Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Matemática e Estatística

Raquel Gomes Rosa de Mendonça

Um retrato histórico da adoção do sistema numérico indo-arábico pela Europa Ocidental e o papel do *Liber abaci*

Rio de Janeiro

2021

Raquel Gomes Rosa de Mendonça

Um retrato histórico da adoção do sistema numérico indo-arábico pela Europa Ocidental e o papel do *Liber abaci*

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientadores: Prof. Dr. João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho
Prof.ª Dra. Patricia Nunes da Silva

Rio de Janeiro
2021

CATALOGAÇÃO NA FONTE

UERJ/REDE SIRIUS/BIBLIOTECA CTC-A

M539	Mendonça, Raquel Gomes Rosa de. Um retrato histórico da adoção do sistema numérico indo-arábico pela Europa Ocidental e o papel do Liber abaci / Raquel Gomes Rosa de Mendonça. – 2021. 150 f. : il. Orientador: João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho Coorientadora: Patricia Nunes da Silva Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística. 1. Números - História - Teses. 2. Ábaco - Teses. 3. Fibonacci, Números de - Teses. I. Carvalho, João Bosco Pitombeira Fernandes de. II. Silva, Patricia Nunes da. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. IV. Título. CDU 511(091)

Patricia Bello Meijinhos CRB7/5217 - Bibliotecária responsável pela elaboração da ficha catalográfica

Raquel Gomes Rosa de Mendonça

Um retrato histórico da adoção do sistema numérico indo-arábico pela Europa Ocidental e o papel do Liber abaci

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 30 de novembro de 2021.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho
(Orientador)
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof.ª Dra. Patrícia Nunes da Silva
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof. Dr. Leonardo Navarro de Carvalho
Universidade Federal Fluminense

Prof. Dr. Fernando Antonio de Araujo Carneiro
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Rio de Janeiro
2021

DEDICATÓRIA

À minha pequena Alice.

AGRADECIMENTOS

Inicialmente, agradeço aos meus pais Isaura e Eduardo (in memorian) que desde cedo me mostraram a importância dos estudos e me incentivaram nas escolhas dessa caminhada. Ao meu marido Lucas pelo suporte nessa jornada cuidando da nossa Alice.

Quero agradecer imensamente aos meus professores e orientadores Pitombeira e Patrícia por mesmo em meio às incertezas de uma pandemia me acolheram e exerceram com tamanha maestria o papel de professor. E me proporcionaram nos nossos diversos encontros virtuais discussões proveitosas e quanto conhecimento eu pude agregar nessas verdadeiras aulas particulares.

Educação não transforma o mundo. Educação muda pessoas. Pessoas transformam o mundo.

Carlos Rodrigues Brandão

RESUMO

MENDONÇA, Raquel Gomes Rosa de. *Um retrato histórico da adoção do sistema numérico indo-arábico pela Europa Ocidental e o papel do Liber abaci*. 2021. 141f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2021.

Este é um trabalho de pesquisa que consiste na elaboração de um material que possa fornecer suporte teórico ao professor de matemática no que se refere ao processo histórico da adoção do sistema numérico indo-arábico na Europa Ocidental. Para isso, a parte inicial desta pesquisa aborda a história da evolução dos números desde a talha até a construção do sistema indo-arábico. Além disso, apresenta a concepção numérica de povos indígenas do Brasil com o intuito de mostrar como o número é concebido e seu sistema é organizado por diversos povos. Sobre o processo de adoção é apresentado a influência da revolução comercial, das escolas de ábaco e a influência da produção de manuais de ábaco e o papel Fibonacci nesse processo através do livro *Liber abaci*. Por fim, apresentamos a fim de comparação como a operação de multiplicação era realizada com sistema numérico romano e como é realizada por Fibonacci. No Apêndice, apresentamos um caderno com sugestões de atividades que devido à pandemia do Covid-19 não foi possível executá-lo em sala de aula.

Palavras-chave: História da matemática. História da numeração. Algarismos hindu-arábicos. Liber abaci. Fibonacci.

ABSTRACT

MENDONÇA, Raquel Gomes Rosa de. *A historical perspectivet of the adoption of the Indo-Arabic number system by Western Europe and the role of Liber abaci.* 2021. 141f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2021.

This is a research work that consists in the elaboration of a material that can provide theoretical support to the mathematics teacher regarding the historical process of the adoption of the Indo-Arabic numerical system in Western Europe. For this, the initial part of this research addresses the history of the evolution of numbers from carving to the construction of the Indo-Arabic system. In addition, it presents the numerical conception of indigenous peoples in Brazil. In order to show how the number is conceived and its system is organized by different peoples. About the adoption process, the influence of the commercial revolution, the abacus schools and the influence of the production of abacus manuals and the Fibonacci role in this process through the book *Liber abaci* is presented. Finally, for comparison purposes, we present how the multiplication operation was performed with the Roman numerical system and how it is performed by Fibonacci. In the Appendix, we present a notebook with suggestions for activities that, due to the Covid-19 pandemic, it was not possible to carry out in the classroom.

Keywords: History of Mathematics. Numbering history. Hindu-arabic numerals. Liber abaci. Fibonacci.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

a.E.C.	Antes da Era Comum
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
ca.	*Circa*, equivalente a aproximadamente
E.C.	Era Comum
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PNE	Plano Nacional de Educação

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Percebemos ao longo da carreira de professor a frequente dificuldade computacional apresentada pelos alunos até o ensino médio. No 6º ano do ensino fundamental é ligeiramente aceitável ver alunos com dificuldades nas operações principalmente com números grandes. Mas, até quando isso é tolerável? Ao longo do tempo, o prejuízo consequente do não saber calcular gera falta de confiança no aluno e, por consequência, um desestímulo a tentar resolver os problemas propostos. Corroborando assim a ideia de que a Matemática é muito difícil e destinada a poucos.

Uma das fontes dessa dificuldade é produto do ensino dessa disciplina, pois, segundo Fossa (2008), um ensino que preza a manipulação de algoritmos e a cega obediência a procedimentos impostos pelo professor não somente inibe a compreensão, como também torna a matemática sem sentido para o aluno. Pois, os alunos desconhecem como o homem chegou a um dado conhecimento, se foi desenvolvido por um ou mais povos, que problemas levaram o homem a criá-lo, que transformações sofreu ao longo do tempo.

Nesse cenário temos a História da Matemática como um caminho para o anseio do professor em adotar uma forma de ensinar por meio da qual é possível tornar a relação entre o que é ensinado e o aluno harmoniosa. A percepção pelo aluno dessa dimensão histórica pode influenciá-lo para que ele enxergue a Matemática como parte de sua vida e atribuindo novos significados a seus conhecimentos.

Na unidade temática Números, de acordo com a BNCC, o aluno deve adquirir a seguinte habilidade:

> (EF06MA02) Reconhecer o sistema de numeração decimal, como o que prevaleceu no mundo ocidental, e destacar semelhanças e diferenças com outros sistemas, de modo a sistematizar suas principais características (base, valor posicional e função do zero), utilizando, inclusive, a composição e decomposição de números naturais e números racionais em sua representação decimal. (BRASIL, 2017, p.301)

Há milhares de anos, a humanidade iniciou o processo de registro, criando métodos para comparar e relacionar objetos de naturezas distintas, ou seja, relacionando quantidade de elementos entre dois grupos. Surge então a mais antiga forma de contagem através da relação um a um, ou seja, da relação biunívoca. Na Antiguidade, necessidades de natureza administrativa, contábil e religiosa conduziram várias civilizações dentro da sua cultura elaborarem seus próprios sistemas de numeração. Mas, diante de inúmeras formas de fazer registro numérico o que levou pessoas de diferentes culturas usarem a mesma forma de registro numérico, ou seja, o mesmo sistema de numeração?

Dado esse panorama, a presente dissertação tem como objetivo, através da pesquisa bibliográfica, investigar o processo de adoção do sistema de numeração indo-arábico e o papel do livro *Liber abaci*.

Este trabalho tem como principal contribuição através de uma enriquecedora referência bibliográfica proporcionar ao professores uma literatura sobre o sistema de numeração indo-arábico, as motivações que levaram a sua adoção na Europa e o papel do *Liber abaci* nessa difusão.

Entender como se deu a passagem do sistema de numeração romano para o indo-arábico consiste em compreender uma das maiores e mais influentes mudanças do mundo medieval que forneceu um novo e mais prático sistema para efetuar operações, principalmente de multiplicação e divisão, impactando a área econômica e a científica.

De início faremos uma apresentação de alguns sistemas numéricos e uma breve panorama cultural com o objetivo de mostrar que a numeração que hoje vemos com tanta simplicidade foi um processo de construção ao longo de milênios e que está intimamente ligada à necessidade dos homens num determinado momento da história e a pluralidade de concepções sobre um mesmo ente matemático: o número. Para essa análise elegemos os seguintes sistemas numéricos: babilônio, egípcio, chinês, maia, grego, romano e indo-arábico. A escolha desses sistemas se deve a possibilidade de um trabalho interdisciplinar, pois, o conteúdo de História do sexto ano do ensino fundamental, de acordo com a BNCC, abrange desde a origem da humanidade, passando pela Roma Antiga e findando na Idade Média. Heide (1996), na sua experiência como ministra de cursos de História da Matemática afirma que muitos professores não conhecem muito história geral e o quanto um professor de história contribuiu com seu conhecimento em uma participação em um de seus cursos. Além desses, falaremos também sobre alguns sistemas de numeração usados por indígenas no Brasil. A escolha desses sistemas está relacionada com a proximidade, ou seja, por fazer parte de nossa raiz cultural e em concordância com as orientações da BNCC.

A dissertação está organizada em seis capítulos, a saber:

No primeiro capítulo descrevemos uma busca realizada de dissertações brasileiras que pesquisaram sobre história da Matemática e sistemas numéricos com o objetivo de verificar o que já havia sido produzido sobre a temática que pudesse auxiliar em nossa pesquisa.

No segundo capítulo “Breve relato sobre história da Matemática no ensino” descrevemos exemplos iniciais de como a história da matemática entra no ensino da matemática e justificativas para sua incorporação na educação matemática. E o modo como os Parâmetros Curriculares Nacionais e a Base Nacional Comum Curricular tratam a história da matemática no ensino e de que forma ela contribui no processo ensino-aprendizagem.

No terceiro capítulo “Início da contagem” fazemos uma apresentação de algumas formas de contagem antes da concepção do sistema numérico.

No quarto capítulo “Sistemas de numeração” são apresentados os sistemas numéricos elegidos acompanhados de um breve panorama cultural e de que forma a numeração é expressa em algumas língua indígenas no Brasil, entre elas as línguas Xavante e Palikur. Também apresentamos como a numeração e a escrita se relacionam. É apresentada uma abordagem desde os números romanos arcaicos e suas variações ao longo do tempo. A abordagem apresentada dos números hindus é feita desde o aparecimento das primeiras inscrições até a concepção do sistema que utilizamos hoje, posicional e com o zero.

No quinto capítulo “Expansão do sistema de numeração indo-arábico pela Europa” é feita uma abordagem de como os indo-arábicos são adotados na Europa Ocidental, os autores que contribuíram nesse processo, o papel do *Liber abaci* e dos manuais de aritmética e uma análise da visão de Fibonacci como herói nesse processo.

No sexto capítulo “Formas de calcular” são apresentados os processos de multiplicação com o ábaco romano e como Fibonacci ensina no *Liber abaci*.

Por fim tecemos nossas considerações finais sobre o trabalho.

1 **DISSERTAÇÕES ACERCA DA TEMÁTICA HISTÓRIA DOS SISTEMAS NUMÉRICOS, EXPANSÃO DO SISTEMA NUMÉRICO INDO-ARÁBICO NA EUROPA E O PAPEL DO *LIBER ABACI***

Como dito na seção anterior realizamos uma busca de dissertações brasileiras com a temática História da passagem da numeração romana para a indo-arábica, sua expansão na Europa e o papel do *Liber abaci* nesse processo com o propósito de identificar o que já foi produzido acerca da temática e como nossa pesquisa poderia contribuir nesse campo de estudo.

Os trabalhos foram consultados na forma eletrônica por meio do banco de dissertações do PROFMAT e da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações.

Primeiro, fizemos uma busca no site do PROFMAT com as palavras Fibonacci, *Liber abaci*, algarismo e numeração encontrando 53 resultados.

Dessa busca percebemos que o termo Fibonacci (36 resultados) está predominantemente relacionado à razão áurea ou à sequência numérica que leva seu nome. Já para o termo *Liber abaci* nada foi encontrado. A busca nesse canal se limita à Instituição, ao Título e ao Aluno.

Em seguida, fizemos uma busca para localizar os trabalhos no repositório Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), para isso utilizamos o termo sistemas de numeração, pois percebemos na primeira busca que esse termo seria mais adequado para o nosso objetivo. Foram localizados 237 trabalhos, sendo 4 do Profmat. Nessa busca foi percebido que muitos trabalhos são voltados para as séries iniciais do Fundamental I, principalmente 1º e 2º anos. No Quadro 1, a seguir, são apresentadas as 10 dissertações selecionadas de acordo com a temática da nossa pesquisa as quais foram organizadas conforme título do trabalho, ano de publicação, programa de Pós-Graduação e palavras-chave.

Quadro 1 – Descrição das dissertações selecionadas

Título	Ano	Programa	Palavras-chave
A história da Matemática e o professor das séries iniciais: A importância dos estudos históricos no trabalho com o sistema de numeração decimal	2001	Pós-graduação em Educação da Universidade Federal de Santa Catarina	Formação de professores. História da matemática. Sistema de numeração decimal.
A passagem da numeração romana para a indo-arábica no ocidente em livros didáticos de matemática	2009	Programa de Pós-Graduação em Educação Tecnológica – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais.	Não possui.
Propriedades dos sistemas de numeração: Uma sequência didática em uma abordagem histórica	2012	Programa de pós-graduação em Ensino das Ciências Naturais e Matemática – Universidade Federal do Rio Grande do Norte	Sistemas de Numeração. Ensino de Aritmética. Sistemas de Numeração Antigos
Sistemas de numeração: Evolução histórica, fundamentos e sugestões para o ensino	2013	PROFMAT - Universidade Federal do Oeste do Pará	Sistemas de numeração. Critérios de divisibilidade. Base. Princípio de posição. Evolução histórica.
A construção histórica dos sistemas de numeração como recurso didático para o ensino fundamental I	2014	PROFMAT - Universidade Federal do Ceará	Sistemas de numeração; ensino; aluno do ensino fundamental I
Uma abordagem sobre sistemas de numeração	2014	PROFMAT - Universidade Federal do Ceará	Teoria dos números. Sistemas de numeração. Inovação. Jogos.
A criação dos números e sua evolução Matemática: de escrava a rainha das ciências	2015	PROFMAT – Universidade do Estado do Rio de Janeiro	História da Matemática. História dos Números. Criação e Evolução dos Números. Origem dos Sistemas de Numeração. Numeração Decimal. Algarismos Indo-Arábicos.
Sistemas de numeração: Das talhas numéricas aos primórdios da computação artificial	2016	PROFMAT - Universidade Federal de Juiz de Fora	Sistemas de Numeração. História dos Números. Origem da Computação.
Um pequeno retrato acerca do aprendizado de nosso sistema de numeração decimal	2017	PROFMAT – Universidade Federal Rural de Pernambuco	Sistemas de Numeração. Sistemas de Numeração Decimal. Dificuldade Computacional.
A beleza dos números e de suas propriedades: Uma abordagem histórica para o ensino médio	2018	PROFMAT - Universidade Estadual do Maranhão	Padrão numérico. História dos números. Contagem. Sequências.

Fonte: O autor, 2021.

A seguir, apresentaremos os objetivos de cada autor e nossas considerações acerca de cada trabalho.

Segundo Dambros (2001) a dissertação “A história da Matemática e o professor das séries iniciais: A importância dos estudos históricos no trabalho com o sistema de numeração decimal” tem como objetivo investigar o conhecimento dos professores de primeira série do ensino fundamental sobre a história da matemática e como esse conhecimento, ou a falta dele, pode influenciar nas suas concepções de matemática e de ensino e aprendizagem matemática.

Apesar de ser um trabalho em Educação, Dambros (2001) tem por objetivo enfatizar a importância da história da Matemática em sala de aula, mais especificamente sobre a história do sistema de numeração indo-arábico e como esse conhecimento, ou a falta dele, poderia influenciar nas práticas pedagógicas dos professores. O relato histórico é linear iniciando com a apresentação dos sistemas primitivos de contagem (o corpo humano e objetos da natureza), em seguida apresenta os sistemas egípcio, grego, romano e chinês sem situá-los no tempo e no espaço. Quanto à abordagem do sistema de numeração indo-arábico, o objeto principal do estudo, apesar de sucinta faz um panorama geral e, diferente dos demais trabalhos, menciona o livro de Sacrobosco, *Algorismus vulgaris*, e enfatiza sua popularidade nas universidades medievais.

Na dissertação “A passagem da numeração romana para a indo-arábica no ocidente em livros didáticos de matemática”, Costa (2009) investiga as abordagens históricas da passagem da numeração romana para a indo-arábica nos livros didáticos de Matemática, pois acredita que os livros didáticos não abordam essa temática o que não incentiva os professores, e consequentemente os alunos, a refletir sobre essa transição.

O tema desenvolvido por Costa (2009) em sua dissertação é o que mais se aproxima com a temática do nosso trabalho, apesar de seu foco ser a análise em livros didáticos. Embora possua ampla referência bibliográfica podemos perceber que o autor pouco recorreu a essas obras em seu texto, pois a explanação da história dos indo-arábicos é muito breve não fazendo jus à sua bibliografia. Sobre a adoção dos indo-arábicos na Europa ocidental o relato é em torno das Cruzadas e de Fibonacci A conclusão de Costa (2009) sobre os livros didáticos é digno de consideração, pois a mesma relata que os livros didáticos apresentam, a partir de uma limitada bibliografia, a numeração romana e indo-arábica com pouco ou nenhum significado histórico, independentes, sem discutir a adoção dos indo-arábicos.

A dissertação "Propriedades dos sistemas de numeração: Uma sequência didática em uma abordagem histórica", Almeida (2012) objetiva apresentar uma sequência didática que utiliza sistemas de numeração antigos como objeto de comparação com o sistema de numeração indo-arábico.

Almeida (2012) inicia apresentando sistema de numeração na perspectiva de Pascal, partindo da escolha de uma base, podendo causar o entendimento de que o conceito de base veio antes da concepção do sistema de numeração. Em seguida, apresenta os sistemas de numeração: egípcio, grego (alfabético), romano (na forma atual) e hindu, sem contexto histórico dessas civilizações.

Em "Sistemas de numeração: Evolução histórica, fundamentos e sugestões para o ensino ", Rodrigues (2013) afirma que por constituir juntamente com as formas, os números constituem o principal objeto de estuda da Matemática e por isso é importante que os professores compreendam seu funcionamento. Sendo assim, o trabalho tem como aspectos principais sua evolução histórica e aplicações; as propriedades puramente matemáticas dos sistemas de numeração posicionais; e a forma como o professor pode utilizar os dois aspectos anteriores em suas aulas.

O título deste trabalho nos induz erroneamente a pensar em um trabalho voltado para história da Matemática. No entanto, apresenta apenas os sistemas de numeração já prontos (babilônio, maia, chinês e hindu) sem ligação nenhuma com a história de seus povos. Quanto ao sistema numérico indo-arábico não fala da sua formação, porém aborda algumas conjecturas, como as relações comerciais e as Cruzadas, sobre sua expansão na Europa findando sua abordagem com a citação de Fibonacci com o *Liber abaci*.

A dissertação "A construção histórica dos sistemas de numeração como recurso didático para o ensino fundamental I" Leite (2014) indica que através da história da matemática, o trabalho tem como objetivo apresentar a linha histórica da constução de outros sistemas numéricos para que os alunos possam compará-los com o sistema indo-arábico e assim comprrender melhor os "nossos" números.

Leite (2014) no decorrer do trabalho é feito um levantamento histórico de seis sistemas de numeração: sumério (similar ao babilônio), egípcio, maia, chinês, romano e indo-arábico. Também realiza um comparação entre os sistemas de numeração, enfatizando o formato de base dada por Pascal. Porém, apresenta o sistema de numeração indo-arábico já pronto, ou seja, com o zero e não aborda sua expansão pela Europa, assim como não menciona Fibonacci.

A dissertação “Uma abordagem sobre sistemas de numeração”, segundo Tavares (2014) tem como objetivo apresentar aos estudantes do Ensino Médio os sistemas de numeração, seus critérios e aplicações para o ensino da matemática básica.

Tavares (2014) apresenta o sistema decimal de forma matemática e logo aplica o conceito de base tal como definido por Pascal. Apresenta os algarismos romanos na forma como se aprende atualmente nas escolas sem nenhuma relação com o decorrer do trabalho. Apesar do tema, são usados os algarismos indo-arábico apenas e no máximo escritas em outras bases na forma de Pascal com nossos algarismos.

A dissertação “A criação dos números e sua evolução Matemática: de escrava a rainha das ciências” tem como objetivo, de acordo com Andrade (2015), abordar de maneira objetiva a história da evolução dos números desde os entalhes em ossos até a forma como conhecemos atualmente a partir de uma uma corrente histórica que tenta explicar como e porque a ideia de número se modifica com o tempo, sempre tendo em vista fatores que motivaram tais mudanças e quais benefícios (ou malefícios) trouxeram consigo.

Andrade (2015) trata dos sistemas de numeração: dos sumérios aos babilônios, dos egípcios, dos gregos, dos romanos e dos maias e dos hindus, de forma bastante sucinta e simples como mencionado em seu objetivo. Sobre a adoção dos numerais indo-arábicos na Europa afirma que Fibonacci é o responsável por esse feito.

Em “Sistemas de numeração: Das talhas numéricas aos primórdios da computação artificial”, Silva (2016) descreve que este trabalho faz uma exposição sucinta desde as talhas numéricas até a consolidação do sistema binário cujo objetivo é ampliar a percepção da simplicidade matemática, ressaltando a importância do uso e evolução dos sistemas numéricos, ao longo da história da humanidade.

Silva (2016) trata da escrita numérica desde os primórdios e dos sistemas de numeração: babilônio, egípcio, maia, inca, chinês, grego, hebreu, romano e hindu. A apresentação desses sistemas é acompanhada de um contexto histórico. E, diferente dos demais trabalhos aqui apresentados, aborda o sistema de *tokens* e sua relação com a escrita cuneiforme. No entanto, não descreve a expansão nem de como se deu a formação do sistema de numeração indo-arábico, tampouco cita Fibonacci.

De acordo com Melo (2017), a dissertação “Um pequeno retrato acerca do aprendizado de nosso sistema de numeração decimal” apresenta duas pesquisas sobre o processo de ensino e aprendizagem do conteúdo de Sistemas de Numeração Decimal e, ao final, um projeto aplicado numa turma de 9º ano com o objetivo de apresentar maneiras para retomar esse conteúdo.

Melo (2017) inicia seu trabalho com o processo de contagem e apresenta os sistemas de numeração: sumério, babilônio, egípcio, grego, romano, maia, inca e hindu, de forma bem resumida, e o binário. Na sua explicação sobre o conceito de base menciona as tribos indígenas brasileiras através da exemplificação do sistema numérico Aruák, com o intituito de mostrar um sistema numérico primitivo.

Na dissertação “A beleza dos números e de suas propriedades: Uma abordagem histórica para o ensino médio”, Araújo (2018) indica que a partir de uma necessidade de proporcionar aos alunos um conhecimento complementar dos números e o enfoque histórico que muitas vezes é desconhecido surgiu esse trabalho que tem como objetivo servir como base para muitos professores de Matemática que utilizam as propriedades dos números como forma de encurtar a distância entre o abstrato e o concreto.

Araújo (2018) apresenta os sistemas de numeração babilônio, grego (ático), romano, egípcio, maia e hindu, porém não fala do contexto histórico em que essas civilizações estavam inseridas. Quanto aos algarismos indo-arábicos, na explanação sobre o zero relata a relação da língua sânscrita com o surgimento do zero (surgimento da característica posicional), porém não fala da sua adoção pela Europa.

Além dos temas e das abordagens considerados nas dissertações selecionadas, também analisamos as referências bibliográficas, listadas nestes trabalho, relativas à história da matemática utilizadas para avaliar a sintonia com a historiografia mais contemporânea. Os cinco autores mais consultados foram: Ifrah (90%), Eves (80%), Boyer (40%), Struik (40%) e Cajori (30%). Os autores Karpinski e Smith foram consultados em um mesmo trabalho (A passagem da numeração romana para a indo-arábica no ocidente em livros didáticos de matemática), porém percebemos na dissertação que o autor pouco recorreu aos conhecimentos dessas obras.

Embora os trabalhos sejam em torno da história da matemática, percebemos que a narrativa histórica de como se deu a construção dos indo-arábicos é pouco explorada, principalmente a conexão da língua sânscrita com a numeração hindu, tampouco os motivos que levaram sua de adoção pela Europa Ocidental e como se deu esse processo.

Destacamos também sobre a importância da contextualizalção histórica dos sistemas de numeração justamente por considerar que ela possibilita a desmistificação da Matemática como uma ciência universal e mostrar que seus conceitos são frutos de uma época histórica, dentro de um contexto social e político.

2 **BREVE RELATO SOBRE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NO ENSINO**

Neste capítulo faremos um breve relato sobre exemplos iniciais de como a história da matemática é utilizada ou inserida no ensino da matemática e justificativas para sua incorporação na educação matemática.

Muitos autores consideram a obra *Eléments de géométrie*, de Alexis Claude Clairaut, publicado em 1741, como a primeira a apresentar explicitamente uma relação específica entre a história da matemática e a matemática escolar. No entanto, Fried (2014) afirma que o material histórico quase sempre esteve presente, de uma forma ou de outra, na educação matemática devido à variedade de maneiras de tratar os materiais históricos e conceber sua relação com a matemática do passado e, ao mesmo tempo, por causa da variedade de configurações para aprender matemática e maneiras de compreender o que significa ser "educado matematicamente".

O comentário de Proclo (século V E.C.) sobre o primeiro livro dos elementos de Euclides é uma das importantes fontes que temos para a história da matemática. Proclo se refere frequentemente ao desenvolvimento histórico da matemática e, ao fornecer sua própria fonte principal, Eudemo de Rodes (quarto século a.E.C), ele também nos conta muito sobre uma das primeiras histórias da matemática, a não mais existente História da Geometria de Eudemo.

Fried (2014) afirma que Os Elementos de Euclides foram usados, na Inglaterra, como livro escolar quase nos tempos modernos através da ideia de que os alunos aprendem por imitação como na retórica e que, ao aprender sobre os primeiros inventores das ideias matemáticas, os alunos seriam capazes de fazer suas próprias produções. A partir dessa concepção e com suas devidas mudanças inicia-se uma das vertentes de introdução de elementos históricos na educação matemática. Nesta perspectiva, usar Euclides em sala de aula ilustra uma forma de uso de textos históricos em geral que muitas vezes apresentam relatos de ideias matemáticas que são particularmente claras, investigativas ou desafiadoras.

Em 1654, o jesuíta Andreas Tacquet (1612 – 1660) inicia seu clássico texto *Elementageometriaeplanae ac solidae* com uma longa "narrativa histórica da origem e do progresso das ciências matemáticas" (*historiconarratio de ortu & progressumatheseos*). Segundo Fried (2014), Tacquet estava dizendo a seus alunos que o estudo da Matemática deve ser realizado com sua história como pano de fundo para, de fato, compreender sua importância. No entanto, ele se refere a Ramus (1515 – 1572) como precedente a esta ideia.

Segundo Fried (2014), no final do século XVIII, encontramos na Polônia um interesse precoce pela história da Matemática como componente da Educação Matemática.

> Domoradski e Pwlikowska-Brożek (2002) nos dizem que "O primeiro Ministério da Educação na Europa - Komisja Edukacji Narodowej (Comissão Nacional Educação) (1773-1794) - na esperança de melhorar e ampliar o conhecimento matemático, recomendou que os alunos se familiarizassem com a história da matemática desde o início da antiguidade." (Apud Fried, 2014, p. 674, tradução nossa)

No final do século XIX, podemos encontrar claramente um interesse pela história da Matemática na educação francesa que continuou até o século XX. Fried (2014) afirma que Ernest Lebon (1846 – 1922), enquanto ministro, expressou o seu interesse de que a história da ciência se tornasse parte do ensino escolar e fosse incluída no exame de bacharelado, e que o físico Paul Langevin, por exemplo, no primeiro quarto do século XX, foi um forte defensor da história da ciência como forma de combater o dogmatismo.

Nos Estados Unidos, no período entre o final do século XIX até 1925, se destacam Florian Cajori (1859 – 1930) e David Eugene Smith (1860 – 1944). De acordo com Dauben (2002 apud Fried, 2014, p.676), "… Cajori foi o primeiro em uma tradição americana contínua de matemáticos interessado na história da matemática devido ao seu valor percebido no ensino". Em 1893, ele escreve um livro de história da Matemática cujo interesse é que fosse usado por alunos em vez de outros matemáticos ou historiadores profissionais da Matemática.

Smith, além de ter sido um excelente historiador da Matemática, fez importantes contribuições para a educação matemática. Segundo Fried (2014), o seu livro clássico *The Teaching of Elementary Mathematics*, de 1904, contém três capítulos históricos e vários outros nos quais a história faz parte, deixando claro que História e Educação Matemática não estavam separadas. Em 1923 participou da elaboração do relatório do *National Committee on Mathematical Requirements* no qual foram destacados os objetivos gerais da Matemática, incluindo o papel que a matemática e o pensamento abstrato, em geral, desempenharam no desenvolvimento da civilização. Foi na década de 1970 que o papel da história da matemática começou a se enraizar amplamente na comunidade de educação matemática, se organizando em nível internacional com a constituição, em 1983, do *International Study Group on the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics* (ISGHPM, conhecido atualmente como HPM). No Brasil, foi criada a Sociedade Brasileira de História da Matemática (SBHMat) em 1999. No entanto, pesquisas relacionadas a essa temática podem ser identificadas, pelo menos, desde a década de 1980, segundo Miguel e Miorim (2008).

Nas primeiras décadas do século XX, durante o Movimento da Escola Nova, no Brasil, encontramos, talvez pela primeira vez, nas instruções pedagógicas da Reforma do Ensino Secundário[1], a seguinte manifestação sobre a importância da História da Matemática:

> E, por fim, com o intuito de aumentar o interesse do aluno, o curso será incidentalmente entremeado de ligeiras alusões a problemas clássicos e curiosos e aos fatos da história da matemática bem como à biografia dos grandes vultos desta ciência. (PORTARIA MINISTERIAL, de 30-06-1931, apud MIGUEL & MIORIM, 2008, p. 17)

Nas décadas de 1920 e 1930 muitos autores incorporaram em seus livros didáticos elementos de história[2.] Como podemos ver na obra Matemática, de Thirré e Mello e Souza, cuja 1ª edição é de 1931. Os autores inseriram textos históricos ao final de cada capítulo com a incumbência de exercer um papel motivador no processo ensino-aprendizagem da Matemática.

> Fizemos acompanhar cada capítulo de um pequeno trecho de leitura capaz de despertar no joven [*sic*] estudante o interesse pelos diversos fatos da História da Matemática e pela vida dos grandes sábios que colaboraram no progresso dessa ciência. (THIRRÉ & MELO; SOUZA, 1934, p. 13)

A partir de finais da década de 1980 se intensificam as críticas às propostas do Movimento da Matemática Moderna. Nesse mesmo momento, a ideia da participação da história na prática pedagógica de matemática ganha espaço. Aparecendo, por exemplo, na Proposta Curricular para o Ensino de Matemática – 1º grau, do Estado de São Paulo sob o argumento de que a história pode ser uma fonte

---

1 Decreto n. 19890 de 18 de abril de 1931, consolidada pelo Decreto n. 21241, 4 de abril de 1932. O ensino secundário corresponde às quatro últimas séries do Ensino Fundamental e às três séries do Ensino Médio.

2 Segundo Miguem e Miorim (2008), foram encontrados em livros do final do século XIX e começo do século XX, de maneira geral, elementos históricos em notas de rodapé, observações ou comentários acerca de temas e personagens da história matemática.

de busca de compreensão e de significado para o ensino-aprendizagem da Matemática escolar.

> Pode-se estudar os números a partir de sua organização em conjuntos numéricos, passando-os dos Naturais aos Inteiros, aos Racionais, aos Reais, tendo como fio condutor as propriedades estruturais que caracterizam tais conjuntos, ou pode-se estudá-los acompanhando a evolução da noção de número a partir tanto de contagens como de medidas, sem ter ainda as propriedades estruturais claramente divisadas, deixando-se guiar pelo fio condutor que a História propicia e trocando assim uma sistematização prematura por uma abordagem mais rica em significados. Nessa proposta, optou-se por essa última abordagem... (SÃO PAULO, 1988, apud MIGUEL; MIORIM, p. 45)

No final década de 1990, foram desenvolvidos os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) diante da necessidade de se construir uma referência curricular nacional para a educação básica tendo em vista a garantia do direito ao acesso aos conhecimentos indispensáveis a todo aluno de qualquer região do país para a construção de sua cidadania.

Segundo os PCN's a História da Matemática pode contribuir não só com o processo de aquisição de conhecimento, mas também com a formação do aluno como um cidadão.

> A História da Matemática pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem dessa área do conhecimento. Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor cria condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento. Além disso, conceitos abordados em conexão com sua história constituem veículos de informação cultural, sociológica e antropológica de grande valor formativo. A História da Matemática é, nesse sentido, um instrumento de resgate da própria identidade cultural. (PCNs, Livro 03, 1998, p.42).

Com um mesmo intuito dos PCN's de promover uma educação de qualidade e com equidade, em 2017, foi lançada a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

A BNCC é um documento normativo que define o conjunto de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica. Seu principal objetivo é assegurar que tais aprendizagens sejam desenvolvidas em todas as etapas e modalidades da Educação Básica em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE). Diferente dos PCN's, o cumprimento do previsto na BNCC é obrigatório por lei. A sua elaboração estava prevista no Artigo 210 da Constituição de 1988 e no Artigo 26 da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, de 1996. Além disso, a lei de 2014 que instituiu o PNE cita diretamente a BNCC como estratégia para o cumprimento das metas 2, 3 e 7 do Plano. Portanto, a elaboração da BNCC, determinada já na carta constitucional, encontra-se amplamente amparada pela legislação educacional do país.

E o que a BNCC cita sobre história da Matemática?

Com relação ao anos finais do ensino fundamental para o desenvolvimento das habilidades previstas na área de Matemática ela coloca a História da Matemática como um recurso para a aprendizagem dentro de um contexto significativo.

> Cumpre também considerar que, para a aprendizagem de certo conceito ou procedimento, é fundamental haver um contexto significativo para os alunos, não necessariamente do cotidiano, mas também de outras áreas do conhecimento e da própria história da Matemática. (BRASIL, 2017, p. 299)

Na unidade temática de Números referente ao 6º ano de escolaridade coloca como uma das habilidades a serem desenvolvidas pelos alunos:

> (EF06MA02) Reconhecer o sistema de numeração decimal, como o que prevaleceu no mundo ocidental, e destacar semelhanças e diferenças com outros sistemas, de modo a sistematizar suas principais características (base, valor posicional e função do zero), utilizando, inclusive, a composição e decomposição de números naturais e números racionais em sua representação decimal. (BRASIL, 2017, p.301)

É interessante observar que, em consonância com o que foi dito de que a Matemática esteja ligada a outras áreas do conhecimento nas habilidades previstas em História, a BNCC afirma que:

> A existência de diferentes linguagens pode ser explicada pela análise, por exemplo, de sistemas numéricos utilizados por distintas culturas. Compreender a enorme variedade de sistemas (com base um, com base dois, com base dez etc.) é um bom exercício, assim como refletir sobre as ideias de adição, subtração, multiplicação e divisão, evitando um olhar universalizante para os números. Em determinadas culturas, o número usado para contar seres humanos pode ser diferente do número que se usa para contar mandiocas, como acontece com os membros da etnia palikur. O que isso significa? Se na tradição de matriz grega, a unidade é o um (1), para muitos povos indígenas originários, a unidade é o dois (2). Para os xavantes, por exemplo, a ideia de paridade é um princípio ordenador, pois em torno dela existe uma espécie de modelagem do mundo. Identificar essas diferenças significa tomar consciência de que existem várias formas de apreensão da realidade. (BRASIL, 2017, p. 403)

E assim, a história da Matemática oportuna inclusive o próprio professor a conhecer essas manifestações culturais que muito contribuiriam para a formação de um cidadão consciente. Além de propiciar aos alunos a percepção de que a Matemática que se estuda na escola é uma das muitas formas de Matemática desenvolvidas pela humanidade.

As ideias matemáticas aparecem em toda a evolução da humanidade e a história da Matemática une suas diversas dimensões, possibilitando aos alunos a construção do saber matemático dentro da sua realidade, valorizando os conhecimentos produzidos pela história da humanidade. Ao verificar o alto nível de sofisticação matemática de algumas culturas antigas, o aluno poderá compreender que o avanço tecnológico de hoje não seria possível sem a herança cultural de gerações passadas.

2.1 **Por que usar história da matemática em sala de aula?**

Apesar de ser vista como um bicho papão, a matemática se faz presente durante o nosso dia-a-dia (na contagem do tempo, em uma compra, no preparo de uma receita). Como fazer com que os alunos percebam que a matemática está conectada com a realidade e que é uma ciência viva e em construção?

> Se a matemática é uma disciplina base de todas as ciências e todas as artes; se o domínio dos números e das operações é decisivo para o sucesso numa sociedade competitiva; se o desenvolvimento tecnológico está fundamentado em cálculos e logaritmos; se o Brasil é a terra de Malba Tahan… por que 80% dos estudantes chegam ao final do Ensino Médio sem aprender Matemática? (LORENZI; CHIES, apud SALVIATO, 2018, p.24)

Como mudar esse cenário no ambiente escolar e fora dele? O maior desafio enfrentado pelos professores no dia a dia é dar sentido ao que está sendo abordado com os alunos em sala de aula. A solução para essa expectativa gera grandes debates no campo da Educação Matemática, dentre as alternativas que surgem está o uso da História da Matemática.

Com relação à história da matemática como vimos há muito tempo já se fala na sua importância e contribuição como um recurso pedagógico com o intuito de promover e repensar o ensino-aprendizagem da matemática.

