COLÉGIO PEDRO II

Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Walesca Autonamo Da Silva

FUNÇÃO MODULAR E TECNOLOGIA:

Uma proposta de inclusão do tema na BNCC do Ensino Médio

Rio de Janeiro

2022

Walesca Autonamo Da Silva

FUNÇÃO MODULAR:

Uma proposta de inclusão do tema na BNCC do Ensino Médio

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática.**

Orientador: Dr.Sc. Daniel Felipe Neves Martins

Rio de Janeiro

2022

COLÉGIO PEDRO II

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA, EXTENSÃO E CULTURA

BIBLIOTECA PROFESSORA SILVIA BECHER

CATALOGAÇÃO NA FONTE

S586 Silva, Walesca Autonamo da

Função modular e tecnologia: uma proposta de inclusão do tema na BNCC do Ensino Médio / Walesca Autonamo da Silva. – Rio de Janeiro, 2022.
97 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Colégio Pedro II. Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura.
Orientador: Daniel Felipe Neves Martins.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Função Modular. 3. Base Nacional Comum Curricular (BNCC). 4.Tecnologias. I. Martins, Daniel FelipeNeves. II. Colégio Pedro II. III. Título.

CDD 510

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária Simone Alves – CRB7 5026

Walesca Autonamo Da Silva

FUNÇÃO MODULAR:

Uma proposta de inclusão do tema na BNCC

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Aprovado em: 26/06/2022.

Banca Examinadora:

Prof. Dr.Sc. Daniel Felipe Neves Martins (Orientador)
PROFMAT - Colégio Pedro II

Profa. Dra. Liliana Manuela Gaspar C. da Costa
PROFMAT- Colégio Pedro II

Profa. Dra. Gabriela dos Santos Barbosa
FEBF - UERJ

Rio de Janeiro

2022

Este trabalho é dedicado ao meu marido **Haroldo**, aos meus filhos **João, Pedro e Gabriel,** aos meus pais **Gelson e Marilda** e ao meu amigo e orientador **Daniel** que teve a incrível missão de me orientar.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a todos que possibilitaram a minha chegada até aqui. A jornada começou com meus pais que sempre entenderam a educação como o mais importante tesouro, que liberta homens e principalmente as mulheres.

Agradeço a minha família na figura do meu marido Haroldo Costa Silva Filho, também professor de Matemáticas e incentivador para que eu não desistisse desse mestrado, pois a jornada de mãe, dona de casa, filha e professora elevam o cansaço da mulher moderna ao infinito e o desânimo é inevitável.

Agradeço de coração a todos os meus companheiros da turma 2020 do PROFMAT-CP II. Valeu a pena todas as horas de estudos para a realização das provas das disciplinas, do ENQ, dos seminários, dos testes e das listas de exercícios.

Todos os professores do curso foram muito importantes para a minha formação profissional, porém vai um carinho especial às professoras Tânia Boffoni (extremamente gentil e com uma didática fabulosa ao nos apresentar as funções), Liliana Costa (dona de um sotaque que passa para os alunos e que tem um conhecimento inquestionável) e Andréia Maciel que juntamente do Daniel fizeram com que as aulas on-line em tempos de pandemia fossem mais leves apesar de toda a dureza da Álgebra Linear e da Geometria Analítica neste nível de escolaridade.

Agradeço também à professora Gabriela dos Santos Barbosa por ter aceitado fazer parte da banca que irá julgar este trabalho, por sua referência na formação de professores na universidade pública, por atuar em várias frentes e nos mais diferentes níveis da educação como professora de Matemáticas.

Por fim agradeço ao CNPq/CAPES por acreditarem e viabilizarem um programa de qualificação profissional para professores a nível de mestrado, inteiramente gratuito, num país onde o acesso à educação pública de qualidade ainda é uma questão a ser resolvida por governantes que realmente se importam com as classes populares, com a qualidade do ensino e com o futuro, que sempre está logo ali.

“Penso, logo existo”

René Descartes

RESUMO

SILVA, Walesca Autonamo da. **Função modular e tecnologia:** uma proposta de inclusão do tema na BNCC. 2022. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2022.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento normativo que rege atualmente a Educação Básica brasileira apresentou diversas modificações em relação ao último currículo das diferentes disciplinas, produzindo um grande impacto em todas elas, em especial na Matemática. No Ensino Médio, por exemplo, o tema Função Modular foi excluído, mas, por outro lado, há forte presença do uso de Tecnologias Digitais, para compreender e descrever transformações que ocorrem na forma gráfica, ao se alterarem os parâmetros da forma algébrica de funções. Este trabalho vem sugerir que o ensino de Função Modular é uma oportunidade de aproximar conteúdos que foram excluídos da BNCC e que podem ser perfeitamente tratados via tecnologia digital com a finalidade de ampliar o conhecimento matemático de conteúdo doa alunos do ensino médio. Apresentamos uma defesa da inclusão do tema Função Modular, na BNCC, através de uma série de atividades envolvendo o estudo das funções, das resoluções de equações e inequações modulares com a utilização do software GeoGebra e do cálculo aproximado de raízes de equações, sempre estabelecendo as conexões entre os diversos tipos de funções apresentadas no Ensino Médio a partir da definição matemática de distância em espaços métricos euclidianos.

Palavras-chave: valor absoluto; função modular; Base Nacional Comum Curricular (BNCC); GeoGebra; tecnologias.

ABSTRACT

SILVA, Walesca Autonamo da. **Modular function and tecnology:** a proposal to include the theme in the BNCC. 2022. Master's degree dissertatrion – Colégio Pedro II, Dean of Postgraduate Studies, Research, Extension and Culture, Professional Master's Program in Mathematics in the National Network, Rio de Janeiro, 2022.

The National Curricular Common Base (BNCC), a normative document that currently governs Brazilian Basic Education, has presented several changes in relation to the last curriculum of the different subjects, producing a profound impact on all of them, especially in Mathematics. In High School, for example, the Modular Function theme was excluded, but, on the other hand, there is a strong presence of the use of Digital Technologies, to understand and describe transformations that occur in the graphic form, when changing the parameters of the algebraic form of functions. This work suggests that the teaching of Modular Function is an opportunity to bring together contents that were excluded from the BNCC and that can be perfectly treated via digital technology to expand the mathematical knowledge of content of high school students. We present a defense of the inclusion of the theme Modular Function, in the BNCC, through a series of activities involving Functions, solving modular equations and modular inequalities with the use of GeoGebra software, finding a good approximation and rounding of decimal numbers and roots of equations, always establishing the connections between the different types of functions presented in High School using the definition of distance, from the Euclidean Metric Space.

Keywords: Absolute value; module; Base Nacional Comum Curricular (BNCC); GeoGebra; technologies.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), promulgada pelo MEC em 2018, apresenta diversas modificações estruturais no desenvolvimento curricular das disciplinas do Ensino Médio. É um “documento normativo e obrigatório que deve definir o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da educação básica”, (BRASIL, 2018, p.7). Neste compêndio as aprendizagens essenciais são encontradas nas **competências, habilidades e objetos do conhecimento**, os componentes curriculares são as **disciplinas**, as unidades temáticas são apresentadas como **eixos temáticos**, os temas contemporâneos transversais são reconhecidos como **temas transversais** e a divisão do tempo escolar é encontrado através da **referência do ano escolar e do segmento.** Em geral, documentos desta natureza retratam valores produzidos/expressos nas políticas públicas em torno da Educação e surgem para alcançar as metas traçadas para a educação nacional. No Brasil não foi diferente: a Reforma Francisco Campos (1931), a Reforma Capanema (1942), a Reforma Simões Filho (1951), as grandes Reformas Estaduais do ano de 1975 e os Parâmetros Curriculares Nacionais de 1996 sempre estiveram alinhadas às tais metas a serem atingidas nacionalmente.

Na prática, a implementação efetiva da BNCC ainda está sendo lenta no Brasil, com alguns pesquisadores na área apresentando críticas ao documento e à sua dinamização nos ambientes escolares, como Michetti (2020) que analisa o texto sob a ótica da Sociologia da Crítica e as ideias de Pierre Bourdieu. O autor afirma que há em torno da BNCC um espaço social de disputa entre diferentes personagens e cenários políticos. Há também professores-pesquisadores das diversas áreas do conhecimento que criticam o processo de implementação do documento nas escolas, a falta de escuta dos personagens, o não engajamento dos responsáveis, os consensos entre aqueles que trabalharam sobre o texto e até na legitimação do processo de criação do documento. Todas as críticas devidamente fundamentadas e discutidas entre pares.

As instituições que abraçaram o projeto e decidiram rapidamente dinamizar, em seus espaços escolares, o que preconiza a base sem qualquer outro momento de reflexão entre os membros da comunidade escolar, perceberam, no dia a dia, que a sua implementação não foi nada fácil e que fazer reestruturações curriculares das disciplinas segundo a nova proposta também não era uma tarefa simples. Revisões nos projetos políticos pedagógicos, alteração na forma de aplicar recursos didáticos, uma nova forma de encarar o uso das diversas tecnologias e a necessidade de repensar as avaliações entre outros tantos aspectos, passaram obrigatoriamente a fazer parte das discussões e estudos entre diretores, coordenadores pedagógicos de segmentos, de disciplinas e professores. Muitos acreditam que há uma necessidade de repensar inclusive, os processos de formação continuada dos professores e que o pensamento pragmático e reducionista contido no texto através da aprendizagem por competências deveria ser revisto antes da implementação, como afirmam Albino e Silva (2019).

Expressões como ´conhecimento plural´, ´abrir mão do conteúdo para dar espaço às habilidades e competências´, ´implementação do pensamento computacional plugado ou desplugado´ ou ´postura ativa do aluno no contexto da aprendizagem´ passam, com a chegada da BNCC, a fazer parte do cotidiano do professor e precisam ser levadas em consideração quando o professor pensa no ato intencional de ensinar e na ação focada na aprendizagem, que acabam sendo estudados juntos a vocábulos como: conhecimento, autogestão, cultura digital, argumentação, empatia, comunicação, autonomia, senso crítico, pensamento científico, autoconhecimento e autocuidado. Falando-se especificamente da Matemática, o saber pronto inquestionável, elaborado, de linguagem própria a ser desvendada e dominada pelos estudantes vistos como exitosos dá lugar à contextualização crítica, à postura protagonista e ativa do estudante e a visão de que a disciplina tem uma prática social importantíssima que é capaz inclusive, de modelar aspectos da vida cotidiana, previsíveis ou não. Coube aos grupos de especialistas das diversas áreas pensarem novas estruturas de distribuição dos conteúdos por anos de escolaridade e sugerir dinâmicas novas de trabalho ao professor, sugestões estas que não ocorreram.

Alguns assuntos foram incluídos, como o estudo das transformações no plano, a construção de modelos onde as funções não convencionais aparecem, os diferentes modelos estatísticos que dão conta das diversas interpretações de comportamentos populacionais, a álgebra simples dos vetores, um estudo mais amplo das probabilidades e o incentivo à resolução de problemas em todos os anos de escolaridade, só para citar alguns, relacionados ao Ensino Médio. Já outros tantos foram excluídos tais como: função modular, funções definidas por mais de uma sentença, polinômios, a forma polar dos números complexos, o estudo das curvas cônicas e aspectos algébricos da trigonometria, como as identidades trigonométricas menos usuais.

Por outro lado, a BNCC incentiva fortemente o desenvolvimento do pensamento computacional plugado[1] no Ensino Médio através do uso de tecnologias digitais e lista uma série de habilidades relacionadas ao tema ´novas tecnologias`, que o professor precisa desenvolver em sala de aula junto aos alunos e acreditamos que a exclusão dos tópicos citados diminuem as possibilidades de trabalho do professor, assim como diminui o capital cultural-matemático do aluno do Ensino Médio, sobretudo aqueles que seguirão seus estudos em carreiras tecnológico-científicas.

Em documentos anteriores, como o PCN e o PCN+, já se falava na necessidade de o aluno saber utilizar diferentes fontes de informação e recursos tecnológicos para adquirir e construir conhecimentos, desde o ensino fundamental. Assim, o uso de calculadoras simples ou cientificas, softwares livres de geometria dinâmica auxiliando o ensino da matemática ou mesmo o uso de planilhas eletrônicas no estudo das progressões e de Estatística foram aos poucos sendo introduzidos no dia a dia do professor, mas tudo isso sem um diálogo mais direto com o professor gerando muitas dúvidas e insatisfações. De certa forma, algo de maneira semelhante ocorre com a BNC. Encontra-se no documento que os recursos digitais auxiliam na descrição e na compreensão de transformações que ocorrem na representação gráfica em IR^2 de uma dada função. Este tópico incentiva o professor a criar atividades em aulas de Matemática de modo que os alunos possam fazer conjecturas, experimentar e interpretar entrada de dados diferentes usando o computador, discutir suas soluções em grupo e até mesmo aprender a partir de erros e equívocos cometidos, porém o auxílio pedagógico ao professor não foi

---

[1] O pensamento computacional é uma abordagem usada para solução de problemas que utiliza conceitos básicos da Computação e é constituído por atividades alquimétricas (que adotam o conceito de métrica e de transformação), computação plugada (na presença da máquina, softwares e o estudo de linguagens de computação) e computação desplugada (sem a presença do computador e seus aparatos técnicos como a internet. Mostra que o ato de contar, ordenar e classificar pode ser feito sem a máquina. Refere-se, portanto à capacidade de resolver problemas a partir do conhecimento e práticas da computação, englobando sistematizar, representar, analisar e resolver problemas. Ex: E-puzzles, Tetris ou Torre de Hanói

compartilhado pelos órgãos competentes em lidar com a questões propostas, gerando muitas dúvidas por parte dos docentes em relação ao uso da metodologia ideal.

Uma tarefa clássica de investigação desenvolvida por muitos professores do ensino médio ao apresentar as funções afins com auxílio de tecnologia é permitir que os alunos alterem os parâmetros da forma algébrica de uma família de funções reais de variável real, do tipo$f(x) = ax + b$, e assim, construir o conhecimento matemático que envolve este conteúdo, estudando propriedades geométricas a partir das alterações efetuadas. Analisar o deslocamento das raízes das diferentes funções que surgem ao reposicionar a reta no plano cartesiano, estabelecer relações entre coeficientes angulares de retas paralelas ou perpendiculares ao gráfico ou mesmo procurar uma relação entre a lei de formação da função e os pontos de intersecção dos traços das curvas com os eixos coordenados são tarefas comuns realizadas por muitos professores de Ensino Médio.

Neste trabalho, defendemos a tese de que o tema Função Modular, retirado da BNCC pelos especialistas que a elaboraram, quando desenvolvido via uso das Tecnologias Digitais no estudo das funções no Ensino Médio pode ser um assunto que gera possibilidades de problematização em Matemática Escolar e torna-o mais dinâmico e mais ligeiro.

Trazendo este tópico para as salas de aula de Matemática e com a condução adequada pelo professor através de uma metodologia ativa que promova comunicação entre alunos e professores, acreditamos que além de podermos exercitar a construção do conhecimento matemático, alunos e professores podem discutir sobre diversos aspectos ao redor de um mesmo tema, enriquecendo o capital cultural matemático deste aluno, agregando temas correlatos já estudados no Ensino Fundamental como: translações, reflexões, expansão ou contração segundo um determinado fator, através do estudo de figuras semelhantes e tantos outros que podem ser recuperados e revisados segundo uma nova ótica, além de poder reunir novos conhecimentos no entorno das demais funções elementares já estudadas pelos alunos, tais quais as funções: Afim, Quadrática, Trigonométricas que sejam contínuas em IR, Exponencial, Logarítmica.

Para amplificar o nosso argumento do porquê escolher trabalhar com Função Modular associado à tecnologias digitais, gostaríamos de citar as inúmeras dificuldades que alunos ingressantes nos cursos de tecnologia ou ciências têm com conceitos matemáticos envolvendo as funções, como afirmam Admiral (2016) ao analisar um grupo de 23 alunos do curso de Física ou Nogueira Junior (2008), que cria atividades envolvendo o conceito de valor absoluto e posteriormente de função modular, por ter detectado sérias dificuldades interpretativas acerca do tema entre seus alunos. Essas dificuldades em lidar com temas como as funções definidas por várias sentenças, têm, entre outros inúmeros aspectos, segundo os autores, provocado altos índices de evasão nas aulas de Matemática e repetência, e muitas vezes, as dificuldades trazidas pelos alunos são atribuídas às lacunas na aprendizagem de Matemática na Escola Básica, em especial no que se referem a conceitos como incógnita, variável ou até mesmo na interpretação do sinal de igualdade nas diferentes expressões matemáticas. A expressão analítica de uma função é uma equação? O sinal de igualdade numa equação do segundo grau tem o mesmo valor semântico que o sinal de igualdade quando escrevemos a lei de formação de uma função quadrática? Sabemos que não, mas o aluno construiu este conhecimento? Podemos resolver uma equação a partir do que é conhecido sobre funções? A resolução analítica é sempre mais correta do que a encontrada por investigação ou através do uso de recursos computacionais? Estes são alguns dos questionamentos importantes a serem feitos pelo professor interessado em estudar a questão desta pesquisa.

Uma crítica perene dos professores universitários que lecionam disciplinas clássicas como Cálculo I é que alunos chegam a este curso acreditando haver um número limitado de funções (somente as que conhecem do Ensino Médio) como confirmam as pesquisas de Rezende (2003) e que todas são bem-comportadas, isto é, de Classe C^{∞}, fato que diverge completamente da realidade se estuda mais amplamente o campo das funções em Matemática.

A grande maioria das funções tem aspectos bem distintos de retas, parábolas, curvas logarítmicas ou ondas periódicas como as cossenóides, além inúmeras serem descontinuas e em sua maioria, não integráveis segundo Riemann. Esta realidade precisa chegar aos alunos do Ensino Médio, salvo conceitos advindos do cálculo, a fim de não se perder o foco de uma das funcionalidades da Matemática: desenvolver o raciocínio lógico promovendo o espírito investigativo e a capacidade de produzir argumentos convincentes, como lemos em Brasil (2018).

Quando abordado na óptica da composição, e uma operação entre funções, o estudo da Função Modular é conhecido, tradicionalmente, por professores e alunos, como um dos mais difíceis do Ensino Médio. Desta forma, professores e materiais didáticos nacionais quando abordam(vam) o tema, o faz de forma rápida, logo após a definição de valor absoluto, apresentando a função modular de domínio e contradomínio IR, com lei de formação $f(x) = |x|$, como uma extensão do estudo da Função Afim. Em geral a abordagem é discreta, de forma muito superficial, acarretando o impedimento da compreensão mais ampla do tema como a possibilidade de desenvolver em sala de aula as transformações geométricas ocorridas quando sua lei de formação tem seus paramétrios alterados, como por exemplo em famílias de funções reais de variável real, definidas por $f(x) = |x+a| \; ou \; f(x) = |x| + a$, sendo *a* também um número real.

Nossa proposta de ensino de Função Modular, está centrada na metodologia ativa da aprendizagem por investigação[2] a fim de que o aluno consiga compreender as relações entre conceitos e procedimentos vindos de diferentes campos da Matemática (como álgebra, topologia, geometria), promova mais reflexão e menos memorização em sala de aula, contribua para que o aluno torne-se mais atuante e faça matemática em sala de aula, para unir os conhecimentos matemáticos, tecnológicos e científicos, investigue, conjecture, modele, aplique (ou crie) um método de resolução e teste resultados, entre outras.

São competências especificas de Matemática para o Ensino Médio segundo Brasil (2018):

(1) Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos

(2) Articular conhecimentos matemáticos ao propor e/ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo

(3) Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos em seus campos, para interpretar, construir modelos ou resolver problemas em diversos contextos, analisando resultados e adequação das soluções propostas de modo a construir uma argumentação consciente

---

[2] É uma metodologia baseada na problematização, elaboração e teste de hipóteses, seja por meio da pesquisa, seja por meio da experimentação. O papel do professor é definido como aquele que desperta o interesse do aluno para desvendar situações com base no pensamento científico.

(4) Compreender e utilizar os diferentes registros de representação na busca de solução e de comunicado dos resultados

(5) Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas empregando tecnologias digitais e verificando uma demonstração cada vez mais formal, na validação de algumas das conjecturas

Para estar em consonância com as competências descritas acima, com a definição e com as difíceis interpretações do conceito de módulo o trabalho trás uma articulação entre a linguagem da álgebra e a geometria através do conceito de distância. Esta abordagem permite encontrar soluções de equações e inequações modulares com a utilização do Software GeoGebra por investigação e familiarizar o aluno com as possíveis interpretações geométricas que os elementos ´que habitam` no IR^2, como por exemplos a norma euclideana e as ´bolas' em geral, possuem. Acreditamos que esta abordagem é muito mais encorajadora para o ensino e aprendizagem do tema do que as apresentações tradicionais focadas apenas em longas resoluções algébricas de equações ou inequações modulares.

Além de proporcionar mais discussões nas aulas de matemática e a possibilidade de trocas entre os alunos e professores, associar as funções à resolução de equações a partir do recurso tecnológico permite ganho quantitativo de tempo e assim o professor fica com mais tempo livre para atender individualmente os alunos ou aos grupos, podendo aprofundar o assunto nos grupos de alunos mais interessados pela matemática ou esclarecer dúvidas que venham aparecer.

Nosso trabalho propõe uma série de atividades envolvendo função modular para o Ensino Médio com uso de tecnologia digital, a fim de que transformar o ambiente virtual de aprendizagem usado em um laboratório investigativo. Durante a aplicação das atividades e a elaboração da nossa sequência didática ao longo do texto, sugerimos o uso do software de Geometria dinâmica GeoGebra, por ser um software gratuito disponível para todos os sistemas operacionais de computadores e celulares, que apresenta uma boa interface e uma rápida curva de aprendizagem, por ser altamente interativo. As atividades são ilustradas com os seus respectivos protocolos de construção disponível no próprio GeoGebra, e que fornece o passo a passo da construção detalhada de cada atividade.

No **segundo capítulo**, a BNCC é apresentada e são analisadas, os conteúdos e as habilidades que podem ser desenvolvidas no Ensino Médio através do ensino e da aprendizagem das funções elementares.

No **terceiro capítulo**, descrevemos como o tema função modular é apresentado em alguns livros didáticos de Matemática para o Ensino Médio aprovados pelo PNLD a fim de ratificar a importância e inovação de nossa abordagem para o tema.

No **quarto capítulo** são apresentadas as atividades para o ensino da função modular, mostrando a interligação entre as funções apresentadas ao longo do Ensino Médio e outros temas da Matemática, como o conceito de direção e ordenação na reta a partir de um número real fixo, a resolução de equações e de inequações modulares em IR, as relações com Geometria Analítica e a tecnologia digital como ferramenta que auxilia professores e alunos a desenvolverem suas potencialidades.

No **quinto capítulo**, outras aplicações importantes envolvendo valor absoluto e de funções modulares são apresentadas, algumas delas podem ser ensinadas no Ensino Médio Regular, mas indicadas para serem mais bem exploradas no Ensino Médio Técnico, em iniciações cientificas júniores ou em aulas de aprofundamento. As ideias das atividades também são vistas como importantes de serem discutidas nos cursos de formação inicial do professor de Matemática, como a busca de raízes irracionais por aproximações, o uso de métodos interativos simples ou a manipulação das leis de formação da função gerando movimentações de seus gráficos no plano cartesiano.

No **sexto capítulo** apresentamos as considerações finais.

2 AS FUNÇÕES NA BNCC DO ENSINO MÉDIO E OUTROS TÓPICOS QUE JUSTIFICAM A INSERÇÃO DAS FUNÇÕES MODULARES NOS CURRICULOS

O fragmento abaixo, reforça o nosso argumento sobre a inclusão do tema Função Modular no Ensino Médio, pois além de possibilitar a revisão das Funções Afim, Quadrática, Exponencial, Logarítmica e as Funções Trigonométricas, permite que o aluno: (1) faça uma retomada das principais propriedades que caracterizam cada uma dessas funções, (2) revisite, com auxílio do aparato computacional seus gráficos e parta para o estudos mais complexos envolvendo as funções, como a análise gráfica de funções resultantes das composições entre elas, (3) analise famílias de curvas, interpretando qualitativamente as transformações sofridas por um gráfico, a partir de uma função dada e (4) associe o tema a diversos outros temas como: proporcionalidade, na Aritmética; as transformações no plano na Geometria; na interpretação analítica das movimentações financeiras no âmbito da Educação Financeira; os fenômenos biológicos e biogeoquímicos na Biologia; os diversos padrões modelados por funções nas Artes Visuais; nas corretas associações às funções de assuntos como cinemática, dinâmica, teoria da gravitação, termometria, calorimetria, a teoria dos gases, a eletrostática, a eletrodinâmica entres outros presentes na Física desenvolvida na Educação Básica.

