

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ**

**HUGO HENRIQUE BERNARDELLI**

**CÁLCULO DE TAXAS DE RETORNO**

**CURITIBA**

**2022**

**HUGO HENRIQUE BERNARDELLI**

**CÁLCULO DE TAXAS DE RETORNO**

**RETURN RATE CALCULATION**

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre no Programa Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Orientador: João Luis Gonçalves

Coorientador: Ronie Peterson Dario

**CURITIBA**

**2022**



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

Esta licença permite que outros remixem, adaptem e criem a partir do trabalho licenciado para fins não comerciais, desde que atribuam ao autor o devido crédito e que licenciem as novas criações sob termos idênticos.



Ministério da Educação  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Campus Curitiba



HUGO HENRIQUE BERNARDELLI

### CÁLCULO DE TAXAS DE RETORNO

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Matemática.

Data de aprovação: 25 de Julho de 2022

Dr. Joao Luis Goncalves, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Matheus Batagini Brito, Doutorado - Universidade Federal do Paraná (Ufpr)

Dra. Nara Bobko, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 25/07/2022.

*Dedico este trabalho a Deus que sempre me sustenta, minha filha Sofia que me dá alegria, minha esposa e companheira de vida, Ju que me dá o suporte em tudo para que eu aguarde o caminho e minha mãe, a outra Ju, que sonhou junto comigo esta conquista.*

## AGRADECIMENTOS

- À Sociedade Brasileira de Matemática que, na busca da melhoria do ensino de matemática na Educação Básica, viabilizou a implementação do PROFMAT.
- À CAPES, pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior.
- Ao meu orientador João Luis Gonçalves que foi fundamental para que eu conseguisse terminar esse trabalho, me apoiando, incentivando e direcionando juntamente com o meu coorientador Ronie Peterson Dario.
- Ao meu grande amigo Felipe Leme Sirtoli e também colega de estudo, conseguimos!
- À minha esposa Julyana Boiko que eu amo muito e sempre está do meu lado.
- Aos outros colegas da turma 2019 do PROFMAT: Fábio, Paulo, João, Ricardo, Jéssica, Mariana, Victória, Marilete, Roberto, Cleomar, Enoque e Isaías.
- À todos os professores do PROFMAT da UTFPR, Campus Curitiba.

*O que sabemos é uma gota, o que ignoramos é um oceano.* Isaac Newton (1643 - 1727): matemático, físico, astrônomo e teólogo Inglês.

## RESUMO

BERNARDELLI, Hugo Henrique. **Cálculo de Taxas de Retorno**. 45 f. Dissertação - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2022.

Apresentamos e discutimos formas de calcular taxas de retorno para operações financeiras. As definições de retorno são complexas quando as operações têm muitas movimentações ao longo do período analisado. As taxas de retorno são medidas muito úteis para a comparação de diferentes operações e é esse aspecto que queremos levar aos estudantes do nível básico, nos contextos de Educação Financeira e de aplicação de matemática no cotidiano.

**Palavras-chave:** Educação Financeira; Taxas de Retorno; Taxa Interna de Retorno; Investimentos.

## ABSTRACT

BERNARDELLI, Hugo Henrique. **Return Rate Calculation**. 45 p. Dissertation - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2022.

We present and discuss ways to calculate rates of return for financial operations. Return definitions are complex when operations have many movements over the analyzed period. Rates of return are very useful measures for comparing different operations and it is this aspect that we want to bring to students at the basic level, in the contexts of Financial Education and the application of mathematics in everyday life.

**Keywords:** Financial Education; Return rates; Internal Return rate; Investments.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Exemplo de fluxo de caixa . . . . .	15
Figura 2.2 – Fluxo de caixa do Exemplo 2.1 . . . . .	16
Figura 2.3 – Fluxo de caixa do Exemplo 2.2 . . . . .	17
Figura 2.4 – Fluxo de caixa do Exemplo 2.3 . . . . .	17
Figura 2.5 – Fluxo de caixa do Exemplo 2.4 . . . . .	18
Figura 2.6 – Fluxo de caixa do Exemplo 2.5 . . . . .	18
Figura 2.7 – Fluxo de caixa do Exemplo 2.6 . . . . .	19
Figura 2.8 – Fluxo de caixa do Exemplo 2.7 . . . . .	19
Figura 2.9 – Fluxo de caixa do Exemplo 2.8 . . . . .	20
Figura 2.10–Fluxo de caixa do Exemplo 2.9 . . . . .	20
Figura 4.1 – Fluxo de caixa do Exemplo 4.1 . . . . .	38
Figura 4.2 – Fluxo de caixa do Exemplo 4.3 . . . . .	41

## **LISTA DE TABELAS**

Tabela 4.1 – Valor das ações da EMPRE em 2021 . . . . .	37
---	----

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>FLUXOS DE CAIXA</b> . . . . .	<b>15</b>
<b>3</b>	<b>TAXAS DE RETORNO</b> . . . . .	<b>21</b>
3.1	Taxa de retorno em um período simples . . . . .	21
3.2	Taxas de retorno para multi-período . . . . .	22
3.3	Taxa de retorno ponderado pelo dinheiro . . . . .	25
3.4	Taxa de retorno ponderada pelo dinheiro modificado . . . . .	31
3.5	Taxa de retorno ponderado no tempo . . . . .	32
3.6	Comparação entre as taxas de retorno . . . . .	35
<b>4</b>	<b>PROPOSTAS DE APLICAÇÃO</b> . . . . .	<b>37</b>
4.1	Proposta: Uso do MWRR para um ativo financeiro . . . . .	37
4.2	Proposta: Uso da MWRR para uma carteira de investimentos . . . . .	39
4.3	Proposta: MWRR x TWRR . . . . .	41
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	<b>43</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>45</b>

# 1 INTRODUÇÃO

Tentar mensurar o retorno de algum ato ou atividade é algo intrínseco ao modo de agir das pessoas. Em geral, o risco a ser assumido e o possível retorno a ser obtido são estimados, ao menos mentalmente, antes da tomada de uma decisão qualquer. Muitas vezes isso ocorre de forma totalmente intuitiva e automática.

Na economia popular, por exemplo, pequenos comerciantes atuando há muito tempo em um dado segmento não seguem os manuais operacionais indicados às empresas maiores, as quais desejam otimizar suas operações em busca do menor custo e maior lucro possível. Uma simples planilha eletrônica para contabilizar lucros e perdas é negligenciada ou delegada ao contador de diversas micro e pequenas empresas. Os comércios ainda menores - aqueles que o governo classifica como micro empreendedores individuais - tendem a seguir procedimentos semelhantes ou piores, pois estão, por lei, dispensados fazer registros contábeis.

É comum que profissionais autônomos usem sua própria agenda de atendimento a clientes ou pacientes para fazer as contas de custos e receitas, utilizando o próprio agendamento para duas funções, confirmar ou não o atendimento, e saber se o pagamento foi realizado ou se ficou para a próxima consulta.

Decisões como ampliar ou reduzir o negócio, demitir ou contratar um funcionário, adquirir novos equipamentos, etc., muitas vezes também são realizados sem uma análise efetiva de sua viabilidade econômico/financeira.

Mesmo não fazendo parte dos segmentos econômicos citados, muitas pessoas tem comportamento semelhante na tomada de decisões cruciais para sua vida financeira, tais como adquirir um bem (carro, casa, etc.) ou tomar decisões de investimento. Quem realmente faz uma comparação séria entre um empréstimo e um consórcio? Quem realmente calcula direito o quanto está ganhando ou perdendo num investimento?

A negligência do brasileiro com estas contas pode ser explicada em parte pela falta de educação financeira consistente desde a infância, tanto na educação familiar quanto na educação formal. A introdução da educação financeira nos currículos escolares certamente ajudará a mudar esta realidade. Outro aspecto muito importante é a popularização de conteúdos de educação financeira na internet. Essas informações, por sua natureza descentralizada e gratuita, são cruciais para que a população possa tomar as rédeas de suas finanças e entender a importância dessa atitude.

A escolha do tema deste trabalho representou o desejo de contribuir com este processo de mudança em um aspecto específico e fundamental: a sistematização da contabilização de retorno de uma operação. Dado que isto é amplo demais e pensando no que poderia de fato ser mais útil ao maior público possível, e que estivesse ao alcance do ensino básico, decidimos focar em

operações financeiras, em especial no contexto dos investimentos. Contudo, diversos conceitos e resultados podem ser utilizados para outras operações nas modalidades de crédito de consórcio e financiamento que citamos, assim como a viabilidade financeira de um negócio, entre outros.

Nosso objetivo é que nossa apresentação do conteúdo seja elementar o suficiente para sua utilização na educação financeira escolar, seja com foco na matemática ou nos conceitos financeiros.

Esperamos também que o conteúdo esteja detalhado e preciso o suficiente de forma a permitir sua utilização na prática por pequenos investidores (e/ou iniciantes) no mercado financeiro, e também que o público em geral possa utilizar os conceitos para realizar suas operações financeiras cotidianas.

Evidentemente, o texto não se destina à profissionais de mercado ou investidores certificados, embora os conceitos sejam os mesmos de seu cotidiano profissional. Conceitos estes que são tratados por Broverman (2010), Bacon (2011), Feibel (2003), Capinski e Zastaniak (2003), e que serão abordados nesse trabalho.

A ideia é que através do conhecimento efetivo de medidas de retorno, as pessoas possam basear suas decisões comparando o desempenho de suas operações com índices de mercado bem conhecidos, assim como fazem os profissionais.

Intuitivamente, quando nos referimos ao retorno de uma operação financeira, pensamos em um cálculo simples de variação percentual do capital empregado. De fato, esta ideia simples tem realmente grande aderência prática. Contudo, este é só o primeiro passo do estudo, pois estamos nos restringindo à um único período da operação - período simples - e sem movimentações adicionais do capital. Este caso será tratado na Seção 3.1 do trabalho.

Mesmo em operações sem aportes ou retiradas, exceto no início e fim do período, que poderiam ser analisadas como operações de período simples, pode ser conveniente considerar subperíodos e para eles determinar taxas de retorno e analisar a relação entre as taxas nos subperíodos e no período todo. Isso será visto na Seção 3.2.

Quando ocorre o pagamento de remunerações como juros, dividendos, aluguéis e etc, assim como eventuais aportes e/ou retiradas ao longo do período isto deve ser considerado no cálculo do retorno, inclusive levando-se em conta o momento dessas movimentações. Situações como essa são totalmente naturais como no exemplo de um investidor que toma suas decisões por conta própria, sem a tutela de fundos, corretoras ou assessores de investimentos. Para este pequeno investidor, será necessário acompanhar certa frequência o desempenho de sua carteira de investimentos. A sugestão mais comum é um acompanhamento ao menos semanalmente. Assim, ao final de meses ou anos, ele poderá ter de forma precisa uma referência do rendimento. Ter esta informação, por si só, já lhe é de grande ajuda, dado que com isso poderá comparar este número com a média do mercado, com os índices ou mesmo com o desempenho da carteira de outras pessoas. Essas situações serão analisadas a partir da Seção 3.3.

A parte mais técnica e matematicamente interessante inicia na Seção 3.3, quando ponderações diferentes podem ser consideradas nos cálculos dos retornos. O retorno ponderado no tempo, descrito na Seção 3.5, por sua natureza irá desprezar as quantidades investidas e priorizar as escolhas dos investimentos, é uma medida comum para o desempenho de gestores de fundos de investimento. O retorno ponderado pelo dinheiro, também conhecido como Taxa Interna de Retorno, tratado na Seção 3.3 é amplamente usado para medir o desempenho de operações financeiras. Porém existem dificuldades inerentes ao cálculo do retorno ponderado pelo dinheiro e isso motiva a utilização de taxas de retorno modificadas, que aproximam a ponderada pelo dinheiro. Em particular, apresentamos o retorno ponderado pelo dinheiro modificado, também conhecido como Método Modificado de Dietz na Seção 3.4. Estas taxas de retorno são padrões no mercado, sendo a taxa de retorno ponderado pelo dinheiro mais utilizada.

Boa parte do tempo nos ateremos ao problema principal da Matemática Financeira, que segundo Carvalho e Morgado (2015, p. 87) "só há um único problema na Matemática Financeira: deslocar quantias no tempo".

Vamos concluir esta introdução com algumas convenções naturais acerca da matemática financeira.

