**COLÉGIO PEDRO II**

Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Roberto Pereira Azevedo

# MENTALIDADES MATEMÁTICAS:
Uma proposta de atividade envolvendo grafos

Rio de Janeiro

2022

Roberto Pereira Azevedo

# MENTALIDADES MATEMÁTICAS:
## Uma proposta de atividade envolvendo grafos

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Prof$^{\underline{a}}$. Dr$^{\underline{a}}$. Liliana Manuela Gaspar Cerveira da Costa

Rio de Janeiro

2022

**COLÉGIO PEDRO II**

**PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA, EXTENSÃO E CULTURA**

**BIBLIOTECA PROFESSORA SILVIA BECHER**

**CATALOGAÇÃO NA FONTE**

A994 Azevedo, Roberto Pereira
Mentalidades matemáticas: uma proposta de atividade envolvendo grafos/ Roberto Pereira Azevedo. – Rio de Janeiro, 2022.

96 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura.

Orientador: Liliana Manuela Gaspar Cerveira da Costa.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Teoria dos grafos. 3. Aplicativos móveis. 4. Tecnologia educacional. 5. Ensino fundamental. I. Costa, Liliana Manuela Gaspar Cerveira da. II. Colégio Pedro II. III. Título.

CDD 510

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária Simone Alves – CRB7 5026

Roberto Pereira Azevedo

MENTALIDADES MATEMÁTICAS:
Uma proposta de atividade envolvendo grafos

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: ____/____/____.

Banca Examinadora:

_______________________________

Profª. Drª. Liliana Manuela Gaspar Cerveira da Costa
Profmat-Colégio Pedro II

_______________________________

Profª. Drª. Elisa Fonseca Sena e Silva
Universidade Federal de Alagoas

_______________________________

Prof. Dr. Celso Marques da Silva Júnior
PPPRO-Cefet Maracanã

_______________________________

Prof. Dr. Diego de Souza Nicodemos
Profmat-Colégio Pedro II

Rio de Janeiro
2022

Dedico este trabalho a Deus, a minha esposa Flávia, aos meus pais, a toda a minha família e aos meus alunos.

## AGRADECIMENTOS

A Deus, pela vida e por toda a força que Ele me deu para mais esta conquista.

À Santíssima Virgem Maria, por sua intercessão e amparo.

A minha amada esposa Flávia Carolina, pelo amor e por todo o suporte que me foi dado. Sem ela, eu não seria capaz de concluir.

Aos meus pais, Carlos Henrique e Maria de Fátima, pelo amor, carinho e incentivo que sempre me deram.

A todos os membros da minha família, que me fortalecem com seu amor.

A minha orientadora, Prof. Liliana Costa, pelo incentivo, dedicação e paciência durante o processo de construção da dissertação. Por ter me apresentado as Mentalidades Matemáticas, ponto de partida deste trabalho e por ter me ensinado tanto. Pelo carinho recíproco e também pelas suas cobranças. Por me encorajar a prosseguir em meus estudos e alçar voos ainda mais altos.

A todos os professores do Colegiado do PROFMAT que fizeram parte da minha trajetória no mestrado, em especial Prof. Marilis Venceslau, Prof. Daniel Martins, Prof. Ivail Muniz, Prof. Andreia Maciel, Prof. Tânia Boffoni e Prof. Maria de Lourdes Jeanreanaud.

A todos os colegas e amigos do PROFMAT que concluíram o mestrado junto comigo, pelos desafios compartilhados, pelo apoio na caminhada em conjunto, pela ajuda e pela parceria.

Ao Colégio Pedro II, por ter me formado como aluno desde o ensino fundamental até o ensino médio, e agora nesta oportunidade de retornar para fazer o mestrado.

À Universidade do Estado do Rio de Janeiro, na qual me formei como professor de matemática e pela qual tenho grande carinho e gratidão.

