UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CAMPUS FLORIANÓPOLIS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL-PROFMAT

ALEXSANDRO SCHNEIDER

POLYA E A TEORIA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS APLICADOS À EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NOS ENSINOS FUNDAMENTAL E MÉDIO

Florianópolis

2022

ALEXSANDRO SCHNEIDER

POLYA E A TEORIA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS APLICADOS À EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NOS ENSINOS FUNDAMENTAL E MÉDIO

Dissertação submetida ao Programa de Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática. Com área de concentração no Ensino de Matemática.
Orientadora: Profª. Drª. Maria Inez Cardoso Gonçalves
Coorientador: Prof. Dr. Leonardo Koller Sacht

Florianópolis

2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Schneider, Alexsandro
POLYA E A TEORIA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS APLICADOS À EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NOS ENSINOS FUNDAMENTAL E MÉDIO / Alexsandro Schneider ; orientador, Maria Inez Cardoso Gonçalves, coorientador, Leonardo Koller Sacht, 2022.
137 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Florianópolis, 2022.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. Ensino de Matemática. 3. Teoria de Resolução de Problemas. 4. George Pólya. 5. Educação Básica. I. Cardoso Gonçalves, Maria Inez. II. Koller Sacht, Leonardo. III. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática. IV. Título.

ALEXSANDRO SCHNEIDER

POLYA E A TEORIA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS APLICADOS À EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NOS ENSINOS FUNDAMENTAL E MÉDIO

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Profª. Drª. Alda Dayana Mattos Mortari
UFSC

Prof. Dr. Vinícius Viana Luiz Albani
UFSC

Prof. Dr. Mario Rodolfo Roldan Daquilema
UFSC

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em Matemática.

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Maria Inez Cardoso Goncalves
Data: 22/08/2022 08:57:16-0300
CPF: 908.897.119-68
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Profª. Drª. Maria Inez Cardoso Gonçalves
Coordenadora do Programa

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Maria Inez Cardoso Goncalves
Data: 22/08/2022 08:57:48-0300
CPF: 908.897.119-68
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Profª. Drª. Maria Inez Cardoso Gonçalves
Orientadora

Florianópolis, 24 de agosto 2022.

Este trabalho é dedicado a meus amigos e familiares que me deram suporte durante a produção desse trabalho, principalmente minha mãe Terezinha. Dedico também à memória de meu pai Ademir.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos os professores, colegas de classe e coordenadores que me ajudaram durante o programa e a construção desse trabalho, principalmente aos meus orientadores pelo suporte e por compartilhar o conhecimento ao longo da produção desse trabalho.

É melhor resolver um problema de cinco maneiras diferentes, do que resolver cinco problemas de uma única maneira.

(George Polya, 1945)

RESUMO

Neste trabalho é feito um estudo sobre o uso das teorias de George Polya sobre o ensino de resolução de problemas, apresentando o método de resolução de problemas apresentado no livro A Arte de Resolver Problemas e aplicando o método no contexto da sala de aula do ensino fundamental e médio. São mostradas aplicações em assuntos específicos sugeridos pelo autor, por meio de exemplos teóricos e práticos. Ao final do trabalho é construído um material de apoio, no formato de uma apostila, para que professores possam utilizar em sala de aula e introduzir na prática os conceitos aqui trabalhados.

Palavras-chave: Resolução de problemas. Ensino. Matemática. Polya.

ABSTRACT

In this work, a study is made on the use of George Polya's theories on the teaching of problem solving, presenting the problem solving method presented in the book How To Solve It and applying the method in the context of the Elementary and high school. Applications on specific suggested subjects are shown by the author, through theoretical and practical examples. At the end of the work, it is built support material, in the form of a handout, so that teachers can use in the classroom and introduce the concepts discussed here into practice.
Keywords: Keywords: Problem solving. Teaching. Math. Polya.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

"Professor, onde é que eu vou usar isso na minha vida?" Qual professor nunca ouviu essa frase durante suas aulas? Junto com as clássicas "É pra copiar?" e "Vale nota?", formam a santíssima trindade da sala de aula. Mas por que será que essa pergunta é tão recorrente?

Essas perguntas costumam aparecer devido a dificuldade dos estudantes em conseguir relacionar os conteúdos vistos em sala com a realidade da sua vida fora do âmbito escolar.

Este trabalho tem como objetivo apresentar a teoria de Resolução de Problemas como uma importante ferramenta para que o professor possa apresentar os conceitos matemáticos a serem estudados como sendo ferramentas para a resolução de situações presentes no cotidiano, fazendo com que o estudante perceba nele utilidade prática e não apenas mais um conteúdo para a prova. Em (BRASIL, 2018) a nova BNCC tem a resolução de problemas como ferramenta base para o ensino de matemática nas escolas, buscamos neste trabalho apresentar como a resolução de problemas pode ser utilizada em sala de forma que a BNCC seja colocada em prática, não apenas nas suas habilidades, mas também nos seus conceitos pedagógicos.

Para relacionar essa teoria com a prática de sala de aula, apresenta-se os estudos de George Polya e seu método de resolução de problemas, tanto na parte teórica quanto na prática, por meio de exemplos aplicados a assuntos presentes no currículo escolar e nas provas olímpicas, como a OBMEP.

De forma a serem colocados em prática os conceitos aqui estudados, será desenvolvido um material didático para que possa ser aplicado em sala como forma de introduzir aos estudantes do ensino fundamental as estratégias para resolução de problemas por meio da teoria de Resolução de Problemas.

Ao longo do Capítulo 2 será discutido a fundamentação do trabalho, com a análise da BNCC e com a apresentação dos estudos de Polya, no Capítulo 3 é introduzido o Método de Polya para resolução de problemas, na sequência no Capítulo 4 fundamenta-se os conceitos matemáticos utilizados nos capítulos subsequentes por meio de definições formais, em seguida são vistas aplicações do Método de Polya em alguns conteúdos presentes no contexto do ensino fundamental e médio ao longo do Capítulo 5, e para encerrar, no Capítulo 6 é explicado como foi desenvolvido a apostila presente em anexo neste trabalho.

2 O USO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

2.1 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E A BNCC

Segundo (BRASIL, 2018, p. 7): "A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE)."

Apesar de compreender a matemática como uma ciência hipotético-dedutiva, a BNCC deixa clara a importância de que o estudante consiga identificar oportunidades de aplicar o que estuda em sala com para resolver situações práticas da sua vida.

E neste contexto a BNCC define como ponto norteador do ensino de matemática o conceito de Letramento Matemático:

Segundo (PISA, 2013), o "letramento matemático é a capacidade individual de formular, empregar e interpretar a matemática em uma variedade de contextos. Isso inclui raciocinar matematicamente e utilizar conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas para descrever, explicar e predizer fenômenos. Isso auxilia os indivíduos a reconhecer o papel que a matemática exerce no mundo e para que cidadãos construtivos, engajados e reflexivos possam fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões necessárias.".

O letramento matemático é o principal responsável por fazer com que o estudante compreenda a importância e a atuação do conhecimento matemático no mundo real, o que colabora diretamente para o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico do estudante.

Dentre os processos matemáticos envolvidos na rotina escolar a BNCC destaca resolução de problemas, investigação, desenvolvimento de projetos e a modelagem.

Neste contexto, é de grande importância compreender a origem e a evolução da teoria de Resolução de Problemas nas escolas ao longo das últimas décadas, para que se possa desenvolver melhor o material didático a ser construído ao final desta pesquisa.

2.2 REFERÊNCIAS AO ENEM

Além da BNCC é importante também ter uma visão sobre o ENEM, devido a sua importância como método de ingresso às universidades brasileiras.

Segundo as referências do chamado Novo ENEM, apresentadas em (ENEM, 2019b):
"EIXOS COGNITIVOS (comuns a todas as áreas de conhecimento)
I. Dominar linguagens (DL): dominar a norma culta da Língua Portuguesa e fazer uso das linguagens matemática, artística e científica e das línguas espanhola e inglesa.
II. Compreender fenômenos (CF): construir e aplicar conceitos das várias áreas do conhecimento para a compreensão de fenômenos naturais, de processos histórico-geográficos, da produção tecnológica e das manifestações artísticas.
III. Enfrentar situações-problema (SP): selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representados de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problema.
IV. Construir argumentação (CA): relacionar informações, representadas em diferentes formas, e conhecimentos disponíveis em situações concretas, para construir argumentação consistente.
V. Elaborar propostas (EP): recorrer aos conhecimentos desenvolvidos na escola para elaboração de propostas de intervenção solidária na realidade, respeitando os valores humanos e considerando a diversidade sociocultural."

Dessa forma, podemos também estudar a aplicabilidade dos conceitos de resolução de problemas para estudantes que irão prestar o ENEM.

2.3 A ORIGEM DA TEORIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Para entender melhor a função da Resolução de Problemas é interessante compreender sua evolução como teoria educacional, e esta teoria não surge diretamente com a premissa de utilizar problemas como ferramenta principal. Para uma melhor compreensão do tema, é sugerido a leitura de (ONUCHIC et al., 2014).

Ao final do século XIX as principais teorias educacionais eram ancoradas na Teoria da Disciplina Mental (TDM), criada pelo psicólogo alemão Christian Wolff, em 1740. Segundo (STANIC; KILPATRICK, 1990):

“Essa teoria entende a mente humana como uma detalhada hierarquia, isto é, uma coleção de faculdades ou capacidades, a saber: percepção, memória, intuição ou razão, imaginação e compreensão. Treinando uma faculdade, acreditava-se que ocorria uma transferência geral da mente para todas as outras e, assim, o ensino se ocupava mais em desenvolver essas do que com os conteúdos que seriam ensinados. Como uma teoria curricular, a Disciplina Mental baseava-se na ideia de que era tarefa da escola ajudar os estudantes a desenvolver essas faculdades.”

Porém, em 1902 Edward Lee Thorndike e Robert Session Woodworth no artigo

“A influência da melhoria em uma função mental sobre a eficiência de outra função” em (THORNDIKE; WOODWORTH, 1901), apresentaram elementos contraditórios à TDM, o que fez com que se começasse a questionar a legitimidade desta teoria.

Os resultados obtidos nesse artigo fizeram com que Thorndike continuasse seus estudos de forma a desenvolver uma nova teoria que ficou conhecida como Conexionismo. Os preceitos do Conexionismo foram publicados no livro "The new methods in arithmetic", (THORNDIKE, 1926) e tinham como base a ideia que não se deveria ensinar a Aritmética por ensinar, mas que a Aritmética fosse usada como ferramenta auxiliar da vida. Para isso, (THORNDIKE, 1926) define quatro pontos que o professor deveria levar em consideração na hora de apresentar um problema para o estudante, de forma que o problema não seja feito só por obrigação e sim que o objetivo de assimilar o conceito envolvido seja alcançado.

Segundo (THORNDIKE, 1926, p. 125)(tradução do autor), um problema deve, preferencialmente,

(1) lidar com uma situação que seja provável de ocorrer diversas vezes na vida real;

(2) com a forma como deve ser tratado;

(3) deve fazer com que a situação não seja muito complicada e nem muito simples de ser compreendida pelo estudante; e

(4) deve ser construído com o mesmo grau de interesse e motivação com que o estudante vá encontrar na sua rotina.

(THORNDIKE, 1926, p. 138-9), elenca os quatro princípios que devem ser seguidos ao se resolver um problema, estes princípios tem grande importância na construção da Resolução de Problemas.

(1) Se você tem certeza sobre como resolver o problema, vá em frente e o resolva.

(2) Se você não consegue ver como resolver o problema, considere a pergunta, as informações e os usos delas, se questionando: Que pergunta foi feita? O que estou tentando descobrir? Que informações foram dadas? Como posso usá-las? O que devo fazer com os números e com o que eu sei sobre eles?

(3) Planeje o que você irá fazer e o motivo, e organize seu trabalho, de forma que consiga saber quando tiver atingido o seu objetivo.

(4) Verifique a solução encontrada, para ver se ela faz sentido e se se enquadra no que diz o problema.

Apesar dos esforços de Thorndike em apresentar o Conexionismo como uma forma de apresentar a aritmética como uma ferramenta para a vida do estudante, as críticas sobre o número de repetições foram muito impactantes, pois na prática, via-se que os professores apresentavam os problemas com uma solução já definida e esperavam que os estudantes a atingissem. Essa forma de abordagem por conta dos professores acabava por ignorar os estágios de aprendizagem do estudante e se concentravam apenas em avaliar se ele conseguiu chegar até a resposta desejada.

3 POLYA E A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Ensinar o estudante a resolver problemas é algo muito mais detalhado do que apenas apresentar o conteúdo trabalhado e uma pergunta a ser respondida. O processo de ensino de Resolução de Problemas foi descrito por (POLYA, 2006), onde são elencados alguns objetivos a serem levados em consideração. Para melhor ilustrar este trabalho, alguns desses objetivos serão dicutidos neste capítulo.

3.1 GEORGE POLYA

George Polya foi um matemático nascido na Hungria no ano de 1887, tendo atuado como professor no ETH Zürich, na Suíça entre 1914 e 1940. Porém, sua obra se tornou mais conhecida no período em que trabalhou nos Estados Unidos, sendo professor na Universidade de Stanford entre 1940 e 1953, onde continuou como professor emérito após este período. Polya morreu em 1985, em Palo Alto, Califórnia.

No início da década de 1940, Polya passou a ser reconhecido como o principal autor da teoria de Resolução de Problemas, apesar de não ter sido o criador desta teoria, as obras escritas por ele tiveram imensa influência no processo de aperfeiçoamento e disseminação da Resolução de Problemas pelo mundo.

Diferente de outros autores que tinham como foco o estudante e sua capacidade de aprender a resolver problemas, Polya tinha grande foco no professor, pois na sua visão era de extrema importância que o professor fosse um grande resolvedor de problemas para que pudesse passar esse conhecimento para o estudante. Nesta linha de pensamento, Polya lançou diversos livros direcionados ao aperfeiçoamento do professor.

Em 1945 Polya lançou o livro "A Arte de Resolver Problemas" (POLYA, 2006), livro este que é a grande base para o desenvolvimento deste trabalho e que terá aqui um capítulo inteiro. Este livro foi um divisor de águas no estudo da Resolução de Problemas e até hoje é a grande referência quando se trata dessa área.

3.1.1 O método de Polya para resolução de problemas

Neste livro Polya elaborou um método de resolução de problemas que deve ser a base para toda resolução de problemas. Segundo (POLYA, 2006), os passos a serem seguidos são divididos em quatro etapas: **Compreensão do Problema, Elaboração de uma Estratégia, Executando o Plano e Verificação do Resultado.**

Para ilustrar cada etapa sugerida por Polya, usarei o problema, o qual foi extraído parcialmente da segunda fase da OBMEP 2021 de nível 1(6º e 7º anos):

Exemplo: (OBMEP 2021 - N1 - F2) Em uma fila há 100 pessoas. A primeira e a terceira posições da fila são ocupadas por homens. A cada cinco posições consecutivas, há três mulheres e dois homens. Por exemplo, nas posições 13, 14, 15, 16 e 17, há três mulheres e dois homens.

a) Quantas mulheres há na fila?

3.1.1.1 Etapa 1: Compreensão do Problema

A primeira etapa deve ser compreender o problema, ou seja, entender a situação descrita pelo enunciado, Uma estratégia interessante é perguntar ao estudante se ele entendeu o enunciado, se ele responder positivamente, peça para que ele lhe explique a situação, normalmente ele vai ler a questão para você, peça que ele lhe explique como ele entendeu. Essa experiência mostra para o estudante o que efetivamente significa entender o problema, ser capaz de explicar para outra pessoa sem a necessidade de ler o enunciado.

Ainda dentro da compreensão do problema é importante que o estudante identifique qual a incógnita desse problema, a pergunta *Qual é a incógnita?* deve ser sempre a norteadora dessa etapa, por mais que pareça algo trivial, a não compreensão de quem é a incógnita do problema torna inviável elaborar uma estratégia de resolução.

Importante perceber que o termo incógnita usado por Polya, não é necessariamente o mesmo utilizado em álgebra com incógnitas e variáveis. Neste contexto, incógnita representa o que deve ser descoberto para que a questão possa ser resolvida. Para algumas questões, podem estar presentes mais de uma incógnita, quando a resolução é dividida em diversas etapas.

Definida a incógnita, definir: quais são os dados relevantes? Qual a condicionante? Ela é satisfeita? é suficiente para determinar a incógnita? É irrelevante? É redundante? Ou é contraditória? Essas perguntas são respondidas ao se compreender efetivamente o enunciado.

A escolha de uma boa notação, assim como o uso de figuras como suporte, são também de grande importância.

No exemplo dado começamos respondendo a pergunta base *Qual é a incógnita?* Neste caso a incógnita é o número de mulheres presentes nessa fila. A condicionante é de que a cada grupo consecutivo de 5 pessoas tem-se 3 mulheres e 2 homens. Essa informação é suficiente para determinar a incógnita? Sim.

Os dados importantes são: a quantidade de pessoas presentes na fila e a condicionante.

É importante perceber que para o item (a) da questão, o fato de a 1ª e a 3ª posições serem ocupadas por homens acaba sendo irrelevante.

3.1.1.2 Etapa 2: Elaboração de uma estratégia

A segunda etapa é a elaboração de uma estratégia ou plano de resolução. É importante começar tentando relacionar os dados do enunciado com a(s) incógnita(s) definida(s) na etapa anterior.

Para elaborar uma estratégia é interessante trabalhar com problemas correlatos. Por isso que a principal maneira de se melhorar na resolução de problemas é resolvendo problemas, pois é como se o estudante estivesse construindo uma biblioteca de problemas, para que quando se deparar com um problema ele possa usar algum já resolvido como base e tentar partir da mesma estratégia utilizada no primeiro.

No caso do exemplo uma estratégia seria analisar o comportamento dessa fila em grupos de 5 em 5 e levar esse comportamento para a fila inteira, ou seja, em 20 grupos. Essa estratégia é muito utilizada na programação de computadores, quando você tem um problema muito extenso ou complexo, você trabalha com casos reduzidos, ou seja, dada uma situação macro você resolve numa versão micro e leva as conclusões obtidas para a resolução do problema completo.

Um exemplo de problema correlato seria uma questão sobre dias da semana, como quantas quartas-feiras tem em um certo ano.

3.1.1.3 Etapa 3: Executando o Plano

A terceira etapa é auto explicativa, é o momento de colocar em prática a estratégia definida na etapa anterior. É muito importante validar todos os passos dados.

No exemplo seria o momento em que o estudante usaria o fato de que são 3 mulheres por grupo de 5, como são 20 grupos, então o total de mulheres na fila é de 60 mulheres.

3.1.1.4 Etapa 4: Verificação do Resultado

A quarta e última etapa é baseada em verificar se a resposta encontrada condiz com o problema e se é possível chegar nesta mesma conclusão por outro caminho.

É de extrema importância que o professor deixe sempre bem claro que resolver um problema não é apenas sobre chegar no resultado, mas também sobre tentar encontrar o caminho mais eficiente. Então mesmo que o estudante tenha resolvido corretamente o problema, é interessante apresentar soluções otimizadas, ou seja, que requeiram menos tempo, etapas, conceitos externos e especificidades, que reduzem a possibilidade de reutilização dessa estratégia de resolução, para que dessa forma o estudante busque desenvolver estratégias cada vez mais práticas e efetivas.

Em relação a verificar a resposta, muitas vezes o estudante acredita ter resolvido o problema e não analisa o valor encontrado, ao analisar a resposta pode identificar erros na execução.

No problema da fila, suponha que o estudante chegue na solução 40. Ao analisar esta solução é possível descobrir imediatamente que ela está errada, pois a cada 5 pessoas consecutivas, 3 eram mulheres, ou seja, mais de metade das pessoas. Assim, sabe-se que o número total de mulheres deve ser maior que 50. Outro erro que pode ser percebido, é chegar a um resultado maior que 100. Se o estudante não faz essa análise, estas respostas erradas acabam passando despercebidas.

Certa vez ao apresentar aos estudantes um problema em que um cliente pegava um empréstimo de R$10.000,00 a uma taxa de 14% ao mês para ser pago em 5 parcelas mensais. Ao corrigir as respostas apresentadas pelos estudantes, me deparei com soluções que apontavam que o valor final pago foi de centenas de milhares de reais, ou mesmo milhões de reais. Estes erros poderiam ter sido evitados se os estudantes tivessem verificado se um valor final desta magnitude é coerente com a situação.

Assim sendo, este passo não garante que a solução está correta, mas pode mostrar que ela está errada.

3.2 POLYA E O ENSINO DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Em (POLYA, 2006), Polya elenca diversos pontos importantes para o professor ter em mente ao ensinar os estudantes à resolver problemas, para este trabalho, foram selecionados apenas alguns, porém a leitura completa dessa obra é fortemente indicada.

3.2.1 Auxílio ao estudante

Segundo (MEIER; GARCIA, 2011), o ato de aprender está em uma construção própria de ideias, de conceitos, de conhecimentos, ao contrário do que acontece na chamada Educação Bancária, expressão criada por Paulo Freire para definir um modelo de sistema educacional, onde o estudante recebe as informações passivamente. Nesse modelo o professor funciona como um transmissor de conhecimentos, enquanto o estudante é apenas um receptor.

Em oposição a esse modelo apresenta-se o construtivismo, onde o professor projeta suas aulas de forma à incentivar a autonomia do estudante, para que ele possa construir seus próprios conceitos e teorias. De acordo com (FEUERSTEIN, 1980), essa construção é potencializada pela mediação de aprendizagem. Segundo (MEIER; GARCIA, 2011, p. 71):

"Em síntese, e retornando à Neuropsicologia, o professor não 'passa' informações, não 'transmite' conhecimento, não 'ensina'. O que faz, é provocar, incentivar disparar e possibilitar ao aluno a própria construção do conhecimento, a própria aprendizagem. Esse processo deve construir as bases teóricas da ação consciente do professor mediador."

Porém, para por em prática a mediação de aprendizagem nas aulas é necessária firmeza por parte do docente, pois a tendência é que o estudante ao perceber que não consegue avançar na resolução, solicite que o professor resolva a questão para ele ou que diga como deve ser feita. Muitas vezes o professor na intenção de ajudar o estudante acaba mostrando como fazer a questão, ao invés de tentar direcionar o estudante para que ele consiga por si só construir o raciocínio e estratégia necessários para essa situação. Para que esse processo seja sustentável, é imprescindível ter bem claros todos os elementos de sua metodologia, caso contrário estudantes e familiares podem confundir com má vontade ou desinteresse por parte do professor.

Ao longo da minha carreira me deparei diversas vezes com essa situação, onde o estudante ficava incomodado por eu não dar a resposta, e eu precisava conversar e explicar para a turma que era importante que eles tentassem chegar nas conclusões, e que a minha função era de auxiliar nesse processo.

Dessa forma, cabe ao professor dar dicas de forma que o estudante chegue às conclusões necessárias, porém sem que ele perceba que foi direcionado, e sim que ele próprio construiu essa resolução.

Para ilustrar o papel de mediador do professor, podemos utilizar o problema das mulheres na fila visto no capítulo anterior. Os estudantes que não tem prática em resolver problemas tendem a tentar construir o problema por inteiro, ou seja, tentar construir a fila inteira. E ao perceber que isso seria inviável ele pede ao professor que o diga como fazer.

O papel do professor neste momento é induzir o estudante a construir o seu plano de resolução, para isto pode utilizar de dicas ou perguntas, por exemplo: *O que você quer descobrir? Você consegue perceber algum padrão neste problema? E se fosse uma fila menor, de 10 pessoas por exemplo, como funcionaria?*

Desta forma o estudante pode compreender a estrutura da questão, e definir seu plano de ação para a questão baseado nas suas próprias deduções. O que contribui para que em questões posteriores ele possa utilizar do raciocínio para resolver o problema.

3.2.2 Qual é a incógnita? Existe mais de uma?

No capítulo anterior abordamos que a principal pergunta que o professor deve fazer ao auxiliar o estudante é: *Qual é a incógnita?* Por ser muito importante que o estudante a tenha de forma clara para que possa assim decidir que estratégia utilizar na resolução.

O objetivo dessa estratégia é fazer com que o estudante tenha o foco na incógnita e crie assim o hábito de sempre começar a resolução pela definição da mesma.

Caso perceba que o estudante não consegue concluir de maneira correta qual a(s) incógnita(s) em questão, o professor pode apresentá-la(s) e verificar com o estudante se ele entende o motivo desta escolha.

