subtração: Os caminhos de sua psicogênese na aprendizagem. **VII simpósio nacional de pesquisa e intercâmbio científico**. Anais.Gramado, 1998.

MORGADO, Augusto; CARVALHO, João; CARVALHO, Paulo; FERNANDEZ, Pedro. **Análise combinatória e probabilidade.** Coleção do professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática – SBM. 9. ed. Rio de Janeiro, 1991.

POLYA, George. O Ensino por meio de problemas**.** In: **Revista do Professor de Matemática**, n.7. São Paulo: SBM, 1985, p.11-16.

PONTE, J. P.; SERRAZINA, M. de L. **Didática da matemática do 1º ciclo.** Lisboa: Universidade Aberta, 2000.

PONTES, Edel Alexandre Silva. Método de Polya pata resolução de problemas matemáticos: uma proposta metodológica para o ensino e aprendizagem de matemática na educação básica. **HOLOS**, v.3, p.1-9, 2019.

RODA, Thiago Miguel**. Análise Combinatória:** Uma abordagem diferenciada sema utilização de fórmulas. São Carlos, 2018. Disponível em: https://repositorio.ufscar.br/bitstream/handle/ufscar/10400/RODA_Thiago_2018.pdf?sequence=4&isAllowed=y. Acesso em: 15, mar. 2022.

SOUZA, Ariana Bezerra de. **A resolução de problemas como estratégia didática para o ensino da matemática.** Brasília-DF. 2005. Disponível em: https://d1wqtxts1xzle7.cloudfront.net/53624163/Ariana_Bezerra_de_Sousa.pdf?1498135670=&response-content-disposition=inlin. Acesso em: 14, dez. 2020.

TEXEIRA, Leny R. M. Edileni; CAMPOS, G. J. de; VASCONCELLOS, Mônica; GUIMARÃES, Sheila Denize. Problemas multiplicativos envolvendo combinatória: estratégias de resolução empregadas por alunos do Ensino Fundamental público. **Educ. rev.** no.se1 Curitiba. 2011.

VAZQUEZ. C. M. R.; NOGUTI, F. C. H. N. Análise Combinatória: Alguns Aspectos Históricos e uma Abordagem Pedagógica. In: VIII Encontro Nacional de Educação matemática. Anais... Recife, 2004. Disponível em: http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/05/1MC17572744800.pdf. Acesso em 16 setembro 2021.

Yin, R. K. **Estudo de caso**: planejamento e métodos. Porto Alegre: Bookman, 2010.