> Relações e inter-relações estão presentes em muitas situações reais nas quais se aplica a Matemática. As relações estão presentes em problemas que envolvem a proporcionalidade entre duas ou mais grandezas, escalas, divisão em partes proporcionais, que tratam da interdependência entre grandezas. Dessas relações, evolui-se para a noção de função, uma noção integradora da Matemática. Os movimentos de figuras, como as reflexões em retas, rotações e translações, podem ser expressos por funções, em trabalhos no plano cartesiano, por exemplo. (BRASIL, 2018, p.27).

Uma investigação natural é procurar saber como o professor desenvolverá os diversos tópicos envolvendo as funções no Ensino Médio, seguido de questionamentos como: (1) quais objetivos a serem alcançados pelo aluno devem ser realmente priorizados pelo professor? e (2) caso o professor encontre qualquer dificuldade de realização de seu plano de trabalho, seja por falta de tempo extra ou aparato tecnológico nas escolas, quais estratégias poderão ser repensadas a fim de que o aluno possa conquistar, gradativa e plenamente, a autonomia frente aos objetos do conhecimento definidos para o estudo e a aprendizagem das funções? Vejamos a seguir como as diversas classes de funções são apresentadas na BNCC.

2.1 Função Afim

2.1.1 Construção de modelos para resolver problemas

> (EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do quotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, incluindo ou não tecnologias digitais.

> (EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

2.1.2 Representação algébrica e geométrica

> (EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.

2.1.3 Investigar e identificar padrões representados por função afim

> (EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais do 1º grau para representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não à softwares ou aplicativos de álgebra ou geometria dinâmica.

2.1.4 Relação entre progressão aritmética (PA) e função afim

(EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

2.2 Função Quadrática

2.2.1 Construção de modelos para resolver problemas

(EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

2.2.2 Representação algébrica e geométrica

(EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.

2.2.3 Investigar e identificar padrões representados por função quadrática

(EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau.

2.2.4 Pontos de máximo e mínimo

(EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.

2.2.5 Variação da área e do perímetro de polígono regular

(EM13MAT506) Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.

2.3 Função Exponencial

2.3.1 Resolver e elaborar problemas, inclusive de matemática financeira

(EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.

2.3.2 Relação entre função exponencial e progressão geométrica

(EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

2.4 Função Logarítmica

2.4.1 Resolver e elaborar problemas, sobre matemática financeira, pH, radioatividade, terremotos

(EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros. Relação entre função exponencial e progressão geométrica.

2.4.2 Comparar e analisar os gráficos das funções exponencial e logarítmica

(EM13MAT403) Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.

2.5 Funções Trigonométricas

2.5.1 Identificar e comparar características nas funções trigonométricas

(EM13MAT404) Identificar as características fundamentais das funções seno e cosseno (periodicidade, domínio, imagem), por meio da comparação das representações em ciclos trigonométricos e em planos cartesianos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

2.6 Outros Tópicos importantes

2.6.1 Erro absoluto e Erro relativo

Encontramos nas habilidades, listadas ao longo das linhas a seguir, outras oportunidades para relacionarmos tanto a definição algébrica formal de módulo quanto as interpretações geométricas associadas a distâncias ou a comprimentos de segmentos orientados. No campo da análise numérica, de acordo com Santos (1977), o domínio do conceito de valor absoluto no cálculo de erros absolutos e a inserção de como são feitos os arredondamentos e truncamentos estão diretamente relacionados não só a definição de módulo, mas também às representações na reta orientada. Veja:

Definição 1: Erro absoluto - Quando se substitui um valor *a* por um outro valor aproximado *a´*, *a ´≠a*, diz-se que o erro absoluto cometido é $\Delta = |a - a'|$. O erro é, pois, a diferença entre o valor exato e o valor aproximado, que é chamado de absoluto, quando tomado em módulo.

Definição 2: Erro relativo da aproximação – Chama-se erro relativo cometido a um valor *a*, quando este é aproximado por *a´*, ao quociente positivo $\delta = \left|\frac{\Delta}{a}\right|$. É o quociente entre o erro absoluto e o valor exato.

A partir destas duas definições, possíveis atividades desenvolvidas por professores, podem ser aplicadas em sala de aula com o intuito de preparar terreno para atividades futuras que envolverão equações e inequações modulares, explorar tecnologia simples como a calculadora cientifica presente em smartphones, a comunicação entre os alunos, o hábito do registro de dados de uma experiência em aulas de matemática e a consolidação da aprendizagem através dos cálculos pedidos. Um exemplo de atividade: "Determinar a medida da área de diferentes pratos circulares que estão sobre a mesa, usando aproximação inteira, decimal, centesimal e milesimal para π. Em seguida calcule o erro relativo ao admitir π com as primeiras dez casas decimais". Como cada grupo de alunos pegará pratos com medidas de raios diferentes, valores distintos das áreas serão encontrados e no cálculo do erro absoluto e do erro relativo, os alunos poderão conjecturar sobre a relação entre as diferentes medidas dos raios e das áreas em relação aos valores dos erros encontrados. Os alunos também podem relacionar os dados com gráficos que associam as relações entre as medidas dos raios e das áreas dos pratos e fazer a interpretação da medida dos erros encontradas com o comportamento dos gráficos obtidos. Atividades desta natureza contemplam a habilidade EM13MAT313[3] a seguir e permite fazer link direto com tecnologia digital através do uso de softwares livres, como o GeoGebra.

Em relação ao erro absoluto, Santos (1977) afirma que muitos autores costumam defini-lo como a diferença E=*a* – *a´*, que neste caso poderá ser dotada de sinal positivo ou negativo. Como raramente precisamos considerar o sinal da diferença e sim o valor da ordem de grandeza, adotamos a definição 1 acima. Normalmente, como não se conhece o valor de *a*, o erro absoluto é indeterminado. Trabalha-se então com uma cota superior ε do erro absoluto, isto é $\varepsilon \geq \Delta$. Assim podemos dizer que $\Delta = |a - a'| \leq \varepsilon$ o que quer dizer que *a´* é o valor aproximado de *a* com erro absoluto não superior a ε. Note que os conceitos mais elementares de topologia na reta estão presentes nessa definição, conceitos estes que se revelam na educação básica através dos conceitos de conjuntos abertos, fechados, compactos, cotas, ínfimo e supremo etc., na figura dos intervalos reais e da ideia de

---

[3] Resolver e elaborar problemas que envolvem medições em que se discuta o emprego de algarismos significativos e algarismos duvidosos, utilizando, quando necessário, a notação científica.

módulo como distância, neste caso podendo ser traduzido por "o quão perto *a´* está próximo de *a*", evocando a ideia intuitiva de limite. Obviamente que são conceitos que devem ser do domínio do professor e não para serem apresentados a alunos do Ensino Médio. Não interessa a alunos do Ensino Médio saber que o subconjunto A de IR tal que A= [3, 5[seja limitado ou B=[-1/2, 4] seja um compacto ou que toda cobertura aberta possua uma subcobertura finita. Mas, discussões acerca da localização e ordenação dos reais, cardinalidade ou de irracionais na forma de radicais presentes nestes intervalos são importantes para este nível de escolaridade.

Já em relação ao erro relativo, como normalmente o valor de *a* não é conhecido, e sabemos que deve ser próximo de *a´* se estamos buscando boas aproximações, costuma-se também trabalhar com uma cota superior para erro relativo ∂, calculada sobre a aproximação $\partial = \left|\frac{\varepsilon}{a'}\right|$, com $\partial \geq \delta$ e onde ε é uma cota superior de erro absoluto, adequada. A substituição de *a* na definição de erro relativo por *a´* no denominador é justificável justamente porque, em geral, escolhe-se uma aproximação *a´* para *a* tão perto o quanto se queira de *a*. Assim, *a*≅*a´*, caso normalmente encontrado na prática. O erro relativo tem por finalidade, dar uma ideia do grau de influência do erro no valor desejado, pois o erro absoluto simplesmente não traduz nada se não soubermos a ordem de grandeza do valor calculado. Estas discussões são muito interessantes de serem levadas às turmas do Ensino Médio, sobretudo nas classes da modalidade Ensino Técnico e Tecnológico[4].

> (EM13MAT314) Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas compostas, determinadas pela razão ou pelo produto de duas outras, como velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.

Neste caso, trabalhar com estimativas de distâncias por exemplo, deve vir acompanhado do uso da criticidade e o professor pode ser o condutor de importantes diálogos em aulas de Matemática. Por exemplo: "Admitindo distâncias

---

[4] Fica aqui uma crítica em relação a BNCC, que ainda não definição as metas para o desenvolvimento curricular da Matemática nesta modalidade de ensino. Deve-se realmente adotar para esta modalidade as mesmas competências e habilidades do Ensino Médio regular? Acreditamos que não.

lineares e não sobre arcos na casca esférica da Terra, responda: A cidade de Niterói fica perto da cidade do Rio de Janeiro?” A reposta irá depender de um referencial ou do contexto no qual a pergunta está inserida. Em geral, outras distâncias precisam ser inseridas no problema para que a resposta seja mais assertiva. Uma pessoa que habita no bairro do Cajú, por exemplo, colado à ponte Rio-Niterói, responderá que as cidades de Niterói e do Rio de Janeiro são realmente muito próximas. Dirá o mesmo um habitante do bairro Ilha de Guaratiba? Grosso modo, responder à questão passa ser uma tarefa de comparações entre módulos, aqui representados pelas distâncias entre cidades ou em relação a um dado referencial fixo. Além disso, há que se definir qual valor numérico será considerado como um limite para que Búzios e Rio de Janeiro possam ser encaradas como cidades próximas uma da outra.

Discussões como a padronização de medidas ou a forma de definir uma métrica também estão em questão quando pretende-se abordar a habilidade EM13MAT314. A apresentação da existência de distâncias muito pequenas ou distâncias muito grandes, além dos conceitos de macrocosmos e microcosmos, podem ser levados para sala de aula e debates interessantes ao redor (1) da medida; (2) das diferentes formas de medir e (3) de unidades de medida diferentes das tradicionais usuais nos sistemas CGS (centímetro, grama, segundo) ou MKS (metro, quilograma, segundo) aparecerão intuitivamente. Caberá ao professor conduzir bem o diálogo e formalizar junto aos alunos as conclusões chegadas pela classe. Assim, a noção de módulo através da notação científica, da ordem de grandeza, da precisão e do erro são elementos da Matemática que contribuem para um fazer matemático, mesmo que rudimentar, em salas de aula de turmas do Ensino Médio. Por mais que muitos professores possam acreditar que estas habilidades já possam ter sido evocadas, contextualizadas ou completamente contempladas a partir do sétimo ano do Ensino Fundamental II há outras maneiras de abordá-las, principalmente segundo às diferentes metodologias ativas[5] conhecidas, aspectos da

---

[5] As **metodologias ativas** são estratégias de ensino que têm por objetivo incentivar os estudantes a aprenderem de forma autônoma e participativa, por meio de problemas e situações reais, realizando tarefas que os estimulem a pensar além, a terem iniciativa, a debaterem, tornando-se responsáveis pela construção de conhecimento.

psicologia da aprendizagem[6], sob a ótica da Educação Matemática[7] Crítica ou mesmo da Matemática Problematizada[8].

2.6.2 Sobre o conceito de distância: Definição e exemplos de espaços métricos

Os conceitos matemáticos de métrica e de distância que apresentaremos a seguir são muito importantes, pois são eles que embasam teoricamente a parte matemática dessa dissertação. Optar por apresentar uma visão mais geométrica aliada aos aspectos computacionais requer dizer explicitamente sobre qual definição de métrica estamos desenvolvendo a ideia. Mais a frente, os mesmos conceitos aparecerão com uma linguagem menos formal e será facilmente identificável.

De acordo com Lima (1993) uma **métrica** num conjunto M é uma função $d: M \times M \to \mathbb{R}$, que associa a cada par ordenado de elementos x, $y \in M$ um número real d(x, y), **chamado a distância de x a y**, de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer x, y, $z \in M$:

d1) $d(x, x) = 0$;

d2) Se $x \neq y$ então $d(x, y) > 0$;

d3) $d(x, y) = d(y, x)$;

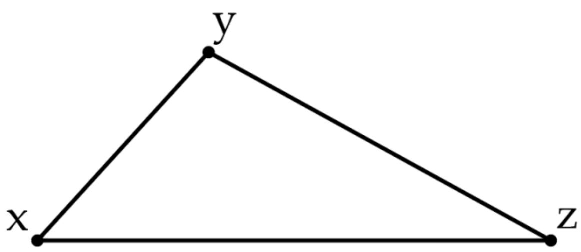
d4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$;

[6] A **Psicologia da Aprendizagem** acredita na interação proporcionada pela educação e valoriza esta troca de saber, de cultura e de experiência entre aluno e professor. Quando o educador entende os funcionamentos das emoções, ele compreende melhor o aluno e pode contribuir socialmente e propor interações saudáveis.

[7] A **Educação Matemática Crítica** propõe um ensino de matemática que objetiva desenvolver a competência democrática, através do desenvolvimento dos conhecimentos matemático, tecnológico e reflexivo**,** podendo assim contribuir para que os objetivos propostos pela Educação sejam alcançados.

[8] Entendemos aqui o termo **"problematizada"** no sentido um ensino de Matemática que seja discutido e questionado pelos professores entre si e com seus alunos**,** ao invés de simplesmente ministrar aulas tradicionais com definição, exemplos e exercícios, com a justificativa de que é sempre ensinado assim. É sugerido a leitura do texto "Por uma Matemática Problematizada: as Ordens de (Re)Invenção, de Victor Giraldo e Tatiana Roque.

Os postulados d1) e d2) dizem que $d(x, y) \geq 0$ e que $d(x, y) = 0$ se, e somente se, x=y. O postulado d3) afirma que a distância $d(x, y)$ é uma função simétrica das variáveis x, y. A condição d4) chama-se desigualdade do triângulo; ela tem origem no fato de que, no plano euclidiano, o comprimento de um dos lados de um triângulo não excede a soma dos outros dois.



$$d(x, z) < d(x, y) + d(y, z)$$

$$d(x, z) < d(x, y) + d(y, z)$$

$$d(x, z) = d(x, y) + d(y, z)$$

Um **espaço métrico** é um par (M, d), onde M é um conjunto e d é uma métrica em M. Na maioria das vezes, salvo quando houver possibilidade de dúvida, diremos simplesmente “o espaço métrico M”, deixando subentendida qual a métrica d que está sendo considerada.

Os elementos de um espaço métrico podem ser de natureza bastante arbitrária: números, pontos, vetores, matrizes, funções ou até mesmo conjuntos. Porém todos estes elementos são conhecidos por pontos de M. São exemplos de espaços métricos:

EXEMPLO 1. A métrica “zero-um”. De acordo com Lima (1993), qualquer conjunto M pode tornar-se um espaço métrico de maneira muito simples. Basta definir a métrica $d: M \times M \to \mathbb{R}$ pondo $d(x,x)=0$ e $d(x,y)=1$ se $x \neq y$. As condições d1) a d4) são facilmente verificadas. O espaço métrico que se obtém desta maneira é, naturalmente, bastante trivial, embora seja útil para contraexemplos.

EXEMPLO 2. Subespaço; métrica induzida. Lima (1993) mostra que se (M, d) é um espaço métrico, todo subconjunto $S \subset M$ pode ser considerado, de modo natural, como espaço métrico: basta considerar a restrição de d a $S \times S$, ou seja, usar entre os elementos de S a mesma distância que eles possuíam como elementos de M. Quando isto é feito, S chama-se um subespaço de M e a métrica de S diz-se induzida pela de M. Esta ideia óbvia nos permite obter uma grande variedade de exemplos de espaços métricos, considerando os diversos subconjuntos deum espaço métrico dado.

EXEMPLO 3. IMPORTANTE. A reta, ou seja, o conjunto IR dos números reais, é o exemplo mais importante de espaço métrico. A distância entre dois pontos x, y pertencentes a IR é dada por $d(x,y)=|x-y|$. As condições d1) a d4) resultam imediatamente das propriedades elementares do valor absoluto de números reais. Esta é a chamada *métrica usual da reta*. A menos que seja feita menção explícita em contrário, é a ela que nos referiremos sempre que considerarmos IR como espaço métrico.

EXEMPLO 4. O espaço euclidiano IR^n. Este exemplo generaliza o anterior. Os pontos de IR^n são as listas $x=(x_1,\dots,x_n)$ onde cada uma das n coordenadas x_i é um número real. Há três maneiras naturais de se definir a distância entre dois pontos em IR^n. Dados $x=(x_1,\dots,x_n)$ e $y=(y_1,\dots,y_n)$, escreveremos:

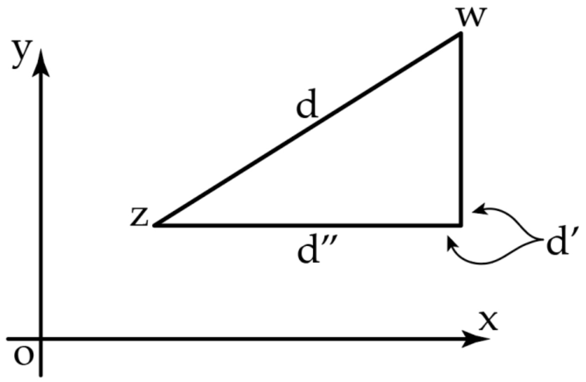
$$d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\dots+(x_n-y_n)^2}=\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right]^{1/2},$$

$$d'(x,y)=|x_1-y_1|+\dots+|x_n-y_n|=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$$ e

$$d''(x,y) = \max\{|x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|\} = \max_{1\le i\le n} |x_i - y_i|.$$

Lima (1993) mostra que as funções d, d', d'': IR^n x IR→ IR satisfazem as condições d1), d2) e d3). A condição d4) é imediata para d' e d", e será verificada para d no Exemplo 7, abaixo. A métrica d é **chamada euclidiana**. Ela provém da fórmula para a distância entre dois pontos do plano (em coordenadas cartesianas), a qual se prova com o Teorema de Pitágoras. Lima (1993) ainda completa que "para considerações de natureza geométrica, d é a métrica natural pois fornece a distância da Geometria Euclidiana". Por outro lado, d' e d" são formalmente mais simples, de manipulação mais fácil. Por isso, e por serem ambas "equivalentes" a d, vale a pena considerá-las, apesar de seus significados ligeiramente artificiais. O caso particular $n=2$ nos dá o plano IR^2, cujos pontos indicaremos com a notação mais simples $z=(x,y)$. Muitas vezes identificaremos IR^2 com o conjunto C dos números complexos, mediante a correspondência $(x,y)\leftrightarrow x+iy$, onde $i=\sqrt{-1}$. A vantagem desta identificação reside no fato de que C possui uma multiplicação com propriedades interessantes. Também para $n=3$, quando obtemos o espaço euclidiano IR^3 da geometria espacial tradicional, usaremos a notação $p=(x,y,z)$.

Uma interpretação intuitiva para a métrica d' pode ser obtida, no caso $n=2$, imaginando que o plano IR^2 é a planta de uma cidade cujas ruas são retas paralelas aos eixos coordenados $x=0$ e $y=0$. Então o menor caminho ligando x a y através das ruas tem comprimento igual a $d'(z,w)=|x-u|+|y-v|$. A figura abaixo fornece uma comparação entre as distâncias $d(z,w), d'(z,w)$ e $d''(z,w)$



Importante registrar para compreensão futura de atividades referidas às inequações.

PROPOSIÇÃO. Sejam d, d' e d" as métricas definidas no Exemplo 4. Quaisquer que sejam x, y ∈ IR^2, tem-se:

$$d''(x,y) \le d(x,y) \le d'(x,y) \le n \cdot d''(x,y).$$

Demonstração. A única dessas desigualdades que não é inteiramente óbvia é a segunda. Ela se prova notando que $\left[d(x,y)\right]^2 = \sum (x_i - y_i)^2$ enquanto

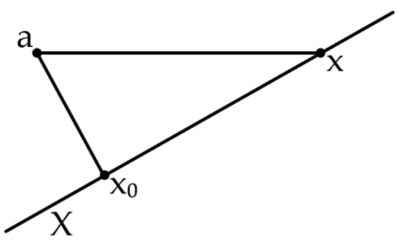
$$\left[d'(x,y)\right]^2 = \sum (x_i - y_i)^2 + 2\sum_{i \ne j} |x_i - y_i| \cdot |x_j - y_j|.$$

Obs.: Quando não dissermos explicitamente que métrica estamos utilizando em IR^n, fica subentendido que se trata da euclidiana.

2.6.3 Distância de um ponto a um conjunto; distância entre dois conjuntos

Sejam a um ponto e X uma reta no plano. O ponto $x_0 \in X$, pé da perpendicular baixada de a sobre X, é o ponto de X que está mais próximo de a. Com efeito, qualquer outro ponto $x \in X$ determina o triângulo retângulo ax_0x e, pelo Teorema de Pitágoras, temos $d(a,x)^2 = d(a,x_0)^2 + d(x_0,x)^2$, onde $d(a,x_0) \le d(a,x)$. Assim, podemos escrever

$$d(a,x_0) = \inf_{x \in X} d(a,x)$$



Generalizando:

Sejam a um ponto e X um subconjunto não-vazio de um espaço métrico M. Definiremos a distância do ponto a ao conjunto X como o número real

$$d(a,X)=\inf_{x\in X} d(a,x)$$

Lima (1993) apresenta o conjunto de números reais não-negativos $\{d(a,x);x\in X\}$, formado pelas distâncias de a aos diversos pontos de X, é não-vazio e limitado inferiormente por zero. Se esse conjunto possuir um elemento mínimo, ele será a distância $d(a,X)$. Mas pode não existir um elemento $x_0\in X$ mais próximo de a do que os outros pontos de X. (Situações desse tipo serão vistas nos exemplos abaixo.) A noção de ínfimo[9] de um conjunto de números reais existe precisamente para generalizar a ideia de elemento mínimo. Pela definição de ínfimo, temos:

1) $d(a,X)\le d(a,x)$ para todo $x\in X$;

2) Se $d(a,X)<c$ então existe $x\in X$ tal que $d(a,x)<c$.

A propriedade 1) diz que o número $d(a,x)$ é uma cota inferior para o conjunto das distâncias de a aos pontos de X. A propriedade 2) diz que nenhum número maior do que $d(a,X)$ é cota inferior desse conjunto.

Equivalentemente: $d(a,X)$ é a maior das cotas inferiores do conjunto $\{d(a,x);x\in X\}$. Logo, podemos reformular a propriedade 2) escrevendo: 2') Se $c\le d(a,X)$ para todo $x\in X$, então $c\le d(a,X)$.

As propriedades 1) e 2) (ou 2') acima caracterizam a distância $d(a,X)$. Assim, quando tivermos de provar que um certo número m é igual a $d(a,X)$, deveremos mostrar primeiro que $m\le d(a,x)$ para todo $x\in X$ e, em seguida, que se $m<c$ então existe algum $x\in X$ tal que $d(a,x)<c$.

Evidentemente, $a\in X\Rightarrow d(a,X)=0$ e $X\subset Y\Rightarrow d(a,Y)\le d(a,X)$.

[9] É a maior cota inferior de um conjunto.

Notemos ainda que $d(a, X) = 0 \Leftrightarrow$ para todo $\varepsilon > 0$ existe $x \in X$ com $d(a, x) < \varepsilon$.

3 OS LIVROS DIDÁTICOS E A FUNÇÃO MODULAR

Na tentativa de encontrar informações acerca de possíveis abordagens sobre Funções Modulares em livros de Matemática do Ensino Médio, sejam elas tradicionais ou de cunho computacional, a 1ª edição de quatro obras, todas datadas de 2020 e aprovadas pelo Ministério da Educação foram analisadas. São seus códigos são 0182P21202, 0159P2120, 0218P21202 e 0226P21202.