3.2.3 Bom senso

Como já discutido, uma estratégia muito comum ao professor é a de fazer perguntas ao estudante, perguntas estas que levem o estudante a concluir as ideias base do problema e caminhos a serem seguidos ao se elaborar a estratégia de resolução. Estas perguntas devem ser orgânicas, simples e diretas.

As indagações devem conduzir o estudante a seguir caminhos que seriam seguidos naturalmente por quem estivesse realmente interessado em resolver este problema, mesmo que não houvesse orientação do professor. Muitas vezes esse suporte é muito mais para tranquilizar o estudante do que realmente ensinar algo. A falta de confiança ao resolver questões que não sejam de *"Resolva"* é comumente vista no contexto da sala de aula, principalmente nas aulas de matemática

Segundo (POLYA, 2006, p. 3), "Está com fome? Deseja então conseguir comida e pensa em meios conhecidos de obtê-la. O seu problema é de Geometria? Deseja então traçar um triângulo e pensa em problemas conhecidos de fazê-lo.". É importante que o estudante perceba que determinados assuntos tem estratégias parecidas, ao se resolver um problema de geometria costuma-se fazer um desenho para melhor visualização, problemas de combinatória usa-se listas ou diagramas, problemas de teoria de conjuntos usa-se diagramas de Euler-Venn, e assim por diante.

Suponha que seja apresentado o seguinte problema: "Seja um terreno retangular com 20 metros de comprimento e 15 metros de largura. O dono deste terreno que cercá-lo com arame, sabendo que será colocado uma porteira com 4 metros de comprimento. Se o metro do arame custa R$17,00, quanto custará para cercar este terreno?"

Para auxiliar o estudante o professor pode fazer pergunta como: *O que o problema quer descobrir? Qual a incógnita desta questão?* E assim que o estudante tiver bem claro que a estratégia a ser seguida é descobrir quanto metros de arame são necessários para a cerca, para se multiplicar pelo valor do metro de arame, o professor pode sugerir que o estudante faça um esboço da situação por meio de um desenho, pois assim fica mais fácil visualizar detalhes como a subtração do tamanho do portão do perímetro total do terreno.

3.2.4 Generalidade

É de grande importância que as perguntas e orientações sejam o mais genéricas possível para que o estudante possa reutilizá-las no máximo possível de problemas. Se as perguntas forem muito específicas só poderão ser reutilizadas se o novo problema for muito parecido.

É claro que dependendo do problema as perguntas mais genéricas acabam não sendo suficientes, e neste caso o direcionamento acaba sendo mais específico. Porém, caso na lista de problemas tenham questões correlatas, é interessante discutir isto com o estudante, para que ele tente concluir que como o problema é muito parecido com o anterior, então ele pode usar as mesmas dicas, estratégias e perguntas.

Suponha que um problema peça para encontrar a diagonal de um quadrado, uma pergunta interessante seria *O que é uma diagonal?* ou *Qual a fórmula da diagonal de um quadrado?*, se o estudante souber a fórmula, isto facilitaria bastante o seu trabalho, caso contrário é necessário o auxílio do professor na construção dessa fórmula.

Uma abordagem interessante para este exemplo seria solicitar que o estudante fizesse um desenho como esboço e fazer perguntas como: *Que tipo de figuras se formaram? E que parte do triângulo retângulo a diagonal representa? Você sabe como se calcula a hipotenusa de um triângulo retângulo?*

Perceba que essas perguntas tentam ser o mais genéricas possível, porém devido à especificidade do problema que trata de Teorema de Pitágoras, algumas perguntas mais direcionadas precisaram ser utilizadas.

3.2.5 Prática e Repetição

O professor na prática da Resolução de Problemas utiliza as dicas e perguntas com dois objetivos principais: ajudar o estudante a conseguir resolver o problema em questão e preparar o estudante para que possa resolver sozinho problemas parecidos no futuro.

Como discutido neste capítulo, as dicas e perguntas devem ser genéricas e utilizando do bom senso. Por partirem do senso comum, poderiam ter surgido naturalmente por parte do próprio estudante, como mencionado na seção 3.3, e por serem genéricas podem ser utilizadas em diversos problemas. Estas práticas desenvolvem no estudante hábitos de resolução que podem ser aplicados para que possam resolver problemas futuros por si só.

Então ao resolver diversos problemas o estudante pode perceber por si só a aplicabilidade das perguntas e estratégias vistas em sala. Para se aprender a resolver problemas deve-se começar observando como outras pessoas o fazem e tentar repetir os planos de ação adotados em questões parecidas.

Quando estudantes me dizem que tem dificuldade em resolver problemas e me perguntam se sugiro algo, a minha sugestão é: Resolva problemas! Pois é uma habilidade que não se desenvolve passivamente, e sim por meio da repetição. Usar problemas correlatos é sempre uma boa estratégia, pois o estudante reutiliza a estratégia vista anteriormente e ao conseguir resolver sozinho acaba desenvolvendo a confiança e o prazer pela resolução de problemas.

3.2.6 Retrospectiva

No atual contexto da sala de aula o imediatismo e a falta de paciência são elementos vistos corriqueiramente, o estudante quer encontrar a solução do exercício solicitado da maneira mais rápida e direta possível. Mesmo com estudantes que colocam em prática todos os elentos discutidos até aqui, a Verificação do Resultado, quarta etapa do método de resolução, visto na seção 3.1.1.4 acaba ficando de lado.

Cabe ao professor mostrar sempre que ao se resolver o problema, é importante que seja feita uma retomada das etapas utilizadas e de toda a resolução da questão. Pois ao rever esses passos é possível encontrar detalhes que poderiam ter sido executados de melhor maneira, obtendo-se assim uma solução otimizada.

Como prática de sala, enquanto os estudantes resolvem exercícios eu deixo com que conversem sobre o assunto, pois muitas vezes a visão que eles tem sobre a questão consegue alcançar melhor os colegas. Simplesmente fico ouvindo as explicações e interfiro apenas se perceber algum erro. E nessas atividades é bem comum que um estudante pergunte a outro que conseguiu resolver o exercício, como que ele chegou no resultado e resposta é "nem sei dizer".

Isto ocorre por esta pressa em terminar logo, sem atentar aos passos que deu. Então é interessante que conforme o estudante resolva e pergunte se está correta, antes mesmo de analisar o resultado obtido, solicite que lhe explique como chegou naquele valor. Isto tem grande valor pedagógico, seja pelos valores de otimização da resposta, quanto para que o professor possa seguir o caminho percorrido pelo estudante e encontrar erros que ele possa ter cometido, independentemente da solução estar correta ou não.

Um exemplo bem simples é se o estudante apresentar a resposta $2^2 = 4$. O valor de fato está correto, mas como foi obtido? Dentre as possíveis estratégias, duas podem ter sido escolhidas: base multiplicada pela base ou multiplicando-se a base pelo expoente. Então pedir que o estudante explique como chegou ao 4 pode evitar problemas futuros relacionados à potenciação.

4 CONCEITOS MATEMÁTICOS

Serão apresentados neste capítulo conceitos matemáticos que serão de grande valia na continuidade desse trabalho, tanto no capítulo a seguir, quanto nas apostilas chamadas de Caderno do Aluno e Caderno do Professor.

Este capítulo tem como objetivo revisar ou mesmo introduzir alguns conceitos comumente presentes na resolução de certos tipos de problemas, de forma a auxiliar o leitor a uma compreensão mais ampla sobre os exemplos e problemas que serão apresentados posteriormente.

4.1 CONJUNTOS

A noção de conjunto é de extrema importância para a compreensão da matemática atual. Para tratar destas definições usaremos alguns conceitos que segundo (IEZZI; MURAKAMI, 2013), são conceitos primitivos, ou seja, não precisam ser demonstrados e serão aceitos como verdadeiros. Essas definições são: Conjunto, Elemento e Pertinência entre elemento e conjunto.

Para as próximas subseções, caso o leitor tenha interesse em aprofundar o estudo em conjuntos e consultar algumas das demonstrações, sugiro a leitura do livro Fundamentos da Matemática Elementar, volume 1, citado nessea bibliografia em (IEZZI; MURAKAMI, 2013).

4.1.1 Conceitos básicos de conjuntos

A definição de conjunto é fundamental e se assemelha ao conceito na vida real, ou seja, uma coleção de números, símbolos ou objetos denominados elementos, que tem alguma característica em comum.

Se um conjunto não tem elementos, ele é chamado de *conjunto vazio* e denotado por $\{\ \}$ ou $\emptyset$.

Um conjunto pode ser representado de três formas distintas: *Listagem, Lei de Formação* e *Diagrama de Euler-Venn.*

A Listagem é constituída de se escrever uma letra maiúscula que nomeará o conjunto seguido de uma igualdade, os elementos serão descritos entre chaves e separados por vírgulas ou pontos e vírgulas.

O Diagrama de Euler-Venn é feito ao se construir uma linha fechada em qualquer formato e escrever os elementos do conjunto dentro dessa linha fechada.

A Lei de formação é um pouco mais complexa, nela devemos novamente colocar letra maiúscula, igualdade e chaves. Porém dentro da chaves serão colocadas duas partes, a primeira que identifica que tipo de elementos serão pertencentes ao conjunto e a segunda parte com a condição que esses possíveis elementos devem satisfazer para pertencerem ao conjunto.

Ao conjunto de todos os possíveis elementos de um conjunto, damos o nome de Conjunto Universo, denotado por U.

Definição 4.1.1 *Chamamos de cardinalidade de um conjunto o número de elementos pertencentes a esse conjunto. Denotamos a cardinalidade de um conjunto A por $|A|$ ou $\#A$ ou ainda $n(A)$.*

Exemplo: Seja o conjunto $A = \{1; 2; 5\}$ dizemos que A tem cardinalidade 3, ou $\#A = 3$.

4.1.2 Relação de Pertinência e Inclusão

Para se relacionar *um elemento e um conjunto*, usamos a *Relação de Pertinência.* Para esses casos, usaremos dois símbolos $\in$ (pertence) e $\notin$ (não pertence).

Seja o conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ podemos dizer que $a \in A$ e que $e \notin A$.

Sejam dois conjuntos A e B, se $\forall\, x \in A \Rightarrow x \in B$, dizemos que A é um *subconjunto* de B.

Definição 4.1.2 *Seja o conjunto A, cujo número de elementos pode ser denotado por $n(A)$. O conjunto dos subconjuntos de A denotado por $P(A)$ e a cardinalidade de $P(A)$, cuja notação é $n(P(A))$ pode ser obtida pela relação*

$$n(P(A)) = 2^{n(A)}.$$

Para se relacionar *dois conjuntos*, usamos a *Relação de Inclusão.* Para esses casos, usaremos quatro símbolos $\subset$ (está contido), $\supset$ (contém), $\not\subset$ (não está contido) e $\not\supset$ (não contém). Estes símbolos serão utilizados para se representar se um conjunto é subconjunto de outro. A diferença entre $\subset$ e $\supset$ é a ordem da escrita dos conjuntos. Por exemplo, seja A um subconjunto de B, podemos representar por $A \subset B$ ou por $B \supset A$. O mesmo vale para as negações.

Proposição 4.1.3 *A relação de inclusão responde à três propriedades importantes. Sendo A, B e C conjuntos quaisquer, valem as seguintes propriedades:*

(i) $A \subset A$, reflexiva.
(ii) se $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = B$, antissimétrica.
(iii) se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$, transitiva.

4.1.3 Operações

Para estudarmos a Teoria de Conjuntos, usaremos de três operações: **União, Interseção** e **Diferença**, veremos também o significado de **complementar de um conjunto**.

4.1.3.1 Interseção

Dados dois conjuntos A e B, dizemos que o elemento x pertence a interseção entre A e B ou $A \cap B$ se x pertence a A e x pertence a B. Isto pode ser representado na notação a seguir:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ } e \text{ } x \in B\}.$$

Podemos então concluir que se um elemento pertence à interseção entre A e B, então ele pertence simultaneamente tanto a A quanto a B.

Proposição 4.1.4 *Propriedades da Interseção: Sendo A, B e C conjuntos quaisquer, valem as seguintes propriedades:*
i) $A \cap A = A$ (idempotente).
ii) $A \cap U = A$ (elemento neutro).
iii) $A \cap B = B \cap A$ (comutativa).
iv) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (associativa).

Se dois conjuntos não tem elementos em comum, ou seja, $A \cap B = \emptyset$, dizemos que A e B são **conjuntos disjuntos**.

Exemplo: Sejam $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ e $C = \{2, 6, 8\}$

Podemos afirmar que:
$A \cap B = \{3\}$;
$A \cap C = \{2\}$;
$B \cap C = \emptyset$, ou seja, B e C são conjuntos disjuntos;
$(A \cap B) \cap C = \emptyset$.

4.1.3.2 União

Dados dois conjuntos A e B, dizemos que o elemento x pertence a união entre A e B ou $A \cup B$ se x pertence a A ou x pertence a B ou ainda, que x pertence a ambos os conjuntos. Isto pode ser representado na notação a seguir:

$$A \ \cup B \ = \ \{x \mid x \in A \ ou \ x \in B\}.$$

Desta definição podemos concluir que se $x \in A \ \cup B$, então ou $x \in A$ ou $x \in B$ ou ainda $x \in A \cap B$.

Proposição 4.1.5 *Propriedades da União: Sendo A, B e C conjuntos quaisquer, valem as seguintes propriedades:*
i) $A \cup A = A$ *(idempotente).*
ii) $A \cup \emptyset = A$ *(elemento neutro).*
iii) $A \cup B = B \cup A$ *(comutativa).*
iv) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ *(associativa).*

Para melhor compreensão da união, utilizaremos o exemplo a seguir.
Exemplo: Sejam $A \ = \ \{1, \ 2, \ 3\}$, $B \ = \ \{3, \ 4, \ 5\}$ e $C \ = \ \{2, \ 6, \ 8\}$.
Podemos afirmar que:
$A \cup B \ = \ \{1, \ 2, \ 3, \ 4, \ 5\}$;
$A \cup C \ = \ \{1, \ 2, \ 3, \ 6, \ 8\}$;
$B \cup C \ = \ \{2, \ 3, \ 4, \ 5, \ 6, \ 8\}$;
$A \cup B \cup C \ = \ \{1, \ 2, \ 3, \ 4, \ 5, \ 6, \ 8\}$.

Definição 4.1.6 *Sejam A e B conjuntos finitos. Em relação ao número de elementos de* $A \cup B$*, podemos dizer que* $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$*.*

Exemplo: Sejam $A \ = \ \{1, \ 2, \ 3, \ 4\}$ e $B \ = \ \{3, \ 4, \ 5\}$ temos então que $A \cup B \ = \ \{1, \ 2, \ 3, \ 4, \ 5\}$ e $A \cap B \ = \ \{3, \ 4\}$. Segundo o número de elementos $n(A) = 4, \ n(B) = 3, \ n(A \cap B) = 1$, pelo resultado anterior que $n(A \cup B) = \ 4 \ + \ 3 \ - 2 \ = \ 5$, o que condiz com o número de elementos de $A \cap B$.

4.1.3.3 Diferença

Dados dois conjuntos A e B, chamamos de *diferença entre A e B* o conjunto formado pelos elementos de A que não pertencem a B. Isto pode ser representado na notação a seguir:

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

Para melhor compreensão utilizaremos o exemplo a seguir.

Exemplo: Sejam $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ e $C = \{2, 6, 8\}$.

Podemos afirmar que:

$A - B = \{1, 2, \}$;

$A - C = \{1, 3\}$;

$B - C = \{3, 4, 5\}$;

$B - A = \{4, 5\}$.

4.1.3.4 Complementar de um conjunto

Dados dois conjuntos A e B, em que $B \subset A$, chamamos o conjunto $A - B$ de *complementar de B em relação a A*, o conjunto formado pelos elementos de A que não pertencem a B. Isto pode ser representado na notação a seguir:

$$\subset_A^B = A - B \text{ ou } \overline{B} = A - B.$$

Para melhor compreensão utilizaremos o exemplo a seguir.

Exemplo: Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ e $C = \{3, 4, 5, 6, 8\}$.

Podemos afirmar que:

$\subset_A^B = \{1, 2, \}$;

$\subset_C^B = \{6, 8\}$.

Proposição 4.1.7 *Propriedades de complementar de um conjunto: Sejam A e B subconjuntos de C, são válidas as propriedades a seguir.*

i) $\subset_C^A \cap A = \emptyset$ *e* $\subset_C^A \cup A = C$*;*

ii) $\subset_C^C = \emptyset$ *e* $\subset_C^{\emptyset} = C$*;*

iii) $\subset_C \ (\subset_C^A) = A$*(complementar em relação a C do complementar de A em relação a C);*

iv) $\subset_C^{A \cap B} = \subset_C^A \cup \subset_C^B$*;*

v) $\subset_C^{A \cup B} = \subset_C^A \cap \subset_C^B$*.*

4.2 DIAGRAMA DE ÁRVORE

O Diagrama Sequencial ou Diagrama da Árvore é uma estrutura para análise de eventos dependentes, como a escolha sequencial de objetos ou de tomadas de decisões.

O diagrama da árvore apresenta de maneira visual todas as possíveis combinações de respostas para certo evento.

Segundo (BRASE; BRASE, 2016, p.222):

"O diagrama da árvore dá uma apresentação visual do total de resultados de um experimento que consiste de uma série de eventos. De um diagrama da árvore, podemos determinar não somente o total de possíveis resultados, mas também os resultados individualmente."

Este tipo de diagrama consiste em partir de uma informação, comumente conhecida como o tronco da árvore, e listar as possibilidades para a próxima escolha, cada possibilidade formará um novo ponto de disjunção, estes pontos são conhecidos por nós, o "caminho"entre cada nó é conhecido como galho da árvore, este processo se repete até a última série de possibilidades, que é conhecida como folhas. Este modelo pode ser visualizado na Figura 1.

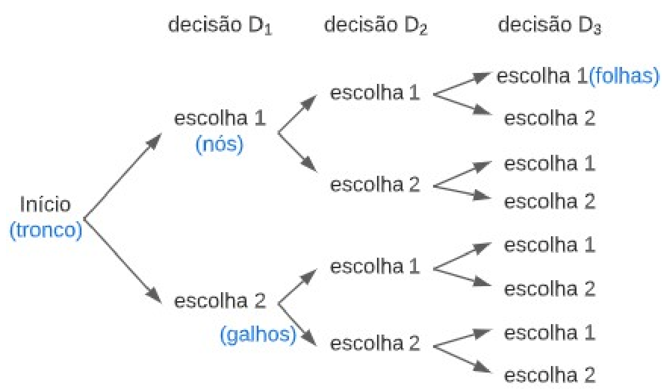


Figura 1: Modelo básico de uma árvore de possibilidades

A quantidade total de folhas representa a quantidade de possíveis resultados e cada trajeto partindo do tronco da árvore até uma folha representa um possível resultado para o problema, a isso que Brase se refere no texto acima citado.

Este método é bastante útil para compreensão do comportamento de um problema, por ser visual. Principalmente em problemas que apresentam condições ou regras, como não poder repetir uma cor em uma série de escolhas de peças de roupa ou jogadores de uma mesma posição ao se montar um time.

Para uma melhor compreensão resolveremos um exemplo:

Exemplo: Para o ano letivo do curso de Matemática, foram sugeridos pelos professores 2 livros de Geometria, 2 de Aritmética e 3 de Funções Reais. Newton decide adquirir um livro de cada disciplina. De quantas maneiras diferentes, ele pode escolher os livros a serem comprados?

A questão pergunta de quantas formas Newton pode escolher os livros para adquirir no ano letivo, não pergunta quais são essas escolhas e não apresenta restrição. Iniciamos pela escolha de um dos dois livros de geometria (Geo 1 e Geo 2), na sequência devemos escolher qual o livro de aritmética (Arit 1, Arit 2) será adquirido, e por último qual dos livros de funções reais (Fun 1, Fun 2 e Fun 3) dentre as opções disponíveis.

Na ordem que definimos, as opções de livros de geometria e aritmética seriam os nós da árvore e as opções de livros de funções reais seriam as folhas. Porém é importante lembrar que como a questão pede apenas a quantidade de escolhas possíveis, a ordem que Newton escolhesse entre as 3 disciplinas não afetaria o resultado. Vamos ver como fica o diagrama da árvore na Figura 2.

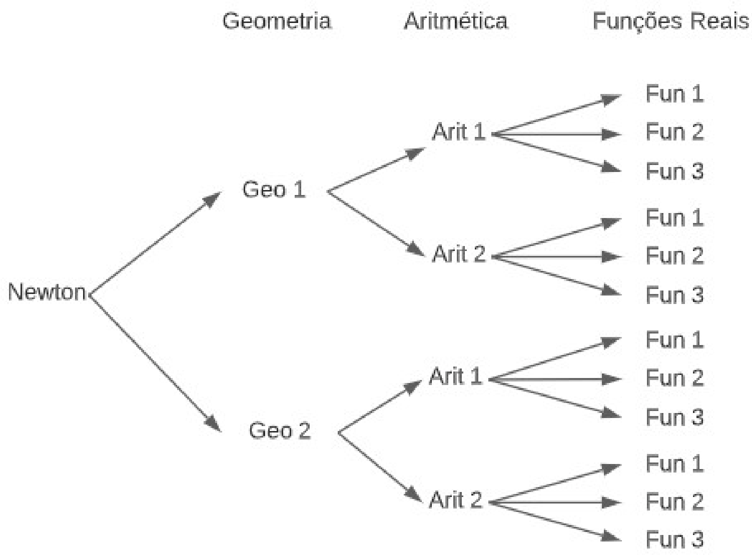


Figura 2: Possíveis escolhas de livros de Newton

Segundo o diagrama da árvore temos um total de 12 folhas, ou seja, Newton pode fazer suas escolhas de livros de 12 maneiras distintas.

Uma definição mais precisa sobre Diagrama de Árvore é englobada na Teoria de Grafos. Não aprofundaremos este estudo pois fugiria da proposta deste trabalho. Porém, caso o leitor queira consultar compreender mais a fundo indicamos o livro (NETTO, 2012).

4.3 PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

O Princípio Fundamental da Contagem ou Princípio Multiplicativo é um método para cálculo de quantidade de maneiras de escolher entre possíveis opções em uma série de eventos dependentes. Cada escolha é diretamente relacionada à próxima.

Segundo (CARVALHO, 2015, p.3), podemos definir o Princípio Fundamental da Contagem como:

"Se uma decisão D_1 pode ser tomada de p modos e, qualquer que seja essa escolha, a decisão D_2 pode ser tomada de q modos, então o número de maneiras de se tomarem consecutivamente as decisões D_1 e D_2 é igual a $p \cdot q$."

Assim, a quantidade de maneiras que n decisões $D_1, D_2, ..., D_n$ dependentes podem ser tomadas é $\prod_{i=1}^{n} D_i$.

O Princípio Fundamental da Contagem pode ser representado também pelo Diagrama da Árvore, já apresentado na seção $4 \cdot 2$.

Para melhor compreensão utilizaremos o exemplo a seguir, originalmente presente em (CARVALHO, 2015, p.6):

Exemplo: O código Morse usa dois símbolos, ponto e traço, que são chamados de letras. Nesse código, as palavras têm de 1 a 4 letras. Quantas são as possíveis palavras formadas no código Morse?

Como cada palavra é composta por uma, duas, três ou quatro letras, significa que na formação de cada palavra, são tomadas até quatro decisões, em que cada uma delas tem duas escolhas possíveis, ponto ou traço.

Iniciaremos analisando palavras formadas com apenas uma letra, neste caso serão apenas duas palavras, a palavra '.' e a palavra '-'.

Para as palavras formadas por duas letras, utilizaremos do produto das possibilidades de cada letra para definir o total de palavras. Para a primeira letra são duas possibilidades, ponto ou traço, para a segunda letra novamente temos as mesmas duas opções, totalizando $2 \cdot 2 = 4$ possíveis palavras.

Analogamente podemos concluir que para palavras por três letras temos $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ palavras e para palavras formadas por quatro letras temos $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ palavras.

Então o número de palavras existentes em código Morse é igual a $2+4+8+16 = 30$ palavras.

4.4 MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL

Dentro do estudo de estatística, daremos ênfase ao estudo das medidas de tendência central. Segundo (LARSON; FARBER, 2015): "Uma medida de tendência central é um valor que representa uma observação típica ou central de um conjunto de dados."

Dentre essas medidas, as mais comumente utilizadas são média, moda e mediana. Assim, nessa seção trataremos sobre estas três definições.