Miguel (1993) cita as seguintes vantagens assinaladas por P. S. Jones, em seu artigo “A história da matemática como ferramenta de ensino”, de 1969. Desde que associada a um conhecimento atualizado da matemática e de suas aplicações, o uso da História de Matemática pode auxiliar na percepção de:

> 1) que a matemática é uma criação humana;
> 2) as razões pelas quais as pessoas fazem matemática;
> 3) as conexões existentes entre matemática e filosofia, matemática e religião, matemática e o mundo físico e matemática e Lógica;
> 4) que necessidades práticas, sociais, econômicas e físicas frequentemente servem de estímulo ao desenvolvimento de ideias matemáticas;
> 5) que a curiosidade estritamente intelectual, isto é, que aquele tipo de conhecimento que se produz tendo como base a questão “O que aconteceria se...?”, pode levar à generalização e extensão de ideias e teorias;
> 6) que as percepções que os matemáticos têm do próprio objeto da matemática mudam e se desenvolvem ao longo do tempo;
> 7) a natureza e o papel desempenhado pela abstração e generalização da história do pensamento matemático;
> 8) a natureza de uma estrutura, de uma axiomatização e de uma prova. (MIGUEL, 1993, p.76)

Outro autor que também defende o uso da história no ensino é D’Ambrosio definindo quatro finalidades:

> 1. para situar a Matemática como uma manifestação cultural de todos os povos em todos os tempos, como a linguagem, os costumes, os valores, as crenças e os hábitos, e como tal diversificada nas suas origens e na sua evolução;
> 2. para mostrar que a Matemática que se estuda nas escolas é uma das muitas formas de Matemática desenvolvidas pela humanidade;
> 3. para destacar que essa Matemática teve sua origem nas culturas da antigüidade mediterrânea e se desenvolveu ao longo da Idade Média e somente a partir do século XVII se organizou como um corpo de conhecimentos, com um estilo próprio;
> 4. para saber que desde então a Matemática foi incorporada aos sistemas escolares das nações colonizadas, se tornou indispensável em todo o mundo em conseqüência do desenvolvimento científico, tecnológico e econômico, e avaliar as conseqüências sócio-culturais dessa incorporação. (D’AMBROSIO, s.d., p.6)

A motivação (da história por si só) é uma justificativa que não é citada por nenhum dos autores acima e que, em princípio, poderia ser a primeira razão citada por um professor por ser a mais simples e trivial. Afinal, um dos maiores desafios no mundo em que vivemos é encontrar meios e formas didáticas que atraiam e motivem os alunos. Porém, essa razão é rejeitada por Miguel (1993). Segundo ele se a história motiva os alunos, o ensino de história por si só seria suficiente para motivá-los. O que não acontece já que os professores de história vivenciam as mesmas problemáticas, com relação ao interesse dos alunos, que outras disciplinas. Outro aspecto que ele ressalta é que não passa de uma visão mecanicista, centrada no objeto do conhecimento e não no sujeito, considerar que a história motive a todos igualmente. É preciso também ter em mente, que o uso estático e factual da história da matemática pode reforçar a visão da matemática como uma disciplina de gênios, difícil de aprender e que se destina a poucos.

Fried (2014) afirma que a justificativa motivacional não deve ser totalmente desprezível, porém apresenta dois problemas que surgem nessa temática. Supõe que a matemática por si só, sem adornos de histórias, anedotas, ou personagens coloridos, não pode se tornar suficientemente interessante para prender a atenção dos alunos, ou seja, o ensino sem história seria enfadonho; e a história como um corpo de conhecimento é deixada de lado, se tornando um mero estratagema para atrair os alunos.

> O tema motivacional, portanto, acaba não fazendo justiça nem à história nem à própria matemática. Dito isso, deve-se sublinhar que existem dificuldades semelhantes, embora de forma mais sutil, em outros casos em que a história é trazida para a sala de aula de matemática. O principal problema é que a história, nesses casos, é superadicionada à educação matemática, perdendo-se no processo a identidade particular da história como forma de conhecimento. (FRIED, 2014, p. 682, tradução nossa)

Listamos um conjunto de motivos pelos quais é importante que o ensino da matemática esteja vinculado com a história da matemática e indicamos também algumas preocupações que devemos ter em mente ao optarmos por seu uso em sala de aula. Então, de que forma isso pode ser feito?

Partindo do princípio de que a matemática é uma criação humana e uma ciência viva entendemos que seu desenvolvimento está subordinado às necessidades da sociedade de cada momento histórico, dentro de um contexto social, cultural e político, com erros e acertos, desmistificando assim a ideia de que a matemática seja uma ciência de verdades absolutas e universal. Aqui não queremos dizer que a validade de resultados matemáticos não seja perene. Estamos ressaltando a formação de conceitos e de suas diferentes percepções ao longo do tempo. Por exemplo, sistemas de numeração sobreviveram por muito tempo sem o zero formalmente definido e reconhecido. Mesmo no sistema hindu, ele não surge de imediato. Neste sentido, a sua atual aceitação não foi sempre absoluta e universal. Em alguns sistemas, ele viveu teoricamente invisível até que um conjunto de acúmulos e condições históricas permitiram sua materialização. A forma lógica e a organização como o conteúdo é apresentado aos alunos não reflete a maneira como esse conhecimento foi produzido, parecendo uma obra morta, acabada. A partir do momento que os alunos percebem o surgimento da matemática através da busca por resolução de problemas cotidianos, conhecem as preocupações de vários povos em diferentes momentos históricos. Isto proporcionará estabelecer comparações entre os processos matemáticos do passado e do presente, bem como compreender que os saberes ensinados na escola não se originaram sem um propósito, sem um porquê. Dessa forma, saber mais sobre a origem e evolução dos conhecimentos matemáticos contribui para entender como essa ciência está interligada às demais atividades humanas.

Não podemos esperar que a história resolverá todos as nossas enfermidades pedagógicas, mas podemos esperar que nos ajudará a superar algumas delas.

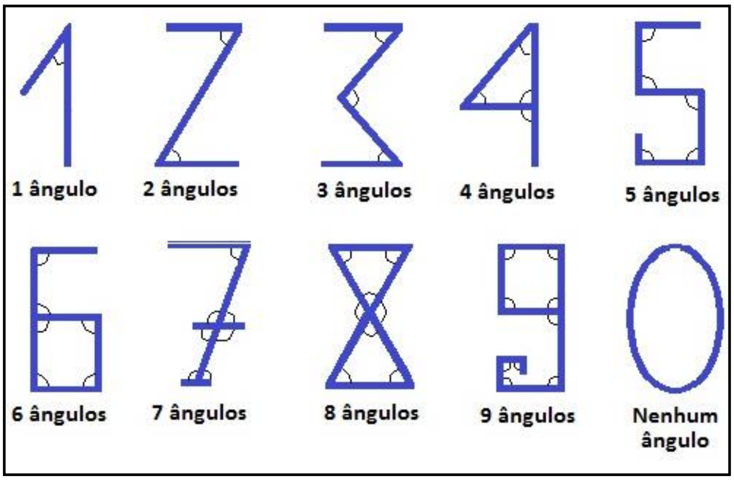
3 INÍCIO DA CONTAGEM

Na internet, tem circulado a seguinte teoria sobre a origem dos símbolos numéricos que usamos atualmente:

> Relatam antigas lendas árabes, que um matemático desconhecido, preocupado em criar símbolos que equivalessem aos números, desenhou figuras que, pelos números de ângulos que contivessem, teriam seu valor determinado pelos mesmos. Assim, o sinal equivalente ao 1, teria 1 ângulo – ao 2, 2 ângulos, e assim por diante. Quando chegou ao zero, a coisa empacou, mas muito sabiamente, o matemático lembrou da forma do círculo, que não possui ângulo algum. Desta forma, resolvido o problema do zero, que não vale nada e vale muito, nasceram os algarismos arábicos, como o conhecemos. (MORAES, 2014, n.p)

A Figura 1 mostra a hipótese descrita acima cuja origem dos algarismos que usamos estivesse relacionado à sua forma.

Figura 1 – O número de ângulos contidos em cada algarismo



Fonte: https://mundodamatematica-com.webnode.com/apoio-ao-professor/

Em um primeiro momento a explicação parece simples e razoável, no entanto nenhum aspecto de todo o material histórico pesquisado corrobora esta conclusão. Tal hipótese leva em conta apenas a última forma dos algarismos modernos, desprezando a história da variedade de formas gráficas que os nove algarismos assumiram ao longo dos séculos em diferentes regiões do mundo. A história real da origem dos números nos conta que este processo não foi tão simples e trivial como parece. Mas, uma construção lenta que durou milhares de anos, passando por muitos povos e culturas diferentes. Ou seja, uma construção realizada a muitas mãos e que só foi concebida como conhecemos hoje por volta do século VI E.C.

A escrita dos símbolos do nosso sistema de numeração está diretamente ligada à capacidade de contar e à necessidade de registrar. Buscar as origens dessa escrita implica visitar os registros deixados pelos primórdios da história da humanidade. Afinal, quando o homem aprendeu a contar? Há evidências arqueológicas de que o homem, há uns 50 mil anos, já tinha desenvolvido a capacidade de contar. O osso de Lebombo (Figura 2) é o mais antigo artefato arqueológico que sugere essa habilidade pertencente ao Paleolítico Superior. Datado de 35 mil anos a.E.C., essa fíbula de um babuíno possui, de um lado, 29 entalhes esculpidos em sequência e foi descoberto dentro de uma caverna nas montanhas de Lebombo, entre a África do Sul e Suazilândia.

Figura 2 – Osso de Lebombo

Fonte: https://keyamsha.com/2017/10/09/the-worlds-three-oldest-mathematical-objects-are-from-africa/

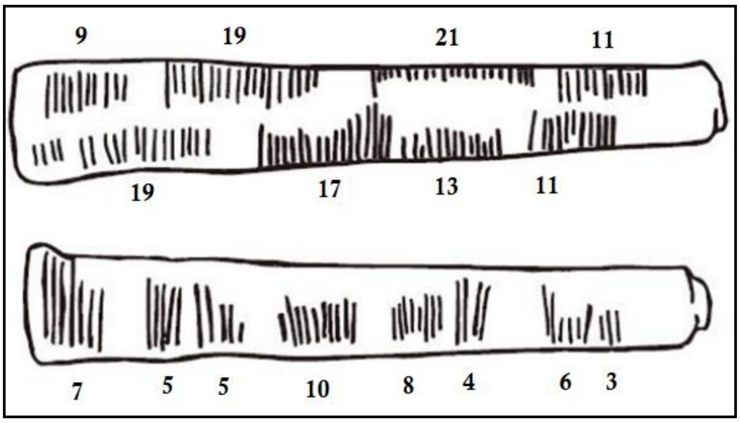
Porém, dentre esses artefatos, o que mais se destaca é osso de Ishango (Figura 3) pela riqueza muito superior dos possíveis significados das marcas registradas em relação ao anterior. Datado de 20 mil anos a.E.C. (segundo Stewart (2014), estimativas anteriores de 6 mil a 9 mil anos foram revistas em 1995), ele é considerado o objeto matemático mais antigo, cujos entalhes ainda motivam grande número de discussões.

Figura 3 – Osso de Ishango

Fonte: https://agoraafricaine.info/2019/10/26/los-ishango-fait-de-lafrique-le-veritable-berceau-des-sciences-mathematiques/

O osso de Ishango foi afinado, polido e gravado, com um pedaço de quartzo saindo do topo. Seus 168 entalhes esculpidos ao longo de seus lados foram organizados em dezesseis grupos e três fileiras conforme Figura 4. A primeira fileira contém os números primos 9, 11, 19 e 21, cuja soma é 60. Outra fileira contém os números 11, 13, 17 e 19, cuja soma também é 60; a terceira, os números relacionados por duplicação.

Figura 4 - Esquema do osso de Ishango



Fonte: https://www.researchgate.net/figure/A-drawing-of- two-sides-of-the-Ishango-bone-showing-the-groupednotches_fig1_334988609

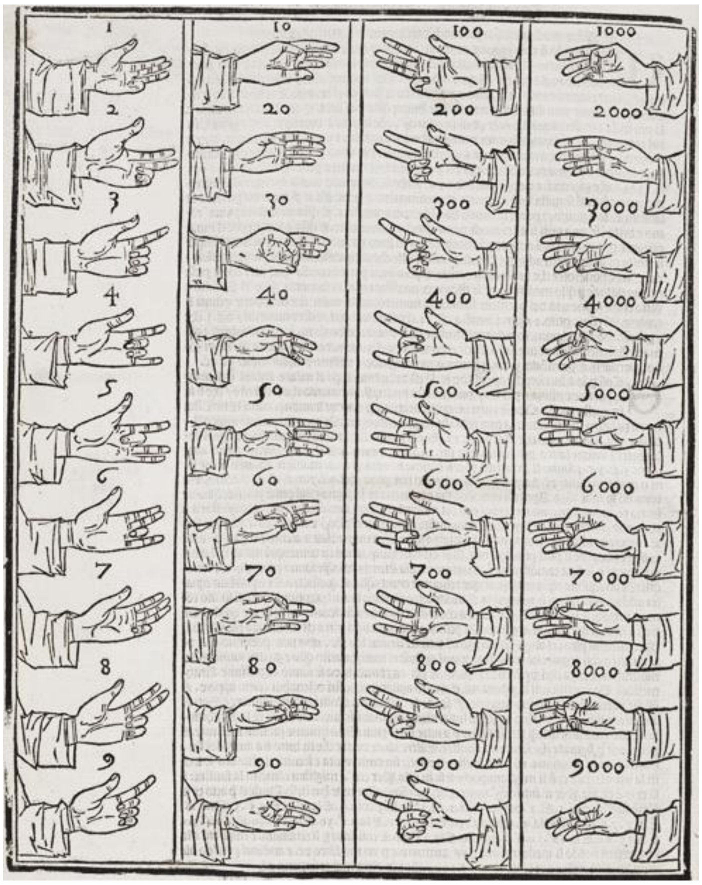
Desde sua descoberta, em 1950, diversas hipóteses surgiram em busca de explicações para os agrupamentos dos entalhes marcados no osso. Santos (2019) apresenta três interpretações: para Heinzelin, trata-se de uma espécie de jogo aritmético; para Marshack, um calendário lunar; e, para Pleter e Huylebrouck, uma conexão com o sistema duodecimal. A despeito disso, há aqueles que defendem a natureza fantasiosa de tais interpretações acerca dos números de Ishango.

Na época dos ossos de Lebombo e Ishango, o homem vivia como caçador nômade, não havia cidades. Se organizavam em pequenos grupos, porém, por volta de 20 mil a.E.C., já haviam desenvolvido a linguagem, religião, arte e comércio. No entanto, não desenvolveram a linguagem escrita. Não há evidências, até o momento, de que esses entalhes possuíam um caráter numérico concreto ou abstrato.

> Mas enquanto suporte material da representação e da memorização dos números, a prática do entalhe é também uma prefiguração da contabilidade. (…) Nesse estágio, é verdade, a humanidade ignorava ainda a escrita. Mas concretizando dessa maneira a enumeração de tal ou tal tipo de unidades, o possuidor do furador bem como seus contemporâneos e predecessores tinham igualmente inventado os primeiros rudimentos da contabilidade escrita: traçavam na realidade algarismos no sistema de notação numérica mais rudimentar da história. (IFRAH, 1997, tomo 1, p.126)

A partir desse método simples de registro não foi concebida de imediato a ideia de representar os números por símbolos escritos. Para se chegar nessa concepção simbólica acredita-se que primeiramente foram utilizados os *tokens*, que traduz um modo de contar concreto, anterior à invenção dos números abstratos. Sendo anterior a qualquer expressão simbólica se desenvolveu a expressão oral numérica e muito tempo depois, com o desenvolvimento da escrita, começaram a surgir símbolos para representar os números. Além dos números falados, em uma certa época usaram os números digitais que são a representação dos números por meio de várias posições dos dedos. A Figura 5 é uma ilustração de números digitais contida na *Suma de Pacioli*, de 1491.

Figura 5 – Números digitais



Fonte: https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/mathematical-treasures-paciolis-summa

Esse método de representar os números com as mãos ainda é usado pelos chineses (Figura 6). Por exemplo, ao perguntar o preço de uma fruta o feirante pode apenas lhe mostrar a mão sem nenhuma palavra.

Figura 6 – Algarismos digitais chineses

1	2	3	4	5	6
					
7	8	9	0 (ou 10)	10	
					

Fonte: https://ltl-chines.com/numeros-chineses/

Os números digitais possuem a vantagem de superar os limites dos diferentes dialetos, porém não eram apropriados para a realização de cálculos nem para registros.

4 **SISTEMAS DE NUMERAÇÃO**

Antes do indo-arábico, os numerais romanos eram comumente usados na contabilidade dos países europeus até o século XVIII. No sistema numérico romano, os algarismos são representados por símbolos e não possui o conhecimento do zero. Enquanto, no sistema indo-arábico além de os algarismos serem representados por símbolos, o sistema é posicional e reconhecem o zero como um número. Essas duas características permitem uma notação simples, especialmente para números grandes, e efetuar todos os tipos de cálculo sem a necessidade de recorrer a instrumentos, como o ábaco.

Segundo Karpinski (1911), antes da era cristã a quantidade de sistemas de notação numéricas era quase a mesma que o número de idiomas escritos, sendo que alguns povos possuíam mais de um sistema. Os gregos e os chineses, por exemplo, possuíam dois sistemas de numeração. Para se ter uma ideia, a característica posicional do nosso sistema atual não é exclusividade nem pioneirismo do indo-arábico. Três outros povos realizaram essa descoberta: os babilônios, pela primeira vez, no início do II milênio a.E.C.; os chineses, um pouco antes do início de nossa era; e também os maias, entre os séculos IV e IX E.C.

Para uma melhor compreensão de como chegamos às características do sistema de numeração atual e o porquê de ele ter se disseminado pelo mundo, faremos uma pequena jornada pela história para conhecermos alguns dos diferentes sistemas numéricos imaginados pelos povos ao longo do tempo, assim como, observar suas características.

Com a revolução agrícola, iniciada por volta de 10 000 a.E.C no Crescente Fértil, os homens, que antes viviam sob o modo caçador-coletor, adotaram um estilo de vida sedentário baseado na agricultura e domesticação de alguns animais. Esse novo modo de vida deu origem às habitações e, por consequência, aos vilarejos. O que resultou no crescimento populacional dando surgimento a uma nova forma de organização política e social. Substituíram os clãs por comunidades hierarquizadas[3] dando origem ao que chamamos de berços da civilização. Assim, nos vales dos rios

3 As comunidades hierarquizadas possuíam língua e tradições culturais comuns, porém eram independentes, com organização, governo e leis próprias. No império grego essas cidades são conhecidas como cidades-Estado.

Nilo, Tigre e Eufrates, Amarelo e Azul e Indo se origirinaram as primeiras cidades. Nas Américas esse processo ocorreu um pouco mais tarde nos picos da serra Madre, no México e América Central, e nos Andes, no Peru e na Colômbia. Além das modificações culturais, um dos principais resultados do surgimento das comunidades hierarquizadas foi o desenvolvimento de um sistema de contagem e com ele a escrita que permitiu o registro dos sistemas de numeração. Como já justificado anteriormente, para essa análise elegemos os seguintes sistemas numéricos: babilônio, egípcio, chinês, maia, grego, romano e indo-arábico. Além desses, falaremos também sobre alguns sistemas de numeração usados por indígenas no Brasil. Na Figura 7, localizamos geograficamente as regiões originárias do desenvolvimento dos sistemas numéricos escolhidos.

Figura 7 – Mapa mundial

Fonte: O autor, 2021.

Antes de iniciarmos a apresentação dos sistemas de numeração, uma observação que devemos fazer é quanto ao conceito de base. Alguns autores, como Ifrah e Eves, ao longo de suas obras classificam um agrupamento como base do sistema numérico e aplicam esse conceito aos sistemas de numeração não posicional, como o romano, por exemplo. No entanto, neste trabalho usaremos a definição de base feita por Blaise Pascal em sua obra *De numeris multiplicibus ex sola characterum numericorum additione agnoscendis*, publicado em 1665.

Pascal define base como um elemento de sistemas numéricos posicionais, em que:

1. A quantidade de algarismos é igual a b (inclusive o zero);
2. Qualquer número inteiro N pode ser decomposto de uma só maneira sob a forma do seguinte polinômio de grau *k-1*:

$$N = a_k b^{k-1} + a_{k-1} b^{k-2} + a_{k-2} b^{k-3} + \cdots + a_4 b^3 + a_3 b^2 + a_1$$

em que, os inteiros $a_k, a_{k-1}, a_{k-2}, \ldots, a_4, a_3, a_1$ são algarismos desse sistema.

Neste caso, dizemos que o sistema numérico tem ou é de base b.

4.1 **A concepção numérica de povos indígenas no Brasil**

Antes da numeração tomar uma forma escrita através de símbolos, ela é concebida e expressada pela linguagem oral. Podemos observar exemplos desse estágio nos povos indígenas no Brasil.

Quando os portugueses chegaram ao Brasil, este já era habitado por povos culturalmente integrados à natureza e aos seus ciclos; que produziam e reproduziam suas vidas sem a perspectiva de lucro; pautados na divisão sexual do trabalho; detentores da posse coletiva da terra, dos recursos naturais; com a noção de famílias estendidas, que socializavam o conhecimento necessário à sobrevivência da tribo. Eram principalmente agrupamentos humanos nômades e seminômades cujas principais atividades consistiam na caça, pesca, coleta de itens naturais, agricultura (em parte das comunidades), artesanato, produção de ferramentas e materiais necessários à produção e reprodução da vida material.

Antes do processo de colonização iniciado pelos portugueses no século XVI estima-se que havia em torno de 3 a 5 milhões de indígenas e entre 600 e mil línguas sendo faladas. Atualmente, existem um total de 154 línguas e, segundo o Censo 2010, 896 mil indígenas. Esses povos não desenvolveram a escrita o que não permitiu registrar sua forma de ver o mundo. Suas histórias, relatos e mitos foram passados por tradição oral. Sendo assim, eles conceberam os números de forma apenas falada.

Durante a busca por trabalhos sobre numeração indígena brasileira percebemos uma escassez de material e não localizamos registro de pesquisas feitas por matemáticos. O presente estudo se baseia em dois trabalhos realizados pela linguista Diana Green.

Segundo Green (1997), nessas línguas há sistemas numéricos com agrupamentos de dois, três, cinco, dez ou vinte unidades, os quais demonstram diversos processos de raciocinar, alguns mais holístico e outros mais analíticos. Os termos numéricos também diferem muito quanto a sua precisão e a sua flexão principalmente na maneira com que eles se referem ao elemento que está sendo contado.

A língua Canela, por exemplo, não tem termos numéricos específicos; limita-se a termos gerais tais como: 'só', 'um par', 'alguns' e 'muitos'.

Na língua Kampa (Aruák) existem apenas três termos numéricos para os numerais 1, 2 e 3 o que não os impede de fazer todos os cálculos necessários referentes ao seu dia-a-dia. O cálculo é feito através da correspondência biunívoca.

> Por exemplo, uma mãe de quatro filhos não pensa: "Vou cozinhar quatro ovos para meus filhos." Ela pensa: "Vou cozinhar um ovo para cada um dos meus filhos." Um homem não diz: "Vou cortar oito estacas para fazer a casa." Ele diz: "Vou cortar uma estaca para cada canto e mais um para cada lado." E se alguém lhe perguntar quantos ele vai cortar, ele vai responder: "Vou cortar vários". (GREEN, 1997, p.4)

Na língua Xavante os termos numéricos estão organizados sob o agrupamento de dois em dois. Nesse tipo de sistema numérico eles consideram os numerais em termos de pares, usam como referência as duas metades que se fazem uma unidade inteira. Segundo Green (1997), geralmente falantes dessas línguas contam levantando dois dedos ao mesmo tempo.

O Quadro 2 mostra os nomes dos numerais e seu significado na língua Xavante.

Quadro 2 – Nome e significado dos números na língua Xavante

Numeral	Nome	Significado
1	*mitsi*	'[um pedaço de] lenha-só'
2	*maparane*	'como as patas da ema'
3	*tsi'umdatõ*	(não tem outro significado além de 'três')
4	*maparane tsi'uiwana*	'como as patas de um par de emas'
5	*imro tö*	'sem o companheiro'
6	*imro pö*	'com o companheiro'
10	*danhiptõmo bö*	'os dedos da mão, todos'
20	*daparahi bö*	'os dedos do pé, todos'

Fonte: Quadro elaborado pelo autor a partir de dados de Green, 1997, p.5.

Já a língua Arára possui apenas duas palavras para designação dos numerais. Todos os termos dos numerais de 1 a 8 são combinações do numeral 1, *anane*, e do numeral 2, *adak* como pode ser visto no Quadro 3.

Quadro 3 – Nome dos números na língua Arára

Numeral	Nome
3	*adak anane*
4	*adak adak*
5	*adak adak anane*
6	*adak adak adak*
7	*adak adak adak anane*
8	*adak adak adak adak*

Fonte: Quadro elaborado pelo autor a partir de dados de Green, 1997, p.6.

Além desses termos, os Arára utilizam pelo menos quatro outros termos: 5, *jedun-ne* 'lado-só', 10, *omiat omiat* 'mão mão', 15, *omiat omiat puguğo jedun-ne* 'mão mão pé lado só' e 20, *omiat omiat puguğo puguğo* 'mão mão pé pé'. Costa de Souza (1995 apud Green, 1997, p.6) nota que "o uso de adak antes de anane é um argumento de que aquele termo tem inicialmente a qualidade perceptiva de 'par', sendo este um todo."

Em seu estudo, Green (2001) analisou 45 línguas indígenas e destas considera o sistema da língua Palikúr como o mais complexo.

O sistema de numeração Palikúr é baseado em agrupamentos de dez unidades. As palavras-números não só designam a quantidade como também caracterizam o que se conta através do uso de classificadores numéricos[4]. Eles possuem 20 classificadores que ocorrem apenas na raiz dos numerais cardinais e ordinais ou quando se trata de palavra interrogativa relativa à quantidade. Os classificadores se enquadram em cinco categorias semânticas principais que lidam com unidades inteiras, conjuntos, frações, abstrações e séries - todos conceitos matemáticos. Por exemplo, as unidades inanimadas são classificadas de acordo com sua forma geométrica.

> Esses afixos revelam conceitos matemáticos que fazem parte dos processos de pensamento cotidianos de pessoas fora da influência da vida moderna, refutando mais uma vez a ideia de mentes "primitivas" incapazes de pensar abstrata ou analiticamente, e fornecendo uma referência fora de nossa própria cultura pela qual podemos medir nossas próprias idéias matemáticas. (GREEN, 2001, p.1)

Nesse trabalho faremos uma exposição resumida desse sistema. O Quadro 4 mostra sua estrutura básica. As palavras usadas para formar frases numéricas são “com” a-kak, “mais” akiu e “adicionado” ar-auna. Esta última é usada apenas em frases numéricas. Para números superiores a noventa e nove, os Palikur incorporaram os termos numéricos de um dialeto da área, o crioulo francês. Podem, no entanto, combinar as duas línguas, principalmente para numerais elevados, como na contagem de dinheiro.

---

4 Classificadores numéricos são morfemas fixados na raiz do termo numérico, que classificam o elemento o qual o numeral se refere.

Quadro 4 – Estrutura do sistema numérico Palikúr

1	*paha-t*	"1-abstrato"	11	*madikauku a-kak nteunenker ar-auna*	"10 + 1"
2	*pi-ta-na*	"2-abstrato"	20	*p-i-na madikwa*	"2-séries-2 dezenas"
3	*mpana*		25	*p-i-na madikwa a-kak pohouku ar-auna*	"2 dezenas + 5"
4	*paxnika*		30	*mpana madikwa*	"3 dezenas"
5	*poho-uku*	"1-mão"	40	*paxnika madikwa*	"4 dezenas"
6	*pugunkuna*		50	*pohouku madikwa*	"5 dezenas"
7	*nteunenker*		60	*pugunkuna madikwa*	"6 dezenas"
8	*nteunenker a-kak paha-t ar-auna*	"7 + 1"	70	*nteunenker madikwa*	"7 dezenas"
9	*nteunenker a-kak pi-ta-na ar-auna*	"7 + 2"	80	*nteunenker madikwa a-kak madikauku ar-auna*	"7 dezenas + 10"
10	*madik-auku*	"fima das-mãos"	90	*nteunenker madikwa a-kak p-i-na madikwa ar-auna*	"7 dezenas + 20"

Fonte: Quadro elaborado pelo autor a partir de dados de Green, 2001, p.3.

As palavras "um" e "dois" em palikur sofrem grandes modificações por meio da adição de sufixos e, no caso de "dois", de infixos que concordam com qualquer classe com a qual os números estejam ligados. "Três" e "quatro" são também modificados por afixos conforme a classe, embora nem tanto. Outros numerais são ainda menos modificados.

Green (2001) organizou os classificadores de acordo com conceitos matemáticos, isto é, em termos de 'unidades inteiras' tangíveis, 'conjuntos' e 'frações', bem como 'unidades' e 'conjuntos' intangíveis (chamadas 'abstrações' e 'séries'). Porém, não aprofundaremos nosso trabalho nesse tema, apenas daremos alguns exemplos de modo a ilustrar o funcionamento do sistema numérico palikúr.

Quando um numeral se refere a uma unidade tangível, por exemplo, o classificador sempre indica se a unidade é animada ou inanimada. Com unidades animadas, acrescentam o classificador -*p* ao numeral 1 e –*ya* ao numeral 2 e também concorda em gênero, -ri (masculino) e –*ru* (feminino). Por exemplo, 'um (homem) xamã' é *paha-p-ri iham-ri* e 'um (mulher) xamã' é *paha-p-ru iham-ru.*

Quando o numeral se refere a plantas o classificador usado é –kti. O numeral um é *paha-kti* e o numeral dois é *pi-kat-na*. Por exemplo, “uma bananeira’ é *paha-kti pilatno* e ‘duas flores” é *pi-kat-na ipuwiti*.

Números maiores que dois não têm classificadores quando se referem a criaturas animadas. Os seres animados incluem pessoas, espíritos, animais, peixes, pássaros, cobras, tartarugas e insetos. A lua, o Sol e as estrelas também são considerados como animados.

Quando os numerais se referem a unidades inanimadas, os classificadores não indicam o gênero e sim a forma geométrica. Essas formas são: irregular, redondo / quadrado, redondo e longo (cilíndrico), plano, plano e profundo (côncavo), estendido e estendido incluindo perímetro (alto / profundo / largo).

Ainda é muito comum a ideia de que povos ditos primitivos não são capazes de raciocinar abstratamente e que a matemática desses povos, assim como os indígenas, é inferior ou simples.

> A afixação dos números confirma linguisticamente que as culturas fora da nossa têm muitos conceitos matemáticos semelhantes aos nossos. Isso deixa claro que mesmo em uma sociedade analfabeta, onde os símbolos numéricos escritos nunca foram pensados, os conceitos matemáticos sistemáticos podem ser bem desenvolvidos. Obviamente, as pessoas dessa cultura dita "primitiva" são capazes de pensar tanto abstrata quanto analiticamente! (GREEN, 2001, p.42)

Green se refere a nossa cultura como sendo a cultura ocidental, aquela ensinada na maioria das escolas brasileiras. Em geral, os diversos sistemas numéricos concebidos durante a história da humanidade são avaliados a partir do sistema numérico adotado no ocidente, o indo-arábico, que é decimal. Nesta perspectiva, os sistemas matemáticos indígenas são considerados "simples", "inferiores", "pouco elaborados", "primitivos", etc.

Segundo Ferreira (1998) o pouco que se conhece a respeito da matemática Palikur é suficiente para refutar idéias preconceituosas sobre os conhecimentos matemáticos de povos indígenas. O estudo da matemática Palikur revela não apenas como o povo conta, mas um sistema complexo, inteligente, capaz de permitir a extensão do pensamento geométrico e o entendimento de vários conceitos matemáticos.

4.2 **Sistema babilônio**

Mesopotâmia significa “terra ou região entre rios” em grego se localiza entre os rios Tigre e Eufrates, região do atual Iraque e Kuwait. Ao longo do tempo foi habitada por diferentes povos, entre eles os sumérios, os acádios e os assírios. Ao norte, zona mais árida, ficava a Assíria e ao sul, ponto de encontro dos dois rios e região mais fértil, localizava-se a Suméria.

No período Neolítico (ca. 10000 – 3000 a.E.C.), o homem inicia a transição de uma sociedade de caçadores para uma de agricultores. É o início da sedentarização que levou ao surgimento das sociedades urbanas.

É na região da Suméria que surgem as primeiras cidades hierarquizadas mesopotâmicas. Aproximadamente em 3500 a.E.C., os sumérios, cuja origem ainda é desconhecida, já haviam formado mais de uma dezena de cidades, como Ur, Uruk, Nipur, Eridu e Lagash. Também foram responsáveis pela origem da escrita cuneiforme.

Figura 8 – Mapa da Mesopotâmia

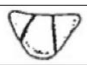
Fonte: https://escola.britannica.com.br/artigo/Mesopot%C3%A2mia/48
1886

Nosso objetivo é relacionar a história dos números com a história de seus registros, o que está intimamente ligado à escrita. Acreditava-se que sua prática teve início com o registro de figuras para representar objetos do cotidiano, ou seja, uma escrita pictográfica. E, a partir daí, desenvolveu a escrita cuneiforme.

Schmandt-Besserat (2001) afirma que a escrita surgiu da contagem a partir do desenvolvimento de *tokens*[5] para *script*. Sendo usada exclusivamente para a contabilidade até o terceiro milênio a.E.C., quando a preocupação suméria com a vida após a morte abriu o caminho para a literatura usando a escrita para inscrições funerárias.

No Quadro 5 a primeira coluna apresenta a forma de como era representado o token e na segunda como o patrimônio era representado em escrita pictográfica.

Quadro 5 – Tokens e pictogramas

Tokens	Escrita pictográfica	Significado
		Carneiro
		Ovelha
		Pão
		Óleo
		Metal

Fonte: Quadro elaborado pelo autor a partir de dados de Mattessich, 1994, p.10.

Os *tokens* começaram a aparecer no Crescente Fértil[6] do Oriente Próximo, da Jordânia ao Irã, por volta de 8000 a.E.C. A contagem coincidiu com a agricultura e a economia de redistribuição dos excedentes que dela derivou. O método de contagem através de *tokens* foi adotado por várias culturas distintas e, segundo Schmandt-Besserat (2013), provavelmente ajudaram os líderes a controlar os bens em espécie coletados e sua redistribuição como oferendas aos deuses, a preparação de festivais e várias necessidades da comunidade.

Até 3500 a.E.C., os *tokens* representavam medidas de cereais, óleo e animais. Eles possuíam uma superfície lisa e foram modelados em formas

5 *Tokens* são símbolos tangíveis de outros objetos.

6 Crescente Fértil é a região no Oriente Médio que corresponde a uma curva, como no formato da lua em quarto crescente, compreendendo as regiões contemporâneas do sul do Iraque, Síria, Líbano, Jordânia, Israel e norte do Egito. Abriga grandes rios tal qual o Nilo, Tigre, Eufrates e Jordão.

geométricas simples, incluindo cones, esferas, discos, ovóides e cilindros. O que é notável sobre os "*tokens* simples" é que eles permaneceram os mesmos durante todo seu período de existência, cerca de cinco mil anos.

Na Figura 9 podemos observar *tokens* simples encontrados em Tepe Gawra, atual Iraque, ca. 4000 a.E.C. O cone, a esfera e o disco plano são três medidas de cereais. O tetraedro é uma unidade de trabalho.

Figura 9 – Tokens simples

Fonte: https://sites.utexas.edu/dsb/

Com o surgimento das cidades, a diversidade de *tokens* aumentou significativamente, de 6 para 300 tipos, com a finalidade de controle dos bens manufaturados. Surgiram tokens mais complexos que além de formas geométricas também assumiam formas naturalísticas, incluindo vasos, ferramentas e animais e eram cobertos por linhas ou pontos que conferiam informações qualitativas. Uma das principais peculiaridades dos tokens é a característica de tamanho pequeno, presente em todos os modelos, medindo em média de um a dois centímetros.

Na Figura 10 podemos observar fichas complexas encontradas em Tello, atual Iraque, ca. 3300 a.E.C.. Da esquerda para direita: um pedaço de tecido, um frasco de óleo, ainda desconhecido, uma medida de trigo. Continuando abaixo, da esquerda para direita, uma peça de roupa, um lingote de metal, um pedaço de corda, uma ovelha.

Figura 10 – Tokens complexos

Fonte: https://sites.utexas.edu/dsb/

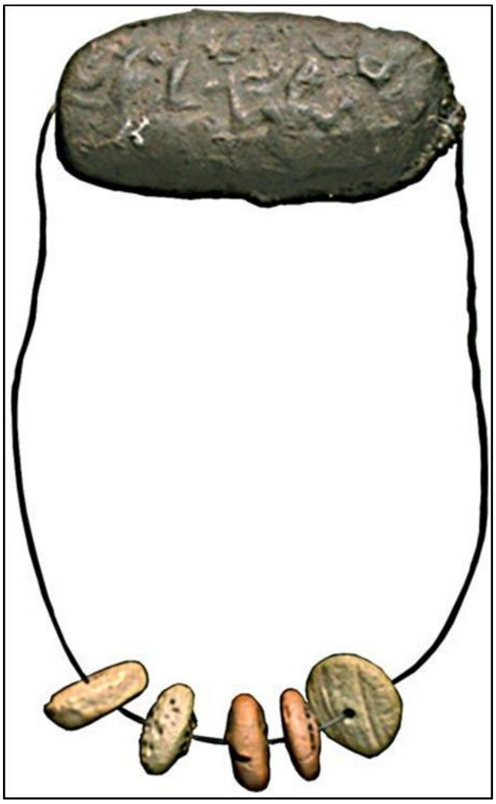
A adição, subtração, multiplicação e divisão de quantidades de mercadorias eram feitas movendo ou removendo contadores manualmente.

A evolução da complexidade da sociedade mesopotâmica trouxe consigo o desafio de criar ferramentas menos frágeis para o controle patrimonial: os envelopes de argila. Para garantir uma maior segurança os *tokens,* que antes eram guardados em cestos de vime, em caçarolas de couro ou em tigelas de barro, foram amarrados a bolas de argila como um colar ou colocados dentro delas protegendo contra adulteração e fraude.

Segundo Woods (2012), é consenso geral que os envelopes representaram um dos primeiros dispositivos administrativos, que serviram como meio de monitorar e controlar o fluxo de materiais, várias mercadorias, e trabalho. Essencialmente, esses dispositivos serviram como recibos para várias transações econômicas.

Na Figura 11 podemos observar um envelope encontrado na Síria, ca. 3500-3200 a.E.C. Esse envelope oval contém um conjunto de tokens complexos que foi originalmente bloqueado nas extremidades com uma corda.

Figura 11 – Envelope de argila



Fonte: https://www.schoyencollection.com/ mathematics-collection/pre-literatecounting/bulla-string-tokens-ms-4523

Na Figura 12 podemos observar um envelope de argila encontrado em Susã, Irã, datada de ca. 3300 a.E.C. Cada um dos discos representa "um rebanho" e os cones representam pequenas medidas de grão.

Figura 12 – Bola de argila

Fonte: https://sites.utexas.edu/dsb/

Para poder saber o conteúdo desses invólucros sem destruí-lo passaram a marcar em sua superfície a forma e o número de *tokens* que haviam sido colocados no seu interior. Aos poucos, essas impressões foram transferidas para tabletes de argila[7] tornando os invólucros desnecessários. Essas marcas eram os primeiros sinais de escrita. Na Figura 13 temos um tablete datado de ca. 3200 a.E.C cujas impressões de esferas e cones representam medidas de grãos.

Figura 13 – Tablete de Godin Tepe, Irã

Fonte: https://sites.utexas.edu/dsb/

7 Esses tabletes de argila eram assados se tornando um registro permanente.

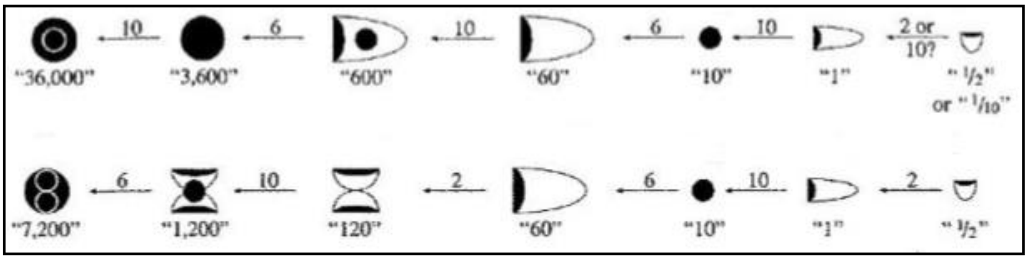
De acordo com Schmandt-Besserat (2014), os *tokens* não tinham o caráter abstrato da contagem, ou seja, não existia um símbolo para o 1 ou para o 2, por exemplo. Para cada tipo de insumo havia um tipo de *token* para representá-lo, ou seja, jarras de óleo só podiam ser contadas por *tokens* ovoides. Essa contagem era feita na forma de correspondência um a um: uma jarra de óleo era representada por um ovoide; duas jarras, por dois ovoides; e assim por diante.