Vale ressaltar que em nenhuma destas coleções o tópico Função Modular foi abordado, seja de maneira usual, após as funções afim e quadrática, seja a partir da definição associando-a às funções definidas por várias sentenças ou mesmo através de projetos complementares que venham ilustrar possíveis atividades do campo ligado ao pensamento computacional.

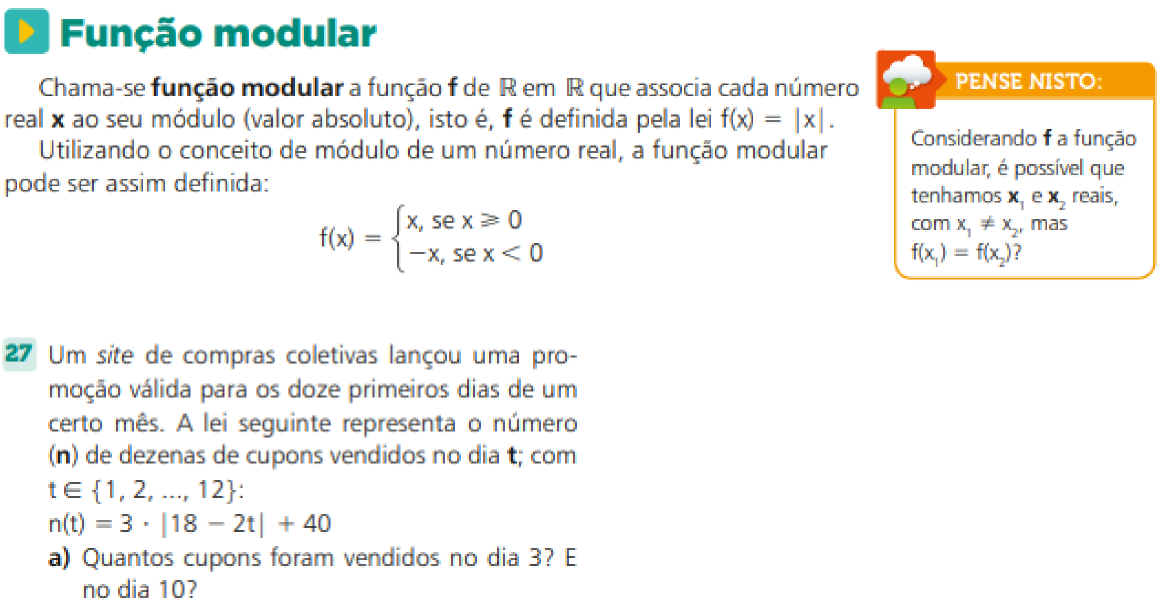
Todas as obras pertencem a área de Matemática e suas tecnologias e nos selos apresentados pelas editoras, cada livro vem com a informação de que a organização de seus conteúdos está de acordo com a Base Nacional Comum Curricular. Isto é, como a BNCC não explicitou a Função Modular no corpo das habilidades da Matemática e suas Tecnologias, acredita-se que os autores entenderam que suas obras deveriam conter somente o que está presente no documento. Ao consultar o manual do professor, nenhuma das coleções sugere que o professor trabalhe com a função modular em sala de aula. Este fato traz mais originalidade a este trabalho, por motivar ainda mais a inserção das tecnologias digitais no estudo da função modular e composições de entre ela e as funções elementares.

Mas... até a segunda metade dos anos 2000, como a Função Modular era apresentada nas obras mais utilizadas por professores de escolas brasileiras aprovadas pelo Plano Nacional do Livro Didático, o PNLD? Três obras, as mais usadas nos últimos anos e com autores mais renomados no mercado editorial e no campo de estudo do Ensino da Matemática, foram analisadas para nos ajudar responder a esse questionamento.

(a) MATEMÁTICA - CIÊNCIAS E APLICAÇÕES – Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Perigo e Nilze de Almeida – Editora Atual

Neste livro, a apresentação de função modular começa com a definição de função formada por várias sentenças e algumas aplicações simples sobre onde este tipo de função pode ser adotada.

Figura 1: Apresentação da função modular



Função modular

Chama-se **função modular** a função **f** de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que associa cada número real **x** ao seu módulo (valor absoluto), isto é, **f** é definida pela lei $f(x) = |x|$.

Utilizando o conceito de módulo de um número real, a função modular pode ser assim definida:

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

PENSE NISTO:

Considerando **f** a função modular, é possível que tenhamos $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$ reais, com $x_1 \neq x_2$, mas $f(x_1) = f(x_2)$?

27 Um *site* de compras coletivas lançou uma promoção válida para os doze primeiros dias de um certo mês. A lei seguinte representa o número (**n**) de dezenas de cupons vendidos no dia **t**; com $t \in \{1, 2, ..., 12\}$:

$n(t) = 3 \cdot |18 - 2t| + 40$

a) Quantos cupons foram vendidos no dia 3? E no dia 10?

Fonte: Dante, 2016

O módulo de um número real é apresentado como uma propriedade da raiz quadrada de um número elevado ao quadrado sem estabelecer qualquer interpretação geométrica, sem fazer alusão às construções geométricas ou mesmo à História da Matemática, evocando os gregos para falar dos irracionais. Não se discute a definição apresentada e nem a relação entre os entes matemáticos presentes. Algumas funções envolvendo módulo aparecem de maneira descontextualizadas e as transformações são apresentadas de formas básicas através das translações de eixos e feito através de poucos exemplos. Resumindo, os autores não promovem as interligações entre Álgebra e Geometria, nem apresentam conexões com outras áreas de conhecimento e não há nenhum incentivo ao uso da tecnologia.

(b) Conecte Matemática Vol. 1 - Coleção Conecte Live – Gelson Iezzi e outros- Editora: Saraiva

Neste livro, a apresentação de função modular, começa com uma aplicação de funções definidas por mais de uma sentença, o cálculo do Imposto de renda em função da renda e da alíquota e a parcela a deduzir em cada faixa de renda. Exemplos interessantes. Veja:

Figura 2: Função definida por mais de uma sentença

Função definida por mais de uma sentença

No início de 2017, o imposto de renda era calculado com base na seguinte tabela:

Tabela de incidência mensal
(a partir do mês de abril do ano calendário de 2015)

Rendimento mensal (em R$)	Alíquota (em %)	Parcela a deduzir (em R$)
Até 1 903,98	—	—
De 1 903,99 até 2 826,65	7,5	142,80
De 2 826,66 até 3 751,05	15	354,80
De 3 751,06 até 4 664,68	22,5	636,13
Acima de 4 664,68	27,5	869,36

Fonte: Receita Federal do Brasil. Disponível em: <idg.receita.fazenda.gov.br/acesso-rapido/tributos/irpf-imposto-de-renda-pessoa-fisica#tabelas-para-atualiza-o-do-custo-de-bens-e-direitos>. Acesso em: 20 jun. 2018.

Fonte: Iezzi et al, 2014

Figura 3: Função definida por mais de uma sentença continuação

A tabela mostra a alíquota de imposto e a parcela a deduzir para cada faixa de rendimento mensal. Para calcular o imposto de renda (IR), é necessário calcular uma porcentagem do salário e, do valor obtido, subtrair uma parcela. Acompanhe os exemplos:

- Um trabalhador com rendimentos mensais de R$ 1 500,00 fica isento do pagamento do imposto, isto é, IR = 0;
- Um trabalhador com rendimento de R$ 2 500,00 no mês tem seu IR assim calculado (veja a 2ª faixa de rendimento mensal da tabela):

  1º) 7,5% de 2 500: $\frac{7,5}{100} \cdot 2500 = 187,50$.

  2º) $187,50 - 142,80 = 44,70$, isto é, IR = R$ 44,70.
- Um trabalhador com salário mensal de R$ 4 000,00 tem seu IR assim calculado (veja a 4ª faixa de rendimento mensal da tabela):

  1º) 22,5% de 4 000: $\frac{22,5}{100} \cdot 4000 = 900$.

  2º) $900 - 636,13 = 263,87$, isto é, IR = R$ 263,87.
- Um trabalhador cujo salário mensal é R$ 8 000,00 tem seu IR assim calculado (veja a última faixa de rendimento mensal da tabela):

  1º) 27,5% de 8 000: $\frac{27,5}{100} \cdot 8000 = 2200$.

  2º) $2200 - 869,36 = 1330,64$, isto é, IR = R$ 1 330,64.

Em geral, se o salário do trabalhador é **x**, seu imposto de renda mensal **y** é assim calculado:

- Se $0 < x \leqslant 1903,98$, então $y = 0$
- Se $1903,99 \leqslant x \leqslant 2826,65$, então $y = 0,075 \cdot x - 142,80$
- Se $2826,66 \leqslant x \leqslant 3751,05$, então $y = 0,15 \cdot x - 354,80$
- Se $3751,06 \leqslant x \leqslant 4664,68$, então $y = 0,225 \cdot x - 636,13$
- Se $x > 4664,68$, então $y = 0,275 \cdot x - 869,36$

Podemos observar que **y** é função de **x** e essa relação é estabelecida por cinco sentenças. Usa-se uma sentença ou outra dependendo do intervalo em que o valor de **x** se enquadra. Esse é um exemplo de **função definida por mais de uma sentença**.

Fonte: Iezzi et all, 2014.

Em seguida, os autores definem módulo como valor absoluto de um número real e os autores mostram a interpretação geométrica do módulo na reta real associando a direções a partir de um referencial, como a distância de um dado número real até a origem. Os autores também apresentam as propriedades de um módulo de um número real para finalmente apresentar função modular como uma extensão do conceito de valor absoluto.

Em relação a dinâmica da apresentação da Função Modular, os autores descrevem o seu gráfico como uma breve receita:

Figura 4: Módulo de um número real

Módulo de um número real

O conceito de módulo de um número real é importante para a Matemática. Ele é necessário, por exemplo, para definir $\sqrt{x^2}$. Se $x \geqslant 0$, $\sqrt{x^2} = x$, e, se $x \leqslant 0$, $\sqrt{x^2} = -x$. Veja os exemplos seguintes:

I. $\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$

II. $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$

III. $\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5$

IV. $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$

V. $\sqrt{0^2} = \sqrt{0} = 0$

Note que $x \geqslant 0$ em (I), (III) e (V), e $x < 0$ em (II) e (IV). Para definir $\sqrt{x^2}$, podemos usar o conceito de módulo de um número real, já apresentado no capítulo 2 e que será aprofundado agora.

Dado um número real **x**, chama-se **módulo** ou **valor absoluto de x**, e se indica por $|x|$, o número real não negativo tal que:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ \text{ou} \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

OBSERVAÇÃO

É possível definir também $|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x > 0 \\ \text{ou} \\ -x, \text{ se } x \leqslant 0 \end{cases}$, pois o oposto de zero é zero.

Isso significa que:

- o módulo de um número real não negativo é igual ao próprio número;
- o módulo de um número real negativo é igual ao oposto desse número;
- o módulo de um número real qualquer é sempre maior ou igual a zero.

Vejamos alguns exemplos:

- $|2| = 2$
- $|0| = 0$
- $|-\sqrt{3}| = \sqrt{3}$
- $|\underbrace{3 - \pi}_{\text{negativo}}| = -(3 - \pi) = \pi - 3$
- $|-7| = 7$
- $\left|-\dfrac{4}{3}\right| = \dfrac{4}{3}$
- $|\underbrace{\sqrt{7} - \sqrt{2}}_{\text{positivo}}| = \sqrt{7} - \sqrt{2}$

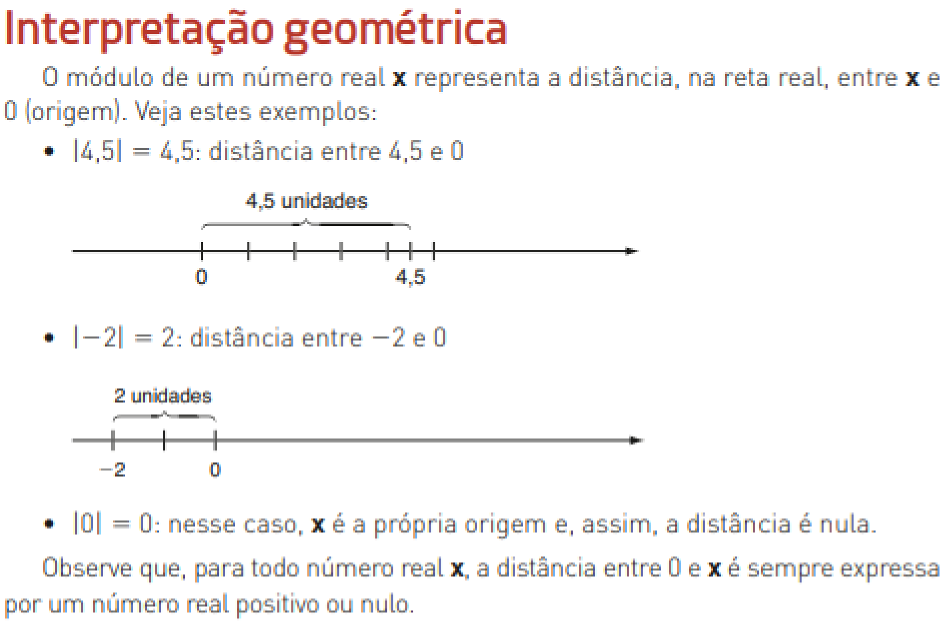
OBSERVAÇÃO

Com a definição de módulo de um número real, podemos escrever: $\sqrt{x^2} = |x|$. Assim, temos:

- $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$
- $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$
- $\sqrt{3^2} = |3| = 3$
- $\sqrt{5^2} = |5| = 5$

Fonte: Iezzi, 2014.

Figura 5: A interpretação geométrica do módulo



Interpretação geométrica

O módulo de um número real **x** representa a distância, na reta real, entre **x** e 0 (origem). Veja estes exemplos:

- $|4{,}5| = 4{,}5$: distância entre 4,5 e 0

- $|-2| = 2$: distância entre -2 e 0

- $|0| = 0$: nesse caso, **x** é a própria origem e, assim, a distância é nula.

Observe que, para todo número real **x**, a distância entre 0 e **x** é sempre expressa por um número real positivo ou nulo.

Fonte: Iezzi et al., 2014.

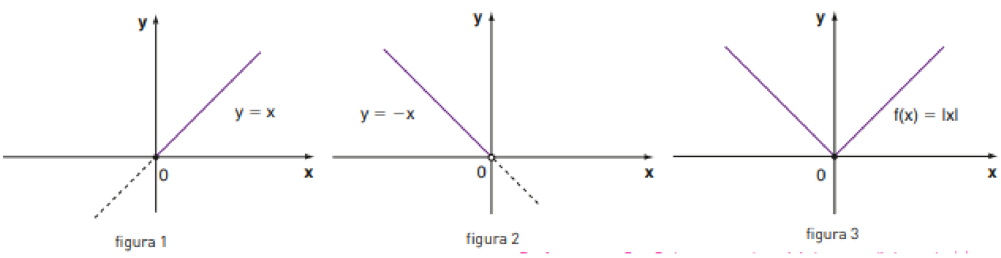
Gráfico

Para construir o gráfico da função modular, procedemos assim:

1° passo: construímos o gráfico da função $f(x)=x$, mas só consideramos a parte em que $x \geq 0$, que é bissetriz do 1° quadrante.

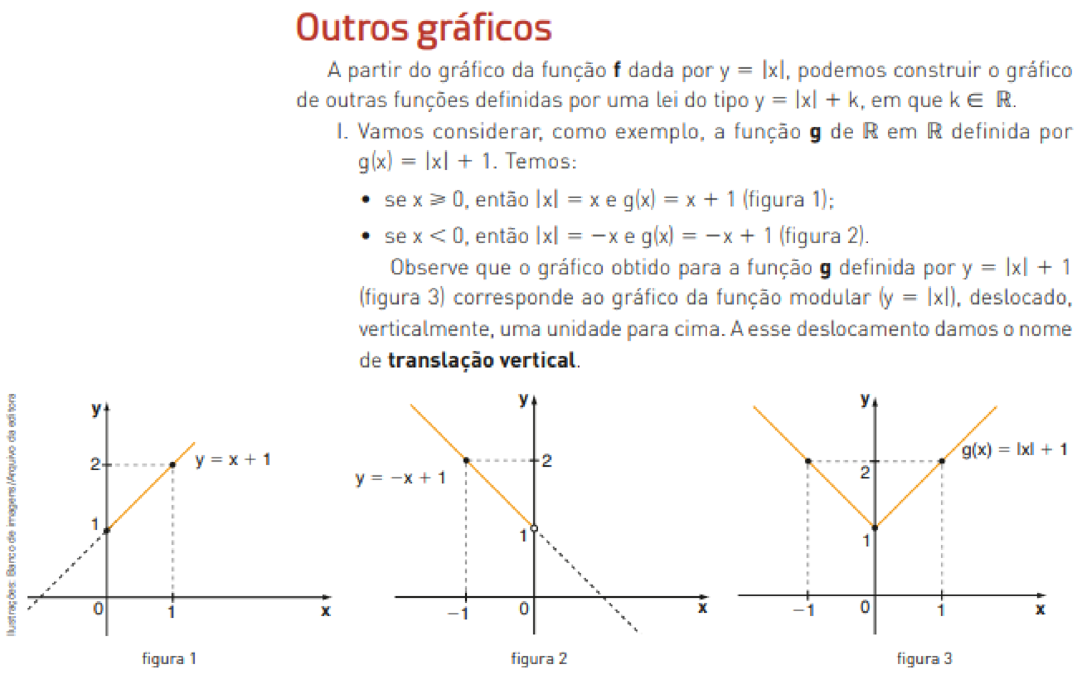
2° passo: construímos o gráfico da função $f(x)=-x$, mas só consideramos a parte em que $x < 0$, que é bissetriz do 2° quadrante.

3° passo: reunimos os dois gráficos anteriores.”



Há um exemplo de como construí o gráfico da função modular com uma translação vertical: $f(x) = |x| + k$, mesmo assim os autores não abordam a interação entre a Álgebra e a Geometria nem as demais transformações que poderiam ser exploradas.

Figura 6: Outros gráficos de funções envolvendo módulo



Outros gráficos

A partir do gráfico da função **f** dada por y = |x|, podemos construir o gráfico de outras funções definidas por uma lei do tipo y = |x| + k, em que k ∈ ℝ.

I. Vamos considerar, como exemplo, a função **g** de ℝ em ℝ definida por g(x) = |x| + 1. Temos:

- se x ⩾ 0, então |x| = x e g(x) = x + 1 (figura 1);
- se x < 0, então |x| = −x e g(x) = −x + 1 (figura 2).

Observe que o gráfico obtido para a função **g** definida por y = |x| + 1 (figura 3) corresponde ao gráfico da função modular (y = |x|), deslocado, verticalmente, uma unidade para cima. A esse deslocamento damos o nome de **translação vertical**.

figura 1 figura 2 figura 3

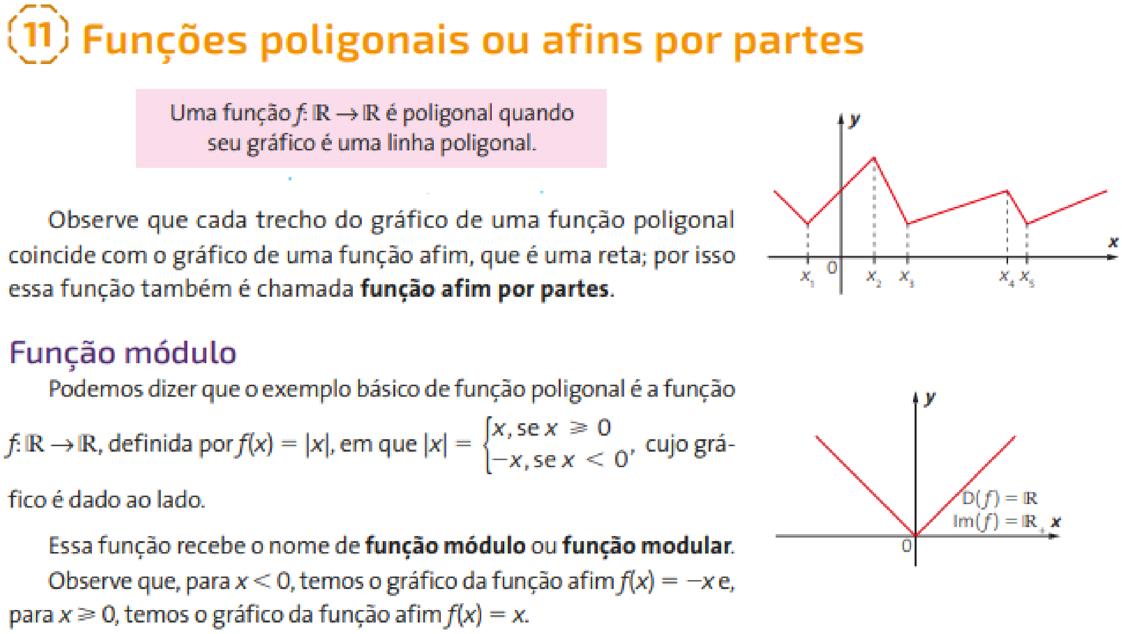
Fonte: Iezzi et al., 2014.

(C) Matemática - Contextos e Aplicações – Luiz Roberto Dante – Editora Ática – 2016 – Volume 1

O livro didático apresenta o assunto função modular logo após a abordagem inicial de conceitos e propriedades de função, e no mesmo capítulo de função afim. O livro define função poligonal como função afim por partes. Depois disso, explora pouco a ideia da função poligonal e o link entre os assuntos parece forçado aos olhos de quem faz uma leitura mais atenciosa, pois o autor opta por definir função modular

como uma como um caso particular básico de uma função poligonal. Sem definir o que seria, para ele, um caso básico.

Figura 7: Funções envolvendo módulo



11 Funções poligonais ou afins por partes

Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é poligonal quando seu gráfico é uma linha poligonal.

Observe que cada trecho do gráfico de uma função poligonal coincide com o gráfico de uma função afim, que é uma reta; por isso essa função também é chamada **função afim por partes**.

Função módulo

Podemos dizer que o exemplo básico de função poligonal é a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x|$, em que $|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$, cujo gráfico é dado ao lado.

Essa função recebe o nome de **função módulo** ou **função modular**.

Observe que, para $x < 0$, temos o gráfico da função afim $f(x) = -x$ e, para $x \geqslant 0$, temos o gráfico da função afim $f(x) = x$.

Fonte: Dante, 2014.