As operações financeiras, quase na sua totalidade, estão sujeitas ao regime de capitalização de **juros compostos**, no qual os juros se formam ao final de cada período  $k$  pela correspondente aplicação do percentual  $i_k$  conhecido como **taxa de juros**. O resultado disso, por sua vez, compõe a geração dos juros do período seguinte. Desta forma, ao final de um dado tempo  $t$ , um capital inicial  $C_0$  é transformado em um **montante**

$$M(t) = C_0 \prod_{k=1}^t (1 + i_k).$$

Note que se  $i_k$  é igual a  $i$  para todos os períodos, então

$$M(t) = C_0(1 + i)^t.$$

É comum a necessidade de aplicar o regime inverso da capitalização, conhecido como desconto. Utilizando a mesma nomenclatura, se o montante  $M(t)$  foi obtido pela aplicação consecutiva de taxas de juros  $i_k$ ,  $1 \leq k \leq t$ , sobre um capital inicial  $C_0$  então o montante antes da  $s$ -ésima aplicação de taxa de juros é

$$M(s) = M(t) \prod_{k=s}^t \frac{1}{(1 + i_k)}.$$

Tanto a capitalização quanto o desconto são úteis também para compreender o valor do dinheiro ao longo do tempo. O termo mais popular para tratar o valor do dinheiro ao longo do tempo é a taxa de inflação, ou de deflação caso negativa. A forma de aplicar a taxa de inflação é análoga à taxa de juros, mas com o sinal trocado. Por exemplo, para uma inflação mensal  $i_k$ , depois de  $t$  meses o poder de compra  $P(t)$  de  $C_0$  será

$$P(t) = C_0 \prod_{k=1}^t (1 - i_k).$$

A principal diferença da inflação para a capitalização com juros é que ao invés de um montante o que se obtém é o poder de compra. Ou seja, depois de  $t$  meses  $C_0$  terá o poder de compra que  $P(t)$  tinha à  $t$  meses.

O regime de capitalização de **juros simples** é pouco utilizado quando se sabe como usar os juros compostos. Sua aplicação fica restrita situações em que há pagamento de juros periodicamente, em estimativas ou aproximações e em situações nas quais as partes envolvidas não sabem juros compostos.

Na Seção 3.4 para o cálculo da taxa de retorno ponderada pelo dinheiro modificada usaremos os juros simples como uma forma de simplificar/possibilitar a obtenção de uma taxa de retorno.

Se estipuladas as taxas de juros simples  $i_k$  para o  $k$ -ésimo período, para um capital inicial  $C_0$ , depois de  $t$  períodos a capitalização com juros simples produz o montante

$$M(t) = C_0 \left( 1 + \sum_{k=1}^t i_k \right).$$

Para as taxas desse trabalho consideraremos somente o caso discreto, por sua aplicabilidade cotidiana e adequação ao ensino em nível básico. As taxas no caso em que o tempo é considerado continuamente requerem o emprego de cálculo diferencial e integral e embora esteja repleta de resultados interessantes, fogem do escopo desse trabalho.

As taxas de juros estão intrinsecamente atreladas a uma unidade temporal, o período. Taxas iguais aplicadas em períodos diferentes produzem resultados diferentes. Nesse sentido, para comparar taxas é fundamental considerá-las em uma mesma unidade de tempo, isto é, para períodos iguais. Se  $I$  é a taxa de juro relativa a um determinado período de tempo e se esse período for dividido em  $n$  subperíodos iguais, então a **taxa de juros equivalente** a  $I$ , sob regime de capitalização de juros compostos, no subperíodo é a taxa  $i$  que satisfaz equação

$$1 + I = (1 + i)^n.$$

Se o regime de capitalização considerado for o de juros simples, a taxa de juros equivalente à  $I$  no subperíodo é a taxa  $i$  tal que

$$I = i \cdot n.$$

## 2 FLUXOS DE CAIXA

Para calcular taxas de retorno é fundamental descrever as operações financeiras realizadas da forma mais organizada e completa possível. Vamos utilizar os fluxos de caixa como ferramenta para visualizar entradas e saídas de caixa e tratá-las adequadamente nos cálculos. Esta estratégia é utilizada em outros contextos, como por exemplo, na análise da viabilidade econômica/financeira de projetos Dario e Silva (2018) e na comparação entre alternativas distintas na contratação de empréstimos.

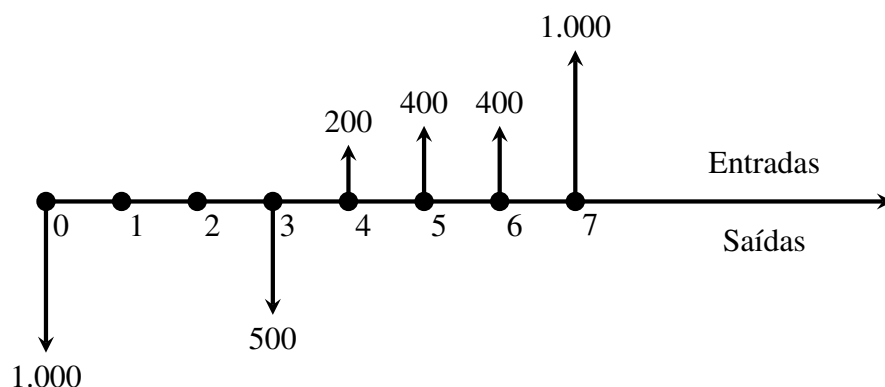
O diagrama de um fluxo de caixa tem uma linha horizontal representando o tempo, marcações para cada momento onde há movimentação na operação, e setas verticais cujo sentido indicam saída ou entrada no caixa. Além disso, o comprimento destas setas podem ser utilizadas para representar a magnitude, maior ou menor, da movimentação. É comum o uso da expressão “um fluxo de caixa” para se referir a uma movimentação no fluxo de caixa.

Para uma mesma operação, a representação do fluxo de caixa também depende do ponto de vista de quem o interpreta. Por exemplo, em uma operação de empréstimo, o fluxo de caixa pode ser representado sob a ótica do tomador, ou do cedente (banco, por exemplo).

Preferencialmente, vamos representar as operações do ponto de vista de um investidor. O aporte inicial em um investimento, assim como novos aportes, é interpretado como uma saída de caixa. Por outro lado, o recebimento de proventos (dividendos, juros, aluguéis, etc.) e resgates, parciais ou totais, são representados como entradas.

Por exemplo, para um investimento com aporte inicial de R\$ 1.000, novo aporte de R\$ 500 no tempo 3, resgate de R\$ 200 no tempo 4, recebimento de dividendos de R\$ 400 nos tempos 5 e 6 e resgate final de R\$ 1.000 no tempo 7, o diagrama do fluxo de caixa é apresentado na Figura 2.1. Note que esse fluxo de caixa tem expectativa de um retorno positivo, pois a soma dos valores investidos é menor que a soma dos valores recebidos.

Figura 2.1 – Exemplo de fluxo de caixa



Fonte: Autor.



Fluxos de caixa assim como o da Figura 2.1, que nos primeiros momentos apresentam saídas de caixa e na sequência apresentam apenas entradas de caixa, ou seja, há apenas uma troca entre fluxos positivos e negativos e além disso, o somatório das entradas de caixa supera o das saídas é denominado **fluxo de caixa convencional**. Esse tipo de fluxo de caixa favorece o cálculo das taxas de retorno. Nas propostas de aplicação do Capítulo 4 consideraremos apenas fluxos convencionais.

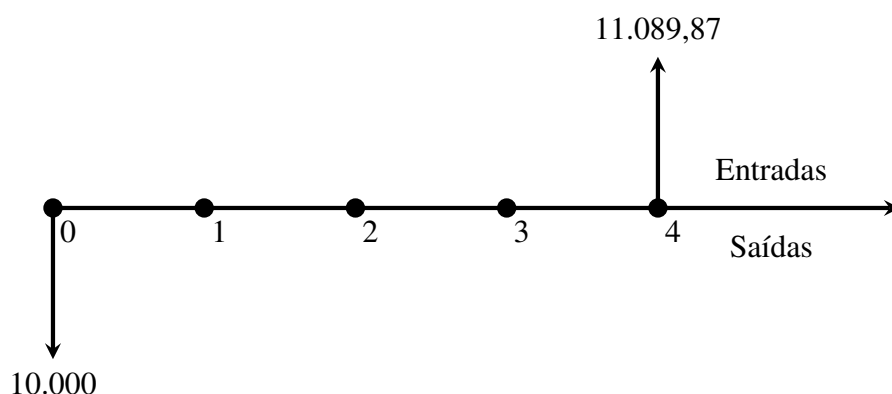
Para fluxos de caixa não-convencionais o cálculo das taxas de retorno podem ser complexos e resultar em múltiplas taxas, as quais precisam ser analisadas no contexto do problema podendo não ter significado financeiro algum.

Na sequência, apresentaremos diversos exemplos de investimentos e operações financeiras com fluxos de caixa convencionais, para fins de utilizá-los no Capítulo 3 para ilustrar os cálculos das diferentes taxas de retorno. Os exemplos envolvem investimentos em ações, em títulos de renda fixa e fundos.

Um fluxo de caixa que tem apenas duas movimentações, sendo uma no início do período e uma no final do período, como no Exemplo 2.1, é dito um **fluxo de caixa trivial**. Quando houver mais movimentações diremos que o fluxo de caixa é **não-trivial**.

**Exemplo 2.1.** Um investidor, em 1 de janeiro 2021, aplica R\$ 10.000,00 em um fundo de investimentos, e no final do primeiro trimestre o valor do fundo é de R\$ 10.350,00. O segundo trimestre finalizou com R\$ 10.681,20, já o terceiro fechou com R\$ 10.990,95, terminando o ano com R\$ 11.089,87 e realizando um saque no valor integral do saldo.

Figura 2.2 – Fluxo de caixa do Exemplo 2.1



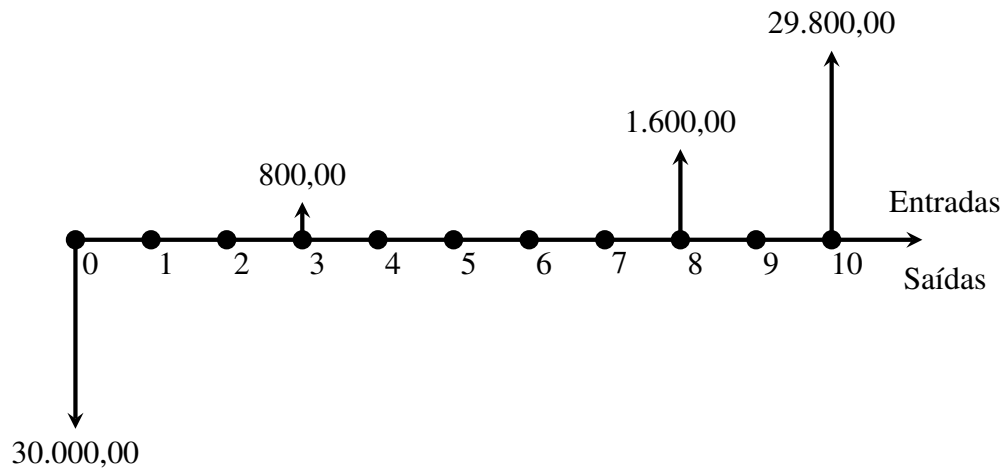
Fonte: Autor.

Vejamos agora um exemplo de fluxo de caixa onde ocorre o recebimento de dividendos.

**Exemplo 2.2.** Um investidor em janeiro de 2021 compra 1.000 ações da Petrobras (PETR4) ao preço de R\$ 30,00 cada uma. Três meses depois ele recebe dividendos, R\$ 0,80 por ação. Em setembro recebe novamente dividendos, sendo agora de R\$ 1,60 por ação. Em novembro

ele decide vender todas as ações ao preço de mercado, de R\$ 29,80 por ação. Tanto as datas de pagamentos de dividendos e seus valores quanto os valores das ações apresentados são aproximações dos reais.

Figura 2.3 – Fluxo de caixa do Exemplo 2.2

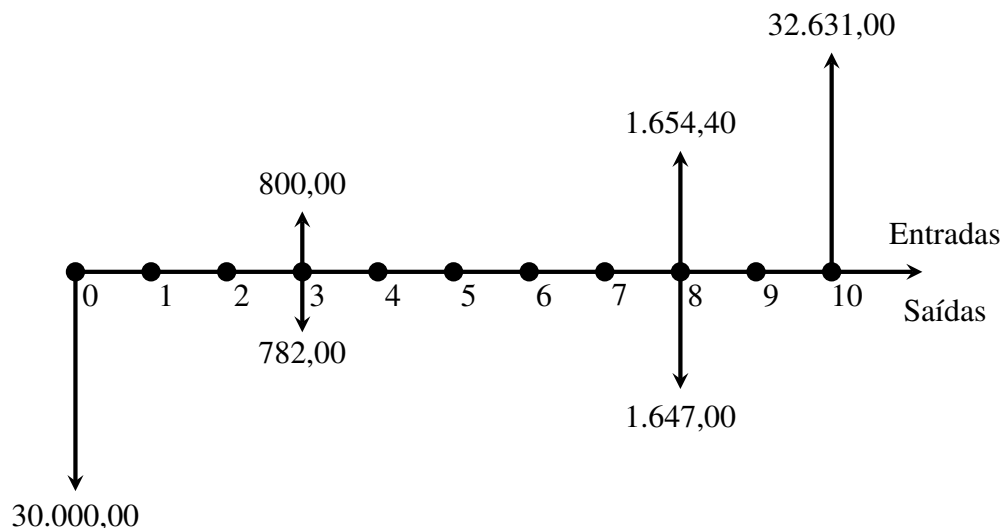


Fonte: Autor.

O recebimento de dividendos gera caixa que pode ser utilizado como reinvestimento, conforme o próximo exemplo.