É interessante observar que o *token,* além de deter o caráter numérico, era fator de distinção da natureza do objeto a que remetia.

> Por sua ampla extensão e por sua durabilidade de mais de 4.000 anos, os tokens reconhecem o surgimento de uma administração arcaica, mas eficiente, responsável pelo gerenciamento de alimentos armazenados nas primeiras comunidades agrícolas em todo o Oriente Próximo. Mais importante ainda, os tokens falam da relação entre a gestão de bens agrícolas comunais e a invenção da contagem e da metrologia. E com o progresso da agricultura e a expansão da população, o acúmulo de riqueza sem precedentes desafiou o cérebro humano a computar números cada vez maiores e quantidades cada vez maiores. Foi o progresso constante desses novos processos mentais que levou ao desenvolvimento da aritmética, da escrita e da civilização. (SCHMANDT-BESSERAT; MOGHIMI, 2017, p.182.)

Os tabletes revelam que os símbolos numéricos não eram absolutos. O seu significado dependia do que estava sendo contado, pois era possível usar sinais visualmente iguais em relações numéricas diferentes.

Figura 14 – Sistemas métricos



Fonte: Schubring, 2013, p.3.

Dessa forma, o primeiro sistema conta a maior parte dos objetos discretos: homens, animais, coisas feitas de pedra etc; o segundo conta alguns grãos.

Ao longo do 3º milênio a.E.C a escrita cuneiforme se desenvolve e o sistema numérico se padroniza com uma essência posicional.

Segundo Roque (2012), duas importantes mudanças ocorreram: os símbolos numéricos passaram a ser usados para fazer cálculo e um mesmo sinal passou a ser usado para representar valores diferentes. Pressupõe que o primeiro sistema de contagem a ser representado na forma cuneiforme foi o sistema de contagem usado para agrupar animais, ou outros objetos discretos, em grupos de 10, 60, 600 ou 3600.

Quadro 6 – Evolução do sistema de contagem discreta

	1	10	60	600	3 600	36 000
Signos protocuneiforme (final do quarto milênio a.E.C.)						
Signos cuneiforme (meados do terceiro milênio a.E.C.)						
Sistema posicional sexagesimal (final do terceiro milênio a.E.C.)						

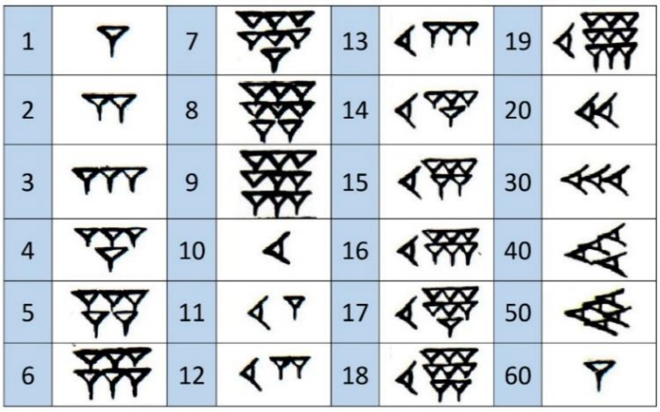
Fonte: Quadro elaborado pelo autor a partir de dados de Schubring, 2013, p.5.

Por volta de 2000 a.E.C., os amoritas invadiram o vale dos rios Tigre e Eufrates, assimilaram a cultura local e fundaram a cidade da Babilônia[8]. Surgindo o grande Império Babilônico com a unificação das cidades-estados. Por volta de 600 a.E.C., foi dominado pelos assírios e, posteriormente, pelos persas.

A maioria dos tabletes cuneiformes de que temos conhecimento são do período em torno de 1700 a.E.C. O sistema de numeração utilizado pelos babilônios fazia uso de uma notação posicional de base sessenta utilizando apenas dois símbolos (Quadro 7). Segundo Roque (2012), o sistema sexagesimal era usado sistematicamente em textos astronômicos ou matemáticos, contudo, quando se tratava de medidas utilizavam vários sistemas distintos.

8 A mais antiga menção da cidade de Babilônia pode ser encontrada em uma tábua de argila do reinado de Sargão da Acádia (ca. 2334–2279 a.E.C.), que remonta ao século XXIII a.E.C. A Babilônia era meramente um centro religioso e cultural neste momento, sendo que sequer era um Estado independente nem uma cidade grande e assim permaneceu até o reinado de Hamurabi (ca. 1792–1750 a.E.C.) que a transformou na cidade em um dos mais prósperos e importantes centros urbanos de toda a Antiguidade.

Quadro 7 – Numerais babilônios



Fonte: O autor, 2021.

Os números menores que 60 eram expressos como um sistema de agrupamento simples[9], no qual os números 1 e 10 possuíam signos específicos.

Já os números maiores ou igual a 60 eram escritos num sistema posicional de base 60. Muito se especulou sobre os motivos que levaram ao uso da base sessenta. Segundo Boyer (2012), é mais provável que tenha sido adotada pelos interesses da metrologia por conta da facilidade das subdivisões, pois 60 é divisível por 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20 e 30. De qualquer forma ainda vemos resquícios atualmente desse sistema quando tratamos da unidade de tempo e medida dos ângulos.

Os babilônios não usavam nenhum símbolo para separar as ordens nem para separar a parte inteira da fracionária. Para facilitar a leitura dos números sem causar nenhuma ambiguidade usaremos a seguinte notação para transcrever os números no sistema babilônio com os símbolos indo-arábicos: empregaremos o símbolo “;” como separador de algarismos dentro da parte inteira ou dentro da parte fracionária de um número e a “,” para separar a parte inteira da fracionária.

9 Método pelo qual o número se expressa pelo uso aditivo dos símbolos, repetindo-se cada um deles o número necessário de vezes.

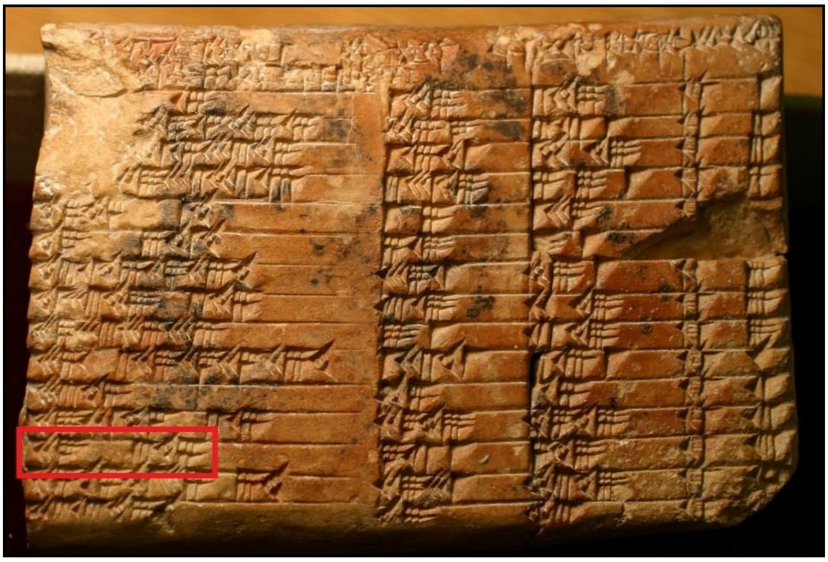
Quadro 8 – Exemplos de números escritos no sistema sexagesimal babilônio

Cuneiforme	Valor decimal
	$1;40 = 1 \times 60 + 40 = 100$
	$10;2 = 10 \times 60 + 2 = 602$
	$1;23 = 1 \times 60 + 23 = 83$
	$18;12;1 = 18 \times 60^2 + 12 \times 60 + 1 = 65521$
	$1;7;4;20 = 1 \times 60^3 + 7 \times 60^2 + 4 \times 60 + 20 = 241\,460$

Fonte: O autor, 2021.

Observe que os números um e sessenta possuem o mesmo símbolo. Para diferenciá-los era preciso observar o contexto dos problemas, pois não possuíam um símbolo para representar uma ordem vazia. Por vezes, os escribas deixaram uma espaço vazio na tentativa de suplantar essa dificuldade. (Figura 15)

Figura 15 – Tablete Plimpton 322[10], ca. 1800 a.E.C.



Fonte: Britton, J.; Proust, C.; Shnider, S. (2011), p. 564.

A transcrição da 15ª linha do tablete para uma de suas interpretações[11] é: $1{,}27; (vazio); 3; 45$. No entanto, esse recurso ainda não era suficiente para suprir a

10 Esse tablete foi adquirido por George Arthur Plimptom em 1922 no Iraque. Plimpton 322 é uma tabela de números, com quatro colunas e quinze linhas, em notação sexagesimal babilônica. Encontramos três interpretações para os números contidos nela. Uma delas sugere que os matemáticos já conheciam o “teorema de Pitágoras”.

11 “Tem havido um debate persistente se a primeira coluna começa com “1”. Uma vez que os restos do topo da cunha vertical, “1”, são visíveis na tabuinha nas linhas 7 a 11 e mais claramente nas

necessidade de um “zero”. Pois, nessas condição não havia como simbolizar a ausência de duas ou mais ordens consecutivas vazias.

Outra dificuldade que percebemos nesse sistema está na sua própria notação. Como as unidades variam de 1 a 59 dentro de cada ordem isso gera várias ambiguidades. Por exemplo, o número  pode ser interpretado como $1;2 = 62$ ou como 12.

Toda essa ambiguidade que salta aos nossos olhos não foi um empecilho para que os matemáticos e astrônomos babilônios efetuassem muitos cálculos sofisticados, uma vez que a ordem de grandeza em questão era determinada pelo contexto do problema ou pelo comentário do mestre que devia precisar de viva voz ao mesmo tempo os dados e a ordem de grandeza, de acordo com Ifrah (1997). O que nos faz conjecturar a dificuldade dos babilônios em perceber esses inconvenientes de seu sistema. De acordo com Schubring (2013), existem exemplos de tabletes de argila onde os escribas babilônios cometeram erros de cálculo, porque não consideraram o espaço vazio necessário para representar uma ordem vazia.

Na época do Império Selêucida (ca. 300 – 63 a.E.C.), os matemáticos e astrônomos babilônios utilizaram o símbolo  para representar a ausência de uma ordem, ou seja, uma casa vazia. Os matemáticos só o empregaram em posição intermediária, ou seja, não podia ser usado como último algarismo, nem podia ser resultado de um cálculo.

Figura 16 – Exemplo numérico

$(2;0;25;38;41)$

Fonte: O autor, 2021.

Portanto, este símbolo não possuía o aspecto de um número, ou seja, do que atualmente chamamos de zero.

A partir do século II a.E.C., os astrônomos gregos utilizavam este sistema de numeração sexagesimal para exprimir a parte fracionária. No entanto, em vez de

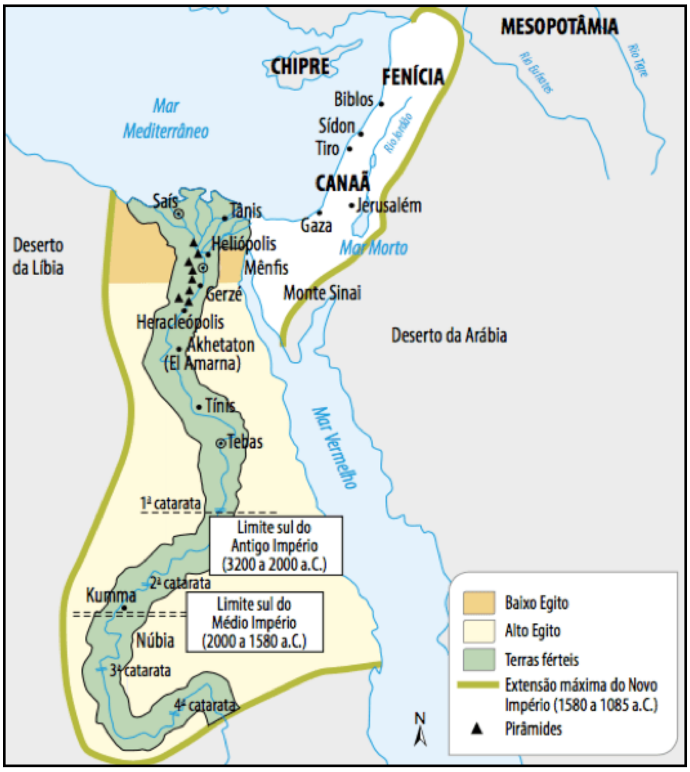
linhas 14 a 17, conforme refletido na cópia de Robson e conforme observamos no original.” (Britton, J., Proust, C.; Shnider, S. (2011), p. 523, tradução nossa).

utilizar os símbolos cuneiformes babilônios, os gregos adaptaram a notação para sua numeração alfabética. Dessa mesma forma fizeram os judeus e os árabes em suas tábuas astronômicas.

4.3 **Sistema egípcio**

Assim como a Mesopotâmia, o vale do rio Nilo se encontra na região do Crescente Fértil. A partir da revolução agrícola que aconteceu nessa região surgiram as mais antigas aldeias agrícolas. Inicialmente, essas aldeias era independentes e viviam de forma igualitária. Com o crescimento populacional surgiram as diferença sociais e a necessidade de organizarem a irrigação o que levou essas aldeias a se organizarem em grupos maiores denominados nomos.

Figura 17 – Mapa do Egito Antigo



Fonte: https://rgt.ifsp.edu.br/etniar/index.php/personagens/cleopatra-69ac-30ac

Entre os anos 3300 e 3100 a.E.C. ocorreu uma unificação dos nomos dando origem a dois reinos: o Alto Egito, no sul, e o Baixo Egito, no norte. Em 3100 a.E.C., forças militares do Alto Egito conquistaram a região do Baixo Egito unificando esses dois reinos que ficaram sob a autoridade de um único governante: o faraó. Segundo a tradição esse feito foi protagonizado pelo rei Menés (ou Narmer), por isso é considerado o primeiro faraó do Egito.

De 2700 a 1069 a.E.C. o Egito se fortaleceu e conquistou novas terras, formando um Império. Os faraós estenderam seu território à Palestina, à Síria, à Ásia Menor e à Núbia.

Depois do século XII a.E.C., o Egito foi sucessivamente invadido por diversos povos. Em 670 a.E.C., os assírios conquistaram o Egito, dominando-o por oito anos. Após libertar-se dos assírios, o Egito começou uma fase de recuperação econômica e brilho cultural. Porém, em 525 a.E.C., foi conquistado pelos persas.

A chegada dos macedônios, comandados por Alexandre Magno em 332 a.E.C, marca o fim da autonomia política do Egito. Ele funda Alexandria e é reconhecido pelo Egito como seu rei legítimo. O país fora governado várias vezes por poderes estrangeiros, mas somente os persas tiraram dos faraós sua independência.

O governo dos faraós terminou oficialmente em 30 a.E.C., após a derrota da faraó Cleópatra pelos romanos quando o Egito se tornou uma província.

No fim do terceiro milênio a.E.C., a civilização egípcia já estava bastante urbanizada e, por razões dentre elas comerciais e administrativas, criaram uma escrita e um sistema de numeração assim como seus contemporâneos sumérios. Os registros eram feitos em 4 tipos diferentes de material: pedra, cerâmica, madeira e papiro.

Os egípcios desenvolveram três formas de escrita: a hieroglífica, a hierática e a demótica. Sendo a hieroglífica a mais antiga. Seu uso era restrito, sendo encontrada principalmente em templos e túmulos. A hierática, uma variação da hieroglífica, aparece em textos sagrados, administrativos e literários. A escrita demótica apareceu por volta de 700 a.E.C.

Segundo Desplancques (2013), a tradição egípcia atribui a invenção da escrita ao primeiro faraó. No entanto, descobertas arqueológicas na tumba U-j do cemitério de Umm el-Qaab, em Abidos, atestam a existência de uma escrita antes da unificação do Egito, aproximadamente em 3150 a.E.C.

A escrita egípcia foi autóctone e livre de qualquer influência estrangeira, pois seus pictogramas descrevem a realidade concreta do meio ambiente egípcio.

> Não apenas os sinais hieroglíficos que ela utiliza são todos tirados da fauna e da flora nilótica, o que prova que a escrita foi desenvolvida no local, mas ainda instrumentos e utensílios que figuram nela eram empregados no Egito desde o eneolítico antigo (início do IV milênio a.E.C.), o que é a prova de que a escrita (hieroglífica) é certamente o produto da civilização egípcia apenas e que ela nasceu nas margens do Nilo. (VERCOUTTER apud IFRAH, tomo1, 1997, p. 331)

O sistema de numeração egípcia foi concebido como um sistema não posicional. Diferentemente da numeração suméria cujos grafismos revelam sua origem material, os signos desta numeração escrita não permitem conceber quais os objetos concretos que os precederam na arte do cálculo figurado no tempo anterior à invenção da escrita.

Quadro 9 - Representação numérica hieroglífica

1	𓏺	6	𓏿	100	𓍢
2	𓏻	7	𓐀	1000	𓆼
3	𓏼	8	𓐁	10000	𓂭
4	𓏽	9	𓐂	100000	𓆐
5	𓏾	10	𓎆	1000000	𓁨

Fonte: O autor, 2021.

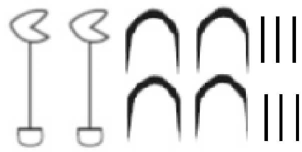
A escrita e a leitura são simples, os números maiores ficam à esquerda, ou, às vezes, dispostos verticalmente. Como o sistema é aditivo, os números são obtidos pela soma de todos os números representados simbolicamente. Na Figura 18 podemos observar esses signos em uma das paredes do templo de Karnak.

Figura 18 – Templo de Karnak

Fonte: https://www.flickr.com/photos/adrian_lazar/2791549269

Por exemplo, qual o número representado na Figura 19?

Figura 19 – Exemplo numérico hieroglífico



Fonte: O autor, 2021.

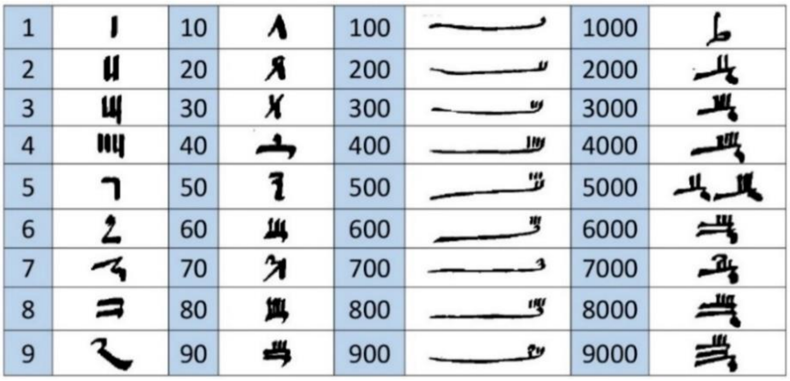
Escrevendo na nossa numeração, temos:

$$1000 + 1000 + 10 + 10 + 10 + 10 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 2046$$

Segundo Smith (1958), os egípcios usavam a forma hieroglífica para inscrições em pedra que demandavam mais tempo e cuidado. E para inscrições em papiro, madeira ou cerâmica foi desenvolvida a escrita hierática, uma forma mais rápida e cursiva de escrita cujos sinais derivam dos hieróglifos.

Enquanto a forma hierática era escrita da direita para a esquerda, os hieróglifos também podiam ser escritos da esquerda para a direita.

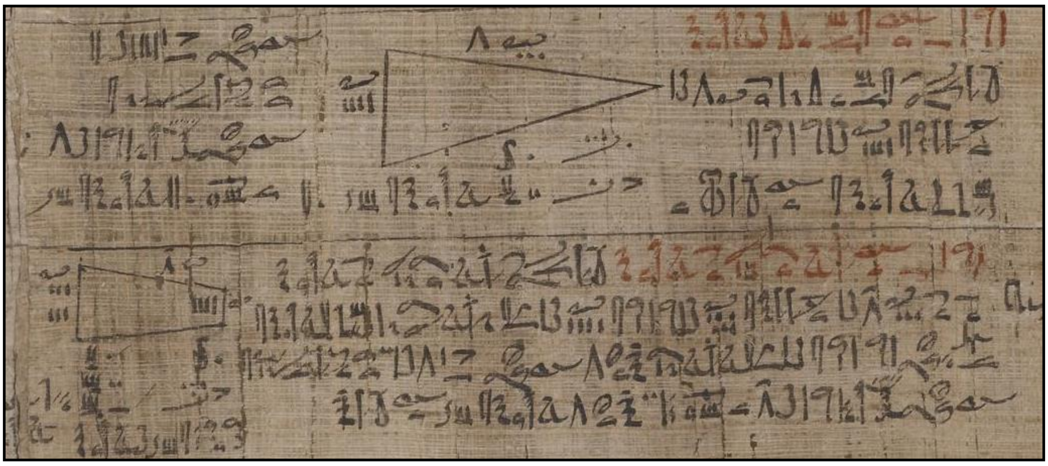
Quadro 10 – Representação numérica hierática



Fonte: Quadro elaborado pelo autor a partir de dados de Ifrah, 1997, p.354.

Os documentos matemáticos mais importantes do Egito, escritos em papiros, fazem uso da forma hierática de numerais.

Figura 20 – Uma parte do papiro de Ahmes



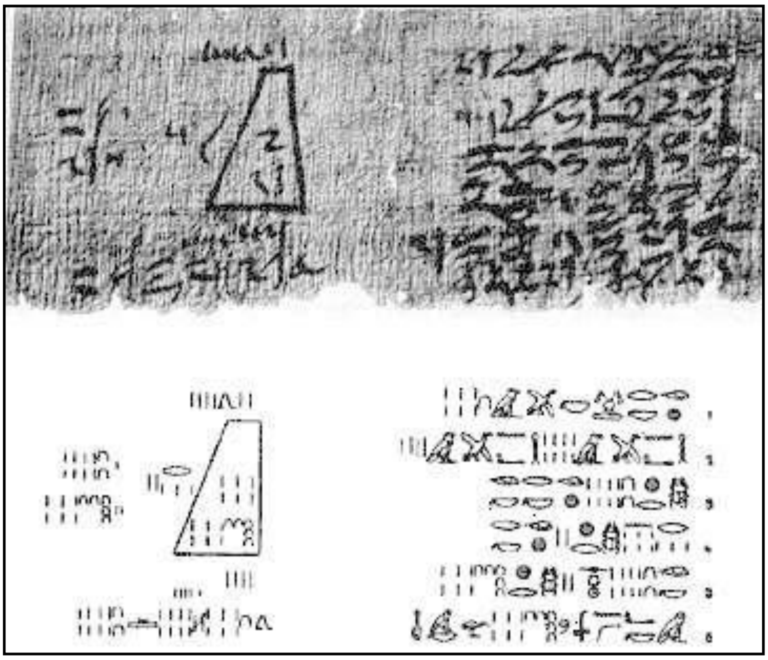
Fonte: https://www.britishmuseum.org/collection/image/766114001

O sistema de numeração descrito no Papiro de Ahmes[12] continua fazendo uso de agrupamentos de dez, mas introduz sinais especiais para representar alguns algarismos e múltiplos de potências de dez com o intuito de simplificar o processo de repetição. Segundo Boyer (2012), o quatro, por exemplo, não é representado por 4 barras verticais, e sim por uma barra horizontal; e o sete por um único símbolo, não

12 Antes conhecido como Papiro de Rhind em referência ao escocês Henry Rhind que o comprou na cidade de Luxor, sul do Egito. Foi escrito por volta de 1650 a.E.C. pelo escriba Ahmes. Esse papiro e o papiro de Moscou são as principais fontes de informações referentes à matemática egípcia antiga.

mais por sete barras verticais. Esse processo denominado ciferização é um precursor dos atuais algarismos.

Figura 21 – Parte do papiro de Moscou com a transcrição hieroglífica do texto hierático



Fonte: Boyer, 2012, p.35.

A operação fundamental era a adição e as operações de multiplicação e divisão eram efetuadas num processo de sucessivas duplicações. Na divisão o processo de duplicação era feito de forma contrária à multiplicação onde o multiplicando é dobrado sucessivamente, na divisão essa duplicação é feita com o divisor.

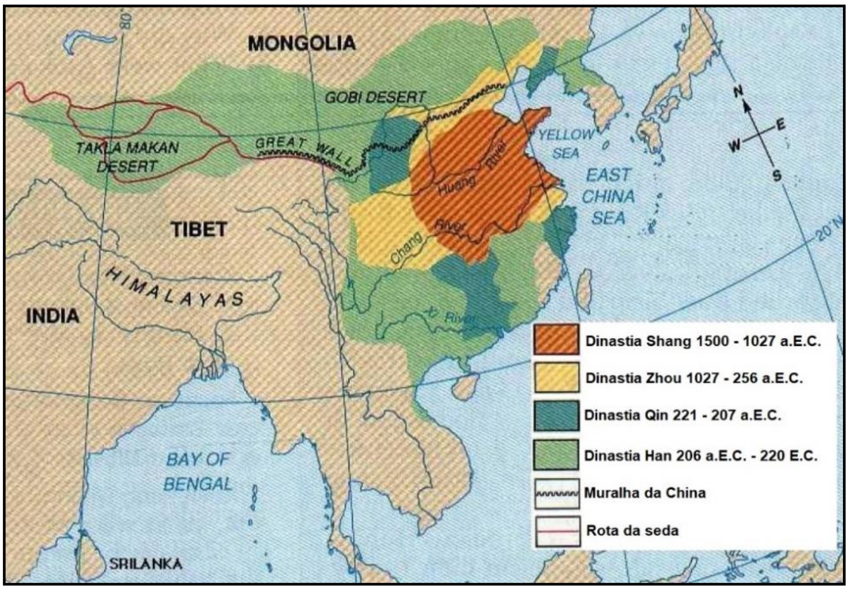
Após o terceiro século a.E.C, com o domínio macedônio e a introdução do grego na administração nasceu a língua copta, posteriormente suplantada pelo árabe, levando ao desaparecimento do conhecimento dos hieróglifos.

4.4 **Sistema chinês**

Há uma incerteza quanto ao início da civilização chinesa, pois muito pouco se sabe sobre ela já que os registros da época eram feitos em bambu, material perecível. Atrelado a isso, em 213 a.E.C, o imperador Shï Huang-ti ordenou uma queima de livros. Muitos dos livros queimados foram reconstituídos de memória o que deixa em dúvida sobre a autenticidade de grande parte do material bibliográfico anterior à essa data.

A civilização chinesa nasceu no Vale do rio Amarelo às margens dos rios Huang-Ho e Yang-Tsé-Kiang, conhecidos como rio Amarelo e rio Azul. Segundo as pesquisas arqueológicas, por volta de 7000 a.E.C. comunidades agrícolas se estabeleceram às margens do rio Amarelo e por volta de 3000 a.E.C. às margens do rio Azul. Assim como ocorreu na Mesopotâmia e no Egito, esses rios favoreceram o desenvolvimento da agricultura e o surgimento de cidades na região.

Figura 22 – Mapa da China Antiga



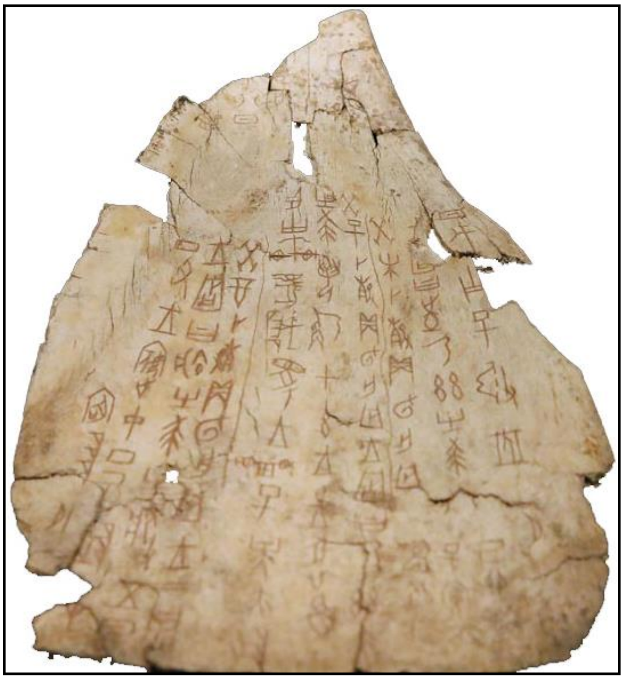
Fonte: https://maps-china-cn.com/ancient-china-map

A história da China possui uma lacuna entre o seu período proto-histórico e a que, segundo a tradição, seria sua primeira dinastia, a dinastia Xia (ca. 2000 – 1500 a.E.C). Porém, ainda há controvérsias sobre sua existência já que até o momento não existem documentos que comprovem a veracidade de sua existência.

Quando a China ingressou na Era do Bronze, instituiu-se a primeira dinastia de que se tem evidências históricas, a dinastia Shang (1500 – 1027 a.E.C). Seu vasto material arqueológico revela o domínio da metalurgia e estrutura política baseada em cidades relativamente autônomas. É desse período que se tem os registros escritos mais antigos. Inscrições em ossos e carapaças de tartaruga já revelam um sistema numérico decimal, segundo Eves (2004).

Segundo Ifrah (1997), essa escrita corresponde a um estágio bastante avançado, pois não é puramente pictográfica nem ideográfica.

Figura 23 - Um osso oracular da era Shang



Fonte: http://portuguese.people.com.cn/n3/2019/1119/c309810-9633578-2.html

O sistema de numeração correspondente a essa escrita arcaica se revela abstrata correspondendo a uma concepção intelectual um tanto avançada.

Quadro 11 – Signos da numeração chinesa arcaica

1	一	5		9	ou
2	二	6	ou ou	10	|
3	三	7	+ ou	100	ou
4	≣	8	ou	1000	ou

Fonte: Quadro elaborado pelo autor a partir de dados de Ifrah, 1997, p.563.

A estrutura do sistema de numeração chinês permaneceu a mesma ao longo de sua história, embora seus signos tenham sofrido algumas variações gráficas.

Além desse sistema de numeração, chamado de sistema tradicional, os chineses utilizavam outro sistema de numeração, o de sistema de varas. Ambos de base decimal.

4.4.1 Sistema de numeração tradicional

O sistema usado nos dias atuais pelos chineses é composto por treze símbolos, nove símbolos para as unidades e quatro símbolos para as primeiras potências de 10. Existem hoje várias grafias diferentes para cada um dos signos dos sistema de numeração tradicional chinês. Consideraremos aqui a forma clássica que é usada no ensino elementar chinês como pode ser visto no Quadro 12.

Quadro 12 – Numeração tradicional chinesa

1	一	6	六	100	百
2	二	7	七	1000	千
3	三	8	八	10 000	萬
4	四	9	九		
5	五	10	十		

Fonte: O autor, 2021.

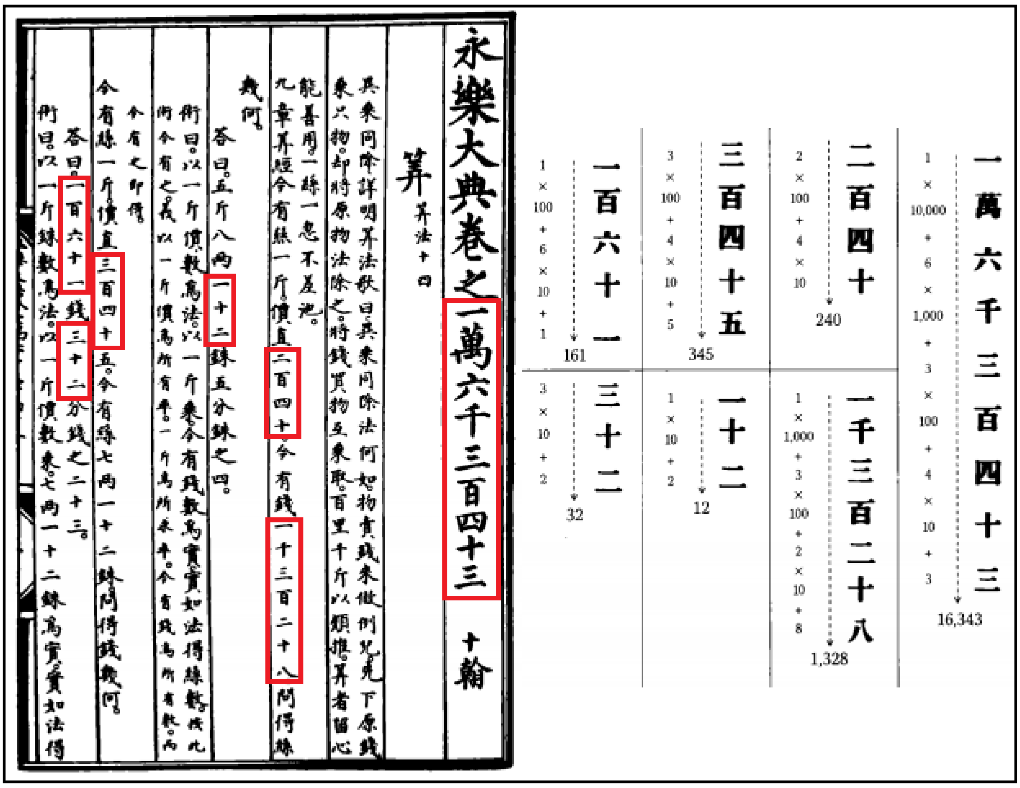
A escrita desse sistema de numeração utiliza a adição e a multiplicação, pois as dezenas, centenas, milhares e dezenas de mil são expressas segundo o princípio multiplicativo.

O número 58 642 é escrito da seguinte forma:

五萬八千六百四十二

$$5 \times 10000 + 8 \times 1000 + 6 \times 100 + 4 \times 10 + 2$$

Figura 24 – Página de um documento matemático chinês do início do século XV e sua transcrição para os algarismos indo-arábicos



Fonte: Ifrah, 1997, p.553.

Os chineses antigos faziam seus registros em lâminas de bambu que eram muito estreitas. A escrita era feita na vertical, de cima para baixo. Atualmente, a República Popular da China, prefere escrever horizontalmente da esquerda para a direita.

Para escrever grandes números os chineses raramente recorrem a outros signos numéricos. Utilizando a estratégia de considerar a dezena de milhar (10^4) como uma unidade de contagem conseguem registrar qualquer número que atinge, pelo menos, a centena dos milhares (10^{11}).

4.4.2 Sistema de numeração de varas

Conhecido pelo nome de *suan* zí, esse sistema era usado pelos antigos chineses e depois foi adotado pelos japoneses que lhe deram o nome de *sangí*. Um sistema decimal e posicional, bem parecido com o que utilizamos atualmente. Segundo Ifrah (1997), as fontes mais antigas encontradas desse sistema são do século II a.E.C.

Os símbolos são compostos pela combinação de barras verticais e horizontais e são divididos em duas séries que se alternam.

Quadro 13 – Numeração chinesa no sistema *suan zí*

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Vertical	𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨
Horizontal	𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱

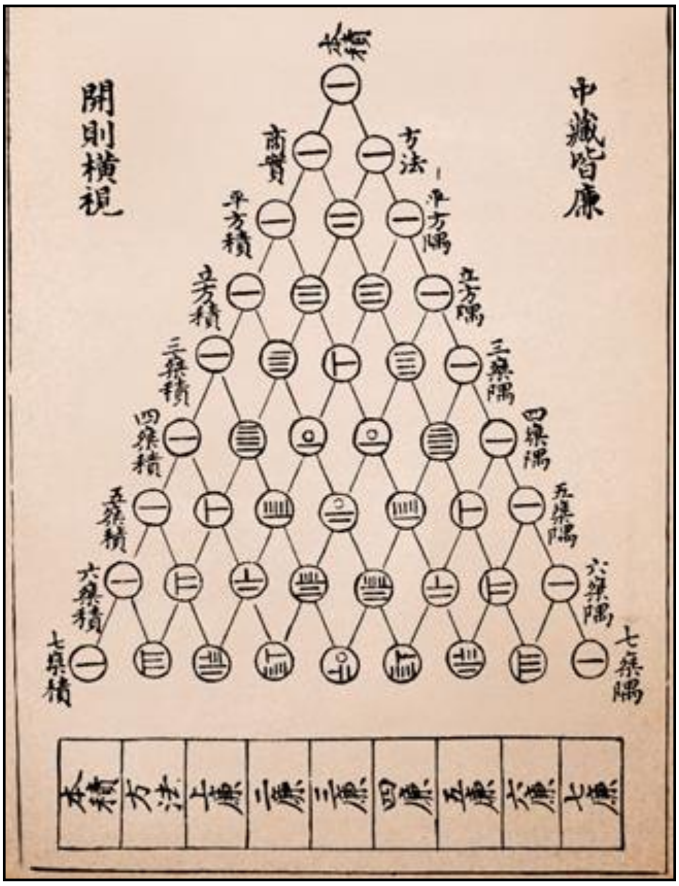
Fonte: O autor, 2021.

Essas duas séries de símbolos são frutos de um aperfeiçoamento desse sistema para evitar ambiguidades, como por exemplo entre os números 5 e 32 (𝍫𝍡).

Como esse sistema é posicional ainda se fazia necessário outro aperfeiçoamento: como preencher as casas das unidades faltantes? Num primeiro momento recorreram ao espaço vazio o que não foi suficiente para evitar ambiguidades. Por exemplo, o número 𝍡𝍫𝍤 pode ser interpretado como 235 ou 23500.

Por isso, alguns recorreram à numeração tradicional para expressar as potências de 10. Contudo, esse problema só foi resolvido a partir do século VIII E.C. quando, por influência dos indianos, introduziram o círculo para a representação do zero. Isso fez com que esse sistema se tornasse o mais semelhante ao indo-arábico.

Figura 25 – Triângulo de Yang Hui



Legenda: Conhecido como Triângulo de Pascal.
Fonte: https://pt.mathigon.org/course/sequences
/pascals-triangle

4.5 **Sistema maia**

Quando os espanhóis chegaram em Yucatán, em 1517, encontraram vestígios de uma civilização altamente desenvolvida que atingiu seu auge entre meados do século II E.C. até em torno do século IX.

A civilização maia se desenvolveu na área que corresponde atualmente ao sul do atual México, à Guatemala, a Belize, a Honduras e à parte leste de El Salvador. Os maias se organizavam sob a forma de cidades-estados, ou seja, não havia centralização política e cada cidade possuía autonomia administrativa e política. A sociedade era hierarquizada, na qual diferentes grupos sociais exerciam papéis e importâncias específicos na sociedade e possuíam como a agricultura como principal atividade econômica.

Figura 26 – Mapa da civilização maia

Fonte: http://historiasylvio.blogspot.com/2012/11/maias.html

Por volta de 850 E.C., a civilização maia entrou em declínio, os maias começaram a abandonar suas cidades, pessoas mudando-se em massa para outras localidades da Mesoamérica. Quando os europeus chegaram à região, no início do século XVI, encontraram essas cidades total ou parcialmente vazias. Os historiadores ainda não chegaram em um consenso sobre os motivos que causaram essa decadência.