O autor ensina um método para construir o gráfico da função modular determinando as imagens de alguns valores negativos e positivos do domínio, para depois destacar as partes que satisfazem as restrições ao domínio, formando o gráfico da função $f(x) = |x|$. Logo após, alguns gráficos são construídos usando exatamente o que foi descrito anteriormente. Talvez porque sua lei de formação, embora seja definida por várias sentenças, são todas formadas por polinômios do primeiro grau. Mas, também faz uso de ideia geométrica, explorando a translação de eixos e as simetrias em relação ao eixo das abcissas para uma função polinomial do terceiro grau. Veja a seguir:

Figura 8: Gráficos e geometria

Gráfico da função modular

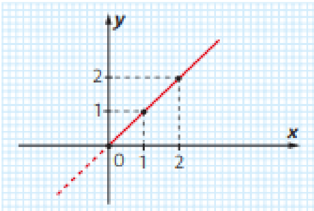
Vamos construir o gráfico da função $f(x) = |x|$:

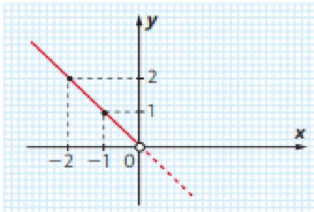
- se $x \geqslant 0 \Rightarrow f(x) = |x| = x$

x	$y = f(x)$
0	0
1	1
2	2

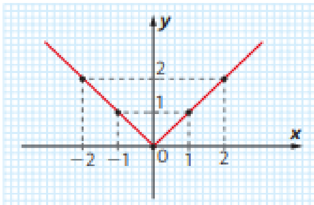
- se $x < 0 \Rightarrow f(x) = |x| = -x$

x	$y = f(x)$
−1	1
−2	2



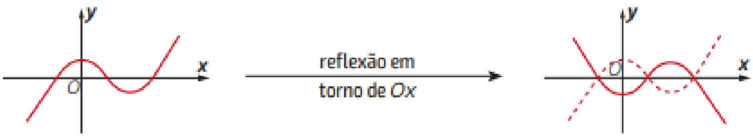


Colocando as duas condições em um só gráfico, temos o gráfico de $f(x) = |x|$:

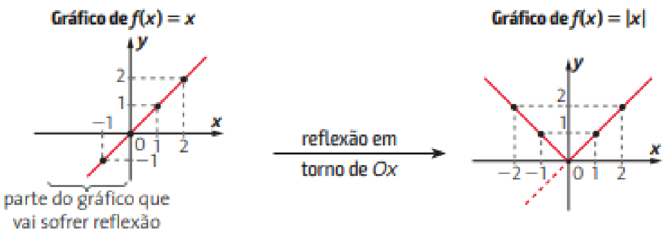


$D(f) = \mathbb{R}$
$Im(f) = \mathbb{R}_+$

Observação: Podemos construir o gráfico de $f(x) = |x|$ a partir do gráfico de $g(x) = x$ usando o conceito de reflexão. A reflexão de um ponto (x, y) em torno do eixo Ox é o ponto $(x, -y)$. Assim, a reflexão de um gráfico em torno do eixo Ox é:



ou seja, os valores de $f(x)$ negativos tornam-se positivos, e vice-versa.
No caso dos gráficos de funções modulares do tipo $f(x) = |g(x)|$, podemos obtê-los fazendo a reflexão da parte do gráfico de $g(x)$ cujas imagens sejam negativas.
Assim:



Fonte: Dante et al, 2014.

No estudo de equações modulares e inequações modulares, são apresentadas de forma exclusivamente algébrica. A apresentação do tema ao longo da seção do livro concentra-se apenas na manipulação algébrica polinômios simples sobre o corpo dos números racionais, através das resoluções tradicionais de equações e inequações do primeiro grau. De toda forma, o conjunto universo sobre o qual deseja-se resolver as equações não foi definido. O livro não explora possíveis conexões entre Álgebra e Geometria e nem a utilização de recursos tecnológicos.

Figura 9: Equações Modulares

8. Resolva as equações:

a) $|x - 5| = 3$

b) $|x^2 - x - 1| = 1$

Resolução:

a) $|x - 5| = 3 \Leftrightarrow x - 5 = 3$ ou $x - 5 = -3$

Resolvendo as equações obtidas, temos:

$x - 5 = 3 \Rightarrow x = 8$

$x - 5 = -3 \Rightarrow x = 2$

$S = \{2, 8\}$

b) $|x^2 - x - 1| = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 1$ ou $x^2 - x - 1 = -1$

- $x^2 - x - 1 = 1 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$

  $\Delta = 9$

  $x' = 2$ e $x'' = -1$

- $x^2 - x - 1 = -1 \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x - 1) = 0$

  $x' = 0$ e $x'' = 1$

  $S = \{-1, 0, 1, 2\}$

Fonte: Dante et al., 2014.

A análise destas três coleções foi intencional. Primeiramente por serem obras aprovadas pelo Programa Nacional do Livro Didático, por serem adotadas pelas escolas públicas do país e por terem na figura de seus autores, nomes respeitados no cenário do ensino e da aprendizagem da matemática há anos. Num segundo momento, e não menos importante que o primeiro, por ainda trazerem em seus conteúdos o tema que defendemos neste trabalho como sendo um tema que poderia ser desenvolvido nas séries do ensino médio de maneira menos formal, tradicional e lançando mão do uso de tecnologia digital e de uma teoria pedagógica que contribua para o crescimento cognitivo dos alunos gerando aprendizagem.

Não é de se assustar que há muitos professores que não compram a ideia de que o assunto seja relevante no tocante à contribuição de uma nova forma de pensar a resolução de um problema matemático, como é o caso da resolução de equações modulares. Talvez pelo fato de alguns professores ainda insistirem no equívoco de não fazerem conexões do tema com outros assuntos dentro da própria matemática e de se servirem de novas ferramentas ou novos caminhos que auxiliarão os alunos debater, trocar ideias em grupos, expor suas dúvidas, dividir conhecimento e construir respostas coletivas.

O capítulo a seguir poderia ser uma sequência de atividades que guiassem o trabalho do professor, porém a ideia é despertar no professor um olhar mais generoso frente as inúmeras possibilidades de abordagem da temática *f*unção modular, acaba sendo mais cara a esta autora, por enxergar no desenvolvimento tecnológico da temática, inúmeros ganhos de ordem pedagógica e cognitiva. Pedagógica por permitir o professor criar sobre a proposta apresentada e cognitiva por parte dos alunos, por permitir que o aparato tecnológico seja uma ferramenta direta que contribui para o desenvolvimento abstrato do aluno frente a aspectos matemáticos importantes, como a teoria das funções elementares. Assim sendo, o desafio maior do trabalho não será apresentar uma teoria matemática presente na escola básica de maneira diferente da tratada, mas talvez, em procurar inúmeras alternativas para o professor desenvolver junto aos alunos, da melhor maneira possível, suas potencialidades.

4 RESUMO TEÓRICO E PROPOSTA DE DINAMIZAÇÃO DO ENSINO COM TECNOLOGIA DIGITAL

4.1 Módulo de um número real

Há diversas maneiras de definir módulo de um número real x, uma delas é a que propõe que o valor absoluto de um número x é o maior dos números x e –x.

$$|x| = \text{máximo}\{-x, x\}$$

Outra abordagem é da raiz com índice par que que está diretamente ligado a definição de valor absoluto.

$$\sqrt[n]{x^n} = |x|, n \text{ é um inteiro positivo par.}$$

Já na educação básica, a partir do sétimo ano de escolaridade, o módulo de um número inteiro x é apresentado como a distância deste número inteiro até o zero.

$$d(x, 0) = |x - 0| = |x| \text{ que é equivalente a } |x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Neste caso, cada número inteiro é interpretado como sendo a abcissa dos pontos marcados sobre a reta, a partir de uma origem O (o zero) e uma unidade de medida, o 1, sucessor do zero. Todos os outros inteiros são construídos a partir do sucessor do zero. Geometricamente estão igualmente espaçados na reta numérica e a orientação positiva está bem definida, isto é, à direita da origem.

Os simétricos são então apresentados como números inteiros que possuem mesmas distâncias em relação à origem. Assim, -3 e 3 são simétricos porque d (3,0) =d (-3,0) ou melhor, $|3 - 0| = |-3 - 0|$.

No estudo de função modular, o impacto dessa abordagem pode facilitar a compreensão da definição de valor absoluto, pois o conceito de módulo ao ser aplicado ao conceito de função proporciona uma abordagem bem articulada e em rede entre Álgebra e Geometria. Ao definir módulo como sendo distância de um número em relação à origem, sua aplicação em equação modular ou inequação modular pode tornar-se mais promissora em termos de ensino e aprendizagem quando, pois a abordagem não foca apenas a intrincadas resoluções algébricas, mas também a interpretações geométricas em IR e IR^2. Por exemplo, a igualdade $|x-3|=2$ pode ser interpretada como sendo x o número cuja distância em relação ao +3 resulta em duas unidades, já que $|x-3|=|x-(+3)|=2$. Como este argumento pode ser desenhado sobre a reta numérica, as soluções x=5 e x=1 aparecem naturalmente.

Note que em muitas situações, usar a definição de distância acaba sendo um método mais simples de resolução de uma equação modular e em termos de análise qualitativa dos gráficos de funções modulares, há uma maior possibilidade de os alunos obterem uma melhor visualização do comportamento gráfico de função e maior compreensão das resoluções de equações e inequações modulares.

Exemplos:

(a) $|1|=1$ e $|-1|=1$ e $|0|=0$

(b) $|x|\leq 4$, sendo x um inteiro representam os números inteiros que distam da origem 4 unidades ou menos. São eles $x\in\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$

4.2 Propriedades do módulo

a) $|x|\geq 0$

b) $|-x|=|x|$

c) $-|x|\leq x\leq |x|$

d) $|x|\cdot|y|=|x\cdot y|$

e) $\sqrt{x^2}=|x|$

f) $|x|^2=x^2$

g) $|x+y|\leq|x|+|y|$ (desigualdade triangular)

h) $|x|-|y|\leq|x+y|$

i) $|x|-|y| \leq |x-y|$

4.2.1 Algumas demonstrações algébricas importantes para o professor

d) $|x| \cdot |y| = |x \cdot y|$, o módulo de um produto é igual ao produto dos módulos

Demonstração

$$|x \cdot y|^2 = (x \cdot y)^2 = x^2 \cdot y^2 = \left(|x|^2 \cdot |y|^2\right) = \left(|x| \cdot |y|\right)^2$$

Como $|x \cdot y| \geq 0$ e $|x| \cdot |y| \geq 0 \Rightarrow |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

g) $|x+y| \leq |x|+|y|$, a desigualdade triangular

Demonstração

Se $x+y \geq 0, |x+y| = x+y \leq |x|+|y|$

Se $x+y < 0, |x+y| = -(x+y) = -x-y \leq |x|+|y|$

Portanto para quaisquer valores reais de x e y:

$$|x+y| \leq |x|+|y|$$

4.3 Função Modular

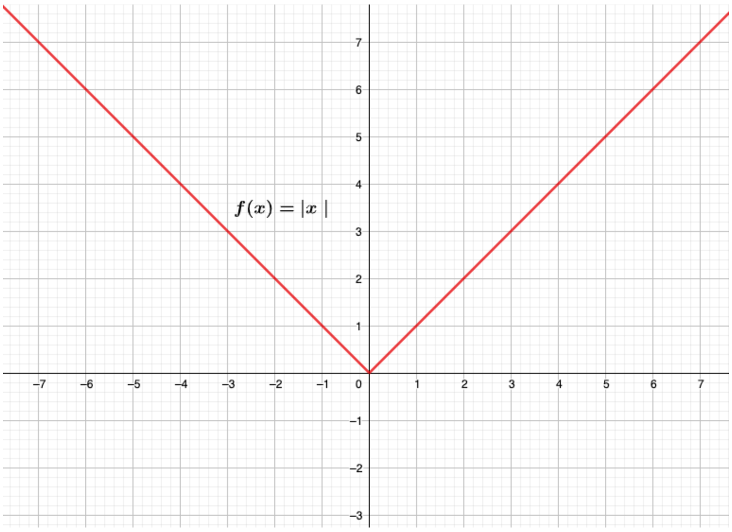
É a função de IR em IR+ que associa a cada x o elemento seu módulo ou valor absoluto $|x|$.

$$f(x) = |x| \leftrightarrow \begin{cases} f(x) = x \text{ se } x \geq 0 \\ f(x) = -x \text{ se } x < 0 \end{cases} \rightarrow Im(f) = \mathbb{R}_+$$

A representação do gráfico da função modular é a união de duas semirretas com origem na origem do plano cartesiano e que são bissetrizes do 1º e 2º quadrantes.

A imagem da função é formada por todos os reais positivos ou nulos, isto é, a função assume somente valores reais não negativos ou o zero.

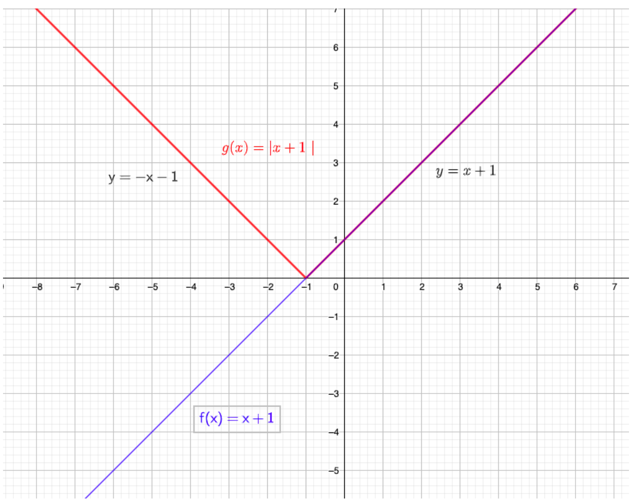
Gráfico 1: f(x) = |x|



Fonte: A autora, 2021.

Alguns gráficos das funções que envolvem modulo e são resultantes da composição entre funções podem ser obtidos traçando-se o gráfico da função original e espelhando-se a parte que possui imagens negativas, tomando o eixo x como o eixo de reflexão. Esta ´brincadeira´ de caráter geométrico, pode ser justificada pela própria definição apresentada no primeiro parágrafo.

Gráfico 2: f(x) = |x + 1|



Fonte: A autora, 2021.

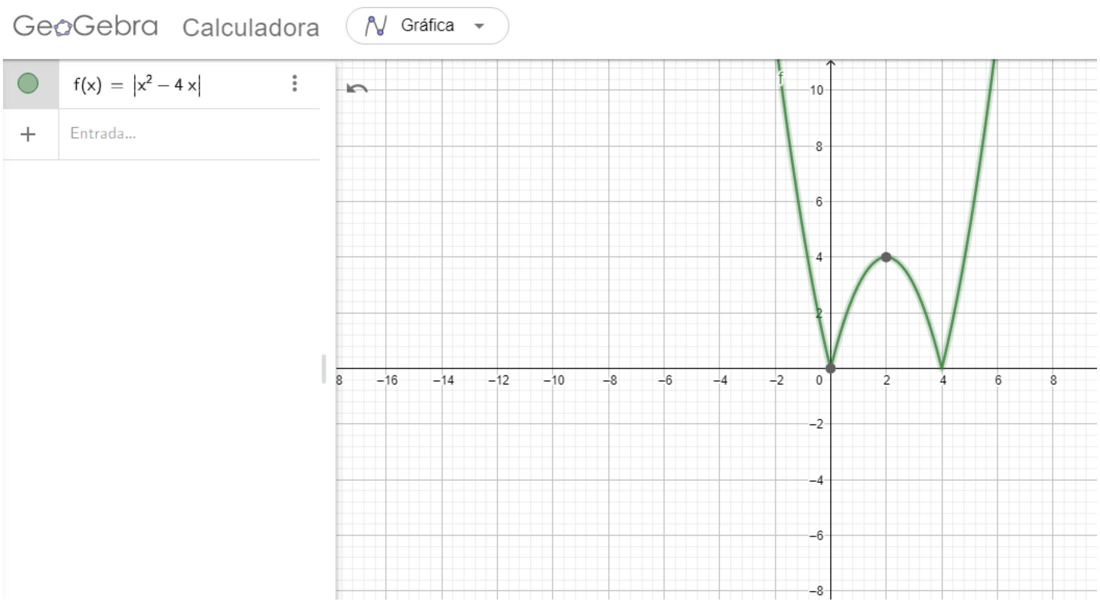
Veja dois exemplos:

(a) $f(x) = |x + 1| = \begin{cases} x + 1, \ \text{se } x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \mathrm{x} \geq -1 \\ -x - 1, \ \text{se } x + 1 < 0 \Leftrightarrow < -1 \end{cases}$

Ou seja, no intervalo $(-\infty, -1)$ o gráfico de $f(x)$ é representado pelo gráfico de $f_1(x) = -x - 1$ e no intervalo $[-1, +\infty)$, pelo gráfico de $f_2(x) = x + 1$.

(b) $f(x) = |x^2 - 4x| = \begin{cases} x^2 - 4x \ ; se \ x^2 - 4x \ \geq 0 \\ -x^2 + 4x \ ; se \ x^2 - 4x \ < 0 \end{cases}$

Figura 10: Estudo da variação do sinal



Fonte: A autora, 2021.

4.4 Equações Modulares e suas relações com as funções

As equações modulares podem ser resolvidas utilizando as seguintes propriedades.

$$\boxed{a \geq 0 \Rightarrow (|x| = a \Leftrightarrow x = a \text{ ou } x = -a)}$$

$$\boxed{|x| = |y| \Leftrightarrow x = y \text{ ou } x = -y}$$

Para alunos da Educação Básica é interesante que a nomenclatura e a simbología matemáticas sejam lidas pelos profesores de modo que imagens, gráficos, tabelas ou simples desenhos possam complementar e unir o que está sendo lido com o que está sendo apresentado em linguagem simbólica da matemática.

(i) Dado um número real positivo ou nulo qualquer a, a distância deste número até a origem tem como valor numérico 0 ou a ou -a. Esta afirmativa pode ser desenhada na reta numérica e verificada para diferentes números reais.

(ii) Dois números reais distintos estão à mesma distancia da origem quando estes números são iguais ou quando são simétricos. Esta afirmativa também é passivel de uma representação pictográfica na reta numérica.

Uma forma inicial que permite fixar bem o conceito é explorar subconjuntos de campos numéricos que os alunos consigam enumerar seus elementos para depois fazer uma abordagem com o campo numérico dos números reais. Por exemplo, propor aos alunos que encontrem números inteiros que satisfaçam $|x - 3| < 2$. Por definição sabemos que significa determinar aqueles inteiros cujas distâncias até o +3 são menores do que 2 unidades e tal fato também pode ser representado pictóricamente, fazendo com que o aluno descubra rápidamente que os valores procurados são 2,3 e 4. Esta abordagem aritmética, e de certa forma topológica na reta, reforça os principais conceitos presentes nos inteiros: módulo e simétrico, lembrando que ambos estão relacionados com a orientação que reta numérica possui.

Também é possivel buscar uma resolução com argumentos na Análise Matemática, mais específicamente na Teoría das Funções Elementares. Encontrar a solução da equação modular $|x-2|=6$ pode ser interpretado como: “Para quais valores do dominio as funções $f(x) = |x - 2|\ e\ g(x) = 6$, possuem imagens iguais?”. Neste caso, pode-se recorrer ao fato de buscar quais números distam de +2, exatamente 6 unidades ou traçar o gráfico de ambas funções num mesmo plano cartesiano e, através de recursos tecnológicos digitais, como o software GeoGebra, encontrar os valores do domínio que possuem imagens iguais. Vejamos alguns exemplos e comparemos atentamente as soluções analíticas e o que alunos e professores podem explorar a partir do uso das funções.

4.4.1 Exemplos

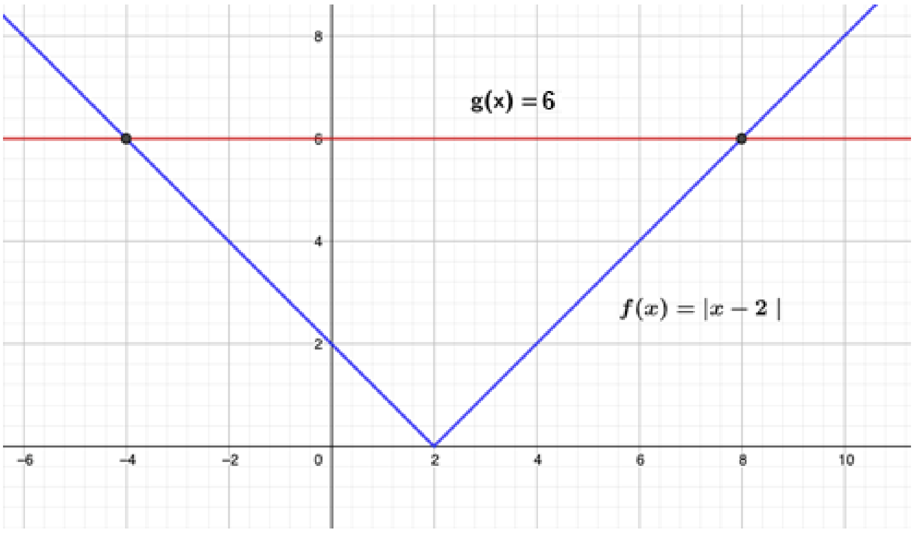
01. Resolva a equação $|x-2|=6$

Usando a definição de módulo e as propriedades destacadas.

$$|x-2| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=6 \Leftrightarrow x=8 \\ \text{ou} \\ x-2=-6 \Leftrightarrow x=-4 \end{cases} \qquad \{S=\{8,-4\}$$

Usando a abordagem gráfica das funções.

Gráfico 3: |x – 2| = 6



1	Função g		$g(x)=6$
2	Função f		$f(x)=abs(x-2)$
3	Ponto A	Ponto de interseção de f, g com valor inicial (–4, 6)	$A=(-4,6)$
4	Ponto B	Ponto de interseção de f, g com valor inicial (8, 6)	$B=(8,6)$

Fonte: A autora, 2021.

(a) O comando que define a função modular no GeoGebra é *abs*

(b) Note que o software determina as coordenadas dos pontos de interseção entre os traços de f(x) e de g(x)

(c) Recomenda-se que o professor discuta o que representa o par (-4, 6), contribuindo através de questionamentos adequados para que o aluno o associe o par ordenado obtido à igualdade *f (-4) =6*

(d) Uma outra abordagem importante que o professor pode apresentar é que para x = -4 a imagem será 6 tanto em f(x) quanto em g(x), e assim ressignificar todas as informações trazidas pela janela gráfica.

02. Resolva a equação $|x-3|=|4x-1|$

Uma questão como a apresentada acima é na maioria das vezes resolvida pelo professor de maneira mecânica e sua solução não passa de uma sequencia de procedimentos sem, se quer, recorrer à definição de modulo ou problematizar o exercicio com uma simples questão: “quando os módulos de dois números reais distintos são iguais?” ou até mesmo voltar à reta numerica e permitir que os alunos respondam “quando dois números reais possuem distâncias em relação ao zero, iguais?”.

O que acontece em muitas salas de aulas brasileiras é a resolução da equação de maneira mecanizada e sem a participação ativa do aluno na interpretação da igualdade apresentada pelo professor.

Veja um exemplo de resolução padrão apresentada por professores ou contidas em livros didáticos através da abordagem tradicional:

$$|x-3|=|4x-1| \Leftrightarrow \begin{cases} x-3=4x-1 \Leftrightarrow x=-\dfrac{2}{3} \\ \text{ou} \\ x-3=-(4x-1) \Leftrightarrow x=\dfrac{4}{5} \end{cases} \qquad S=\{-2/3, 4/5\}$$

A última pergunta descrita acima e que encorajamos o professor trazer para os alunos tem também uma justificativa matemática, bastando observar atentamente a igualdade. Duas trocas de variáveis e a interpretação da igualdade dada como sendo $|w|=|z| \; para \; w=x-3 \; e \; z=4x-1$, permitem associar a linguagem corrente à linguagem matemática sem maiores complicações: “para quais valores reais de w e z temos distâncias iguais em relação ao zero?”. Isso ocorrerá quando w e z tiverem mesmos valores numéricos ou quando w e z forem simétricos.

Esta falta do uso de diferentes interpretrações para o módulo, tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio, faz-nos acreditar no porquê da existência de um discurso recorrente entre professores, afirmando que o tema 'Equações Modulares' é desinteressante e que não passa de uma sequência de algebrismos enfadonhos. Mas poderíamos ser tão categóricos ao dizer que não procurar uma abordagem pedagógica (centrada na linguagem materna capaz de traduzir a linguagem simbólica da matematica) mais adequada ao seu grupo de alunos dificulta a aprendizagem para o tema que estamos apresentando? É uma questão a ser investigada.