**Exemplo 2.3.** Neste exemplo, supomos que o investidor do Exemplo 2.2 reinvestiu o máximo dos valores recebidos como dividendos na mesma ação logo após o recebimento. Sabendo que no momento 3 cada ação estava valendo R\$ 23,00 e no oitavo momento R\$ 27,00 e como não é possível adquirir uma fração de uma ação, o investidor comprou respectivamente 34 ações por R\$ 782,00 e 61 ações por R\$ 1.647,00.

Figura 2.4 – Fluxo de caixa do Exemplo 2.3

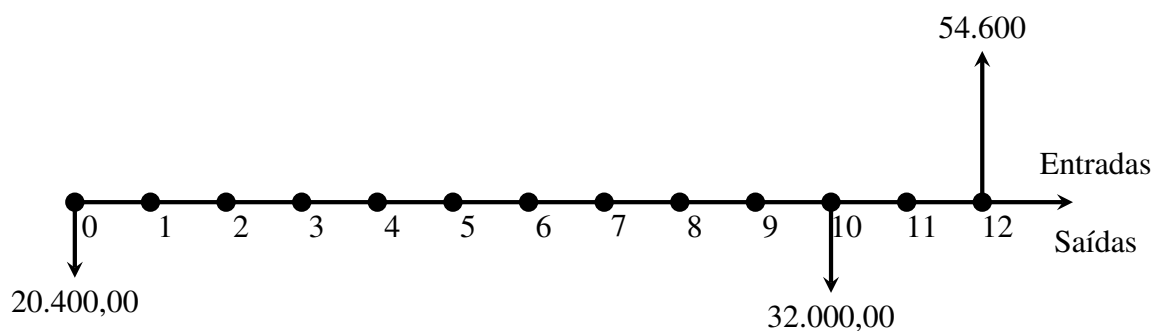


Fonte: Autor.

O próximo exemplo representa aportes em momentos de variação significativa de preços das ações.

**Exemplo 2.4.** Um investidor no início de janeiro de 2021 adquiriu 200 ações da Vale (VALE3) que tinha o valor unitário de R\$ 102,00. Depois de uma oscilação no valor no final do mês de outubro, cada ação estava valendo R\$ 64,00. Nesse momento prevendo que haverá uma alta no valor dessas ações, decide comprar outras 500 ações. No final de dezembro desse ano o valor de cada ação era de R\$ 78,00 e ele decidiu vender a totalidade de suas ações. Os valores das ações da Vale apresentados aqui são aproximações dos reais.

Figura 2.5 – Fluxo de caixa do Exemplo 2.4



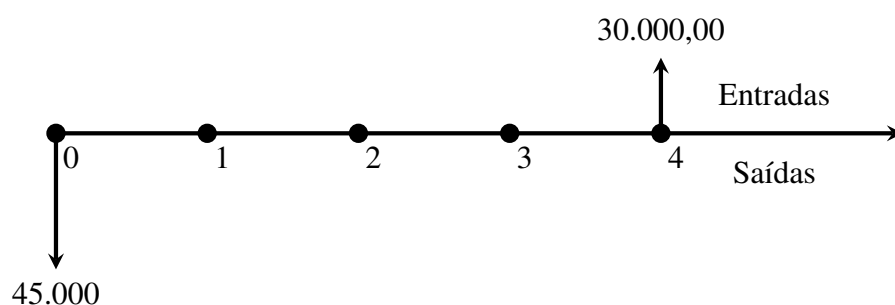
Fonte: Autor.

Ao olhar o desempenho das ações da WEG (WEGE3) no ano de 2021 temos que no início do ano o preço de cada ação era de R\$ 45,00. No final do primeiro trimestre estava custando R\$ 36,00. Com mais uma leve queda o preço no final do segundo trimestre chegou à R\$ 35,00. Depois disso, houve um aumento significativo chegando a R\$ 41,00 no final do terceiro trimestre. Finalmente, fechou o ano com mais uma queda ao preço de R\$ 30,00. Os valores das ações da WEG apresentados aqui são aproximações dos reais.

Nos próximos quatro exemplos, vejamos o que aconteceria com o patrimônio de um investidor caso ele realizasse diferentes estratégias de compra e venda de ações da WEG.

**Exemplo 2.5.** Se um investidor comprou 1.000 ações da WEG no começo de 2021 e as vendeu no final do ano, então o fluxo de caixa dessa operação é representado pela Figura 2.6.

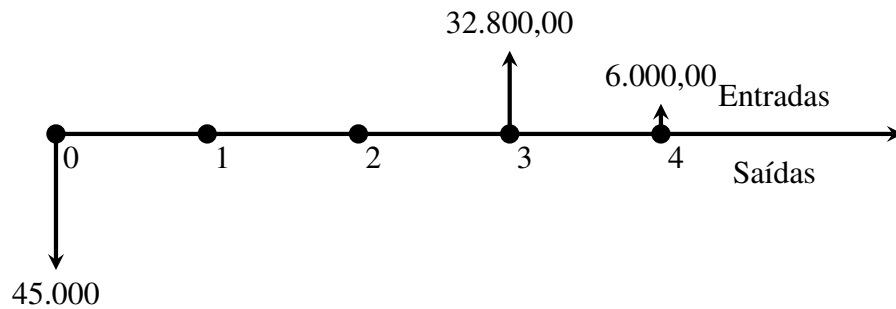
Figura 2.6 – Fluxo de caixa do Exemplo 2.5



Fonte: Autor.

**Exemplo 2.6.** Considerando o mesmo período do Exemplo 2.5, se o investidor comprou as mesmas 1.000 ações no início do ano, vendeu 800 dessas ações no final do terceiro trimestre aproveitando uma alta e vendeu as 200 ações restantes no final do ano, o fluxo de caixa dessa operação é representado pela Figura 2.7

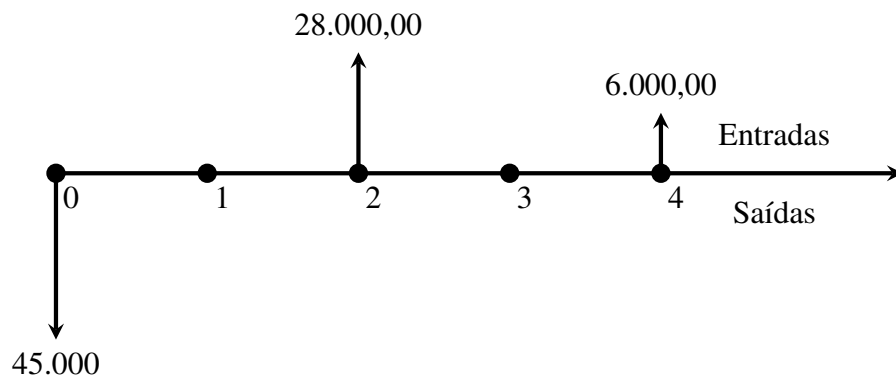
Figura 2.7 – Fluxo de caixa do Exemplo 2.6



Fonte: Autor.

**Exemplo 2.7.** Novamente considerando o mesmo período do Exemplo 2.5, se o investidor comprou as mesmas 1000 ações no início do ano, mesmo estando em baixa precisou vender 800 dessas ações no final do segundo trimestre e vendeu as 200 ações restantes no final do ano, o fluxo de caixa dessa operação é representado pela Figura 2.8

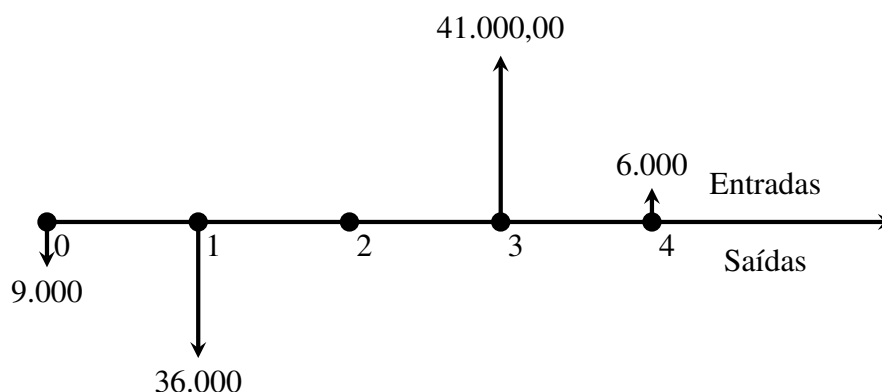
Figura 2.8 – Fluxo de caixa do Exemplo 2.7



Fonte: Autor.

**Exemplo 2.8.** Novamente considerando o período do Exemplo 2.5, se o investidor no início do ano comprou 200 ações da WEG, no final do primeiro trimestre comprou outras 1000 ações e no término do terceiro trimestre vendeu 1000 ações e no final do ano vendeu o restante das ações, então o fluxo de caixa da operação é representado pela Figura 2.9

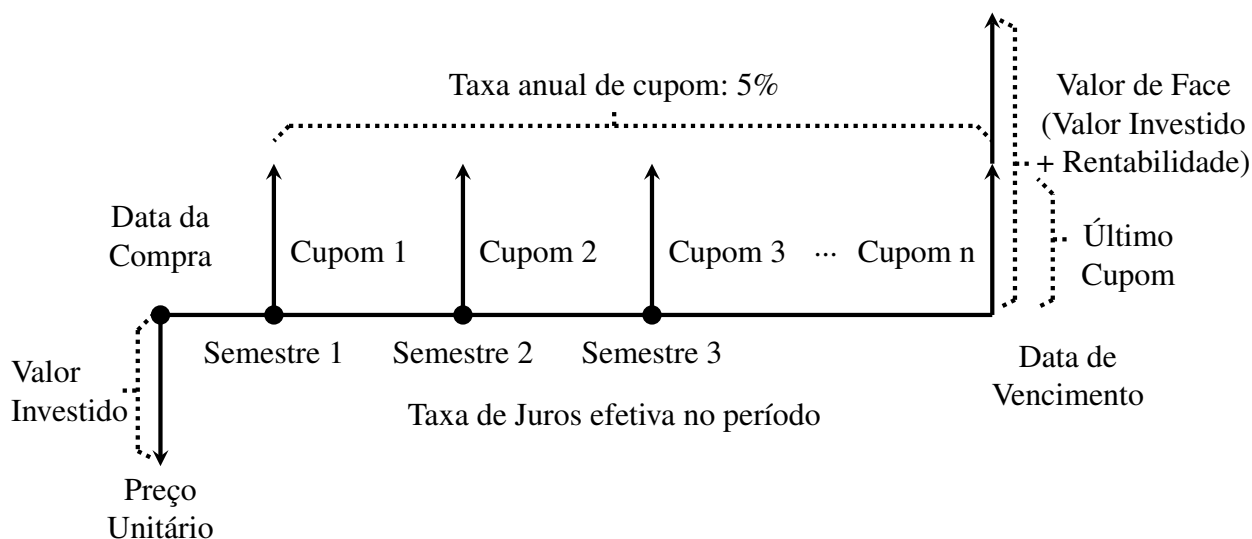
Figura 2.9 – Fluxo de caixa do Exemplo 2.8



Fonte: Autor.

**Exemplo 2.9.** Vamos agora verificar um caso de um título negociado no Tesouro Direto. Escolhemos o título Tesouro IPCA+ com juros semestrais, que possui rentabilidade vinculada à variação do IPCA (Índice de Preços ao Consumidor Amplo) e ainda é acrescido de juros pré-definidos no momento do investimento. Semestralmente existe o pagamento de um cupom de juros e no vencimento tem-se o pagamento do valor de face, ou nominal, do título, juntamente com o último cupom de juros.

Figura 2.10 – Fluxo de caixa do Exemplo 2.9



Fonte: Fazenda (2018).

### 3 TAXAS DE RETORNO

Neste capítulo vamos tratar de diferentes taxas que medem o desempenho de operações financeiras como investimentos, empréstimos ou mesmo combinações deles. A complexidade de algumas operações financeiras podem tornar difícil a comparação com investimentos mais tradicionais. Nesse sentido as taxas que discutiremos tornam-se ferramentas muito úteis. Nas seções desse capítulo vamos apresentar as taxas de retorno conforme o tipo de operações a que elas melhor se aplicam. Esses tipos dependem dos períodos e aportes considerados.

#### 3.1 TAXA DE RETORNO EM UM PERÍODO SIMPLES

Fica claro nos fluxos de caixa do Capítulo 2 que parte da complexidade de uma operação financeira está atrelada a movimentações financeiras entre o início e fim do período total da operação. As operações que não têm movimentações além da inicial e final, como a que tem o fluxo de caixa descrito no Exemplo 2.1 são ditas de período simples. Para essas operações é fácil medir o retorno.

O **retorno total**, denotado por  $R_T$ , é a diferença entre o valor final,  $V_f$ , e o valor inicial,  $V_i$ . O retorno total é a forma mais simples de medir o desempenho de uma operação financeira. Se o retorno total é positivo então a operação produziu lucro e se é negativo gerou um prejuízo.

$$R_T = V_f - V_i. \quad (3.1)$$

Embora não detalhemos o valor final de uma operação,  $V_f$  é composto de várias partes que dependem da natureza da operação. Em geral, o valor final é o valor inicial, possivelmente acrescido de proventos, como por exemplo: juros, aluguéis e dividendos. Ainda, descontado de taxas de custódia, corretagem e impostos. Um terceiro fator que afeta o valor final é a valorização (ou desvalorização) do ativo. Por exemplo, o preço de uma ação quase sempre varia, um título de renda fixa tem seu valor marcado a mercado, mesmo bens móveis ou imóveis estão sujeitos a valorização ou desvalorização.