Uma definição muito importante para o estudo desta seção é a de frequência, segundo (LARSON; FARBER, 2015, p. 37): "A frequência f de uma classe é o número de ocorrências de dados na classe." Onde classes são agrupamentos de elementos em forma de intervalos em um conjunto de dados. Por exemplo, em um conjunto $A =$

$\{1;1;3;5;8;10;11\}$, dizemos que a classe dos números entre 1 e 5 tem frequência 4, a classe dos elementos entre 6 e 10 tem frequência 2 e a classe dos elementos entre 11 e 15 tem frequência 1. Em determinados problemas os elementos não são separados em classes, e sim analisados individualmente. Por exemplo, em um conjunto $B = \{1;1;3;5\}$, dizemos que o elemento 1 tem frequência 2 e os elementos 3 e 5 tem frequência 1.

4.4.1 Média

Para calcular o valor médio em um conjunto de dados utilizamos o conceito de **Média Aritmética**:

Definição 4.4.1 *Seja x uma variável quantitativa, chamamos de variáveis quantitativas aquelas cujos valores são expressos em números, e $x_1, x_2, ..., x_n$ os valores assumidos por x. Define-se a* ***média aritmética*** *de x - indicada por $\overline{x}$ - como a divisão da soma de todos esses valores pela quantidade de valores n, isto é:*

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}.$$

Exemplo: Calcule a média aritmética do conjunto dos múltiplos positivos de 3, menores que 30.

Neste conjunto, a variável quantitativa é o conjunto dos números divisíveis por 3 entre 1 e 29, ou seja, $\{3;\ 6;\ 9;\ 12;\ 15;\ 18;\ 21;\ 24;\ 27\}$.

Temos então, $\overline{x} = \dfrac{3+6+9+12+15+18+21+24+27}{9} = \dfrac{135}{9} = 15$. Ou ainda, $\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{9} 3 \cdot i}{9} = \dfrac{135}{9} = 15$.

(IEZZI; HAZZAN; DEGENSZAJN, 2013) apresenta ainda duas propriedades de média aritmética, para as demonstrações dessas propriedades utilizaremos um conjunto X onde seus elementos são números, definido pelos elementos x_i em que $(i = 1, 2, ..., n)$ e denotaremos a média aritmética desse conjunto como $\overline{x}$.

Proposição 4.4.2 *Se a cada x_i $(i = 1, 2, ..., n)$ adicionarmos uma constante real c, a média aritmética fica adicionada de c unidades.*

Demonstração: Para demonstrar esta propriedade, somaremos uma constante c a cada elemento do conjunto X, chamaremos o conjunto formado pelos novos valores de X', onde $X' = \{x_1 + c, x_2 + c, ..., x_n + c\}$.

Segundo a definição de média aritmética, para cálcular $\overline{x'}$, em relação ao conjunto X', temos

$$\overline{x'} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i + c)}{n} = \frac{(x_1 + c) + (x_2 + c) + ... + (x_n + c)}{n} =$$
$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} + \frac{c + c + ... + c}{n} = \sum_{i=1}^{n} x_i n + \frac{n \cdot c}{n} = \overline{x} + c.$$

Proposição 4.4.3 *Se multiplicarmos cada x_i $(i = 1, 2, ..., n)$ por uma constante real c, a média aritmética fica multiplicada por c.*

Demonstração: A demonstração da proposição 2 é análoga a da proposição 1, multiplicaremos cada elemento do conjunto X por uma constante c, chamaremos o conjunto formado pelos novos valores de X', em que $X' = \{c \cdot x_1, c \cdot x_2, ..., c \cdot x_n\}$.

Pela definição de média aritmética, para cálcular $\overline{x'}$, em relação ao conjunto X', temos

$$\overline{x'} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(c \cdot x_i)}{n} = \frac{(c \cdot x_1) + (c \cdot x_2) + ... + (c \cdot x_n)}{n} = \frac{c \cdot (x_1 + x_2 + ... + x_n)}{n} =$$
$$c \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = c \cdot \overline{x}.$$

Quando os elementos de um conjunto estão agrupados pela frequência, utilizamos uma versão da média aritmética, chamada de **média aritmética ponderada**, este método simplifica o cálculo da média aritmética quando os valores se repetem. Para definir a média aritmética ponderada é importante apresentar o conceito de frequência absoluta, que representa a quantidade de vezes que um valor da variável se repete no conjunto de dados.

Segundo (IEZZI; HAZZAN; DEGENSZAJN, 2013):

Definição 4.4.4 *Seja x uma variável quantitativa que assume k valores reais $x_1, x_2, ..., x_k$ com **frequências absolutas** respectivamente iguais a $n_1, n_2, ..., n_k$. A **média aritmética ponderada** de x - indicada por $\overline{x}$ - é definida como a divisão da soma de todos os produtos $x_i \cdot n_i$ $(i = 1, 2, ..., k)$ pela soma das frequências, isto é:*

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot n_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i} = \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + ... + x_k \cdot n_k}{n_1 + n_2 + ... + n_k}.$$

Exemplo: Em um colégio, para ser considerado aprovado em um bimestre o estudante precisa atingir média bimestral igual ou superior a 7,0. Um estudante que obteve no bimestre 6,0 na prova (peso 3), 7,5 na pesquisa (peso 2), 9,0 no debate (peso 1) e 6,0 no trabalho em equipe (peso 2), será considerado aprovado nesse bimestre?

Chamamos de peso a quantidade de vezes que o elemento está presente no conjunto de notas do aluno, ou seja, o peso é igual a frequência com que o elemento aparece no conjunto de dados. Assim sendo, essa questão trata de média aritmética ponderada, segundo as definições:

$$\overline{x} = \frac{6,0 \cdot 3 + 7,5 \cdot 2 + 9,0 \cdot 1 + 6,0 \cdot 2}{3 + 2 + 1 + 2} = \frac{54}{8} = 6,75.$$

Assim, esse estudante terá média bimestral igual a 6,75, logo o estudante não será aprovado nesse bimestre.

4.4.2 Mediana

A segunda medida de tendência central é a mediana(M_e), que é definida pelo termo central de um conjunto de **dados ordenados**, assim como a média, a mediana pode ou não pertencer ao conjunto. Chamamos de termo central (LARSON; FARBER, 2015) define a mediana da seguinte maneira:

Definição 4.4.5 *A mediana de um conjunto de dados é o elemento que está no meio dos dados quando o conjunto está ordenado. A mediana indica o centro de um conjunto de dados ordenado, dividindo-o em duas partes com quantidades iguais de valores. Quando o conjunto de dados tem um número ímpar de observações, a mediana é o elemento do meio. Se o conjunto de dados tem um número par de observações, a mediana é a média dos dois elementos que ocupam as posições centrais.*

Desta forma, a primeira coisa a se fazer ao se procurar a mediana de um conjunto de dados é ordenar os seus elementos, de forma crescente ou decrescente para números, alfabética ou alfabética-invertida para palavras, e assim por diante.

Caso o conjunto tenha um número impar de elementos, basta dividir o número de elementos por 2 e arredondar para cima, o resultado será posição do elemento que representa a mediana. Porém se o número de elementos for par, não haverá um termo central, então ao se dividir o número de elementos por 2, deve-se tomar o resultado da divisão e seu sucessor como os termos a serem utilizados para o cálculo da mediana, esse cálculo consiste em uma média aritmética entre os dois termos.

Exemplo: Calcule a mediana do conjunto de dados $A = \{1; 3; 5; 2; 3; 5; 4\}$.

A primeira coisa a se fazer é ordenar o conjunto A, utilizaremos a ordem crescente para esse processo. Assim, usaremos $A = \{1;\ 2;\ 3;\ 3;\ 4;\ 5;\ 5\}$.

O conjunto A tem 7 elementos, ou seja, uma quantidade ímpar de termos. Para encontrar a mediana fazemos $\frac{7}{2} = 3,5$, arredondando para cima obtemos o valor 4, assim a mediana será o $4^{\underline{o}}$ termo desse conjunto, ou seja, a mediana de A é igual a 3, ou $M_e = 3$.

Exemplo: Calcule a mediana do conjunto $B = \{7; 6; 5; 4; 3; 2\}$.

O conjunto já se encontra ordenado, de maneira descrescente. Assim, não há necessidade de reorganização.

O conjunto B tem um total de 6 elementos, ou seja, uma quantidade par. Neste caso a mediana será a média aritmética entre os dois "termos centrais". Fazemos $\frac{6}{2} = 3$, logo utilizaremos o 3º termo, o número 5 e seu sucessor, o 4º termo, número 4.

Então a $M_e = \frac{5+4}{2} = \frac{9}{2} = 4,5$.

4.4.3 Moda

A moda de um conjunto de dados corresponde ao elemento de maior frequência, ou seja, que mais aparece nesse conjunto. t Segundo (LARSON; FARBER, 2015):

"A moda de um conjunto de dados é o valor que ocorre com a maior frequência. Um conjunto de dados pode ter uma moda, mais de uma moda, ou não ter moda. Quando nenhum valor se repete, o conjunto de dados não tem moda. Quando dois valores ocorrem com a mesma maior frequência, cada um é uma moda e o conjunto é chamado de bimodal."

Podemos acrescentar à definição os casos em que mais de dois elementos tem a maior frequência, neste caso chamamos o conjunto de dados de multimodal.

Uma definição mais formal pode ser encontrada em (IEZZI; HAZZAN; DEGENSZAJN, 2013, p. 121):

Definição 4.4.6 *Seja x uma variável quantitativa que assume os valores $x_1, x_2, ..., x_k$ com frequências absolutas iguais a $n_1, n_2, ..., n_k$, respectivamente. Se o máximo entre $n_1, n_2, ..., n_k$ é igual a $n_j, j \in \{1, 2, ..., k\}$, dizemos que a moda - indicada por M_o - é igual ao valor x_j.*

Segundo as definições acima apresentadas, a moda, caso exista, será sempre um elemento pertencente ao conjunto de dados. Para definir esse elemento não é necessário nenhum tipo de cálculo além da frequência. É importante entender que a moda não necessariamente trata sobre um número, ela pode ser qualquer tipo de elemento presente em um conjunto, como por exemplo em um grupo de pessoas, podemos analisar o conjunto que indica o bairro onde cada pessoa mora. A moda desse conjunto será o bairro em que o maior número de pessoas do grupo residir.

Para melhor ilustrar a definição, resolveremos o exemplo a seguir:

Exemplo: Em uma pesquisa, 1319 adultos com idade entre 18 e 40 anos foram perguntados por que fazem compras online. Dentre as respostas, 215 responderam "para evitar aglomerações", 513 responderam "melhores preços e mais promoções", 206 responderam "mais variedade", 303 responderam "praticidade" e 82 responderam "segurança perante as leis do consumidor". Dentre as respostas apresentadas, qual foi a resposta modal?

Os valores apresentados, representam a quantidade de pessoas que respondeu cada uma das opções, dessa forma, representa a frequência de cada resposta. Então a resposta que teve a maior frequência foi "melhores preços e mais promoções"com 513 citações, sendo assim a resposta modal deste problema.

4.5 MÚLTIPLOS E DIVISORES

Para a compreensão do conceito de múltiplos e divisores de um número inteiro estudaremos os conceitos de multiplicação, de divisão e de divisibilidade no conjunto dos inteiros $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$.

4.5.1 Multiplicação nos inteiros

No conjunto $\mathbb{Z}$, a operação de multiplicação atende às seguintes propriedades:

Propriedade 4.5.1 *A multiplicação é bem definida:*
Para todos a, b, c, $d \in \mathbb{Z}$, se $a = b$ e $c = d$, então $a \cdot c = b \cdot d$.

Propriedade 4.5.2 *A multiplicação é comutativa:*
Para todos a, $b \in \mathbb{Z}$, temos que $a \cdot b = b \cdot a$.

Propriedade 4.5.3 *A multiplicação é associativa:*
Para todos a, b, $c \in \mathbb{Z}$, temos que $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Propriedade 4.5.4 *A multiplicação tem um elemento neutro:*
Para todo $a \in \mathbb{Z}$, temos que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

Propriedade 4.5.5 *A multiplicação é distributiva com relação à adição:*
Para todos a, b, $c \in \mathbb{Z}$, temos que $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

A seguir apresentamos outras proposições importantes que tratam sobre a multiplicação pelo 0 e em relação à igualdade.

Proposição 4.5.6 *Para todo $a \in \mathbb{Z}$,*

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0.$$

Para demonstrar essa proposição precisaremos de três propriedades da adição:
(i) Para todo $a \in \mathbb{Z}$, existe $b = -a$, tal que, $a + b = 0$. Em que b é chamado de oposto de a.
(ii) Para todos $a, b, c \in \mathbb{Z}$, temos que $(a + b) + c = a + (b + c)$.
(iii) Para todo $a \in \mathbb{Z}$, temos que $a + 0 = 0 + a = a$.

Demonstração: Dado $a \cdot 0$, pela propriedade distributiva da multiplicação com relação à adição, temos que

$a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0.$

Iniciamos somando $-(a \cdot 0)$ em ambos os membros da igualdade, em que $-(a \cdot 0)$ é igual ao oposto de $a \cdot 0$, como definido em (i)

$-(a \cdot 0) + a \cdot 0 = -(a \cdot 0) + (a \cdot 0 + a \cdot 0)$ (*)

Usando das propriedades (i), (ii) e (iii) e substituindo (*)

De (i) $-(a \cdot 0) + a \cdot 0 = 0$ então $0 = -(a \cdot 0) + (a \cdot 0 + a \cdot 0)$

de (ii) $0 = (-(a \cdot 0) + a \cdot 0) + a \cdot 0$

de (iii) $0 = 0 + a \cdot 0 = a \cdot 0.$

Proposição 4.5.7 *Segundo a lei do cancelamento da multiplicação:*

Para todos $a, b \in \mathbb{Z}$ e $c \in \mathbb{Z}^*$ (números inteiros não-nulos), temos que $a \cdot c = b \cdot c \iff a = b$.

Demonstração: $\rightarrow$ Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ *e* $c \in \mathbb{Z}^*$ tais que $a \cdot c = b \cdot c$, temos que

$a \cdot c + [-(b \cdot c)] = b \cdot c + [-(b \cdot c)] \Rightarrow a \cdot c - b \cdot c = 0 \Rightarrow c \cdot (a - b) = 0$

Como por hipótese $c \neq 0$, então $a - b = 0 \Rightarrow a - b + b = 0 + b \Rightarrow a = b$.

$\leftarrow$ A implicação $a = b \rightarrow a \cdot c = b \cdot c$ decorre imediatamente do fato de a multiplicação ser bem definida, apresentado na propriedade 4.5.1.

4.5.2 Divisibilidade nos inteiros

Para definir a divisibilidade entre números inteiros, usaremos (HEFEZ, 2016, p.40): "Dados dois números inteiros a e b, diremos que *a divide b*, escrevendo $a|b$, quando existir $c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ca$. Nesse caso, diremos também que a é um *divisor* ou um *fator* de b ou, ainda, que b é um *múltiplo de a* ou que *b é divisível por a*."

A notação $|$ não representa nenhuma operação no conjunto dos inteiros, apenas um símbolo para representar que existe um valor $c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = a \cdot c$. Caso desejemos dizer que *a não divide b* ou que *b não é divisível por a*, usamos a notação $a \nmid b$.

Para melhor compreensão da divisibilidade nos números inteiros, é importante conhecer algumas propriedades, segundo (HEFEZ, 2016, p. 40):

Proposição 4.5.8 *"Sejam a, b, $c \in \mathbb{Z}$. Tem-se que*

i) $1|a$, $a|a$ *e* $a|0$.

ii) $0|a \iff a = 0$.

iii) a divide b se, e somente se, $|a|$ divide $|b|$.
iv) se $a|b$ e $b|c$, então $a|c$."

Uma ferramenta de grande importância no estudo da divisibilidade é a *Divisão Euclidiana*, vale lembrar que Euclides tratava apenas com números naturais, a divisão Euclidiana pode ser enunciada como:

Teorema 4.5.9 *Sejam a e b dois números naturais com $b \neq 0$. Existem dois únicos números naturais q e r tais que*

$$a = b \cdot q + r, \text{ com } r < b.$$

Caso o leitor tenha interesse na demonstração da Divisão Euclidiana, sugiro a leitura de (HEFEZ, 2016, p. 46).

4.6 POLÍGONOS

Na resolução de problemas é muito comum nos depararmos com questões de Geometria Plana, em geral são questões envolvendo polígonos regulares. Desta forma é importante ser apresentado o funcionamento do cálculo destas operações neste trabalho.

Para definir um polígono, utilizaremos a definição presente em (DOLCE; POMPEO, 1993):

Definição 4.6.1 *Dada uma sequência de pontos de um plano $(A_1, A_2, ..., A_n)$ com $n \geq 3$, todos distintos, em que três pontos consecutivos não são colineares, considerando-se consecutivos A_{n-1}, A_n e A_1, assim como A_n, A_1 e A_2, chama-se polígono à reunião dos segmentos $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, ..., \overline{A_{n-1}A_n}, \overline{A_nA_1}$. Esses segmentos não devem se cruzar.*

Uma definição mais básica para polígonos é: "Chamamos de polígono uma linha poligonal fechada e simples (sem cruzamentos)".

Definição 4.6.2 *Os pontos que definem um polígono são chamados de vértices do polígono.*

No âmbito da escola costuma-se definir um polígono como uma linha poligonal fechada e simples, ou seja, uma linha sem pontas soltas, sem curvas e sem cruzamentos entre os segmentos.

4.6.1 Diagonais

Em questões que tratam sobre diagonais de um polígono, trata-se principalmente sobre a quantidade delas.

Definição 4.6.3 *Chamamos de diagonal o segmento que une dois vértices não consecutivos de um polígono.*

Proposição 4.6.4 *O número de diagonais de um polígono com n lados, pode ser determinado por*

$$d_n = \frac{(n-3)\cdot n}{2}.$$

Esta fórmula pode ser justificada, afinal cada vértice A_n forma uma diagonal com todos os n vértices do polígono, exceto com ele mesmo e com seus consecutivos, ou vizinhos, A_{n-1} e A_{n+1}. Assim cada um dos n vértices irá gerar $n-3$ diagonais, logo serão geradas $n\cdot(n-3)$ diagonais. Porém vale lembrar que cada diagonal está sendo contada duas vezes, afinal $\overline{A_1A_3} = \overline{A_3A_1}$. Afim de resolver esse problema da dupla contagem, basta dividir por 2 as $n\cdot(n-3)$ diagonais.

4.6.2 Ângulos

O estudo de ângulo nos polígonos é bastante amplo, porém daremos ênfase ao cálculo da soma dos ângulos internos de um polígono, devido a sua relevância para os estudos contidos neste trabalho.

Partimos do conceito de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º para construir essa definição.

Propriedade 4.6.5 *A soma dos ângulos internos de um polígono com n lados é igual a*

$$S_i = (n-2)\cdot 180^\circ.$$

Para compreender a origem dessa fórmula usaremos como base a figura 3.

Neste exemplo, o hexágono foi dividido em 4 triângulos, em que cada triângulo tem a soma dos seus ângulos internos valendo 180°, desta forma, a soma dos ângulos internos deste hexágono pode ser calculado multiplicando-se $4\cdot 180^\circ = 720^\circ$.

O triângulo é o polígono com menor número de lados, 3, e de cada um de seus vértices, não parte diagonal alguma, a partir disso, a cada novo lado incluído no polígono, cada vértice gera uma nova diagonal e por consequência um novo triângulo. Como o

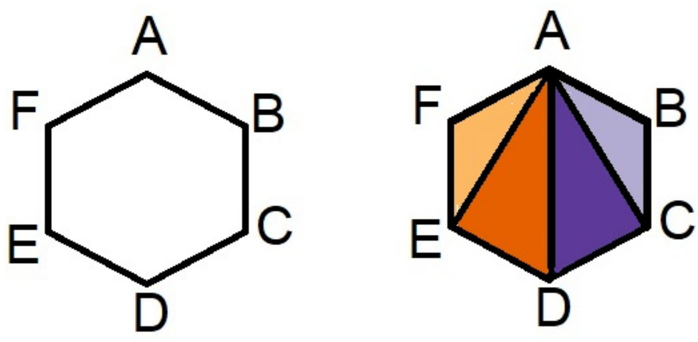


Figura 3: Divisão de um hexágono em triângulos para cálculo da soma dos ângulos internos.

número de diagonais partindo de cada vértice é igual a $n-3$, assim o número de triângulos gerados a partir de cada vértice de um poligono de n lados, é igual a $n-2$, então a soma dos ângulos internos de um polígono é igual a $(n-2)\cdot 180°$.

4.6.3 Perímetro

Definição 4.6.6 *Chamamos de perímetro de um polígono, a soma dos comprimentos de todos os seus lados.*

4.6.4 Área de Polígonos

O termo área pode utilizado em dois sentidos: como a região interna de um polígono e como a medida dessa região. Dentre os problemas que envolvem cálculo de área de polígonos, trataremos de alguns casos em específico.

4.6.4.1 Retângulos

Proposição 4.6.7 *Seja um retângulo de largura l e de comprimento c. A área de um retângulo pode ser calculada multiplicando-se as medidas de sua largura e seu comprimento, ou seja,*

$$A_{ret} = l \cdot c.$$

Deste cálculo, podemos determinar também a área de um paralelogramo qualquer, afinal se segmentarmos o paralelogramo podemos construir um retângulo, como mostrado na figura 4.

Exemplo: Seja o paralelogramo $ABCD$, cuja base mede 10 e a altura mede 8. Calcule a área do paralelogramo $ABCD$.

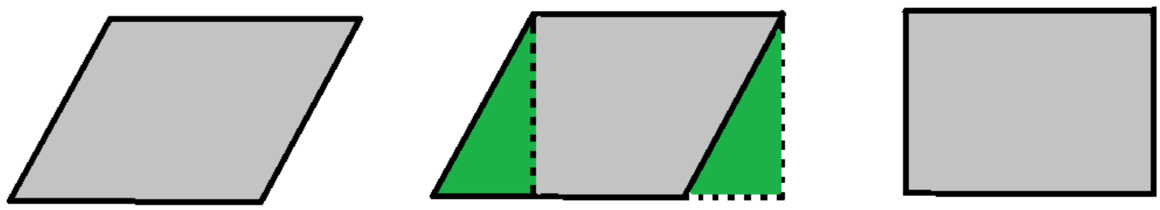


Figura 4: Conversão de um paralelogramo qualquer em um retângulo

Inicialmente devemos traçar uma perpendicular ao lado CD, passando pelo ponto A, ao interseção entre essa reta e o segmento CD daremos o nome de E, na sequência devemos traçar a reta suporte que contém o segmento CD, em seguida traçar uma perpendicular a essa reta suporte, passando pelo vértice B, ao ponto de encontro entre as duas retas traçadas daremos o nome de F.

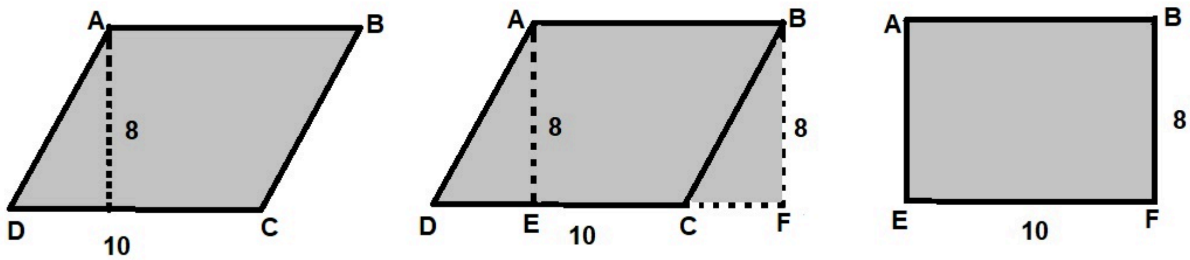


Figura 5: Cálculo de área do paralelogramo ABCD.

Pela definição de área de retângulo, temos que a área do paralelogramo $ABCD$ é igual a área do retângulo $ABEF$. Desta forma $A_{ABCD} = A_{ABEF} = b \cdot h = 10 \cdot 8 = 80$. A construção pode ser vista na figura 5.

Proposição 4.6.8 *A área de um paralelogramo de base b e altura h, podeser calculada por meio de*

$$A_{par} \;=\; b \cdot h.$$

4.6.4.2 Triângulos

A dedução da fórmula para o cálculo da área de um triângulo é análoga à usada no paralelogramo, neste caso podemos duplicar o triângulo, para formar um peralelogramo. Essa dedução fica ilustrada na figura 6.

Como a área de um paralelogramo é obtida multiplicando-se a base pela altura, e neste caso o paralelogramo é formado por dois triângulos, temos que a área do triângulo é a metade da área do paralelogramo.