*"Eu sou a luz do mundo, aquele que me segue não andará em trevas, mas terá a luz da vida".*

*(Jesus Cristo)*

**RESUMO**

Um dos grandes desafios no ensino da matemática é a baixa motivação dos alunos. Isso se deve, em parte, à ideia de que a matemática é uma matéria difícil e distante da realidade cotidiana. Somando-se a isto, existe um pensamento disseminado no mundo todo de que há pessoas com habilidade inata para aprender matemática e outras, não. Sem confiança na própria capacidade, a matemática se torna desinteressante para os alunos. Jo Boaler, em seu livro Mentalidades Matemáticas, aborda a importância de mudarmos este pensamento. Ela acredita que todos são capazes de aprender matemática de alto nível. Para isso, aponta algumas práticas que fortalecem o desenvolvimento de uma mentalidade fixa e propõe a substituição por propostas de ensino e aprendizagem que focam em desenvolver uma mentalidade de crescimento. Estas incluem a ideia de que erros são importantes oportunidades de aprendizado e por isto devem ser incentivados, em conjunto com atividades desafiadoras que trazem motivação, engajamento, que evitam que a matemática se torne uma disciplina de repetição de procedimentos, sem despertar a curiosidade e o interesse dos alunos. Neste contexto, o uso de tecnologias, muito presente no dia a dia dos alunos, traz maior engajamento nas aulas. Partindo do olhar trazido por Jo Boaler, o presente trabalho propõe articular a mentalidade de crescimento e o uso de recursos digitais no ensino, utilizando a Teoria de Grafos para fazer esta conexão, visto que grafos são um tema da matemática com muitas possibilidades de aplicação no cotidiano e em problemas práticos. No trabalho, são apresentadas inicialmente as principais ideias de Jo Boaler sobre como ajudar a desenvolver mentalidades matemáticas e um levantamento das dissertações disponíveis na plataforma do PROFMAT sobre Teoria de Grafos. Em seguida, é abordada a importância do uso das tecnologias no ensino da matemática, assim como o aplicativo "One Line", um jogo que envolve a aplicação de propriedades dos grafos, e é sugerido um site interativo para aprendizagem da teoria de grafos de forma dinâmica. Então, são descritas algumas atividades envolvendo grafos, realizadas com turmas de 7º, 8º e 9º ano do ensino fundamental, com objetivo de investigar se os alunos identificariam quais propriedades dos grafos estão envolvidas e como realizariam os desafios que foram propostos. Ao final, o trabalho apresenta o embasamento teórico de grafos, referindo os conceitos que aparecem nas atividades.

**Palavras-chave**: Mentalidades Matemáticas; aplicativos; Grafos; ensino fundamental.

**ABSTRACT**

One of the greatest challenges of teaching mathematics is the low motivation of students. This is partly due to the idea that mathematics is a difficult subject and distant from everyday reality. In addition, there is a widespread thought in the world that some people have the innate ability to learn mathematics and others do not. Without confidence in one's ability, mathematics becomes uninteresting to students. Jo Boaler, in her book Mathematical Mindsets, addresses the importance of changing this thought. She believes that everyone is capable of learning high-level math. For this, it points out some practices that strengthen the development of a fixed mindset and proposes its replacement by teaching and learning proposals that focus on developing a growth mindset. These include the idea that mistakes are important learning opportunities and therefore should be encouraged, together with challenging activities that bring motivation, engagement, that prevent mathematics from becoming a discipline of repetition of procedures, without arousing curiosity and students' interest. In this context, the use of technologies, very present in the daily lives of students, brings greater engagement in classes. Starting from the perspective brought by Jo Boaler, the present work proposes to articulate the growth mentality and the use of digital resources in teaching, using Graph Theory to make this connection, since graphs are a mathematics theme with many possibilities of application in everyday and practical problems. In the work, Jo Boaler's main ideas are initially presented on how to help develop mathematical mindsets and a survey of dissertations available on the PROFMAT platform on Graph Theory. Then, the importance of the use of technologies in the teaching of mathematics is discussed, as well as the "One Line" app, a game that involves the application of graph properties, and an interactive website is suggested for learning graph theory in a dynamic way. Then, some activities involving graphs are described, carried out with classes of 7th, 8th and 9th grade of elementary school, with the objective of investigating whether students would identify which properties of graphs are involved and how they would perform the challenges that were proposed. At the end, the work presents the theoretical basis of graphs, referring to the concepts that appear in the activities.