O retorno total como medida de desempenho peca por ser uma medida absoluta. Por exemplo, se dois investidores tiverem um mesmo retorno total mas valores investidos diferentes, então o que investiu menos teve um desempenho melhor.

Para aprimorar o retorno total como medida de desempenho, consideramos a **taxa de retorno**, denotada por  $R$ . Como a taxa de retorno é a medida mais comum para o desempenho de operações financeiras, também nos referimos a ela simplesmente como **retorno**. A taxa de retorno consiste na razão entre o retorno total e o valor inicial. Note que essa é uma medida

relativa, ou seja, refere-se a um percentual do valor investido.

$$R = \frac{V_f - V_i}{V_i}. \quad (3.2)$$

**Exemplo 3.1.** Para o fluxo de caixa do Exemplo 2.1 o retorno total anual, calculado conforme Equação 3.1, é

$$R_{T} = 11.089,87 - 10.000 = 1.089,87.$$

E pela Equação 3.2, o retorno é dado por

$$R = \frac{11.089,87 - 10.000}{10.000} \approx 0,1089.$$

Podemos dizer nesse exemplo que o retorno foi de aproximadamente 10,89%, ou seja, o patrimônio do investidor aumentou nessa operação.

**Exemplo 3.2.** Para o fluxo de caixa do Exemplo 2.5, conforme a Equação 3.2 o retorno é

$$R = \frac{30.000 - 45.000}{45.000} = -0,3333.$$

Portanto houve um retorno negativo de  $-33,33\%$ , ou seja, o investidor perdeu um terço do dinheiro investido nessa operação.

## 3.2 TAXAS DE RETORNO PARA MULTI-PERÍODO

O cálculo da taxa de retorno, quando não há movimentação no fluxo de caixa além de uma entrada e de uma saída, sempre pode ser calculado como vimos na Seção 3.1, com base em seus valores iniciais e finais.

Para períodos mais longos é comum dividi-lo em períodos menores, o que permite uma compreensão melhor do desempenho da operação. Por exemplo, para operações que duram anos é interessante saber o retorno mensal e também o retorno obtido entre momentos que não apenas o inicial e o final. Além disso, podemos utilizar o retorno de cada subperíodo para o cálculo do retorno no período todo ou mesmo de um subperíodo maior. Por exemplo, para o cálculo de um retorno anual podemos usar os retornos mensais.

Essa relação entre o retorno em subperíodos e períodos maiores é chamada de composição de taxas. Esse procedimento é interessante e traz praticidade a análise de desempenho, principalmente quando os retornos dos períodos menores já são calculados no decorrer do tempo analisado.

Para realizar a composição dos retornos, vamos supor que o período que vamos analisar esteja dividido em  $n$  subperíodos, por  $n + 1$  momentos enumerados de  $0$  à  $n$ . O valor da operação (carteira, investimento, empréstimo, etc) no momento  $j$  é denotado por  $V_j$ . Para o  $j$ -ésimo período o retorno é denotado por

$$R_j = \frac{V_j - V_{j-1}}{V_{j-1}}. \quad (3.3)$$

Então a Proposição 3.1 estabelece a forma de obter o retorno no período todo a partir dos retornos nos subperíodos.

**Proposição 3.1.** *Seja  $R_j$  o retorno do  $j$ -ésimo subperíodo. O retorno obtido para o período entre os momentos  $m - 1$  e  $n$ , onde  $m < n$  denotado por  $R_{m,n}$ , pode ser calculado por*

$$\begin{aligned} R_{m,n} &= \prod_{k=m}^n (1 + R_k) - 1 \\ &= (1 + R_m)(1 + R_{m+1}) \dots (1 + R_n) - 1 \end{aligned}$$

*Demonstração.* Da Equação 3.3

$$R_j = \frac{V_j - V_{j-1}}{V_{j-1}} = \frac{V_j}{V_{j-1}} - 1.$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} R_{m,n} &= \frac{V_n - V_{m-1}}{V_{m-1}} \\ &= \frac{V_n}{V_{m-1}} - 1 \\ &= \frac{V_m}{V_{m-1}} \frac{V_{m+1}}{V_m} \dots \frac{V_n}{V_{n-1}} - 1 \\ &= \left(1 + \frac{V_m}{V_{m-1}} - 1\right) \left(1 + \frac{V_{m+1}}{V_m} - 1\right) \dots \left(1 + \frac{V_n}{V_{n-1}} - 1\right) - 1 \\ &= \left(1 + \frac{V_m - V_{m-1}}{V_{m-1}}\right) \left(1 + \frac{V_{m+1} - V_m}{V_m}\right) \dots \left(1 + \frac{V_n - V_{n-1}}{V_{n-1}}\right) - 1 \\ &= (1 + R_m)(1 + R_{m+1}) \dots (1 + R_n) - 1. \end{aligned}$$

□

Note que, em particular, se  $m = 1$  e se  $n$  é o momento final, temos

$$R = R_{1,n} = (1 + R_1)(1 + R_2) \dots (1 + R_n) - 1. \quad (3.4)$$

**Exemplo 3.3.** Para o fluxo de caixa do Exemplo 2.1 temos que

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{10.350 - 10.000}{10.000} = 0,035, \\ R_2 &= \frac{10.681,20 - 10.350}{10.350} = 0,032, \\ R_3 &= \frac{10.990,95 - 10.681,20}{10.681,20} = 0,029, \\ R_4 &= \frac{11.089,87 - 10.990,95}{10.990,95} = 0,009 \end{aligned}$$



são os retornos dos quatro trimestres de 2021 do fundo. Então, pela Equação 3.4, o retorno anual  $R$  desse fundo para o ano de 2021 pode ser calculado por

$$R = (1 + 0,035)(1 + 0,032)(1 + 0,029)(1 + 0,009) - 1 = 0,1089.$$

Mesmo retorno obtido no Exemplo 3.1, que foi calculado com base apenas nos valores final e inicial da operação.

Existem duas possibilidades para estimar o retorno,  $R$ , que são as médias aritmética e geométrica dos retornos nos subperíodos.

A **média aritmética dos retornos** é definida por

$$\bar{R} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n R_k. \quad (3.5)$$

Essa estimativa é interessante para prever o retorno médio em um período longo, pois é menos afetada pela volatilidade do retorno ao longo dos subperíodos.

A **média geométrica dos retornos** é definida por

$$\bar{R}_G = \left( \prod_{k=1}^n (1 + R_k) \right)^{1/n} - 1. \quad (3.6)$$

Essa estimativa tem uma interpretação mais rica do que a obtida pela média aritmética. Observe que

$$(1 + \bar{R}_G)^n = \prod_{k=1}^n (1 + R_k) = \frac{V_n}{V_0}.$$

Assim, podemos entender  $\bar{R}_G$  como a taxa (constante) que se obtida em cada subperíodo produz o mesmo valor final que a sequência de retornos  $R_j$  em cada respectivo subperíodo.

Note que  $\bar{R}_G \leq \bar{R}$ , pois usando logaritmos e a concavidade da função logarítmica, temos

$$\begin{aligned} \ln(1 + \bar{R}_G) &= \ln \left( \left( \prod_{k=1}^n (1 + R_k) \right)^{1/n} \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(1 + R_k) \\ &\leq \ln \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (1 + R_k) \right) \\ &= \ln(1 + \bar{R}). \end{aligned}$$

Ainda a diferença entre  $\bar{R}$  e  $\bar{R}_G$  serve como uma medida da volatilidade dos retornos ao longo do período.

**Exemplo 3.4.** Para o Exemplo 3.2 o retorno do investidor em cada um dos trimestres foi

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{36.000 - 45.000}{45.000} = -0,2, \\ R_2 &= \frac{35.000 - 36.000}{36.000} = -0,028, \\ R_3 &= \frac{41.000 - 35.000}{35.000} = 0,171 \text{ e} \\ R_4 &= \frac{30.000 - 41.000}{41.000} = -0,268. \end{aligned}$$

A média aritmética dos retornos trimestrais de 2021 desse investidor, pela Equação 3.5, é calculada por

$$\bar{R} = \frac{(-0,2) + (-0,028) + 0,171 + (-0,268)}{4} = -0,14425$$

e a média geométrica dos retornos, conforme Equação 3.6, é calculada por

$$\bar{R}_G = [(1 - 0,2)(1 - 0,028)(1 + 0,171)(1 - 0,268)]^{\frac{1}{4}} - 1 = -0,0964$$

Ao anualizarmos a média geométrica  $\bar{R}_G = -0,0964$  obtida no Exemplo 3.4 por  $(1 - 0,0964)^4 - 1 = -0,333$  obtemos exatamente o mesmo retorno anual  $R = -0,333$  apresentado no Exemplo 3.2 no mesmo investimento. Já a média aritmética  $\bar{R} = -0,14425$  serve como uma estimativa para os próximos trimestres dessas ações e se anualizarmos essa média não obteremos o mesmo retorno do Exemplo 3.2.

### 3.3 TAXA DE RETORNO PONDERADO PELO DINHEIRO

Calcular o retorno de uma operação quando o fluxo de caixa é não-trivial pode ser uma tarefa complexa, pois não basta conhecer os valores final e inicial é preciso considerar a retorno dos aportes e retiradas proporcionalmente ao tempo em que esses valores foram investidos. Veja que para o Exemplo 2.2 se calculássemos o retorno apenas com base nos valores final e inicial teríamos um retorno negativo, o que claramente não faz jus a situação apresentada devido aos dividendos recebidos durante o período.

No Exemplo 2.4, a compra de novas ações aumenta o valor da operação afetando no cálculo do retorno, mas não tem relação com a performance da ação.

Note que é fundamental levar em consideração também o momento em que as movimentações do fluxo de caixa acontecem, pois isso afeta no resultado final da operação, dado que aportes em momentos distintos, majoritariamente, produzem retornos distintos.

Uma maneira de calcular o retorno de uma operação levando em consideração as movimentações do fluxo de caixa é montar uma equação algébrica cuja variável representa uma taxa de retorno, que representaremos como  $R_d$ .

De um lado da igualdade que representa a equação tem-se o valor final da operação e do outro as movimentações de caixa levadas ao tempo final utilizando-se  $R_d$ .

Considere um investimento cujo aporte inicial no momento  $t_0$  é  $V_0$ , que recebe uma sequência rendimentos  $b_1, b_2, \dots, b_n$  no tempos  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , respetivamente, com  $b_j > 0$ , para todo  $j$  e cujo valor final é  $V_{n+1}$ , no tempo  $t_{n+1}$ . Define-se **retorno ponderado pelo dinheiro**, que devido a seu nome em inglês (*money-weighted rate of return*) abreviaremos por MWRR, também conhecido como **taxa interna de retorno**, é um valor  $R_d$  que satisfaz a Equação 3.7.

$$V_{n+1} = V_0(1 + R_d) - \left[ b_1(1 + R_d)^{W_1} + b_2(1 + R_d)^{W_2} + \dots + b_n(1 + R_d)^{W_n} \right] \quad (3.7)$$

onde  $W_k = \frac{t_{n+1} - t_k}{t_{n+1}}$ .

As condições para existência e unicidade de  $R_d$  serão discutidas na próxima seção.

Observe que na Equação 3.7 temos no lado esquerdo o valor da operação no tempo final, e no lado direito temos o aporte inicial "corrigido" pela taxa  $R_d$  e portanto representando o valor que esse aporte produz no tempo final. Além disso, também do lado direito subtrai-se de forma corrigida, os dividendos recebidos nos momentos intermediários, ou seja, o valor que esses dividendos valeriam no tempo final. Desta forma em ambos os lados temos valores no mesmo momento da operação, sendo na esquerda o valor final que é conhecido e no lado direito os valores intermediários que são corrigidos para seus valores no tempo final. E  $R_d$  é a taxa que impõe essa igualdade.

O MWRR também pode ser visto como a taxa que iguala todas as entradas de fluxo, incluindo o resgate final, com todas as saídas de fluxo, incluindo o aporte inicial, se todos os fluxos forem corrigidos por essa taxa de forma a terem seus valores em um mesmo momento temporal. Esse ponto de vista pode ser melhor compreendido se por exemplo reescrevemos a Equação 3.7 como na Equação 3.8

$$V_{n+1} + \left[ b_1(1 + R_d)^{W_1} + b_2(1 + R_d)^{W_2} + \dots + b_n(1 + R_d)^{W_n} \right] = V_0(1 + R_d). \quad (3.8)$$

E caso haja novos aportes além do inicial, os mesmos deveriam ser corrigidos e somados ao lado direito da Equação 3.8.