Em relação a este trabalho, o que trazemos são as potencialidades que o uso da tecnologia digital possui numa abordagem onde o uso da linguagem materna corrente, na condução da aula de matemática, se faz presente. Assim, questionamento do tipo *"quais as potencialidades investigativas ao resolver a equação acima usando funções?"* permite que o professor explore mais amplamente um exercício cuja abordagem puramente algébrica contribui pouco para a autonomia matemática do estudante e não incentiva o estudante a investigar. O que se espera é a mudança qualitativa e gradual do olhar do aluno para o problema, enquanto procura solucioná-lo. Chamamos aqui de 'problema rico', aquele que propicia questionamentos interessantes e que geram boas discussões entre os grupos de alunos, como:

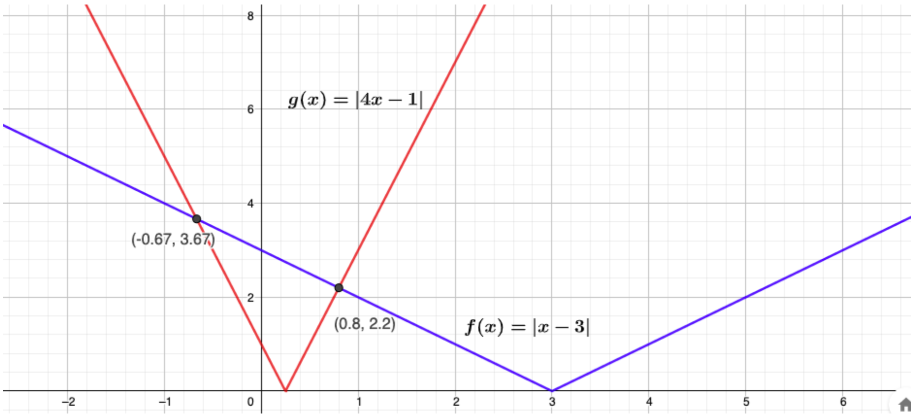
(a) Admitindo $f(x) = |x-3| \; e \; g(x) = |4x-1|$, quantos pontos de intersecção existem entre os traços de seus gráficos? Quais as coordenadas desses pontos?

(b) Faça uma interpretação para a abscissa de cada um dos pontos encontrados anteriormente.

(c) Crie uma estratégia para confirmar que os valores obtidos são as raízes da equação.

(d) A raiz da equação tem alguma relação com as raízes de cada função?

Gráfico 4: |x – 3| = |4x – 1|



1	Função f		$f(x) = abs(x-3)$
2	Função g		$g(x) = abs(4x-1)$
3	Ponto A	Ponto de interseção de f, g com valor inicial (–0.67, 3.67)	$A = (-0.67, 3.67)$
4	Ponto B	Ponto de interseção de f, g com valor inicial (0.8, 2.2)	$B = (0.8, 2.2)$

Fonte: A autora, 2021.

Acompanhemos a solução puramente algébrica. Através dela é interessante que o professor explore as diferentes escritas de um número racional permitindo que os alunos concluam que o 0,8 apresentado pelo software é exatamente o 4/5 e o -0,67 uma aproximação ‘para cima’ de – 2/3. O uso de uma calculadora simples permitirá ao professor explorar através de uma problematização, uma questão importante: “Como saber se as coordenadas apresentadas pelo GeoGebra, representam os valores exatos ou se são aproximações de racionais ou irracionais?” Para isso, espera-se que o professor debata com a classe a importância da verificação do valor encontrado. Este valor é a raiz da equação ou uma aproximação para a raiz da equação? Caso seja uma aproximação, ela é por falta ou por excesso? Vejamos outra situação.

03. Resolva a equação $|3x+9| = 1-x$

Numa abordagem tradicional e puramente algébrica, para que a equação tenha solução é necessário que $1-x \geq 0$, isto é, $x \leq 1$, a fim de que esta igualdade seja verdadeira. Supondo que esta condição seja satisfeita, tem-se:

$$|3x+9| = 1-x \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+9 = 1-x \Leftrightarrow x = -2 \\ \text{ou} \\ 3x+9 = -(1-x) \Leftrightarrow x = -5 \end{cases}$$

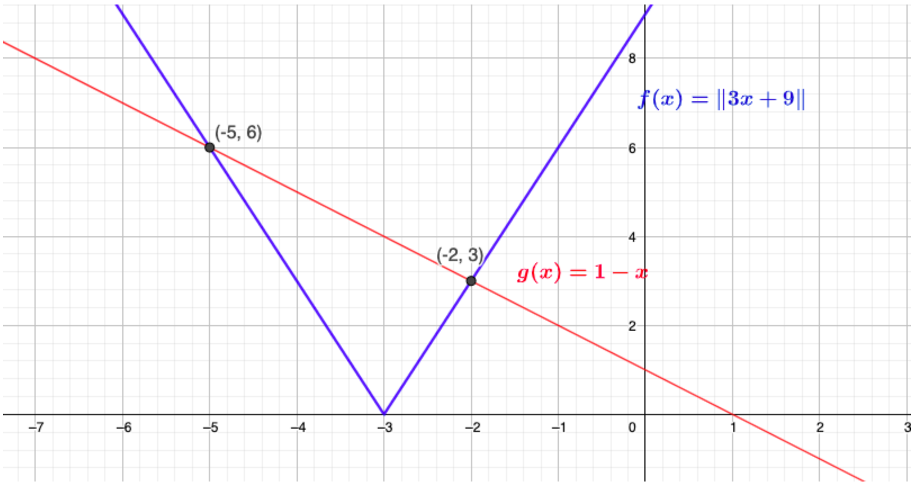
Como os valores obtidos satisfazem à condição inicial ambos são soluções da equação e podemos expressar seu conjunto solução por

$$S = \{-2, -5\} .$$

Mais uma vez a solução apresentada acima parece não gerar discussões em torno do que o problema tem de potencial. Discutir com os alunos o porquê de 1-x ser positivo ou zero com base na definição de módulo é tão importante quanto deixá-los construir os gráficos das funções num software dinâmico e verificar que as ordenadas dos pontos de intersecção entre os gráficos de $f(x) = |3x - 9|$ e g(x)=1-x são 6 e 3 e que esses valores são as imagens de -5 e -2, para ambas as funções, respectivamente.

A solução da equação proposta também pode ser analisada sob a óptica da geometria analítica. Tal solução consiste em evidenciar as coordenadas dos pontos de intersecção entre uma reta com duas semirretas de origem no ponto (-3,0), para que em seguida, seja dado o real significado para a abscissa de tais pontos. Notemos que estas abscissas têm sinais negativos e as ordenadas positivas o que nos permite concluir que os pontos se localizam no segundo quadrante do plano cartesiano e que, portanto, é natural inferir que possuem ordenadas positivas. Os pares ordenados (-5,6) e (-2,3) representam (-5, f (-5)) e (-2, f (-2)) que por sua vez pode ter o sinal da ordenada avaliado através das expressões f (-5) =g (-5) =6 > 0 e f (-2) =g (-2) =3 > 0.

Gráfico 5: |3x + 9| = 1 – x



1	Função f		$f(x) = abs(3x) + 9$
2	Reta g		$g : y = 1 - x$
3	Ponto A	Ponto de interseção de f, g com valor inicial (–5, 6)	$A = (-5, 6)$
4	Ponto B	Ponto de interseção de f, g com valor inicial (–2, 3)	$B = (-2, 3)$

Fonte: A autora, 2021.

04. Resolva a equação $|x-1| + |x+6| = 13$.

As resoluções de equações deste tipo podem ser um complicador para o aluno que não domina o conceito de módulo, que não esteja habituado trabalhar bem com funções definidas por várias sentenças ou que não esteja habituado a conjecturar sobre os possíveis sinais das expressões algébricas $x - 1$ e $x + 6$.

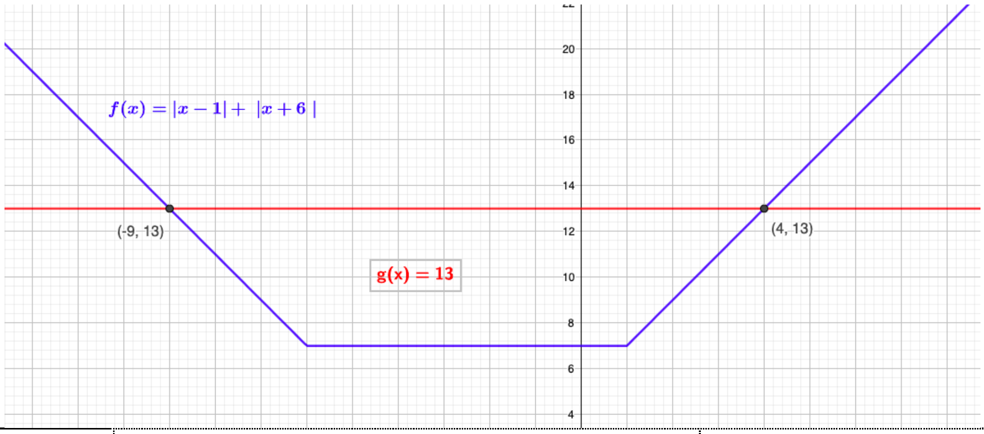
Ao interpretarmos o primeiro membro da igualdade como sendo a função definida por várias sentenças, $f(x) = \begin{cases} 2x + 5 \ ; x > 1 \ e \ x > -6 \\ -2x - 5 \ ; x < 1 \ e \ x < -6 \\ -7 \ ; x > 1 \ e \ x < -6 \\ 7; x < 1 \ e \ x > -6 \end{cases}$ e o segundo membro da mesma equação como sendo $g(x) = 13$, estamos conjecturando sobre os possíveis sinais das expressões algébricas $x - 1$ e $x + 6$, que podem ser ambos positivos, ambos negativos, o primeiro positivo e o segundo negativo e o primeiro negativo e o segundo positivo para determinados intervalos reais e logo após aplicando sobre elas, a definição algébrica de módulo.

No entanto, essa escrita é muitas vezes um obstáculo epistemológico a ser vencido pelo aluno, pois compreender que $f(x) = -7\,, para\; x > 1\; e\; x < -6$ não poderá estar presente na lei de formação da função por conter uma inconsistência lógica é difícil. O professor pode lançar mão de uma análise cuidadosa do intervalo de definição para que $f(x) = -7$ ou mesmo interpretar que a soma de distâncias não resultará em um número negativo.

Assim, resolver a equação modular dada, significa encontrar as raízes da equação $f(x) - g(x) = 0$, segundo as condições de existência para x. Também pode ser interpretada como sendo *a busca para um valor x do domínio comum às duas funções que possuem as mesmas imagens, a saber, 13* ou até buscar números reais que somam 13 e associá-los às expressões algébricas que aparecem na equação.

A busca da solução da equação usando o argumento da análise gráfica de funções também é uma quebra de paradigma algébrico. Em geral é dado um elemento do domínio e pede-se determina a sua imagem. Neste caso, é oferecida a imagem e quer-se descobrir qual elemento do domínio possui tal imagem, isto é, o que queremos determinar são as abscissas dos pontos do tipo (x,13) e o movimento geométrico consiste em “partir” da ordenada 13, encontrar o ponto de intersecção entre as retas e só então determinar a abscissa procurada.

Gráfico 6: |x – 1| + |x + 6| = 13



1	Função f		$f : y = \text{abs}(x-1) + \text{abs}(x+6)$
2	Função g		$g(x) = 13$
3	Ponto A	Ponto de interseção de f, g com valor inicial (–9, 13)	$A = (-9,\ 13)$
4	Ponto B	Ponto de interseção de f, g com valor inicial (4, 13)	$B = (4,\ 13)$

Fonte: A autora, 2021.

Esta discussão num ambiente de aprendizagem virtual é muito mais profícua e problematizadora devida natureza dinâmica do aparato tecnológico digital. O professor experiente reconhece que é difícil que o aluno se encante com uma solução do tipo:

SOLUÇÃO:

(1) Em primeiro lugar deve ser feito os estudos de sinais de $x-1$ e $x+6$

Para $x \leq -6$ temos $x-1 \leq 0$ e $x+6 \leq 0$ então:

$$-x+1-x-6=13 \Leftrightarrow x=-9$$

Como $x=-9$ satisfaz a condição $x \leq -6$, é solução.

Para $-6 \leq x \leq 1$ temos $x+6 \geq 0$ e $x-1 < 0$ então

$$-x+1+x+6=13 \Leftrightarrow 7=13 \text{ (absurdo)}$$

Logo, não há solução no intervalo $[-6,1]$

Para $x \geq 1$ temos $x+6 \geq 0$ e $x-1 \geq 0$ então

$$x-1+x+6=13 \Leftrightarrow x=4$$

Como $x=4$ satisfaz a condição $x \geq 1$, é solução.

$$S=\{-9, 4\}$$

05. Quais números inteiros satisfazem a igualdade $|x^2-5x+5|=1$?

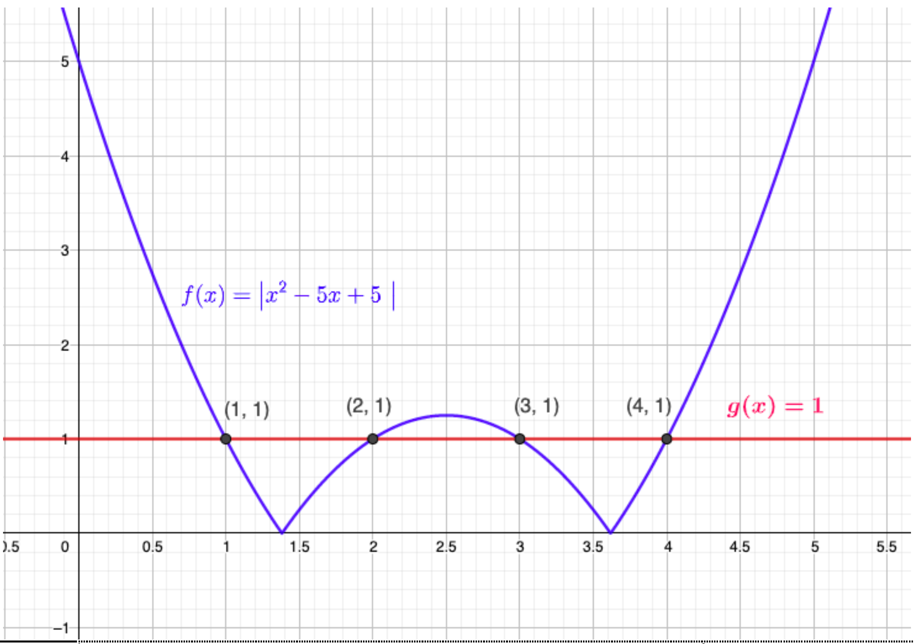
Este enunciado quando interpretado da forma $|w|=1, onde\ w=x^2-5x+5$ resume em determinar os números inteiros w que distam 1 unidade da origem. Estes números podem ser -1 ou +1, porém, cada número inteiro w procurado é da forma x^2-5x+5, o que leva o aluno compreender facilmente que os valores pedidos são soluções inteiras das equações $x^2-5x+5=1$ ou $x^2-5x+5=-1$.

Utilizando o GeoGebra não faremos nada diferente do que apresentamos até aqui. Iremos traçar o gráfico das funções $f(x)=|x^2-5x+5|$ e $g(x)=1$e determinar o valor das abscissas de seus pontos de intersecção. O que torna esse exercício interessante é analisar o aspecto do gráfico da função f(x), que é resultado de uma composição entre funções elementares (uma quadrática e a função modular), discutir os valores de suas raízes e até mesmo estudar a quantidade de interseções entre $g(x)\ e\ f(x)\ quando\ 0 \leq f(x) \leq 1$.

Em termos geométricos, ajudar o aluno a concluir que o gráfico de $f(x)$ é o obtido do gráfico da função quadrática $h(x)=x^2-5x+5$ com a parte negativa rebatida em relação ao eixo x e relacionar esta transformação ao movimento que a função modular opera sobre os elementos do domínio, geram ganhos pedagógicos, pois auxiliam o aluno na compreensão de outros aspectos da teoria das funções, como o estudo geométrico das funções compostas. Por exemplo, comparar e analisar o gráfico de uma dada função real $f(x)$, $f(x-2)\ ou\ f(x+5)$.

Há muitos outros questionamentos que podem ser levantados pelos professores ao aplicar esta atividade, como por exemplo, discutir a impossibilidade da existência raízes negativas ou mesmo raízes irracionais e a quantidade de raízes quando $g(x)=c, para\ 0 \leq c \leq 1,$ num primeiro momento.

Gráfico 7: |x² – 5x+5| = 1



1	Função f		$f(x) = \text{abs}(x^2 - 5x + 5)$
2	Função g		$g(x) = 1$
3	Ponto A	Ponto de interseção de f, g com valor inicial (1, 1)	$A = (1, 1)$
4	Ponto B	Ponto de interseção de f, g com valor inicial (2, 1)	$B = (2, 1)$
5	Ponto C	Ponto de interseção de f, g com valor inicial (3, 1)	$C = (3, 1)$
6	Ponto D	Ponto de interseção de f, g com valor inicial (4, 1)	$D = (4, 1)$

Fonte: A autora, 2021.

4.5 Inequações Modulares

As inequações modulares são igualmente interessantes de serem tratadas no Ensino Médio a partir de uma abordagem computacional usando softwares dinâmicos. Questionamentos matemáticos ricos e de intensão pedagógica cujo objetivo é promover o exercício do raciocínio abstrato dos alunos, podem ser levantados pelo professor ao apresentar uma inequação modular. Tais abordagens vão desde a revisão dos conceitos iniciais de módulo e simétrico de números reais até a análise mais complexa de porções do plano cartesiano que são soluções da desigualdade proposta.

A simples desigualdade $|x| < a$ passa requerer do aluno mais maturidade matemática e cuidado ao conjecturar sobre um problema desta natureza. Estimular o aluno a pensar sobre a solução da inequação a partir do conjunto universo para o qual a sentença está definida é um dos objetivos a serem alcançados quando se trata o assunto computacionalmente. A diversidade dos conjuntos universos atrelados à uma mesma desigualdade acaba por gerar soluções não esperadas pelos alunos e mostrar esta diversidade também não é muito comum nas aulas de matemática. Isto é, mostrar que o conjunto solução de um problema pode variar de acordo com o universo que o problema está inserido não é uma prática comum entre professores da educação básica. Para $|x| < a$ podemos encontrar um conjunto-solução enumerável formado por pontos isolados, um conjunto não enumerável de pontos isolados, um conjunto formado por um par de retas paralelas com origens abertas ou até mesmo um par de planos paralelos com extremidades abertas.

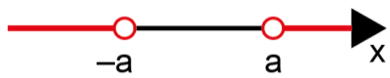
Estimular o aluno com questionamentos interessantes através de recursos computacionais permite que ele amplie sua visão de conhecimento acerca dos conteúdos matemáticos envolvidos na questão e consiga melhorar a compreensão matemática da solução de certos problemas, principalmente os de natureza algébrica. Esta tarefa não é fácil, principalmente para aqueles que não construíram de maneira correta, o significado de x em igualdades como em 3x+2=4–5x, onde o x é uma incógnita ou em igualdades do tipo f(x)=2x-5, onde o x se apresenta como uma variável.

Foquemos na reta numérica, isto é, em U= IR.

Para encontrar a solução de inequações modulares nesse universo é necessária a utilização das seguintes propriedades dos módulos, onde $a \geq 0$, decorrentes da própria definição de módulo.

$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$$

$$|x| > a \Leftrightarrow x < -a \text{ ou } x > a$$



Note ainda que se $a < 0$, então $|x| \geq a, \forall x$ e $|x| < a$ é impossível.

Assim, para U=Z, por exemplo, a solução de $|x| < 4$ é o conjunto discreto S= {-3,-2,-1,0,1,2,3} e para U=IR é o intervalo S=] -4, +4[. Os conjuntos Z e IR são conjuntos universos tipicamente trabalhados com os alunos no Ensino Fundamental.

Com o estudo das funções, no universo U=IR^2, buscar a solução da desigualdade $f(x) = |x| > 0$ é o mesmo que estudar a variação do sinal das imagens de f(x) e destacar os pontos (x, f(x)) = (x, y) do plano cujas ordenadas são estritamente positivas, e a compreensão desta questão é facilitada ao observar através de um desenho gerado por softwares como o GeoGebra, quais pontos do plano satisfazem a restrição proposta pelo problema. A descrição do conjunto gerado pode ser apresentada de várias maneiras, por exemplo, $S = \{(x, y) \in R^2; y = |x|\,, (x \in R)\ \hat{}\,(y \in R_+\ e\ y \neq 0)\}$ ou $S = \{(x, y) \in R\ X\ R_+^* \ /\ y = |x|\ \}$.

Usando a mesma ideia, determinar a solução de $|x| < 4$ é equivalente a estudar a variação das imagens da função $f(x) = |x| - 4$, determinando para quais valores do domínio, encontraremos sempre imagens negativas e não nulas. Importante remarcar que a solução do problema é um subconjunto do eixo das abscissas. Vamos apresentar a seguir, alguns exemplos de exercícios difundidos por professores junto aos alunos de uma maneira tradicionalmente não investigativa[10] como afirmam Ponte, Brocardo e Oliveira (2009).

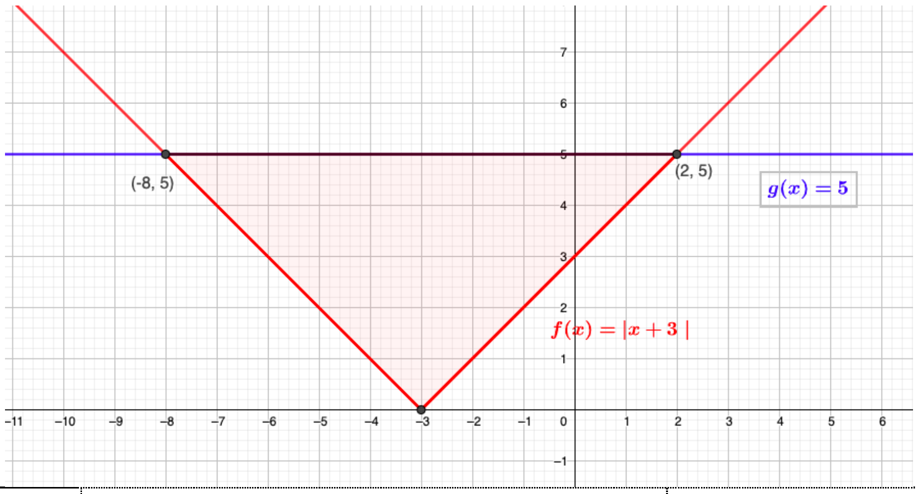
4.5.1 Exemplos de inequações modulares que podem ser levadas às aulas de Matemática usando recursos computacionais como ferramentas para a composição de seus conjunto-solução

Acreditamos que resolver a inequação $|x+3| \leq 5$ deixa de ser um problema desinteressante quando alguns desafios são propostos em sala de aula. É claro que estamos procurando os números reais cujas distâncias ao -3 são menores ou iguais a 5 unidades e que todos os números reais x que satisfazem esta condição formam o conjunto S=[-8, 2]. Porém, nossa proposta é estimular o professor fazer com que o aluno consiga falar (ou escrever) sobre a correta interpretação para a figura abaixo

[10] No sentido de não promover quatro etapas básicas: o **reconhecimento da situação** (a exploração preliminar e a formulação de novos questionamentos), a etapa das formulações das **conjecturas**, a **testagem** dos valores encontrados e o refinamento das conjecturas e pôr fim a **argumentação final,** composta por demonstrações, construção da resposta final e avaliação do desempenho.

quando escrevemos a desigualdade $|x+3| \leq 5$ no quadro e apresentamos a interpretação através do GeoGebra, a partir da figura a seguir.

Gráfico 8: |x + 3| ≤ 5



1	Função f		$f(x) = \text{abs}(x+3)$
2	Função g		$g(x) = 5$
3	Ponto A	Ponto de interseção de f, g com valor inicial (–8, 5)	$A = (-8, 5)$
4	Ponto B	Ponto de interseção de f, g com valor inicial (2, 5)	$B = (2, 5)$
5	Ponto C	Ponto de interseção de f, Eixo X com valor inicial (-3, 0)	$C = (-3, 0)$
6	Função g	Polígono A, C, B	$t1 = 25$

Fonte: A autora, 2021.

O que se quer descobrir é para quais valores do maior dominio de definição de $f(x) = |x + 3|$, suas imagens são menores que as imagens de $g(x) = 5$, também em seu maior dominio de definição. A solução, utilizando o GeoGebra, encontra-se na projeção ortogonal dos pontos que formam a região triangular em vermelho sobre o eixo das abscissas. Esta região representa a porção do plano onde podemos garantir que todas as imagens de f(x) são menores que as de g(x). Isto é, $f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow |x+3| \leq 5$ gerando $S = [-8, 2]$ e o conunto S é aquele que possui todas as ordenadas x procuradas, uma vez que o universo seja IR. A experiência mostra que a estratégia usada pela maioria dos alunos é destacar a porção do traço de f(x) está “abaixo” do traço de g(x) e em seguida determinar todas as abcissas desses pontos.