**Keywords**: Mathematical Mindsets; Apps; Graphs; Elementary School.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

## SUMÁRIO

# 1 INTRODUÇÃO

Este trabalho nasce da convicção de que todos podem aprender matemática em qualquer nível. Através dos anos da minha vida escolar, minha relação com a matemática foi se transformando. O interesse pela disciplina surgiu desde que eu era pequeno, sendo minha matéria favorita e aquela na qual eu tirava as maiores notas. Entretanto, no decorrer dos anos, meu interesse pela matemática diminuiu consideravelmente, visto que, o ensino da mesma passou a ser baseado em exercícios repetitivos e procedimentos a serem reproduzidos. Mesmo permanecendo um "bom"aluno, não estava tão motivado como no início da minha vida escolar. Contudo, no ensino médio, bons professores de matemática a apresentaram de forma diferente, sendo ela dinâmica e interativa, me ajudando a redescobrir o amor pela disciplina. Pensando nisso, me tornei professor de matemática. Portanto, este trabalho foi desenvolvido motivado pela certeza de que a matemática é para todos, para que esta mensagem seja transmitida e novas formas de ensinar matemática alcancem cada vez mais alunos, assim como fui alcançado.

No percurso do mestrado no PROFMAT, conheci a proposta de Jo Boaler em seu livro *Mentalidades Matemáticas*, que fundamenta a ideia de que todos os alunos têm a capacidade de aprender matemática. A autora enriqueceu com dados de pesquisa as ideias que haviam me levado a ensinar matemática. Deste modo, o presente trabalho teve como finalidade abordar as mentalidades matemáticas, propostas por Jo Boaler, articulando o trabalho da autora com as demandas do ensino da matemática no mundo atual. De forma específica, este trabalho busca discutir as ideias de Jo Boaler no contexto de atividades envolvendo grafos, realizadas por alunos dos anos finais do ensino fundamental, com o uso de recursos tecnológicos. Objetiva, assim, propagar a importância do desenvolvimento das mentalidades matemáticas no alunos. Para alcançar tais objetivos, foram realizadas diferentes etapas para a elaboração deste trabalho, que está estruturado em: introdução, seis capítulos e considerações finais. Após a introdução, o segundo capítulo é dedicado a apresentar conceitos e propostas de Jo Boaler no livro *Mentalidades Matemáticas*, destacando suas principais contribuições na obra.

O terceiro capítulo descreve os resultados do levantamento realizado na plataforma do PROFMAT acerca das dissertações disponíveis sobre o tema de Teoria de Grafos. Desse modo, uma vez mapeado o campo de estudo já existente sobre o tema, seria possível investigar de que forma os grafos têm sido abordados nos trabalhos publicados no programa e se algum deles articulara este tema com as mentalidades matemáticas.

O quarto capítulo apresenta fundamentos teóricos sobre Teoria de Grafos.

O quinto capítulo aborda as possibilidades e os desafios do uso de aparatos tecnológicos na aprendizagem de matemática no ensino básico, visto que estes estão presentes cotidianamente na vida dos alunos e o uso de aplicativos está dentro do campo de interesse dos estudantes, contribuindo para maior motivação e participação nas aulas. Além disso, este capítulo sugere um site interativo para auxiliar na aprendizagem de Teoria dos Grafos, buscando promover a postura ativa dos alunos no entendimento desse tema.

O sexto capítulo descreve atividades com grafos realizadas em turmas de 7º, 8º e 9º anos do ensino fundamental, numa escola particular do Rio de Janeiro, na qual dou aula. Essas atividades foram aplicadas por mim, e realizadas em dois grupos, com alguns alunos participando em sala de aula e outros online em casa, por conta da pandemia de COVID-19, a fim de compreender, por meio de tarefas que promovessem o pensamento investigativo e a autonomia diante dos desafios propostos, como os alunos buscariam solucionar o que foi apresentado e como (ou se) construiriam hipóteses.