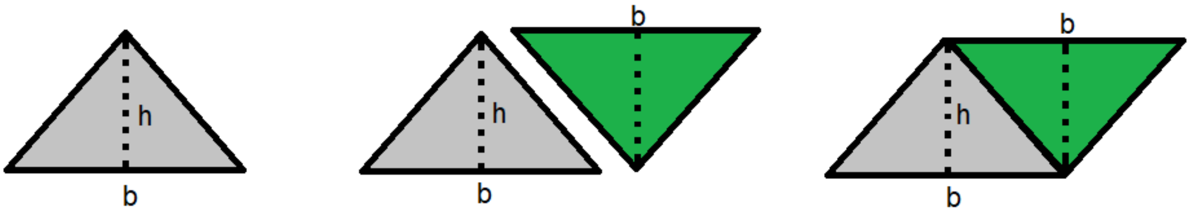


Figura 6: Duplicação de um triângulo para formação de um paralelogramo

Proposição 4.6.9 *A área de um triângulo de base b e altura h, pode ser calculada como*

$$A_{tri} = \frac{b \cdot h}{2}.$$

4.6.4.3 Polígonos Regulares

O terceiro caso a ser abordado é o dos Polígonos Regulares, apesar de uma infinidade de polígonos existentes, ao tratarmos com os regulares poderemos utilizar de um mesmo padrão para todos. Este padrão passa pela partição do polígono em triângulos congruentes.

Para a dedução desta fórmula precisaremos de algumas definições prévias.

Definição 4.6.10 *Chamamos de inscrito à um polígono, o círculo que intersecta o polígono nos pontos médios dos seus lados.*

Definição 4.6.11 *Chamamos de circunscrito à um polígono, o círculo que passa por todos os vértices do polígono.*

Definição 4.6.12 *Chamamos de apótema de um polígono o segmento que parte do centro do círculo circunscrito ao polígono até o ponto médio dos lados desse polígono.*

Apresentadas as definições necessárias podemos perceber na figura 7 que todo polígono regular pode ser dividido em triângulos isósceles e congruentes entre si. Triângulos esses formados pelo raio do círculo circunscrito ao polígono e os lados do mesmo. Desta forma a base desses triângulos é o próprio lado do polígono, enquanto a altura do triângulo é definida pelo apótema do polígono.

O número de triângulos é igual ao número de lados do polígono, assim sendo, a área do polígono pode ser calculada multiplicando-se a área de um triângulo pelo número de triângulos, ou seja, de lados do polígono.

Desta forma podemos dizer que a área de um polígono regular de n lados, que medem l, pode ser calculado como $A_{poli} = n \cdot A_{\Delta}$. Para calcular a área do triângulo temos que $A_{tri} = \dfrac{l \cdot a}{2}$, em que a é o apótema do polígono.

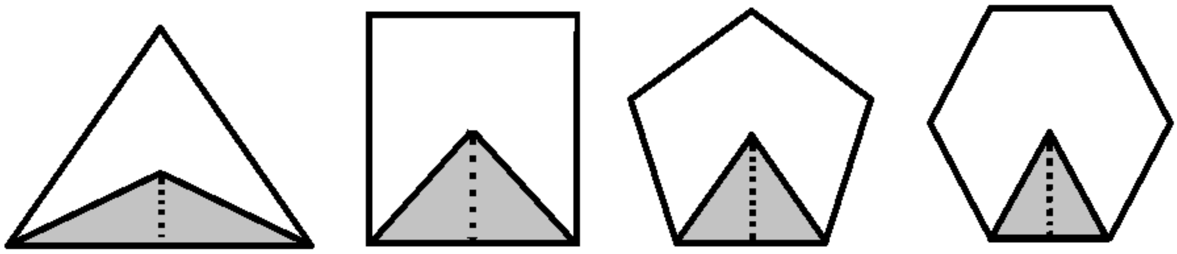


Figura 7: Partição de um polígono regular em triângulos congruentes

Sejam p o semiperímetro e $2p$ o perímetro desse polígono, temos que $A_{poli} = \dfrac{n \cdot l \cdot a}{2} = \dfrac{2p \cdot a}{2} = p \cdot a$

Proposição 4.6.13 *Seja um polígono de n lados de mesma medida, de apótema a e de semiperímetro p, temos que*

$$A_{poli} = p \cdot a.$$

4.7 ANÁLISE DE PADRÕES

Ao longo dos séculos XIX e XX d.C, houve uma explosão de produção de conhecimento matemático no mundo. Segundo (DEVLIN, 1994, p. 3):

"*A explosão da atividade matemática que ocorreu no século atual foi dramática. No ano de 1900, todo o conhecimento matemático do mundo caberia em cerca de oitenta livros. Hoje seriam necessários talvez 100.000 volumes para conter toda a matemática conhecida.*"

Nesse período, houve grande fragmentação das áreas da matemática em subáreas e também a criação de novos campos. Essa variedade gera uma nova visão sobre o estudo de matemática, em que se dá ênfase não apenas no que se estuda, mas também em como se estuda, ou seja, que tipo de metodologia é utilizada. Então dessa importância dada às ferramentas utilizadas, pode-se dizer que atualmente a matemática é **a ciência dos padrões**. Como (DEVLIN, 1994, p. 3) define com precisão:

"O que o matemático faz é examinar 'padrões' abstratos – padrões numéricos, padrões de forma, padrões de movimento, padrões de comportamento e assim por diante. Esses padrões podem ser reais ou imaginários, visuais ou mentais, estáticos ou dinâmicos, qualitativos ou quantitativos, puramente utilitários ou de pouco mais de interesse recreativo. Eles podem surgir do mundo ao nosso redor, das profundezas do espaço e do tempo, ou do funcionamento interno da mente humana."

Dentre esses padrões, é importante para esse trabalho uma compreensão dos padrões de contagem, de formatos e de simetria. Caso o leitor tenha interesse em aprofundar os estudos nesta área de padrões, é indicado uma leitura do livro (DEVLIN, 1994).

Padrões de contagem: Falar em padrões de contagem remete diretamente à estrutura dos números, iniciando com a própria ideia de números presente no mundo real, associar objetos à quantidades, por exemplo, ao ver que um animal tem filhotes e associar um filhote à quantidade 1, outro à quantidade 2, outra à quantidade 3 e assim por diante, representa um padrão, a contagem.

Mas existem diversos outros padrões que podemos observar em um número. São exemplos: Ser um número primo ou composto, ser par ou ímpar, ser um quadrado perfeito, ser múltiplo ou divisor de outro número e assim por diante. Para uma melhor compreensão desses padrões referentes à números, vale o estudo da chamada Teoria de Números.

Padrões de Formatos e Simetria: Objetos no mundo real tem suas formas próprias, e por conhecermos essas formas, ao pensar em alguma fruta por exemplo, já imaginamos o formato dela, por exemplo, ao pensar em uma banana, é comum imaginar algo amarelo e em formato de uma lua minguante. Porém, por conhecermos conceitos abstratos de formas geométricas, é que associamos os objetos à elementos da geometria, como por exemplo a banana pode ser descrita como uma fruta amarela, em formato de um cilindro curvo.

Da mesma forma que fazemos essa associação no mundo real, ao vermos uma figura, nosso cérebro busca associar os elementos ali vistos a definições geométricas. Por exemplo, ao ver um trapézio, podemos associar a triângulos e um retângulo. Esses padrões podem ser usados tanto para fazer decomposições em elementos familiares com propriedades conhecidas, quanto para se avaliar simetrias, como por exemplo, perceber que um polígono é regular, ou que um triângulo é isósceles, ou que os ângulos de certa figura são congruentes. Todos esses exemplos são comumente usados ao se resolver problemas que envolvem geometria plana, que são focos desse trabalho.

5 APLICAÇÃO

Anteriormente listamos as etapas a serem seguidas ao se resolver um problema, seja ele matemático ou não. Como este trabalho tem como foco o ensino da resolução de problemas no contexto da sala de aula, mostraremos estas teorias em prática utilizando os conceitos matemáticos apresentados no capítulo anterior.

5.1 CONTAGEM

Trataremos como problemas de contagem, principalmente os que tratam do Princípio Fundamental da Contagem (PFC). Estas questões costumam tratar de combinações de escolhas entre objetos ou pessoas.

Questões de contagem precisam de um bom raciocínio para a definição da estratégia pois, apesar de as resoluções utilizarem basicamente de multiplicação, é de extrema importância que o estudante consiga compreender não só o que o problema quer que aconteça, mas também o que não pode acontecer. Seja no ensino fundamental ou médio, saber identificar as restrições que o enunciado apresenta é uma das principais dificuldades enfrentadas pelos estudantes ao resolver problemas de Análise Combinatória.

Uma ferramenta interessante para se apresentar aos estudantes é a construção de árvores de possibilidades. Esta estratégia por ser muito visual facilita a compreensão da questão, pois ao se seguir uma ramificação da árvore o estudante consegue encontrar uma possível solução e assim compreender melhor o comportamento das demais soluções.

Para demonstrar como aplicar o método de Polya na resolução de problemas de contagem, usaremos uma questão presente na apostila (CARVALHO, 2015).

Exemplo: Um restaurante possui um cardápio que apresenta escolhas de pratos: saladas (salada verde, salada russa ou salpicão), sopas (caldo verde, canja ou de legumes) e pratos principais (bife com fritas, peixe com puré, frango com legumes ou lasanha).
(a) De quantos modos se pode escolher um prato deste cardápio?
(b) De quantos modos se pode escolher uma refeição completa, formada por uma salada, uma sopa e um prato principal?

Compreensão do problema: A questão retrata uma situação em que uma pessoa que vá a esse restaurante e se depare com diversas opções de pratos possa saber de quantas formas diferentes ele pode montar sua refeição. No item (a) a refeição será formada por apenas um prato, enquanto no item (b) será formado por 3 pratos.

A incógnita desse problema é a quantidade de maneiras possíveis para se montar uma refeição neste restaurante. As condições a serem seguidas são de que no item (b), a refeição formada por 3 pratos, tenha exatamente 1 de cada "tipo", ou seja, uma salada, uma sopa e um prato principal.

Em relação ao item (b) o estudante pode esboçar uma árvore de possibilidades para melhor compreender a situação em questão.

Estabelecendo um plano: Primeiramente, busca-se encontrar um problema correlato, pois será de grande ajuda no estabelecimento da estratégia de resolução. Para esta questão um problema parecido que normalmente é apresentado em sala, é o que uma criança tem certa quantidade de calçados, de calças e de camisetas, e pede-se que se descubra de quantas maneiras diferentes essa criança pode se vestir para ir a algum local. Este é um ótimo exemplo para se apresentar contagem aos estudantes, pois tem conexão direta com a realidade deles.

No item (a) a pessoa que fosse ao restaurante deveria escolher apenas um prato, independentemente de ser uma salada, uma sopa ou um prato principal, desta forma precisa-se descobrir apenas quantos pratos estão disponíveis no cardápio, isto será feito somando as opções de cada tipo de prato, ou seja, o princípio aditivo.

No item (b) o problema se aproxima mais da situação das vestimentas, pois para se formar uma refeição completa é preciso escolher um prato de cada tipo. Assim, como a criança deveria escolher um calçado, uma calça e uma camiseta, assim o estudante ao lembrar que para calcular a quantidade de opções de vestimentas ele havia multiplicado a quantidade de calçados pela quantidade de calças, com este produto sendo multiplicado pela quantidade de camisetas, ou seja, utilizado do princípio multiplicativo e assim tentar aplicar a mesma estratégia nesta questão.

Execução do plano: Tendo definido a estratégia, deve-se colocar em prática para definir a sua viabilidade nesta questão. Começando pelo item (a):

No cardápio constam 3 opções de saladas, 3 opções de sopas e 4 opções de saladas, basta então efetuar a soma $3 + 3 + 4 = 10$ pratos disponíveis. **Assim uma pessoa que decida escolher apenas um prato, independentemente do tipo, poderá escolher de 10 modos.**

Já no item (b) o cálculo será diferente pois não basta escolher 3 pratos para se formar a refeição completa, então o para cada escolha de saladas tem-se 3 opções de sopas disponíveis, formando $3 \cdot 3 = 9$ combinações, e para cada uma dessas 9 combinações tem-se 4 opções de prato principal. Desta forma basta multiplicar $9 \cdot 4 = 36$ combinações de pratos. **Desta forma uma pessoa que queira montar uma refeição completa, formada por uma salada, uma sopa e um prato principal poderá o fazer de 36 modos distintos.**

Retrospectiva: Neste momento cabe ao estudante analisar inicialmente a coerência da resposta, faz sentido dizer que no item (a) pode-se escolher de 10 modos, enquanto no item (b) serão 36 modos? Neste caso não há nenhum tipo de impeditivo que demonstre incoerência nas respostas. É importante lembrar que este passo não tem como objetivo descobrir se a solução está efetivamente correta, mas sim buscar algo que indique inconsistência com o enunciado, dizer que a pessoa tivesse um número muito alto de modos seria uma incoerência devido ao baixo número de opções de pratos.

Ao finalizar esta análise, é interessante o estudante buscar se questionar se poderia ter resolvido esta questão de forma mais simples ou eficaz. Nesta situação as outras duas formas mais tradicionais seriam: 1) resolver por meio da construção das árvores de possibilidades, o que demandaria bastante tempo e espaço, espaço físico mesmo, pois uma árvore de possibilidades tende a tomar bastante espaço pelas aberturas nas ramificações, 2) listar todas as possíveis combinações, esta alternativa que muitas vezes é a principal escolha de estudantes que não estão familiarizados com a resolução de problemas, além de demandar muito tempo na sua escrita não apresenta segurança, pois o estudante pode acabar "esquecendo"de alguma das combinações e assim errando a solução.

Desta forma, a estratégia utilizada é bastante segura, rápida e efetiva.

Questões muito recorrentes como se formar pares em um grupo de pessoas em que devem ser compostas por um homem e uma mulher, ou distribuição de lugares em uma fila de forma que pessoas com mesma cor de roupa não possam ficar adjacentes acabam tendo um desempenho inferior, devido à dificuldade em se lidar com essas restrições apresentadas. Não que elas aumentem a dificuldade nos cálculos, mas principalmente por necessitarem que o estudante compreenda a situação e como lidar com ela, não apenas aplicando as fórmulas que está habituado.

A árvore de possibilidades novamente se torna uma grande aliada ao se analisar este tipo de restrição. Para problemas mais simples como os acima citados, é uma das principais ferramentas, senão a principal, para que as restrições sejam compreendidas. Outra ferramenta muito interessante para este tipo de questão é o princípio da exclusão, em que ao invés de o estudante encontrar os casos que satisfazem a condição, ele encontra os que não satisfazem e subtrai do total de casos possíveis. Esta estratégia é aplicada quando o número de casos que não satisfazem é pequeno ou fácil de encontrar.

5.2 ESTATÍSTICA

Uma das áreas da estatística mais presentes na educação básica são as medidas de tendência central, desde o ensino fundamental os conceitos de Média, Moda e Mediana. Este tipo de questão requer atenção à alguns detalhes como: O problema deixa claro que medida de tendência central deve ser calculado? Os dados apresentados estão agrupados? Apresenta frequência ou peso?

Ao trabalhar com questões de estatística no ensino fundamental e médio, sempre me deparei com a ansiedade em fazer contas por parte dos alunos, em que acabam ignorando informações importantes da questão, levando em conta apenas "os números"que aparecem no enunciado. Se em algum momento aparecem as palavras média, moda ou mediana, é mais comum que o estudante tende a ignorar todo o resto do enunciado.

Para exemplificar a aplicação do método de Polya na resolução de problemas deste tipo, usaremos uma questão presente no ENEM do ano de 2019.

Exemplo: (ENEM, 2019a, QUESTÃO 169) O quadro apresenta a quantidade de um tipo de pão vendido em uma semana em uma padaria.

Dia da semana	Número de pães vendidos
Domingo	250
Segunda-feira	208
Terça-feira	215
Quarta-feira	251
Quinta-feira	187
Sexta-feira	187
Sábado	186

Tabela 1: Quantidade de pães vendidos por dia da semana.

O dono da padaria decidiu que, na semana seguinte, a produção diária desse tipo de pão seria igual ao número de pães vendidos no dia da semana em que tal quantidade foi a mais próxima da média das quantidades vendidas na semana.

O dia da semana utilizado como referência para a quantidade de pães a serem produzidos diariamente foi:

A) Domingo.

B) Segunda-feira.

C) Terça-feira.

D) Quarta-feira.

E) Sábado.

Compreensão do problema: Esta questão é um ótimo exemplo da importância da compreensão do problema e da definição da incógnita. Primeiramente, por seu enunciado ter no segundo parágrafo um número grande de informações que se lidas sem bastante atenção podem acabar sendo ignoradas. É o tipo de questão que o estudante precisa ler pelo menos duas vezes para uma real compreensão do que ela diz e o que ela quer.

O problema diz que o dono de uma padaria resolve juntar os dados sobre a venda de um certo tipo de pão durante uma semana para que possa evitar que sobrem ou faltem muitos pães ao longo dos dias, de forma a minimizar o desperdício ou deixar de vender por falta de produtos. Para isso, o dono resolve determinar a média diária de vendas deste pão ao longo desta semana. Para a próxima semana serão produzidos um número de pães igual à quantidade de pães vendidas no dia que vendeu a quantidade mais próxima desta média.

Ao definir a incógnita, vemos que o valor que procuramos para a resolução da questão é na verdade a média diária de vendas deste tipo de pão, pois conhecendo este dia, a definição do dia da semana é feita apenas por comparação com a tabela.

Estabelecendo um plano: A partir do momento em que foi definida que a incógnita da questão é na verdade a média diária de vendas, definimos então que para encontrar a solução deste problema devemos calcular esta média diária e em seguida comparar o valor encontrado com os valores diários da tabela de dados.

Sabendo que a questão envolve média aritmética, definimos que usaremos média aritmética simples, pois não temos agrupamento de dados em forma de frequência.

Execução do plano: Para calcular a média aritmética simples devemos somar todos os dados e dividir pela quantidade de dados presentes.

$$\overline{X} = \frac{250 + 208 + 215 + 251 + 187 + 187 + 186}{7} = \frac{1484}{7} = 212.$$

Temos então que a média diária de vendas deste pão é de 212 pães. Muito importante lembrar que não é esta média que o problema quer como solução final, sabemos que esta questão ser de múltipla escolha o que impediria de utilizar esta solução, porém, caso fosse uma questão aberta este erro poderia ser facilmente cometido se o estudante não tivesse bem clara a compreensão do problema, feito na primeira etapa da resolução deste problema.

O valor que chegou mais próximo dos 212 pães foi 215, atingido na terça-feira.

Retrospectiva: Após chegar à conclusão de que o dia mais próximo da média diária foi terça-feira, o estudante deve confirmar nas alternativas se esta é uma das possibilidades.

Avaliar a coerência neste exemplo requer atenção, pois pode parecer estranho para o estudante que a média seja 212, quando na maior parte dos dias as vendas ficaram abaixo de 210 pães. É preciso levar em conta que as vendas de Domingo e de Quarta-feira por serem bem acima dos outros dias, geram certa distorção no valor da média ao se comparar com os valores apresentados.

5.3 ANÁLISE DE PADRÕES

Chamaremos de problemas de Análise de padrões as questões que envolverem raciocínio lógico e padrões de repetições. Estas questões tem aparecido principalmente nas provas da OBM e OBMEP há muitos anos. Uma resolução criteriosa é de extrema importância pois em geral tratam de situações que envolvem cálculos muito longos ou repetições muito extensas de alguma situação.

Em sala, costumo dizer aos estudantes que nestas provas quando parece que você tem que fazer muitos cálculos é porque provavelmente você não precisa fazer cálculo "nenhum". Explicando que normalmente há algum tipo de padrão envolvido, em que pode se resolver alguma questão usando este padrão.

Desta forma, se a resolução não for bem organizada, existe a possibilidade de o estudante partir para a resolução braçal e tentar calcular manualmente valores astronômicos, ou repetir um comportamento por dezenas de vezes na tentativa de encontrar a solução.

Uma estratégia muito útil para a resolução deste tipo de problema é a análise de casos pequenos. Estratégia essa em que o estudante resolve uma versão reduzida do problema para tentar encontrar um padrão ou mesmo um plano de resolução. Esta estratégia equivale aos problemas correlatos que procuramos na segunda etapa do método de Polya.

Para ilustrar esta maneira de abordar estas questões utilizaremos uma questão que apesar de ter um enunciado super simples, demanda uma análise bem detalhada para se resolver.

Exemplo: Qual o último algarismo do resultado da potência 3^{2022}?

Compreensão do problema: Como dito anteriormente o enunciado desta questão é simples. A questão pede apenas que se encontre o último algarismo do resultado de uma potência.O que deve ser observado é que não se pediu o valor da potência, apenas o último algarismo. Assim, este algarismo será a incógnita dessa questão.

Neste momento se aplica a afirmação de que se seriam necessários cálculos muito extensos ou números muito grandes, talvez não se precise fazer muitos cálculos e sim procurar um padrão.

A grande dúvida é se será possível encontrar este algarismo sem precisar encontrar o número por completo, afinal o resultado de 3^{2022} é um número astronômico.

Estabelecendo um plano: Para tentar responder a pergunta anterior, começaremos analisando o comportamento das potências de 3 em relação aos seus últimos algarismos, conforme ilustrado na Tabela 2.

Expoente	Potência	Último Algarismo
0	1	1
1	3	3
2	9	9
3	27	7
4	81	1
5	243	3
6	729	9

Tabela 2: Análise do último algarismo em uma potência de 3.

Podemos perceber nesta tabela que as potências de 3 seguem um padrão, o último algarismo fica alternando entre 1, 3, 9 e 7, nesta ordem. Isso acontece pois o último algarismo do produto entre dois números será sempre igual ao último algarismo do produto entre o algarismo das unidades de cada fator, então neste caso o último algarismo do produto de um número terminado em 1 por 3 será 3, de um terminado em 3 por 3 será 9, de um terminado em 9 por 3 será 7 e de um terminado em 7 por 3 será 1, reiniciando o ciclo. Estes valores seguem ciclos de 4 em 4 unidades nos expoentes. Então uma estratégia a se seguir é de dividir o expoente por 4 e utilizar o resto da divisão euclidiana, pois a cada "ciclo completo"o último algarismo volta para o 1.

Desta forma a estratégia para esta questão é fazer a divisão euclidiana do expoente por 4, tomar o resto dessa divisão euclidiana e observar a tabela a seguir para a definição do último algarismo.

Resto da Divisão	Último Algarismo
0	1
1	3
2	9
3	7

Tabela 3: Últimos algarismos de uma potência de 3, em relação ao expoente.

Execução do plano: Definida a estratégia a ser seguida, começamos fazendo a divisão euclidiana do expoente por 4. Segundo o Algoritmo de Euclides para divisão euclidiana $2022 = 505 \cdot 4 + 2$.

Desta forma, sabendo que o resto da divisão é igual a 2, utilizaremos a tabela do passo anterior. **Assim, se o resto da divisão é 2, significa que o último algarismo do resultado de 3^{2022} é igual a 9.**

Retrospectiva: Neste tipo de questão é inviável que seja feito manualmente este cálculo, assim sendo a estratégia utilizada acaba sendo funcional, pois com um cálculo bem simples é possível se descobrir o último algarismo com uma simples divisão, apenas por se conhecer o seu comportamento.

5.4 MÚLTIPLOS E DIVISORES

A ideia de múltiplos e divisores é bastante presente nas provas da OBMEP, principalmente nos níveis A e 1. Estas questões utilizam de uma estratégia parecida com a da Análise de Padrões, em que o estudante precisa compreender o conceito de ciclo e de comportamento para elaborar uma estratégia de resolução.

Problemas de múltiplos e divisores frequentemente trabalham com o conceito de dias, desta forma é de extrema importância uma análise mais estruturada na resolução para que o estudante não acabe tentando escrever dezenas ou centenas de dias na busca pela solução da questão.

Estes problemas costumam passar pela ideia de ciclos ou grupos. Então uma estratégia muito comum para resolução de problemas sobre Múltiplos e Divisores é descobrir o tamanho do ciclo ou dos grupos a serem construídos e trabalhar com a ideia de resto. Afinal o quociente muitas vezes é irrelevante, pois cada ciclo desse reseta a posição no ciclo. Então se o importante no problema é a posição para se definir em que dia da semana algo acontece por exemplo, o importante é apenas o resto da divisão por 7.

Para ilustrar, resolveremos uma questão presente na prova de nível 1 da primeira fase da OBMEP de 2019.