Na forma tradicional os professores resolvem a questão de uma maneira mecânica como a apresentada a forma apresentada abaixo, que por sinal é a mais difundida nos livros didáticos. Acreditamos, no entanto, que muito desse mecanicismo vêm das não-reflexões acerca das potencialidades que a desigualdade proposta possui quando pensadas no contexto das aulas de matemática da Educação Básica. Diversos conteúdos matemáticos podem ser associados pelo professor ao propor o exercício como a própria definição de módulo, as propriedades decorrentes e a retomada do que foi estudado sobre operações e propriedades válidas no conjunto em que o termo x está definido.

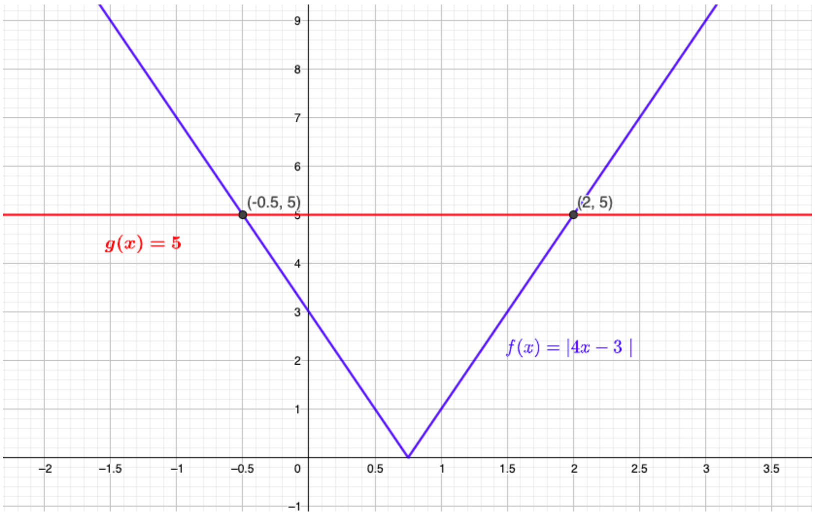
$$|x+3| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq x+3 \leq 5 \Leftrightarrow -8 \leq x \leq 2$$

$$S = [-8,\ 2]$$

02. Resolva a inequação $|4x-3|>5$.

Usando o mesmo raciocínio do item anterior, pretendemos encontrar os valores do domínio cujas imagens obtidas por f(x) são estritamente maiores que aquelas obtidas por g(x).

Gráfico 9: |4x - 3| > 5



Fonte: A autora, 2021.

Grosso modo, queremos determinar a porção do gráfico de f(x) que “está acima” do gráfico de g(x). Algebricamente esta afirmação intenta encontrar as abscissas dos pontos onde $f(x) \geq g(x)$. Isto é: $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow |4x-3| \geq 5 \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{2}$ ou $x \geq 2$. A ideia de analisar criticamente uma expressão analítica se faz mais uma vez presente e o problema proposto gera amplas possibilidades de discussão com os alunos. Já na solução tradicional a partir da definição de módulo, acreditamos que o amplo uso da linguagem oral e da lógica devam ser aplicados a fim de justificar cada passagem, e não é muito comum que esta seja uma prática nas aulas de matemática.

$$|4x-3| > 5 \Leftrightarrow 4x-3 < -5 \text{ ou } 4x-3 > 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x < -\frac{1}{2} \text{ ou } x > 2$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} | x < -\frac{1}{2} \text{ ou } x > 2\right\}$$

03. (ITA 2002) Os valores de $x \in \mathbb{R}$ para os quais a função real dada por $f(x) = \sqrt{5 - \left||2x-1|-6\right|}$ está definida, formam qual conjunto?

Este problema procura o maior domínio de definição da função e como o radicando deve ser positivo ou nulo, o exercício acaba reduzindo-se à resolução de uma inequação modular. É uma questão considerada fácil por professores quando estes analisam globalmente as provas da instituição e é igualmente considerada fácil pelos alunos, lembrando que estes são expostos à um nível de preparo intenso e diferente daqueles que se dedicam ao ENEM ou a vestibulares de universidades privadas ou estaduais de várias regiões do país. Veja:

$$f(x) = \sqrt{5 - \left||2x-1|-6\right|} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 5 - \left||2x-1|-6\right| \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -\left||2x-1|-6\right| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq |2x-1|-6 \leq 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq |2x-1| \leq 11 \Leftrightarrow -11 \leq 2x-1 \leq -1 \text{ ou } 1 \leq 2x-1 \leq 11$$

$$\Leftrightarrow -5 \leq x \leq 0 \text{ ou } 1 \leq x \leq 6$$

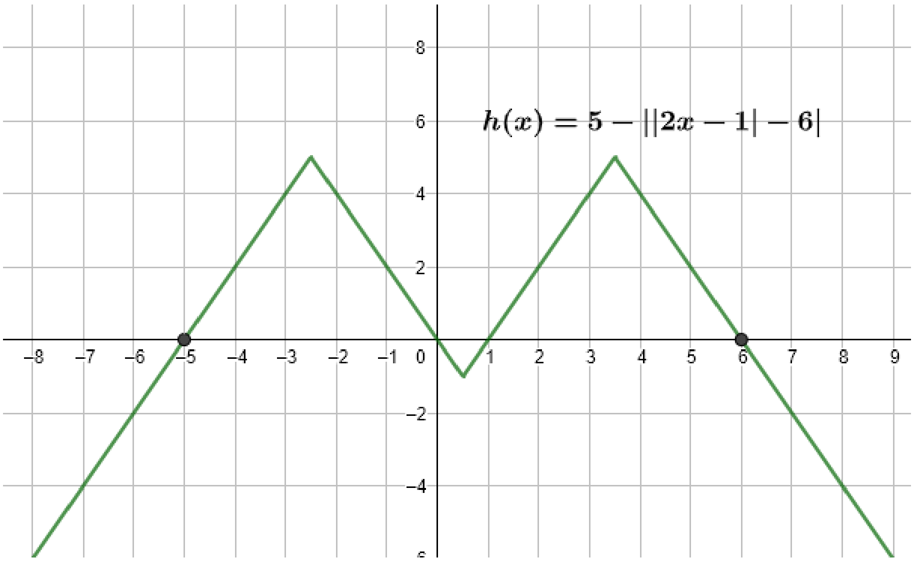
Este é um exercício que a resolução em grupo é muito importante a fim de que os alunos possam trocar informações antes de construírem a solução definitiva. É um enunciado seco, duro, mas que a busca da solução auxiliada por ferramentas computacionais permite uma grande quantidade de questionamentos, intervenção do professor, troca entre os estudantes, uma produção oral acerca da interpretação do enunciado e de uma produção escrita (seja em linguagem corrente ou linguagem matemática) quando os alunos apresentam a resposta final.

Mas... Como podemos levar este problema para a sala de aula ou para os laboratórios de informática de maneira a gerar boas reflexões e discussões entre os alunos visando autonomia? Um possível caminho é estimular o grupo de estudantes com questões instigantes que facilitem a interpretação do enunciado a fim de que eles percebam que encontrar a solução de uma inequação modular é o objetivo principal desta questão, que as restrições impostas pelo índice da raiz ajudarão os auxiliarão determinar qual porção do plano cartesiano precisará ser destacada e a partir dela, encontrar os intervalos onde números reais formam o D_f.

Fazer a análise e a interpretação corretas do gráfico da função $h(x) = 5 - \left| |2x - 1| - 6 \right|$ é uma condição importante para que o aluno tenha sucesso ao determinar a solução do exercicio quando estão expostos à um recurso computacional como ferramenta. Neste caso, reconhecer que determinar o maior dominio de definição da função é obtido para valores x do dominio que possuem $h(x) \geq 0$ e este reconhecimento leva á solução do problema, é o obstáculo epistemológico[11] a ser vencido. Para obter êxito, espera-se que os alunos façam corretamente o estudo da variação do sinal das imagens da função, para depois criar uma estratégia para montar o conjunto solução da inequação. Os valores buscados são aqueles que se encontram nos intervalos reais, sobre o eixo das abscissas, que produzem pontos do gráfico da função que se encontram "acima do eixo Ox", daí: $S = [-5, 0] \cup [1, 6]$.

[11] De acordo com o químico e filósofo da ciência francês, Gaston Bachelard (1884-1962), os **obstáculos epistemológicos** são entraves à aprendizagem, para que a construção do conhecimento científico se efetive.

Gráfico 10: 5 – ||2x – 1| – 6



Fonte: A autora, 2021.

4.6 Questionamentos que geram debates em sala de aula

4.6.1 Transformações no Gráfico de uma Função: o caso da função modular

No estudo das transformações que podem ocorrer com o gráfico de uma função elementar, como a função $f: R \rightarrow R$ tal que $f(x) = |x|$, temos como objetivo neste item, mostrar como o professor pode auxiliar seus alunos na interpretação, visualização e análise do comportamento de outros gráficos de funções, obtidos a partir de um gráfico inicial.

Pelo fato de a temática deste trabalho envolver a função modular é que os exemplos estarão em torno dela e das composições de funções elementares estudadas geralmente no primeiro ano do Ensino Médio. Esta escolha não visa somente o uso da tecnologia, mas também tem o intuito de mostrar ao aluno a existência de gráficos diferentes de retas ou parábolas que passam pela origem ou curvas periódicas.

Como abordar as translações?

Como exemplo ilustrativo para esta afirmação, podemos começar por considerar as funções $f, g: R \rightarrow R$ definidas por $f(x) = |x|$ e $g(x) = |x| + a$ e apresentar os seus gráficos no mesmo plano cartesiano, a fim de que os alunos sejam instigados a descrever as diferenças e semelhanças existentes entre os dois desenhos. Reconhecer que o gráfico de g(x) é o gráfico de f(x) transladado de *a* unidades na direção do eixo Oy, no sentido para cima no caso de *a* positivo ou para baixo no caso de *a* ser negativo, deve ser uma conclusão do aluno e não uma informação dada pelo professor, como nos mostra o senso comum. Da mesma forma, instigar o aluno a justificar o que gerou o deslocamento de um gráfico sobre o plano cartesiano deve ser sempre estimulado pelo professor a fim de que o aluno construa conhecimento e possa transferi-lo quando for resolver outros problemas.

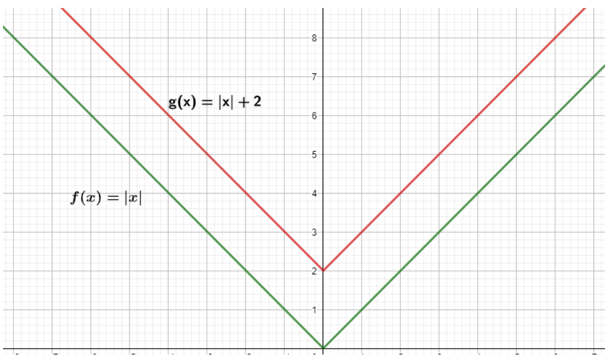
Associar esta conclusão à função original e à escrita matemática da lei de formação da segunda função dão mais sentido aquilo que o aluno encontrará na tela do computador ao observar dois gráficos distintos, como os apresentados na figura abaixo.

Recursos simples, como a construção de uma tabela de valores em que as imagens da função g(x) podem ser vistas como as imagens de f(x) acrescidas ou diminuídas de *a* unidades, auxiliam muito na percepção de que este acréscimo ou decréscimo é fator determinante do deslocamento de f(x) no plano cartesiano, gerando o gráfico de g(x). Em outras palavras, é possível obter g(x) a partir de f(x).

$$g(x)=f\left(x\right)+a=\left|x\right|+a$$

Exemplo: o caso de a=2

Gráfico 11: f(x) + a = |x| + a



Fonte: A autora, 2021.

Apresentar também a equação geral $g(x) = |x| + a$ como sendo uma **familia de curvas** que depende do parâmetro real *a* também não é comum nas aulas de ensino médio e nem está presente nos materiais didátricos sobre o tema.

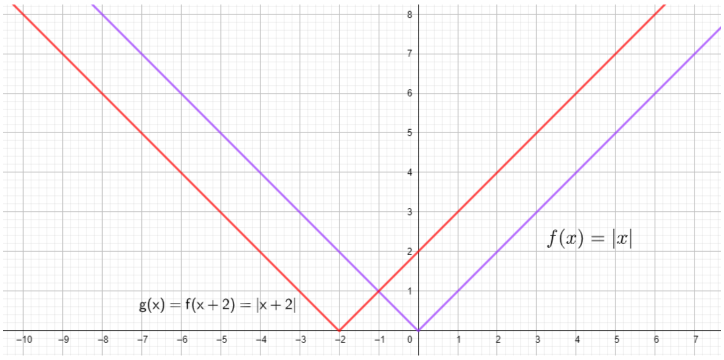
Esta abordagem investigativa facilita o trabalho do professor quando este for criar estratégias para que seus alunos tentem descobrir a lei de formação da familia de curvas que representam o deslocamento de $f(x) = |x|$ na direção do eixo Ox. para a esquerda e para a direita.

$$f(x+a) = |x+a|$$

Espera-se que haja uma transferência de aprendizagem promovida pelo exercicio da transposição didática[12] no sentido de Chevallard, a fim de que o aluno, por experiência da observação, troca entre pares e do exercicio de elaborar conjecturas, infira que a translação de *a* unidades na direção do eixo Ox, para a esquerda se *a* for positivo e para a direita se *a* for negativo, está sintetizada na igualdade acima.

Exemplo:

Gráfico 12: f (x + a) = |x + a|



Fonte: A autora, 2021.

Como abordar as contrações e dilatações?

Da mesma maneira podemos pensar no estudo da expansão ou da contração do gráfico de $f(x) = |x|$ segundo a inserção de um parâmetro multiplicativo *a* que promove o movimento de “abrir” ou de “fechar” o gráfico na direção do eixo Oy.

---

[12] A **transposição didática** é um processo pelo qual o saber produzido no âmbito científico é transposto para o conhecimento construído em sala de aula.

O exercício de inferir para quais valores reais do parâmetro *a* tornam os gráficos da família de curvas da função $g: R \to R \; tal \; que \; g(x) = a.f(x) = a.|x|$ "mais próximos" ou "mais afastados" do eixo Oy[13] (a partir da observação de vários gráficos *plotados* num mesmo sistema cartesiano) é uma tarefa de grande complexidade para alunos do Ensino Médio.

Desvendar o valor do parâmetro e associá-lo ao movimento geométrico do gráfico com exatidão significa vencer uma barreira cognitiva, dar um passo mais largo em direção à abstração matemática e dar um salto epistemológico de grande qualidade no estudo qualitativo das funções reais.

Veja o caso da função definida por $g(x) = 2.f(x) = 2|x|$. Os pontos que formam o seu gráfico podem ser facilmente obtidos a partir da multiplicação de cada imagem da função $f(x)$ por 2, uma vez que $f(b) = b \; e \; g(b) = 2 = 2.f(b)$ para todos os elementos b´s do domínio ou de suas partições. Duplicar as imagens de f(x) promove um movimento natural de aproximação da semirreta definida por $f(x) = x \; ; para \; x \geq 0$ para "mais próximo do eixo Oy".

O estudo analítico da função, seguido do uso da linguagem corrente que melhor "traduz" a escrita matemática, ajuda o aluno a compreender melhor o que está vendo na tela do computador.

$$g(x) = 2.f(x) = 2.|x| = \begin{cases} 2.x \; ; se \; x \geq 0 \\ 2.(-x) \; ; se \; x < 0 \end{cases}$$

Neste caso, o abuso da notação para o caso $x < 0$ funciona como uma simbologia que está mais diretamente ligada com a tradução que o professor deve sempre buscar fazer entre a linguagem matemática e a língua materna, além de ir ao encontro mais direto com a definição de módulo que adotamos desde o início deste texto.

---

[13] O recolhimento dos registros escritos ou a análise das produções orais dos alunos ao realizarem estas atividades é uma parte importante do trabalho do professor, pois poderá inclusive perceber se os referenciais adotados são sempre os mesmos em classe ou se algum grupo usou um referencial diferente.

Tabela 1: Distribuição de algumas imagens

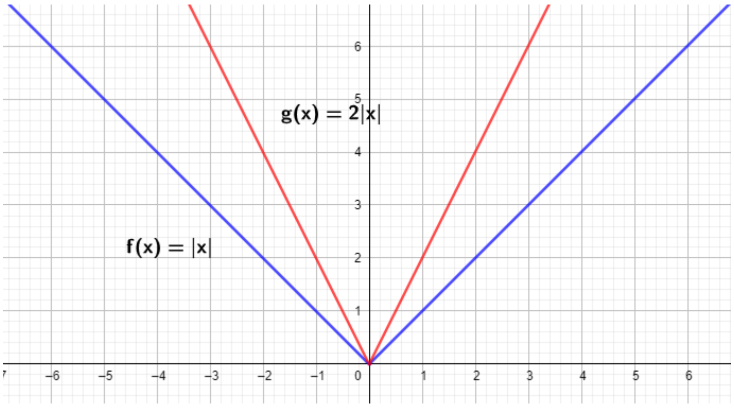
x	$f(x) = \|x\|$
-3	3
-2	2
-1	1
0	0
1	1
2	2
3	3

x	$g(x) = 2.f(x) = 2.\|x\|$
-3	2.(-3) = 6
-2	2 . (-2) = -4
-1	2 . (-1) = -2
0	2 .0 = 0
1	2 . 1 = 2
2	2 . 2 = 4
3	2. 3 = 6

Fonte: A autora, 2021.

Exemplo:

Gráfico 13: Família de curvas af(x) = a|x| para a=2



Fonte: A autora, 2021.

Para estes casos, construir tabelas para diferentes valores para *a* ajudará bastante na percepção de que alterar o valor do parâmetro está intimamente ligado à alteração do coeficiente angular das retas que estão sendo estudadas, além de permitir a compreensão, a partir da visualização, que as imagens decrescem e depois crescem infinitamente quando fazemos a leitura deste gráfico da maneira usual, isto é, no sentido do crescimento dos elementos do domínio.

Atividades com calculadora também podem ser inseridas neste momento, para que a tarefa não se limite a determinar as imagens de números inteiros. Explorar as imagens de decimais exatos, dizimas periódicas e números irracionais auxiliam na compreensão intuitiva da continuidade da reta e que este gráfico “não apresentará buracos”.

Como abordar a reflexão em relação ao eixo O*x*?

Esta questão tem como possível resposta a extensão dos estudos iniciados com os movimentos de contração e dilatação só que acrescido de um sentido em relação a um referencial, que passa ser o eixo Ox.

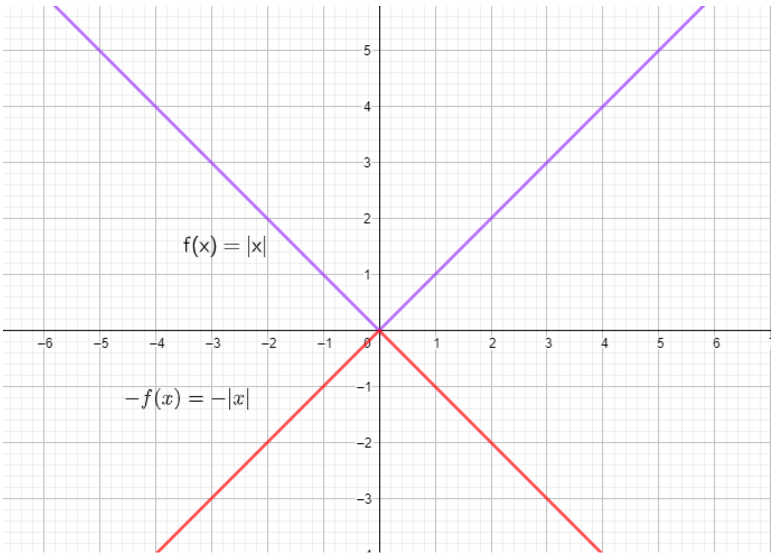
Refletir passa ter um novo significado que é puramente geométrico, representado pela multiplicação da lei de formação de f(x) por (-1).

$$g(x) = -|x| = (-1)\,.\,f(x) = (-1).\,|x|$$

Da mesma maneira que $g(x) = -2.\,|x| = (-2)\,.\,f(x) = (-2).\,|x|$ indica que o gráfico de g(x) tem suas semirretas mais próximas do eixo Oy se comparamos com as semirretas que formam o gráfico de $f(x)$. Além disso, são reflexões das semirretas que formam o gráfico de $f(x) = 2|x|$, pelo fato do parâmetro *a* ser negativo. Esse processo de aproximação em relação ao eixo Oy seguido da reflexão em relação ao eixo Ox se dará sempre que $a < -1$. Já o processo de afastamento em relação ao eixo Oy seguido da reflexão em relação ao eixo Ox se dará sempre que $-1 < a < 0$.

Exemplo:

Gráfico 14: f(|x|)

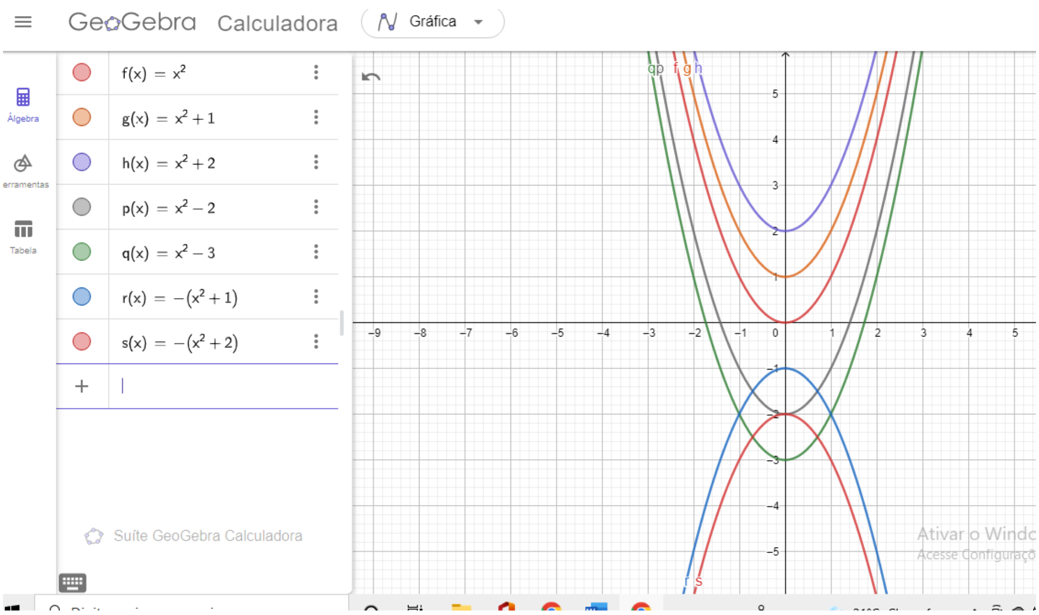


Fonte: A autora, 2021.

Estas atividades são de fácil compreensão quando a função é a função polinomial do segundo grau?

Tomando a função elementar $f(x) = x^2$ a resposta é sim, pois analisar a família de curvas $g(x) = a.f(x) = a.x^2$ ou $h(x) = a + f(x) = a + x^2$ guardam os mesmos modelos de interpretação discutidos anteriormente. Espera-se que lançar mão de vocábulos pertencentes ao campo da geometria das transformações tornem a compreensão pelo aluno, do que vê na tela, mais rápida e mais segura. Veja um exemplo para h(x).

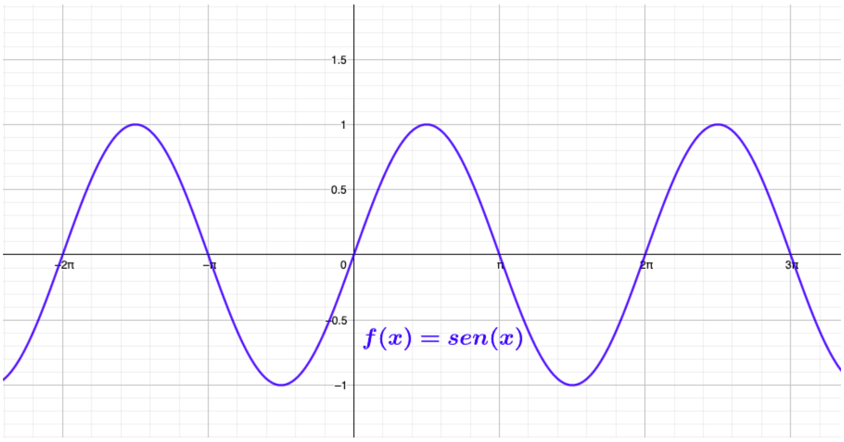
Figura 11: Função quadrática e transformações no plano



Fonte: A autora, 2021.