No contexto de investimentos em ações é razoável supor que  $R_d > -1$ , isto é  $-100\%$  de retorno, o que significa que não é possível perder mais do que o valor investido. Tomando  $x = (1 + R_d)^{t_{n+1}}$ , a Equação 3.7 pode ser escrita como uma equação polinomial que de acordo com Teorema 3.1, que veremos na próxima seção, tem uma única solução. Se adicionalmente  $V_0 < \sum_{j=1}^n b_j$ , podemos afirmar que a Equação 3.7 admite única solução positiva, isto é  $R_d > 0$ .

**Exemplo 3.5.** Para o fluxo de caixa do Exemplo 2.2, pela Equação 3.7 o MWRR é calculado resolvendo a seguinte equação

$$29.800 = 30.000(1 + R_d) - \left[ 800(1 + R_d)^{\frac{7}{10}} + 1600(1 + R_d)^{\frac{2}{10}} \right].$$

A única solução real positiva da Equação 3.5 é  $R_d \approx 0,0755095$ .

No Exemplo 3.5, o retorno do investimento é equivalente a um investimento com taxa de juros para o período analisado de  $R_d \approx 0,0755095$ . Assim, se essa taxa é maior que a taxa de outras alternativas de investimento então esse investimento é mais vantajoso.

O MWRR é um conceito muito relevante, mas para aplicá-lo em situações reais é necessário considerar aportes e/ou retiradas no fluxo de caixa do investimento além dos momentos inicial e final. Os fluxos de caixa podem ocorrer com bastante frequência, a depender do investidor, da quantidade de ativos e das características do investimento. Portanto vamos generalizar a Equação 3.7 para considerar também aportes e retiradas.

Considere a situação em que há aportes  $a_1, a_2, \dots, a_n$  e retiradas  $b_1, b_2, \dots, b_n$  realizados nos tempos  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , respectivamente. Independente da natureza destas movimentações, todos estes números serão não-negativos.

O fluxo de caixa no tempo  $t_k$  é  $F_k = a_k - b_k$ , e pode ser positivo ou negativo. Também podemos ter  $a_k = 0$  ou  $b_k = 0$ , caso não haja aportes ou retiradas de valores. Suponha então uma operação com movimentações  $F_1, F_2, \dots, F_n$  nos tempos  $t_1, \dots, t_n$  e valor (aporte) inicial  $V_0$  no momento  $t_0$  e um valor (retirada) final  $V_1$  no momento  $t_{n+1}$ . O MWRR dessa transação é uma taxa  $R_d$  que satisfaz a Equação 3.9

$$V_1 = V_0(1 + R_d) + \sum_{k=1}^n F_k(1 + R_d)^{W_k} \quad (3.9)$$

onde  $W_k = \frac{t_{n+1} - t_k}{t_{n+1}}$ .

Abrindo o somatório, fazendo  $F_k = a_k - b_k$  e reorganizando os termos reescrevemos a Equação 3.9 como a Equação 3.10,

$$V_1 + b_1(1 + R_d)^{W_1} + \dots + b_n(1 + R_d)^{W_n} = V_0(1 + R_d) + a_1(1 + R_d)^{W_1} + \dots + a_n(1 + R_d)^{W_n} \quad (3.10)$$

Cabe novamente a observação que ao corrigir todos os valores dos fluxos de caixa para o tempo final, temos na Equação 3.10 que a soma de todas as entradas de caixa é igual a soma de todas as saídas de caixas.

**Exemplo 3.6.** No fluxo de caixa do Exemplo 2.3 temos aportes e retiradas em momentos intermediários. Assim para o cálculo do retorno ponderado pelo dinheiro temos então  $V_0 = 30.000$ ,  $a_3 = 782$ ,  $a_8 = 1.647$ ,  $b_3 = 800$ ,  $b_8 = 1.654,40$  e  $V_1 = 32.631$ . Com a equação de valor, conforme a Equação 3.10, temos

$$32.631 + 800(1 + R_d)^{\frac{7}{10}} + 1654,40(1 + R_d)^{\frac{2}{10}} = 30.000(1 + R_d) + 782(1 + R_d)^{\frac{7}{10}} + 1647(1 + R_d)^{\frac{2}{10}}$$

ou escrevendo da forma da Equação 3.9, com  $F_3 = 782 - 800 = -18$ ,  $F_8 = 1.647 - 1.654,40 = -7,40$ , segue que

$$32.631 = 30.000(1 + R_d) - 18(1 + R_d)^{\frac{7}{10}} - 7,40(1 + R_d)^{\frac{2}{10}},$$

que tem solução única real positiva  $R_d \approx 0,0885876$ .

No Exemplo 3.7 o valor das ações da Vale caiu no ano de 2021, o que levaria a um retorno negativo. Mas com o aporte realizado em novembro o retorno calculado foi aproximadamente de 5%. Neste caso o momento em que foi realizado o aporte foi de grande importância para o resultado da operação.

**Exemplo 3.7.** Com base nas informações do Exemplo 2.4 o MWRR do ano de 2021 daquela operação, conforme a Equação 3.9, é calculado por

$$54.600 = 20.400(1 + R_d) + 32.000(1 + R_d)^{\frac{10}{12}},$$

que tem solução real  $R_d \approx 0.046844$ .

A relação entre MWRR e o retorno para operações de período simples é apresentada na Proposição 3.2.

**Proposição 3.2.** *Para uma operação com apenas um aporte inicial e uma retirada final o retorno e o retorno ponderado pelo dinheiro são iguais.*

*Demonstração.* Temos que para essa operação a Equação 3.7 será  $V_0 = V_1(1 + R_d)$ . Logo,  $R_d = \frac{V_1}{V_0} - 1 = \frac{V_1 - V_0}{V_0} = R$ . □

**Exemplo 3.8.** Para o Exemplo 2.5 não temos fluxo de caixa durante o ano de 2021 e a MWRR, conforme a Equação 3.9, é a solução da equação

$$30.000 = 45.000(1 + R_d),$$

que é  $R_d = -0,333$  e que coincide com o retorno encontrado no Exemplo 3.2.

**Exemplo 3.9.** Para o Exemplo 2.6, há no momento 3 uma retirada  $b_3 = 32.800$  e  $W_3 = \frac{4-3}{4} = \frac{1}{4}$ . Pela Equação 3.10, o MWRR é  $R_d = -0,17121$ , que é a solução da equação

$$6.000 + 32.800(1 + R_d)^{\frac{1}{4}} = 45.000(1 + R_d).$$

Ao vender algumas ações em um momento oportuno, percebemos que é possível diminuir as perdas de forma considerável, isso comparando o retorno calculado no Exemplo 3.8 com o retorno calculado no Exemplo 3.9. O contrário acontece ao vender algumas ações em um momento inapropriado, aumentando as perdas, comparando agora com o retorno calculado no Exemplo 3.10.

**Exemplo 3.10.** Já no Exemplo 2.7, no momento 2 há uma retirada  $b_2 = 28.000$  e  $W_2 = \frac{2}{4}$ . Novamente pela Equação 3.10, temos que o MWRR é  $R_d = -0,37460$ , que é a solução da equação

$$6.000 + 28.000(1 + R_d)^{\frac{2}{4}} = 45.000(1 + R_d).$$

**Exemplo 3.11.** Para o Exemplo 2.8 o valor inicial é  $V_0 = 9.000$ . No momento 1 tem-se  $a_1 = 36.000$  e  $W_1 = \frac{3}{4}$ . Já no momento 3, tem-se  $b_3 = 49.200$  e  $W_3 = \frac{1}{4}$ . Para o cálculo do MWRR para o ano de 2021 vamos considerar o valor final  $V_1 = 0$ . Pela Equação 3.10, tem-se

$$6000 + 41.000(1 + R_d)^{\frac{1}{4}} = 9.000(1 + R_d) + 36.000(1 + R_d)^{\frac{3}{4}},$$

cuja MWRR associada é  $R_d = 0,077575$ .

Nos Exemplos 3.8 e 3.11 são investidos os mesmos valores no total em ações da WEG, mas em momentos e formas diferentes durante o ano 2021, assim como os saques também foram realizados em momentos diferentes. As decisões tomadas no Exemplo 3.11 permitiram obter um retorno positivo no ano de 2021 mesmo com queda no valor das ações no ano. O cálculo da MWRR permite realizar esse tipo de análise.

## UNICIDADE DO RETORNO PONDERADO PELO DINHEIRO

Para algumas operações financeiras existe uma única MWRR, que além disso é um número real, como vimos nos Exemplos 3.5 e no 3.6. Entretanto para algumas operações pode não existir soluções reais para a equação do valor, ou mesmo existir várias soluções reais. O Exemplo 3.12 ilustra essas situações.

**Exemplo 3.12.** Uma instituição financeira permite aos seus correntistas empréstimos automáticos pré-aprovados (até um certo limite) que constam como saldos negativos e também remunera os saldos positivos. Ambas as operações tem a mesma taxa. Nas contas dessa instituição é possível fazer saques e depósitos a qualquer momento. Suponha que o investidor, realize movimentações mensais, e que ao abrir a conta, sendo o tempo  $t = 0$ , fez um empréstimo de R\$ 1.000,00. No tempo  $t = 1$  realiza um depósito de R\$ 2.500,00. Passado um mês, no tempo  $t = 2$ , saca o valor integral do saldo. Vamos calcular a MWRR levando em consideração três valores sacados em  $t_2$ .

1. Considerando que o saque final foi de R\$ 1.600,00, a equação para o cálculo do MWRR é

$$1.000(1 + R_d) + 1.600(1 + R_d)^{W_2} = 2.500(1 + R_d)^{W_1},$$

em que  $W_2 = 0$  e  $W_1 = 1$ . Tomando  $x^2 = 1 + R_d$  essa equação pode ser reescrita como

$$1.000x^2 - 2.500x + 1.600 = 0$$

que não possui soluções reais;

2. Se o saque final foi de R\$ 1.540,00, a equação que determina MWRR é

$$1.000(1 + R_d) + 1.540(1 + R_d)^{W_2} = 2.500(1 + R_d)^{W_1},$$

que tem 2 soluções reais e positivas  $R_d = 0,1$  e  $R_d = 0,4$ ;

3. Para o saque final no valor de R\$ 1.440,00, a equação que determina MWRR é

$$1.000(1 + R_d) + 1.440(1 + R_d)^{W_2} = 2.500(1 + R_d)^{W_1},$$

que possui soluções  $R_d = -0,1$  e  $R_d = 0,6$ .

O Exemplo 3.12 ilustra o ponto fraco do MWRR, que é quando não temos unicidade da taxa, ou quando sequer existe.

Desejamos identificar as condições em uma operação financeira que impliquem em uma MWRR única e superior a  $-1$ . Nesse sentido, o Teorema 3.1, que será apresentado a seguir, conhecido como Regra de Sinais de Descartes é nossa principal ferramenta.

Por exemplo, se  $V_0 > 0$  e  $F_k < 0$  para  $k = 1, 2, \dots, n$ , então há uma MWRR única e maior que  $-1$ . As operações típicas que correspondem a esta situação são empréstimos de um único valor reembolsados por um ou mais pagamentos futuros, isso do ponto de vista de quem está tomando o empréstimo.

De forma análoga, uma operação de investimento com apenas um aporte, o inicial, e recebimento de dividendos/juros/resgates ao longo do período também terá única MWRR, pois  $V_0 < 0$  e  $F_k > 0$  para  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Observando que as equações do valor são polinomiais, as afirmações acima estão baseadas no Teorema 3.1, apresentado em Wang (2004).

**Teorema 3.1.** *Para um polinômio  $p(x) = a_n x^{b_n} + a_{n-1} x^{b_{n-1}} + \dots + a_0 x^{b_0}$  com  $a_i \neq 0$  e  $b_n > b_{n-1} > \dots > b_0 \geq 0$ , o número de raízes positivas é igual ao número de mudanças de sinal da sequência  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ , ou é menor que esse número por um múltiplo de 2.*

Ideia de demonstração:

Seguiremos a demonstração apresentada em Dario e Silva (2018). Supomos  $a_n > 0$ . Se  $a_0 > 0$ , então o número de mudanças de sinal na sequência de coeficientes de  $p(x)$  é par. De  $a_n > 0$  temos que  $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = \infty$ . Disso e de  $p(0) = a_0 > 0$  temos que o gráfico de  $p(x)$  cruza o semi-eixo positivo  $x$  uma quantidade par de vezes. Isso implica que o número de raízes positivas de  $p(x)$  é par, pois se o gráfico de  $p(x)$  cruza o semi-eixo positivo  $x$  em  $a$ , então  $a$  é uma raiz de multiplicidade ímpar, veja o Lema 2.0.6 em Coutinho (2016), e se o gráfico de  $p(x)$  toca, mas não cruza, o semi-eixo positivo  $x$  em  $a$ , então a multiplicidade da raiz  $a$  é par, veja o Lema 2.0.7 em Coutinho (2016). Desta forma, as raízes múltiplas contribuem com um número par de raízes positivas.

Para o caso em que  $a_0 = p(0) < 0$ , a demonstração é similar. Neste caso, tanto o número de variações de sinal na sequência dos coeficientes de  $p(x)$  como o número de raízes positivas de  $p(x)$  são ímpares.

Portanto, temos que o número de raízes positivas de  $p(x)$  e o número de variações de sinal de seus coeficientes têm a mesma paridade.