Os maias desenvolveram um sistema de escrita, conhecimentos astronômicos e um sistema numérico bastante sofisticado, destacando-se o fato de conhecerem o número zero, um feito que pouquíssimos povos conseguiram.

Seu sistema de escrita consistia em um conjunto de signos que representavam sons ou símbolos. A escrita também possuía um caráter religioso, pois acreditavam ser um presente do deuses e, por isso, deveria ser ensinada a uma parcela privilegiada da população.

Os registros escritos eram feitos em pedras, madeira, papel e cerâmica. Além disso, os maias também fabricavam livros e códices confeccionados a partir de fibra vegetal, resina e cal no qual registravam, por exemplo, o cotidiano, crenças religiosas e os conhecimentos científicos. Com a chegada dos espanhóis a grande maioria desses códice foi incinerada, pois a Igreja os caracterizava de origem pagã. Atualmente, somente quatro grandes obras foram preservadas: o códice de Dresden, de Madri, de Paris e de Grolier. Este último foi descoberto em 1965 e sua autenticidade foi comprovada apenas em 2016.

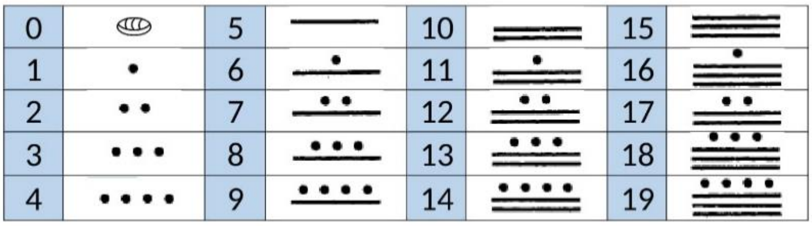
Figura 27 – Parte do Códice de Dresden

Fonte: https://digital.slub-dresden.de/werkansicht/?id=5363&tx_dlf%5Bid%5D=2967&tx_dlf%5Bpage%5D=24

Segundo Santillán (s.d), a maior parte do Códice de Dresden são tabelas divinatórias do calendário de 260 dias, que foram usadas para adivinhar o destino; os temas eram agricultura, caça, a deusa da lua, chuvas e seca. Outra parte são as tabelas astronômicas de eclipses e Vênus. Além disso, é composto por outras seções que falam dos mitos da criação do calendário e das tabelas relacionadas aos fenômenos meteorológicos e ao chamado “ano computado” de 364 dias (4 vezes 91 dias).

O sistema de numeração maia era posicional quase vigesimal, ou seja, de base 20 possuía um zero. Possuía 19 símbolos para as unidades que eram combinações de traços e pontos e para o zero usavam, por razões desconhecidas, a figura de um caramujo ou a de uma concha de escargot.

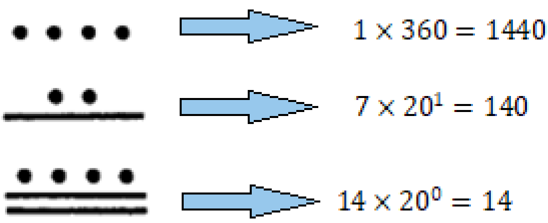
Quadro 14 - Numeração maia



Fonte: Quadro elaborado pelo autor a partir de dados de Smith, 1958, p.44.

Os números eram escrito na vertical, de cima para baixo. Um detalhe importante, é que na terceira linha o valor posicional não significava um número múltiplo de 20^2 (400), mas sim um múltiplo de 360. Para as outras posições se mantém a base 20; porém, por conta dessa irregularidade a quarta linha significa um múltiplo de 20x360, ou seja, 7200; a quinta linha, um múltiplo de 20x7200, ou seja, 144000, e assim por diante. Isso faz com que o sistema maia não seja um sistema posicional com base 20 puro, ele contém uma pequena irregularidade.

Observe os exemplos:



Logo, o número acima equivale a $14 + 140 + 1440 = 1596$.

Segundo Eves (2004), há relatos de um sistema absolutamente vigesimal usado pelo povo que não sobreviveu na forma escrita.

É interessante observar que essa concepção do zero foi uma das duas primeiras tentativas conhecidas dessa natureza na história. A outra, que utilizamos atualmente, também foi concebida no primeiro milênio de nossa era pelos indianos, porém só se tronou conhecida no mundo ocidental por intermédio dos árabes como veremos ao longo desse trabalho.

4.6 **Sistema grego**

A Grécia atual é um país com governo e fronteiras definidas diferente da Grécia antiga (Figura 26) que era formada por um conjunto de cidades independentes, com seus governos e suas leis. Por exemplo, Atenas possuía um modelo democrático que permitia a participação de todos os cidadãos da sociedade (homens, nascidos em Atenas e filhos de atenienses) e Esparta adotou um modelo aristocrático, que permitia a participação de uma diminuta minoria de privilegiados, conhecidos como esparciatas.

Figura 28 – Mapa da Grécia antiga

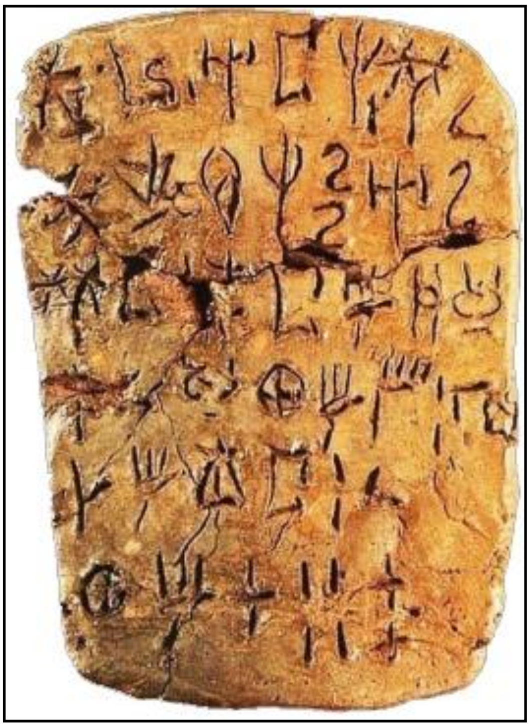
Fonte: Cotrim, 2016, p.101.

A Grécia Antiga foi uma civilização que se desenvolveu na Península Balcânica, estendendo-se pela Península do Peloponeso e por diversos locais ao longo da costa do Mar Mediterrâneo. A Idade Neolítica (ca. 6500 - ca. 3000 a.E.C) é caracterizada por assentamentos permanentes, domesticação de animais e desenvolvimento da agricultura. Este modo de vida, que foi iniciado no Oriente

Médio quase dois mil anos antes, provavelmente foi introduzido na região da Grécia por imigrantes oriundos da Anatólia[13]. Nas origens da civilização grega, esse território foi ocupado por diferentes povos indo-europeus que, entre 5 mil e 3 mil anos atrás, ali se estabeleceram e se miscigenaram: aqueus, eólios, jônios e dórios.

Na ilha de Creta se desenvolveu a civilização minoica (2700-1500 a.E.C.). Os cretenses desenvolveram a produção de embarcações sofisticadas, com as quais, por volta de 2000 a.E.C., expandiram e dominaram o comércio pelo Mediterrâneo, ergueram seu primeiro palácio real em Cnossos e desenvolveram um sistema de escrita pictográfico assim como os hieróglifos egípcios. Mais tarde esse sistema se transformou em uma escrita mais estilizada composta por signos específicos que representavam sílabas e que se juntavam para reproduzir o som das próprias palavras. Embora essa escrita, conhecida por Linear A, preservada em pequenas tabuletas de argila, permaneça em grande parte indecifrada, é evidente que era usada para manter o inventário econômico dos palácios, segundo Pomeroy *et al* (2011). Na Figura 29, temos uma tabuleta inscrita com escrita Linear A encontrada em Zacros, Creta.

Figura 29 - Tabuleta de argila (ZA 8)



Fonte: https://crewsproject.wordpress.com/2

13 A Anatólia, também conhecida como Ásia Menor, é uma grande península montanhosa que compreende mais de 95 por cento da área total da Turquia.

018/04/20/crews-display-replica-linear-a-tablet/

Na Grécia continental se desenvolveu a civilização micênica, comumente reconhecida como o início da cultura grega. O povo aqueu de origem indo-europeia fundou cidades fortificadas, entre elas Micenas. Eles possuíam organização urbana, obras de arte e desenvolveram um sistema de escrita conhecido como Linear B, a forma mais antiga conhecida do grego.

A escrita linear B é atestada em tabuletas de argila e alguns vasos, ambos datando de cerca de 1400 a.E.C. a aproximadamente 1200 a.E.C. A escrita foi usada exclusivamente para a administração econômica dos palácios micênicos. Na Figura 30 temos uma tabuleta inscrita com escrita Linear B, do palácio micênico de Pilos, datada de 1450 a.E.C.

Figura 30 - Tabuleta de argila (PY Ub 1318)

Legenda: Esta peça contém informações sobre a distribuição de peles de bovinos, suínos e veados para fabricantes de calçados e selas.
Fonte: https://commons.wikimedia.org/

Os contatos entre a Grécia continental e Creta já haviam começado em 2000 a.E.C., levando a uma influência minoica na cultura grega. No início do século XV a.E.C., Creta sofreu vários ataques dos micênicos, que dominaram diversas colônias cretenses no mar Egeu. Por volta de 1400 a.E.C., atacaram a cidade de Cnossos, cuja destruição marcou o colapso da sociedade minoica, assumiram o controle das rotas comerciais do Mediterrâneo, e a economia micênica desenvolveu-se enormemente.

Por volta de 1200 a.E.C., a civilização micênica entrou em declínio e seu território foi ocupado pelos dórios, povo indo-europeu. Quase todos os palácios foram atacados, saqueados e queimados.

O período entre os séculos XII a.E.C. e VIII a.E.C. ficou conhecido como Período Homérico pois os poemas atribuídos a Homero, Ilíada e Odisseia, são uma das principais fontes de informação dessa época. Esse período é caracterizado por uma reestruturação da sociedade grega. Assim, diversas colônias gregas são fundadas e surgem os genos, grandes famílias lideradas por um chefe. Essa fase marcou a substituição da cultura micênica pela gentílica (dos genos).

Com o crescimento da população e a escassez de terras férteis, a falta de alimentos causou a decadência desse sistema de organização econômica e social. Começam a surgir em toda a Grécia as pólis, agrupamento de vários genos em cidades com um governo autônomo. No início do século VIII a.E.C., o mundo grego estava politicamente dividido em várias cidades-estados. Não havia um Estado centralizado que unificasse toda a sociedade grega.

O crescimento econômico das cidades gregas provocou disputas pelos mercados, rotas comerciais e matérias-primas da região desencadeando guerras entre si e com outros povos. Aproveitando do seu enfraquecimento, em 338 a.E.C., a Macedônia, sob o comando do rei Filipe II (382 – 336 a.E.C.), conquista a Grécia e unifica as cidades gregas sob seu Império.

Após a morte de Filipe, seu filho, Alexandre Magno (356 – 323 a.E.C.), também conhecido como Alexandre, o Grande, assumiu o trono e por meio de uma expansão militar invadiu o Império Persa[14], transformando o Império Macedônio em um dos maiores impérios da Antiguidade. Essa expansão favoreceu as trocas culturais entre gregos e orientais. O que resultou no que chamamos de cultura helenística através da qual a cultura grega se expandiu pelo oriente. A influência grega foi tamanha que, mesmo após a queda do Império Macedônio, a cultura helenística continuou predominando em todos os territórios anteriormente por ele dominado.

Sem deixar herdeiros, após a sua morte, o império de Alexandre foi dividido entre seus três generais: o Egito ptolomaico, o reino selêucida e a Macedônia. Em 146 a.E.C., a Grécia se tornou um protetorado dos romanos.

A escrita que desaparecera com a invasão dos dórios foi reintroduzida pelos mercadores fenícios do Oriente Médio por volta de 800 a.E.C. Na Grécia eram utilizados vários sistemas de numeração, pois cada uma das cidades-estado

14 Em 550 a.E.C., a Babilônia havia sido conquistada pela Pérsia e em 525 a.E.C., o Egito. Com a conquista da Pérsia por Alexandre, em 336 a.E.C., criou-se assim o primeiro império policultural.

possuía seu próprio sistema ponderal e monetário. Para esse estudo consideraremos apenas dois deles cujos algarismos eram letras de seu alfabeto:

- um que utilizava geralmente iniciais das palavras que designavam números;
- e outro que utilizava o próprio alfabeto;

Apesar dos gregos serem famosos como negociantes, não há nenhum registro da aritmética por eles praticada nem mesmo das obras mais sofisticadas dos pitagóricos.

4.6.1 Sistema de numeração ática

Em registros do século III a.E.C. aparecem um sistema de numeração que ficou conhecido como numerais herodiânicos, depois que foram descritos pela primeira vez por Aelious Herodianu, ou acrofônico, pois seus símbolos derivam da primeira letra das palavras usadas para representar 5, 10, 100, 1000 e 10000, exceto o das unidades que é representado por um traço vertical. Esse sistema não é posicional e utiliza o princípio da adição. O mais antigo atestado dos sistemas acrofônicos gregos, o sistema ático (Quadro 15) generalizou-se no século V a.E.C. quando Atenas, uma das principais cidades-estado da Grécia Antiga, era o principal centro cultural e intelectual do Ocidente. No entanto, pelo início da Idade Alexandrina foi sendo substituído pelo sistema alfabético ou jônio.

Quadro 15 – Numeração grega no sistema ático

1	I	
5	Γ	*pi*, uma antiga forma da letra Π, inicial da palavra ΠΕΝΤΕ (*pente)* que significa cinco.
10	Δ	*delta*, inicial de ΔΕΚΑ (*deka*) que significa dez.
100	H	*eta*, inicial de HEKATON (*hékaton*) que significa cem.
1 000	X	*chi*, inicial de XIΛIOI (*chilioi)* que significa mil.
10 000	M	*mu*, inicial de MYPIOI (*myrioi*) que significa dez mil.

Fonte: Quadro elaborado pelo autor a partir de Smith, 1958, p.50.

Os números 50, 500, 5 000 e 50 000 eram resultados de combinações, como mostra o Quadro 16.

Quadro 16 – Numeração grega no sistema ático (continuação)

50	500	5 000	50 000
𐅄	𐅅	𐅆	𐅇

Fonte: Quadro elaborado pelo autor a partir de Boyer, 2012, p.62.

Um exemplo de uso desse sistema pode ser visto em um vaso no Museu de Nápoles (Figura 29) cuja imagem se refere às guerras persas da época de Dario I, por volta de 500 a.E.C. Ao lado, temos o desenho ampliado da figura que aparece no vaso onde podem ser vistos os números de forma mais nítida.

Figura 31 – Vaso com inscrição numérica grega

Fonte: Smith e Ginsburg, 1937, p. 447.

Sobre a mesa há uma inscrição que representa os números 10 000, 1 000, 100, 10, 5, 1 óbolo, ½ óbolo e ¼ de óbolo.

4.6.2 Sistema de numeração alfabética

A partir do século IX a.E.C. a escrita alfabética fenícia se propagou pela orla do Mediterrâneo e foi consequentemente adotada pelos povos ocidentais que a modificaram de acordo com suas necessidades linguísticas. O alfabeto grego é composto de 24 letras, sendo 16 letras do alfabeto fenício.

A forma mais antiga consiste em uma simples numeração alfabética (Quadro 17). Essa forma de atribuir números a letras pode ser encontrada na numeração dos 24 cantos da Ilíada e da Odisséia, porém não pode ser considerado como um sistema de numeração.

Quadro 17 – Numeração alfabética simples

1	Α	7	Η	13	Ν	19	Τ
2	Β	8	Θ	14	Ξ	20	Υ
3	Γ	9	Ι	15	Ο	21	Φ
4	Δ	10	Κ	16	Π	22	Χ
5	Ε	11	Λ	17	Ρ	23	Ψ
6	Ζ	12	Μ	18	Σ	24	Ω

Fonte: O autor, 2021

O alfabeto grego clássico contém 24 letras. Contudo, para se obter um sistema de numeração satisfatório (Quadro 18), os gregos acrescentaram ao alfabeto outras 3 letras arcaicas: F (*digama*), ϙ (*koppa*) e ϡ (*sampi*).

Quadro 18 – Numeração alfabética

1	Α	10	Ι	100	Ρ
2	Β	20	Κ	200	Σ
3	Γ	30	Λ	300	Τ
4	Δ	40	Μ	400	Υ
5	Ε	50	Ν	500	Φ
6	F	60	Ξ	600	Χ
7	Ζ	70	Ο	700	Ψ
8	Η	80	Π	800	Ω
9	Θ	90	ϙ	900	ϡ

Fonte: O autor, 2021

As letras maiúsculas foram posteriormente substituídas pelas letras minúsculas a partir de sua introdução na Grécia conforme o Quadro 19.

Quadro 19 – Numeração grega alfabética com letras minúsculas

1	α	10	ι	100	ρ
2	β	20	κ	200	σ
3	γ	30	λ	300	τ
4	δ	40	μ	400	υ
5	ε	50	ν	500	φ
6	ς	60	ξ	600	χ
7	ζ	70	ο	700	ψ
8	η	80	π	800	ω
9	θ	90	ϙ	900	ϡ

Fonte: Quadro elaborado pelo autor a partir de Boyer, 2012, 62.

A vantagem desse sistema está em não sofrer nenhuma ambiguidade quanto aos valores dos números. Esse sistema utiliza o princípio da adição como já vimos em sistemas anteriores. Para distinguir letras de números em textos, os gregos colocavam sobre os números uma barra horizontal.

Para escrever números maiores que 999, os gregos criaram as seguintes notações:

- para representar o milhar foi colocado um sinal distintivo, um risco ou um acento, à esquerda dos algarismos representantes das unidades: /**A** , /**B**, /**Γ** ... representando 1000, 2000, 3000, ...;

- M para o 10 000, ou seja, a miríade. Quando se colocava um símbolo acima da letra M ou depois dela indicava o produto do inteiro por 10 000. Por exemplo, 20 000 era escrito como $\overset{B}{M}$ ou M**B**.

Por conta da completa ausência de documentos e artefatos da época, é evidente que algum tipo de ábaco ou tábua de contagem era utilizada nos cálculos. Segundo Boyer (2012), Heródoto, século V a.E.C., afirma que ao contar com pedrinhas a mão dos gregos ia da esquerda para a direita e a dos egípcios da direita para a esquerda.

Apesar da Era Helenísta ter difundido a cultura grega não significa que a numeração grega também se sobrepôs à numeração utilizada pelos povos conquistados durante a expansão do Império Macedônio. Por exemplo, os astrônomos babilônios durante o Império Selêucida utilizavam o sistema de numeração babilônio e não o grego.

4.7 **Sistema romano**

Os historiadores situam a fundação de Roma em meados do século VIII a.E.C., no ano de 753 a.E.C. Localizada na região do Lácio ou península Itálica, sua fundação é marcada pela lenda dos irmãos Rômulo e Remo, segundo a história descrita na obra Eneida, do poeta Virgílio. Vestígios encontrados no monte Palatino indicam que, àquela época, ali se formou uma comunidade de sete pequenos povoados de pastores latinos e sabinos situadas às margens do rio Tibre.

Os primeiros romanos viviam em cabanas e seus vizinhos eram mais prósperos. No entanto, a posição geográfica de Roma dava-lhe a vantagem de controlar a passagem do rio Tibre o que incentivava o comércio assim como o contato com outros povos. Além disso, a ilha da Sicília, na península italiana, atraía mercadores marítimos que percorriam a costa oeste para fazer negócios.

Roma se localizava nas planícies ocidentais que eram maiores e recebiam mais chuvas do que o outro lado. Um ambiente propício para a agricultura e a pecuária. E, consequentemente, favoreceu o aumento da população. Além disso, sua capacidade em aceitar os imigrantes dentro de sua sociedade fez com que Roma crescesse rapidamente.

Nesse contexto, Roma obteve, a longo prazo, enormes vantagens demográficas e comerciais.

A civilização romana existiu durante aproximadamente 12 séculos, iniciando como uma monarquia (753 – 509 a.E.C.), em seguida uma república (509 – 27 a.E.C.) e terminando como um império (27 a.E.C. – 476 E.C.). Utilizando a estratégia de absorver estrangeiros em sua população ou fazer alianças de cooperação militar, Roma se tornou um povoado maior e capaz de se proteger. Através da conquista dominou a Europa Ocidental e Meridional, a Ásia Menor, o norte da África e partes da Europa Setentrional e Oriental se tornando o Estado mais poderoso que o mundo testemunhou.

Figura 32 - Domínios romanos (séculos I a.E.C. – IV E.C.)

Fonte: Cotrim, 2016, p.122.

Devido a vastidão de seu império, o latim vulgar misturou-se aos dialetos dos povos dominados dando origem às línguas neolatinas, como o francês, o português e o italiano. Como uma civilização altamente desenvolvida, Roma profissionalizou e expandiu suas forças armadas e criou um sistema de governo chamado *res publica*, a inspiração para repúblicas modernas, como os Estados Unidos e a França. Seu conjunto de leis que regulamentavam os atos tanto de cidadãos quanto de estrangeiros ainda hoje é usado como base da legislação de muitos países, como o Brasil. Conseguiu feitos tecnológicos e arquitetônicos impressionantes, tais como a construção de um amplo sistema de aquedutos e estradas, bem como a construção de grandes monumentos, palácios e instalações públicas.

Em uma última tentativa de manter a unidade do império romano, o imperador Teodósio, em 395 E.C., dividiu-o em duas partes: Império Romano do Oriente e Império Romano do Ocidente. Sem êxito, no século V, os francos dominaram a atual Paris, os visigodos saquearam Roma e os vândalos dominaram Cartago, no norte da África.

Em 476 E.C., o comandante germânico Odoacro depôs o último imperador romano do Ocidente, Rômulo Augusto. Ocorrera assim a queda de Roma que designamos o início da Idade Média. No entanto, o Império Romano do Oriente continuou até 1453, quando Constantinopla foi conquistada pelo turcos-otomanos, fato que marca o fim da Idade Média. O Império Romano do Oriente é mais conhecido como Império Bizantino para diferenciá-lo do Estado da Antiguidade no qual ele nasceu.

A origem da numeração romana é incerta. De acordo com Ifrah (1997), nasceu centenas ou até milhares de anos antes da civilização romana.

Na forma como aprendemos hoje, os algarismos romanos parecem ter sidos moldados em letras do alfabeto latino.

Nos dias de hoje ainda usamos os numerais romanos em casos específicos, como em relógios, numeração de capítulo de livro, são colocados depois de nomes de imperadores, reis, rainhas e papas (D. Pedro I, João Paulo II) e aprendemos e ensinamos na escola conforme o Quadro:

Quadro 20 – Sistema de numeração romano atual

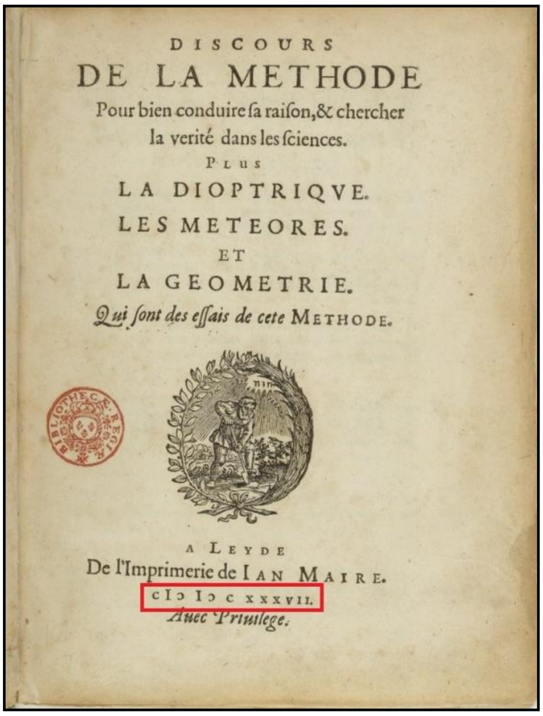
1	I	6	VI	10	X	50	L	90	XC
2	II	7	VII	20	XX	60	LX	100	C
3	III	8	VIII	30	XXX	70	LXX	500	D
4	IV	9	VIII	40	XL	80	LXXX	1000	M
5	V								

Fonte: O autor, 2021.

Esse sistema de numeração não é posicional e faz uso dos princípios aditivo e subtrativo, esse último aplicado também pelos babilônios. Porém, esses símbolos não são as formas iniciais da numeração romana, mas uma evolução de um sistema que deriva diretamente da prática do entalhe.

Os símbolos I, V e X são os mais antigos desse sistema. Assim como os egípcios, o algarismo 1 era representado por uma barra vertical e, depois que as letras minúsculas se tornaram comuns, também foi representado por i e j, este usado geralmente no final de um número. Para o V e o X existem várias teorias sobre suas origens. O V era um ângulo agudo que acredita-se que foi derivado da mão aberta com o polegar afastado e o X como duas vezes o V. Também foram usadas as formas U, v e u para representar o algarismo V, na Idade Média. De acordo com Ifrah (1997), o algarismo cinquenta evoluiu do símbolo  até ser confundido com a letra L, no início da nossa era. Já o C e M não são formas primitivas, foram influenciadas pelas iniciais das palavras *centum* e *mille*, segundo Smith (1958). O algarismo do milhar teve diversas variantes uma delas foi o símbolo CIƆ e sua metade para representar o número quinhentos como podemos observar a representação do ano 1637 na Figura 33.

Figura 33 – Página do livro Discours de la methode


DISCOURS
DE LA METHODE
Pour bien conduire sa raison, & chercher
la verité dans les sciences.
PLUS
LA DIOPTRIQVE.
LES METEORES.
ET
LA GEOMETRIE.
Qui sont des essais de cete METHODE.
A LEYDE
De l'Imprimerie de IAN MAIRE.
CIↃ IↃ C XXXVII.
Auec Priuilege.

Fonte: https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b86069594/f5.image.r=.langEN

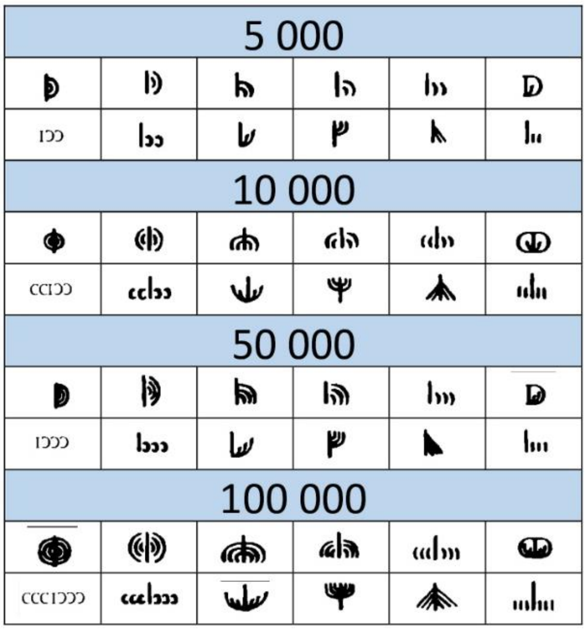
Hoje usamos o princípio subtrativo como uma regra, por exemplo: IV, IX, CD, CM. Esse princípio foi usado por outros povos que pensavam ser mais fácil contar para trás de um padrão fixo do que contar adiante três ou quatro. Como essa dificuldade não era evidente para os romanos para o número 4 eles preferiam a forma IIII à forma IV (Figura 34). Eles aplicavam esse princípio no caso do nove, mas ainda assim escreviam VIIII com mais frequência do que o IX. Não havia nenhuma regra ou padrão, por exemplo, o número dezenove era escrito na forma XIX e também na forma IXX.

Figura 34 - Relógio da Igreja de San Giacomo di Rialto

Fonte: https://www.tripadvisor.com.br/Attraction_Review-d2306234.html#photos;aggregationId=101&albumid=101&filter=7&ff=460549070

Para escrever números maiores, os romanos na época republicana utilizaram um procedimento gráfico que lhes permitiu escrever os números 5000, 10000, 50000 e 100000 com uma notação especial. (Quadro 21)

Quadro 21 – Sinais com notação especial



Fonte: Quadro elaborado pelo autor a partir de dados de Ifrah,1997, p.417.

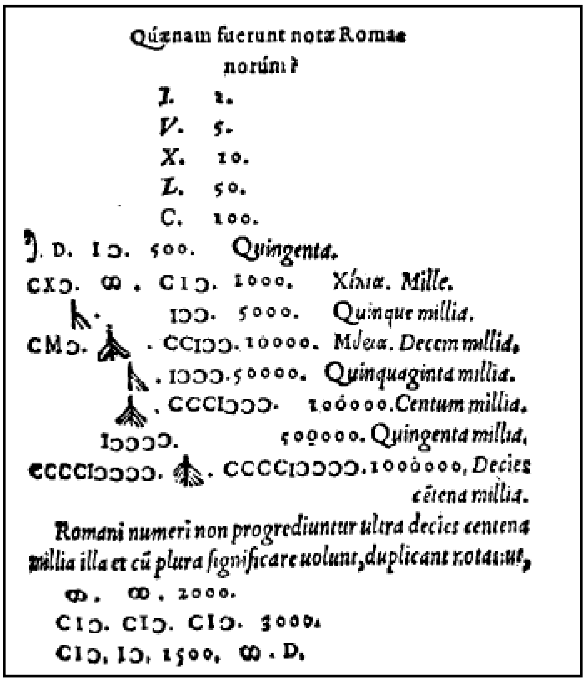
O uso mais antigo e interessante dos grandes números romanos é encontrado em um monumento criado em Roma para comemorar a vitória sobre os cartagineses. Nas linhas 15 e 16 do fragmento apresentado na Figura 35 o algarismo 100 000 aparece repetidas vezes o que demonstra a dificuldade do romanos em escrever números grandes.

Figura 35 - Fragmento da inscrição na Columna Rostrata, ca. 30 a.E.C.

Fonte: https://www.livius.org/pictures/italy/rome/rome-forum-romanum/romeforum-rostra/rome-forum-romanum-columna-rostrata-inscr-cm/

Conforme Smith (1958), Freigius mostra em seu trabalho as formas dos algarismos romanos reconhecidos em sua época, 1582. (Figura 36)

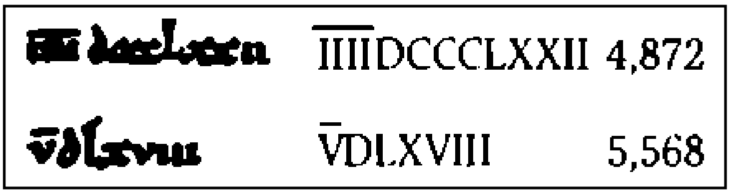
Figura 36 – Página da obra de Freigius


Quænam fuerunt notæ Romanorum?
I. 1.
V. 5.
X. 10.
L. 50.
C. 100.
D. IↃ. 500. Quingenta.
CXↃ. ∞ . CIↃ. 1000. Χίλια. Mille.
IↃↃ. 5000. Quinque millia.
CMↃ. . CCIↃↃ. 10000. Μύρια. Decem millia.
. IↃↃↃ. 50000. Quinquaginta millia.
. CCCIↃↃↃ. 100000. Centum millia.
IↃↃↃↃ. 500000. Quingenta millia.
CCCCIↃↃↃↃ. . CCCCIↃↃↃↃ. 1000000. Decies cẽtena millia.
Romani numeri non progrediuntur ultra decies centena millia illa et cũ plura significare uolunt, duplicant notas, ut,
∞. ∞. 2000.
CIↃ. CIↃ. CIↃ. 3000.
CIↃ. IↃ. 1500. ∞. D.

Fonte: Smith, 1958, p.61.

Para simplificar a notação e atingir números mais altos foi utilizado o recurso de colocar uma barra horizontal sobre o número indicando sua multiplicação por mil conforme apresentados num manuscrito astronômico latino do século XI ou XII (Figura 37).

Figura 37 – Exemplos do uso da barra horizontal



Fonte: Ifrah, 1997, p. 420.

Esse recurso é ensinado nas escolas atualmente, porém na Idade Média era utilizado mais comumente para distinguir numerais de palavras do que para indicar milhares, como no caso de $\overline{II}$VIR = *duumvir* (dois homens) e $\overline{III}$VIR = *triumvir* (três homens).

Segundo Smith (1958), como podem ser vistas nos exemplos a seguir, várias formas foram utilizadas na tentativa de atingir valores mais altos, todavia longe de simplificar o sistema.

XIIM para 12 000, Plinio (ca. 75);

MM para 1 000 000, Noviomagus, 1549;

CCC • M para 300 000;

$\overline{\text{c}}$. $\overline{\text{lxiiij}}$. ccc . l . i para 164 351, Adelard of Bath (ca. 1120);

$\overline{\text{vi}}$. dclxvi para 6666, Radulph of Laon (ca.1125);

IIIIxx et huit, para 88, em um tratado de Paris, 1388;

$\overset{\text{lxxx}}{\text{MM}}$ para 80 000 000, uma cópia da aritmética de Sacrobosco feita ca. 1442;

vj • C para 600, Robert Record (ca. 1542);

cIↄ. Iↄ. Ic para 1599, edição de Capella, Leyden, Holanda, 1599;

$\underset{\text{xxiij}}{\text{MM}}\ \underset{\text{iiij}}{\text{C}}\ \underset{\text{lvj}}{\text{M}}\ \underset{\text{vij}}{\text{C}}\ \text{lxxxix}$ para 123 456 789, na aritmética de Bartjens em 1604;

ΦƆCXL para 1640, edição de Petrus Servius, Roma, Itália, 1640;

MƆCLVI para 1656, em um monumento em São Marco, Veneza, Itália.

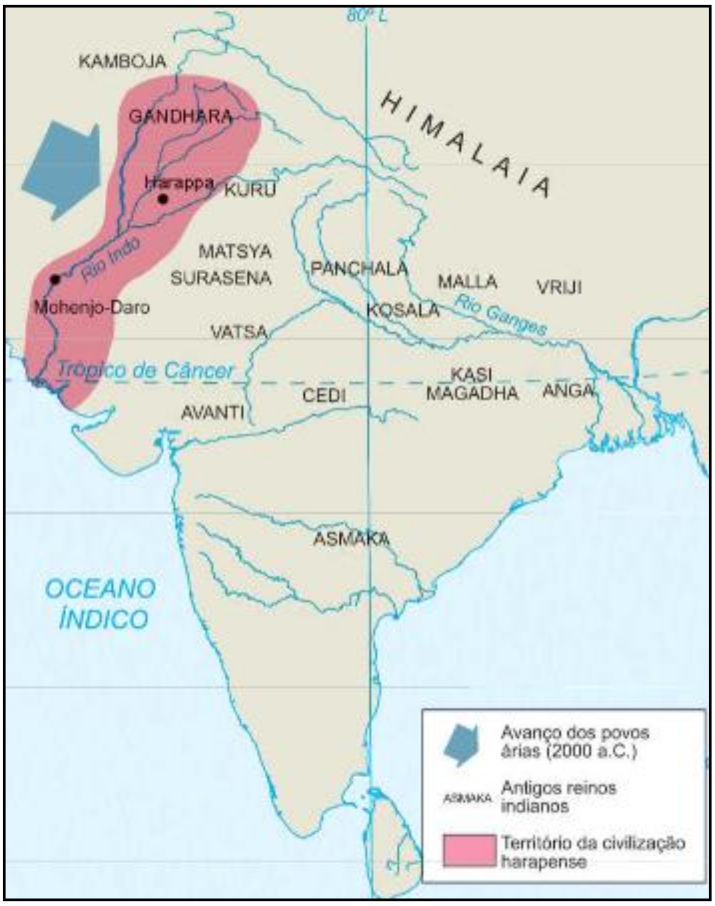
Como podemos observar os romanos variavam muito sua escrita recorrendo aos princípios mais diversos para uma escrita mais econômica o que fez por perder a coesão transparecendo a insuficiência da numeração romana, além da sua impossibilidade operatória.

4.8 **Sistema indo-arábico**

Mohenjo Daro é um sítio arqueológico descoberto em 1922 que revelou evidências de uma cidade construída principalmente com tijolos assados, bem planejada, com banhos públicos e sistemas de saneamento e drenagem. O mais antigo testemunho da civilização do Vale do rio Indo que floresceu entre 2500 e 1500 a.E.C. Não se sabe qual foi o fim desse povo.

Inicialmente, acreditava-se que invasores denominados arianos haviam dominado a região da Índia por volta de 1500 a.E.C., porém de acordo com Thapar (1992 apud LEITE,1999, p. 142) “O que existe do ponto de vista documental é uma longa co-existência entre horizontes cerâmicos da pré-existente cultura Harappa e Védicos, isto é, dos auto-denominados aryas (…)”.

Figura 38 – Mapa Índia antiga



Fonte: http://www.monteirolobatomaceio.com.br/repository/files/andia-antiga.pdf

Após se estabelecerem de forma consistente, os arianos desenvolveram o hinduísmo que instituiu o sistema de castas e aprimoraram a língua falada e escrita que se tornou o sânscrito clássico. Os registros históricos desse período são escassos e o que conhecemos são os Vedas, conjunto de quatro livros sagrados escritos em sânscrito que contém histórias, hinos de louvor e poemas de adoração, coletados durante o período védico (2000 – 1400 a.E.C.). Na literatura religiosa hindu os *S´ulvasūtras* são os que nos despertam interesse por conter regras geométricas para construção de altares através de esticamento de cordas, ternas pitagóricas muito antes do nascimento de Pitágoras o que mostra a aptidão dos hindus para o trabalho matemático.

Por volta de 500 a.E.C. surge o budismo como um movimento reformador do hinduísmo liderado por Gautama Buda (563-483 a.E.C.), conhecido em nossos dias apenas por Buda.

Em 320 a.E.C. se estabeleceu o império Maurya fundado por Chandragupta Mauria que reinou de 320 a 296 a.E.C. O mais famoso rei desse império foi o rei Açoka que reinou entre 272 a 232 a.E.C.

O período de 240 a 535 E.C., período imperial dos Gupta, é conhecido como Idade de Ouro da Índia. Esse período foi palco da mais alta expressão da arte indiana, o comércio em florescimento tanto com o Oriente Próximo quanto com o Império Romano, o sânscrito foi adotado pelos Jaina[15] e pelos budistas o que veio a favorecer seu desenvolvimento e seu enriquecimento em relação aos tempos védicos. Foi quando surgiram as primeiras redações de uma das maiores epopeias sânscritas indiana, o *Mahâbhârata*.

A escrita gupta faz a transição entre o brāhmī e a escrita nāgarī, que surgiu no século VII E.C. se tornando a escrita principal do sânscrito e, posteriormente, da língua hindi.

É desse período também a redação definitiva do *Lalitavistara Sūtra*[16] que além de contar a vida do Buda, faz menção a números gigantescos, como por exemplo dhvajāgranishāmani, que significa 10^{145}, e também o início do desenvolvimento da astronomia trigonométrica.

No início do século VIII E.C., o exército árabe enviado por Hajjâj conquistou todo o vale do Indo e uma parte do Punjab. Mas, só em 773 E.C. sábios indianos chegam em Bagdá ao encontro do califa Al Mansûr e, entre as obras sânscritas oferecidas ao califa e à sua corte estava o tratado astronômico *Brahmasphutasiddhânta* de 628 E.C., no qual Brahmagupta mostra domínio da notação decimal posicional incluindo o zero como conceito numérico, além de descrever métodos de cálculos e apresentar regras algébricas.