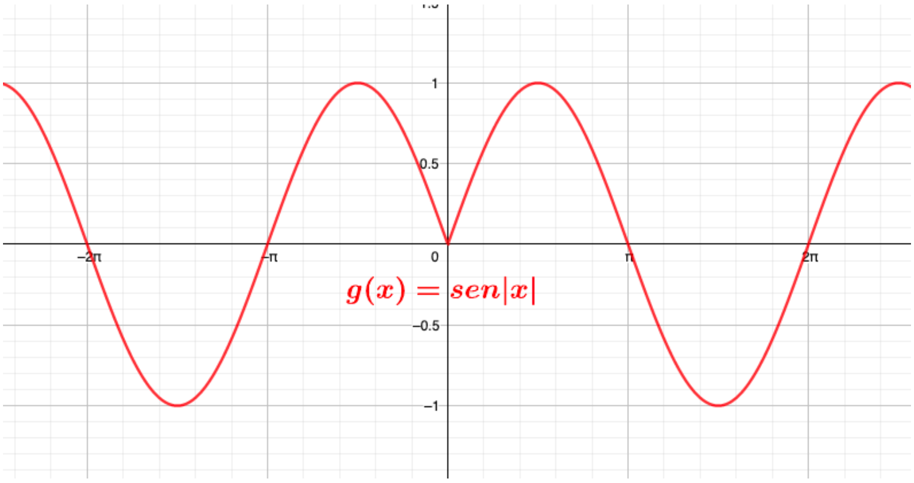
As alterações feitas no domínio a partir da inserção do módulo produzem gráficos interessantíssimos e fogem do lugar comum das curvas vistas no ensino médio.

Gráfico 15: f(x) = sen x



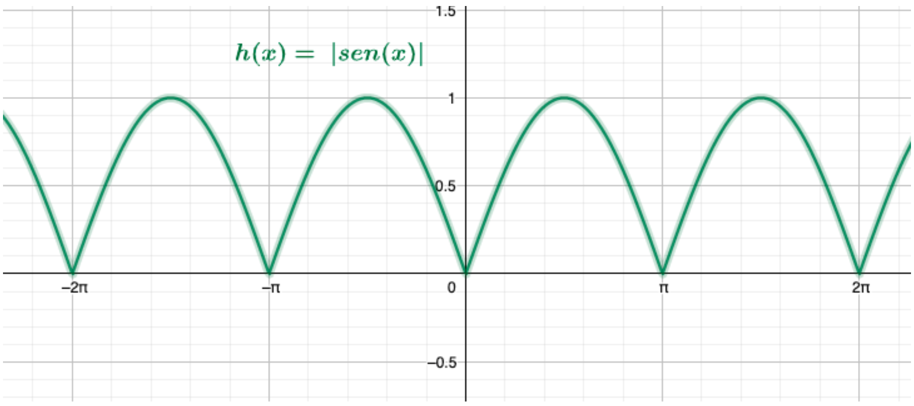
Fonte: A autora, 2021.

Gráfico 16: g(x) = sen |x|



Fonte: A autora, 2021.

Gráfico 17: h(x) = |sen(x)|



Fonte: A autora, 2021.

Algumas diferenças e semelhanças relevantes entre $f(x)$ e $g(x)$:

Note que a função $f(x) = sen(x)$ é ímpar, isto é, $f(-x) = -f(x)$, e é simétrica em relação a origem e a função $g(x)$ é par, simétrica em relação ao eixo y, isto é, $f(-x) = f(x)$.

Ambas são funções periódicas com período igual a 2π e ambas possuem a mesma imagem $[-1,1]$ Cabe ressaltar que $g(x) = f|x|$.

Já a função $g(x)$ é par, com período igual a π e imagem igual a $[0,1]$. Note que tanto o período e a imagem da função $g(x)$ são modificados pelas transformações no plano, já que $g(x) = |f(x)|$.

Conjecturar sobre como as translações horizontais alteram a escrita da lei de formação da função não é uma tarefa tão simples e requer mais maturidade matemática e maior manipulação de diferentes gráficos, como por exemplo os gráficos das funções quadráticas quando suas leis de formação são apresentadas na forma canônica.

Apresentar a lei de formação das funções polinomiais do segundo grau na forma canônica é outra abordagem no estudo das funções quadráticas que desenvolvidas em ambientes computacionais permite ao professor explorar junto aos alunos uma série de propriedades geométricas da parábola por observação, já que a escrita da lei de formação na forma canônica permite uma comparação direta da lei de formação com a função elementar $f(x) = x^2$.

Mostrar aos alunos que estas funções existem e compará-las com as funções originais elementares é uma sugestão de trabalho com alunos do Ensino Médio para que possam discutir sobre o comportamento dos novos gráficos gerados como: o crescimento ou o decrescimento dos valores das imagens ao longo do domínio, se preservam ou não a periodicidade inicial, se a quantidade de raízes se alteram ou mesmo se características existentes em uma função desaparece na outra, como por exemplo, a possibilidade de traçar retas tangentes a partir de todos os pontos do domínio.

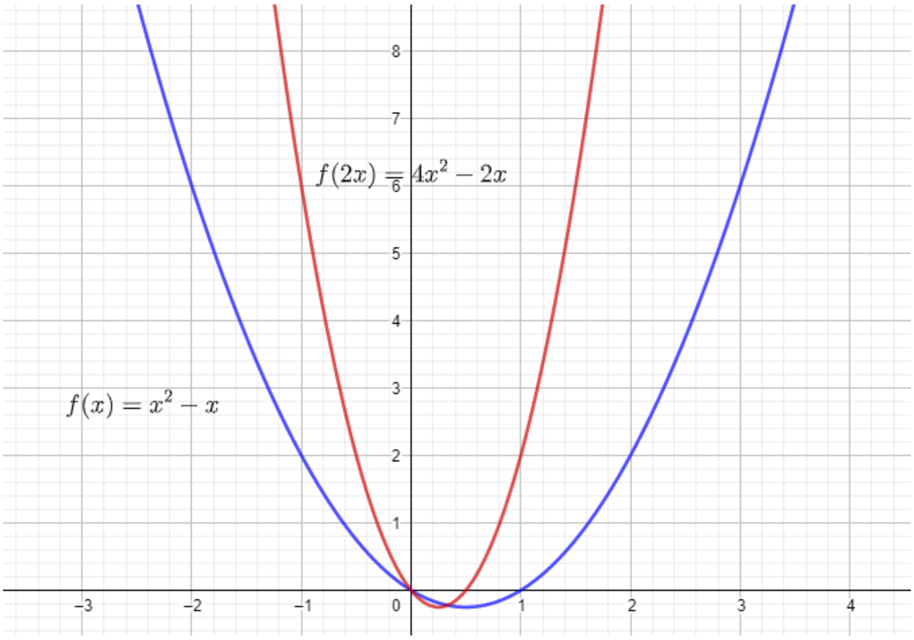
A análise da expansão ou da contração de uma função quadrática requer o conhecimento das propriedades das composições de funções para que as justificativas sejam mais assertivas e não chutadas pelo professor, até porque o que acontece no universo das funções polinomiais não se aplica a todas as outras classes de funções. Estas atividades são mais interessantes de serem abordadas em cursos de formação inicial de professores. Vejamos um exemplo:

Considere a função definida por:

$$f(x) = x^2 - x$$

A contração de f(x) altera também o valor de uma de suas raízes. Note que $f(2x) = 4x^2 - 2x$ é o resultado de $foh(x)$ onde $h(x) = 2x$

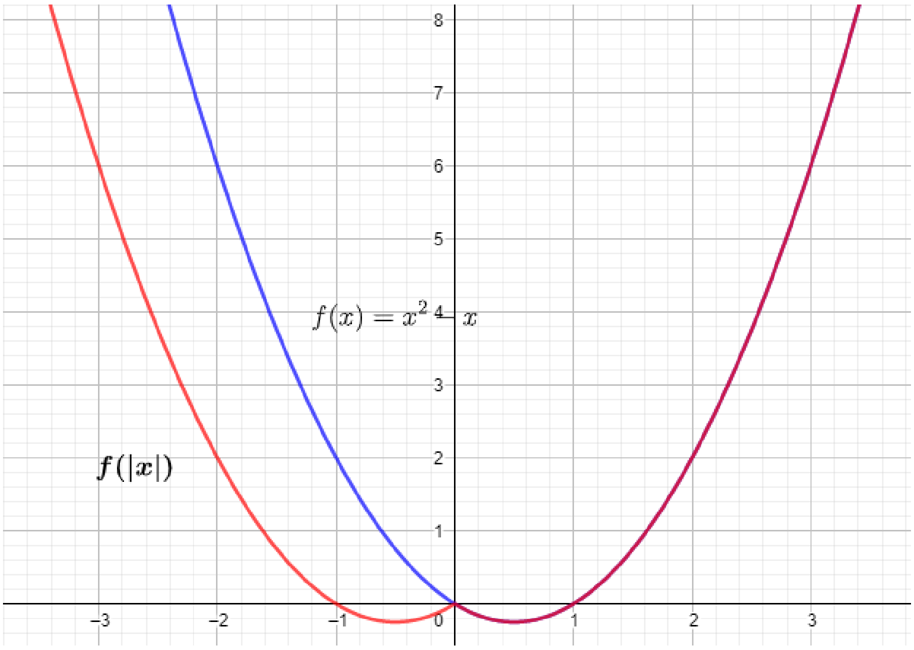
Gráfico 18: f(x) = x² – x



Fonte: A autora, 2021.

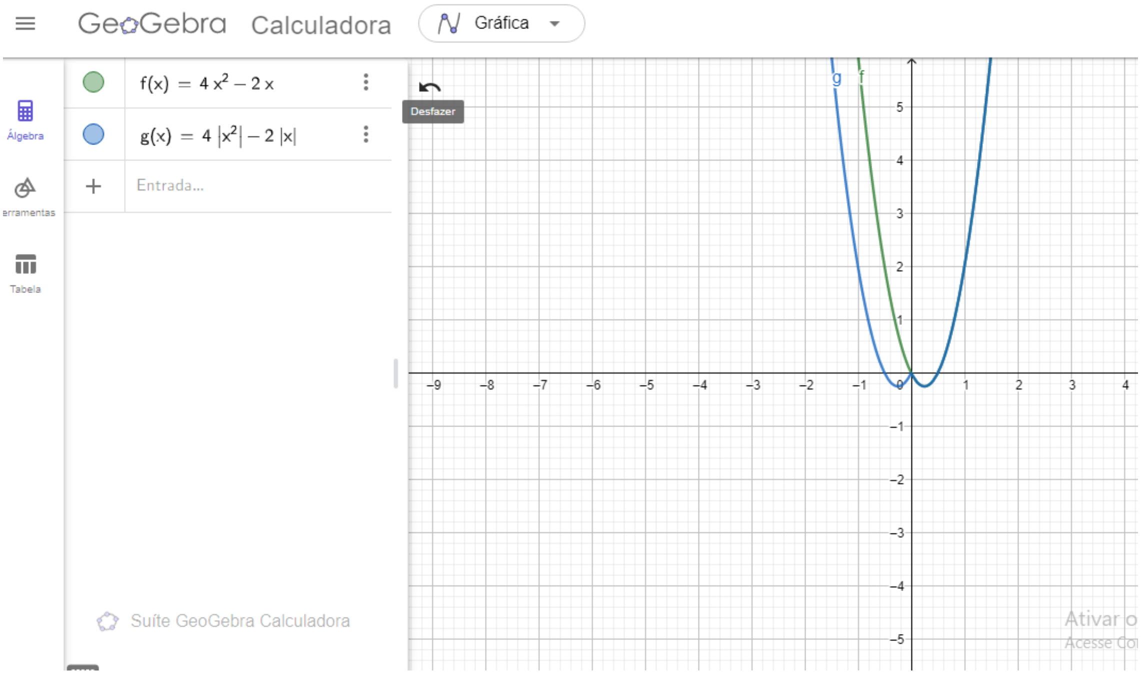
Já em $f(|x|)$ os pontos de ordenada positiva ou nula do domínio são mantidos e os outros restantes são obtidos a partir dos pontos de ordenada negativa por uma reflexão do eixo.

Gráfico 19: f(|x|)



Fonte: A autora, 2021.

Figura 12: Movimentando gráficos



Fonte: A autora, 2021.

5 UMA APLICAÇÃO OUSADA: CÁLCULO NUMÉRICO NO ENSINO MÉDIO?

A Análise Numérica é um ramo da Análise Real que a partir do advento do processamento eletrônico de dados teve suas técnicas mais difundidas por terem se tornado mais facilmente executáveis a partir de algoritmos, linguagens mais estruturadas e processadores mais rápidos. É por assim dizer, o estudo de algoritmos que permitem resolver problemas matemáticos, apresentando uma solução aproximada de valor muito relevante para o problema apresentado.

Buscar técnicas de refinamento das soluções tornando o erro em relação a solução exata cada vez menor, tem sido uma busca constante desta área do conhecimento. Newton, Lagrange, Gauss e Euler já utilizavam estas técnicas que hoje são conhecidas por algoritmos iterativos. Estes algoritmos apresentam uma sucessão de passos cujo objetivo é entregar uma solução aproximada do problema tão próxima quanto se queira da solução exata, isto é, uma solução que seja convergente para a solução exata à medida que o processo iterativo tem cada vez mais passos.

Embora o ato de contar e de encontrar soluções aproximadas seja muito anterior ao aparecimento dos computadores, o uso destas máquinas auxilia muito o homem em diminuir o tempo no encontro de soluções para problemas complexos que, mesmo aproximadas, fornecem um alto grau de precisão.

Em uma análise simplista, mas não equivocada, a Análise Numérica desenvolve técnicas para a resolução de problemas do Cálculo Numérico. Por exemplo, do Cálculo diferencial elementar, sabemos que o limite $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ existe e que seu valor exato é o número de Euler, *e*. Encontrar o seu valor exato não é uma tarefa nada fácil, tanto pela complexidade das operações a serem efetuadas quanto pela impossibilidade de atingir o limite por técnicas triviais. Um processo de cálculo mais simples, que fornece um valor aproximado para este valor dentro de um certo grau de exatidão considerado satisfatório (isto é, com baixo percentual de erro), é um dos objetos do Cálculo Numérico.

Mas, o que esta apresentação tem a ver com esta pesquisa? Equações aparentemente simples podem ser extremamente complicadas de serem resolvidas e uma solução numérica pode atender perfeitamente as necessidades do problema.

Um bom método para ser apresentado no Ensino Médio, principalmente na modalidade técnica é o Método da Falsa Posição[14] ou o Método da Bisseção por não envolverem conceitos diretos do Cálculo Diferencial, como as derivadas de funções.

5.1 Método Numérico da Falsa Posição e o Método da Bisseção

O método iterativo da falsa posição Método da posição falsa ou *regula falsi* é um método numérico usado para encontrar soluções de equações não lineares definidas em um intervalo fechado [a, b], admitindo previamente que haja uma solução em um subintervalo contido em [a, b]. Diminuindo esse subintervalo em partes cada vez menores, a solução estará onde a função tem sinais opostos, de acordo com o Teorema do Valor Intermediário[15].

O Método da Bisseção consiste em dividir o intervalo em dois intervalos de comprimentos iguais a partir de seu ponto médio [a,c) e (c,b] e verificar em qual dos dois subintervalos construídos há uma raiz, seguindo as hipóteses do Teorema do Valor Intermediário. É certo que garantida hipótese do teorema, existe pelo menos uma raiz no intervalo num dos dois intervalos O procedimento é, então, repetido para o subintervalo correspondente à raiz até que c se aproxime a raiz com a precisão desejada.

O método da bissecção tem convergência lenta, uma vez que seleciona sempre o ponto médio de cada intervalo. A ideia por trás do método da falsa posição é acelerar o método da bissecção selecionando um ponto que esteja mais próximo

---

[14] O método da falsa posição é uma variação do método da bissecção com uma convergência mais rápida. Como a posição falsa é um método intervalar, ele possui convergência garantida e mais rápida.

[15] Estamos interessados em resolver a equação não linear f(x) = 0. Como hipóteses básicas consideramos que f tenha apenas uma raiz em $[a,b]$ e que $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ seja contínua e que $f(a) \cdot f(b) < 0$.

da raiz. Fazemos isso considerando como aproximação c para a raiz, a média ponderada entre a e b com pesos $|f(b)|$ e $|f(a)|$ respectivamente:

$$c = \frac{|f(b)| \cdot a + |f(a)| \cdot b}{|f(a)| + |f(b)|}.$$

Um exemplo interessante para ser desenvolvido no Ensino Médio é encontrar uma aproximação para $\sqrt{3}$ a partir de um desse métodos numéricos. Para isso vamos utilizar a função $f(x) = x^2 - 3$, que tem como um de seus zeros a $\sqrt{3}$.

Ao verificarmos as hipóteses do Teorema do Valor Intermediário, sabemos que $1 < \sqrt{3} < 2 \Leftrightarrow 1 < \sqrt{3} < 2$. Portanto, utilizaremos o intervalo $(1, 2)$, isto é, $a = 1$ *e* $b = 2$. A partir daí podemos usar um software, como o GeoGebra, que nos ajude a efetuar as iterações.

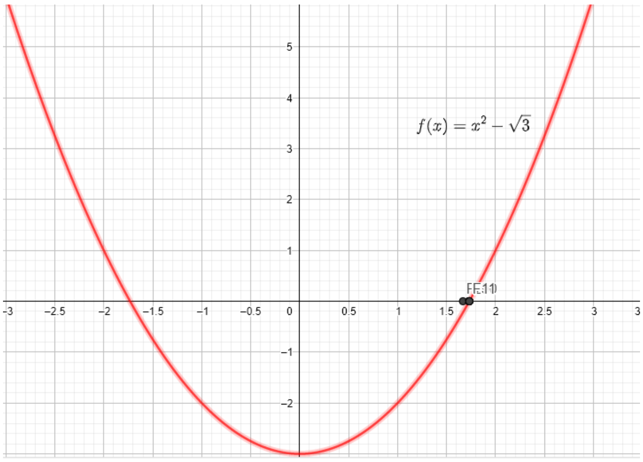
Iniciando com a= 1 e b=2 na primeira iteração temos a seguinte planilha de aproximação de c(k) para $\sqrt{3}$, onde k representa a k-ésima iteração:

Figura 13: Resultado das iterações

	A	B	C	D	E	F
1	**Iteração**	**a(k)**	**b(k)**	**c(k)=(a(k)f(b(k)-b(k)f(a(k))/(f(b(k)-f(a(k))**	**c(k)-a(k)**	falsa posição
2	1	1	2	1.6666666667	0.6666666667	(1.6666666667, 0)
3	2	1.6666666667	2	1.7272727273	0.0606060606	(1.7272727273, 0)
4	3	1.7272727273	2	1.7317073171	0.0044345898	(1.7317073171, 0)
5	4	1.7317073171	2	1.7320261438	0.0003188267	(1.7320261438, 0)
6	5	1.7320261438	2	1.7320490368	0.000022893	(1.7320490368, 0)
7	6	1.7320490368	2	1.7320506804	0.0000016437	(1.7320506804, 0)
8	7	1.7320506804	2	1.7320507984	0.000000118	(1.7320507984, 0)
9	8	1.7320507984	2	1.7320508069	0.0000000085	(1.7320508069, 0)
10	9	1.7320508069	2	1.7320508075	0.0000000006	(1.7320508075, 0)
11	10	1.7320508075	2	1.7320508076	0	(1.7320508076, 0)

Fonte: A autora, 2022

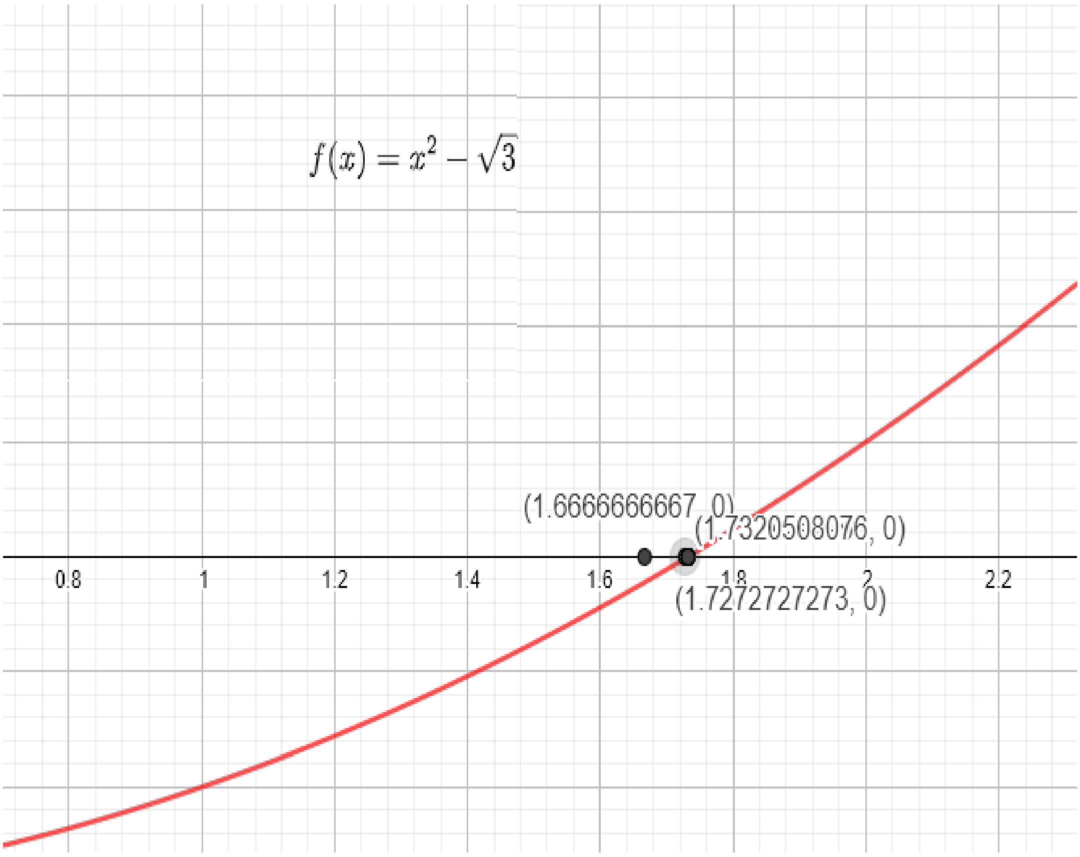
Figura 14: Iteração utilizada para aproximar a $\sqrt{3}$



Fonte: A autora, 2022

Pontos cada vez mais próximos do valor real de $\sqrt{3}$, obtidos pelo método iterativo.