Nas considerações finais estão presentes comentários e sugestões de estudos futuros, tendo em vista novas questões que emergiram na elaboração deste trabalho.

# 2 MENTALIDADES MATEMÁTICAS

Neste capítulo é feita a apresentação da obra da pesquisadora Jo Boaler, mentora do projeto Youcubed[1], da Universidade de Stanford, dando especial destaque ao livro Mentalidades Matemáticas que faz parte do referencial teórico utilizado para este trabalho.

Em Boaler (2020) vemos que a ideia de que algumas crianças não possuem habilidades necessárias para o aprendizado em matemática, que o sucesso na disciplina está reservado para as pessoas que são consideradas "inteligentes"ou que há um tempo próprio para aprender e, por isso, é tarde demais para quem não teve a fundamentação básica devida, levam a aceitar facilmente que muitos fracassem no seu aprendizado e detestem matemática.

Esta é a convicção de muitos professores e pais que, tentando ajudar as crianças e os jovens, acabam comprometendo seu aprendizado, dizendo que eles não devem se preocupar com o mau desempenho em matemática, naturalizando esta situação e reforçando a ideia de que a matéria não é para todos, isto é, nem todos são capazes de aprender matemática. Estas pessoas permitem que os alunos desistam da matemática antes mesmo de terem começado.

Mas afinal, de onde pais, professores e alunos tiraram o entendimento de que matemática é uma disciplina exclusiva, isto é, apenas para um grupo seleto de pessoas? Novas pesquisas indicam que este pensamento está profundamente enraizado no campo da matemática. Conforme consta em Leslie et al. (2015 apud Boaler 2018, p. viii) dentre todas as áreas de ciência, tecnologia, engenharia e matemática, os acadêmicos de matemática foram os mais radicais na ênfase à capacidade inata fixa.

Se mensagens de incapacidade são transmitidas constantemente às crianças e jovens, não é de se estranhar que os estudantes tenham medo da matemática e que estes cheguem à conclusão que não são "pessoas de matemática", quando não conseguem entender os conceitos de maneira rápida ou quando demoram a fazer certos cálculos.

Um dos objetivos do presente trabalho é contribuir para desmistificar este tipo de pensamento. Procuraremos mostrar que todos são capazes de aprender matemática em altos níveis.

Segundo Carol Dweck (2017) todas as pessoas têm uma mentalidade, isto é, uma crença essencial sobre o seu modo de aprender. As mentalidades se classificam de duas maneiras, como mentalidade fixa e mentalidade de crescimento. As pessoas que possuem a mentalidade fixa são aquelas que acreditam que podemos aprender coisas novas, mas que não somos capazes de mudar o nível de inteligência. Quem é *limitado* será sempre limitado

[1] <https://www.youcubed.org/pt-br/>, último acesso em 13 de maio de 2022

e quem é *inteligente* será sempre inteligente. Já as pessoas que possuem mentalidade de crescimento são aquelas que acreditam que a inteligência aumenta com esforço e trabalho duro, para estas sempre é possível aumentar o nível de inteligência.

Pesquisas mostram que as mentalidades têm uma importância fundamental, pois elas levam a comportamentos diferentes de aprendizagem, criando diferentes resultados por partes dos alunos. Esta ideia é reforçada por Blackwell (2007 apud BOALER, 2018) ao afirmar que quando as pessoas mudam suas mentalidades e acreditam que podem aprender em níveis elevados, elas alteram suas rotas de aprendizagem.

Muitos estudantes possuem uma ideia negativa sobre a matemática de tal maneira que alguns podem possuir uma mentalidade de crescimento para os demais temas da vida, mas uma mentalidade fixa em relação a matemática, eles acreditam ser incapazes de obter algum sucesso nela.