OBMEP 2019: No Planeta Pemob as semanas têm 5 dias: Aba, Eba, Iba, Oba e Uba, nessa ordem. Os anos são divididos em 6 meses com 27 dias cada um.

Se o primeiro dia de um certo ano foi Eba, qual foi o último dia desse ano?

A) Aba

B) Eba

C) Iba

D) Oba

E) Uba

Compreensão do problema: O enunciado apresenta o contexto de um planeta que utiliza um conceito de calendário diferente do nosso. As principais diferenças é que os meses tem 27 dias cada, independentemente do mês e que o os anos são compostos por 6 meses.

A incógnita nessa questão será o dia que "cairá"o último dia do ano.

Estabelecendo um plano: Ao procurar um problema correlato, podemos pensar na questão do último algarismo. Afinal, os dias da semana são dispostos em ciclos de 5 dias, e assim reiniciando o ciclo, ou seja, como a semana inicia com Aba, 6 dias depois será Aba novamente.

A primeira coisa a se descobrir é quantos dias tem um ano no planeta Pemob, para que se possa efetuar a divisão euclidiana por 5 para definir o dia da semana.

Sendo que o ano começou em um Eba, trataremos resto 1 como sendo uma Eba, 2 como Iba, 3 como Oba, 4 como Uba e 0 como Aba.

Execução do plano: Iniciamos calculando o número de dias em um ano para a próxima etapa: $6 \cdot 27 = 162$.

Segundo o Algoritmo de Euclides para a divisão euclidiana, $162 = 5 \cdot 32 + 2$, ou seja, o resto da divisão de 162 por 5 terá resto 2. Então pelo definido no passo anterior, temos que o último dia do ano será um Iba.

Retrospectiva: Podemos perceber que ao analisarmos a questão e decidirmos pela estratégia de trabalhar com o resto da divisão euclidiana, poupamos muito tempo nesta questão. Pois caso não tivessemos uma estratégia como essa, a resolução passaria pela listagem de todos os dias até o dia 162.

Pode parecer que isso não aconteceria na prática, porém é de extrema importância perceber que se o estudante não conhece nenhum método de resolução ou que nunca tenha tido contato com uma questão correlata, há uma grande chance de que ele liste todos os dias, por falta de opção, ou que simplesmente deixe de fazer a questão por julgar que listar todos os dias seria algo muito demorado ou trabalhoso.

6 CONSTRUINDO UM MATERIAL DIDÁTICO

À luz do que foi discutido nos capítulos anteriores, e mediante a importância de se colocar esses conceitos em prática, foi elaborado um material complementar de apoio para ser utilizado em sala de aula. Este material se encontra em anexo neste trabalho e é de livre acesso e disponível para utilização de professores que assim o desejem.

A presença cada vez mais frequente de problemas no contexto da sala de aula, seja da OBMEP, BNCC ou no próprio ENEM, exige que o estudante desenvolva a capacidade de resolver problemas, desta forma o material anexo vem como complemento ao material didático já presente nas escolas.

6.1 DO PÚBLICO ALVO

Esse material tem como proposta ser uma apostila para ser utilizada em sala de aula, a princípio em turmas de 5º e 6º anos, para desenvolver esses conceitos no período de transição do ensino fundamental I para o ensino fundamental II.

Apesar da presença de problemas nas séries anteriores, a formalização do processo empregado neste trabalho remete a uma certa maturidade do estudante. Assim, alunos a partir do 4º ano estão iniciando na participação da OBMEP, com a aplicação do nível A, e no 5º ano após terem esse contato já estão mais familizarizados com a OBMEP.

A aplicação desta apostila em turmas de 4º ano, caso o(a) professor(a) assim deseje, pode ser feita mesmo que de forma introdutória, mesmo não sendo o objetivo inicial desta produção.

Mas a partir do 5º e 6º ano, além dessa familiarização com a OBMEP, os estudantes tem mais contato com os assuntos escolhidos para serem trabalhados nessa apostila, por esses motivos indico esse como o público alvo.

6.2 DOS ASSUNTOS ABORDADOS

Por vários anos fui responsável por aulas extra curriculares que envolviam treinamentos para OBM, ORM e OBMEP e fui integrante do programa OBMEP na Escola. Dessa experiência tive contato com diversas provas de todas essas olimpíadas e com os tipos de questões mais frequentes.

Além das olimpíadas, usei como base a própria BNCC (BRASIL, 2018), com conceitos que são estudados e principalmente, que são base para as demais habilidades vistas ao longo do ensino fundamental.

Dessa forma, foram escolhidos 5 temas para serem trabalhados, estes temas foram abordados no capítulo 4 deste trabalho, os assuntos abordados foram:

1) **Contagem**, apresentado nas seções 4.1 e 4.2,
2) **Análise de padrões**, apresentado na seção 4.7,
3) **Geometria**, apresentado na seção 4.6,
4) **Múltiplos e Divisores**, apresentado na seção 4.4 e
5) **Conjuntos**, apresentado na seção 4.5.

Importante lembrar que esse material é introdutório, por esse motivo, não há um aprofundamento no nível de dificuldade e complexidade dos temas abordados.

6.3 DA METODOLOGIA

A metodologia escolhida foi de apresentação do tema por meio de uma situação problema, em que o estudante compreenda a situação antes mesmo de ter contato com o conceito matemático envolvido, a partir desse contato o professor constrói os conceitos.

Como já discutido no capítulo 3, o professor deve agir como mediador para que o estudante possa, através das conclusões obtidas pela resolução do problema e pela discussão com a turma, compreender como o conceito matemático apresentado pode ser utilizado na resolução de problemas.

A discussão e apresentação das soluções desenvolvidas pelos estudantes é uma ferramenta importante para a compreensão, para que fique claro que muitas vezes, um problema pode ter vários caminhos para se chegar à solução, sem perda de corretude. Algumas vezes o professor elabora uma resolução para usar como gabarito para o problema, porém os estudantes acabam não compreendendo. Assim, uma solução desenvolvida e apresentada pelos próprios estudantes pode acabar atingindo o resto da turma com mais eficácia.

6.4 DA APLICAÇÃO

A proposta para cada capítulo da apostila é de ser aplicado em três aulas, duas preferencialmente consecutivas, uma para apresentação e explicação do assunto e uma para resolução de exercícios, e a terceira para resolução e discussão das soluções encontradas pelos estudantes.

A sugestão é que o(a) professor(a) apresente o tema por meio da situação proposta na apostila, seguido de uma discussão sobre o tema. Essa discussão pode ser por meio de problemas correlatos pré selecionados, ou por meio de sugestões dos alunos, onde seriam questionados sobre situações parecidas que já vivenciaram ou que poderiam imaginar.

Após a contextualização do problema, apresentar o embasamento teórico envolvido, ou seja, mostrar a matemática que será utilizada na resolução dessa situação problema.

A terceira etapa é a resolução dos exercícios presentes na apostila. É interessante a resolução de pelo menos 3 questões, acompanhadas da resolução pelo(a) professor(a), e as questões seguintes ficarem como se fossem tarefa. É muito importante que essas questões sejam resolvidas em sala posteriormente com discussão sobre as soluções, pois devemos lembrar que um mesmo problema tem diversas formas de se abordar, então é bem comum surgirem soluções distintas, e cabe ao professor mostrar ao estudante que essas soluções, são sim possíveis e aceitáveis, se estiverem corretas, obviamente.

7 CONCLUSÃO

Apresentados os elementos presentes neste trabalho pode concluir que à luz do que pregam as diretrizes educacionais brasileiras, principalmente ao se tratar da BNCC, o uso de resolução de problemas é peça indispensável para o ensino de matemática.

Esse trabalho fez a conexão entre esses conceitos exigidos nas diretrizes da BNCC com a obra de George Polya, tanto na visão teórica sobre seu método para resolução de problema, quanto na aplicação prática relacionada a alguns dos assuntos presentes tanto no currículo escolar quanto nas provas olímpicas.

Apesar de ter tido como proposta trabalhar esses conceitos para alunos das séries finais do ensino fundamental I e série iniciais do ensino fundamental II, acabou se mostrando como uma ferramenta muito útil para estudantes também de séries posteriores. Afinal, o ENEM que se tornou uma das principais ferramentas de ingresso nas universidades brasileiras, é composto por problemas.

Os cadernos do Professor e do Aluno, presentes em anexo neste trabalho, podem ser utilizados por professores ou outros profissionais da educação que pretendam introduzir os conceitos presentes na resolução de problemas para estudantes, principalmente do ensino fundamental.

Uma proposta que considero interessante de ser pesquisada em trabalhos futuros é a aplicação do Método de Polya para resolução de problemas, utilizando questões do ENEM na formação de estudantes de ensino médio, independentemente da disciplina abordada. Afinal, no livro (POLYA, 2006), Polya diz que esse método é desenvolvido para resolução de problemas, sejam eles matemáticos ou não. Assim, mostrar ao estudante que uma questão do ENEM, mesmo que de Ciências Humanas ou da Linguagem pode ser abordado de forma semelhante à um problema de Ciências da Natureza ou Matemática, pode auxiliar tanto na melhor compreensão quanto na desmistificação dos mesmos.

REFERÊNCIAS

BRASE, C. H.; BRASE, C. P. *Understanding Basic Statistics*: 7th edition. Boston,MA - USA: [s.n.], 2016.

BRASIL, M. da E. *BNCC*: Base nacional comum curricular. Brasilia, 2018. <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acessado em 22 mar. 2022.

CARVALHO, P. *Métodos de Contagem e Probabilidade*. Rio de Janeiro: [s.n.], 2015. <http://www.obmep.org.br/docs/apostila2.pdf>. Acessado em 29 mar. 2022.

DEVLIN, K. *Mathematics: The Science of Patterns*: The search for order in life, mind and the universe. New York, USA: [s.n.], 1994.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos de Matemática Elementar, 9*: Geometria plana. 7. ed. São Paulo: [s.n.], 1993.

ENEM, I. I. N. de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Ministério da E. *ENEM PPL - Exame Nacional do Ensino Médio*. Rio de Janeiro, 2019. <https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/ppl/2019/provas/BAIXA_PPL_2_DIA_C
Acessado em 29 mar. 2022.

ENEM, I. I. N. de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Ministério da E. *Matriz de Referência para o ENEM*. [S.l.], 2019. <http://portal.mec.gov.br/component/docman/?task=doc_download&gid=841&Itemid=>.

FEUERSTEIN, R. *Instrumental enrichment*. Illinois, USA: [s.n.], 1980.

HEFEZ, A. *Aritmérica*: Coleção profmat. Rio de Janeiro: [s.n.], 2016.

IEZZI, G.; HAZZAN, S.; DEGENSZAJN, D. M. *Fundamentos de Matemática Elementar, 11*: Matemática comercial, matemática financeira, estatística descritiva. 9. ed. São Paulo: [s.n.], 2013.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. *Fundamentos de Matemática Elementar, 1*: Conjuntos e funções. 9. ed. São Paulo: [s.n.], 2013.

LARSON, R.; FARBER, B. *Estatística Aplicada*: 6. ed. título original: Elementary statistics: picturing the world. São Paulo: [s.n.], 2015.

MEIER, M.; GARCIA, S. *Mediação de aprendizagem*: contribuições de feurstein e de vygotsky. Curitiba: [s.n.], 2011.

NETTO, P. O. B. *Grafos.*: Teoria, modelos e algoritmos. 2ª ed. [S.l.: s.n.], 2012.

ONUCHIC, L. de la R. et al. *Resolução de Problemas*: Teoria e prática. Jundiaí, SP: [s.n.], 2014.

PISA. *Matriz Pisa*. [S.l.], 2013. <https://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/marcos_referenciais/2013/matriz_avalia
Acessado em 10 out.2021.

POLYA, G. *A arte de Resolver Problemas*: Tradução de: How to solve it: a new aspect of mathematical method. Rio de Janeiro: [s.n.], 2006.

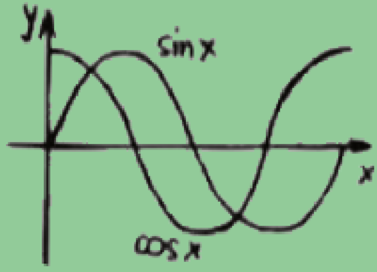
STANIC, G.; KILPATRICK, J. *The teaching and assessing of Mathematical Problem solving*: Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. Reston, VA.: [s.n.], 1990.

THORNDIKE, E. L. *The new methods in Arithmetic*. Toronto, CA: [s.n.], 1926. <https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/197192/The%20New%20Methods%20in%20Ar
Acessado em 22 mar. 2022.

THORNDIKE, E. L.; WOODWORTH, R. S. The influence of improvement in one mental function upon the efficiency of other functions. *Psychological Review*, v. 8, p. 247–261, 1901.

$x+y+5=0$

$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$



$a^2+b^2=c^2$

$360°$

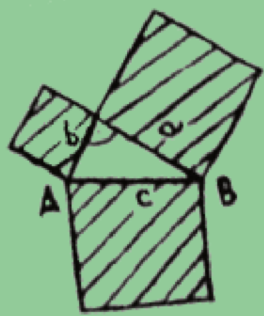
Resolução

+ − de × ÷

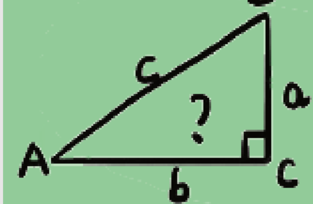
Problemas

$\pi=3.14$

$7+2=9$



$9\times9=81$



$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

Escola: ______________________________

Nome: ______________________________

Turma: ______________________________

APRESENTAÇÃO

Olá estudante.

Você sabe o que é um problema matemático?

Chamamos de problema, por exemplo, uma situação que pode estar presente no mundo real, como por exemplo, quando você organiza brinquedos com seus amigos, ou quantos produtos seus pais compram em um supermercado com certa quantidade de dinheiro.

Você já deve ter tido contato com eles nas suas aulas de matemática ao longo dos últimos anos.

Mas se você já sabe o que é um problema matemático, qual é o objetivo desse material? O objetivo é ajudar você a conseguir resolver esses problemas, com mais organização e efetividade.

Junto com seu/sua professor(a), apresentaremos alguns tipos de problemas que costumam aparecer, tanto nas aulas de matemática, quanto em provas como a da OBMEP.

Nossas aulas serão divididas em duas etapas, a primeira onde iremos lhe explicar e dar dicas de como resolver determinado tipo de problema e a segunda onde você tentará colocar o que foi aprendido em prática, por meio de resolução de exercícios.

Vamos começar?

1 - CONTAGEM

Nesta primeira aula falaremos sobre contagem, um método muito importante e presente com grande frequência no seu dia a dia, dentro e fora de sala.

Alguém sabe o que é o método da contagem?

Nós aprendemos a contar desde o início de nossas vidas, então para que será que serve esse tal método da contagem?

Serve para que possamos descobrir quantidades de objetos, de formas de se fazer algo, de maneiras de se escolher entre diferentes opções, tudo isso sem precisarmos escrever todas essas quantidades. Vamos ver isso na prática?

Exemplo: Após fazer sua tarefa de casa, Maria Eduarda decidiu escolher alguns de seus brinquedos para uma brincadeira, a brincadeira escolhida foi a hora do chá, onde ela escolheria 2 brinquedos e os colocaria em uma mesinha de com seu kit de chá. Sabendo que Maria Eduarda tem um total de 10 brinquedos, quantos pares diferentes podem ser formados na hora de se escolher os 2 para a brincadeira?

Para nos organizarmos usaremos letras para representar cada um dos brinquedos, A B C D E F G H I e J. Então Maria Eduarda pode fazer pares como AB ou EJ, mas será que para descobrir quantos serão esses pares precisaremos escrever todos eles? A resposta é não, e para resolver isto usaremos o método de contagem.

Quantos nos deparamos com esse tipo de questão que pergunta de quantas formas podemos escolher ou organizar algo devemos pensar em etapas.

Etapa 1: Quantas opções Maria Eduarda tem para escolher o primeiro brinquedo? São 10 opções.

Etapa 2: Quantas opções Maria Eduarda tem para escolher o segundo brinquedo? Lembre-se que um dos brinquedos já foi escolhido, sobrando então 9 brinquedos para se escolher.

Etapa 3: Para cada uma das 10 opções para a primeira existem 9 para a segunda, para saber o total então, devemos multiplicar estas duas quantidades: 10 x 9 = 90.

Assim, Maria Eduarda tem 90 maneiras de se escolher um par de brinquedos para a hora do chá.

Se ela resolvesse brincar com 3 brinquedos, colocaríamos mais uma etapa para descobrir quantas opções ela teria para o terceiro brinquedo, resultando então na solução 10 x 9 x 8 = 720 maneiras de se escolher 3 brinquedos para brincar.

Vamos praticar?

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1) No domingo os pais de Dênis o levaram para passear no shopping, sabendo que Dênis tem 5 camisetas e 3 calças, de quantas maneiras Dênis pode escolher uma calça e uma camiseta para o passeio?

a) 10
b) 13
c) 15
d) 18
e) 21

2) No restaurante Sabor da Vovó são oferecidos 4 opções de pratos principais, 5 sabores de suco e 3 tipos de sobremesa. Cada cliente que paga por uma refeição tem direito à escolher um prato principal, um suco e uma sobremesa. De quantas formas diferentes um cliente pode formar sua refeição no restaurante Sabor da Vovó?

a) 45
b) 52
c) 58
d) 60
e) 72

3) (Unifor–CE Adaptada) Um casal e seus quatro filhos vão ser colocados lado a lado para tirar uma foto. Se todos os filhos devem ficar entre os pais, de quantas maneiras distintas os seis filhos podem ser organizados para tirar a foto?

a) 24
b) 48
c) 96
d) 120
e) 720

4) De quantas maneiras podemos formar um número com 3 algarismos usando apenas os algarismos 3, 4, 6, 7 e 9, sem repetir nenhum deles?

a) 60
b) 48
c) 32
d) 24
e) 52

5) Para a festa junina a professora do quinto ano resolveu organizar uma quadrilha, para isso ela selecionou 10 meninos e 10 meninas, sabendo que os pares são formados por um menino e uma menina, de quantas maneiras a professora pode montar a quadrilha com 10 pares?

a) 20
b) 38
c) 55
d) 80
e) 100

6) De quantas maneiras podemos formar um número par com 4 algarismos usando apenas os algarismos 0, 3, 4, 5, 7 e 8?

a) 600
b) 480
c) 320
d) 240
e) 540

7) Carla gosta de manter seu quarto sempre bem organizado. Carla tem 3 bonecas, 2 ursinhos de pelúcia e uma casa de bonecas. De quantas maneiras Carla pode organizar seus brinquedos na prateleira, sabendo que brinquedos do mesmo tipo devem sempre permanecer juntos?

a) 56
b) 72
c) 80
d) 88
e) 94

2 - ANÁLISE DE PADRÕES

Uma característica muito importante que devemos procurar ao se resolver um problema, é a busca de um padrão, pois podemos resolver situações muito grandes com um cálculo bem pequeno. Mas antes de falarmos sobre isso, alguém sabe dizer o que é um padrão?

Qual o último algarismo do resultado da multiplicação 13849 x 87519 x 19654?

Ao nos depararmos com uma questão como essa, muitas vezes o sentimento que temos é o de medo, afinal devemos multiplicar três números com 5 algarismos cada e isso vai custar bastante tempo para ser feito, sem contar que com a quantidade de algarismos envolvidos, é muito fácil de se atrapalhar no processo. Mas será que podemos encontrar isso sem passar por esse trabalho todo? A resposta é sim!

A primeira coisa que devemos prestar muita atenção é no que o enunciado nos pede, nessa questão ele nos pede apenas o último algarismo do resultado e não o número todo. E para isso vamos pensar em como funciona o algoritmo da multiplicação.

$$\begin{array}{r} 342 \\ \times \quad 17 \\ \hline 2394 \\ +\,342 \\ \hline 5814 \end{array}$$

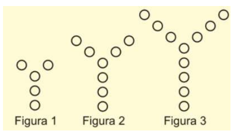
Podemos ver que o último algarismo que encontramos ao multiplicar dois números, na verdade é o último algarismo encontrado ao se multiplicar o último algarismo dos dois números, ou seja, para saber o último algarismo da multiplicação 342x17, bastava multiplicarmos o 2 pelo 7, que é igual à 14, logo o último algarismo do resultado é 4.

Agora é sua vez de usar essa estratégia para descobrir o último algarismo do resultado da multiplicação 13849 x 87519 x 19654.

E aí, chegou no algarismo 4? Conte para a turma como você chegou nesse valor.

Vamos ver mais um exemplo?

Exemplo: [OBMEP-N1-2019]Observe a sequência de figuras abaixo, todas elas com a forma da letra Y. Seguindo este padrão, quantas bolinhas terá a 15ª figura?



Esse exemplo não é um cálculo muito grande, mas teríamos que fazer muitos desenhos para encontrar a $15^{\underline{a}}$ figura, então vamos procurar algum padrão. Você já o encontrou? Se sim, divida com a turma o seu raciocínio.

A relação entre a $1^{\underline{a}}$ e a $2^{\underline{a}}$ figuras é que aumentou uma bolinha em cada extremo, da $2^{\underline{a}}$ para a $3^{\underline{a}}$ aconteceu o mesmo, ou seja, cada figura terá 3 bolinhas a mais que a figura anterior. Esse é o nosso padrão!

Então a resolução se torna simples pois a $15^{\underline{a}}$ figura terá a quantidade de bolinhas da $1^{\underline{a}}$ adicionada de 3 bolinhas 14 vezes, ou seja, $5 + 14$ x $3 = 5 + 42 = 47$ bolinhas.

Conseguiu perceber a importância de se encontrar um padrão? No primeiro exemplo, poderiam ser três números com 10, 100, 1000 algarismos, que encontraríamos exatamente com a mesma quantidade de cálculos. No segundo, poderíamos encontrar o número de bolinhas da $19^{\underline{a}}$, $150^{\underline{a}}$ ou $1.000.000^{\underline{a}}$ figura da mesma forma. Então aqui vai uma dica muito importante, quando uma questão parecer que você deve fazer uma conta muito grande ou repetir muitas vezes um certo processo, existe uma chance grande de haver ali um padrão, que faz com que sua resolução se torne bem mais simples.

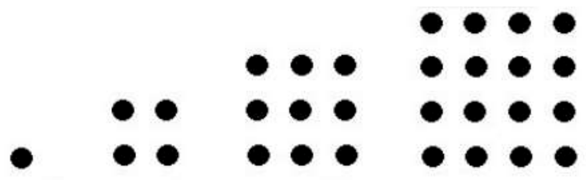
Vamos praticar?

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1) Ana e seu pai fizeram um acordo sobre o recebimento de mesada, ao invés de receber um valor fixo todo mês, Ana receberia o que eles chamaram de semanada, onde iria receber R$1,00 na primeira semana, R$2,00 na segunda semana, R$4,00 na terceira semana e assim por diante. Seguindo esse mesmo padrão, quanto Ana terá recebido ao todo, ao final do segundo mês de semanada? Considerando que cada mês tem 4 semanas.

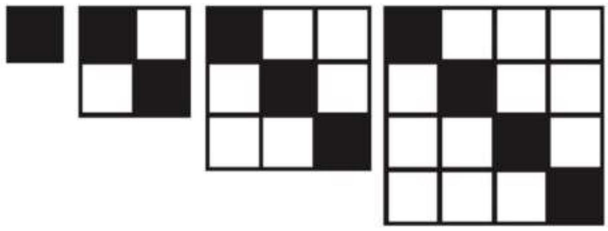
a) $R\$511,00$.
b) $R\$255,00$.
c) $R\$351,00$.
d) $R\$431,00$.
e) $R\$511,00$.

2) Júlio resolveu formar quadrados com suas bolinhas de gude, como na figura abaixo. Quantas bolinhas de gude Júlio vai utilizar para formar a décima figura desse tipo?



a) 64
b) 81
c) 100
d) 49
e) 121

3) Seu Cláudio é pedreiro e está fazendo a colocação de pisos em uma casa. O dono da casa pediu que seu Cláudio ao colocar o piso na cozinha, fizesse com pisos brancos cortada por uma faixa de pisos pretos. Sabendo que essa cozinha é quadrada e que o formato dos pisos segue o padrão da imagem abaixo, quantos pisos brancos serão necessários, sabendo que seu Cláudio usará 11 pisos pretos?



a) 100
b) 120
c) 110
d) 90
e) 115

4) Para decorar uma sala de aula, a professora Cida utilizou uma faixa com desenhos de pessoas, como na imagem abaixo

Se a faixa continua com o mesmo padrão de desenhos, qual das alternativas abaixo representa os dois próximos desenhos da faixa?

a)

b)

c)

d)

e)

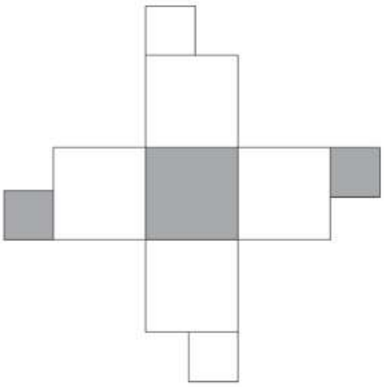
5) Uma sequência de números muito famosa é a Sequência de Fibonacci, ela pode ser escrita como: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...$ e assim por diante. Observando esses números com atenção, quais serão os próximos 3 números da Sequência de Fibonacci?

a) $15, 18$ e 23.
b) $15, 18$ e 35.
c) $21, 34$ e 55.
d) $21, 35$ e 49.
e) $18, 23$ e 47.