Sabe-se que o sistema de notação com símbolos sânscritos, que utilizavam uma base decimal, o princípio da posição e o emprego do zero, era empregado por todos os astrônomos indianos. Sendo assim, os árabes entraram em contato não só com a astronomia indiana, mas também conheceram seus símbolos numéricos, algarismos e procedimentos de cálculo.

---

15 De acordo com Ifrah (1997), Jaina é uma seita religiosa indiana, fundada por volta do século VI a.E.C., que acredita que o universo é indestrutível por ser infinito tanto no tempo como no espaço, fazendo com que recorressem a números gigantescos e, por fim, o universo dos números infinitos.

16 Esse texto é uma compilação tardia de histórias e lendas antigas. Antes de serem transcritos numa data muito posterior, essas histórias eram passadas oralmente. Então, o que se sabe, segundo Ifrah (1997), é que a especulação numérica contida na lenda do Buda pode ser situada por volta do século III da nossa era.

Segundo Eves (2004), os árabes escreviam os números por meio de palavras. Com a expansão de seu império por um grande território, impôs-se a adoção de um simbolismo, de modo a otimizar a administração. Chegaram a usar um sistema alfabético mediante a utilização das vinte e oito letras árabes, que foi posteriormente substituído pela notação hindu, tendo destaque nessa transição a primeira aritmética árabe escrita por Mohammed ibn Mūsā al-Khowārazmī.

Al-Khowarizmi, nascido em 783 E.C., foi um dos membros mais importantes da Casa da Sabedoria[17], famoso por contribuir com a difusão do sistema numérico indiano e seus métodos de cálculo, além dos seus procedimentos algébricos.

Sua obra intitulada *Kitab al-jami wa'l tafriq bi hisab al hindi* é o primeiro livro árabe conhecido que, além de apresentar os algarismos hindus e os métodos de cálculo, traz explicações detalhadas, acompanhadas de numerosos exemplos, contribuindo também para a difusão desses algarismos no mundo ocidental, segundo Ifrah (1997). Na tradução para o latim, o nome al-Khowarizmi foi transformado em A*lgoritmi,* que deu origem às palavras algoritmo, que significa "arte de calcular de uma maneira particular", e algarismo.

"Algarismos arábicos". É assim que muitas vezes nos referimos ao nosso sistema de numeração, levando à ideia equivocada de que os nossos algarismos são de origem árabe. Apesar das muitas incertezas quanto à sua origem, muitos escritores medievais e renascentistas o reconheciam como indiano. Karpinski (1911) nos esclarece que al-Khowārazmī afirmou explicitamente na aritmética que escreveu que os números eram devidos aos hindus e que outro testemunho é do árabe al-Bīrūnī (973-1048) que também afirma claramente que os hindus não usavam as letras do alfabeto para notação numérica como os árabes, afirmando que por essas evidências e outras, que aqui não foram mencionadas, conclui-se que os árabes do início do século IX reconheceram totalmente a origem hindu dos novos números.

17 Sob a dinastia dos abássidas – al-Mansur, Harum al-Rachid e al-Mamun – a cidade de Bagdá se tornou o centro da atividade intelectual do Oriente Próximo numa época em que as guerras, a fome e as epidemias haviam devastado a civilização ocidental. Deixando-a sem condições de propagar e produzir conhecimento. Al-Mamun estabeleceu em Bagdá um centro cultural comparável à antiga Universidade de Alexandria chamado Casa da Sabedoria cujo objetivo era coletar, recuperar, copiar e traduzir conteúdo filosófico e científico registrado em textos gregos, hindus, siríacos e persas, além de difundir, aprofundar e produzir o conhecimento científico, representando o ápice do Renascimento Islâmico. Pelo século XIII, a biblioteca da Casa da Sabedoria foi destruída durante a invasão mongol de Bagdá.

Fibonacci inicia o *Liber abaci* apresentando as nove figuras para representar os numerais como indianas, o que corrobora o consenso, na época, de que os numerais eram de origem hindu.

4.8.1 <u>As formas numéricas atuais</u>

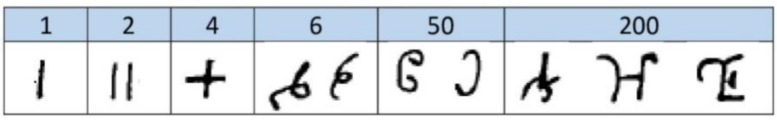
Já vimos que os algarismos atuais são reconhecidos pelos árabes como de origem hindu. Mas, será que eles surgiram essencialmente na Índia?

A história dos números indo-arábicos é um quebra-cabeça com muitas peças faltantes por conta da escassez de material confiável. A escrita na Índia, provavelmente, não foi introduzida antes do final do século IV a.E.C. fazendo com que a literatura existisse apenas na forma falada. O que se conhece, antes do século VII E.C., é através dos dois maiores épicos indianos, o Mahābhārata e o Rāmāyana, das moedas e de algumas inscrições.

Aqui vamos apresentar três importantes descobertas: as inscrições de Açoka, de Nana Ghat e Nasik.

Foi durante o reinado de Açoka (272 a 232 a.E.C) que algumas colunas de pedra foram construídas e elas contêm as formas preservadas mais antigas dos atuais símbolos numéricos. Essas colunas apresentam duas formas numéricas: a Kharoṣṭhī, que é a forma mais primitiva representada apenas por marcas verticais, e o Brāhmī. O Quadro 22 ilustra as formas encontradas nessas inscrições.

Quadro 22 – Formas numéricas do reinado de Açoka



Fonte: Quadro elaborado pelo autor a partir de dados de Karpinski, 1911, p.22.

Outra importante descoberta são as inscrições feitas em uma caverna no topo da colina Nana Ghat datada do segundo século a.E.C. Segundo Karpinski (1911), a inscrição contém uma lista de presentes feitos por ocasião da realização de vários yagnas ou sacrifícios religiosos, e os números aparecem em nada menos que em trinta lugares.

Figura 39 – Inscrições de Nana Ghat

Fonte: https://stringfixer.com/pt/Simuka

O Quadro 23 apresenta as formas numéricas encontradas nessa inscrição.

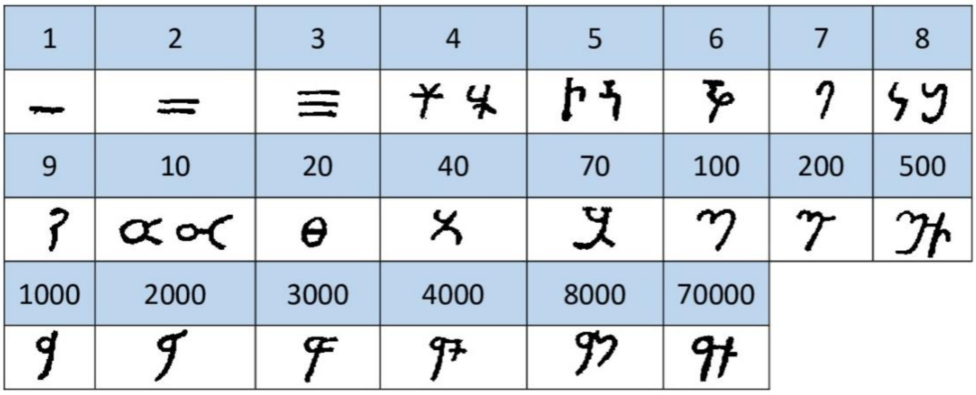
Quadro 23 – Formas numéricas de Nana Ghat

1	2	4	6	7	9	10
20	60	80	100	200	400	
700	1000	4000	6000	10 000	20 000	

Fonte: Quadro elaborado pelo autor a partir de dados de Karpinski, 1911, p.23.

A terceira descoberta é do primeiro ou segundo século da nossa era e foi encontrada em uma caverna na cidade de Nasik cujas formas numéricas encontradas estão apresentadas no Quadro 24.

Quadro 24 – Formas numéricas de Nasik



Fonte: Quadro elaborado pelo autor a partir de dados de Karpinski, 1911, p.24.

O que podemos observar nessas inscrições é: a ausência do zero e que os múltiplos de dez, de cem, e assim por diante, possuem símbolos próprios o que impede a característica de valor de posição e exige uma quantidade grande de símbolos que dificulta a escrita de grandes números.

O que se sabe é apenas a origem das formas para as três primeiras formas numéricas, segundo Smith, o traço vertical pode ser a representação dos dedos usados na contagem ou marcas que se faz naturalmente para um registro numérico.

De acordo com Karpinski (1911), o símbolo =, na forma cursiva, torna-se Z, usado na Alemanha até o século XVIII, e depois assumiu a forma moderna 2, e da mesma maneira o símbolo ≡ se tornou o nosso 3. De forma semelhante o símbolo III, na forma cursiva se tornou semelhante ao usado pelo árabes até hoje.

Quanto aos três primeiros números podemos observar que nas inscrições de Açoka se utilizam traços verticais, que se assemelham aos utilizados pelos babilônios e pelos egípcios, e nas inscrições de Nana Ghat e Nasik são representados por traços horizontais, que se assemelham aos utilizados pelos chineses.

Por que um povo escolheu traços horizontais e um outro, traços verticais? A forma babilônica não é a mais antiga da região, mas sim a suméria que usava traços horizontais. Uma especulação apresentada por Karpinski (1911) é que as migrações tribais iniciaram no Eufrates e que a civilização suméria levou para o Oriente suas três formas numéricas, que era tudo o que um povo sabia ou precisava. Já as migrações para o Ocidente começaram quando a escrita cuneiforme já estava em uso e delas vieram as formas do Egito, Grécia, Roma e as da época de Açoka na

Índia. E depois, por meio de comerciantes as formas chinesas tenham chegado à Índia conforme as inscrições de Nana Ghat e posteriores.

Para as outras formas há muitas conjecturas sobre sua origem, desde a hipótese de uma origem grega, considerada a mais absurda, até a hipótese de que a origem seja no alfabeto brāhmī, já que há uma concordância de que a maioria dos numerais se assemelha às letras desse alfabeto. Porém, nenhuma conjectura foi comprovada até o momento e nada se sabe quanto à origem das formas que começaram possivelmente no tempo de Açoka como os numerais comuns que usamos.

Podemos concluir que a origem de algumas das primeiras formas numéricas usadas na Índia é evidente, mas a origem de outras provavelmente nunca será conhecida. O sistema numérico indiano até esse momento não possui nenhuma característica que o coloca em vantagem em relação aos demais sistemas antigos. Podemos afirmar que nesse formato não teria havido chance de ser aceito pelo Ocidente. Além da característica posicional, já utilizada em outros sistemas, os hindus precisavam acrescentar em seu sistema numérico a mais vantajosa de suas características: o zero.

4.8.2 Valor local ou princípio de posição e a origem do zero

O valor local ou posicional define o valor do algarismo em função da posição que ocupa. Para escrever o número trezentos e vinte e cinco, escrevemos os algarismos na seguinte ordem: 325 que tem o valor:

$$3 \times 100 + 2 \times 10 + 5$$

Apesar de estarmos bastante familiarizados com essa escrita, essa característica não foi concebida por todos os povos. Por exemplo, os egípcios e os gregos não a tinham em seus sistemas. Por outro lado, os babilônios, os chineses e os maias fizeram uso dessa descoberta nas bases 60, 10 e 20, respectivamente.

Porém, o que faltou nesses três sistemas foi conceber símbolos para representar cada uma de suas unidades simples de acordo com a necessidade de cada base. Os babilônios possuíam dois algarismos diferentes, um para representar a unidade e outro para representar a dezena, que eram repetidos dentro de cada ordem até a 59ª unidade. Os chineses (sistema de varas) não fizeram muito diferente dos babilônios, também não possuíam símbolos distintos para representar suas nove unidades simples de seu sistema decimal. Não diferente também fizeram os maias, só possuíam dois algarismos, um para representar a unidade e outro para o cinco. Ou seja, também não conceberam a ideia de representar suas 19 unidades simples por símbolos distintos entre si.

A descoberta da numeração decimal de posição e do zero se produziu em meados do período imperial dos Gupta (240 – 535 E.C.) de acordo com Ifrah (1997) que também atesta que os documentos dessa época ou anteriores manifestam tanto o uso do sistema dos nomes dos números da língua sânscrita quanto o sistema dos algarismos não posicional que procedem do sistema brāhmī. Devemos considerar também que só a partir do século VI da nossa era que os documentos que atestam o uso dos símbolos numéricos e da notação posicional dos nove algarismos passam a ser abundantes.

Karpinski (1911) afirma que o trabalho de autoridades da antiga epigrafia indiana (Bühler, Kielhorn, Smith, Bhandarkar e Thibaut) é aceito por estudiosos do mundo inteiro e segundo os quais o surgimento do sistema com valor posicional ocorreu na Índia, no início do século VI E.C.

O sânscrito é comparado ao grego e ao latim pelo papel que desempenhou na Índia e no sudeste asiático. É uma língua extremamente elaborada e seu vocabulário é extremamente rico e diversificado, levando a ser considerada como a “língua dos deuses”. Não diferente é a numeração sânscrita que possui uma qualidade conceitual ímpar. Cada uma das nove unidades simples recebia um nome particular, assim como cada uma das potências de base dez. Para expressar um número, bastava enunciar a unidade e a potência de dez relativa à ordem a que pertencia no sentido das potências crescentes de dez, ou seja, das menores unidades às maiores.[18]

[18] Esse sentido de escrita se deu a partir do século II a.E.C.

Quadro 25 – Lista dos nomes sânscritos das potências de 10

Ordem da unidade	Potência de 10	Nome correspondente em sâncrito
2	10^2	*dašha*
3	10^3	*šhata*
4	10^4	*sahasra*
5	10^5	*ayuta*
6	10^6	*laksha*
7	10^7	*prayuta*
8	10^8	*koti*
9	10^9	*vyarbuda*
10	10^{10}	*padma*
11	10^{11}	*kharva*
12	10^{12}	*nikharva*
13	10^{13}	*mahâpadma*
14	10^{14}	*šhankha*
15	10^{15}	*samudra*
16	10^{16}	*madhya*
17	10^{17}	*antya*
18	10^{18}	*parârdha*

Fonte: Quadro elaborado pelo autor a partir de Ifrah, 1997, tomo 2, p. 138.

Depois disso, fez-se o uso de uma escrita mais concisa onde foram suprimidas as expressões numéricas relativas às potências de base dez.

O exemplo no Quadro 26 é apenas para dar uma ideia do uso dos nomes das potências de dez.

Quadro 26 – Exemplo numérico com os nomes das potências de dez

Notação atual	523 622 198 443 682 439
Forma sânscrita completa	Nove e três dašha e quatro šhata e dois sahasra e oito ayuta e seis laksha e três prayuta e quatro koti e quatro vyarbuda e oito padma e nove kharva e um nikharva e dois mahâpadma e dois šhankha e seis samudra e três madhya e dois antya e cinco parârdha
Decomposição aritmética	$9 + 3 \times 10 + 4 \times 10^2 + 2 \times 10^3 + 8 \times 104 + 6 \times 10^5 + 3 \times 10^6 + 4 \times 10^7 + 4 \times 10^8 + 8 \times 10^9 + 9 \times 10^{10} + 1 \times 10^{11} + 2 \times 10^{12} + 2 \times 10^{13} + 6 \times 10^{14} + 3 \times 10^{15} + 2 \times 10^{16} + 5 \times 10^{17}$
Forma abreviada	nove.três.quatro.dois.oito.seis.três.quatro.quatro.oito.nove.um

Fonte: Quadro elaborado pelo autor a partir de dados de Ifrah, 1997, p.143.

Essa simplificação de escrita também favorecia à escrita de números cada vez mais monumentais que era um fascínio da civilização indiana que inclusive permitiu-lhes conceber o infinito.

Essa escrita simplificada produzia expressões que não soavam bem. Por exemplo, o número 333 333 333 em sânscrito fica *tri.tri.tri.tri.tri.tri.tri.tri.tri*. Para evitar essa repetição de palavras, os astrônomos indianos empregavam diversos sinônimos de seus nomes representados pelos nomes de certos objetos ou ideias próprias da cultura indiana.

Karpinski (1911) nos dá como exemplo dessa forma de expressão a data "Śaka Saṃvat, 867" dada por "*giri.rasa.vasu*" que significa:

giri = montanhas = 7

rasa = sabores = 6

vasu = Vasu (os deuses) = 8

A leitura deve ser feita da direita para a esquerda, correspondendo ao número 867.

Outro problema que surge com essa numeração simplificada é exprimir a falta de uma ordem decimal. O que exigiu um progresso fundamental, o uso de um vocábulo para exprimir essa ausência. Para isso, os astrônomos indianos usaram a palavra *śūnyabindu*, geralmente abreviado para *śūnya* que significa vazio, excluindo qualquer equívoco na expressão dos números.

Um exemplo do uso de uma expressão para o zero é dado pelo Ifrah (1997) que foi extraído do comentário do Aryabhatîya que o matemático Bhaskara I fez em 629 E.C.:

viyad.ambara.âkâsha.shûnya.yama.râma.veda

que significa:

viyat (escrito aqui viyad) = céu = 0; *ambara* = atmosfera = 0; *âkâsha* = éter = 0; *shûnya* = vazio = 0; *yama* = casal primordial = 2; *râma* = Râma[19] =3; *veda* = Veda[20] = 4

Fazendo a leitura da direita para a esquerda, temos o número 4 320 000.

[19] Râma: alusão aos três Râma (encarnação do deus Vishnu) das tradições e filosofias indianas.
[20] Nome dos mais antigos textos sagrados da Índia. São compostos de quatro livros principais.

Nenhuma outra língua além do sânscrito fez uma aplicação consistente, em numeração, do sistema decimal de números. Podemos concluir, como disse Ifrah (1997), que “a numeração sânscrita levava em si o próprio germe da descoberta do princípio de posição decimal”.

A numeração sânscrita, apesar da possibilidade de escrita “infinita” dos números, não era viável para o cálculo. Para desempenhar essa tarefa, os aritméticos indianos recorriam ao cálculo com as mãos e, de forma predominante, ao ábaco de colunas.

Esse ábaco consistia em escrever os nove primeiros algarismos de sua notação numérica com um estilete sobre uma camada fina de areia. Para desenvolver um cálculo nesse ábaco era necessário o conhecimento prévio dos resultados das quatro operações elementares sobre os nove algarismos utilizados nas representações numéricas.

Esse instrumento era dividido em colunas; a primeira, da direita para a esquerda, representava as unidades, a coluna seguinte as dezenas e assim por diante. Ao contrário do que ocorre na numeração sânscrita, aqui os números aparecem na ordem decrescente das potências de dez, ou seja, das maiores unidades às menores.

Ou seja, o ábaco de colunas era uma transcrição exata, em sentido contrário, da expressão literal com os nomes de números da língua sânscrita, ao dispor da mesma estrutura matemática, onde as colunas correspondiam exatamente à sucessão dos nomes para as sucessivas potências de dez.

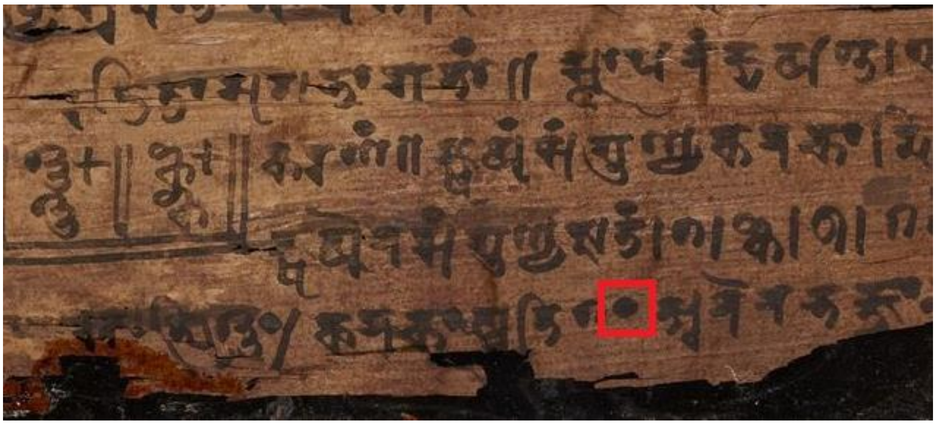
As inscrições de Açoka, Nana Ghat e Nasik atestam esse tipo de escrita dos números, porém utilizam um algarismo de aparência particular para a unidade de cada ordem decimal.

Ifrah (1997) afirma que, a partir da adoção da forma de escrita que aparecia no ábaco de colunas, no qual usavam os nove algarismos brāhmī deu-se o nascimento da numeração atual. Porém, ainda era necessário a criação do zero, não só como um símbolo, mas também como um número. Para chegar nesse estágio foram necessários mais dois ou três séculos.

A ausência de uma unidade para certa coluna ficava vazia na representação no ábaco, até que foi criado um símbolo que na numeração sânscrita recebia o nome de *śūnya*, ou seja, um símbolo para o zero. De acordo com Karpinski (1911), as evidências parecem apontar para a costa oeste da Índia como a região onde o sistema completo foi visto pela primeira vez.

Os hindus usaram, segundo Karpinski (1911), primeiramente, um ponto, como pode ser visto no manuscrito Bakhṣālī (Figura 40), datado do século III ou IV. E até os dias de hoje é usado pelos árabes. Posteriormente, foi substituído pelo círculo, que continua em uso até hoje.

Figura 40 – Parte do manuscrito Bakhṣālī



Fonte: https://www.natgeo.pt/historia/2017/10/texto-antigo-revela-novas-pistas-sobre-origem-do-zero

Na inscrição de Gwalior (876 E.C.), ver Figura 41, podemos ver o zero sendo representado como um círculo na escrita do número 270, representado por algarismos nagari. Essa inscrição também evidencia a familiaridade dos habitantes dessa região com o uso do zero e com o princípio de posição dos nove algarismos.

Figura 41 – Inscrição de Gwalior

Fonte:http://thebackpackersgroup.com/gwalior-fort-an-eternal-epic/zero-in-gwalior-gwalior-fort-madhya-pradesh-the-backpackers-group/

Além de um símbolo para o zero, os hindus lhe conferiram a capacidade operatória, trazendo o conceito de número, de quantidade nula. Como pode ser visto no trabalho de Brahmagupta, no início do século VII E.C., que dá ao zero um significado não encontrado nas aritméticas antigas, de acordo com Karpinski (1911). Segundo Ifrah (1997), ele definiu o zero como o resultado de uma subtração de um número por ele mesmo e descreveu suas propriedades na adição, o que chamamos atualmente de elemento neutro. Já na multiplicação, qualquer número multiplicado por zero é zero.

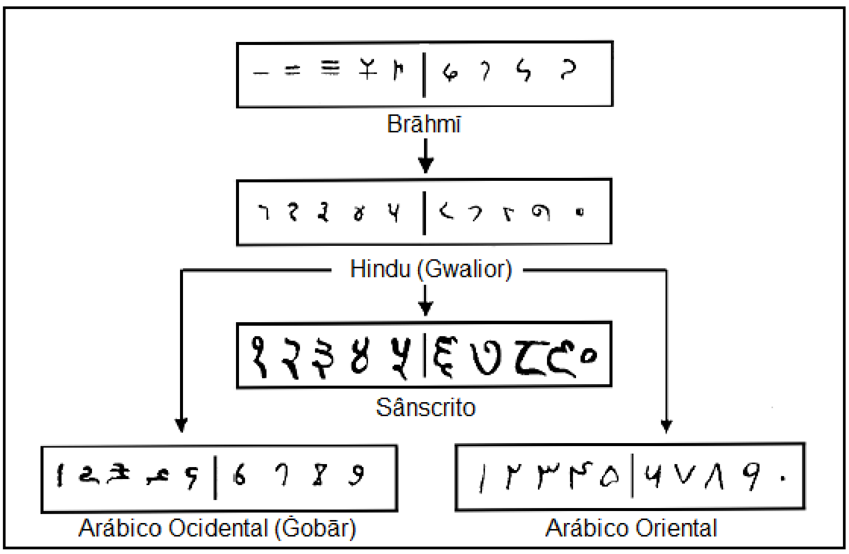
Portanto, é creditado apenas à civilização indiana a concepção do sistema de numeração que conhecemos por indo-arábico. Eles conseguiriam reunir nesse sistema três grandes ideias:

- construíram símbolos gráficos distintos, sem qualquer relação entre eles, para representar os algarismos, não permitindo nenhuma dúvida na escrita;
- descobriram o princípio de posição;
- inventaram o número zero.

É importante ressaltar que foram necessários séculos para que todas essas descobertas fossem feitas e chegássemos até o sistema de numeração conhecido pelos árabes e que, posteriormente, foi difundido pela Europa.

Inicialmente, os árabes simplesmente copiaram as formas recebidas. Com o tempo, os algarismos indianos sofreram modificações gráficas importantes, distanciando-se da forma gráfica inicial como recebera.

Figura 42 – Genealogia dos numerais indo-arábicos



Fonte: BOYER, 2012, p.171.

A Figura 42 apresenta sinteticamente a evolução da expressão simbólica dos numerais indo-arábicos no mundo árabe.

5 **EXPANSÃO DO SISTEMA DE NUMERAÇÃO INDO-ARÁBICO PELA EUROPA**

A partir do século III E.C. o Império Romano inicia o seu colapso. A crise escravagista, a corrupção e a disputa pelo poder cooperam para a vulnerabilidade de seu território e em 476 E.C. Roma é invadida, ocasionando o fim do Império Romano no Ocidente e dando início ao período histórico que vai até o século XV E.C. denominado Idade Média. Como consequência, a Europa passa por diversas transformações, inclusive um processo de ruralização, que estabelece uma nova ordem político, social e econômica (feudalismo), além do fortalecimento político da Igreja Católica.

Nesse período o nível de cultura na Europa era muito baixo e as propriedades feudais eram praticamente autossuficientes, tornando o comércio quase inexistente. O saber grego e romano se restringia aos monges católicos e a poucos leigos. A Igreja Católica passou a dominar o acesso aos conhecimentos existentes, além da produção de novos saberes. Era a instituição que determinava o que deveria ou não ser produzido, razão pela qual o que não estava de acordo com seus dogmas filosóficos era descartado. O período foi marcado por muita violência e intensa fé religiosa.

No início da Idade Média não há produções matemáticas. O enfoque da Igreja era na produção de manuais de estudos sobre o que já existia, restringindo-se à traduções de textos. Cassiodoro (ca.480 – ca.575 E.C.), por exemplo, criou uma biblioteca no mosteiro que fundara e instruiu os monges na arte de copiar textos gregos e latinos o que desempenhou um papel importante na preservação de textos antigos.

É bem verdade que a Igreja não condenava o ensino sobre os números (aritmética), como pode ser interpretada a frase de São Agostinho citada por Katz (2009):

> “não devemos desprezar a ciência de números, que, em muitas passagens da Sagrada Escritura, é considerada de eminente serviço para o intérprete cuidadoso. Nem foi sem razão contado entre os louvores de Deus: 'Tu tens ordenado todas as coisas em número, medida e peso.” (KATZ, 2009, p.325)

A despeito disso, as obras disponíveis na época tratavam-se de breves introduções, dentre as quais as de Anicio Manlio Severino Boécio (ca. 480-524) e do bispo Isidoro de Sevilla (560 – 636), adotadas nas escolas monásticas durante muitos séculos. As obras deste autor são consideradas superficiais, de acordo com Eves (2004) e Katz (2009), o que demonstra o quanto o conhecimento matemático se tornou insignificante. A exemplo disso, temos também a obra de Beda (ca.673 – 735 E.C.), dentre as quais se destacam dois manuscritos, sendo um sobre o cálculo da data da Páscoa, necessário apenas para definir o calendário cristão, e o outro sobre a contagem com os dedos, forma bem rudimentar de calcular.

Há, ainda, três obras atribuídas a Boécio, uma sobre aritmética, uma sobre música e uma sobre geometria. A última, escrita por volta do século V E.C., contém uma passagem sobre os números hindus, incluindo o zero, levando muitos estudiosos a defender a ideia de que Boécio os conhecia e os incluiu neste livro. Porém, há suspeita acerca da autenticidade dessa passagem, podem ser interpolações posteriores. Vamos apresentar aqui três argumentos citados por Karpinski (1911):

1) A passagem onde é inserida os números hindus tem a aparência de uma interpolação de um escriba, pois os assuntos não têm conexão. Boécio está tratando de ângulos quando insere o assunto dos números hindus e depois retoma o trabalho usando a numeração romana, um processo não característico dele;
2) Os números hindus não aparecem em sua obra sobre aritmética;
3) Nenhum dos escritores medievais que conheciam a obra de Boécio faz menção ao sistema, ou seja, seus contemporâneos e discípulos os teriam conhecido e mencionado.

Karpinski (1911) faz uma análise das relações comerciais entre o Oriente e o Ocidente a partir do século IV E.C. e como os povos influenciaram e foram influenciados por essas relações. No século V E.C., por exemplo, os árabes negociavam com a Índia e até mesmo com a China enquanto os hindus estavam entre os comerciantes em Alexandria e em Bizâncio, de forma que qualquer sistema numérico, de qualquer parte do mundo, não poderia permanecer isolado e poderia ser conhecido por comerciantes de outros países, porém nenhum atraiu a curiosidade de estudiosos por ainda ser um sistema incompleto. Ou seja, não há evidências de que Boécio teria conhecido os números hindus e caso os conhecesse esse sistema ainda não possuía o zero.

Os autores Boyer (2012), Ifrah (1997) e Eves (2004) sequer mencionam Boécio como um estudioso dos números hindus. Ifrah (1997) também afirma que Boécio, na sua obra sobre aritmética, se inspirou na obra do Nicômaco de Gerasa, escrita quatro séculos antes, classificada como de qualidade bem medíocre e Eves (2004) a considera fastidiosa e meio mística.

Surge, então, no século X, Gerbert d'Aurillacque, que Boyer (2012) acredita ser o pioneiro no ensino apenas dos nove algarismos indo-arábicos na Europa, pois o sistema estava inacabado e nem os métodos de cálculo indianos eram utilizados. Gerbert (ca.945 – 1003 E.C.) nasceu em Aquitânia, na França. Foi monge no convento de Saint-Géraud d'Aurillac onde iniciou seus estudos em matemática e em astronomia. No período de 967 a 970 E.C. esteve na Espanha e lá aprendeu entre outras coisas o sistema de numeração indiano. De 972 a 987 E.C., dirigiu a escola diocesana de Reims, reintroduzindo com sucesso o estudo da matemática, segundo Katz (2009). Em 999 E.C. foi eleito papa, adotando o nome Papa Silvestre II.

Figura 43 – Gerbert d'Aurillac

Fonte: Katz, 2009, p. 326.

Essa primeira difusão dos nove algarismos indo-arábicos não foi feita por meio de manuscritos, mas por intermédio do ensino do cálculo através do ábaco de Gerbert o que a tornou limitada à elite de abacistas. Esse ábaco foi uma adaptação concebida pelo próprio Gerbert, a fim de simplificar o até então utilizado ábaco romano, no qual foi utilizada a notação dos nove algarismos indianos (Figura 44), no qual cada um recebeu um nome particular cuja origem etimológica, de um modo geral, ainda permanece indefinida.

1 – *Igin*

2 – *Andras*

3 – *Ormis*

4 – *Arbas*

5 – *Quimas*

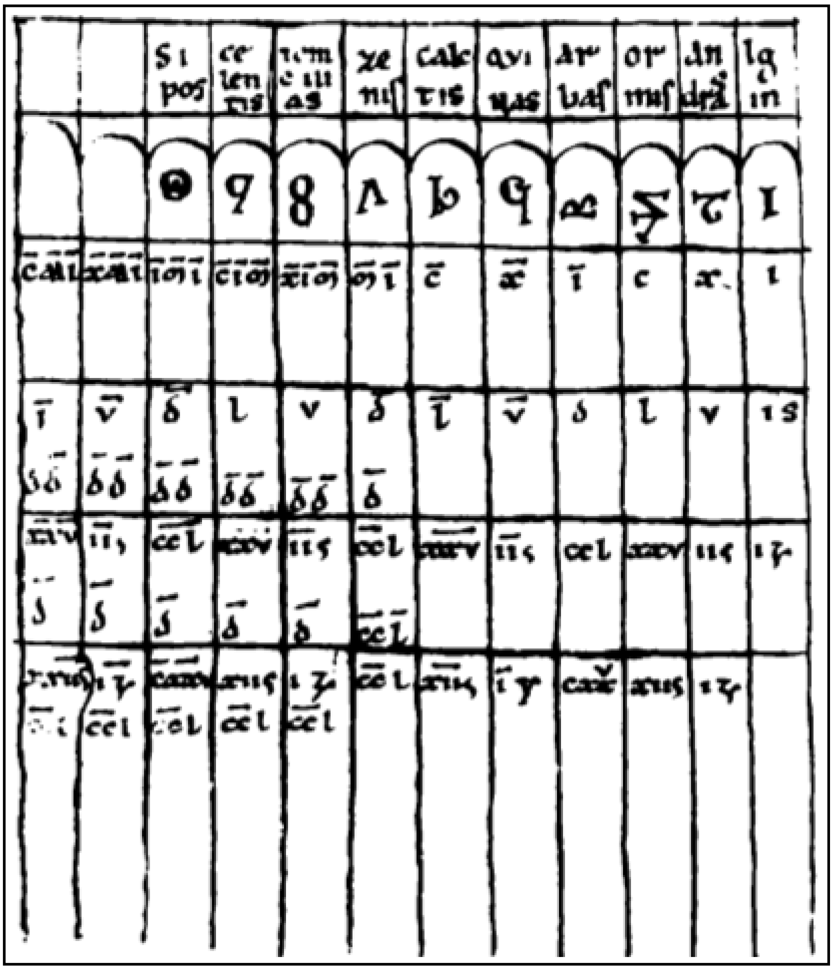
6 – *Caltis*

7 – *Zenis*

8 – *Temenias*

9 – *Celentis*

Figura 44 – Ilustração do ábaco de Gerbert

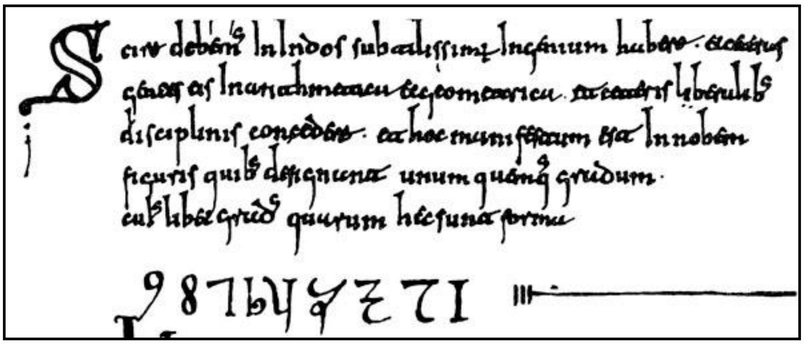


Legenda: Ilustração contida num manuscrito latino do século XI.
Fonte: Ifrah, 1997, p.463.

No ábaco de Gerbert, não era necessário o zero para efetuar as operações aritméticas, o que explica a ausência do zero nos manuscritos latinos dos séculos XI e XII.

O documento europeu mais antigo que contém os numerais hindus é *Codex Vigilanus* (Figura 45). Esse manuscrito é proveniente do norte da Espanha e foi escrito pelo monge Vigila do convento de Albelda, em 976. Nele, os caracteres utilizados são do tipo ġobār[21], sem o zero.

Figura 45 – Detalhe de uma página do *Codex Vigilanus*



Fonte: Ifrah, 1997, p. 460.

No século XII E.C., estudiosos europeus iniciaram um processo de tradução para o latim de obras gregas preservadas pelos muçulmanos. Segundo Katz (2009), as traduções costumavam ser feitas em duas etapas, primeiro por um judeu espanhol do árabe para o espanhol e, depois, por um estudioso cristão do espanhol para o latim. Pouco a pouco, os estudiosos foram conhecendo o sistema numérico dos indianos, através dos árabes.

Radulph de Laon, professor da escola monástica de sua cidade, escreveu uma aritmética que, segundo Karpinski (1911), utiliza numerais romanos para expressar grandes resultados e numerais de ġobār para cálculos práticos, incluindo o zero, apesar de não compreender completamente seu significado. Isso mostra como, no início do século XII E.C., o sistema ainda era incerto nas escolas religiosas da França central. Enquanto isso, o uso das palavras *algorismus* e *cifra* generalizava-se até mesmo fora das obras matemáticas. No final do século XII E.C. muitas das principais obras da matemática grega e algumas obras islâmicas estavam disponíveis para estudiosos que liam latim na Europa.

João de Sevilha, Adelardo de Bath, Gerardo de Cremona e Robert de Chester destacam-se pelas traduções feitas no período entre 1116 e 1185 E.C.

A mais importante obra de aritmética de João de Sevilha, um judeu espanhol, é a *Joannis Hispalensis liber Algorismi de Practica Arismetrice,* uma elaboração do

21 O significado do termo ġobār é, sem dúvida, que esses números foram escritos numa prancheta de madeira coberta de poeira fina. Ġobār ou numerais de poeira são as formas para os algarismos arábicos ocidentais, empregados no Magrebe (parte ocidental da África do Norte) e na Andaluzia, que precedem as formas atuais que usamos.

trabalho de Al-Khowarismi sobre aritmética. Uma característica interessante dessa obra, de acordo com Karpinski (1911), é a presença de números inteiros e frações sexagesimais.

O inglês Adelardo de Bath foi o responsável pela primeira tradução do árabe dos *Elementos* de Euclides, além de traduzir as tabelas astronômicas de al-Khowarizmi, em 1126 E.C. O também inglês Robert de Chester, que viveu na Espanha por muitos anos, traduziu pela primeira vez a *Álgebra* de al-Khowarizmi em 1145 E.C., apresentando, assim, à Europa, os algoritmos algébricos para resolver equações quadráticas[22].

O italiano Gerardo de Cremona foi o mais produtivo, traduzindo mais de 80 obras com a colaboração de membros da Escola de Tradutores de Toledo. Entre elas, a tradução de *Os Elementos* de Euclides do árabe de Thābit ibn Qurra e a primeira tradução do *Almagesto* de Ptolomeu (do árabe, em 1175 E.C.) e a *Álgebra* de al-Khowarizmi.

De acordo com Karpinski (1911) “Não há razão para duvidar que todos esses homens, e outros, estavam familiarizados com os numerais que os árabes usavam.” Em 1143 o primeiro traço dos numerais hindus aparecem na Alemanha nas obras *Algarismus* e *Computus,* ambas de um mesmo autor. Outro fato interessante descrito por Karpinski (1911) é a obra em hebraico, *Sefer ha-Mispar*, o Livro dos números, escrita pelo rabino Abraham ibn Meïr ibn Ezra (1090 – 1167). Apesar de ter conhecido as formas hindus, em seu manuscrito, ele utiliza em seus cálculos o sistema posicional representado pelas nove letras hebraicas para representar os algarismos de 1 a 9 e um círculo para o zero.