Muitas pessoas ficaram traumatizadas com a matemática durante seus processos de aprendizagem. Esses traumas e a ansiedade em relação à matemática, se mantêm vivos no seu íntimo mesmo depois de sair da escola, porque essas crenças incorretas sobre a matemática e de que alguns podem aprender e outros não, são disseminadas por todo o lado. Quando os estudantes constroem essa ideia, de que não são capazes de aprender matemática, eles frequentemente perpetuam uma má relação com a disciplina para toda a sua vida.

Jo Boaler (2018), relata no prefácio do seu livro *mentalidades matemáticas*, o caso de Vivien Perry, uma cientista reconhecida em Inglaterra que tem um medo paralisante, que não lhe permite calcular porcentagens na hora de preencher documentos fiscais. Viven relatou que quando ela estava na escola, foi deixada de castigo por não saber a tabuada do sete. E este episódio com certeza deixou marcas no seu processo de aprendizagem contribuindo para que hoje ela tenha esse medo em relação à matemática.

Mensagens negativas como a referida acima são passadas diariamente a nossos alunos. E muitas vezes, algumas delas mesmo sem a intenção de prejudicar o estudante, podem colocá-lo numa trajetória matemática prejudicial e duradoura. Essas trajetórias podem ser mudadas a qualquer instante, entretanto, para muitos, elas permanecem e isto acaba afetando suas futuras experiências com a matemática.

A ansiedade e traumas provocados pela matemática e a forma como é possível ajudar as pessoas a ultrapassar essas situações têm sido estudadas por vários autores. Segundo Boaler (2018), é difícil fazer uma estimativa do número de pessoas ao redor do mundo que foram afetadas pelo que é considerado um nefasto ensino da disciplina. Entretanto, as ideias negativas que prevalecem não são apenas originadas pelas práticas inadequadas de ensino, elas também vêm de um princípio errado que está presente na nossa sociedade e está na base do mau desempenho em matemática: apenas algumas pessoas podem ser boas na disciplina. Isto traduz a ideia de que as pessoas boas em matemática possuem um *dom* e as que não são boas, não possuem esse dom. Este pensamento é o principal responsável por grande parte do fracasso generalizado em matemática.

Ainda, segundo Boaler (2018) a matemática é apresentada muitas vezes como uma matéria muito difícil, desinteressante, inacessível, compreensível apenas para *nerds*. Nesse cenário, fica fácil perceber porque tantas crianças perdem o interesse pela matemática durante o seu percurso escolar. Esta concepção de que apenas algumas pessoas sabem matemática, está bem enraizada na nossa sociedade, e muitas pessoas têm ideias sobre a matemática que não têm sobre qualquer outra disciplina. Para estas, a matemática é diferente pois ela é *exata*, porque é uma disciplina de respostas certas e erradas, pensamento que traduz um equívoco sobre a natureza da matemática.

> A matemática é uma disciplina muito ampla e multidimensional, que requer raciocínio, criatividade, estabelecimento de conexões e interpretação de métodos, ela é um conjunto de ideias que ajudam a iluminar o mundo está em constante mudança. (BOALER, 2018, p. xv).

Outra ideia bastante errada sobre a matemática, e que esta presente em muitos lugares, consiste em considerar que a capacidade de uma pessoa saber fazer cálculos significa que ela é mais inteligente e mais capaz do que as pessoas restantes. Assim, é fundamental que a relação entre inteligência e habilidade de fazer cálculos seja reformulada junto aos alunos, pois, muitas vezes, eles entendem a dificuldade em fazer cálculos como um indicador de que não são inteligentes. Esta ideia impacta a relação dos estudantes com a aprendizagem de matemática. A combinação de todas essas ideias sobre matemática tem um efeito destruidor em muitas crianças e jovens. Eles passam a acreditar que a inteligência está relacionada com a capacidade de aprender matemática, que compreender a disciplina é um dom e, como eles não conseguem entender, concluem que não possuem esse dom. Além de fracassarem em matemática, acreditam também que são pessoas sem inteligência e que não terão sucesso nas demais áreas da vida.