Figura 15: Aproximação da raiz

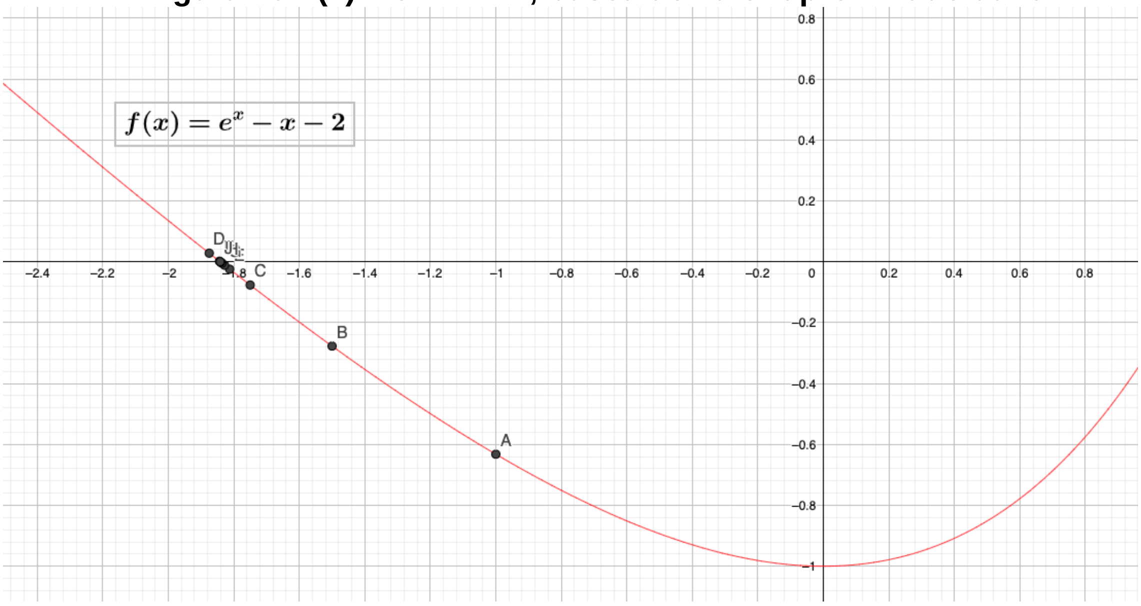


Fonte: A autora, 2022.

Exemplo do Método da Bissecção - Utilizando o software GeoGebra

Resolva a equação $e^x = x + 2$ utilizando o método da bisseção com intervalo inicial [a,b]=[-2,0] para calcular a aproximação x(10) da solução desta equação com dez iterações.

Figura 16: f(x) = e^x – x – 2, busca do valor aproximado da raiz



Fonte: A autora, 2022.

Tabela : Aproximação x(10) da solução desta equação com dez iterações

n	a(n)	b(n)	x(n)=(a(n))+b(n))/2	f(a(n))f(x(n))	|a(n)-b(n)|
1	-2	0	-1	<0	-2
2	-2	-1	-1,5	<0	-1
3	-2	-1,5	-1,75	<0	-0,5
4	-2	-1,75	-1,875	>0	-0,25
5	-1,875	-1,75	-1,8125	<0	-0,125
6	-1,875	-1,8125	-1,84375	>0	-0,0625
7	-1,84375	-1,8125	-1,828125	<0	-0,03125
8	-1,84375	-1,828125	-1,8359375	<0	-0,015625

9	-1,84375	-1,835938	-1,83984375	<0	-0,007813
10	-1,84375	-1,839844	-1,841796875		-0,003906

Fonte: A autora, 2022.

Exemplo utilizando o método da falsa posição.

Encontre uma raiz real da equação polinomial p(x)=0, onde p(x)=$x^3 - x - 2$ e prove que esta raiz é a única raiz real, utilize o método da falsa posição e o software GeoGebra.

Solução:

Observamos que p(0)=-2 e p(2)=4.

Portanto, pelo Teorema de Bozano, há uma raiz real no intervalo [0,2].

Vamos utilizar o método da falsa posição para encontrar esta raiz real.

Tabela : Planilha de raiz aproximada

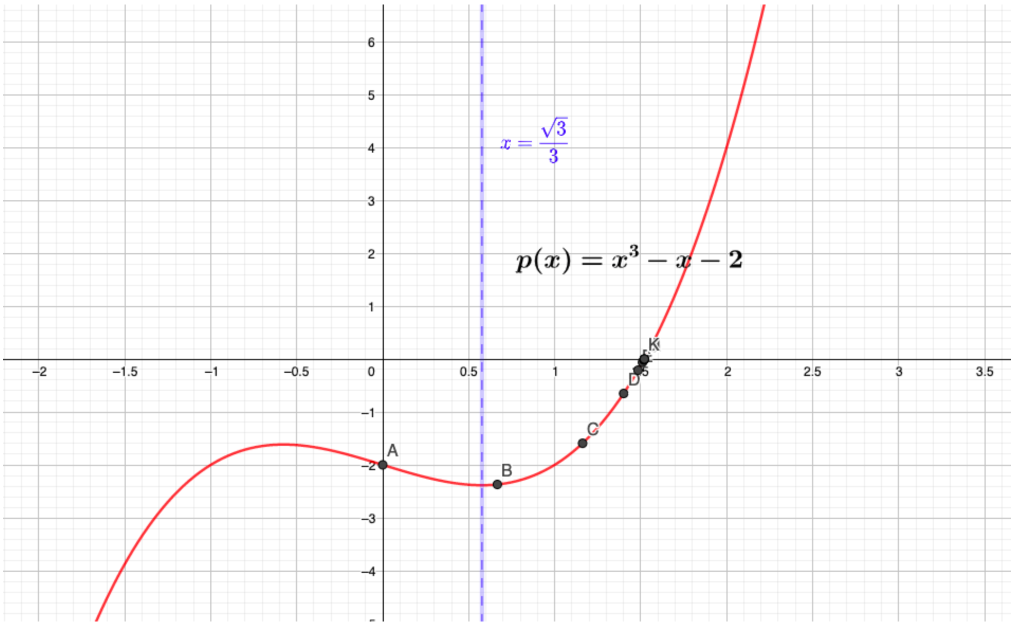
n	a(n)	b(n)	p(a(n))	p(b(n))	x(n)=(|p(b(n)|a(n)+|p(a(n)|b(n))/|(p(a(n))|+|p(b(n))|
1	0	2	-2	4	0,666666667
2	0,666667	2	-2,3704	4	1,162790698
3	1,162791	2	-1,5906	4	1,400988094
4	1,400988	2	-0,6512	4	1,484851002
5	1,484851	2	-0,2111	4	1,510672508
6	1,510673	2	-0,0631	4	1,518274059
7	1,518274	2	-0,0184	4	1,52048168
8	1,520482	2	-0,0053	4	1,521120266
9	1,52112	2	-0,0015	4	1,521304774
10	1,521305	2	-0,0004	4	1,521358066

11	1,521358	2	-0,0001	4	1,521373457
12	1,521373	2	-4E-05	4	1,521377902

Fonte: A autora, 2021.

Observando os dados obtidos na planilha acima, pode-se concluir que a raiz aproximada da equação é aproximadamente $x = 1{,}5214$, sendo a única raiz real, pois a partir deste ponto a função só admite valores positivos. A função p(x)=$x^3 - x - 2$ é crescente a partir de $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, devido a função derivada $p'(x) = 3x^2 - 1$ ser crescente a partir deste ponto.

Gráfico 20: Função p(x)=$x^3 - x - 2$



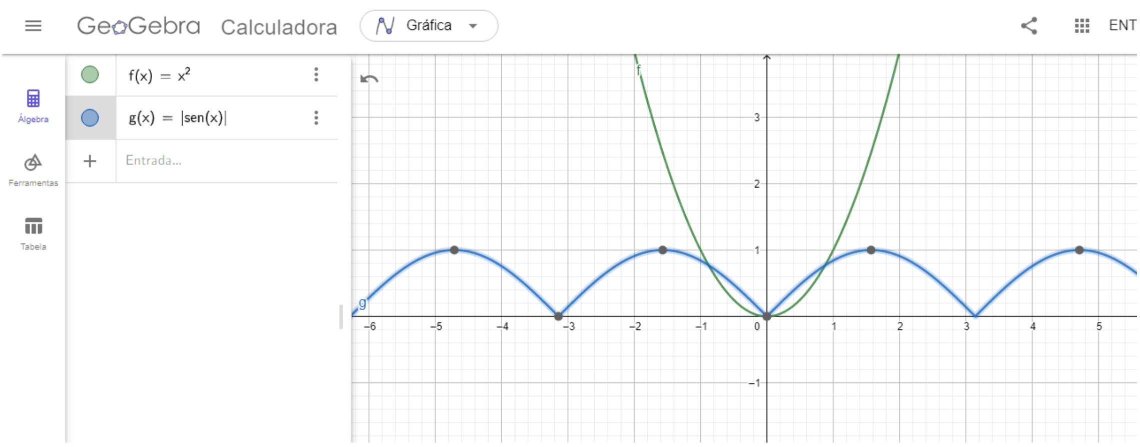
Fonte: A autora, 2021.

5.2 Buscando raízes de outras equações interessantes envolvendo módulo

Esta apresentação é de fato uma ousadia, mas perfeitamente aplicável em classes de aprofundamento, iniciação cientifica junior ou mesmo em turmas de modalidade ténica, como os cursos técnicos em Informática, automação ou tecnologia da informação. Além disso, permite aos professores apresentarem problemas mais interessantes aos alunos, como encontrar uma solução aproximada para equações do tipo $x^2 - |sen\ x| = 0$ a partir da vizualização dos gráficos plotados num mesmo plano cartesiano e obviamente de posse de uma calculadora cientifica.

Segundo a abordagem deste trabalho resolver esta equação pode ser interpretado como determinar os pontos de intersecção entre as funções $f(x) = x^2$ e $h(x) = |sen\ x|$ e a partir deles, destacar suas abscissas como sendo as soluções procuradas para a equação.

Figura 17: Análise dos gráficos em [-1,0] e [0,1]

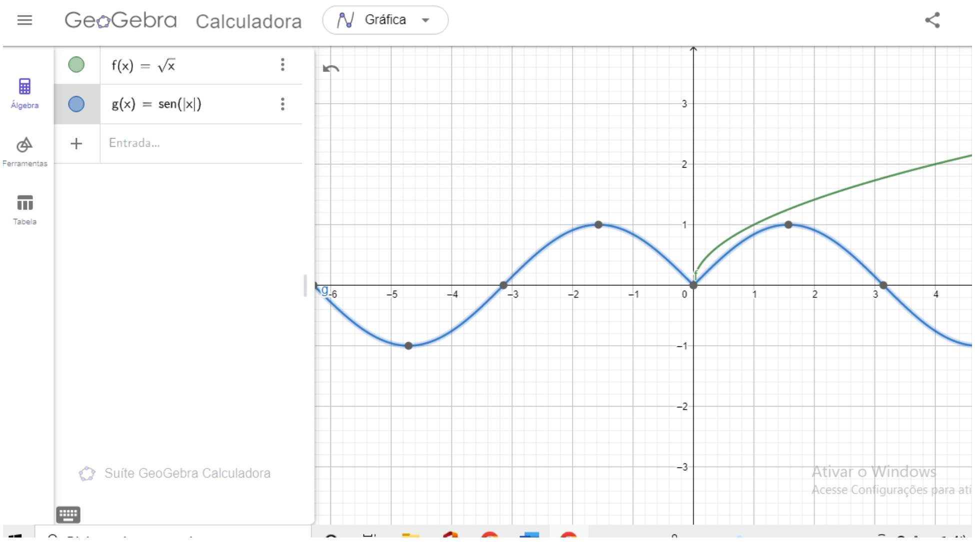


Fonte: A autora, 2022.

Dando um zoom na janela de vizualização, é possivel notar que os intervalos [-1, 0] e [0, 1] encontram-se as raizes da equação, além de x=0.

Outras variações deste tipo de problema podem ser exploradas, como a busca de soluções aproximadas para a equação $\sqrt{x} - sin|x| = 0$. A vizualização das funções $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = sin|x|$ na tela do computador pelo software indicará a existência de uma única raíz, o zero. Esta raíz é de fácil percepção.

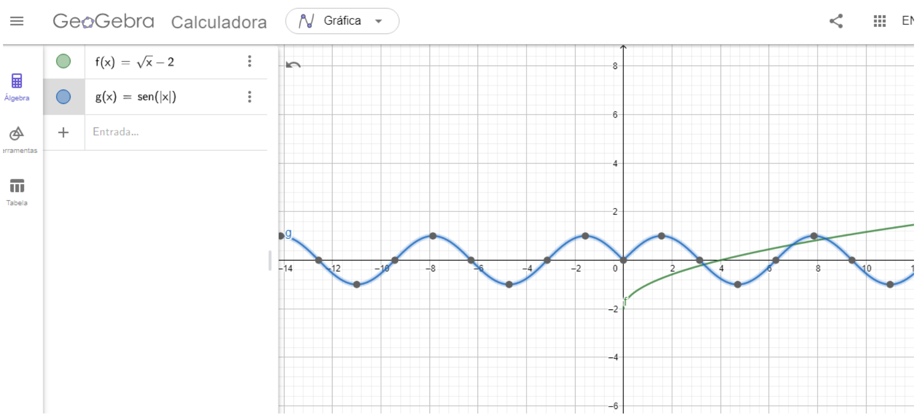
Figura 18: Pesquisando as raízes



Fonte: A autora, 2022.

Outras questões podem ser postas pelo professor como como exemplo: “que tipo de alteração pode ser feita à lei de formação de $f(x)$ ou de $g(x)$ a fim de que se garanta a existência de duas raizes reais?” São questionamentos simples, mas que geram movimentação e debates ricos em aulas de Matemática, assim como geram materiais de pesquisa para o professor que encherga sua sala de aula como um laboratório de práticas curriculares.

Figura 19: Procurando raízes



Fonte: A autora, 2021.

6 CONCLUSÃO

Num primeiro momento dessa pesquisa foi pensado em fazer uma abordagem das funções polinomiais do primeiro grau com a linguagem do cálculo diferencial a partir das funções definidas por várias sentenças. O material produzido seria aplicado em pelo menos uma turma de segundo ano do ensino médio. Porém, por conta dos protocolos sanitários provenientes da pandemia de Covid-19, as turmas não estavam completas, o modelo adotado pelas escolas era híbrido e não teríamos tempo para submeter a pesquisa ao comité de ética da instituição.

Foi pensado então uma forma de continuar estudando as funções, incentivar os professores a realizarem propostas mais ousadas junto a seus alunos de Ensino Médio e contribuir para que os professores, ao lerem o resultado final desta pesquisa, pudessem sentir um pouco de ânimo após um período de tanta incerteza e exaustão, como este período pandêmico.

Mas, o que poderia ratificar esta intenção? O que poderia sustentar esta ideia como uma ideia relevante para a área de ensino da Matemática, que não a tornasse ingênua e que sustentasse os argumentos nela apresentados? Foi na intenção de responder a tais questionamentos que resolvemos ler com atenção a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) do Ensino Médio. Foi a leitura atenciosa deste documento normativo que rege a educação brasileira que possibilitou a criação de atividades que estivessem alinhadas a ele e tivesse como principal ferramenta, a tecnologia computacional, como um possível caminho para se ter acesso ao mundo digital e a promoção da autonomia do aluno, como tanto preconiza a BNCC.

A proposta de trocar experiências com os alunos acerca dos temas Valor Absoluto e Função Modular por meio de uma abordagem que procurasse uma interação entre a álgebra, a análise real, a geometria e os aspectos computacionais surgem após o questionamento do porquê da ausência da Função Modular neste último período da Educação Básica. A Função Modular e as composições com funções elementares são vistas como uma excelente oportunidade de dinamizar, em ambientes de aprendizagem virtual, o que foi apresentado como objetivo específico deste trabalho.

A perspectiva de aproveitar a temática para se fazer uma revisão dos diversos tipos de funções elementares já estudadas pelos alunos que cursaram a primeira série do ensino médio (afim, quadrática, seno e cosseno) e integrá-las à utilização de recursos tecnológicos como o GeoGebra, fortaleceram o nosso argumento que afirma que a função modular deveria aparecer explicitamente numa versão revisada da BNCC, pois todos os conteúdos que gravitam em torno do assunto, como equações e inequações modulares, podem ser desenvolvidos em sala de aula de maneira dinâmica, indo ao encontro das competências especificas, habilidades e objetos do conhecimento definidos na ‘base’. Além disso, as composições entre funções elementares com a função modular mostram ao aluno do Ensino Médio uma série de outros gráficos de funções que não são tão bem-comportadas como as funções polinomiais do primeiro e segundo graus ou mesmo as funções seno e cosseno.

As atividades e a sequência de exemplos comentados no capítulo 4 tiveram um caráter intencional de não mais apresentar receitas de bolo ou sequencias didáticas embasadas numa teoria pedagógica, prontas para serem aplicadas, como encontramos nas dissertações dos mestrados profissionais em Matemática.

O que propusemos foi um bate-papo honesto com o professor acerca daquilo que pode ser realizado em salas de aula brasileiras, na rede pública ou privada. Acreditamos que os exemplos apresentados podem ser utilizados na integra ou aproveitados parcialmente por professores durante as suas aulas. Aliás, este é um dos principais objetivos que estão ‘escondidos’ nas entrelinhas do nosso trabalho: fazer com que a leitura incentive o professor a produzir sequencias didáticas ou atividades que sejam condizentes com o seu alunado e não sejam meros usuários das experiências bem-sucedidas de autores de materiais didáticos, de dissertações ou teses de doutorado. Por que esta atitude meio anárquica? Por pensarmos que cada grupo de estudantes tem suas características próprias e o ato de ensinar é recheado de intencionalidade.

Parte do que pode ser entendido como um produto final realizado num mestrado profissional está nos exemplos comentados apresentados no capítulo 4.

Outro objetivo simbólico deste texto é o incentivo claro a utilização do GeoGebra ou qualquer outro software dinâmico e gratuito, que possam ser amplamente aplicáveis em instituições públicas, em primeiro lugar, pois democratizar a ciência e a tecnologia são compromissos políticos dessa autora.

Recursos digitais que integrem a aprendizagem da Matemática ‘as novas tecnologias e que contribuam para melhorar o ensino e o aprendizado, não só do tema proposto, mas em muitas áreas do conhecimento além do conhecimento matemático, devem sempre ser pensados pelo professor como aliados para uma educação emancipatória e para a formação de cidadãos que poderão lutar socialmente com um pouco mais de justiça social, diminuindo as grandes fendas existentes entre as classes sociais de um pais tão desigual quanto o Brasil.

Em termos do Ensino da Matemática, nossa proposta tem o enfoque claro em priorizar as soluções que bebam em fontes geométricas e cujas ferramentas computacionais auxiliem nas resoluções de problemas usando muito mais os aspectos visuais, em detrimento das soluções algébricas tradicionais, que são muitas vezes cansativas e acabam afastando o interesse dos alunos nas aulas de Matemática.

Não há uma comprovação cientifica neste trabalho, mas há fortes indícios de que a opção pela classe de professores e os materiais didáticos vigentes estarem sempre suprimindo temas como Função Modular no Ensino Médio vem do desconhecimento em como dinamizar conteúdos e do pouco hábito que alguns tantos professores brasileiros temos em não trocarmos com nossos pares, nossos planos de aulas e nossos resultados de atuações em sala de aula.

A ausência divulgação ou práticas do uso das teorias que envolvem as mentalidades matemáticas é um outro indício forte do que afirmamos e esbarra também no processo de formação inicial do professor, que muitas vezes só se completa a partir da formação continuada.

A integração entre diversas áreas e temas como: Funções, Geometria Analítica, Estatística, Física, Sequências e a Geometria Plana num mesmo tópico, demonstra que o nosso trabalho incentiva que a Matemática não seja ensinada em temas separados como fizessem parte de um pequeno assunto sem integração com outros grandes temas e ciências afins.

O capítulo 5 apresentou a possibilidade de determinar raízes aproximadas de equações polinomiais e não polinomiais envolvendo ou não função modular e funções trigonométricas. As sugestões de atividades foram pensadas para turmas que não cursam o Ensino Médio Regular, turmas do Ensino Médio Técnico ou turmas de aprofundamento por conta da necessidade de inserção de outros artefatos tecnológicos, como o uso da calculadora científica. Foi pensado também na configuração do Novo Ensino Médio, a ser implantado nas escolas a partir de 2023, uma vez que as atividades auxiliam na promoção das práticas curriculares em Matemática através da metodologia de projetos, como por exemplo, a implantação dos primeiros passos de uma Introdução ao Cálculo Numérico para a educação básica.

Esperamos que esta proposta seja um incentivo para todos aqueles que acreditam nas potencialidades do ensino e da aprendizagem que encontram nas tecnologias digitais caminhos para uma melhor dinamização dos currículos e para que o professor se sinta sempre motivado a estudar e dividir com seus pares as suas práticas exitosas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ADMIRAL, T. Dificuldades conceituais e matemáticas apresentadas por alunos de física dos períodos finais. **Produtos e Materiais Didáticos, Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 38, n. 2, e2502, 2016. Disponível em: https://www.scielo.br/j/rbef/a/MpDR6TFM3LfHFQ4WFR6QMQg/?format=pdf&lang=pt Acesso em 25 de março de 2022.

ALBINO, A.; SILVA, A da. BNCC E BNC na formação do professor: repensando a formação por competências. **Revista Retratos da Escola**, v. 13, n. 25, p. 137-153, jan./mai. 2019. Disponível em: https://retratosdaescola.emnuvens.com.br/rde/article/view/966/pdf. Acesso em 10 de março de 2022.

BARROSO, J. M. **Matemática Construção e Significado**. 1. edição. São Paulo: Moderna, 2008. Volume 1-3.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC/SEF, 2018.

DANTE, Luiz R. **Matemática - contextos e aplicações – volume 1**. São Paulo: Editora Ática, 2016.

GIRALDO, Victor; CAETANO, Paulo Antônio Silvani; MATTOS, Francisco Roberto Pinto. **Recursos Computacionais no Ensino da Matemática**. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2013. (Coleção PROFMAT).

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PERIGO, Roberto; ALMEIDA, Nilze de. **Matemática - Ciência e Aplicações**. 7. edição. São Paulo: Editora Saraiva, 2013.

IEZZI, Gelson et.al. **Matemática Ciência e Aplicações**. Volume 1-3. 8. edição. São Paulo: Saraiva, 2014.

IEZZI, Gelson et al. **Coleção Fundamentos de Matemática Elementar**. 1. edição. São Paulo: Atual, 2010.

LIMA, Elon Lages. **Espaços Métricos.** Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A. 2ª edição. Coleção Projeto Euclides, 1993.

LIMA, Elon Lages. **Números e Funções Reais**. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2013. (Coleção PROFMAT).

LIMA, Elon; CARVALHO, Paulo C. Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **A Matemática do Ensino Médio volume 1**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1997.

MICHETTI, M. Entre a legitimação e a crítica: as disputas acerca da Base Nacional Comum Curricular. **Revista Brasileira de Ciências Sociais**, São Paulo, v. 35, n. 102, p. 1-19, 2020. Disponível em: https://www.scielo.br/j/rbcsoc/a/7NZC9VwjKWZKM v4SPQmTXPJ/abstract/?lang=pt. Acesso em 21 de março de 2022.

NOGUEIRA Jr., D.C. **Elaboração de uma sequência didática para valor absoluto e função modular: utilizando a organização curricular em rede.** 2008. Dissertação (Mestrado) Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Programa de Pós-Graduação no Ensino de Ciências e Matemática, Belo Horizonte, 2008. Disponível em:http://www.biblioteca.pucminas.br/teses/EnCiMat_NogueiraJuniorDC_1.pdf acesso em 10/01/2022. Acesso em 01 de fevereiro de 2022.

PONTE, J.P., BROCARDO, J., OLIVEIRA, H. **Interpretações matemáticas em sala de aula.** 2ª Edição. Belo Horizonte. Editora Autêntica, 2009.

SANTOS, V.R. de B. **Curso de Cálculo Numérico**. 3ª edição. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico Editora, 1977. Série Ciência da Computação.

ANEXO A - EXERCÍCIOS RESOLVIDOS COM AUXÍLIO DO GEOGEBRA

1. Resolva a equação $|x-2|=6$

2. Resolva a equação $|x-3|=|4x-1|$

3. Resolva a equação $|3x+9|=1-x$

4. Resolva a equação $|x-1|+|x+6|=13$.

5. Quais números inteiros satisfazem a igualdade $|x^2-5x+5|=1$?

6. Resolva a inequação $|4x-3|>5$.

7. (ITA 2002) Os valores de $x \in \mathbb{R}$ para os quais a função real dada por $f(x)=\sqrt{5-\left||2x-1|-6\right|}$ está definida, formam qual conjunto?

8. Resolva a equação $e^x=x+2$ utilizando o método da bisseção com intervalo inicial [a,b]=[-2,0] para calcular a aproximação x(10) da solução desta equação com dez iterações.

9. Encontre uma raiz real da equação polinomial p(x)=0, onde p(x)=x^3-x-2 e prove que esta raiz é a única raiz real, utilize o método da falsa posição e o software GeoGebra.