Falta mostrar que o número de variações de sinal dos coeficientes limita o número de raízes positivas. Utilizaremos indução sobre o grau de  $p(x)$  para mostrar isso.

Para  $n = 1$ , a única raiz de  $p(x) = a_1x + a_0$  é positiva se e somente se  $a_0$  e  $a_1$  tiverem sinais opostos. Vamos agora assumir como hipótese de indução que a afirmação é válida para polinômios de grau menor ou igual a  $n - 1$ .

Supondo que  $p$  tem  $m$  raízes reais positivas e que a quantidade de variações de sinal da sequência de seus coeficientes é  $k$  e  $k < m$ , seria necessário termos  $m \geq k + 2$  para manter a paridade. A derivada  $p'(x) = na_nx^{n-1} + \dots + 2a_2x + a_1$  tem ao menos  $k + 1$  raízes reais positivas. De fato, no intervalo aberto entre duas raízes consecutivas de  $p$ , o Teorema de Rolle garante que há uma raiz para a derivada  $p'$ . Mas isso contraria a hipótese de indução, já que a quantidade de variações de sinal dos coeficientes de  $p'$  é menor que  $k$ . Portanto,  $m \leq k$ .

Para  $a_n < 0$  a análise é análoga. □

Para uma demonstração mais detalhada veja Coutinho (2016).

### 3.4 TAXA DE RETORNO PONDERADA PELO DINHEIRO MODIFICADO

Vimos na Seção 3.3 que apesar de muito interessante, nem sempre é possível calcular o MWRR ou mesmo existem múltiplas soluções da equação do valor. Para contornar essas dificuldades existem várias estratégias, uma delas é o **retorno ponderado pelo dinheiro modificado**, também conhecido como **Método de Dietz Modificado**, que consiste na mesma ideia de MWRR de corrigir os fluxos de caixa e comparar os totais de entradas e saídas de caixa em um mesmo tempo, porém usando juros simples ao invés de juros compostos nessa correção.

Considere a situação em que há aportes  $a_1, a_2, \dots, a_n$  e retiradas  $b_1, b_2, \dots, b_n$  realizados nos tempos  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , respectivamente. Independente da natureza destas movimentações, todos estes números serão positivos. O fluxo de caixa a cada tempo  $k$  é  $F_k = a_k - b_k$ , e pode ser positivo ou negativo. Para cada tempo  $k$  podemos ter  $a_k = 0$  ou  $b_k = 0$ , caso não haja aportes ou retiradas de valores. Suponha então uma operação com movimentações  $F_0, F_1, F_2, \dots, F_n$  nos tempos  $1, \dots, n$ . Ainda, um valor inicial  $V_0$  no momento  $t_0 = 0$  e um valor final  $V_1$  no momento  $t_{n+1}$ . O **retorno ponderado pelo dinheiro modificado**, que abreviaremos por MMWRR, dessa transação é a taxa  $R_{dm}$  que satisfaz a Equação 3.11,

$$V_1 = V_0(1 + R_{dm}) + F_1(1 + W_1R_{dm}) + F_2(1 + W_2R_{dm}) + \dots + F_n(1 + W_nR_{dm}). \quad (3.11)$$



Note que a Equação 3.11 pode ser resolvida isolando  $R_{dm}$ , obtemos a fórmula

$$R_{dm} = \frac{V_1 - \left[ V_0 + \sum_{k=1}^n F_k \right]}{V_0 + \sum_{k=1}^n F_k W_k}. \quad (3.12)$$

Observe que no lado direito da Equação 3.12 o numerador é o valor do rendimento líquido da operação no período, enquanto o denominador é a soma do valor inicial com os fluxos de caixa ajustados de forma proporcional ao período de tempo entre o momento que o fluxo acontece até o final do período.

**Exemplo 3.13.** Novamente consideramos o fluxo de caixa do Exemplo 2.3 no qual temos aportes e retiradas em momentos intermediários. Assim para o cálculo do MMWRR temos então  $V_0 = 30.000$ ,  $a_3 = 782$ ,  $a_8 = 1.647$ ,  $b_3 = 800$ ,  $b_8 = 1.654,40$  e  $V_1 = 32.631$ . Conforme a Equação 3.11 temos

$$\begin{aligned} 32.631 &= 30.000(1 + R_{dm}) + (782 - 800) \left( 1 + \frac{7}{10} R_{dm} \right) + (1647 - 1654,40) \left( 1 + \frac{2}{10} R_{dm} \right) \\ &= 30.000(1 + R_{dm}) - 18 \left( 1 + \frac{7}{10} R_{dm} \right) - 7,40 \left( 1 + \frac{2}{10} R_{dm} \right) \end{aligned}$$

e da Equação 3.12 temos

$$\begin{aligned} R_{dm} &= \frac{32.631 - [30.000 + (-18 - 7,40)]}{30.000 + (-18 \frac{7}{10} - 7,40 \frac{2}{10})} \\ &= 0,0885882. \end{aligned}$$

Em comparação com o MWRR, para o mesmo fluxo de caixa obtido no Exemplo 3.6, cujo valor foi  $R_d = 0,0885876$ , podemos perceber que o MMWRR é bem próximo e associado a sua simplicidade de cálculo, torna-se bastante razoável.

### 3.5 TAXA DE RETORNO PONDERADO NO TEMPO

Outra forma de tratar operações com fluxos de caixa é a composição de retornos dos subperíodos delimitados pelas datas onde houve entradas ou saídas de caixa. O valor final de cada subperíodo será tomado logo antes do fluxo. Desta maneira os valores final e inicial de subperíodos consecutivos não são iguais, diferindo no valor do fluxo. Assim as movimentações não influenciam no cálculo de nenhum dos retornos dos subperíodos.

Vamos supor que durante o período analisado hajam  $n - 1$  fluxos de caixa, que dividem o período em  $n$  subperíodos. Os extremos dos subperíodos são os  $n + 1$  momentos enumerados de 0 à  $n$  e denotados por  $t_0, \dots, t_n$ . Os momentos em que houve movimentação são enumerados de 1 à  $n - 1$  e 0 e  $n$  são respectivamente os momentos inicial e final do período. Mantemos a notação para o valor do fluxo no momento  $k$  como  $F_k$ .

Observe que a subdivisão do período não é necessariamente uniforme. Vamos denotar por  $V_k$  o valor da operação logo antes do fluxo de caixa  $F_k$  e por  $V_0$  e  $V_n$  respectivamente os valores inicial e final da operação.

O **retorno ponderado no tempo**, abreviado por TWRR (do inglês *Time-Weighted Rate of Return*) denotado por  $R_t$ , é definido pela Equação 3.13

$$R_t = \left[ \frac{V_1}{V_0} \times \frac{V_2}{V_1 + F_1} \times \frac{V_3}{V_2 + F_2} \times \cdots \times \frac{V_k}{V_{k-2} + F_{k-2}} \times \frac{V_n}{V_{n-1} + F_{n-1}} \right] - 1. \quad (3.13)$$

Ao compor taxas em subperíodos nos quais não há fluxo de caixa e ao estabelecer um novo subperíodo a cada fluxo de caixa, o TWRR torna-se insensível ao fluxo de caixa. Esse é um aspecto relevante para uma taxa de retorno pois, em geral, os fluxos de caixa não são uma escolha do gestor de um fundo e sim dos investidores. Por essa razão o TWRR é frequentemente utilizado para analisar o desempenho do gestor de fundos de investimento ou mesmo para comparar diferentes fundos.

**Exemplo 3.14.** Para o fluxo de caixa do Exemplo 2.2, temos que  $F_1 = -800$ ,  $F_2 = -1.600$  e assumimos que  $V_1 = 23.800$  e  $V_2 = 28.600$ , o que reflete o valor da ação nos respectivos tempos, R\$23,80 e R\$28,60. Pela Equação 3.13 o TWRR,  $R_t$ , dessa operação é:

$$\begin{aligned} R_t &= \left[ \frac{23.800}{30.000} \times \frac{28.600}{23.800 - 800} \times \frac{29.800}{28.600 - 1.600} \right] - 1 \\ &= 0,08879. \end{aligned}$$

**Exemplo 3.15.** Considerando o fluxo de caixa do Exemplo 2.3 temos  $F_1 = -18$  e  $F_2 = -7,40$  e assumindo os mesmos valores de cada ação do Exemplo 3.14 temos  $V_1 = 23.800$  e  $V_2 = 29.572,40$ . Pela Equação 3.13 o TWRR,  $R_t$ , dessa operação é:

$$\begin{aligned} R_t &= \left[ \frac{23.800}{30.000} \times \frac{29.572,40}{23.800 - 18} \times \frac{32.631}{29.572,40 - 7,40} \right] - 1 \\ &= 0,08879. \end{aligned}$$

Quando comparamos os Exemplos 3.14 com 3.15, o que os difere essencialmente é a tomada de decisão com que é feito com os valores dos dividendos, reinvestir ou não. No cálculo do TWRR os fluxos de caixa não impactam na taxa, portanto a performance das operações é regida pelo valor das ações da Petrobras nesses exemplos. Conseqüentemente, o TWRR obtido é o mesmo para as duas operações.

**Proposição 3.3.** Seja  $R_j$  o retorno do período de  $t_{j-1}$  até  $t_j$ . O TWRR é dado por

$$R_t = (1 + R_1) \times (1 + R_2) \times \cdots \times (1 + R_n) - 1. \quad (3.14)$$

*Demonstração.* Para o cálculo do retorno  $R_j$  temos que  $V_{j-1} + F_{j-1}$  é o valor da operação no início do subperíodo e  $V_j$  é o valor da operação no final do subperíodo. Temos então que

$$1 + R_j = 1 + \frac{V_j - (V_{j-1} + F_{j-1})}{V_{j-1} + F_{j-1}} = \frac{V_{j-1} + F_{j-1}}{V_{j-1} + F_{j-1}} + \frac{V_j - (V_{j-1} + F_{j-1})}{V_{j-1} + F_{j-1}} = \frac{V_j}{V_{j-1} + F_{j-1}}.$$

Note que  $V_0 + F_0 = V_0$ . Logo,

$$(1 + R_1) \times (1 + R_2) \times \cdots \times (1 + R_n) - 1 = \left[ \frac{V_1}{V_0} \times \frac{V_2}{V_1 + F_1} \times \cdots \times \frac{V_n}{V_{n-1} + F_{n-1}} \right] - 1 = R_t$$

□

**Exemplo 3.16.** Considerando o fundo do Exemplo 3.14, os retornos dos subperíodos apresentados são

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{23.800 - 30.000}{30.000} = -0,20666, \\ R_2 &= \frac{28.600 - (23.800 - 800)}{23.800 - 800} = 0,24347 \text{ e} \\ R_3 &= \frac{29.800 - (28.600 - 1.600)}{28.600 - 1.600} = 0,10371. \end{aligned}$$

Pela Equação 3.14, o TWRR é

$$R_t = [1 + (-0,20666)] \times (1 + 0,24347) \times (1 + 0,10371) - 1 = 0,08879,$$

que é o mesmo TWRR obtido no Exemplo 3.14.

Quando desconsideramos o aporte realizado no Exemplo 2.4, o retorno do investidor é igual ao desempenho das ações da Vale. Nesse caso temos que o retorno e o TWRR são iguais, pois o TWRR não é influenciado pelos fluxos de caixa.

**Exemplo 3.17.** Para o fluxo de caixa do Exemplo 2.4, temos que  $F_1 = 32.000$  e como cada ação está valendo R\$ 64,00 temos que  $V_1 = 12.800$ . Pela Equação 3.13 o TWRR,  $R_t$ , dessa operação é:

$$R_t = \left[ \frac{12.800}{20.400} \times \frac{54.600}{12.800 + 32.000} \right] - 1 = -0,2352.$$

Com base nos valores das ações o retorno obtido pela Vale é:

$$R = \frac{78 - 102}{102} = -0,2352.$$

É importante salientar que o TWRR não é uma taxa de retorno real, apesar de em alguns casos coincidirem. Isto fica claro quando observamos o Exemplo 3.17, cujo TWRR é negativo mesmo que o investimento realizado tenha dado em pequeno lucro.