Se os conceitos de mentalidade fossem incutidos no ensino de matemática, professores e pais poderiam transformar as vivências presentes e futuras dos jovens, sendo para tal necessário a abordagem da matemática com uma mentalidade de crescimento. As intervenções de mentalidade, úteis no processo de transformação de uma mentalidade fixa para uma mentalidade de crescimento, precisam ter continuidade e fazer parte da realidade da sala de aula.

## 2.1 O cérebro e a aprendizagem matemática

Antigamente, acreditava-se que o cérebro era inalterável, não tendo a capacidade de sofrer modificações. Essa crença foi consequência de os cientistas não conseguirem estudar o cérebro humano. No entanto, a partir dos anos 90 do século passado, com o desenvolvimento da neurociência, devido ao recurso a novas tecnologias, tal estudo passou a ser possível. Hoje, os cientistas podem estudar a atividade cerebral de crianças e adultos. Como consequência, surpreendendo os cientistas, surgiu recentemente o conceito de neuroplasticidade. Estudos mostram a capacidade do cérebro em crescer e mudar por um curto período de tempo como podemos ver em Abiola e Dhindsa (2011). Duas ideias são aqui fundamentais, a de sinapse e a de rota neural. Quando aprendemos uma nova ideia, um novo conceito, uma corrente elétrica é disparada em nossos cérebros, passando por sinapses e ligando diferentes áreas cerebrais. Quando um conteúdo é aprendido de maneira profunda, a atividade sináptica cria conexões duradouras nos nossos cérebros, formando caminho estruturais (BOALER 2018).

No seu livro *Mente sem barreiras*, Jo Boaler (2020) fala sobre o caso dos tradicionais táxis pretos londrinos. Um candidato a motorista deste tipo de transporte, deve conhecer a localização de 25 mil ruas e 20 mil pontos de referência da cidade de Londres num raio de 10 km a partir da estação central Charing Cross. Para isso são necessários, pelo menos, quatro anos de estudo. Ao final do treinamento, os motoristas fazem uma prova. Em geral, só ao final de 12 tentativas conseguem obter a licença. Esta situação peculiar, despertou a curiosidade em pesquisadores, que resolveram estudar o cérebro de alguns candidatos, antes e após o treinamento, tendo concluído, segundo Maguire (apud BOALER 2020, p. 13) que o hipocampo dos motoristas de táxi cresce consideravelmente enquanto estão exercendo a profissão, mas que após a aposentadoria, seu tamanho volta ao inicial.

Outro relato, refere que pesquisadores do National Institute for Mental Health[2] fizeram um estudo em que alguns participantes recebiam alguns exercícios nos quais deveriam trabalhar diariamente por dez minutos durante três semanas. O desenvolvimento cerebral desses participantes foi comparado com integrantes da pesquisa que não recebiam nenhum tipo de tarefa. Foi observado que aqueles que trabalharam nos exercícios por alguns minutos apresentavam mudanças cerebrais estruturais. Segundo Karni (1998 apud BOALER, 2018, p. 4) "os cérebros dos participantes foram reprogramados e cresceram com a prática das atividades realizadas diariamente durante 15 dias úteis". Agora, parece ser pertinente pensarmos no seguinte: se os cérebros mudam em apenas três semanas, o que poderia acontecer após um ano de aulas de matemática em que os alunos tenham à sua disposição materiais adequados e recebam mensagens positivas sobre seu potencial?