6) Julinho está estudando teoria musical e começou aprendendo as sete notas musicais: DÓ, RÉ, MI, FÁ, SOL, LÁ e SI. Para memorizar, Julinho resolveu escrever repetidamente as notas em um caderno, sempre na ordem citada. Sua irmã Clara achou curioso e resolveu contar quantas notas Julinho havia escrito, obtendo como resposta 100 notas. Qual foi a última nota escrita por Julinho?

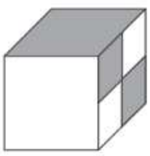
a) DÓ
b) RÉ
c) MI
d) FÁ
e) SI

7) [OBMEP-2022-NA] Paulinha quer recortar a figura abaixo, fazer as dobras e depois as colagens para obter um cubo.

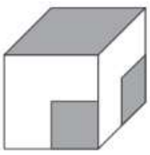


Qual dos cubos abaixo ela irá obter?

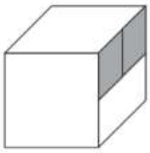
a)



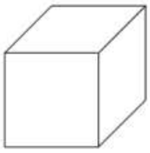
b)



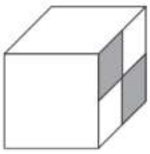
c)



d)



e)



3 - GEOMETRIA

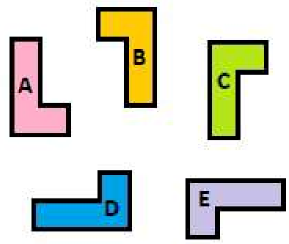
Falaremos hoje sobre uma área muito visual da matemática, a geometria. Ao longo do ensino fundamental nos deparamos com as formas geométricas em 2D que chamamos de Geometria Plana, e em 3D que chamamos de Geometria Espacial. Alguém sabe citar 2 exemplos de figuras planas e 2 de figuras espaciais?

Nesta aula veremos como essas figuras surgem na resolução de problemas, e quais as estratégias mais comuns de resolução desses problemas.

Os tipos de questões que aparecem com mais frequência são: Simetria, Padrões, Área e Perímetro. Destes tipos, já estudamos as questões de padrões no capítulo anterior.

Simetria: Duas coisas são simétricas quando tem as mesmas medidas e características, onde o que as diferencia é o local ou a forma que estão posicionadas.

Exemplo: Utilizando apenas da rotação nas figuras abaixo, qual delas não é simétrica às outras?

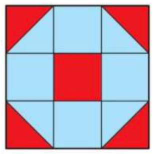


Se escolhemos uma das figuras como base para as simetrias fica mais fácil de perceber, usaremos a figura A como base. Imagine agora que você recortou essa figura e foi girando no papel, você conseguiria encaixar a figura A na figura B? E na figura C? E nas figuras D e E?

Esse tipo de questão é muito comum na resolução de problemas e para resolver elas, procure imaginar que você moveu ou girou as figuras e dente encaixar nas outras. No exemplo acima vemos que não importa quanto eu gire a figura C, ela nunca irá se encaixar nas outras. Para que ela se encaixasse precisaríamos fazer uma reflexão, porém o enunciado só autoriza fazer rotações.

Perímetro e Área: Perímetro é a soma das medidas de todos os lados de uma figura, enquanto área é a região interna dela. Estes conceitos são vistos ao longo dos anos, mas aqui focaremos apenas nessa definição mais simples. É importante lembrar que o termo Área é utilizado tanto para falar da região interna, quanto da medida dessa região.

Exemplo: [OBMEP-N1-2019] O quadrado abaixo está dividido em nove quadradinhos iguais. A área pintada de vermelho mede 6 cm^2. Quanto mede a área pintada de azul?



Nessa questão devemos observar que não sabemos a medida dos lados dos quadradinhos e nem do quadradão, então como podemos calcular a região azul? Lembrando que a área é a região interna das figuras, vemos que em vermelho temos 1 quadradinho inteiro e mais 4 metades, que juntos formam 2 quadradinhos inteiros. Se ao todo temos 3 quadradinhos vermelhos que somados tem 6 cm^2, então cada quadradinho tem área igual à 2 cm^2, desta forma a parte azul que é formada por 4 quadradinhos inteiros e mais 4 metades, totalizando 6 quadradinhos, tem área 6 x 2 cm^2 = 12 cm^2.

Então, mesmo não usando as fórmulas para se calcular a área de cada quadradinho, podemos simplesmente usar as quatro operações básicas para tratar com as informações dadas no enunciado.

Exemplo: [OBMEP-NA-2019] As mesas da cantina da escola são quadradas, e ao redor de cada uma delas cabem quatro cadeiras, como mostra a figura da esquerda. Quando duas mesas estão juntas, há lugar para 6 cadeiras, como na figura à direita.

Para a festa do dia das crianças, as professoras juntaram as 10 mesas que havia na cantina, formando uma única mesa comprida. Quantas cadeiras puderam ser colocadas ao redor dessa mesa comprida?

Como dito anteriormente, a análise de padrão é muito comum nos problemas de geometria, nesse caso trabalhamos as duas estratégias, padrão e perímetro. Cada mesa cabe 4 cadeiras, porém quando juntamos duas mesas a quantidade de cadeiras é 6 e não 8, pois o lado que é encostado não conta para o perímetro. Desta forma, para cada mesa adicionada ao lado, adicionam-se 2 cadeiras.

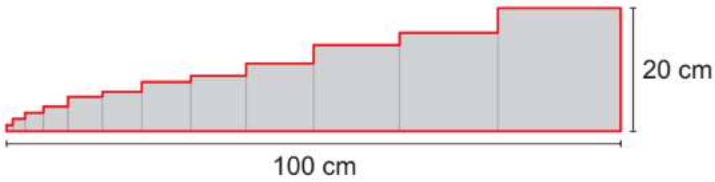
Desta maneira para 10 mesas, a quantidade de cadeiras é igual a 4 da primeira mesa e mais 2 cadeiras por mesa adicionada, ou seja, $4 + 9$ x $2 = 4 + 18 = 22$ cadeiras puderam ser colocadas ao redor das mesas.

Nessas questões de perímetro, devemos sempre ter atenção ao fato de que linhas internas da figura, não devem ser consideradas para se calcular o perímetro.

Vamos praticar?

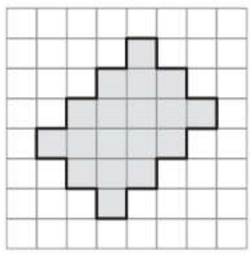
EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1) [OBMEP-2017-N1] Vários quadrados foram dispostos um ao lado do outro, em ordem crescente de tamanho, formando uma figura com 100 cm de base. O lado do maior quadrado mede 20 cm. Qual é o perímetro (medida do contorno em vermelho) da figura formada por esses quadrados?

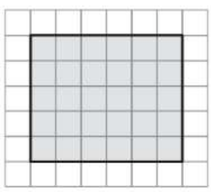


a) 220 cm
b) 240 cm
c) 260 cm
d) 300 cm
e) 400 cm

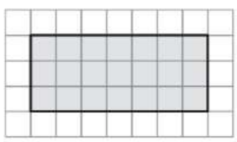
2) [OBMEP-2019-NA-Adaptada] Um dos retângulos das alternativas tem área igual à área da figura abaixo. Qual é esse retângulo?



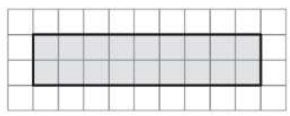
a)



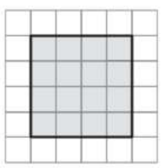
b)



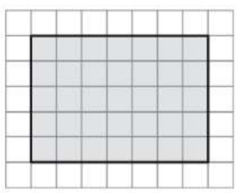
c)



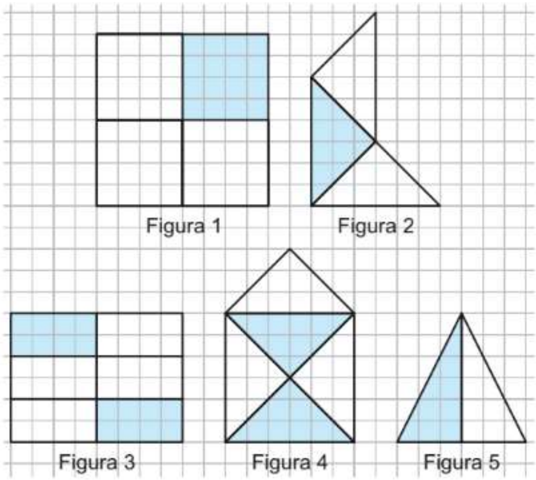
d)



e)



3) Na Figura 1 a área pintada corresponde a $\dfrac{1}{4}$ da área total. Em qual figura a fração correspondente à área pintada é a maior?



a) Figura 1
b) Figura 2
c) Figura 3
d) Figura 4
e) Figura 5

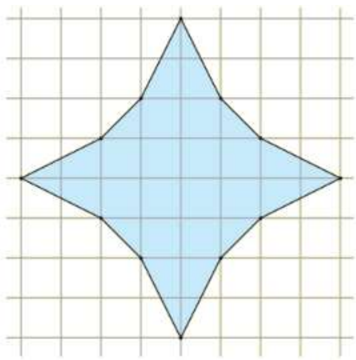
4) O futebol é praticado em um campo de formato retangular, com medidas mínimas de 45 m x 90 m, e máximas de 90 m x 120 m. Seja um campo tem 110 metros de largura por 80 metros de comprimento. Antes de cada treino, os jogadores do time mandante dão 3 voltas e meia ao redor do campo para aquecimento antes do jogo. Qual a distância em metros eles percorrem durante o aquecimento?

a) 1330
b) 1400
c) 1350
d) 1280
e) 1450

5) O quarto de Cláudia tem formato quadrado, onde cada parede mede 9 metros. Cláudia possui dois tapetes, um deles é quadrado e possui lado de 4 m e um é retangular e tem largura de 3 m e comprimento de 8 m. Após Cláudia colocar os dois tapetes no seu quarto, sendo que um não pode ficar sobre o outro, quantos m^2 do piso ficaram descobertos?

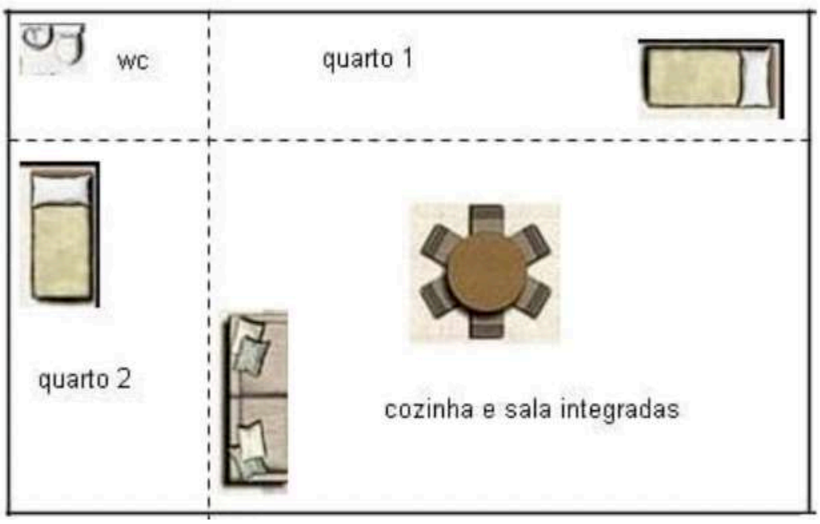
a) 34
b) 29
c) 45
d) 36
e) 41

6) [OBMEP-2017-N1] A área da figura azul é igual à soma das áreas de quantos quadradinhos do quadriculado?



a) 12
b) 22
c) 32
d) 64
e) 100

7) [UDESC-2010] O projeto de uma casa é apresentado em forma retangular e dividido em quatro cômodos, também retangulares, conforme ilustra a figura.



Sabendo que a área do banheiro (wc) é igual a 3 m^2 e que as áreas dos quartos 1 e 2 são, respectivamente, 9 m^2 e 8 m^2, então a área total do projeto desta casa, em metros quadrados, é igual a:

a) 24
b) 32
c) 44
d) 72
e) 56

4 - MÚLTIPLOS E DIVISORES

Seu João comprou 13 balas e pretende dividir igualmente entre seus 3 filhos e a maior quantidade possível para cada filho, quantas balas sobrarão para Seu João? E se fossem 20 balas? E 50 balas?

Esse tipo de questão utiliza a ideia de divisão e tem como principal ferramenta o uso do resto da divisão.

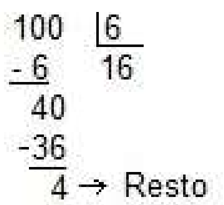
No primeiro caso, das 13 balas, poderíamos dividir em 3 grupinhos iguais com 4 balas cada e saberíamos que uma sobrou, o mesmo vale para 20 balas. Porém, para 50 balas isso já começa a ficar muito trabalhoso, então qual seria a melhor forma para essa questão? Dividimos 50 por 3 e temos resto 2.

Figura 1: Para 13 balas.

Vamos pensar agora em uma questão um pouco mais complexa.

Exemplo: Qual o menor número com 3 algarismos que é divisível por 6?

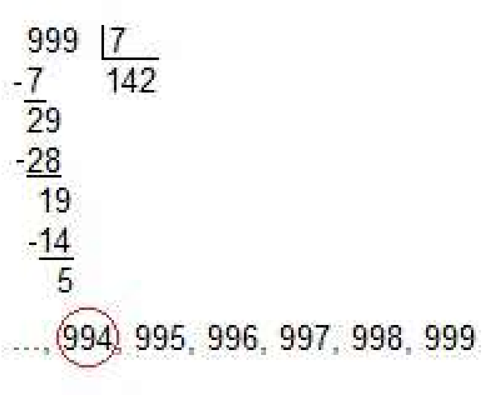
O menor número com 3 algarismos é o 100, mas ele é divisível por 6? A resposta é não. Porém sabemos que o resto da divisão de 100 por 6 é 4. Isso é muito útil, pois a partir desse 4 basta descobrir quanto falta para fechar 6, $6-4=2$, logo o próximo número depois do 100 a ser divisível por 6 será $100+2=102$.



E qual será o maior número de 3 algarismos, divisível por 7?

A ideia é bem parecida, o maior número com 3 algarismos é o 999, testaremos se 999 é divisível por 7.

A resposta é não, pois o resto da divisão por 7 é 5. Neste caso não pegaremos o próximo número, pois qualquer número maior que 999 terá pelo menos 4 algarismos. Usaremos então o último número antes de 999 que seja divisível por 7. O resto 5 representa quantas unidades o 999 passou do último número divisível por 7, então o número que procuramos é $999 - 5 = 994$.



Na resoluções de problemas nos deparamos com questões bem próximas à essas duas, mas muitas vezes não usam números, e sim objetos, dias da semana ou pessoas por exemplo. A ideia é a mesma, basta usar o mesmo raciocínio que a resolução se tornará algo bem parecido com o que vimos nessa aula.

Vamos praticar?

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1) Seu Auro comprou bombons para presentear seus netinhos. Sabendo que seu Auro comprou mais que 10 bombons, mas menos que 25, e que se cada neto recebesse 6 bombons cada, não sobraria nenhum bombom, mas se cada um recebesse 5 bombons sobrariam 4 bombons. Quantos bombons Seu Auro comprou?

a) 18
b) 20
c) 22
d) 24
e) 16

2) Márcio e Kamilla estão comparando seus álbuns de figurinhas da Copa do Mundo. Márcio pergunta então, quantas figurinhas não repetidas Kamilla tem, e ela então responde que ela tem o maior número que seja menor que 200 e que possa ser dividido em pilhas com exatamente 12 figurinhas, sem que nenhuma sobre. Quantas figurinhas Kamilla tem?

a) 180
b) 198
c) 199
d) 188
e) 192

3) Nas aulas de matemática, Celso está estudando os múltiplos de um número. E ao escrever os múltiplos de 7, Celso percebeu algo que considerou muito interessante. Celso então fez um desafio à sua professora, ele escreveu a lista dos múltiplos de 7, da seguinte forma:

$$0, 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, ...$$

O desafio era que sua professora descobrisse o algarismo das unidades do $85^{\underline{o}}$ número dessa lista. Depois de pensar um pouco e efetuar seus cálculos a professora conseguiu descobrir esse algarismo. Qual foi a resposta dada pela professora?

a) 7

b) 8

c) 2

d) 4

e) 6

4) Observe as multiplicações abaixo:

$$3 \text{ x } 3 = 9,$$
$$9 \text{ x } 3 = 27,$$
$$27 \text{ x } 3 = 81,$$
$$81 \text{ x } 3 = 243,$$
$$243 \text{ x } 3 = 729,$$
$$729 \text{ x } 3 = 2187.$$

Se continuarmos multiplicando por 3 por mais 100 vezes, qual será o algarismo presente na unidade do resultado obtido?

a) 1

b) 3

c) 7

d) 9

e) 0

5) [OBMEP-2019-N1] No Planeta Pemob as semanas têm 5 dias: Aba, Eba, Iba, Oba e Uba, nessa ordem. Os anos são divididos em 6 meses com 27 dias cada um. Se o primeiro dia de um certo ano foi Eba, qual foi o último dia desse ano?

a) Aba

b) Eba

c) Iba

d) Oba

e) Uba

6) [ENEM-2015-AZUL] Um arquiteto está reformando uma casa. De modo a contribuir com o meio ambiente, decide reaproveitar tábuas de madeira retiradas da casa. Ele dispõe de 40 tábuas de 540 cm, 30 de 810 cm e 10 de 1 080 cm, todas de mesma largura e espessura. Ele pediu a um carpinteiro que cortasse as tábuas em pedaços de mesmo comprimento, sem deixar sobras, e de modo que as novas peças ficassem com o maior tamanho possível, mas de comprimento menor que 2 m.

Atendendo o pedido do arquiteto, o carpinteiro deverá produzir:

a) 105 peças
b) 120 peças
c) 210 peças
d) 243 peças
e) 420 peças

5 - CONJUNTOS

Alguém sabe dizer o que é um conjunto? Se juntarmos um lápis, uma caneta e uma borracha, isso forma um conjunto?

Se você respondeu sim, como você poderia identificar esse conjunto sem ter que falar objeto por objeto?

Como você já deve imaginar, nosso assunto de hoje é Conjuntos! Mas o que é um conjunto?

Um conjunto é um grupo de coisas (números, objetos, pessoas), essas coisas são chamadas de elementos do conjunto. Muitas vezes os conjuntos são definidos por uma característica em comum. Por exemplo, se juntarmos um lápis, uma caneta e uma borracha, formamos um conjunto de materiais didáticos. Cada objeto tem suas características próprias, porém todos tem uma em comum, ser um material didático. Uma régua pertenceria a esse conjunto? E uma tesoura sem ponta? E um par de tênis?

No estudo de resolução de problemas os conjuntos costumam aparecer por meio de operações, vamos conhecê-las? Para os exemplos a seguir usaremos dois conjuntos:

- o primeiro é o conjunto formado por alguns animais, o chamaremos de conjunto A:

A = {pássaro, gato, elefante}

- o segundo é o conjunto formado por alguns seres vivos, o chamaremos de conjunto V:

V = {cachorro, gato, árvore, flor}

1 - União: Chamamos de união, o conjunto formado pela junção entre elementos de dois ou mais conjuntos, para representar a união utilizamos o símbolo ∪.

Exemplo: A união entre os conjuntos A e V será representada por A ∪ V e terá como elementos todos os elementos de A junto com todos os elementos de V, lembre-se, se um elemento aparecer em mais de um conjunto, escreveremos apenas uma vez no conjunto união.

Notação: A ∪ V = {pássaro, gato, elefante, árvore, cachorro, flor}

2 - Interseção: Chamamos de interseção, o conjunto formado pelos elementos que pertençam à todos os conjuntos ao mesmo tempo, para representar a união utilizamos o símbolo ∩.

Exemplo: A interseção entre os conjuntos A e V será representada por A $\cap$ V e terá como elementos apenas o gato, pois ele é o único elemento que aparece nos dois conjuntos.
Notação: A $\cap$ V = {gato}

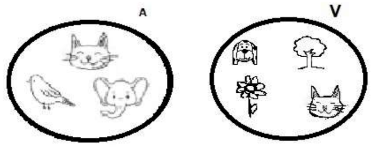
3 - Diferença: Chamamos de diferença o conjunto formado pelos elementos do primeiros conjunto que não estejam no segundo conjunto, utilizamos o símbolo - para representar a diferença.

É importante lembrar-mos que na diferença a ordem importa, então A - B é diferente de B - A.

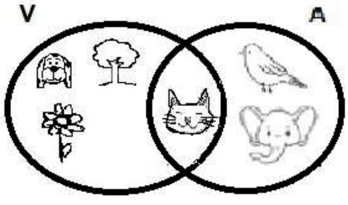
Exemplo: A diferença entre os conjuntos A e V será representada por A - V e terá como elementos todos os elementos de A que não estejam em V.
Notação: A - V = {pássaro, elefante}

A diferença entre os conjuntos V e A será representada por V - A e terá como elementos todos os elementos de V que não estejam em A.
Notação: V - A = {cachorro, árvore, flor}

Para resolvermos problemas com essas operações usaremos uma ferramenta chamada Diagrama de Euler-Venn. Que nome complicado né? Mas fique calmo, é bem simples. Esse diagrama é uma forma mais visual de se representar o conjunto, pra isso devemos fazer uma linha fechada e colocar os elementos dentro dessa linha, vamos usar como exemplo os conjunto A e V:



Nos problemas envolvendo conjuntos, o Diagrama de Euler-Venn ajuda muito para que possamos ver o que está acontecendo. Vamos ver como ficaria a interseção entre os conjuntos A e v?



A região que os dois diagramas tem em comum representa a interseção, os elementos da esquerda, representam V-A, os da direita, A-V e os 5 juntos, representam a união dos conjuntos.

Conjunto Universo: Ao resolvermos problemas com conjuntos, uma informação importante é o Conjunto Universo, ele representa todas as possibilidades de escolha para os elementos dos conjuntos. Por exemplo, ao formarmos grupos de estudo na sala, divididos por bairro onde cada aluno mora, o conjunto Universo dessa situação é formado por todos os alunos da sala.

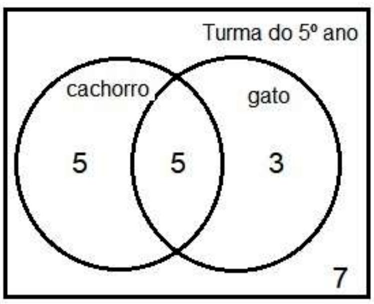
Exemplo: Em uma turma de quinto ano com 20 alunos, a professora perguntou que animais de estimação cada um tinha, as respostas foram as seguintes:

- 10 falaram que tinham cachorro; - 8 falaram que tinham gato; - 5 falaram que tinham gato e cachorro.

Quantos alunos da sala não tinham nem gato e nem cachorro?

Essa questão precisa de muita atenção para ser resolvida, pois se apenas somarmos as quantidades, sem cuidar com a resposta, já teríamos 23 alunos nessa lista, mesmo sabendo que a turma só tem 20 alunos. O que está errado no nosso raciocínio?

O erro está ao acharmos que 10 pessoas tem apenas cachorro, na verdade elas falaram que tem cachorro, mas isso não quer dizer que elas também não tem gato. Se 5 alunos tem gato e cachorro, eles estão incluídos nos 8 e 10 do começo da lista, ou seja, podemos interpretar a informação do exemplo como: 5 tem gato E cachorro, 5 tem apenas cachorro e 3 tem apenas gato, totalizando 13 alunos que tem pelo menos um dos dois animais. Assim sendo, 7 alunos não tem nem gato e nem cachorro.