Apesar das inúmeras exposições, a transição do sistema numérico romano para o sistema numérico indo-arábico foi bastante lenta. Boyer (2012), coloca como um dos possíveis motivos o uso comum do ábaco e que as vantagens do novo sistema que exigiam apenas pena e papel, não estivessem tão perceptíveis. Karpinski (1911) ainda acrescenta na dificuldade enfrentada pela adesão desses novos numerais, já que a fabricação de papel não foi introduzida na Europa até o século XII E.C., sendo apenas a partir do século XIX E.C. um produto barato. Do mesmo modo, o lápis do tipo moderno é produto do século XVI E.C. Houve também

---

22 A tradução latina da *Álgebra* se inicia com uma apresentação do princípio do posicional e, nos seis capítulos seguintes, apresenta a resolução dos seis tipos de equações abrangendo todas as possibilidades de equações lineares e quadráticas que possuem raiz positiva.

grande rivalidade entre os abacistas, os defensores do ábaco, e os algoristas, aqueles que defendiam os novos numerais.

A Figura 43 mostra um abacista e um algorista. O número no quadro à direita é 1241. O da esquerda representa a tentativa de divisão de 1234 por 97, sem êxito porque as frações decimais, como sabemos, ainda não haviam sido inventadas.

Figura 46 – O abacista versus o algorista

Legenda: De Margarita Philosophica, de Greor Reisch, Strasburgo, 1504.
Fonte: https://hollis.harvard.edu/primo-explore/fulldisplay?context=L&vid=HVD2&search_scope=everything&tab=everything&lang=en_US&docid=01HVD_ALMA211992193710003941

A partir do século XIII E.C., prosperaram na Itália as escolas de ábaco[23] que se dedicavam a ensinar técnicas de cálculo sem o ábaco, através do uso dos numerais indo-arábicos. Essas escolas tinham como objetivo treinar jovens

23 Originalmente, o termo ábaco se referia a um instrumento utilizado para calcular por meio de contadores. Porém, após a introdução dos números indo-arábicos, na Itália, o termo passou a ser usado de forma mais abrangente, sendo relacionado também à habilidade de fazer cálculos com esse novo sistema de numeração.

comerciantes desde os onze anos em matemática prática para tratar de problemas ligados ao comércio, pois as relações comerciais estavam saindo da dimensão local cuja amplitude exigia técnicas de cálculo e registro mais complexas. Essas escola expandiram-se para várias regiões da Itália, principalmente em Florença, e estão relacionadas ao desenvolvimento do capitalismo no fim da Idade Média.

É nesse contexto que surgem três importantes autores que contribuíram para a difusão dos números indo-arábicos: o italiano Leonardo de Pisa, o francês Alexandre de Villedieu e o inglês João de Halifax, mais conhecido como Sacrobosco.

Segundo Boyer (2012), *o Carmen de algorismo*, de Villedieu, descreve, nas suas 284 linhas, em forma de poema, as quatro operações sobre os inteiros, usando os numerais indo-arábicos e tratando o zero como um número. Segundo Karpinski (1911), a existência de um grande número de manuscritos nas bibliotecas europeias evidenciam sua grande utilização.

O *Algorismus vulgaris*, que possuía 4000 linhas, foi usado como livro-texto universitário em aritmética. Nele, Sacrobosco cita alguns versos do *Carmen*. A grande quantidade de comentários de professores universitários revela grande êxito dessa obra, que esteve em uso mesmo depois da invenção da imprensa, com edições impressas conhecidas, sendo a primeira em 1488 E.C. e a última impressão em 1582 E.C. É provável que em razão do êxito alcançado pela obra, o termo algarismos arábicos tenha se tornado comum, pois ele afirma que *algorismus* vem de *Algus*, um filósofo, segundo ele, e que os árabes são os inventores desse sistema.

A obra de Sacrobosco consiste somente de um texto, sem exemplos numéricos. Nela, ele discute as operações de adição, subtração, mediação (média aritmética), duplicação, multiplicação, divisão, a soma de séries aritméticas e a extração de raízes quadradas e cúbicas.

O *Liber abaci*, escrito por Leonardo de Pisa em 1202 E.C. e reescrito em 1228, é um livro sobre aritmética bastante conhecido e considerado o responsável por introduzir os números indo-arábicos na Europa. De acordo com Karpinski (1911), era uma obra muito avançada para a classe mercantil e muito inovadora para os universitários conservadores, em uma época em que a presença da matemática nas universidades ainda era pequena. Além disso, era uma obra bastante extensa, 459 páginas, fator que dificultava sua cópia pelos escribas. Sua primeira impressão foi no século XIX E.C.

Diante disso, qual seria a participação do *Liber Abaci* na disseminação dos indo-arábicos?

A obra de Fibonacci não foi a única que contribuiu para essa disseminação, tampouco a mais popular. Este lugar é ocupado pelas obras de Sacrobosco e Villa Dei, que foram responsáveis por uma maior disseminação entre as pessoas comuns, de acordo com Karpinski (1911). Contudo coloca a possibilidade de Fibonacci ter sido o mais influente entre os estudiosos europeus e isso não se deve por ter sido escrito em latim, a língua universal da época, mas apenas ao conteúdo matemático de sua obra, já que as obras de Sacrobosco e Villa Dei também foram escritas em latim.

As universidades começaram a surgir no século XIII E.C. (de Paris, Oxford, Cambridge, Pádua e Nápoles). Segundo Ball (1889), em Cambridge os alunos passavam 4 anos estudando o *trivium,* que compreendia gramática, lógica e retórica, e depois 3 anos estudando o *quadrivium.* Esse último, obedecendo a uma lógica pitagórica, era dividido em aritmética, geometria, música e astronomia. A aritmética em questão não é a que entendemos atualmente no contexto da escola básica como arte do cálculo, significava o estudo das propriedades dos números; e particularmente de razão, proporção, frações e números poligonais. Ball (1889) resume que toda a ciência do *quadrivium* se resumia ao conhecimento referido nas obras de Boécio, Cassiodoro e Isidoro.

Ball (1889) também afirma que Roger Bacon, escrevendo no final do século XIII, diz que em Oxford havia poucos, se algum, residentes que estudaram mais do que as definições e os enunciados das cinco primeiras proposições do primeiro Livro de Euclides. Isso nos mostra quão pouco conhecimento matemático os alunos adquiriam e como o conhecimento matemático era pouco explorado nas universidades.

No entanto, segundo Sigler (2003), a obra de Fibonacci foi usada por mais de três séculos como base curricular nas escolas de ábaco na Toscana para aqueles que pretendiam ser comerciantes ou simplesmente aprender matemática. Quando lemos que a obra de Fibonacci era muito avançada para a classe mercantil e que essa mesma obra foi usada nas escolas de ábaco, em um primeiro momento, as informações parecem contraditórias. O nosso entendimento foi de aceitar as duas afirmações como verdadeiras. Partindo da premissa de que as escolas de ábaco também tinham a finalidade de formar aqueles que seguiriam uma carreira comercial, entendemos que a classe mercantil a que Karpinski (1911) se refere são aqueles que já estão no mercado, ou seja, os que já atuam como comerciantes. Nesse aspecto, Danna (2021) afirma que a matemática usando os algarismos indo-arábicos exigia que seus usuários fossem alfabetizados, um requisito bastante alto para os comerciantes do final da Idade Média e início da Idade Moderna, pois somente durante o século XIII os comerciantes tornaram-se alfabetizados, devido à necessidade de comunicação com seus agentes no exterior.

Muitos manuais de aritmética foram escritos para uso nas escolas de ábaco, das mais simples a livros de qualidade, porém nenhum era tão abrangente, teórico e excelente como o *Liber abaci*.

Todavia, em 1299 E.C. Florença proibiu o uso dos numerais indo-arábicos pelos banqueiros, alegando serem mais fáceis de falsificar do que os romanos, por exemplo, o 0 pode ser transformado facilmente em um 6 ou 9, o que não impediu sua disseminação.

A partir do século XIV E.C. na Itália os números indo-arábicos se tornaram cada vez mais frequentes na prática contábil dos seus comerciantes italianos e também começaram a ser usados nas contas públicas italianas. No final do século XV E.C. são usados nos livros contábeis de Augsburgo, na Alemanha e no final do século XVI E.C. são encontrados nas contas privadas inglesas (Danna, 2021).

Os algarismos indo-arábicos não substituíram de imediato os romanos, essa substituição foi gradual fazendo com que muitas formas inusitadas fossem utilizadas durante esse processo de transição. Como exemplo, temos:

1000. 300. 80 e 4 para 1384, século XIV E.C.;

12901 para 1291 e m. cccc. 8II para 1482, século XV E.C.;

1vojj para 1502, século XVI E.C.

Como podemos perceber não havia uma regra para o uso dos algarismos nesse período, cada escritor tinha sua maneira de empregá-los.

> Em muitas partes da Índia, entre as pessoas comuns do Japão e da China, no Sião e geralmente na Península Malaia, no Tibete e entre as ilhas das Índias Orientais, os nativos ainda seguem suas próprias formas numéricas. Somente quando a civilização ocidental está entrando na vida comercial do Oriente é que os numerais usados por nós encontram lugar, exceto quando as formas sânscritas aparecem em partes da Índia. É, portanto, com surpresa que o estudante de matemática venha a perceber o quão modernas são essas formas tão comuns no Ocidente, quão limitado é seu uso até mesmo nos dias de hoje. (KARPINSKI, 1911, p.151, tradução nossa)

Ainda hoje no Extremo Oriente os algarismos indo-arábicos ainda são bastante desconhecidos em muitos países e têm um caminho a construir.

5.1 **A relação entre a expansão dos indo-arábicos e a produção de manuais de aritmética**

Nessa seção, destacaremos alguns aspectos do artigo de Danna (2021) que fornece uma reconstrução detalhada da tradição da aritmética prática em toda a Europa desde o final do século XIII E.C. até 1600 E.C., baseada em um banco de dados original composto por 1280 textos, tanto manuscritos quanto impressos, escritos por mais de 340 autores.

No século XIII E.C., surge na Itália a letra de câmbio que revolucionou o mercado monetário internacional europeu e no século XIV E.C. era o principal meio para realizar pagamento internacionais, além de ser utilizada como instrumento de crédito, pois permitia mascarar os juros cobrados pelo empréstimo, que na época eram proibidos pela Igreja. Com a revolução comercial, os comerciantes precisavam de melhores ferramentas para lidar com multiplicações e divisões, pois o comércio internacional requeria o cálculo para conversões e taxas de câmbio, dando aos indo-arábicos um papel importante no desenvolvimento dessa inovação financeira, já que ofereciam melhores técnicas para lidar tanto com notação numérica quanto com cálculo. Ou seja, a adoção dos numerais indo-arábicos abriu possibilidades que eram dificultadas pelos sistemas numéricos anteriores

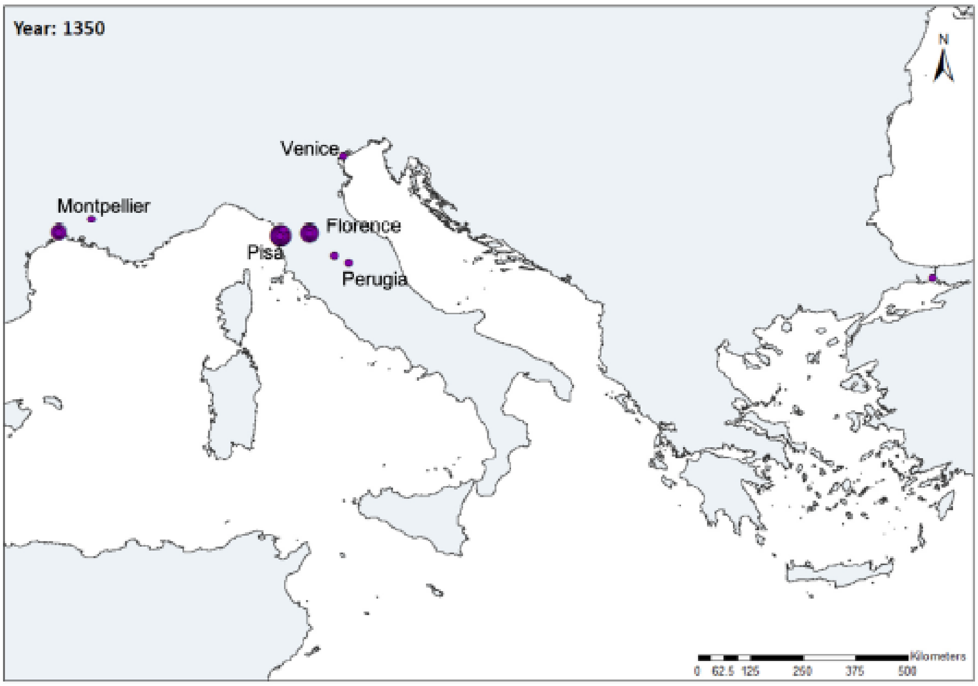
Nesse contexto, fez-se necessário oferecer aos comerciantes e banqueiros internacionais o conhecimento não só desses algarismos como também da sua aritmética. Para isso, os italianos desenvolveram o manual do ábaco ou matemática do ábaco, uma tradição de aritmética prática, escrita em sua grande maioria em vernáculo italiano.

> No que diz respeito ao conteúdo matemático desses textos, embora com um alto grau de variação, os manuais do ábaco transmitem um pacote padrão de conhecimento matemático. Embora um certo grau de experimentação em teoria matemática tenha sido alcançado ao longo de sua história, a principal contribuição dessa tradição foi disseminar em contextos vernaculares a matemática que havia sido introduzida na época

> de Fibonacci. Juntamente com a introdução do sistema de numeração posicional e de frações, esses textos foram fundados na chamada "regra de três", ou seja, o cálculo do termo desconhecido de uma proporção onde três termos são conhecidos. (DANNA, 2021, p.14, tradução nossa)

No final do século XIII E.C., em Pisa, inicia-se a produção de livros do ábaco que denotaremos por textos aritméticos práticos. Florença posteriormente se torna o centro de produção manuscrita e difusão desses textos e, em seguida, no século XVI E.C., Veneza graças à sua indústria de impressão a substitui.

Figura 47 – Produção de textos aritméticos práticos no ano de 1350



Fonte: Danna, 2021, p.29

No século XIV E.C., vemos esses textos escritos em Florença, Lucca, Veneza, Perugia, Gênova, Bologna, Milão, Pádua, Roma, Avignon e Montpellier. Essas duas últimas produziram textos escritos por comerciantes italianos e congruentes à estrutura da tradição italiana do ábaco.

No final do século XIV E.C. e início do século XV E.C. surgem na Espanha os primeiros textos aritméticos práticos não italianos empregando os números indo-arábicos. É o início dessa produção fora da Itália, que se consolidou apenas no século XV E.C. No sul da França, encontramos o *Manuscrit de Pamier*, escrito entre 1420 e 1430 E.C. em Pamier, cidade entre Toulouse e Barcelona. Este manuscrito preserva um texto anônimo escrito em provençal que apresenta o conteúdo e a estrutura típicos de um tratado de ábaco, pois mostra como fazer operações com números inteiros e frações, seguidas por problemas aplicados.

Em direção ao norte, surge na Alemanha, em Regensburg, o primeiro texto de aritmética prática. Escrito em meados do século XV E.C. por um monge beneditino, o *Algorismus Ratisbonensis* desempenhou um papel semelhante ao do *Liber abaci* na Itália.

Em 1455 com a invenção da imprensa de tipo móvel por Gutenberg a produção desses textos é acelerada assim como sua difusão. Em 1478 E.C. foi publicada a primeira aritmética impressa, a Aritmética de Treviso ou *Arte dell'Abbaco*.

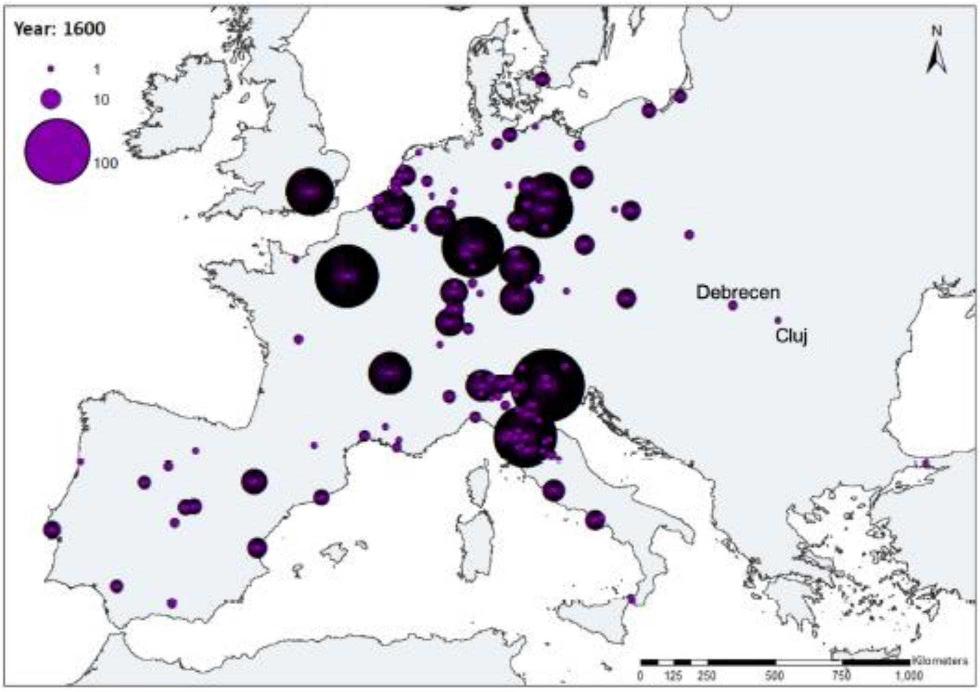
No início do século XVI E.C., em 1508, chegam à Holanda os textos aritméticos práticos escritos em holandês. Em 1519 E.C., é impresso em Portugal o primeiro texto aritmético prático, o *Tratado da pratica darismetyca* de Gaspar Nicolas.

A Inglaterra, onde a publicação de aritmética prática decolou na segunda metade do século XVI E.C., e onde os números indo-arábicos ainda tinham uma circulação limitada no final do século, destaca-se como o retardatário neste ciclo. O primeiro texto aritmético prática inglês é o *An Introduction for to lerne to reckon with the Pen and with the Counters*, publicado em 1536/7 E.C. em St. Albans. No entanto, foi o *The ground of artes teachyng the worke and practise of arithmetike*, publicado em 1543 E.C. em Londres, que desencadeou a difusão deste tipo de manual aritmético na Inglaterra.

Em 1560 E.C., também temos a primeira publicação de um texto de aritmética prática na Dinamarca. Em 1575 E.C., a produção desses textos é consolidada na Suíça com a primeira publicação em Zurique, de uma reimpressão da obra *Rechenbuch uff linien und zyffren* de Adam Riese de 1565 E.C. Em 1600 E.C., a difusão da aritmética prática alcançou pela primeira vez os húngaros, com publicações em Debrecen e Cluj.

A Figura 48 mostra as cidades que no final do período observado, em 1600 E.C., produziam textos aritméticos práticos. Observamos uma grande expansão desses centros de produção pelo território europeu. Assim como uma transmissão e difusão do conhecimento no sentido sul-norte da Europa que não se deu por vias marítimas, mas sim por vias terrestres. Ou seja, não seguiu os eixos do comércio marítimo, e sim uma rede interna baseada na proximidade.

Figura 48 – Produção de textos aritméticos práticos no ano de 1600



Fonte: Danna, 2021, p.33

A transição do uso prático dos numerais romanos para os indo-arábicos foi um ciclo de inovação que se iniciou na Itália no final do século XIII E.C. com a revolução comercial através da adoção de ferramentas matemáticas que melhor atendiam às suas práticas comerciais. Os textos de aritmética prática proporcionaram a difusão desse conjunto de ferramentas.

Impulsionados pela necessidade de fornecer melhores ferramentas matemáticas para as práticas comerciais, os textos aritméticos práticos tanto proporcionaram a difusão de tais ferramentas quanto foram o condutor da adoção definitiva na Europa do sistema numérico indo-arábico.

> A disseminação da tradição de manuais práticos de aritmética é, portanto, uma estimativa conservadora para a difusão de um conjunto de habilidades e práticas associadas à revolução comercial, e deve ser entendida como um proxy para observar sua transmissão consolidada entre as comunidades comerciais e linguísticas.
> Além disso, a aritmética prática foi indiscutivelmente a premissa para a adoção de outras inovações da revolução comercial, pois uma compreensão básica da aritmética e o uso de um simbolismo matemático eficaz para lidar com números racionais eram necessários para o uso de ferramentas e técnicas como a letra de câmbio e escrituração de partidas dobradas. Nesse sentido, a difusão da aritmética prática atesta a difusão de um "conhecimento tácito" mais amplo, de um conjunto de habilidades que não foram necessariamente expressas nos próprios manuais, mas que

> encontrou na aritmética prática sua premissa necessária. (DANNA, 2021, p.38, tradução nossa)

Vale ressaltar que o foco principal da tradição da aritmética prática não era a teoria matemática, mas sim suas aplicações práticas. Como consequência, os manuais práticos de aritmética não seguem a estrutura dedutiva do modelo euclidiano e são organizados em seções temáticas que compreendem listas de problemas resolvidos. As regras matemáticas, quando presentes, são geralmente fornecidas sem demonstração no início de sua seção e são seguidas por uma lista de problemas resolvidos nos quais a regra é aplicada.

5.2 **Desconstrução do herói Fibonacci**

Fibonacci se tornou conhecido como autor de um livro raro e famoso (até o final do século XIV E.C.), recebendo o papel de herói da cultura. Esse papel alimentou a ideia de que toda uma corrente intelectual deve descender de um grande livro, levando alguns escritores a mencioná-lo em suas obras.

Porém, essa soberania sobre os livros de ábaco é contestada por Høyrup (2007) através da análise da obra *Livero de l'abbecho*, um manuscrito no vernáculo da Úmbria escrito provavelmente entre 1288 e 1290 E.C. É o mais antigo, até o momento, livro de ábaco a ser encontrado e seu autor, desconhecido, apresenta-se como sendo "segundo a opinião do mestre Leonardo Fibonacci".

Høyrup (2007) mostra que o livro possui uma parte que corresponde ao currículo básico das escolas de ábaco, que não tem relação nenhuma com Fibonacci. Outra parte que contém assuntos traduzidos do *Liber abaci*, mas que demonstram pouca compreensão do material apresentado em seu tratado. Por exemplo, o autor não entende as notações de Fibonacci para frações compostas.

> A implicação é que o compilador nunca realizou esses cálculos e provavelmente não pretendeu fazê-lo em seu ensino - ou seja, os problemas mais sofisticados de Fibonacci (pelo menos aqueles onde tais frações ocorrem, mas provavelmente muitas outras também) são retomadas como embelezamento externo. (HØYRUP, 2007, p.39, tradução nossa)

Ao que parece o texto é o resultado de uma reunião de ideias de outros autores. Contudo, o compilador tinha algum conhecimento sobre práticas de cálculo, mas com pouco entendimento sobre a matemática de Fibonacci.

> Nosso compilador certamente poderia ter encontrado até mesmo o material para seus capítulos básicos no *Liber abaci* - tudo está copiosamente lá, com exceção dos juros simples. Mas ele pode ter preferido usar exemplos relativos às metrologias e taxas de câmbio de seu próprio tempo e local; alternativamente, ele poderia já ter um tratado que estava praticamente pronto pra uso geral e, em seguida, tenha decidido inserir nele os adornos tomados emprestados do herói (e para o último capítulo provavelmente também de outras fontes que iam além de sua destreza matemática). Não podemos saber. O que podemos saber a partir da análise é que a tradição do ábaco dos finais do século XIII não era a tradição de Fibonacci, embora já fosse uma tradição. (HØYRUP, 2007, p.41, tradução nossa)

A partir de sua análise, Høyrup afirma que esse manual do ábaco não era uma tradição de Fibonacci, embora já fosse uma tradição. Sendo assim, podemos concluir que o *Liber abaci* tem sua importância pela qualidade e primor matemático, porém Fibonacci não pode ser visto como o único responsável e até mesmo como um herói no que diz respeito à disseminação dos números indo-arábicos, muito menos como o único estudioso que percebeu as vantagens desse sistema e escreveu sobre ele contribuindo para sua expansão na Europa e pelo mundo.

6 **A MULTIPLICAÇÃO**

Os sistemas numéricos antigos, tanto aditivos quanto os posicionais, permitem que as operações de soma e subtração sejam realizadas de forma bastante simples. No entanto, quando se trata de multiplicação e divisão esses sistemas se mostram ineficientes. Para superar essa dificuldade foi desenvolvido um instrumento para facilitar o processo de cálculo denominado ábaco. Mesmo no ábaco essas operações são complexas. Ifrah (1997) afirma que o tempo e o empenho necessários para um aluno dominar a multiplicação e divisão seria o equivalente a um doutorado nos dias atuais. Isso fez com que a prática das operações aritméticas não estivesse ao alcance de todos.

Os hindus e árabes utilizavam números escritos com um sistema posicional e métodos para as operações básicas que não exigiam o ábaco. O sistema numérico romano não diferente dos sistemas antigos necessitava do ábaco para os cálculo e as respostas eram anotadas em algarismos romanos. Os números hindus são usados tanto para fazer o cálculo quanto para anotar o resultado. Estes são os procedimentos que as crianças aprendem na escola quando aprendem a fazer adição, multiplicação, subtração e divisão com lápis e papel. Na Idade Média na Europa, esses novos procedimentos escritos foram chamados algoritmos para diferenciá-los do cálculo com o ábaco. Fibonacci ensina esses procedimentos no livro *Liber abaci*. Esses procedimentos escritos de cálculo, álgebra e matemática prática em geral eram conhecidos na Itália na Idade Média como ábaco.

Nesse estudo descreveremos apenas como a multiplicação é feita usando o ábaco e o procedimento descrito no *Liber abaci* acompanhados de um breve relato histórico. O intuito é permitir que o leitor perceba as diferenças e semelhanças entre os dois métodos.

6.1 O ábaco romano

A numeração romana possuía uma notação cujos símbolos independiam uns dos outros e era regido pelo princípio aditivo e subtrativo. Esse sistema não permitia a realização de cálculos como fazemos atualmente, pois seus símbolos tinham o objetivo apenas de registrar os valores. Para driblar essa dificuldade, os romanos recorriam ao ábaco.

Segundo Smith (1958), apesar de Heródoto afirmar que os egípcios usavam um ábaco, sua origem é incerta. A palavra latina *abacus* deriva do grego e significa “travessa, mesa, tabuleta”. Nos primeiros tempos, a palavra "ábaco" parece ter se referido a uma mesa coberta com areia ou poeira fina, as figuras sendo desenhadas com um estilete e as marcas sendo apagadas com o dedo quando necessário. Levando a atribuir sua origem na palavra semítica antiga *abq* que significa areia, pó.

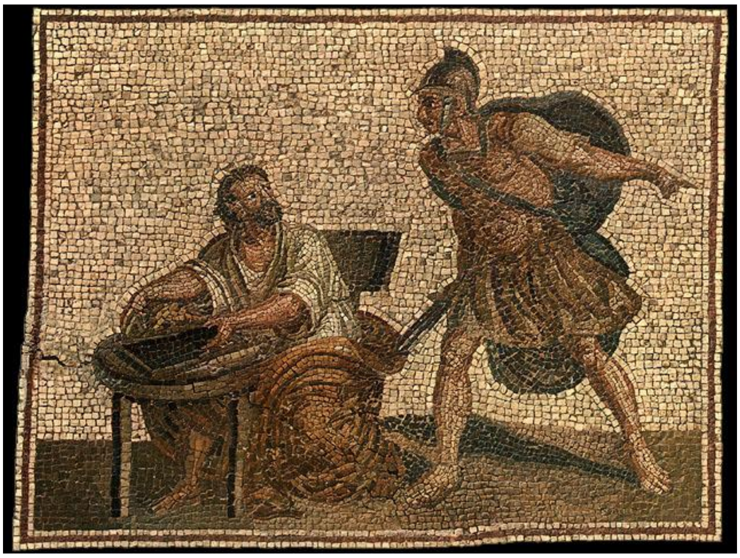
Esta forma foi de uso comum na Europa até o início do século XVII E.C. e, segundo Ifrah (1997), na França, seu uso foi proibido nas escolas e administrações com a Revolução Francesa[24].

Segundo Smith (1958), há três tipos de ábaco: o ábaco de pó, a mesa com as fichas soltas e a mesa com as fichas presas a linhas.

O ábaco de pó é uma tabuleta com as bordas levantadas que é preenchida de areia fina, na qual se delimitam colunas sucessivas e na qual se anotam algarismos com o dedos ou uma ponta de ferro. Os romanos também usavam o ábaco de cera que, de acordo com Ifrah (1997), consistia em uma pequena prancheta de osso ou madeira, coberta por uma camada fina de cera negra em que se traçavam os algarismos com um estilete de ferro que possuía em uma de suas extremidades uma ponteira circular para apagar por pressão na superfície da cera.

24 Revolução Francesa é o nome dado ao ciclo revolucionário que aconteceu na França entre 1789 e 1799 que marcou o fim do absolutismo nesse país.

Figura 49 – Ábaco de pó ou cera



Legenda: Mosaico do século XVIII representando Arquimedes com um ábaco de algarismos no momento em que um soldado romano se apressa em assassiná-lo.
Fonte: https://www.math.nyu.edu/~crorres/Archimedes/Death/DeathIllus.html

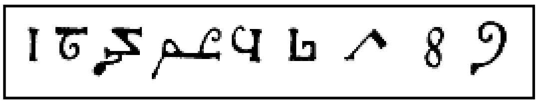
O ábaco de mesa com fichas soltas também denominado tabuleiros de contagem possui várias colunas verticais e cada uma delas representa uma potência de dez. Ou seja, dez fichas em uma coluna representam uma unidade na coluna imediatamente à esquerda. Para representar os números basta colocar a quantidade de fichas necessária (com valor de uma unidade simples). As fichas eram feitas de pedra, vidro ou metal. Na França, no século XIII E.C., essas fichas começaram a ser estampadas com imagens. Essas fichas foram chamadas *pséphoi* pelos gregos e *calculi* pelos romanos.

Figura 50 – Ilustração alemã de um ábaco de fichas

Legenda: Ilustração do livro *Ain Nerv geordnet Rechenbiechlin* de Jakob Kobel. (Augsburg, 1514).
Fonte: https://cienciadegaragem.blogspot.com/2014/12/como-os-sistemas-numericos-evoluiram-ao.html

No ábaco de Gerbert, suas fichas eram marcadas com os algarismos hindus (Figura 51) que trouxera da Espanha. Algarismos que foram chamados de *apex* no singular ou *apices* no plural. Assim, em vez de colocar nove fichas em uma coluna colocava uma ficha só com a representação do número nove.

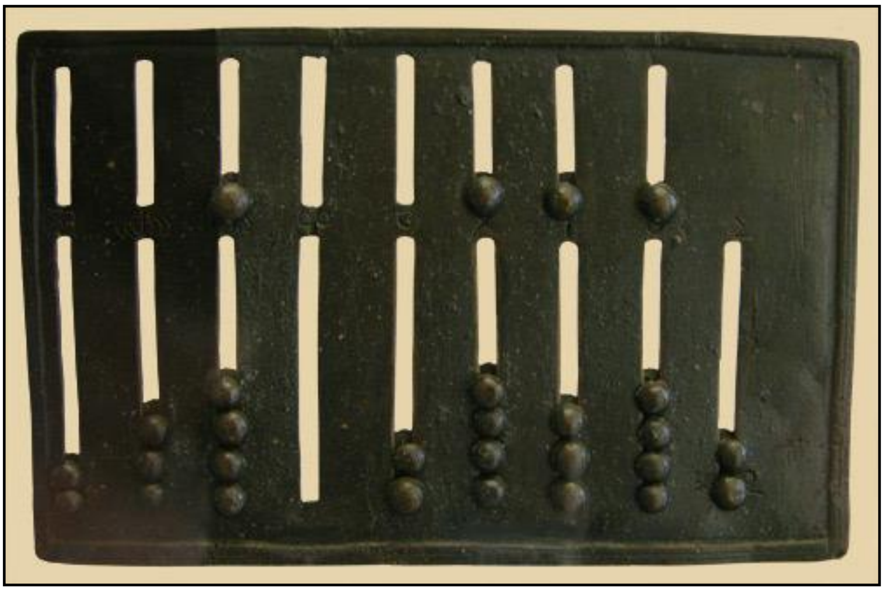
Figura 51 – A*pices* do século XI



Fonte: BOYER, 2012, p.171

Os romanos projetaram também o ábaco portátil que consistia em uma prancha com ranhuras por onde deslizavam pequenas contas. A Figura 52 mostra um ábaco romano feito de bronze e datado do século II E.C.

Figura 52 – Ábaco romano



Fonte: http://vroma.org/vromans/bmcmanus/abacus.html

As contas nas colunas superiores representavam cinco unidades cada e as nas colunas inferiores e mais compridas representavam uma unidade cada. As duas primeiras colunas à direita foram usadas para calcular as frações e as demais colunas estão dispostas em ordem crescente, da direita para a esquerda, na qual cada coluna representava um agrupamento em potências de base dez. Em cada uma dessas colunas foi esculpido os símbolos do sistema de algarismo romano. (Figura 53)

Figura 53 – Detalhe dos algarismos romanos no ábaco

Fonte: O autor, 2021.

As colunas restantes usam símbolos arcaicos — milhares [∞], dez milhares [((|))], centenas de milhares [(((|)))], milhões [X em uma caixa de três lados]. (Figura 54).

Figura 54 – Detalhe dos símbolos arcaicos no ábaco

Fonte: O autor, 2021.

6.1.1 <u>A multiplicação no ábaco romano</u>

Segundo Ibiapina (2014), a multiplicação no ábaco romano era realizada de duas formas diferentes. A primeira era similar a dos egípcios efetuada através de duplicações sucessivas associadas a cálculos mentais em relação aos reagrupamentos das fichas feitos durante o procedimento e a segunda reduzia-se à soma de vários produtos parciais. A seguir, descreveremos os dois métodos destacando suas particularidades e estruturas.

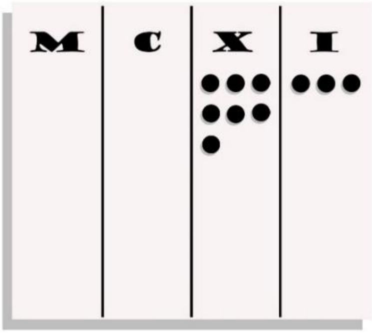
6.1.1.1 Método de duplicações sucessivas

Nesse método dependendo da multiplicação a ser feita o operador do ábaco teria que fazer várias duplicações. Se as sequencias de operações não coubessem no ábaco o assistente teria que anotar os resultados parciais.

Exemplo: Multiplicar 73 por 46.

- O assistente anuncia o primeiro fator e o operador registra no ábaco. (Figura 55)

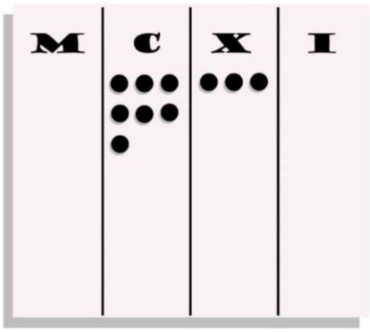
Figura 55 – Registro no ábaco



Fonte: O autor, 2021

O assistente começa a anunciar o segundo fator: “Vezes quarenta...”. O operador desloca as fichas uma coluna à esquerda (isso é o mesmo que multiplicar por 10. (Figura 56)

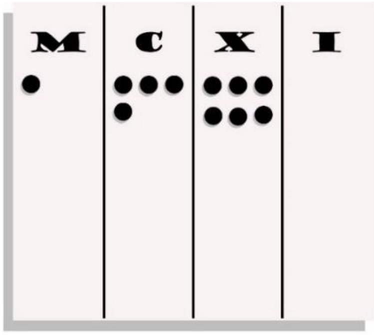
Figura 56 – Deslocamento à esquerda



Fonte: O autor, 2021

O operador dobra o número, isso corresponde a $73x20$. Retira três fichas da coluna das centenas restando apenas quatro fichas e coloca uma ficha na coluna das unidades de milhar. Depois, coloca três fichas na coluna das dezenas, como indicado na Figura 57.

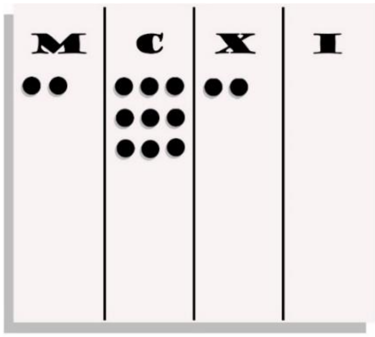
Figura 57 – 1ª Duplicação



Fonte: O autor, 2021

O operador faz um segundo dobramento. Nessa etapa, teremos o resultado de $73x40$. Acrescenta uma ficha na coluna das unidades de milhar e oito fichas na coluna das centenas. Em seguida, retira quatro fichas da coluna das dezenas e acrescenta uma ficha na coluna das centenas, como indicado na Figura 58.

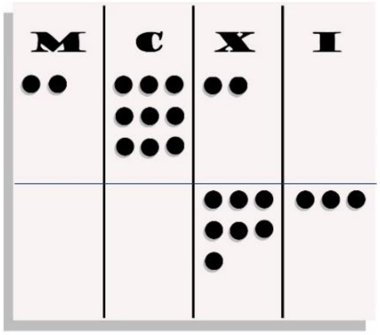
Figura 58 – 2ª Duplicação



Fonte: O autor, 2021

Para encerrar o assistente termina de dizer o outro fator: “e seis”. O operador pede que o assistente repita o primeiro fator e o representa na parte inferior do ábaco, traçando uma linha para separá-lo do resultado anterior, como indicado na Figura 59.

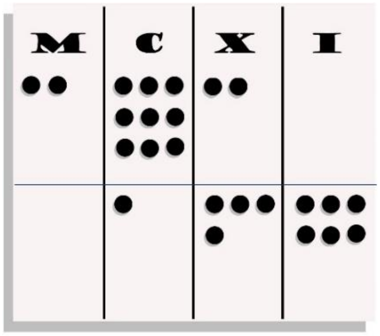
Figura 59 – Último fator



Fonte: O autor, 2021

O operador dobra o número da parte inferior, que corresponde a multiplicar 73 por 2, como indicado na Figura 60.

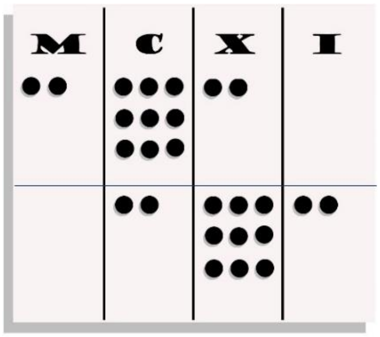
Figura 60 – 1ª Duplicação inferior



Fonte: O autor, 2021

O operador dobra novamente o número da parte inferior, que corresponde a multiplicar 73 por 4, como indicado na Figura 61.

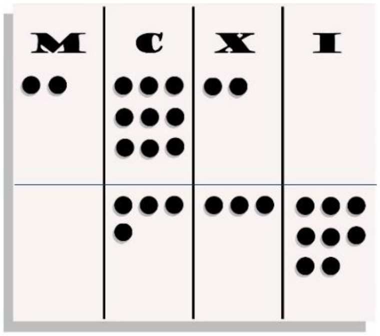
Figura 61 – 2ª Duplicação inferior



Fonte: O autor, 2021

O operador pede que o assistente repita pausadamente o resultado do primeiro dobramento para ele adicionar a este resultado parcial, a soma corresponde à multiplicação de 73 por 6, como indicado na Figura 62.