Como já anteriormente referido, algumas pessoas têm uma opinião errada sobre a pré-determinação da nossa capacidade à nascença e, para reforçar suas ideias, apontam para a existência de personalidades geniais como Einstein e Beethoven. Esse esteriótipo é questionado por Boaler, "as novas evidências da neurociência nos mostram que todas as pessoas, com as mensagens e o ensino adequado, podem obter sucesso na matemática e todos podem ter altos níveis de aprendizagem"(2018, p. 4). Para alguns professores, em especial para aqueles que passaram anos decidindo quem era bom em matemática e

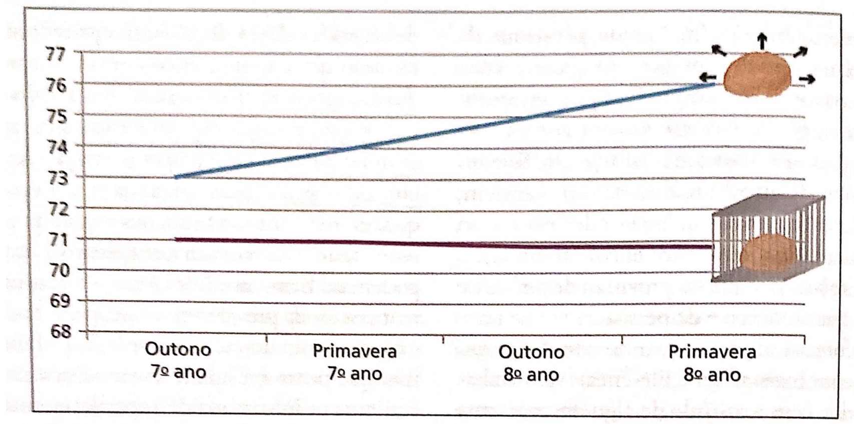
[2] Instituto Nacional para a Saúde Mental

quem não era, esse é um fato de difícil aceitação. Entretanto, atualmente é sabido que as diferenças presentes no nascimento desaparecem a partir das experiências de aprendizagem que vamos vivendo. Nossas sinapses cerebrais são disparadas a cada momento do nosso dia, nosso cérebro está sempre disposto a aprender, e portanto, estudantes que integram ambientes onde uma mentalidade de crescimento é estimulada, são capazes de aprender qualquer coisa (BOALER 2018). A diferença entre os alunos que têm sucesso e aqueles que não obtêm, reside na forma como eles encaram a vida, e isso resulta das mensagens que vão recebendo sobre o seu potencial e nas diversas possibilidades de construção do seu conhecimento. "As melhores oportunidades de aprender acontece quando os estudantes acreditam em si mesmos"(BOALER, 2018, p. 5).

Ao nascer, todos têm a mesma capacidade de aprender matemática, essa ideia tem que chegar aos jovens, por isso é muito importante que os conhecimentos sobre o cérebro, à luz da neurociência, lhes sejam apresentados.

Estudantes que possuem uma mentalidade fixa temem o desconhecido e estão mais propensos a desistir quando deparam com um obstáculo, ao contrário daqueles que possuem uma mentalidade de crescimento, que continuam tentando mesmo quando existe alguma dificuldade. Um grupo de alunos do 7° ano de uma escola norte americana participou num estudo cujos resultados foram surpreendentes. Primeiramente, os alunos responderam a um questionário com o objetivo de determinar sua mentalidade. Durante os dois anos seguintes, o desempenho matemático foi monitorado. A aprendizagem dos alunos com mentalidade fixa não variou, enquanto que a dos alunos com mentalidade de crescimento aumentou. Estes significativos resultados podem ser observados na Figura 1.

Figura 1 – Mentalidade fixa vs Mentalidade de crescimento




Fonte: BLACKWELL; TRZESNIEWSKI; DWECK, 2007 apud BOALER, 2018, p. 6

Reforçando as conclusões desta experiência, Pablo Zoido, analista do PISA, e Jo Boaler analisaram dados do PISA e perceberam que: "os estudantes com melhor desempenho no mundo são aqueles que possuem mentalidade de crescimento. Eles superam os outros estudante no equivalente a mais de uma ano de aprendizagem"(BOALER 2018, p. 6).

Nos seus estudos sobre mentalidades, Carol Dweck (2017) observou que as meninas com alto desempenho são detentoras de uma mentalidade fixa, o que vai limitar a sua aprendizagem. Uma das mensagens transmitidas pela mentalidade fixa consiste em acreditar que uma pessoa é ou não é inteligente. Por isso, os estudantes com essa mentalidade têm dificuldade em aceitar desafios, em experimentar tarefas difíceis, pois temem fracassar e o fracasso seria visto como ausência de inteligência.