Por isso que conhecer o conjunto Universo é importante, pois sabíamos que tinham ao todo 20 alunos, se 13 tinham pelo menos um dos animais, os 7 restantes não tinham nenhum dos dois.

Vamos praticar?

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1) Para organizar a gincana do dia das crianças, foi perguntado a cada aluno da turma quais esportes eles gostariam de praticar entre futebol e voleibol. Entre os estudantes, 18 responderam que gostariam de jogar futebol e 24 que gostariam de jogar voleibol. Sabendo que a turma tem ao todo 30 estudantes e que todos escolheram pelo menos um dos esportes, quantos estudantes escolheram apenas futebol?

a) 16
b) 8
c) 10
d) 12
e) 6

2) Em uma sala de aula, a professora Rose pergunta quais alunos moram no Bairro São João, levantam a mão os alunos Cleber, Robson, Ana Maria, Clara e Iara. Em seguida pergunta quem mora no Bairro Campo Limpo e Márcia, Silvia e Everton levantam a mão. Chamando de A o conjunto dos alunos do sexo masculino e B o conjunto dos alunos(as) que moram no Bairro Campo Limpo, os elementos do conjunto $A \cap B$ são:

a) Cleber, Robson e Everton
b) Ana Maria, Clara e Iara
c) Cleber e Robson
d) Everton
e) Ana Maria, Clara, Iara, Márcia e Silvia

3) Uma prova foi aplicada em uma turma de 30 alunos, sabendo que 15 acertaram a primeira questão, 18 acertaram a segunda e 10 acertaram as duas questões. Quantos alunos erraram ambas?

a) 8
b) 7
c) 6
d) 4
e) 3

4) [CIESP-2021-CIESP] Em uma escola de formação de condutores, constatou-se que todos os 34 alunos estavam tirando a primeira carteira nacional de habilitação (CNH). O professor perguntou quantos estavam ali para tirar a CNH da categoria A, e 12 estudantes levantaram a mão, posteriormente, ele perguntou quantos estavam ali para obter CNH da categoria B, e 29 levantaram a mão, sendo assim, a quantidade de candidatos que pretendem tirar somente a CNH da categoria A é:

a) 22
b) 7
c) 5
d) 19
e) 10

5) Para tentar melhorar o ambiente escolar, a direção de uma escola fez uma pesquisa com os alunos, para saber o que eles achavam que precisava ser melhorado no espaço físico da escola. 45 alunos responderam que gostariam que o parquinho fosse melhorado, 48 responderam o refeitório, 30 responderam o ginásio, 26 responderam parquinho e refeitório, 24 responderam parquinho e ginásio, 20 responderam refeitório e ginásio e 18 responderam que o parquinho, o refeitório e o ginásio deveriam ser melhorados. Com base nessas informações, quantos alunos responderam parquinho ou ginásio nessa pesquisa?

a) 61
b) 51
c) 63
d) 67
e) 54

6) Em uma doceria, os dois sabores de bolo mais vendidos são chocolate e morango. Em certo dia todos os clientes compraram bolo(s), 50 clientes compraram bolo de chocolate, 27 bolo de morango, 9 compraram ambos e 11 compraram apenas bolos de outros sabores. Qual foi o número de clientes na doceria nesse dia?
a) 80
b) 79
c) 82
d) 97
e) 86

ENCERRAMENTO

Olá colega, espero que esse material tenha te ajudado a aprender coisas novas. Ele foi desenvolvido com muito carinho, pensando apenas em complementar suas aulas de matemática.

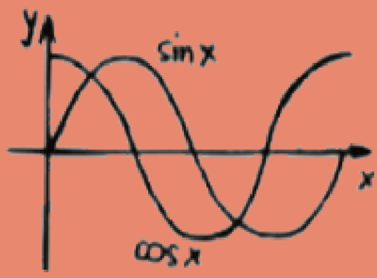
Essas aulas e seus exercícios de fixação, poderão lhe ajudar durante suas aulas, não só de matemática, mas de todas as disciplinas. Poderá lhe ajudar também nas provas da OBMEP, e depois competições olímpicas que envolvam matemática.

Boa sorte na sua caminhada escolar.

Um grande abraço,
Professor Alexsandro Schneider.

$x+y+5=0$

$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$



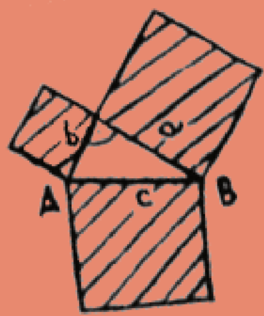
$360°$

$a^2+b^2=c^2$

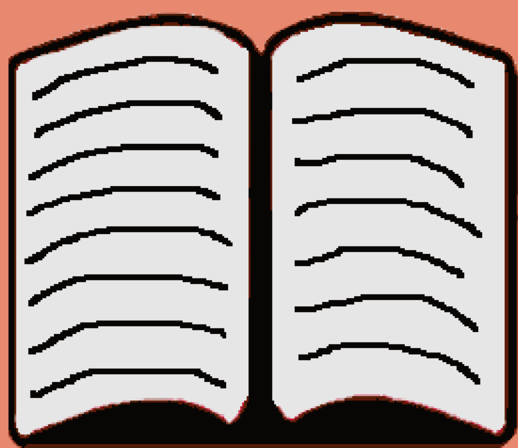
Resolução de Problemas

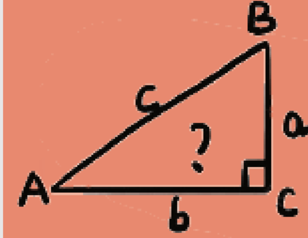
$\pi=3.14$

$7+2=9$



$9\times 9=81$





$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

Escola: ______________________________

Nome: ______________________________

Turma: ______________________________

APRESENTAÇÃO

Olá Professor(a).

Esse material foi desenvolvido com o intuito de auxiliar no ensino de resolução de problemas na sala de aula, sejam eles matemáticos ou não. Afinal, com as novas diretrizes da BNCC, Novo Ensino Médio e ENEM, o ensino por meio de situações problema tem se tornado uma tônica presente no contexto de todas as disciplinas.

Essa apostila é focada em problemas matemáticos, porém o método apresentado por George Polya é muito mais amplo que isso.

Estes cadernos estão divididos em cinco capítulos, onde cada um trata de um assunto matemático diferente, no Caderno do Estudante é apresentado uma noção teórica e prática dos assuntos, seguidos de alguns exercícios. O número de questões é limitado, a inclusão de exercícios externos para complementação pode ser feita, caso você assim deseje.

No Caderno do Professor, são tratados os assuntos com algumas explicações adicionais, sugestões para práticas e as resoluções de todas as questões do Caderno do Estudante.

Espero que possa ser útil na sua prática docente e no processo de ensino aprendizagem dos seus estudantes.

Grande Abraço,
Alexsandro Schneider.

1 - CONTAGEM

Problemas de contagem estão cada vez mais presentes no contexto da sala de aula, porém é de grande importância que o aluno perceba que sua aplicação no dia a dia é mais comum do que imaginamos.

Um exemplo interessante para começar a discussão desse assunto é o espelho de classe, após as perguntas de o que é e pra que serve o método da contagem, você pode levantar a questão "de quantas maneiras conseguiriamos organizar o espelho de classe (posição onde cada estudante deve se sentar na sala de aula) de uma determinada fileira? E da turma inteira?" Essa questão mostra a aplicação na rotina dos estudantes a nível de mundo real e retrata que muitas vezes, escrever todas as possibilidades pode ser algo muito trabalhoso e demorado.

Ao apresentar o conceito de Princípio Fundamental da Contagem (PFC) e seu exemplo do Caderno do Estudante, você pode resolver com os estudantes o problema do espelho de classe.

Sobre o exemplo do caderno, é interessante construir com os estudantes essa resolução no quadro de forma coletiva, antes mesmo de se fazer essa leitura das etapas.

Um conceito novo que pode ser apresentado durante essa aula é o de **Fatorial de um número**, ele ajuda na organização das resoluções e não involve nenhum tipo de operações que eles ainda não tenham visto.

RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

Questão 1: Alternativa c.

Compreensão do problema: Dênis tem 5 camisetas e 3 calças e pretende descobrir de quantas formas distintas ele pode escolher um look, formado por uma camiseta e uma calça. A incógnita nessa questão é efetivamente a quantidade de formas possíveis de se vestir.

Elaboração de uma estratégia: Essa é um tipo de questão muito comum, resolvida por meio de PFC. Então para resolver, devemos multiplicar a quantidade de maneiras que cada decisão pode ser tomada.

Executando o plano: Se Dênis tem 5 camisetas e 3 calças, então para cada escolha de camiseta, Dênis tem 3 opções para escolher uma calça. Assim, 5 x 3 = 15 opções de escolhas. Alternativa c.

Verificando o resultado: 15 formas distintas é coerente com a situação prática, e como é uma das soluções disponíveis nas alternativas, não há nada que indique que não está correta.

Questão 2: Alternativa d.

Compreensão do problema: Cada cliente deve escolher 3 componentes para sua refeição, um prato principal, um suco e uma sobremesa.

Elaboração de uma estratégia: A resolução é por meio de PFC. O cliente tem 4 opções de pratos principais, 5 opções de sucos e 3 de sobremesas. A incógnita procurada é o número de formas de montar uma refeição. Dessa forma basta multiplicar o número de maneiras de se tomar cara decisão.

Executando o plano: Então, 4 x 5 x 3 = 60 maneiras de formar sua refeição. Alternativa d.

Verificando o resultado: 60 formas distintas é coerente com a situação prática, e como é uma das soluções disponíveis nas alternativas, não há nada que indique que não está correta.

Questão 3: Alternativa b.

Compreensão do problema: Uma famiília está se arrumando para tirar uma fotografia, a ordem dos filhos não é importante, a única condição é que os pais fiquem um em cada ponta da fotografia.

Elaboração de uma estratégia: Esta questão exige atenção a um detalhe, a posição dos pais, pois não pode haver um filho em um dos extremos da foto. Se chamamos os pais de P_1 e P_2, devemos lembrar que as posições serão da forma: P_1 filhos P_2 e P_2 filhos

P_1. Como o casal tem 4 filhos, eles podem ser organizados de 4! maneiras, ou seja, para o primeiro lugar temos 4 opções, para o segundo lugar temos 3 opções, para o terceiro lugar temos 2 opções e para o quarto lugar apenas 1 opção.

Executando o plano: Existem $4! = 4 \text{ x } 3 \text{ x } 2 \text{ x } 1 = 24$ maneiras de organizar os filhos, como os pais tem 2 formas de serem distribuidos, a quantidade de maneiras possíveis de organizar essa família para tirar a foto é $24 \text{ x } 2 = 48$ maneiras distintas. Alternativa b.

Verificando o resultado: 48 maneiras distintas de tirar a fotografia é coerente com a situação prática, e como é uma das soluções disponíveis nas alternativas, não há nada que indique que não está correta.

Questão 4: Alternativa a. Muito importante frisar a diferença entre algarismo(símbolo) e número(junção de algarismos que representa uma quantidade).

Compreensão do problema: Como o objetivo é formar números com 3 algarismos, significa que usaremos apenas 3 dos 5 algarismos disponíveis, muita atenção ao fato que os algarismos não podem ser repetidos.

Elaboração de uma estratégia: A incógnita em questão é o total de números que podem ser escritos. Temos 5 opções para o algarismo das centenas, 4 opções para o algarismo das dezenas(pois um dos 5 já foi utilizado) e 3 opções para o algarismos das unidades. Então, basta multiplicar as quantidades de formas de se escolher cada algarismo.

Executando o plano: Dessa forma, É possível formar números com 3 algarismos distintos de $5 \text{ x } 4 \text{ x } 3 = 60$ maneiras. Alternativa a.

Verificando o resultado: 60 números distintos é coerente com o enunciado, e como é uma das soluções disponíveis nas alternativas, não há nada que indique que não está correta.

Questão 5: Alternativa c.

Compreensão do problema: Dentre os alunos de uma turma, a professora pretende montar duplas formadas por um menino e uma menina, dentre os 10 de cada.

Elaboração de uma estratégia: A incógnita procurada é a quantidade de possíveis duplas. Para o primeiro menino existem 10 possibilidades de meninas, para o segundo menino existem 9 possibilidades de meninas e assim por diante, lembrando que a ordem de escolha dos pares não importa.

Executando o plano: A quantidade de maneiras que a professora pode montar a quadrilha é de $10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 55$ maneiras. Alternativa c.

Verificando o resultado: As possíveis 55 duplas distintas é coerente com o enunciado, e como é uma das soluções disponíveis nas alternativas, não há nada que indique que não está correta.

Questão 6: Alternativa e.

Compreensão do problema: Questão pede que se formem números pares de 4 algarismos distintos, escolhidos entre 0, 3, 4, 5, 7 e 8.

Elaboração de uma estratégia: Questão muito parecida com a questão 4, porém com três grandes diferenças. A primeira é que a questão não diz que devem ser algarismos distintos, ou seja, o número 4444 é uma possível solução. A segunda é que ela quer que sejam números pares, ou seja, terminados em 0, 4 ou 8. A terceira é que o zero é um dos algarismos disponíveis, e ele não pode estar presente na casa da unidade de milhar. Dessa forma, para a casa da unidade de milhar temos 5 possibilidades(3, 4, 5, 7 e 8), para a casa das unidades temos 3 possibilidade(0, 4 e 8) e para as casas da dezena e da centena temos 6 opções para cada(qualquer um dos algarismos).

Executando o plano: Assim, podemos formar 5 x 6 x 6 x 3 = 540 números distintos. Alternativa e.

Verificando o resultado: 540 números pares distintos é coerente com o enunciado, e como é uma das soluções disponíveis nas alternativas, não há nada que indique que não está correta.

Questão 7: Alternativa b.

Compreensão do problema: Carla quer organizar seus brinquedos na prateleira, sendo que brinquedos de mesmo tipo sempre ficam juntos, todas as bonecas devem ficar lado a lado por exemplo.

Elaboração de uma estratégia: A incógnita procurada é a quantidade total de maneira de se organizar os brinquedos.Para resolver essa questão devemos analisar por tipo de objetos, pois duas coisas devem ser organizadas na prateleira, a ordem dos tipos de objetos e dentro de cada tipo, a ordem dos objetos desse tipo.

Executando o plano: Carla tem 3 tipos de objetos: bonecas, ursinhos e casa de bonecas, que podem ser organizadas de 3 x 2 x 1 = 6 maneiras distintas, e em cada uma dessas 6 as bonecas e os ursos podem ser organizados de 3 x 2 x 1 = 6 e 2 x 1 = 2 maneiras distintas, respectivamente. Assim, a quantidade total de maneiras que Carla pode organizar seus brinquedos é 6 x 6 x 2 = 72 maneiras distintas. Alternativa b.

Verificando o resultado: 72 maneiras distintas de se organizar os brinquedos na prateleira é coerente com o enunciado, e como é uma das soluções disponíveis nas alternativas, não há nada que indique que não está correta.

2 - ANÁLISE DE PADRÕES

Ao se deparar principalmente com problemas olímpicos, a análise de padrões é muito recorrente, é muito importante uma boa orientação para que os estudantes consigam entender que esse tipo de problema tem outras formas de se resolver, sem ser pelo trabalho braçal.

Questões de análise de padrões costumam tratar sobre coisas que se repetem muitas vezes, e caso o estudante resolva de forma mecânica, pode acabar demorando demais ou mesmo desistindo pelo tempo e esforço necessários para o mesmo.

É indispensável que todas as questões desse capítulo sejam resolvidas junto com os estudantes para deixar cada estratégia bem clara. E comparar as resoluções por meio de alguma estratégia lógica e por meio de trabalho manual, para que veja essa relação de tempo e esforço aplicados.

Em relação aos exemplos presentes no Caderno do Estudante o primeiro problema trata sobre último algarismo de uma multiplicação, é importante deixar claro que mesmo não sabendo o resultado de uma multiplicação de números muito grandes, o algarismo das unidades do resultado será sempre o último algarismo do produto entre os algarismos das unidades dos fatores.

No segundo exemplo, é uma situação comum de análise de padrões. É importante indicar o trabalho que daria continuar desenhando essas figuras, mesmo que quisesse desenhar as próximas 4 ou 5 figuras. Ele descreve bem o que dissemos acima, sobre tempo e esforço dedicado para se resolver o problema se fosse fazer de maneira manual.

Caso os estudantes já tenham familiaridade com o conceito de potenciação, o exemplo do estudo do último algarismo das potências de um número é algo bem indicado. Pois eles se deparam com multiplicações de dezenas ou centenas de números.

RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

Questão 1: Alternativa b.

Compreensão do problema: Ana faz um acordo para ao invés de receber um valor mensal fixo como mesada, ela receberá semanalmente um valor crescente de semanada. Deseja-se saber quanto ela recebeu depois de 2 meses, ou 8 semanas.

Elaboração de uma estratégia: A incógnita em questão é o valor que ele terá recebido após certo período de tempo. O estudante deve perceber que a quantia recebida por Ana dobra a cada semana, iniciando em R$$1,00$ e terminando em $2^7 = 128,00$.

Executando o plano: Assim ao final do dois meses, ou oito semanas, Ana terá recebido $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 = 255$ reais. Alternativa b.

Verificando o resultado: O valor total de 255 reais ao final de 2 meses é coerente com o enunciado, e como é uma das soluções disponíveis nas alternativas, não há nada que indique que não está correta.

Obs: caso a turma seja de ensino médio, pode se apresentar essa solução por meio de uma PG.

Questão 2: Alternativa c

Compreensão do problema: Júlio junta as bolinhas de gude de forma que elas juntas tenham a forma de um quadrado. Júlio então, deseja saber quantas bolinhas serão necessárias para construir a décima figura desse tipo.

Elaboração de uma estratégia: A incógnita dessa questão pode ser tratada como o total de bolinhas necessárias ou também como a quantidade de bolinhas necessárias para formar o lado de cada quadrado. Ao se descobrir a quantidade de bolinhas necessárias para o lado da décima figura, basta elevar esse valor ao quadrado.

Executando o plano: Como a figura 1 é formada por um quadrado de lado 1, a figura 2 é formada por um quadrado de lado 2, então a décima figura será um quadrado de lados formados por 10 bolinhas cada. Então o total de bolinhas necessário é de 10 x $10 = 100$ bolinhas. Alternativa c.

Verificando o resultado: A quantia de 100 bolinhas é coerente com o enunciado, e como é uma das soluções disponíveis nas alternativas, não há nada que indique que não está correta.

Questão 3: Alternativa c.

Compreensão do problema: Um pedreiro está colocando pisos em uma cozinha segundo o padrão das imagens, o padrão é que uma das diagonais é formada por pisos pretos e todo o resto é formado por pisos brancos.

Elaboração de uma estratégia: A estratégia para esta questão é muito parecida com a questão 2. As figuras são quadrados formados por pisos brancos e pretos e a quantidade de pisos pretos na diagonal é igual à quantidade de pisos no lado da figura.

Executando o plano: Se a uestão diz que a figura em uestão terá 11 pisos na diagonal, então uqer dizer que será um quadrado de lados 11. Dessa forma para formar essa figura serão necessários 11 x 11 = 121 pisos, retirando-se os pisos pretos, $121 - 11 = 110$ pisos brancos. Alternativa c.

Verificando o resultado: A quantia de 110 pisos brancos é coerente com o enunciado, e como é uma das soluções disponíveis nas alternativas, não há nada que indique que não está correta.

Questão 4: Alternativa c.

Compreensão do problema: Na sala de aula foi utilizada uma faixa ilustrada por silhuetas de homens e mulheres, com braços erguidos e abaixados. Uma pessoa pretende descobrir qual seria a ilustração presente na centésima ilustração.

Elaboração de uma estratégia: A incógnita procurada é a figura presente na centésima ilustração. O padrão dessa faixa é que a cada 6 figuras, o ciclo se reinicia. Dessa forma, basta analisar quantos ciclos estarão presentes na faixa e analisar a continuação da faixa.

Executando o plano: Ao se dividir 13(total de figuras) por 6(tamanho dos ciclos) tem-se quociente 2 e resto 1. Ou seja, 2 ciclos completos e mais 1 figura, assim a resposta correta seria o homem de braços erguidos e a mulher de braços abaixados. Alternativa c.

Verificando o resultado: Ao se verificar a coerência dessa alternativa, é uma resposta plausível e possível, por ser uma das alternativas presentes. Sem sinal de que esteja errada.

Questão 5: Alternativa c.

Compreensão do problema: A questão apresenta a já conhecida Sequência de Fibonacci e pede que se encontre os próximos 3 números da sequência.

Elaboração de uma estratégia: A incógnita dessa questão é o valor dos próximos termos e como eles são encontrados. Pode-se perceber que cada termo é formado pela soma dos dois termos anteriores, a partir do terceiro termo. Temos $1 + 1 = 2$, $1 + 2 = 3$, $2 + 3 = 5$, $3 + 5 = 8$ e assimi por diante.

Executando o plano: Os dois últimos números presentes são 8 e 13, então os próximos três termos são $8 + 13 = 21$, $13 + 21 = 34$ e $21 + 34 = 55$. Alternativa c.

Verificando o resultado: Os valores 21, 34 e 55 são coerentes com o enunciado, e como é uma das soluções disponíveis nas alternativas, não há nada que indique que não está correta.

Questão 6: Alternativa b.

Compreensão do problema: Julinho está aprendendo teoria musical e precisa memorizar as notas musicais. Para ajudar na memorização ele escreveu 100 notas musicais na sequência original. A questão quer saber qual foi a última nota escrita.

Elaboração de uma estratégia: A incógnita é a última nota musical escrita por Julinho. Uma questão muito parecida com essa é a questão 4. Devemos perceber que são ciclos de 7 notas em mesma ordem. Assim, basta divir as 100 notas escritas pelo tamanho de cada ciclo e analisar o resto da divisão.

Executando o plano: Ao dividirmos 100(total de notas) por 7(tamanho do ciclo, temos quociente 14 e resto 2, ou seja, a nota procurada é a segunda no ciclo, RÉ. Alternativa b.

Verificando o resultado: Ao se verificar a coerência dessa alternativa, é uma resposta plausível e possível, por ser uma das alternativas presentes. Sem sinal de que esteja errada.

Questão 7: Alternativa e.

Compreensão do problema: A partir de um molde, Paulinha quer montar um cubo, Dentre as possibilidades, qual representa este cubo montado.

Elaboração de uma estratégia: Uma ferramenta útil é usar as partes pintas como referência para encontrar o possível cubo.

Executando o plano: Pode-se perceber que os quadrados pretos pequenos ficarão na mesma face do cubo, face essa oposta à face toda preta. Devemos atentar que os dois quadrados pequenos ná ficarão lado a lado na face, e sim em uma espécie de diagonal. Analisando as figuras apresentadas temos que a alternativa correta é a alternativa e, pois eles estão em diagonal e a face preta não aparece, então pode ser a face oposta à que contém os dois quadradinhos. Alternativa e.

Verificando o resultado: Ao se verificar a coerência dessa alternativa, é uma resposta plausível e possível, por ser uma das alternativas presentes. Sem sinal de que esteja errada.

3 - GEOMETRIA

Problemas de geometria costumam envolver os conceitos de área e perímetro, então para iniciar esse capítulo é necessário iniciar fazendo uma apresentação desses dois conceitos.

Outra coisa presente nos problemas de geometria são formas de análise de padrão, então pode se utilizar os conceitos do capítulo passado, tanto para a organização, quanto para a elaboração do plano prático e para a resolução dos problemas.

Ao pensarmos em geometria, logo associamos à figuras. Porém, muito problemas tem apenas texto, então reforçe a importância de se fazer um esboço da situação nesse tipo de questões para melhor visualização.

Sobre os exemplos do Caderno dos Estudantes:

O primeiro exemplo trata sobre as simetrias, neste caso vemos que ao usarmos uma figura como base, basta fazer as rotações para perceber que ela se encaixa em 3 das outras 4, a que não se encaixar é a resposta procurada. Esse tipo de questão não requer nenhum tipo de cálculo, apenas lógica.

O segundo exemplo será bem importante para a resolução dos exercícios, pois essas questões de malha quadriculada estão sempre presentes nas olimpíadas de matemática. A ideia por trás dela está em se juntar os quadrados que não estão completamente pintados, de forma a encontrar o valor equivalente em quadrados completos.