A relação entre TWRR e o retorno para operações de período simples é apresentada na Proposição 3.4

**Proposição 3.4.** *Para uma operação com apenas um aporte inicial e uma retirada final o retorno e o retorno ponderado no tempo são iguais.*

*Demonstração.* Temos que para essa operação a Equação 3.13 será  $R_t = \frac{V_1}{V_0} - 1$ , logo temos que  $R_t = \frac{V_1 - V_0}{V_0} = R$  □

**Exemplo 3.18.** Para o fluxo de caixa do Exemplo 2.5 não há fluxo de caixa durante o período analisado. Pela Equação 3.13 o TWRR,  $R_t$ , dessa operação é:

$$R_t = \frac{30.000}{45.000} - 1 = \frac{30.000 - 45.000}{45.000} = -0,333.$$

**Exemplo 3.19.** Considerando o fluxo de caixa do Exemplo 2.6, temos que  $F_1 = -32.800$  e com base no valor dessa ação temos que  $V_1 = 41.000$ . Pela Equação 3.13 o TWRR,  $R_t$ , dessa operação é:

$$R_t = \frac{41.000}{45.000} \times \frac{6.000}{41.000 - 32.800} - 1 = -0,333.$$

**Exemplo 3.20.** Considerando o fluxo de caixa do Exemplo 2.7, temos que  $F_1 = -32.800$  e com base no valor dessa ação temos que  $V_1 = 41.000$ . Pela Equação 3.13 o TWRR,  $R_t$ , dessa operação é:

$$R_t = \frac{35.000}{45.000} \times \frac{6.000}{41.000 - 28.000} - 1 = -0,333.$$

**Exemplo 3.21.** Com base no Exemplo 2.8 e seu fluxo de caixa, temos que  $V_1 = 7.200$ ,  $F_1 = 36.000$ ,  $V_2 = 49.200$ ,  $F_2 = 41.000$ . Pela Equação 3.13 o TWRR,  $R_t$ , dessa operação é:

$$R_t = \frac{7.200}{9.000} \times \frac{49.200}{7.200 + 36.000} \times \frac{6.000}{49.200 - 41.000} - 1 = -0,333.$$

Os Exemplos 3.18, 3.19, 3.20 e 3.21 apresentaram o mesmo TWRR, isso ocorre pois para o TWRR os fluxos caixa durante o período não são relevantes.

### 3.6 COMPARAÇÃO ENTRE AS TAXAS DE RETORNO

As taxas de retorno discutidas tem aplicações que dependem dos aspectos das operações e do que se deseja medir. Não podemos afirmar que uma das taxas será sempre maior, menor ou igual que outra para um caso geral.

Como já mencionamos o MWRR é uma excelente medida para avaliar o desempenho de um fundo, mas não de um gestor de investimento, pois é afetado pelo fluxo de caixa do período avaliado, o que não é controlado pelo gestor.

Já o TWRR não é afetado pelos fluxos de caixa do fundo durante o período analisado, medindo apenas desempenho do capital comprometido com o gestor durante o período. Assim sendo uma métrica adequada a avaliação do gestor.

O MMWRR tem propriedades parecidas com o MWRR, o que é natural uma vez que MMWRR é uma aproximação/simplificação do MWRR. A principal vantagem do MMWRR está na simplicidade de obtê-lo, quando comparado ao MWRR.

Como vimos nas Proposições 3.2 e 3.4, as taxas MWRR e TWRR, são iguais ao retorno, se aplicadas em operações sem fluxo de caixa.

Em Canada (2016b) foi apontado que se houver uma retirada de capital da operação logo antes de um período onde há um retorno negativo, ou se houver um aporte logo antes de

um retorno positivo o MWRR tem a tendência de ser maior que o TWRR naquele período, entretanto se a retirada acontecer logo antes de um período de retorno positivo, ou houver um aporte logo antes de um período negativo MWRR tem a tendência de ser menor que o TWRR naquele período.

Os exemplos de investidores da Seção 2 que compraram ações da WEG nos permitem observar tais afirmações. O Exemplo 2.5 onde não há fluxo de caixa durante o período analisado, teve o retorno, o MWRR e o TWRR calculados nos Exemplos 3.2, 3.8 e 3.18 respectivamente, e como esperado os retornos foram iguais.

Já para o Exemplo 2.6 em que o investidor vendeu parte de suas ações antes de um período de retorno negativo, o MWRR foi maior que o TWRR, calculados, respectivamente, nos Exemplos 3.9 e 3.19.

Por fim temos o Exemplo 2.7 em que o investidor vendeu as ações logo antes de uma subida do preço. Neste caso o MWRR é menor que o TWRR, conforme calculamos nos Exemplos 3.10 e 3.20, respectivamente.

Em Canada (2016a) podemos ver mais um exemplo prático onde se compara MWRR e TWRR.

As taxas MWRR, MMWRR e TWRR permitem comparar operações que tenham características bastante diferentes, como veremos no Capítulo 4.

## 4 PROPOSTAS DE APLICAÇÃO

Neste capítulo apresentamos propostas que podem ser desenvolvidas com estudantes do Ensino Fundamental - Anos Finais e/ou Médio, na temática de educação financeira dentro da disciplina de matemática. Nessas propostas as taxas de retorno apresentadas no Capítulo 3 são utilizadas para medir o desempenho de uma carteira de investimentos e para comparar diferentes operações financeiras.

### 4.1 PROPOSTA: USO DO MWRR PARA UM ATIVO FINANCEIRO

Adolescentes menores de 18 anos já podem fazer investimentos em ações e títulos de renda fixa, desde que respeitadas certas restrições para essas operações, como por exemplo, as movimentações devem ser realizadas pelos responsáveis caso o adolescente não seja emancipado. Para entender melhor as restrições para que menores possam investir, veja Nunes (2022). É importante então que os estudantes possuam conhecimento que os ajudem na tomada de decisões.

Nessa proposta se busca fazer com que o estudante compreenda em que situações é melhor ou pior investir de acordo com o mercado, utilizando o cálculo de retorno e suas variações para isso. Uma sugestão para tal é apresentada no Exemplo 4.1.

**Exemplo 4.1.** Vamos considerar uma empresa fictícia que chamaremos de EMPRE, a qual possui ações, o que possibilita que pessoas possam investir na mesma. A Tabela 4.1 apresenta o valor unitário da ação da EMPRE, no final de cada mês, no ano de 2021 .

Tabela 4.1 – Valor das ações da EMPRE em 2021

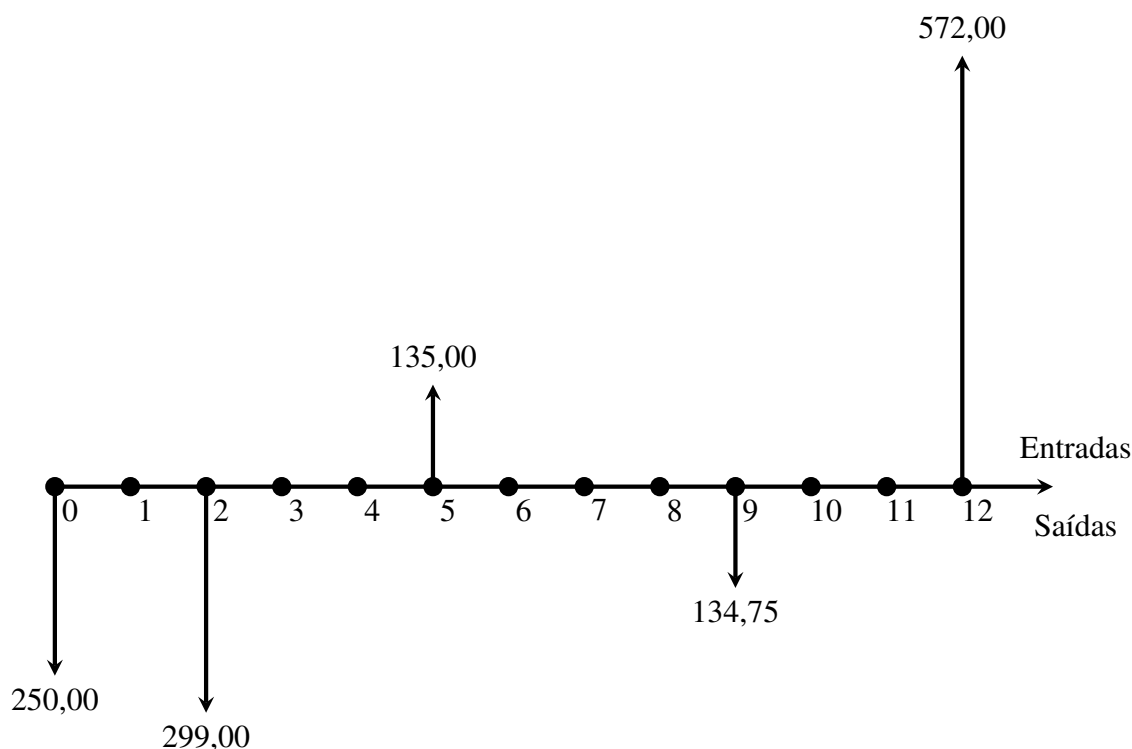
Mês	Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez
Valor unitário R\$	2,55	2,60	2,80	2,75	2,70	2,60	2,35	2,40	2,45	2,50	2,50	2,60

Fonte: Autor.

Supondo que um investidor tenha comprado 100 ações da EMPRE por R\$2,50 cada uma, no primeiro dia de 2021. E que pretenda investir durante o ano mais R\$300,00 em ações da EMPRE. Ainda, supomos que caso ele venda ações pode reinvestir o mesmo valor em um momento posterior. Supondo que ele só compra e vende ações no final de um mês e que não há custos de corretagem e impostos, como ele poderia realizar esse investimento de uma maneira que tivesse um bom retorno, realizando até três movimentações no fluxo de caixa durante o ano?

Para responder essa pergunta, levaremos em consideração as informações apresentadas na Tabela 4.1. Um possível fluxo de caixa é: compra de 115 ações em Fevereiro; venda de 50 em Maio; compra de 55 ações em Setembro.

Figura 4.1 – Fluxo de caixa do Exemplo 4.1



Fonte: Autor.

Levando em consideração esse fluxo de caixa cujo diagrama é apresentado na Figura 4.1, notamos que há três trocas de tipo de movimentação entre aportes e retiradas. Como o número de trocas é ímpar, existe ao menos uma taxa MWRR real e portanto o MWRR é adequado para essa análise. Caso não se possa garantir a existência de raízes reais no cálculo MWRR, podemos usar o MMWRR. O MWRR pode ser obtido pela Equação 3.10, considerando

- $V_0 = 100 \times 2,50 = 250$ ;
- $F_2 = 115 \times 2,60 = 299$ ,  $W_2 = \frac{12-2}{12} = \frac{10}{12}$ ;
- $F_5 = -(50 \times 2,70) = -135$ ,  $W_5 = \frac{12-5}{12} = \frac{7}{12}$ ;
- $F_9 = 55 \times 2,45 = 134,75$ ,  $W_9 = \frac{12-9}{12} = \frac{3}{12}$  e
- $V_1 = 220 \times = 572$

que resulta em

$$572 = 250(1 + R_d) + 299(1 + R_d)^{\frac{10}{12}} - 135(1 + R_d)^{\frac{7}{12}} + 134,75(1 + R_d)^{\frac{3}{12}} \quad (4.1)$$

e que tem solução real  $R_d = 0,051259$  ou seja um retorno de 5,13% aproximadamente.

Para os mesmo dados usando a Equação 3.12 obtemos o MMWRR na Equação 4.2.

$$R_{dm} = \frac{572 - [250 + 299 - 135 + 134,75]}{250 + \left[ \left( 299 \times \frac{10}{12} \right) - \left( 135 \times \frac{7}{12} \right) + \left( 134,75 \times \frac{3}{12} \right) \right]} = 0,051199... \quad (4.2)$$

Baseado nos cálculos realizados nas Equações 4.1 e 4.2, é interessante que os estudantes, separados em equipes ou de forma individual, escolham maneiras diferentes de realizar os fluxos de caixa, e calculem os seus retornos.

Na sequência propor aos estudantes que apresentem os resultados obtidos e os questionar sobre a razão da obtenção de diferentes valores, bem como o motivo de que algumas escolhas levarem a retornos maiores. É esperado que eles percebam que ao vender ações no momento em que ela se encontra num preço maior, ou compra-las quando seu preço é o menor possível, permitem obter um retorno maior na operação. No Exemplo 4.1 o investidor poderia comprar o máximo de ações possíveis em Janeiro, vender todas as ações em Março e em Julho com o capital que possui comprar o maior número de ações possíveis, assim aumentaria ainda mais seu retorno.

Vale salientar que os cálculos podem ser realizados em aplicativos e sites como WolframAlpha, e que podem ser usados em smartphones ou computadores. Planilhas eletrônicas também têm funções que calculam o MWRR e o MMWRR. A sintaxe dessas funções vai depender da planilha usada.

## 4.2 PROPOSTA: USO DA MWRR PARA UMA CARTEIRA DE INVESTIMENTOS

Esta proposta vem como algo complementar e em continuidade da proposta apresentada na Seção 4.1, sendo possível ser aplicada isoladamente. Nesta proposta os estudantes também deverão simular a compra e venda de ativos financeiros, mas com algumas opções a mais de ativos, porém desconhecendo seus valores futuros. Essa proposta aproxima os alunos de uma situação real de investimento. Aqui eles poderão aplicar os conhecimentos e estratégias desenvolvidas na atividade anterior. Uma sugestão segue no Exemplo 4.2, mas os estudantes podem escolher outras ações e o professor se encarrega de informar as cotações nos momentos pertinentes. Esses dados estão disponíveis na internet, por exemplo em sites como o do *google* *finanças*.