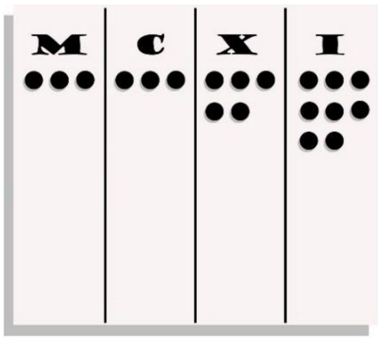
Figura 62 – Soma



Fonte: O autor, 2021

Por fim, o operador soma esses dois resultados parciais, ou seja, soma o número superior com o inferior, resultado que corresponde ao da multiplicação de 73 por 46, como indicado na Figura 63.

Figura 63 – Resultado final



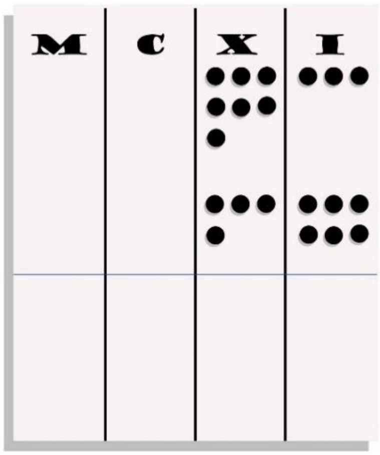
Fonte: O autor, 2021

6.1.1.2 Método da soma de vários produtos parciais

Esse método consiste em multiplicar as fichas em cada coluna de um fator pelas fichas de cada coluna do outro fator, iniciando pelas ordens numéricas mais altas. Esse método é semelhante ao algoritmo que usamos atualmente, porém é preciso saber em que coluna colocar os resultados parciais. A regra é a seguinte: As colunas são numeradas de acordo com sua posição da direita para esquerda, coluna 1, coluna 2 e assim por diante. Logo, sejam as fichas da coluna *a* multiplicadas pelas fichas da coluna *b*, então o produto será colocado na coluna *a+b-1*.

Exemplo: Multiplicar 73 por 46. O operador registra os fatores no ábaco (Figura 64).

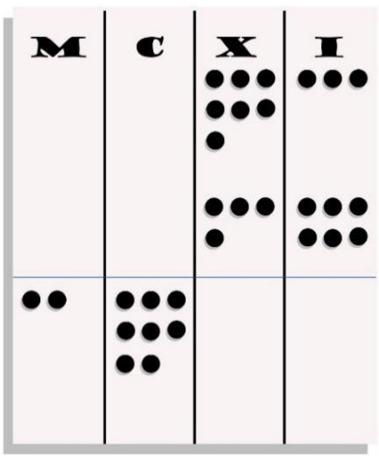
Figura 64 – Registro



Fonte: O autor, 2021

O operador inicia multiplicando a coluna de maior ordem do fator superior pela coluna de maior ordem do fator inferior. Os resultados parciais serão colocados na parte inferior do ábaco. Ele multiplica as sete fichas do fator superior pelas quatro fichas do fator inferior, obtendo 28. E coloca esse resultado na coluna das centenas, pois $2 + 2 - 1 = 3$. Esta etapa corresponde ao registro da multiplicação de 70 por 40, como indicado na Figura 65.

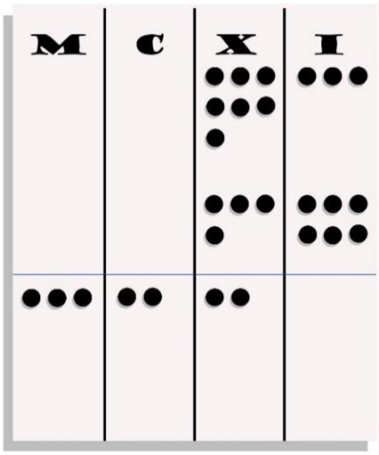
Figura 65 – 40×70



Fonte: O autor, 2021

Em seguida, multiplica as sete fichas do fator superior pelas seis fichas do fator inferior, obtendo 42. E coloca na coluna das dezenas, pois $2 + 1 - 1 = 2$. Logo, ele vai colocar duas fichas na coluna da dezena, tirar seis fichas da coluna da centena e acrescentar uma ficha na coluna da unidade de milhar. Esta etapa corresponde ao registro da multiplicação de 70 por 6 somada ao resultado parcial anteriormente calculado, como indicado na Figura 66.

Figura 66 – 7×6

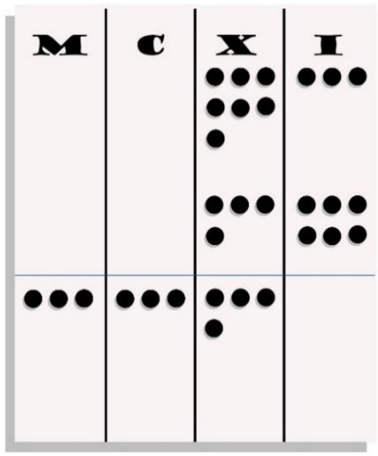


Fonte: O autor, 2021

Agora o mesmo procedimento será feito com a coluna das unidades do fator superior.

Multiplica-se as três fichas da coluna da unidade do fator superior pelas quatro fichas da coluna da dezena do fator inferior, obtendo 12. O resultado deve ser colocado na coluna das dezenas, pois $1 + 2 - 1 = 2$. Sendo assim, ele irá colocar duas fichas na coluna das dezenas e uma ficha na coluna das centenas no resultado parcial. Esta etapa corresponde ao registro da multiplicação de 3 por 40 somada ao resultado parcial anteriormente calculado, como indicado na Figura 67.

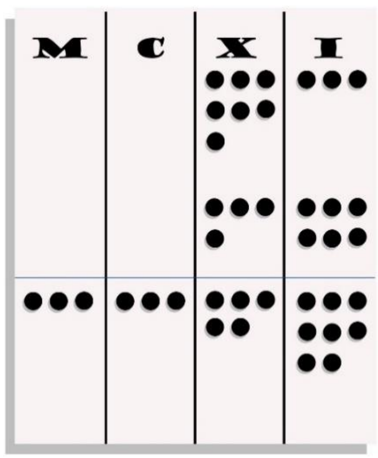
Figura 67 – 3×4



Fonte: O autor, 2021

Por fim, o operador multiplica as três fichas da coluna da unidade do fator superior pelas seis fichas da coluna da unidade do fator inferior. O resultado é 18 e será colocado na coluna das unidades, pois $1 + 1 - 1 = 1$.
Então, o operador irá acrescentar oito fichas na coluna da unidade e uma ficha na coluna da dezena. Esta etapa corresponde ao registro da multiplicação de 3 por 6 somada ao resultado parcial anteriormente calculado, como indicado na Figura 68.

Figura 68 – Resultado final



Fonte: O autor, 2021

6.2 O *Liber abaci*

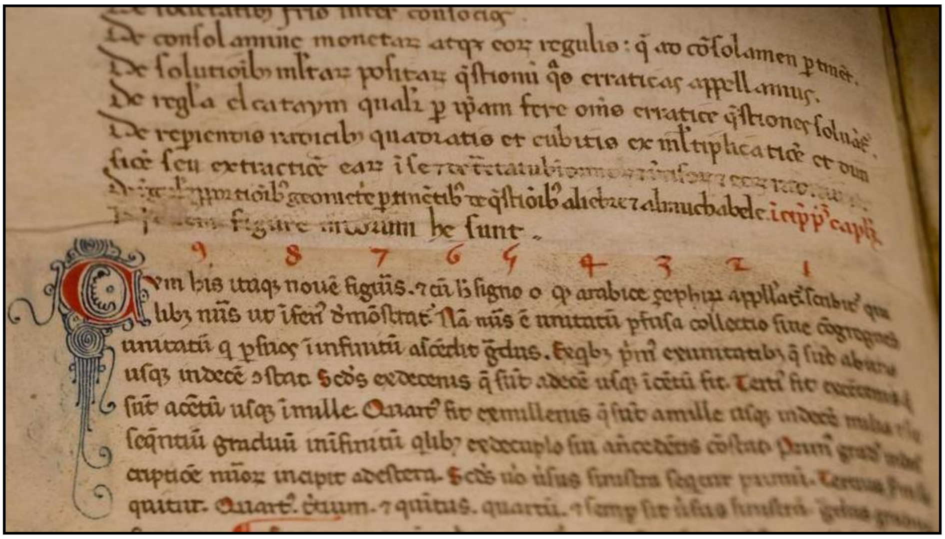
Leonardo de Pisa (ca. 1175 – 1250), mais conhecido hoje por todo o mundo como Fibonacci, nasceu em Pisa, um importante centro comercial, e filho de Bonacio. Pisa assim como outras grandes cidades comerciais italiana mantinham enclaves comerciais em várias partes do mediterrâneo e Bugia era uma delas, localizada no norte da África na atual Argélia. Onde ainda jovem foi instruído em matemática quando seu pai, funcionário público, fora desempenhar uma função alfandegária. Lá se encantou com a “arte das nove figuras indianas”. E mais tarde continuou seus estudos em extensas viagens de negócios ao Egito, à Síria, à Sicília e Provença, tendo contato com cientistas de todo o mundo mediterrâneo. Ele se tornou proficiente nos *Elementos* de Euclides e no método matemático grego de definição, teorema e prova, aprendeu com os árabes o sistema de numeração dos hindus e os seus algoritmos de cálculo.

Tendo percebido as vantagens desse sistema, ele escreve, em latim, sua obra intitulada *Liber abaci* publicada, pela primeira vez, em 1202, com uma segunda versão em 1228, com o objetivo de levar ao povo italiano esse conhecimento. Apesar do conhecimento dos números hindus ter chegado na Europa no século X pela Espanha através dos árabes, não era ainda uma prática de uso comum na época de Fibonacci.

O conteúdo do *Liber abaci* está dividido em 15 capítulos. O capítulo 1 trata da leitura e escrita dos números no sistema indo-arábico; o capítulo 2 é sobre métodos de multiplicação; o capítulo 3, sobre métodos de adição; o capítulo 4, sobre métodos de subtração; o capítulo 5, sobre métodos de divisão; o capítulo 6, sobre métodos de multiplicação de números inteiros por frações; o capítulo 7, sobre métodos de adição, subtração e divisão de frações; o capítulo 8, sobre métodos de aquisição e venda de mercadorias e similares; o capítulo 9, sobre métodos de comércio; o capítulo 10, sobre métodos de regra das companhias; o capítulo 11, sobre métodos envolvendo liga e conversão de; o capítulo 12, sobre solução de diversos problemas. Nesse capítulo encontramos o mais famosos de seus problemas, o problema dos coelhos, que deu origem a conhecida sequência de Fibonacci; o capítulo 13, sobre métodos da falsa posição; o capítulo 14, sobre cálculo de raízes quadradas e cúbicas; o capítulo 15, sobre métodos envolvendo a regra da proporção geométrica e questões de álgebra e almucábala.

Fibonacci inicia o capítulo 1 apresentando os nove símbolos indianos para representar os numerais; sua intenção era introduzir o sistema numérico hindu e suas operações ao povo italiano. O sistema hindu tinha a vantagem de ser usado tanto para o cálculo quanto para registrar o resultado. Ao contrário do sistema romano no qual os cálculos exigiam o uso do ábaco.

Figura 69 – Página do *Liber abaci*



Fonte: https://mobile.twitter.com/fermatslibrary/status/1084091644545257472?lang=ar-x-fm

Após apresentar os nove algarismos indianos, Fibonacci apresenta o símbolo 0, que o chama de zefir assim como os árabes. O zero não existia no sistema romano. Também caracteriza o número como uma soma de unidades, trazendo a ideia de sucessão dos números naturais. Em seguida, ensina o significado dos algarismos, ou seja, quanto cada símbolo vale, o sistema de posição e o uso do zero na representação numérica.

Ele também dá exemplo de grandes números e ensina a separá-los de 3 em 3 para facilitar a leitura.

> Por exemplo, proponho um número de 15 figuras, $\widehat{678}\ \ \widehat{935}\ \ \widehat{784}\ \ \widehat{105}\ 296$; você separa as três primeiras figuras, a saber, 296, acima de cada três você desenha uma virgula na forma de um arco como em o exemplo tomado; e para qualquer virgula você diz: e as três figuras que estão inicialmente separados, você lê como eles estão, e assim você diz

> seiscentos setenta e oito mil milhares de milhares, pois há quatro virgulas, e novecentos e trinta e cinco mil mil mil, como acima são três vírgulas em número e setecentos e oitenta e quatro mil mil, como acima estão duas curvas e 105 mil, pois há uma virgula, e 296 para as três que estão destacadas no início; e se por último permanece uma figura ou dois, você os coloca sob uma última virgula e os lê todos os quatro ou os cinco juntos, e assim você será capaz de ler um número, não importa quantas figuras. (FIBONACCI apud SIGLER, 2003, p.20, tradução nossa)

É interessante observar que ele deixa claro que qualquer número, não importa quantos algarismos ele possua, pode ser escrito apenas com esses símbolos, ou seja, é um sistema infinito. E a falta ainda, na época, das palavras milhão[25], bilhão[26], trilhão etc, para expressar as ordens.

Fibonacci recorda a forma de representação numérica com as mãos e recorre a esse sistema quando diz que um número é mantido nas mãos. Essa forma de representação era muito comum, mas atualmente no nosso algoritmo de multiplicação, por exemplo, esses números também são registrados no papel.

Por fim, ele termina o capítulo apresentando duas tabelas auxiliares, uma de soma e outra de multiplicação. Atualmente, só utilizamos a de multiplicação, a nossa chamada tabuada.

Nos quatro capítulos seguintes, ele ensina os algoritmos para as operações de multiplicação, soma, subtração e divisão. É interessante perceber que no início o zero é apresentado como um símbolo apenas, porém ao longo dos capítulos percebemos que além de um símbolo para o vazio em um sistema posicional, ele também tem o significado de quantidade nula, ou seja, é tratado como um número.

Outra observação interessante a ser feita é a utilização da prova dos noves ou noves fora, nessa prova real vemos além da utilização do critério de divisibilidade por 9 também a utilização do conceito de módulo ou aritmética dos restos. Essa

---

25 Segundo Smith, a palavra “milhão não foi usada antes do século 13 e só apareceu pela primeira vez numa obra impressa em 1478, na aritmética de Treviso.

26 Já o bilhão, que conhecemos como 10^9, foi usado primeiramente como 10^{12} na Inglaterra Quanto ao uso americano, levar um bilhão para significar mil milhões e executando os nomes subseqüentes aos milhares, deve-se dizer que isso se deve em parte à influência francesa após a Guerra Revolucionária, embora nossa aritmética americana nativa mais antiga, o livro Greenwood de 1729, deu o bilhão em 10^9, o trilhão em 10^{12} e assim por diante. Nomes para grandes números eram a moda nos primeiros dias, a conhecida aritmética de Pike (1788), por exemplo, proceder a duodecilhões antes de começar a adição.

prova não é ensinada atualmente, pois não pode determinar se uma operação está correta.

Fibonacci não se detém apenas a ensinar o sistema numérico hindu e seus algoritmos. Segundo Sigler (2003), trata-se de um trabalho que contém grande parte da matemática conhecida do século XIII em aritmética, álgebra e resolução de problemas e os métodos apresentados possuem provas geométricas euclidianas o que torna seu trabalho diferente dos outros manuais de cálculo. Além de tratar situações nos negócios e no comércio, conversão de unidades de dinheiro, peso e conteúdo, métodos de troca, parcerias comerciais e alocação de lucro, liga de dinheiro, investimento de dinheiro, juros simples e compostos, ele também inclui muitos problemas puramente para mostrar o poder e a beleza de sua matemática.

Além do *Liber abaci*, Fibonacci escreveu os livros: em 1220, *Practica geometriae* e, em 1225, *Flos*, *Epistola ad Magistrum Theodorum* e *Liber quadratorum*. Este último, de acordo com Eves, um trabalho original, que estava além da maioria dos intelectuais da época, sobre análise indeterminada que o colocou como um dos matemáticos mais importantes desse campo entre Diofanto e Fermat.

6.2.1 Método de multiplicação descrito no *Liber abaci*

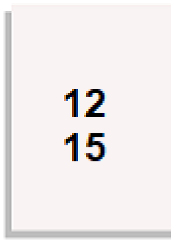
No capítulo 2 do *Liber abaci*, Fibonacci apresenta de forma bastante explicativa um método para realizar a multiplicação. Esse capítulo é dividido em oito partes: A primeira parte apresenta a multiplicação entre dois números com dois algarismos e entre um número de um algarismo por outro com vários algarismos. A segunda, a multiplicação entre dois números com três algarismos. A terceira, a multiplicação entre dois números com quatro algarismos. A quarta, entre números com cinco algarismos. A quinta, entre números com oito algarismos. A sexta, enfatiza o uso da memória para não ter que recorrer à mesa, apenas utilizando as mãos para multiplicação entre números com dois e três algarismos. A sétima, no multiplicação de três algarismos por três de forma semelhante, tudo o que estiver na mão é multiplicado. A oitava, na multiplicação de quaisquer números de outra forma.

Apresentaremos a seguir as multiplicações 12 por 15 e 3456 por 7891 conforme é feito no *Liber Abaci*.

a) Multiplicar 12 por 15

Você deve colocar o número maior abaixo do menor de modo que fiquem alinhados, ou seja, as unidades abaixo das unidades e as dezenas abaixo das dezenas (Figura 70).

Figura 70 – Registro

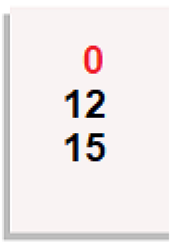


Fonte: O autor, 2021.

Em seguida, multiplique o algarismo da primeira posição do número superior pelo algarismo da primeira posição do número inferior. As unidades são escritas acima na primeira posição e as dezenas devem ser representadas na mão esquerda (veja Figura 5).

Como $2 \times 5 = 10$, então coloque o 0 acima do 2 e represente 1 na mão esquerda, conforme Figura 71.

Figura 71 – 2×5



Fonte: O autor, 2021.

Agora, multiplique o algarismo da segunda posição do número superior pelo algarismo da primeira posição do número inferior e vice-versa. Todos esses resultados são somados à mão com as dezenas guardadas anteriormente. As unidades são colocadas na segunda posição.

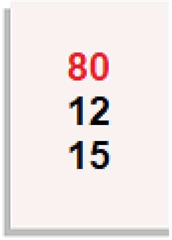
$2 \times 1 = 2$

$1 \times 5 = 5$

$5 + 2 + 1 = 8$

O 8 é escrito na segunda posição, ou seja, na frente do 0, conforme Figura 72.

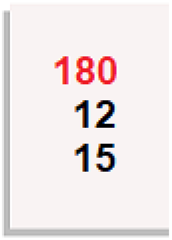
Figura 72 –2×1 e 1×5



Fonte: O autor, 2021.

Por fim, multiplique o último algarismo do número superior pelo último algarismo do número inferior, e o resultado deve ser colocado na terceira posição. Como $1 \times 1 = 1$, coloque o 1 na terceira posição, ou seja, na frente do 8, conforme Figura 73.

Figura 73 – 1×1



Fonte: O autor, 2021.

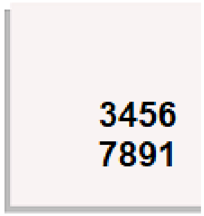
Logo, o resultado da multiplicação de 12 por 15 é 180.

b) Multiplicar 3456 por 7891.

Nesse exemplo, além de ilustrar a referida multiplicação fizemos uma ilustração para indicar as multiplicações a serem realizadas em cada passo para melhor visualização do método usado por Fibonacci.

Coloque o número maior abaixo do menor de modo que fiquem alinhados.

Figura 74 – Registro

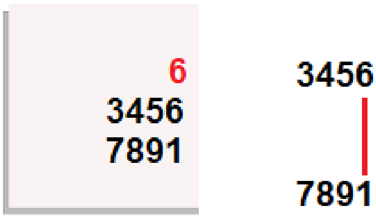


Fonte: O autor, 2021.

Agora, o primeiro algarismo do número superior é multiplicado pelo primeiro do inferior. As unidades são escritas acima na primeira posição (Figura 75).

$(6 \times 1 = 6)$

Figura 75 – Passo 1

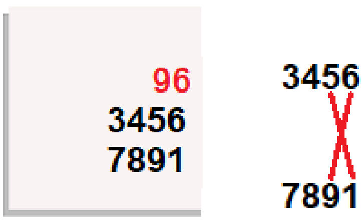


Fonte: O autor, 2021.

Multiplique o primeiro algarismo do número superior pelo segundo do inferior e o primeiro do inferior pelo segundo do superior. As unidades são escritas acima na segunda posição (Figura 76) e as dezenas devem ser representadas na mão esquerda.

$(6 \cdot 9 + 5 \cdot 1 = 59)$

Figura 76 – Passo 2

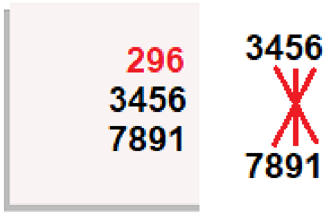


Fonte: O autor, 2021.

Multiplique o primeiro algarismo do número superior pelo terceiro do inferior, e o primeiro do inferior pelo terceiro do superior, e o segundo pelo segundo. Esses três produtos e o número guardado são adicionados. As unidades são escritas acima na terceira posição (Figura 77) e as dezenas devem ser representadas na mão esquerda.

(6 · 8 + 4 · 1 + 5 · 9 = 97 ∴ 97 + 5 = 102)

Figura 77 – Passo 3

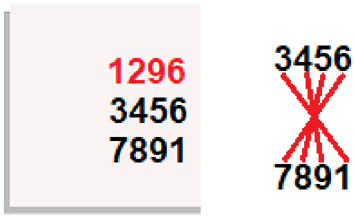


Fonte: O autor, 2021.

Multiplique o primeiro algarismo do número superior pelo quarto do inferior, e o primeiro do inferior pelo quarto do superior, e o segundo do superior pelo terceiro do inferior, e o segundo do inferior pelo terceiro do superior. Todos esses produtos e o número guardado são adicionados. As unidades são escritas acima na quarta posição (Figura 78) e as dezenas devem ser representadas na mão esquerda.

(6 · 7 + 3 · 1 + 5 · 8 + 4 · 9 = 121 ∴ 121 + 10 = 131)

Figura 78 – Passo 4

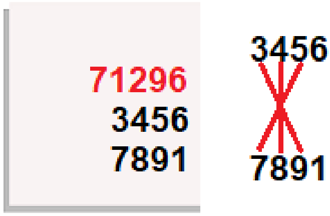


Fonte: O autor, 2021.

Multiplique o segundo algarismo do número superior pelo quarto do inferior, e o segundo do inferior pelo quarto do superior, e o terceiro pelo terceiro. Esses três produtos e o número guardado são adicionados. As unidades são escritas acima na quinta posição (Figura 79) e as dezenas devem ser representadas na mão esquerda.

(3 · 9 + 5 · 7 + 4 · 8 = 94 ∴ 94 + 13 = 107)

Figura 79 – Passo 5

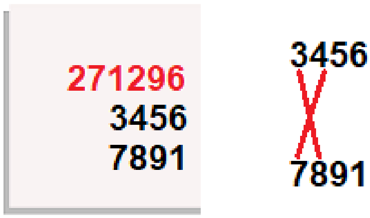


Fonte: O autor, 2021.

Multiplique o terceiro algarismo do número superior pelo quarto do inferior e o terceiro do inferior pelo quarto do superior. Esses dois produtos e o número guardado são adicionados. As unidades são escritas acima na sexta posição (Figura 80) e as dezenas devem ser representadas na mão esquerda.

$(3 \cdot 8 + 4 \cdot 7 = 52 \therefore\ 52 + 10 = 62)$

Figura 80 – Passo 6

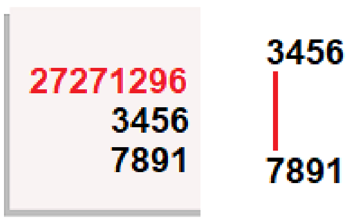


Fonte: O autor, 2021.

Por fim, multiplique o quarto algarismo do número superior pelo quarto do inferior. Esses dois produtos e o número guardado são adicionados. As unidades são escritas acima na sétima posição e as dezenas na oitava posição (Figura 81).

$(3 \cdot 7 = 21 \therefore\ 21 + 6 = 27)$

Figura 81 – Resultado Final



Fonte: O autor, 2021.

Assim, o resultado da multiplicação de 3456 por 7891 é 27 271 296.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O papel da História da Matemática como um recurso pedagógico vai além do seu papel tradicional de motivar os alunos, e proporcionar-lhes fatos históricos que elucidem o caráter cultural da Matemática. Pois, a história da Matemática pode ser utilizada como um agente da formação cultural geral da sociedade se revelando um produto cultural dentro do contexto de uma cultura geral.

A matemática como um produto cultural não pode ser uma ciência que nasceu com o homem, fruto de “gênios”. Logo, ela tem um início no espaço e no tempo. No caso aqui estudado, os sistemas de numeração, esse início é difuso e lento, não sendo possível determinar o início exato de cada descoberta. Os sistemas de numeração desenvolvidos ao longo da história são frutos de culturas diferentes, pois se deram em ambientes diferentes. O que temos são elementos em material histórico, que nos dão um certo entendimento sobre os elementos disponíveis e a necessidade daquele povo que levaram a cada uma dessas concepções. A percepção de que existe uma grande diversidade de sujeitos e histórias estimula o pensamento crítico, a autonomia e a formação para a cidadania.

Dada sua difusão quase universal, os algarismos indo-arábicos podem ser facilmente considerados óbvios. No entanto, vimos que tanto sua construção quanto sua adoção foi um processo lento e gradativo. Pois, mesmo após sua disseminação pela Europa Ocidental os matemáticos ou astrônomos escreviam a parte fracionária de um número em notação sexagesimal.

Apesar de existir no mercado uma vasta literatura sobre História da Matemática, esse trabalho apresenta uma compilação a partir da utilização de uma ampla referência bibliográfica sobre, principalmente, o sistema numérico indo-arábico. Apresentando desde suas inscrições mais antigas até a concepção do sistema atual. Além, da abordagem do conceito posicional no cerne da língua sânscrita, relacionando a numeração intimamente com um povo e sua cultura.

Esse trabalho apresenta evidências recentes para reconstruir a transição de praticantes europeus de numeração romana para indo-arábica. Uma vez que sua aritmética forneceu uma base fundamental para as inovações financeiras e organizacionais desenvolvidas pela primeira vez com a "revolução comercial" do século 13. Essas evidências sugerem que a disseminação da aritmética prática se correlacionou com a adoção de números hindu-árabes na documentação comercial e foi o motor da adoção definitiva na Europa de o sistema numérico posicional.

Paralelamente, houve uma disseminação das escolas de ábaco na Itália. Essa forma como a educação matemática se estruturou na Itália a partir do século XIII é significativa e paradigmática para evidenciar a influência que a sociedade pode ter na educação. As necessidades do mercado de trabalho e os conhecimentos básicos necessários ao cidadão para exercer as operações indispensáveis no cotidiano social e econômico traduzem a educação matemática como um fenômeno social. Portanto, a forma como a educação matemática é organizada muda de acordo com as modificações do meio social e do saber fazer.

Concluímos que o ábaco oferece a possibilidade de desenvolver as quatro operações por meio de procedimento padrão e sua base é uma ideia posicional do número porque cada coluna pode representar uma potência do número assumido como base do sistema, O ábaco romano faz uso de um sistema de base dez. No entanto, a etapa da representação de um número em um ábaco em uma forma posicional para a possibilidade de escrever um número em uma forma posicional não é nada trivial, porque esta etapa implica na compreensão total do papel do algarismo zero dentro do sistema posicional. Além disso, havia um sistema numérico, o romano, nada posicional. ou seja, parecem dois objetos distintos sem conexão.

Porém, o método apresentado por Fibonacci é muito semelhante ao que era feito no ábaco romano. Em um primeiro momento, nos parece trivial o que Fibonacci apresenta porque estamos condicionados a pensar a partir do momento histórico que estamos inseridos, o hoje. No entanto, quando nos imaginamos naquele momento histórico podemos perceber a grandiosidade do sistema indo-arábico, ele uniu o procedimento realizado no ábaco com sua representação. Apresentando uma possibilidade que nem mesmo Arquimedes conseguiu enxergar!

Vimos que a história da matemática é uma ferramenta para melhorar a compreensão da matemática pelos alunos, ampliar seus horizontes culturais e mostrar-lhes que a matemática foi construída, em vários grupos culturais, ao longo dos séculos, não nasceu pronta. Entendemos que a abordagem histórica é um elemento a ser utilizado na certeza de que a educação além de promover a construção do conhecimento é um meio de criação de uma sociedade mais ética, justa e humana se fazendo necessária hoje por conta do crescimento do obscurantismo e intolerância ao outro.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, E. R. M. *Propriedades dos sistemas de numeração: uma sequência didática em uma abordagem histórica.* 50 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2012.

ANDRADE, F. P. *A criação dos números e sua evolução Matemática: de escrava a rainha das ciências.* 50 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.

ARAÚJO, C. S. *A beleza dos números e de suas propriedades: uma abordagem histórica para o ensino médio.* 97 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Universidade Estadual do Maranhão, São Luís, 2018.

BALL, W. W. R. *Mediaeval Mathematics*. In: _____. *A history of the study of mathematics at Cambridge.* Cambridge: Cambridge University Press, 1889. p. 1-11.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U.C. *História da matemática.* Tradução de Helena Castro. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular* (**BNCC**). Educação é a Base. Brasília: MEC/CONSED/UNDIME, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/a-base>. Acesso em: 15 ago. 2020.

______. *Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs)*. Matemática. Ensino Fundamental. Terceiro e quarto ciclos. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRITTON, J.P.; PROUST C.; SHNIDER S. *Plimpton 322: a review and a different perspective.* In: Archive for History of Exact Sciences. Publicação on line, 2011. p. 519-566. DOI: 10.1007/s00407-011-0083-4.

COSTA, R. A. *A passagem da numeração romana para a indo-arábica no Ocidente em livros didáticos de Matemática.* 107 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Tecnológica, Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2009.

COTRIM, G. *História Global.* 3 ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

DAMBROS, A. A. *A História da Matemática e o professor das séries iniciais: a importância dos estudos históricos no trabalho com o sistema de numeração decimal.* 271 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2001.

D'AMBRÓSIO, U. A história da matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na Educação Matemática. In: BICUDO, M. A. V.(org.). Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999. p. 97-115.

______. *A Interface Entre História E Matemática: Uma Visão Histórico-Pedagógica.* [S.l.: s.n., s.d.]. Disponível em: <https://ubiratandambrosio.blogspot.com/> Acesso em: 15 abr. 2020.

DANNA, R. *Figuring out: The spread of hindu-arabic numerals in the european tradition of practical mathematics (13th–16th centuries)*. Nuncius, 2021, DOI: 10.1163/18253911-bja10004.

DESPLANCQUES, S. Egito Antigo. Tradução de Paulo Neves. Porto Alegre: L&PM, 2013.

EVES, H. *Introdução à história da matemática.* Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

FERREIRA, M. K. L. Madikauku : os dez dedos das mãos: Matemática e povos indígenas no Brasil. Brasília: MEC, 1998.

FERREIRA, O. L. Mesopotâmia: O amanhecer da civilização. Coleção Desafios. 3. ed. São Paulo: Moderna, 1993.

FOSSA, J. Matemática, História e Compreensão. Revista Cocar. v.2 n.4. 2008. ISSN: 19819269, 2008.

FRIED, M. N. *History of Mathematics in Mathematics In:* M.R. Matthews (Ed.). *International Handbook of Research in History, Philosophy and Science Teaching*. Springer, 2014. p. 669-703.

GREEN, D. *Diferenças entre termos numéricos em algumas línguas indígenas do brasil.* [S.l.: s.n., 1997]. Disponível em: <https://silo.tips/download/diferenas-entre-termos-numericos-em-algumas-linguas-indigenas-do-brasil-1-diana> Acesso em 24 ago. 2021.

______. *Palikúr Numerals.* [S.l.: s.n., 2001]. Disponível em: <https://www.silbrasil.org.br/resources/archives/2851> Acesso em 24 ago. 2021.

HEIEDE, T. *History of Mathematics and the Teacher. In:* R. Calinger (Ed.). *Vita Mathematica: Historical Research and Integration with teaching*. Washington: Mathematical Association of America, 1996. p. 231-243.

HODGKIN, L. *A History of Mathematics: From Mesopotamia to Modernity.* New York: Oxford University Press, 2005. p.1-13.

HØYRUP, J. *In measure, number, and weight: studies in mathematics and culture*. Alabany: State University of New York Press, 1994. p. 68-70.

______. *Jacopo da Firenze's Tractatus Algorismi and Early Italian Abbacus Culture*. Basel: Birkhäuser Verlag AG, 2007. p. 27-44.

IFRAH, G. *História universal dos algarismos: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo.* Tomos 1 e 2. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997.

KARPINSKI, L. C.; SMITH, D. E. *The Hindu-Arabic Numerals*. Boston: The Athenæum Press, 1911.

KATZ, V. J. *A history of mathematics: an Introduction*. 3. ed. Boston: Pearson, 2009.

LEITE, C. G. *A Construção Histórica dos Sistemas de Numeração como recurso didático para o Ensino Fundamental I*. 52 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal do Ceará, Juazeiro do Norte, 2014.

LEITE, E. *Da Civilização do Indo ao Império Maurya: Novas Abordagens no Estudo da Índia Antiga*. Rio de Janeiro: Phoinix, v.5, n.1, 1999. p. 139-154.

MARTIN, T. R. *Roma Antiga: de Rômulo a Justiniano*. Tradução Iuri Abreu. Porto Alegre: L&PM Editores. 2014.

MATTESSICH, R. *Archaeology of accounting and Schmandt-Besserat's contibution*. In: Accounting, Business & Financial History , v. 4, ed. 1, 1994. p. 5-28. DOI: 10.1080 / 09585209400000033

MATTHEWS, J.; CORNELL, T. *A civilização romana*. Coleção Grandes civilizações. Tradução Carlos Nougué, Michel Teixeira, Maria Julia Braga. Barcelona: Editora Folio, 2008.

MATTHEWS, M. R. *História, Filosofia e ensino de Ciências: a tendência atual de reaproximação*. Tradução de Claudia Mesquita de Andrade. Florianópolis: Caderno Catarinense de Ensino de Física, v. 12, n. 3, 1995. p. 164-214.

MELO, E. C. S. G. *Um pequeno retrato acerca do aprendizado de nosso sistema de numeração decimal.* 106 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, Universidade Federal Rura de Pernambuco, Recife, 2017.

MIGUEL, A. *Três estudos sobre História e Educação Matemática.* 274 p. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1993.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. *História na Educação Matemática*. 1 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

MORAES, N. S. *A origem dos algarismos arábicos.* [S.l.: s.n., 2014]. Disponível em: < https://almanaquenilomoraes.blogspot.com/2014/10/a-origem-dos-algarismos-arabicos.html?m=0> Acesso em: 12 jun. 2020.

NAVARRO, A. G. *A civilização maia: contextualização historiográfica e arqueológica*. História, v.27, n.1, p. 347-378, 2008. São Paulo, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho São Paulo, Brasil

PINSKY, J. As primeira civilizações. 25. ed. São Paulo: Contexto, 2011.

POMEROY, S. B. et al. *La antigua Grecia: historia política, social y cultural*. Barcelona: Crítica, 2011.

RODRIGUES, A. E. A. *Sistemas de numeração: evolução histórica, fundamentos e sugestões para o ensino.* 166 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal do Oeste do Pará, Santarém, 2013.

ROQUE, T. *História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.* Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

RUBIO, A. M. *Breve historia de los sumérios.* Madri: Nowtilus, 2012.

SALVIATO, J. L. *Sistema de numeração binário: dos computadores à sala de aula*. 57p. Dissertação (Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2018.

SANTILLÁN, M. L. *Os antigos códices maias, um tesouro astronômico e religioso.* Disponível em <http://ciencia.unam.mx/leer/794/los-antiguos-codices-mayas-un-tesoro-astronomico-y-religioso> Acesso em 15/7/21.

SANTOS, C. *Os números primos de Ishango*. Revista brasileira multidisciplinar – v. 22, n. 2, 2019.

SCHUBRING, G. *From pebbles to digital signs – the joint origin of signs for numbers and for scripture, their intercultural standardization and their renewed conjunction in the digital era.* In: Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática, 6., 2013, São Carlos. Anais... São Carlos, UFSCar, 2013.

SCHMANDT-BESSERAT, D. *The Evolution of Writing In:* SMELSER, N. J.; BALTES, P. B. (Ed.). International Encyclopedia of Social & Behavioral Sciences. [S.l.]: Pergamon, 2001. p. 16619-16625.

______. *From accounting to writing*. [S.l.: s.n., 20--]. Disponível em: <https://sites.utexas.edu/dsb/tokens/from-accounting-to-writing/> Acesso em 23 set. 2020.

SCHMANDT-BESSERAT, D. *The invention of tokens. In:* CRISÀ, A.; MAIRI GKIKAKI M.; ROWAN C. (Ed.). TOKENS, Culture, Connections, Communities. n.57. London: Royal Numismatic Society, 2019.

______ ; Moghimi N. *Making tokens talk.* In: JASINK, A. M., Weingarten J. E FERRARA, S. (Ed.). *Non-scribal Communication Media in the Bronze Age Aegean and Surrounding Areas: The semantics of a-literate and proto-literate media.* Firenze: Firenze University Press, 2017. p. 175-183.

______. *Tokens: their Significance for the Origin of Counting and Writing.* [S.l.: s.n., 20--]. Disponível em: <https://sites.utexas.edu/dsb/tokens/tokens/> Acesso em: 23 set. 2020.

SIGLER, L. *Fibonacci's Liber Abaci: a translation into modern English of Leonardo Pisano's Book of calculation*. Tradução: Laurence Sigler. New York: Springer, 2003.

SILVA, R.G. *Sistemas de Numeração: Das Talhas Numéricas aos Primórdios da Computação Artificial.* 147 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2016.

SMITH, D. E. *History of Mathematics*. v.2. Nova Yorque: Dover Publications, 1958

______; GINSBURG, J. *Numbers and Numerals.* Washington: National Council of Teachers of Mathematics, 1937.

STEWART, I. *Em busca do infinito.* Rio de Janeiro: Zahar, 2014.

TAVARES, A. C. *Uma abordagem sobre sistemas de numeração*. 40f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2014.

THIRÉ, C.; MELO e SOUZA. *Matemática.* 1º ano. 5. ed. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1934.

VERDAN S., *Systèmes numéraux en Grèce ancienne: description et mise en perspective historique*. CultureMath, 2007.

WOODS, C. *Early Writing and Administrative Practice in the Ancient Near East:* New Technology and the Study of Clay Envelopes from Choga Mish. The Oriental Institute: News and Notes, v. 215, p. 3-8, 2012.

APÊNDICE – Produto Educacional

Caderno de Atividades com propostas de atividades para a exploração das características dos sistemas numéricos e comparação do método de multiplicação entre o ábaco romano e de Fibonacci.

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

Caderno de Atividades:

Um retrato histórico da adoção do sistema numérico indo-arábico e o papel do *Liber abaci*

Raquel Gomes Rosa de Mendonça

MENDONÇA, R. G. **Caderno de Atividades:** Um retrato histórico da adoção do sistema numérico indo-arábico pela Europa Ocidental e o papel do *Liber abaci*. UERJ: Rio de Janeiro. 2021
(Orientadores Dr. João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho e Dra. Patricia Nunes da Sillva)

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Há milhares de anos, a humanidade iniciou o processo de registro, criando métodos para comparar e relacionar objetos de naturezas distintas, ou seja, relacionando quantidade de elementos entre dois grupos. Surge então a mais antiga forma de contagem através da relação um a um, ou seja, da relação biunívoca. Na Antiguidade, a necessidade da escrita conduziu várias civilizações dentro da sua cultura elaborarem seus próprios sistemas de numeração.