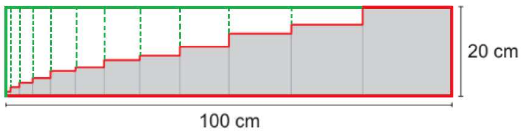
No terceiro exemplo, ao se tratar de junção de figuras, é importante deixar claro que ao se juntar duas ou mais figuras para formar uma só, a área da nova figura é igual a soma das áreas das figuras, porém nos perímetros é um pouco diferente, pois ao se juntar lados das figuras, esses lados passam a ser internos, logo não contarão para o perímetro da nova figura.

RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

Questão 1: Alternativa a.

Compreensão do problema: A questão trata de uma sequência de quadrados alinhados, a questão pede o perímetro da figura toda.

Elaboração de uma estratégia: Apesar de pedir o perímetro da figura inteira, a questão não pede o perímetro de cada quadrado. Dessa forma a incógnita da questão é o valor do perímetro da figura toda. Porém como pode ser visto na imagem abaixo, o perímetro dessa figura é o mesmo que se os lados fossem "afastados", formando um retângulo maior. Na imagem é feito o tracejado referente aos segmentos na horizontal, porém o mesmo vale para os verticais.



Executando o plano: Basta calcular o perímetro do retângulo construído na figura. O perímetro é igual a $100 + 20 + 100 + 20 = 240$cm. Alternativa a.

Verificando o resultado: Ao se verificar a coerência desse valor, é uma resposta plausível e possível, por ser uma das alternativas presentes. Sem sinal de que esteja errada.

Questão 2: Alternativa c.

Compreensão do problema: A questão apresenta uma malha quadriculada, onde apenas uma parte esté pintada e o resto em branco, comparando-se essa figura com as alternativas, deseja-se encontrar qual alternativa tem mesma área.

Elaboração de uma estratégia: Como as malhas são iguais, uma forma de encontrar as figuras de mesma área é contar o número de quadrados pintados. A incógnita seria a área pintada da figura.

Executando o plano: Na figura temos 18 quadradinhos pintados, então basta procurar nas alternativas, qual também tem 18 quadradinhos pintados. Que seria a alternativa c.

Verificando o resultado: Ao se verificar a coerência dessa alternativa, é uma resposta plausível e possível, por ser uma das alternativas presentes. Sem sinal de que esteja errada.

Questão 3: Alternativa d.

Compreensão do problema: A questão apresenta uma malha quadriculada com 5 figuras, onde apenas uma parte de cada esté pintada e o resto em branco, comparando-se essas figuras deseja-se encontrar qual figura tem maior área.

Elaboração de uma estratégia: Essa questão tem resolução análoga à questão 2. Devemos calcular quantos quadradinhos completos ao todo cada figura tem pintado.

Executando o plano: A figura 1 tem 16 quadradinhos pintados. A figura 2 tem 9 quadradinhos, pois representa um quarto de um quadrado de lado 6. A figura 3 tem 16 quadradinhos. A figura 4 tem 18 quadradinhos, pois representa a metade de um quadrado de lado 6. A figura 5 tem 9 quadradinhos, pois representa a metade da área de um retângulo de largura 3 e comprimento 6. Assim, a figura de maior área é a figura 4. Alternativa d.

Verificando o resultado: Ao se verificar a coerência dessa alternativa, é uma resposta plausível e possível, por ser uma das alternativas presentes. Sem sinal de que esteja errada.

Questão 4: Alternativa a

Compreensão do problema: A questão trata sobre as dimensões de um campo de futebol e pergunta qual a distância percorrida por um atleta que desse 3,5 voltas no campo.

Elaboração de uma estratégia: A incógnita nessa questão é o perímetro desse campo, pois ao se descobrir o perímetro, basta multiplicar pelo número de voltas para se encontrar a distância em questão.

Executando o plano: Como o campo tem dimensões 110m x 80m, seu perímetro será de $110 + 80 + 110 + 80 = 380$ metros. Como o atleta deverá dar 3,5 voltas, ele percorrerá um total de $380 \text{ x } 3,5 = 1330$ metros. Alternativa a.

Verificando o resultado: Ao se verificar o valor de 1330 metros, é uma resposta plausível e possível, por ser uma das alternativas presentes. Sem sinal de que esteja errada.

Questão 5: Alternativa e.

Compreensão do problema: A questão apresenta o caso de Cláudia que pretende colocar seus dois tapetes no quarto e quer saber quanto do piso continuará descoberto.

Elaboração de uma estratégia: A incógnita dessa questão é a área de cada quadrilátero, tapetes e piso do quarto. Basta encontrar a área de cada um dos quadriláteros e subtrair as áreas dos tapetes da área total do quarto.

Executando o plano: O tapete quadrado tem lado 4m, assim a área é de $4^2 = 16$

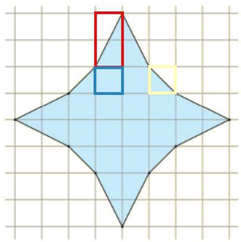
m^2, o tapete retangular tem largura 3m e comprimento 8m, assim a sua área é de 3 x 8 = 24 m^2. O quarto é um uadrado de lado 9m, assim a sua área é de $9^2 = 81$ m^2. Então a parte do piso que ficará descoberta é de $81 - 16 - 24 = 41$ m^2. Alternativa e.

Verificando o resultado: Ao se verificar o valor de 41 metros quadrados de área restante, é uma resposta plausível e possível, por ser uma das alternativas presentes. Sem sinal de que esteja errada.

Questão 6: Alternativa b.

Compreensão do problema: A questão apresenta uma malha quadriculada, onde apenas uma parte esté pintada e o resto em branco, comparando-se essa figura com as alternativas, deseja-se encontrar qual alternativa tem mesma área.

Elaboração de uma estratégia: Essa questão tem resolução análoga à questão 2. Como os quadradinhos são iguais, uma forma de separar em figuras menores e contar o número de quadrados pintados. A incógnita seria a área pintada da figura. Na figura abaixo, apresenta-se as 3 figuras menores, o retângulo 2x1 com apenas metade pintada, o quadrado 1x1 e o quadrado 1x1 com apenas metade pintada.



Executando o plano: São ao todo 8 retângulos, totalizando 8 quadradinhos pintados, 4 quadradinhos 1x1 pela metade, totalizando 2 quadradinhos pintados e mais 12 quadradinhos que já estavam pintados. Assim, $8 + 2 + 12 = 22$ quadradinhos 1x1 completamente pintados. Alternativa b.

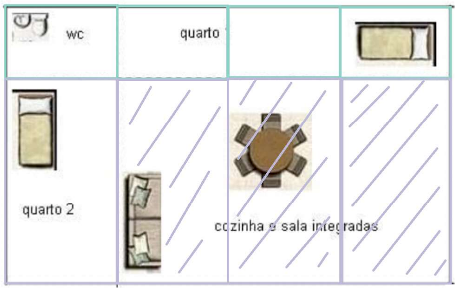
Verificando o resultado: Ao se verificar a quantidade de 22 quadradinhos pintados, é uma resposta plausível e possível, por ser uma das alternativas presentes. Sem sinal de que esteja errada.

Questão 7: Alternativa c.

Compreensão do problema: A questão apresenta a planta baixa de uma casa com as áreas de alguns cômodos sendo dadas e outras não. O objetivo é descobrir a área total dessa casa.

Elaboração de uma estratégia: A incógnita dessa questão é a área da cozinha e slaa integradas, pois para encontrar a área dessa casa, basta somar os quatro cômodos e os outros três já tem a área dada pelo enunciado.

Executando o plano: Ao compararmos as áreas do wc e do quarto 1 vemos que a área do quarto é o triplo da área do wc, como ambos são retângulos e que tem um lado em comum, isso implica que o comprimento do quarto 1 é o triplo do comprimento do wc. Assim, podemos decompor a cozinha em 3 retângulos iguais ao quarto 2, pois o comprimento do quarto 1 é igual ao triplo da largura do quarto 2. A figura abaixo ilustra essa ideia.



Dessa forma, a área da cozinha é de 24 m². Então a área total do projeto é de $3 + 8 + 9 + 24 = 44$ m². Alternativa c.

Verificando o resultado: Ao se verificar o valor de 44 metros quadrados de área total, é uma resposta plausível e possível, por ser uma das alternativas presentes. Sem sinal de que esteja errada.

4 - MÚLTIPLOS E DIVISORES

Desde o início do ensino fundamental, os estudantes são apresentados ao conceito de juntar objetos, então esses problema acabam sendo familiares.

O conceito que precisa ser deixado claro para os estudantes é o de divisibilidade. Ou seja, reforçar o que significa ser um múltiplo ou um divisor de um número. Afinal, grande parte dos problemas desse capítulo envolvem analisar o resto da divisão.

Em relação ao exemplo do caderno, o conceito de grupos quando se tratam de objetos ou ciclos quando se tratam de números é muito presente nesse capítulo.

A questão trata sobre o menor número de 3 algarismos divisível por 6, pra isso deve se iniciar definindo qual é o menor número de 3 algarismos existente, no caso o 100. Pois queremos descobrir quantos ciclos de 6 estão "dentro" do 100 e quanto sobrou sem fechar um ciclo.

A partir disso analisar o resto da divisão desse número por 6, ao buscarmos um número maior que 100, basta tomar o resto da divisão euclidiana e descobrir quanto precisa se somar a esse resto para completar 6, se buscassemos um número menor que 100, devemos subtrair o resto do número 100.

Esse método de resolução é bastante comum em problemas de múltiplos e divisores.

RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

Questão 1: Alternativa d.

Compreensão do problema: A questão relata a compra de alguns bombons por Seu Auro para presentear seus netos. Não se sabe quantos ele comprou, somente quanto sobrariam dependendo de como distribuisse e pede que seja descoberto a quantidade de bombons comprados.

Elaboração de uma estratégia: A incógnitia da questão é o total de bombons comprados. Um caminho para a resolução passa por analisar os múltiplos de 6 e de 5. Importante saber que a questão não diz quantos netos Seu Auro vai presentear.

Executando o plano: Os múltiplos de 6 entre 11 e 24 são: 12, 18 e 24, os múltiplos de 5 entre 11 e 24 são 15 e 20. Como a questão diz que se cada um recebesse 4 não sobraria nenhum, então a quantidade de bombons é um múltiplo de 6. Se ao se dividir por 5 sobram 4 as quantidades possíveis seriam 19 e 24. O único valor comum às duas condições é o 24. Alternativa d.

Verificando o resultado: Ao se verificar o número 24 as duas condições estão satisfeitas, é uma resposta plausível e possível, por ser uma das alternativas presentes. Sem sinal de que esteja errada.

Questão 2: Alternativa e.

Compreensão do problema: Dois amigos estão comparando suas coleções de figurinhas, porém Kamilla não diz quantas tem, apenas apresenta um enigma para que Márcio descubra essa quantidade.

Elaboração de uma estratégia: Essa questão tem uma estrutura parecida com a questão 1, então a incógnita é o total de figurinhas e o plano a ser seguido é analisar os múltiplos de 12. E descobrir o maior múltiplo de 12 menor que 200.

Executando o plano: Iniciamos dividindo 200 por 12 e obtemos quociente 16 e resto 8. Dessa forma, para encontrar o maior múltiplo de 12, basta subtrair estes 12 dos 200. Assim, Kamilla tem $200 - 8 = 192$ figurinhas. Alternativa e.

Verificando o resultado: Ao se verificar o número 192 a condição de ser múltiplo de 12 é satisfeita e o próximo múltiplo seria 204. Assim, é uma resposta plausível e possível, por ser uma das alternativas presentes. Sem sinal de que esteja errada.

Questão 3: Alternativa b.

Compreensão do problema: A questão trata sobre uma situação onde o aluno está aprendendo os múltiplos de um número e Celso desafia a encontrar o algarismo das unidades do 85° número da lista.

Elaboração de uma estratégia: A incógnita dessa questão pode ser o 85° número da lista ou o último algarismo do 85° número da lista. Se usarmos a primeira, encontramos o 85° número multiplicando o 7 por 84, pois começa do 0. Se usarmos a segunda, analisaremos o padrão envolvido no último algarismo dos múltiplos de 7.

Executando o plano: O 85° número da lista é 7 x 84 = 588 onde o último algarismo é 8. O último algarismo do 85° número é o mesmo que o último algarismo do 5°, pois os algarismos das unidades seguem um padrão de repetição a cada 10 termos. O 5° termo é o 28, que termina em 8, então a resposta é 8. Alternativa b.

Verificando o resultado: Pelas duas formas obtemos o mesmo mesmo valor 8, é uma resposta plausível e possível, por ser uma das alternativas presentes. Sem sinal de que esteja errada.

Questão 4: Alternativa c.

Compreensão do problema: A questão apresenta os resultados das potências de base 3 e pede que se encontre o último algarismo do 106° termo da sequência.

Elaboração de uma estratégia: A incógnita é o último algarismo do termo desejado. Ao analisar os resultados presentes no enunciado, podemos perceber que os valores 1, 3, 9 e 7 se repetem, començando em $3^0 = 1, 3^1 = 3, 3^2 = 8$ e $3^3 = 27$. Assim, basta saber quantas vezes esse ciclo se repete até o 106° termo.

Executando o plano: Como a sequência inicia em 3^2, então o 106° termo é igual a 3^107. Devemos então dividir 107 por quatro, que dá quociente 26 e resto 3, ou seja tem o mesmo último algarismo que 3^3, que é 7. Alternativa c.

Verificando o resultado: Ao se verificar a solução 7, é uma resposta plausível e possível, por ser uma das alternativas presentes. Sem sinal de que esteja errada.

Questão 5: Alternativa c.

Compreensão do problema: A questão trata de um suposto calendário onde a semana tem 5 dias e pede que encontre que dia da semana caiu certo dia do ano.

Elaboração de uma estratégia: A incógnita é o número de dias que se passaram. Para resolver essa questão basta descobrir quantos dias se passaram e dividir por 5, pois a cada 5 dias, voltará para o mesmo dia da semana.

Executando o plano: Cada ano tem 6 x 27 = 162 dias, assim basata dividir 162 por 5, que dará quociente 32 e resto 2, desta forma o primeiro dia do ano seguinte será um dia Iba. Alternativa c.

Verificando o resultado: Ao se verificar a solução Iba, é uma resposta plausível e possível, por ser uma das alternativas presentes. Sem sinal de que esteja errada.

Questão 6: Alternativa e.

Compreensão do problema: A questão apresenta uma situação onde se tem disponível 3 tipos de tábua onde se deseja ter pedaços de maior medida possível.

Elaboração de uma estratégia: A incógnita dessa questão é o tamanho que a tábuas devem ser cortadas. Para resolver essa questão devemos tirar o mdc entre oos 3 tipos de tábuas, depois devemos verificar se esse mdc é menor que 2m.

Executando o plano: O $mdc(540, 810, 1080) = 270$, como 270cm é mais que 2m, então a medida de cada pedaço de tábua deverá ser 135cm. Assim as 40 tábuas de 540cm geram 160 pedaços, as 30 tábuas de 810cm geram 180 pedaços e as 10 tábuas de 1080cm geram 80 pedaços. Totalizando $160 + 180 + 80 = 420$ pedaços. Alternativa e.

Verificando o resultado: Ao se verificar o valor 420, é uma resposta plausível e possível, por ser uma das alternativas presentes. Sem sinal de que esteja errada.

5 - CONJUNTOS

Esse capítulo tenta apresentar todos as noções básicas de um conjunto e suas operações. Antes de pensar em operações ou exercícios, é importante focar com que o estudante entenda o que é um conjunto, o que faz com que os elementos pertençam a ele, como por exemplo sobre características comuns aos elementos.

Após explicar o que é um conjunto, é sugerido dar bastante atenção no diagrama de Euler-Venn, explicar que Euler e Venn são os dois criadores do dessa forma de representação. As operações utilizarão o diagrama para melhor visualização.

Ao se tratar das operações, apresente a resolução por meio da listagem de elementos, mas também pelo diagrama de Euler-Venn, pois como dito, essa representação será uma das principais estratégias para se resolver os exercícios propostos. No caderno, apresentamos o exempo dos animais por meio da listagem e do diagrama, então aproveite para reforçar esses conceitos.

No segundo exemplo, o conceito de se trabalhar as operações sem saber quem são os elementos do conjunto, apenas quantos são, é de extrema importância tanto para os exercícios propostos, como para as olimpíadas, mas também para o estudo de teoria de conjuntos no Ensino Médio. Assim, é muito útil para a vida acadêmica dos estudantes, se possível dê bastante atenção para esse tipo de questão.

Na questão 4 do caderno de exercícios, o enunciado trata sobre CNH, Carteira Nacional de Habilitação. Para que ela faça sentido para os estudantes, é interessante que se comente com a turma como funciona a habilitação e o que significam as letras A(moto) e B(carro).

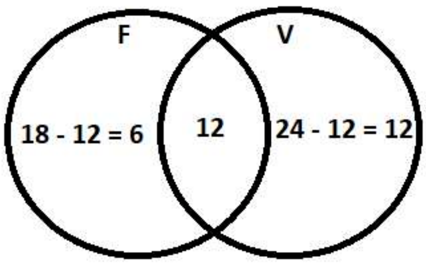
RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

Questão 1: Alternativa e.

Compreensão do problema: A questão trata sobre um pesquisa feita entre alunos de uma escola, sobre a preferência entre 2 esportes. É solicitado que se descubra quantos estudantes escolheram apenas futebol na pesquisa.

Elaboração de uma estratégia: A incógnita da questão é a quantidade de alunos que escolheram apenas futebol. Como ao somar as duas quantidades de alunos ultrapassam o total de alunos, a quantidade que ultrapassa é que está sendo contado duas vezes, ou seja, é o valor da interseção dos dois. Para a resolução desta questão é importante fazer um diagrama de Euler-Venn para melhor visualizar a situação. Ao preencher o diagramas, devemos começar preenchendo a interseção, indo "de dentro pra fora"do diagrama, sempre subtraindo os valores que já tenham sido contados.

Executando o plano: Ao somarmos a quantidade de alunos que escolheram futebol com os que escolheram voleibol, temos $18+24 = 42$, como a turma tem 30 alunos, implica que $42-30 = 12$ alunos foram contados duas vezes. Assim, 12 alunos escolheram os dois esportes.



Segundo o diagrama vemos que 6 alunos escolheram apenas futebol. Alternativa e.

Verificando o resultado:Ao se verificar o valor 6, é uma resposta plausível e possível, por ser uma das alternativas presentes. Sem sinal de que esteja errada.

Questão 2: Alternativa d.

Compreensão do problema: Em uma sala uma professora faz uma pesquisa sobre o bairro onde cada estudante mora. Além desses conjuntos de bairro, também listou conjuntos de alunos divididos por sexo. A ideia é descobrir $A \cap B$, ou seja, quantos alunos moram no bairro Campo Limpo e que são do sexo masculino.

Elaboração de uma estratégia: A incógnita da questão é a interseção entre os dois conjuntos, basta avaliar os elementos de cada conjunto e verificar quais estão em ambos os conjuntos.

Executando o plano: O único elemento que aparece tanto no conjunto A quanto no B é Everton. Alternativa d.

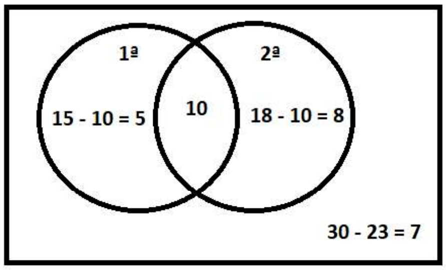
Verificando o resultado: Ao se verificar a solução que tem apenas Everton, é uma resposta plausível e possível, por ser uma das alternativas presentes. Sem sinal de que esteja errada.

Questão 3: Alternativa b.

Compreensão do problema: Em uma turma com 30 estudantes, uma prova foi aplicada e sabe-se a quantidade de alunos que acertaram cada uma delas. O objetivo é descobrir quantos alunos erraram ambas.

Elaboração de uma estratégia: Essa questão é análoga à questão 1. A incógnita é a quantidade de estudantes que erraram as duas. Para isso, o diagrama de Euler-Venn ajuda bastante.

Executando o plano: Segundo a imagem abaixo, vemos que $10 + 8 + 5 = 23$ estudantes acertaram pelo menos uma das questões. Assim, $30 - 23 = 7$ estudantes erraram ambas as questões. Alternativa b.



Verificando o resultado: Ao se verificar o valor de 7 estudantes, é uma resposta plausível e possível, por ser uma das alternativas presentes. Sem sinal de que esteja errada.

Questão 4: Alternativa c.

Compreensão do problema: A questão trata sobre uma escola de formação de condutores, com uma quantidade de alunos tirando a habilitação. Trata sobre quantidades de pessoas que vão tirar cada tipo de habilitação e quer saber quantas pretendem tirar apenas a habilitação de tipo A.

Elaboração de uma estratégia: Questão análoga à 1. A incógnita é a quantidade de alunos que pretendem tirar apenas a habilitação de tipo A.

Executando o plano: Ao somarmos os grupos que responderam obtemos $12 + 29 = 41$ alunos, como a turma tem 34 alunos isso implica que $41 - 34 = 7$ alunos foram contados duas vezes, ou seja, 7 pretendem tirar tanto A quanto B. Assim, dos 12 que responderam que iriam tirar a habilitação A, então $12 - 7 = 5$ alunos pretendem tirar apenas a habilitação do tipo A. Alternativa c.

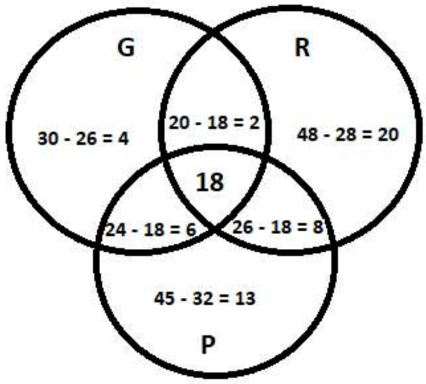
Verificando o resultado: Ao se verificar o valor de 5 alunos, é uma resposta plausível e possível, por ser uma das alternativas presentes. Sem sinal de que esteja errada.

Questão 5: Alternativa b.

Compreensão do problema: A questão apresenta uma pesquisa feita em uma escola para melhorar o ambiente, o objetivo é tentar descobrir uantos alunos acham que o parquinho ou o ginasio precisam ser melhorados.

Elaboração de uma estratégia: Essa questão é análoga à questão 3, a diferença é que agora temos 3 diagramas. A incógnita da questão a própria construção e distribuição dos valores no diagrama.

Executando o plano: Dessa forma a quantidade de pessoas que votaram em par-



quinho ou ginásio é $4 + 2 + 18 + 6 + 13 + 8 = 51$ alunos. Alternativa b.

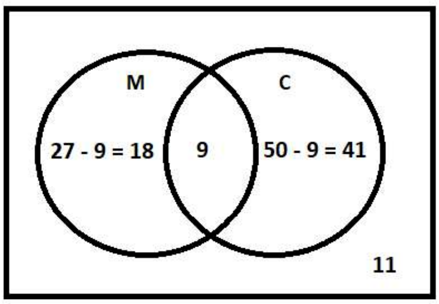
Verificando o resultado: Ao se verificar o valor de 51 alunos, é uma resposta plausível e possível, por ser uma das alternativas presentes. Sem sinal de que esteja errada.

Questão 6: Alternativa b.

Compreensão do problema: A questão relata as vendas de alguns sabores de bolo em uma doceria e pede que se descubra o total de clientes nesse dia na doceria.

Elaboração de uma estratégia: Essa questão é análoga à questão 3. A incógnita é o total de clientes no dia e para encontrar isso basta construir o diagrama de Euler-Venn e somar todos os valores.

Executando o plano:



Assim, o número de clientes nesse dia foi de $18 + 9 + 41 + 11 = 79$ clientes. Alternativa b.

Verificando o resultado: Ao se verificar o valor de 79 clientes, é uma resposta plausível e possível, por ser uma das alternativas presentes. Sem sinal de que esteja errada.

ENCERRAMENTO

Olá colega professor(a), espero que esse material tenha sido de ajuda nesse processo de construção de conhecimento. Ele foi desenvolvido com muito carinho, pensando apenas em complementar e auxiliar em suas aulas sobre a temática de problemas.

Esse material foi desenvolvido como o produto final de uma dissertação de mestrado, onde busquei auxiliar em uma área tão importante e com material tão escasso, pois como professor da rede pública de Santa Catarina, sempre me deparei com a dificuldade em se conseguir material complementar gratuito para utilizar em minhas aulas.

Qualquer dúvida ou sugestão, entre em contato por **alexsandroschneider@hotmail.com** ou **alexsandroschneider@gmail.com**.

Boa sorte em sua jornada.

Um grande abraço,
Professor Alexsandro Schneider.