**Exemplo 4.2.** Suponha um investidor comprou 300 ações da Metarlúrgica Gerdau (GOAU4) ao preço de R\$ 11,58 cada uma, 200 ações do Banco Itaú (ITUB4), a R\$ 25,55 e 150 ações da rede de petshops Petz (PETZ3), a R\$ 20,92 cada. O valor inicial de sua carteira de investimentos  $V_0$  é calculado por

$$V_0 = 300 \cdot 11,58 + 200 \cdot 25,55 + 150 \cdot 20,92 = 11.722,00.$$

Considerando que um mês depois as ações da Gerdau estão num preço de R\$12,74, as do Itaú estão custando R\$28,07 e da Petz R\$19,23 cada. O retorno de cada ação foi respectivamente



$$R_1 = \frac{12,74 - 11,58}{11,58} = 0,1001 = 10,01\% \quad R_2 = \frac{28,07 - 25,55}{25,55} = 0,0986 = 9,86\%$$

$$R_3 = \frac{19,23 - 20,92}{20,92} = -0,0807 = -8,07\%$$

O valor  $V_1$  da carteira e seu retorno  $R$  são calculados por

$$V_1 = 300 \cdot 12,74 + 200 \cdot 28,07 + 150 \cdot 19,23 = 12.320,50$$

$$R = \frac{12.320,50 - 11.722,00}{11.722,00} \approx 0,051 = 5,1\%$$

Com as informações apresentadas até esse momento, em posse de R\$2.000,00, e com a possibilidade de vender a quantidade de ações que deseje e reinvestir o dinheiro, como o investidor poderia realizar uma nova compra de ações dentre essas apresentadas de modo que tenha a expectativa de um bom retorno?

Proponha aos estudantes que eles façam uma escolha que eles achem interessante diante dessa situação. Após eles realizarem suas escolhas, apresente aos alunos a seguinte possibilidade. O investidor vende 50 ações do Itaú, compra 115 ações da Gerdau e 100 ações da Petz. Havendo um fluxo de caixa  $F_1$  é

$$F_1 = 115 \cdot 12,74 - 50 \cdot 28,07 + 100 \cdot 28,53 = 1.984,60.$$

Mais um mês depois os preços das ações da Gerdau, Itaú e Petz estão R\$14,86, R\$27,53 e R\$24,10 respectivamente. Como o investidor tem agora 415 ações da Gerdau, 150 do Itaú e 250 ações da Petz. O valor  $V_2$  da carteira nesse momento é

$$V_2 = 415 \cdot 14,86 + 150 \cdot 27,53 + 250 \cdot 24,10 = 16.321,40.$$

Utilizando a Equação 3.9, o MWRR da carteira para esses dois meses é  $R_d = 0,2064$ , que é a solução de

$$16.321,40 = 11.722(1 + R_d) + 1.984,60(1 + R_d)^{\frac{1}{2}}.$$

Nesse momento cada aluno deve calcular seu MWRR e em seguida apresentar seu resultado e escolhas. Após esse momento abra uma discussão sobre os possíveis motivos de cada resultado.

Para o Exemplo 4.2 é possível resolver sem o auxílio de softwares, pois se trata de uma equação com um único radical de índice 2. O que pode ser trabalhado com os estudantes, caso o professor ache viável.

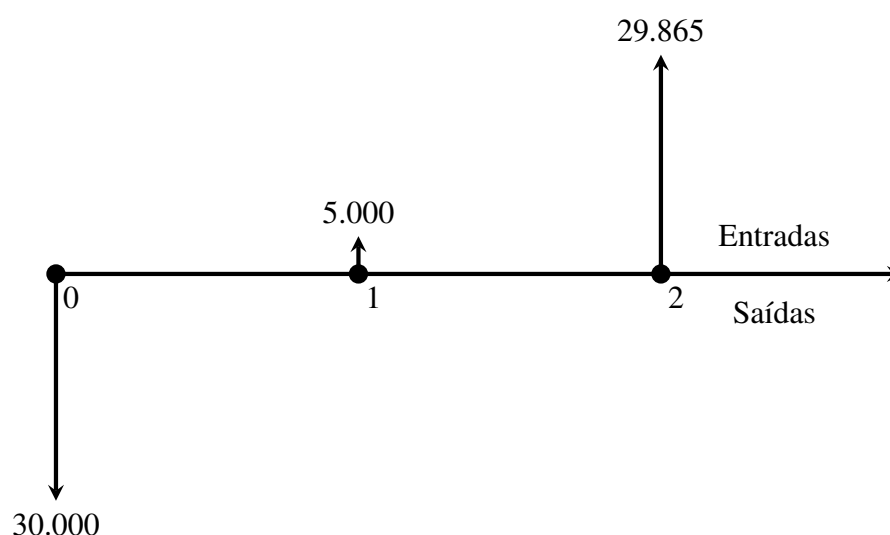
### 4.3 PROPOSTA: MWRR X TWRR

Um assessor de investimentos administra o valor que lhe é confiado, investindo de acordo com o perfil de seu cliente, de modo a obter a maior rentabilidade possível. Mas para além dos recursos dispostos não tem autonomia para realizar aportes ou saques. Podendo realizar movimentação de capital de um investimento para o outro quando acordado. De modo geral é o cliente quem realiza aportes e saques, decisões que por muitas vezes não estão relacionadas com o investimento e independem do assessor. Dessa forma não é correto levar em consideração esses fluxos de caixa ao analisar a performance do gerente.

A maneira de avaliar o retorno de uma carteira e o desempenho do assessor são diferentes. Então se um gerente de investimentos afirma que obteve um determinado retorno, não significa que algum dos seus clientes obteve o mesmo retorno em sua carteira. Isso é mostrado no Exemplo 4.3

**Exemplo 4.3.** Uma pessoa em posse de R\$30.000,00 deseja investir esse valor, mas por desconhecer o mercado financeiro, pede orientação de um assessor de investimentos, que monta uma carteira que tem um fundo de investimento, selecionando também algumas ações e uma aplicação de renda fixa. Seis meses depois, após receber alguns rendimentos, seu patrimônio investido é de R\$32.150,00, então ele decide comprar um aparelho celular e realiza um saque no valor de R\$5.000,00. Após outros seis meses o valor de sua carteira é de R\$29.865,00. O fluxo de caixa dessa operação financeira está representado no Figura 4.2.

Figura 4.2 – Fluxo de caixa do Exemplo 4.3



Fonte: Autor.

Para o cálculo do MWRR da carteira investimento utilizaremos a Equação 3.9, sendo  $V_0 = 30.000$ ,  $F_1 = -5.000$ ,  $W_1 = \frac{1}{2}$  e o valor final  $V_2 = 29.865$  temos

$$29.865 = 30.000(1 + R_d) - 5.000(1 + R_d)^{\frac{1}{2}}$$

cuja solução é  $R_d = 0,17626$ .

Já a performance do agente de investimento deve ser calculada pelo TWRR. Utilizaremos para isso a Equação 3.13, com  $V_0 = 30.000$ ,  $F_1 = -5.000$ ,  $V_1 = 32.150$  e  $V_2 = 29.865$

$$R_t = \left[ \frac{32.150}{30.000} \times \frac{29.865}{32.150 - 5.000} \right] - 1 = 0,17883\dots$$

Fica a seguinte questão, se a operação é a mesma, por que o MWRR é menor que o TWRR?

Propomos que após fazer esse exemplo com os alunos, que eles discutam as diferenças entre MWRR e TWRR e qual o impacto que aportes e retiradas têm no retorno. Por exemplo, fazer um aporte (ou retirada) em um ativo que terá uma boa (ou má) taxa de retorno no período após a movimentação, tem quais impactos no retorno da operação?

Caso ache conveniente peça que eles calculem o TWRR das operações criadas por eles nos Exemplos 4.1 ou do 4.2 para que tenham mais informações para chegar a uma conclusão.

## 5 CONCLUSÃO

Este trabalho visa contribuir com a Educação Financeira de estudantes do nível básico, tratando das taxas de retorno. As taxas de retorno são amplamente conhecidas por profissionais de finanças e investimentos, sendo inclusive tema obrigatório para a certificação destes profissionais. Conhecer formas de calcular ou estimar taxas de retorno pode fazer bastante diferença nas decisões que as pessoas precisam tomar em seu dia-a-dia, por esse motivo consideramos importante que esse assunto seja apresentado e discutido assim que haja conhecimento matemático o suficiente para sua compreensão.

Para representar com maior clareza uma operação financeira e conseqüentemente compreendê-la melhor introduzimos o fluxo de caixa. O termo fluxo de caixa é bastante corriqueiro entre empresários, comerciantes e outros profissionais que presam pela organização de seus empreendimentos. Existem várias formas de expressar o fluxo de caixa de uma operação e neste trabalho optamos pelo diagrama, por seu apelo visual e simplicidade. O fluxo de caixa por si só já é uma ferramenta bastante relevante para os jovens que ingressaram no mercado de trabalho e possivelmente no mercado financeiro como investidores, pois organiza as operações e isso é fundamental para tomar decisões melhores.

No Capítulo 3 apresentamos propriamente as taxas de retorno, considerando os aspectos das operações financeiras quanto a tipo de períodos e existência ou não de movimentações ao longo do período. Vimos que o retorno ponderado pelo dinheiro, ou taxa interna de retorno, tem potencial para ser uma ótima medida de desempenho de uma operação com muitas complexidades, contudo também vimos que há uma limitação em seu cálculo que requer a obtenção de raízes de polinômios de graus altos e isso é impeditivo tanto pela complexidade quanto pela necessidade de escolher uma das possíveis raízes. A alternativa que contorna essa situação foi modificar essa taxa considerando juros simples ao invés de compostos e isso faz bastante sentido se os períodos forem curtos. Uma terceira alternativa foi a taxa de retorno ponderada no tempo. Essa taxa é amplamente utilizada para medir o desempenho de um gestor ou assessor de investimentos, pois leva em consideração o desempenho dos ativos, mas não as quantidades e momentos dos aportes e retiradas de cada ativo, o que possivelmente independe do gestor.

Uma vez apresentados os conceitos, no Capítulo 4 apresentamos três propostas para a aplicação dos temas em aulas de Educação Financeira e/ou Matemática. Essas propostas podem ser aprofundadas dependendo do contexto em que forem aplicadas. Também suprimimos algumas demandas vindas da implementação do Novo Ensino Médio, permitindo a contextualização de alguns conteúdos trabalhados em sala de aula.

Esperamos que esse trabalho esteja em nível acessível a professores de matemática, tendo isto em vista, procuramos enriquecer o desenvolvimento deste texto com muitos exemplos,

diversos deles baseados em valores reais de ações com o objetivo de deixá-los o mais autênticos possível, ainda que talvez seja necessário buscar fora do texto alguns termos e conceitos de finanças.

## REFERÊNCIAS

- BACON, C. R. e. a. **Performance Evaluation: Rate-of-Return Measurement**. USA: CFA Institute, 2011. Disponível em: <<https://www.cfainstitute.org/-/media/documents/support/programs/cipm/2019-cipm-11v1r4.ashx>>. Acesso em: 10 abr. 2022. 12
- BROVERMAN, S. A. **Mathematics of Investment and Credit**. 5ª edição. ed. Winsted: ACTEX Publications, 2010. 12
- CANADA, N. B. of. **TWRR and MWRR At a Glance**. Canada: National Bank of Canada, 2016. Disponível em: <<https://www.nbc.ca/content/dam/bnc/en/files/personal/investing/bncpdf/pbn-trp-pror-en.pdf>>. Acesso em: 10 maio 2022. 36
- CANADA, R. B. of. **Time-weighted vs.money-weighted rates of return Understanding the differences**. Toronto: Royal Bank of Canada, 2016. Disponível em: <[http://www.rbcpbnc.com/\\_assets-custom/pdf/understanding-differences-between-twrr-mwrr-eng.pdf](http://www.rbcpbnc.com/_assets-custom/pdf/understanding-differences-between-twrr-mwrr-eng.pdf)>. Acesso em: 10 maio 2022. 35
- CAPINSKI M.; ZASTAWNIAK, T. **Mathematics for Finance: An Introduction to Financial Engineering**. Inglaterra: Springer, 2003. v. 1. 321 p. 12
- CARVALHO P. C. P.; MORGADO, A. C. **Matemática Discreta**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2015. v. 1. 286 p. 13
- COUTINHO, A. C. **A Regra dos Sinais de Descartes**. 128 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, Pernambuco, 2016. 30, 31
- DARIO, R.; SILVA, J. da. Equações algébricas e decisão do melhor investimento. **Professor de Matemática Online**, v. 6, n. 1, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.21711/2319023X2018/pmo62>>. Acesso em: 09 jun. 2022. 15, 30
- FAZENDA, M. da. **Tesouro Direto**. Brasil: Ministério da Fazenda, 2018. Disponível em: <<http://www.tesouro.gov.br/tesouro-direto-entenda-cada-titulo-no-detalle>>. Acesso em: 06 JUNHO 2018. 20
- FEIBEL, B. J. **Investment Performance measurement**. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2003. v. 1. 353 p. 12
- NUNES, M. **Corretora de valores para menor de idade: 10 opções para investir**. São Paulo: iDinheiro, 2022. Disponível em: <<https://www.idinheiro.com.br/investimentos/corretora-valores-menor-idade/>>. Acesso em: 18 jun. 2022. 37
- WANG, X. A simple proof of descartes's rule os sings. **The American Mathematical Monthy**, v. 50, n. 4, p. 525–526, 2004. 30