Entender como se deu a passagem do sistema de numeração romano para o indo-arábico consiste em compreender uma das maiores e mais influentes mudanças do mundo medieval que forneceu um novo e mais prático sistema para efetuar operações, principalmente de multiplicação e divisão, impactando a área econômica e a científica.

Considerando esses aspectos e com o objetivo de auxiliar professores de Matemática, apresentamos esse caderno de atividades. A princípio seria apenas a atividade "O ábaco romano e o *Liber abaci*" que tem como objetivo fazer uma abordagem histórica dos indo-arábicos na Europa Ocidental e sua relação com o livro de Fibonacci. No entanto, durante as pesquisas feitas no processo de construção do trabalho foi pensado nas demais atividades com o intuito de explorar a riqueza da temática sistemas de numeração.

1 – Lendo grandes números: Até quanto você sabe contar?

O objetivo dessa atividade é mostrar que iniciamos o aprendizado dos números atrelados aos seus nomes e que a numeração hindu se inicia também na dependência da língua. Contudo a característica posicional da numeração indo-arábica extrapola esse sentido concreto de enxergar os números, dando ao número seu verdadeiro significado abstrato.

1.1 – Roteiro

1) Apresentar a Introdução e completar com manchetes atuais de jornais nos quais se encontram as palavras milhão, bilhão, trilhão etc.
2) Apresentar os exercícios 1 e 2. Deixar os alunos pensarem durante 15 minutos.
3) Sugerir a pesquisa desses nomes como atividade para casa.
4) Na aula seguinte, munidos da pesquisa feita, o professor deve corrigir o exercício e fazer um debate acerca do material coletado na pesquisa. Por exemplo, qual o nome do maior número encontrado.
5) Apresentar o exercícios 3.

Tempo estimado: 2 aulas de 50 minutos cada em dias diferentes.

1.2 – Atividade

Diferentemente das outras civilizações aqui estudadas, a civilização indiana tinha um fascínio pelos grandes números, chegando a conceber o infinito matemático. Como pode ser visto nesse trecho da obra *Lalitavistara Sūtra* dado por Ifrah(1997):

> "E Vishvamitra diz: É o bastante [agora],
> Passemos aos Números. Repete depois de mim tua numeração

Até que atinjas o *lakh*
Um, dois, três, quatro, até dez,
Em seguida pelas dezenas, até as centenas e milhares.
Depois disso, a criança nomeou os números,
[Depois] os decênios e os séculos, sem interrupção.
[E uma vez] o *lakh* redondo atingido, [mas] murmurado em silêncio,
Vieram então o *koti*, o *nahut*, o *ninnahut*, o *khamba*,
O *vishkamba*, o *abab*, o *attata*,
Até o *kumud*, o *pundarika* [e dirigir-se]
Para o *paduma*, que permite contar
Até o último grão de areia mais fino
Empilhado na altura das montanhas.”

Os valores numéricos mencionados são: *lakh* equivale a 10^5, *koti* a 10^7, *nahut* a 10^9 e assim sucessivamente.

Na obra *Liber abaci*, Fibonacci usa “mil milhares de milhares” para 10^{12} e “mil mil” para 10^6.

Porém, as pessoas de maneira geral não tinham interesse ou necessidade em lidar com números gigantescos em sua vida cotidiana. Para se ter uma ideia, a palavra milhão, por exemplo, não foi usada antes do século XIII, aparecendo pela primeira vez em uma obra impressa na aritmética de Treviso (1478).

Hoje é comum vermos em jornais, revistas as palavras milhão, bilhão, trilhão. E depois disso? Até quanto você sabe contar?

1) Escreva como se lê os números abaixo.

a) 1 000 000 000 = 109

b) 1 000 000 000 000 = 1012

c) 1 000 000 000 000 000 = 1015

d) 1018

e) 1060

f) 10100

g) 10120

h) 1010000

2) Anunciado no início de 2019, o maior número primo encontrado possui quase 25 milhões de dígitos (24 862 048). Descoberto através do projeto de pesquisa mundial Great Internet Mersenne Prime Search (GIMPS), esse número primo pode ser expresso na forma 282589933 – 1. Há palavras para expressar um número como esse?

3) Edward Kasner, com o intuito de chamar a atenção para os grandes números resolveu dar nome a um deles, o 10^{100}. Seu sobrinho Milton Sirotta, de 9 anos, o nomeou como googol já que a única condição era que o nome tivesse muitas letras “o”. Ele também batizou o número 10^{googol} como goolplex. Atualmente, estima-se que o número de átomos do universo observável seja aproximadamente 10^{80}. Esses números podem parecer muito grandes, mas estão tão distantes do infinito quanto o número 1 está.
   Qual a sua opinião sobre a afirmação: "Os nomes servem simplesmente para que possamos nos referir de forma concisa ao que representam"?

2 – O Códice de Dresden e a numeração maia

O objetivo dessa atividade é mostrar a necessidade de um símbolo para o zero quando se trata de um sistema de numeração posicional e que essa descoberta não é uma exclusividade do sistema indo-arábico.

Nessa atividade o professor deve discutir quantos símbolos são necessários e em um sistema numérico posicional. E, ao final, construir com os alunos seu próprio sistema a partir de uma base numérica definida.

É importante o professor discutir também a aparência desses símbolos. Os símbolos maias não são independentes entre si diferentemente dos indo-arábicos; o professor deve discutir no que isso implica. Deve citar também a resistência ao uso dos indo-arábicos por ser fácil de falsificar e apresentar o sistema numérico grego que faz uso das letras do alfabeto para representação.

2.1 – Roteiro

1) Apresentar a Introdução e em seguida uma projeção do Códice que pode ser obtido através do endereço: https://dl.wdl.org/11621/service/11621.pdf
2) Apresentar o sistema de numeração maia e seu funcionamento.
3) Propor o exercício 1.
4) Propor o exercício 2 em grupo de 4 a 6 alunos. O professor pode apresentar como exemplos de símbolos usados ao longo da história da humanidade as forma egípcias e romanas de numeração. O objetivo dessa atividade é a criação, então os alunos devem se sentir à vontade nesse processo.
5) Propor o exercício 3.

Tempo estimado: 4 aulas de 50 minutos cada.

2.2 – Atividade

O Códice de Dresden é um dos quatro manuscritos maias preservados. Foi adquirido em 1739 pela biblioteca da corte de Dresden e em 1853 foi identificado como um manuscrito maia. Acredita-se que suas 39 folhas foram escritas em ambos os lados entre os séculos XIII e XIV E.C., nas terras baixas do norte da Península de Yucatan, no México. O seu conteúdo é composto por uma compilação de almanaques adivinhatórios, tabelas astronômicas, episódios cosmológicos, registros de contagem de tempo, com o objetivo de prognosticar o futuro dentro da estrutura de narrativa e gênese da sociedade maia que o produziu. Possui vaticínios para diversos aspectos da vida cotidiana, ciclos de Vênus, da Lua, eclipses e registro de k'atuns (períodos de

20 anos de 360 dias cada), para as chuvas, secas, ritos de novos períodos, cerimônias agrícolas, e informações sobre a vida social e cerimonial dos maias iucatecos. O manuscrito foi danificado após a destruição da cidade de Dresden

durante os bombardeios sofridos na Segunda Guerra Mundial. (Daniel Grecco Pacheco)

1) Identificar os números na imagem abaixo e convertê-los para a numeração indo-arábica.

Fonte: https://dl.wdl.org/11621/service/11621.pdf

2) E se o nosso sistema fosse base 6? Então, agora é hora de criar um sistema numérico de base 6 com as mesmas características que o indo-arábico possui.

3) Escrever os 50 primeiros números de acordo com o sistema de numeração criado no item anterior.

3 – Cálculo da $\sqrt{2}$ pelos babilônios

O objetivo dessa atividade é interpretar o sistema sexagesimal babilônio e transcrever os valores para o sistema indo-arábico por meio do cálculo de $\sqrt{2}$.

Como esse trabalho foi pensado para alunos do 6º ano fundamental, essa atividade se limita a verificar o resultado para $\sqrt{2}$. Porém, o professor pode explorar o conteúdo desse tablete para trabalhar a relação $d = l\sqrt{2}$ e discutir como eles chegaram a esse resultado.

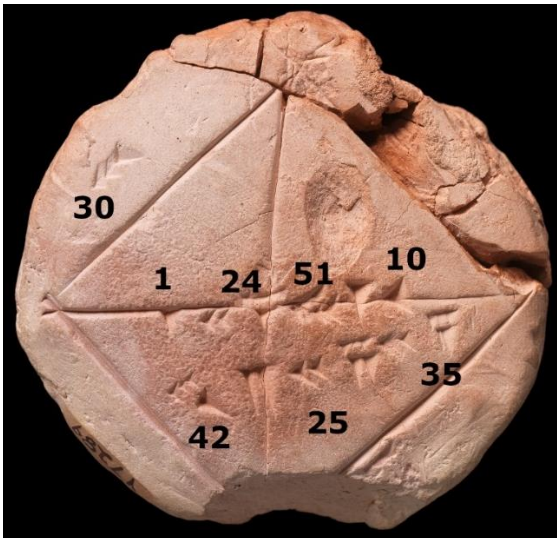
Nessa atividade, o professor deve discutir o papel da vírgula quando escrevemos números na forma decimal e que a interpretação dos valores (parte inteira e parte fracionária) depende do contexto do problema e, na época, a falta desses separadores não era um problema. Chamar a atenção para uma dificuldade que percebemos nesse sistema relacionado à sua notação. Como as unidades variam de 1 a 59 dentro de cada ordem isso gera várias ambiguidades.

E importante o professor discutir também a aparência desses símbolos. Os símbolos maias não são independentes entre si diferentemente dos indo-arábicos e no que isso implica. Deve citar também a resistência ao uso dos indo-arábicos por ser fácil de falsificar e apresentar o sistema numérico grego que faz uso das letras do alfabeto para representação.

Nesse momento da história o cálculo de raiz quadrada era feito a partir de uma interpretação geométrica e os algoritmos que desenvolveram para resolver este problema se baseavam em raciocínios geométricos. Mais recentemente, o problema foi atacado do ponto de vista algébrico-analítico, de achar as raízes de uma equação ou, equivalentemente, os zeros de uma função. Isso permitiu o desenvolvimento de algoritmos muito mais eficientes, que permitem o cálculo de raízes quadradas rapidamente, com grande precisão.

3.1 – Roteiro

1) Apresentar a imagem do tablete YBC 7289.
2) Apresentar o sistema de numeração babilônio e seu funcionamento.
3) Propor a atividade.
4) Abaixo temos a transcrição dos números e uma explicação desses valores para que o professor que desejar ir além da atividade proposta.



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/YBC_7289

Na parte superior esquerda da plaqueta, observamos o seguinte glifo:
Que na notação matemática babilônica corresponde a 30 e indica o tamanho do lado do quadrado.

E na diagonal horizontal, temos dois conjuntos de glifos, sendo o primeiro: corresponde à sequência numérica: 1, 24, 51, 10. E o segundo conjunto corresponde à sequência numérica: 42, 25, 35. Já vimos em capítulos anteriores que a primeira sequência numérica equivale a frações, cuja representação moderna é a que se segue:

$$1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60 \times 60} + \frac{10}{60 \times 60 \times 60} = \frac{305470}{216000} \approx 1{,}414212963$$

Utilizando uma planilha eletrônica, como, por exemplo, o Excel, podemos calcular facilmente $\sqrt{2}$ com 14 decimais corretas: 1,41421356237310. Vemos assim que esta proximacão dos babilônios é correta até a quinta casa decimal.

Outras relações que podemos obter dos valores registrados no tablete são:

- Este número, multiplicado pelo lado do quadrado (que vale 30), fornece como resultado: $42{,}4263\overline{88888}$. Que corresponde ao tamanho da diagonal do quadrado.
- A segunda sequência numérica, que também equivale a frações, se expressa da seguinte forma na notação matemática moderna:

$$\frac{42}{60}+\frac{25}{60\times 60}+\frac{35}{60\times 60\times 60}=\frac{152735}{216000}\approx 0{,}707106481$$

Em notação decimal, essa soma de frações, ou a fração resultante dessa soma, corresponde ao número irracional: $0{,}707106\overline{481}$.

Estes números guardam também uma relação entre si; observe:

$$1{,}414212963\approx \frac{1}{0{,}707106481}$$

Tempo estimado: 4 aulas de 50 minutos cada.

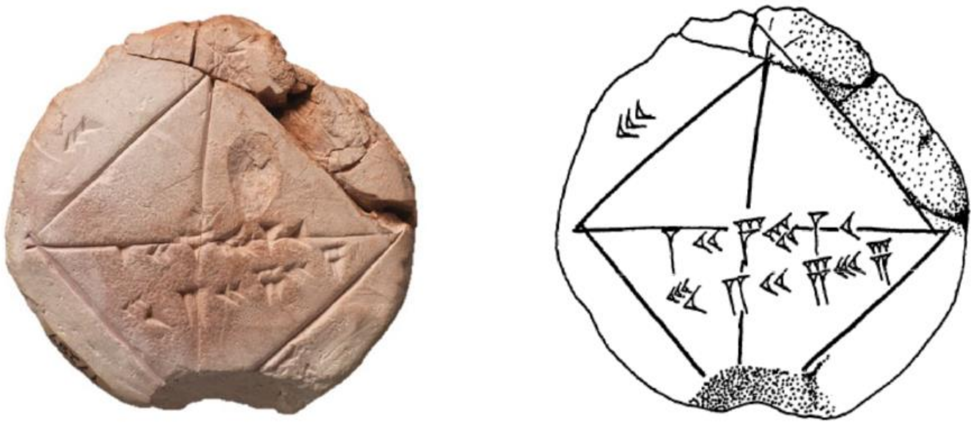
3.2 – Atividade

Há indícios de que além das quatro operações básicas (soma, subtração, multiplicação e divisão) os babilônios também calculavam raiz quadrada.

O tablete YBC 7289, datado de aproximadamente entre 1800 e 1600 a.E.C. é uma das tábuas de argila existentes mais fascinantes porque contém não apenas uma ilustração construída de um quadrado geométrico com diagonais que se cruzam, mas também, em seu texto, uma estimativa de $\sqrt{2}$.

Não há nenhuma indicação de os babilônios classificassem os números entre inteiros, racionais ou irracionais.

O valor é lido a partir da inscrição horizontal superior e demonstra a maior precisão computacional conhecida obtida em qualquer lugar do mundo antigo. Acredita-se que o autor do tablete copiou os resultados de uma tabela de valores existente e não os calculou ele mesmo.



Fonte: https://cienciadegaragem.blogspot.com/2017/02/as-origens-da-raiz-quadrada.html

1) Identificar os números na imagem abaixo e convertê-los para a numeração indo-arábica.

2) Converter os números identificados no item anterior para a numeração indo-arábica.

3) Verificar a precisão do cálculo de $\sqrt{2}$ pelos babilônios. Faça o cálculo de $\sqrt{2}$ utilizando uma calculadora e compare com o valor dos babilônios.

4 – Multiplicação egípcia

O algoritmo que usamos foi concebido para um sistema de numeração posicional. Porém, os egípcios possuíam um sistema de numeração não-posicional. Então, essa atividade tem como objetivo apresentar aos alunos como os egípcios realizavam a multiplicação e fazer com que eles percebam que o algoritmo que usamos não serve para o sistema egípcio. E que diferente dos romanos, os egípcios não usavam um ábaco.

O método de multiplicação egípcio se fundamenta sobre o resultado que todo número natural pode ser escrito como soma de potências de 2. Ou seja, se $n \in \mathrm{N}$, então existe k, número natural tal que,

$$n = \sum_{0}^{k} a_k 2^k = a_0 2^0 + a_1 2^1 + \cdots + a_k 2^k$$

Isso mostra que a multiplicação egípcia não só se relaciona com o método de multiplicação dos camponeses russos como também está altamente relacionada aos sistemas binários.

4.1 – Roteiro

1) Apresentar o sistema de numeração egípcio e seu funcionamento.
2) Propor a atividade.

Tempo estimado: 4 aulas de 50 minutos cada.

4.2 – Atividade

A civilização egípcia tinha como principal operação a soma e dela derivavam as outras operações inclusive a multiplicação que era realizada através da duplicação sucessiva.

1) Multiplique 12 por 6.

Este produto é efetuado formando duas colunas, na primeira linha à esquerda coloca-se o número 1 e à direita, o número 12.

1	**12**

Cada linha da tabela é preenchida com o dobro dos valores da linha anterior. Os valores da linha da esquerda não necessitam ultrapassar 6, devendo ser o valor que mais se aproxima.

1	**12**
2	**24**
4	**48**

Após, esse processo, os escribas marcavam com um símbolo, “\”, os números da coluna da esquerda que somados resultam 6.

1	12
\2	24
\4	48

Nesse caso, a resposta é $24 + 48 = 72$

a) Multiplique 8 por 5.
b) Multiplique 17 por 11.
c) Multiplique 35 por 17.

2) Refaça as multiplicações acima usando os símbolos egípcios.

5 – Sistema de numeração hexadecimal

O objetivo dessa atividade é mostrar pro aluno que apesar de lidarmos com um sistema decimal no nosso dia-a-dia, outros sistemas são mais eficientes em determinadas áreas. Aqui exemplificaremos com uma aplicação na computação.

Uma estranheza que pode causar com esse sistema é o uso de letras para representar números. Nesse momento, o aluno deve entender que um sistema de numeração é um conjunto de símbolos sequenciais que representam uma quantidade e que a forma como iremos representá-las é o que menos importa.

5.1 – Roteiro

1) Apresentar o sistemas de numeração binário e como convertemos um número decimal em binário vice-versa.
2) Apresentar a forma de escrita
$$N = a_k b^{k-1} + a_{k-1} b^{k-2} + a_{k-2} b^{k-3} + \cdots + a_4 b^2 + a_3 b^1 + a_1$$
Onde b é a base desse sistema.
3) Propor a atividade.

Tempo estimado: 6 aulas de 50 minutos cada.

5.2 – Atividade

Os computadores usam uma linguagem binária para representar números, símbolos, caracteres alfabéticos e outros tipos de informações. Os seus dígitos são 0 e 1 e um dígito binário é denominado *bit*.

O sistema de numeração hexadecimal cuja base é 16 é utilizado na computação para representar números binários de forma mais compacta, facilitando a leitura e a escrita dos mesmos. A maioria dos sistemas digitais processa dados binários em grupos que são múltiplos de quatro bits, tornando o número hexadecimal muito conveniente porque cada dígito hexadecimal representa um número binário de 4 bits.

O sistema de numeração hexadecimal é constituído de dez dígitos numéricos e seis caracteres alfabéticos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F.

A tabela abaixo mostra a representação na forma decimal, binária e hexadecimal.

DECIMAL	BINÁRIO	HEXADECIMAL
0	0000	0
1	0001	1
2	0010	2
3	0011	3
4	0100	4
5	0101	5
6	0110	6
7	0111	7
8	1000	8
9	1001	9
10	1010	A
11	1011	B
12	1100	C
13	1101	D

14	1110	E
15	1111	F

1) Qual é o maior número hexadecimal de 3 dígitos?

2) Como contar em hexadecimal após atingir a contagem F? Escreva os 100 primeiros números hexadecimais.

Obs.: Nessa atividade vai surgir a notação, por exemplo, 10 com significados diferentes na base decimal e na base hexadecimal. Para evitar confusões, o professor deve inserir uma notação que os diferencie. Aqui usaremos o subscrito 16 para designar os números hexadecimais.

3) Transformação de binário em hexadecimal.

A transformação de um número binário em hexadecimal é bem simples. Como já foi dito cada dígito hexadecimal representa um número binário de 4 bits. Então, basta separar o número binário em grupo de 4 bits, da direita para a esquerda, e substituir cada grupo pelo seu símbolo hexadecimal equivalente conforme a tabela dada.

Exemplo:

$$\underbrace{1000}_{8}\underbrace{1111}_{F}\underbrace{0111}_{7}\underbrace{1001}_{9}\underbrace{1100}_{C}$$

Transforme os seguintes números binários em hexadecimal:

a) 1100101001010111

b) 111111000101101001

Obs.: Para transformar hexadecimal em binário basta fazer esse processo no caminho inverso, ou seja, basta substituir cada dígito do hexadecimal pelo seu binário equivalente.

4) Transformação de hexadecimal em decimal

No item 2 vimos que o maio número hexadecimal de 3 dígitos é FFF_{16} que equivale ao decimal 255.

Como transformar hexadecimal em decimal? Para isso devemos lembrar o significado da característica posicional do nosso sistema de numeração. O professor deve fazer uma revisão de valor relativo de um número. E a partir desse conceito desenvolver a definição na qual um número decimal N pode ser escrito na forma:

$$N = a_k 10^{k-1} + a_{k-1} 10^{k-2} + a_{k-2} 10^{k-3} + \cdots + a_4 10^2 + a_3 10^1 + a_1$$

Em seguida, estender esse conceito para os números hexadecimais.

Para transformar um número hexadecimal em decimal é multiplicar o valor decimal de cada dígito hexadecimal pela sua potência correspondente e depois realizar a soma desses produtos.

Exemplo:

$A85_{16} = 5 + 8 \cdot 16 + 10 \cdot 16^2 = 5 + 128 + 2560 = 2693$

Converta os seguintes números hexadecimais em números decimais:

a) $E5_{16}$

b) $B2F8_{16}$

5) Complete as tabelas abaixo de soma e multiplicação com números hexadecimais.

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0																
1																
2																

3																
4																
5																
6																
7																
8																
9																
A																
B																
C																
D																
E																
F																

•	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0																
1																
2																
3																
4																
5																
6																
7																
8																
9																
A																
B																
C																

D																
E																
F																

6) Com o auxílio das tabelas do item anterior resolva as seguintes operações:

a) $31_{16} + 27_{16}$

b) $46_{16} + 34_{16}$

c) $3C_{16} + 75_{16}$

d) $EF_{16} + AC_{16}$

e) $12_{16} \bullet 17_{16}$

f) $2A_{16} \bullet B4_{16}$

g) $54_{16} \bullet 19_{16}$

6 – Números palíndromos

O objetivo dessa atividade é mostrar que algumas propriedades que só foi possível descobrir algumas propriedades dos números em razão do princípio de posição dos algarismos.

Ao final da atividade o aluno deve notar que só é possível perceber essa propriedade no sistema indo-arábico por conta das suas características e também que os outros sistemas de numeração são limitados em sua notação.

Nesse momento, o professor deve enfatizar que cada sistema de numeração atendia a demanda de uma sociedade num tempo específico da história através da história dos próprios números romanos que adaptaram seus símbolos de acordo com a necessidade de escrever números maiores escrita de Fibonacci no *Liber abaci* enfatiza a característica do sistema indo-arábico de representar qualquer número, não importando sua quantidade de algarismos, ou seja, seu “tamanho”, sua grandeza.

6.1– Roteiro

1) Apresentar os sistemas de numeração egípcio e romano e o funcionamento de cada um.
2) Propor a atividade.

Tempo estimado: 4 aulas de 50 minutos cada.

6.2 – Atividade

O matemático indiano Mahāvīra (ca. 850) expressa em sua obra Gaṇitasārasañgraha como resultado de um cálculo o número 12345654321. Observada sua notável característica, o autor o define como a quantidade "*começando por um até seis, depois diminuindo na ordem*".

Essa definição é uma alusão ao que hoje determinamos como número palíndromo ou capicuia, ou seja, um número que pode ser lido da direita para a esquerda ou vice-versa que seu valor permanece inalterado.

1) Complete.

$$1 \cdot 1 = 1$$
$$11 \cdot 11 =$$
$$111 \cdot 111 =$$
$$1111 \cdot 1111 =$$
$$11111 \cdot 11111 =$$
$$111111 \cdot 111111 =$$
$$1111111 \cdot 1111111 =$$
$$11111111 \cdot 11111111 =$$
$$111111111 \cdot 111111111 =$$

2) Agora faça a representação dos resultados encontrados na tabela acima nos sistemas de numeração egípcio e romano.

3) Quais foram as dificuldades encontradas na execução da tarefa anterior?

7 – O ábaco romano e o *Liber abaci*

O objetivo dessa atividade é fazer uma abordagem histórica da adoção dos indo-arábicos pela Europa Ocidental e comparar a forma de cálculo com o ábaco romano com o algoritmo ensinado por Fibonacci para a multiplicação. A ideia é ver semelhanças e diferenças entre os dois métodos. E ressaltar que apesar de usar numeração romana no ábaco ele tinha uma estrutura decimal.

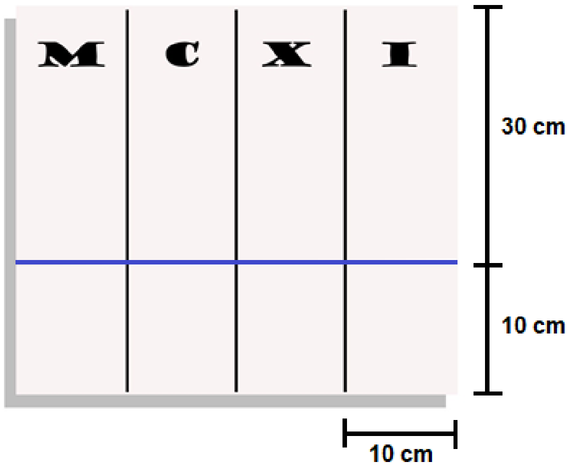
No fim da atividade o professor pode mostrar como eram as fichas no ábaco de Gerbert e propor uma multiplicação usando esse tipo de ficha.

Propomos que essa atividade seja feita em grupo de 4 alunos.

Sugerimos que para essa atividade o professor leia os capítulos da dissertação e que após essa atividade o professor apresente outras formas de multiplicação com os indo-arábicos que estão descritas nas atividades a seguir.

7.1 – Roteiro

1) Confeccionar o ábaco. A proposta é que os alunos utilizem cartolina e tampas de garrafa para confeccionar o ábaco. De preferências tampas da mesma cor. Durante a construção, os alunos podem identificar os componentes e as características do ábaco.



2) Representação no ábaco. Nessa atividade o aluno deve perceber a ausência de um símbolo para o zero. Aqui o professor pode fazer um link com os babilônios que deixavam um espaço vazio para representar a ausência de uma ordem. O aluno deve perceber a limitação de escrita no ábaco e sugerir uma solução.
3) Nessa atividade o professor deve ensinar como fazer uma multiplicação com o ábaco romano.
4) Propor os exercícios 1, 2, 3 e 4.
5) Apresentar o Liber abaci e ensinar o processo de multiplicação feito por Fibonacci.
6) Propor o exercício 5.
7) Fazer uma análise dos processos de multiplicação vistos.

Tempo estimado: 6 aulas de 50 minutos cada.

7.2 – Atividade

1) Confecção do ábaco. Para essa atividade vamos precisar de: 1 cartolina; 1 régua; 1 tesoura; 1 marcador preto.
2) Represente o número 6, 18, 213, 108 e 1003 no ábaco. Agora represente o número 17 914.

3) Faça os seguinte cálculos no ábaco:

a) 12×8
b) 18×35
c) 24×10

4) Use as fichas com marcação indo-arábica como usado por Gerbert e refaça a atividade 3.
5) Faça os seguinte cálculos com o mesmo processo ensinado por Fibonacci.

a) 12×8
b) 18×35
c) 24×10

6) Quais semelhanças você percebeu entre o processo realizado no ábaco com o do Fibonacci?
7) O que você acha do processo de Fibonacci em comparação ao que usamos atualmente?

8 – Outros métodos de multiplicação com os algarismos indo-arábicos

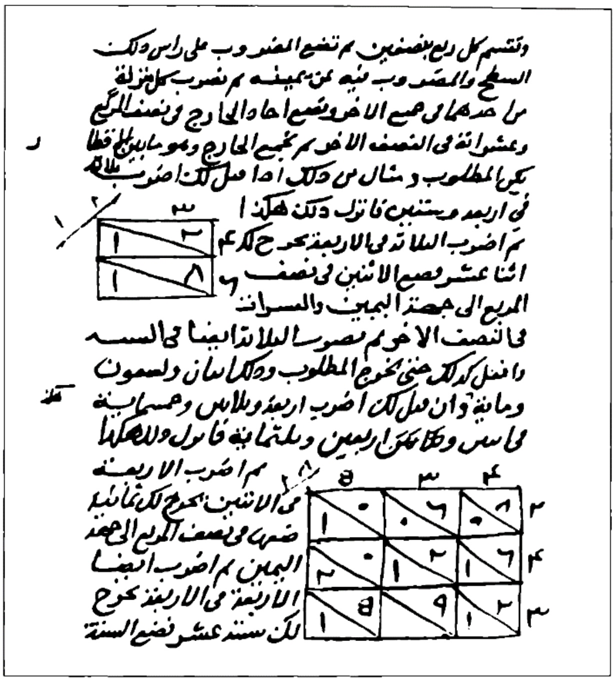
Nessa seção apresentamos outros procedimentos de multiplicação sem atividades propostas.

8.1 Método gelosia

Segundo Smith, acredita-se que o método tenha origem na Índia, pois aparece no comentário de Ganesa sobre o *Lilavati* entre outras obras.

Conhecido também como multiplicação em célula, em grade ou quadrilateral, foi muito utilizado pelos árabes devido a sua simplicidade e facilidade. Chegou na Itália nos séculos XIV e XV onde recebeu o nome *per gelosia* por causa da semelhança com uma treliça de madeira ou metal colocada no colocada no vão de janelas ou portas para proteger da luz e do calor, e através da qual se pode ver sem ser visto. Esse método também encontra lugar na China, aparecendo lá em uma aritmética de 1593.

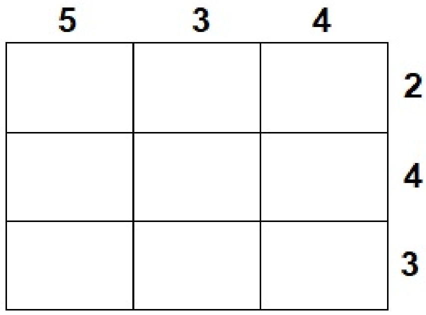
Figura 1 - Página de um tratado árabe



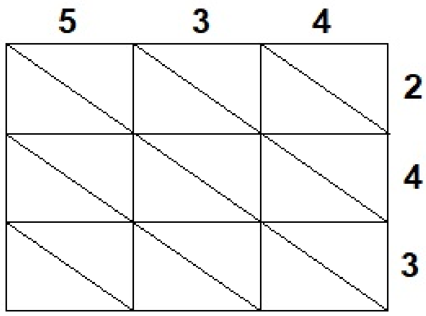
Fonte: Ifrah, 1997, tomo 2, página 438.

Ilustraremos o seu funcionamento com o produto de 534 por 342. O multiplicando comporta três algarismos o que irá representar a quantidade de colunas; e o multiplicador, que comporta também três algarismos, a quantidades de linhas. Traça-se uma tabela 3x3.

Na parte superior da tabela, da esquerda para a direita, escrevemos os algarismos 5, 3 e 4 do multiplicando; à direita, são colocados os algarismos 3, 4 e 2, do multiplicador, agora no sentido de baixo para cima, conforme mostrado na figura abaixo:

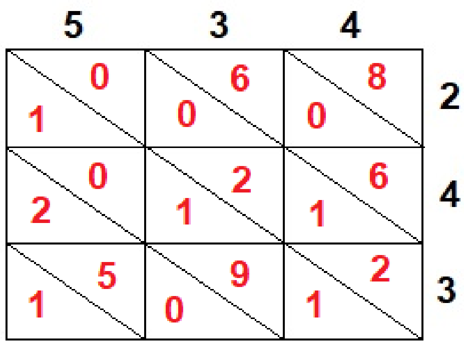


Agora dividiremos cada casa ou célula ao meio por uma diagonal conforme figura abaixo.

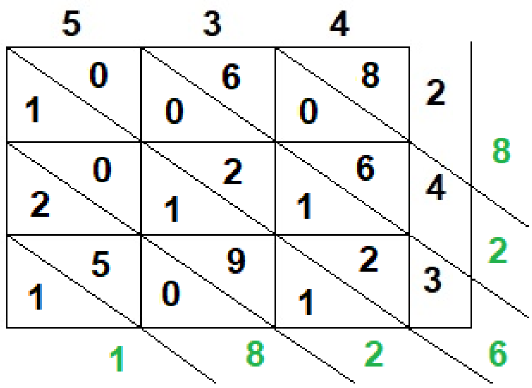


O próximo passo é escrever em cada célula o produto dos dois algarismos correspondentes a sua linha e a sua coluna. O algarismo da dezena é colocado na semi-célula inferior à esquerda e o das unidades na semi-célula superior direita.

Na primeira célula à direita, escrevemos o resultado da multiplicação de 2 por 4, ou seja, 8. Colocamos o algarismo 8 na semi-célula superior e na inferior colocamos o 0 onde ficaria vazia. O resultados de cada uma das multiplicações estão indicados na figura a seguir:



Em seguida, no exterior da tabela, adicionamos os algarismos de cada uma das diagonais, começando pela diagonal mais acima e à direita, que, nesse exemplo, possui o algarismo 8. Depois, faremos o mesmo com as demais diagonais, seguindo o caminho de cima para baixo e da direita para a esquerda. Quando a soma ultrapassar 9 unidades, devemos escrever o valor referente às unidades e transportaremos o valor das dezenas para a próxima diagonal como mostra a figura a seguir.



O resultado da multiplicação é obtido através da leitura, da esquerda para a direita, dos números determinados através das somas dos valores de cada uma das diagonais. Em nosso exemplo, temos como resultado o valor: 182 628.

Por que basta dividir a célula ao meio? Porque em cada "casa" escreveremos o produto de dois números compostos por um algarismo cada. Logo, esse resultado é menor que 100.

8.2 Procedimento do matemático indiano Brahmagupta

Brahmagupta foi um astrônomo indiano que viveu por volta de 628 E.C. Autor dos tratados *Brahmasphutasiddhânta* e *Khandakhâdyaka* em que emprega a notação posicional com os 10 algarismos e descreve métodos de cálculo semelhante aos nossos.

Gomûtrikâ é um dos quatro métodos descritos por Brahmagupta para multiplicação. Segundo Ifrah, seus métodos eram mais evoluídos do que os precedentes.

Ilustraremos o seu funcionamento com o produto de 543 por 234.

Comece registrando o multiplicador (234) em coluna. Ao lado de cada algarismo do multiplicador escreva o multiplicando (543), acompanhando um deslocamento de uma coluna para a direita em relação àquela que se encontra exatamente acima.

2	5	4	3		
3		5	4	3	
4			5	4	3

Depois, na primeira linha, coloque o produto do algarismo 2 do multiplicador pelo algarismo 3 do multiplicando. O resultado 6 deve ficar na coluna do 3.

2	5	4	3		
3		5	4	3	
4			5	4	3
			6		

Em seguida, multiplique o mesmo 2 pelo 4 do multiplicador. Coloque o produto à esquerda do 6.

2	5	4	3		
3		5	4	3	
4			5	4	3
		8	6		

Por fim, multiplique o 2 pelo 5 e coloque o resultado à esquerda do 8.

```
2        5 4 3
3          5 4 3
4            5 4 3
       ___________
       1 0 8 6
```

Faça o mesmo processo para o algarismo 3 do multiplicador. Coloque o resultado na linha abaixo do 1086.

```
2        5 4 3
3          5 4 3
4            5 4 3
       ___________
       1 0 8 6
         1 6 2 9
```

Agora, repita o processo com o algarismo 4 do multiplicador. Coloque o resultado na linha abaixo do 1629.

```
2        5 4 3
3          5 4 3
4            5 4 3
       ___________
       1 0 8 6
         1 6 2 9
           2 1 7 2
```

Para finalizar o processo, adicione os resultados parciais.

2	5 4 3
3	5 4 3
4	5 4 3
	1 0 8 6
	1 6 2 9
	2 1 7 2
	1 2 7 0 6 2

8.3 Método de multiplicação dos camponeses russos

Esse método consiste em uma operação de duplicação e mediação, ou seja, dobrar e reduzir à metade. O procedimento consiste em dobrar o multiplicando e reduzir o multiplicador à metade. E quando essa divisão por 2 não é exata, devemos subtrair uma unidade do multiplicador e, em seguida, reduzi-lo à metade.
Ilustraremos o seu funcionamento com o produto de 120 por 35.
Escreva os dois fatores um ao lado do outro. É melhor escrever o menor fator primeiro.

35	**120**

Divida o primeiro fator e multiplique o segundo fator por 2. Como 35 não é divisível por 2, considere o inteiro menor, 34. E divida-o.

35	**120**
17	**240**

Repita o processo até que se chegue a 1 na coluna da esquerda.

35	120
17	240
8	480
4	960
2	1920
1	3840

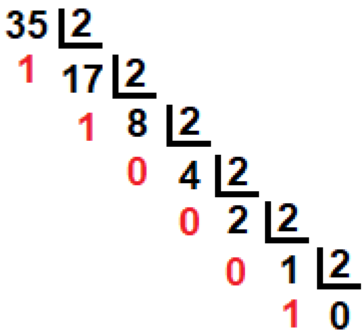
O produto é obtido como soma dos números da coluna da direita que correspondam a números ímpares na coluna da esquerda, ou seja, os que marcamos com um X).

35	120	x
17	240	x
8	480	
4	960	
2	1920	
1	3840	x

Então, $35 \times 120 = 120 + 240 + 3840 = 4200$.

Diferente dos outros métodos esse não se justifica pelo princípio de posição característico dos indo-arábicos. Observe que o número da primeira coluna vai sendo sempre dividido por 2 com quociente inteiro. Portanto, o resto é 0 ou 1. Ou seja, essa divisão sucessiva por 2 nos permite escrever o primeiro fator como uma soma de potências de 2, ou melhor dizendo, transformamos um número decimal em um número binário. Assim, o número binário é obtido a partir do grupo de restos produzido por todas as divisões por 2 realizadas até obter-se o quociente inteiro zero, ou seja, quando dividimos 1 por 2 (última das sucessivas divisões), o que produz quociente 0 e resto 1.

Como exemplo, na sequência vamos transformar o número 35 para a base binária.



Assim, a sequência de restos tomada de baixo para cima representa o número 35 na base binária:

$$35 = 100011$$

O número 100011 ser escrito na seguinte forma polinomial:

$$35 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

A partir da relação estabelecida entre os sistemas binário e decimal é possível entendermos o funcionamento do Método da Multiplicação Russa.

Observe que as potências de base 2 que são multiplicadas por 1 representam os números ímpares da 1ª coluna do quadro. Já as potências de base 2 que são multiplicadas por 0 representam os números pares da coluna.

Ao somarmos os produtos obtidos, o resultado será dado pela soma dos números correspondentes aos números ímpares do quadro, visto que os produtos com os números pares, por serem multiplicados por 0 resultarão em 0.

$$35 \times 120 = (1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) \times 120$$
$$= 2^5 \times 120 + 2^1 \times 120 + 2^0 \times 120$$

Isso explica o fato de que no método russo são selecionados na segunda coluna do quadro somente os números correspondentes aos números ímpares da primeira coluna para se realizar a soma que consiste no produto procurado.