Os elogios recebidos por parte de pais e professores, contrariamente ao que se pensa, são em geral nocivos. É habitual elogiar os alunos, dizendo que eles são inteligentes ou mesmo geniais, quando desempenham bem alguma atividade. Esse tipo de elogio fixo faz com que num primeiro momento o aluno se sinta bem, mas depois, quando surge alguma dificuldade e quando comete algum erro, o que é normal, ele tende a sentir que não é inteligente. Por isso, esses alunos ficam com medo de fazer tarefas difíceis, de aceitar desafios, pois podem falhar e, consequentemente, os outros irão pensar que eles não são tão inteligentes. Neste contexto, o julgamento dos outros tem um papel muito importante. O elogio gera uma sensação agradável, de conforto, mas ao atribuir um elogio por algo que supostamente são e não por algo que fizeram, os estudantes reforçam a sua mentalidade fixa e a ideia de uma capacidade fixa. Em alternativa, para promover uma mentalidade de crescimento, devemos centrar os elogios em atitudes, no trabalho, na perseverança, no fato de não desistir. Mas, para se conseguir ter este tipo de prática é fundamental que os próprios professores desenvolvam uma mentalidade de crescimento, pois só assim, poderão transmitir essa confiança ao aluno e promover que ele construa seu conhecimento da disciplina com confiança e entusiasmo.

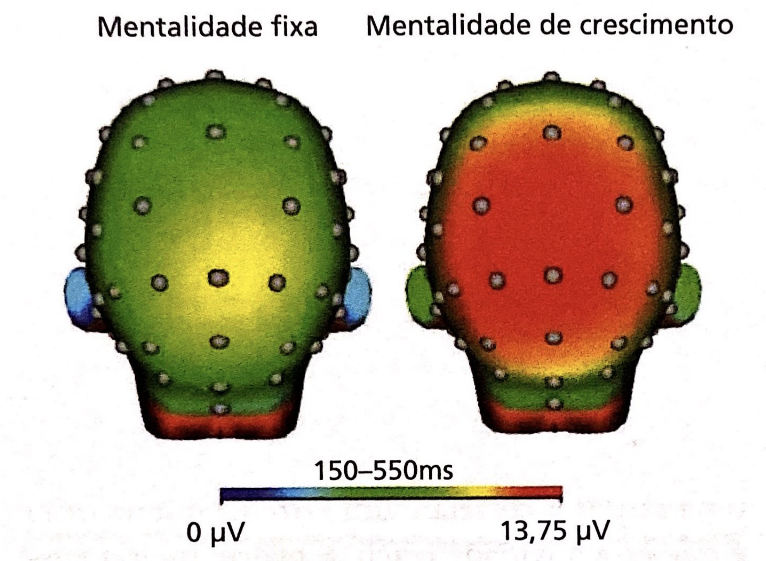
## 2.2 O poder dos erros e das dificuldades

O professor, em geral, tem pavor ao erro. Se existe algo de que ele tem temor, é errar perante os alunos. No sentido contrário, e considerando o erro como um momento positivo para aprendizagem, Carol Dweck afirma que "toda vez que um aluno comete um erro de matemática, ele cria uma sinapse"(BOALER, 2018, p. 10) Esta declaração possui um valor muito grande, porque contraria aquela visão equivocada de que cometer um erro é um indicador de pouco conhecimento ou pior, como pensam alguns estudantes: se errei então não sirvo para matemática. Repare que de acordo com o estudo feito por Jason Moser (2011, apud BOALER 2018, p. 10), sobre os mecanismo neurais que operam no cérebro quando se comete um erro, quando cometemos um erro, o cérebro tem duas possíveis respostas. A primeira, chamada de negatividade relacionada ao erro (NRE), é um aumento da atividade elétrica quando o cérebro experimenta o conflito entre uma resposta correta e um erro. A segunda resposta, chamada de Pe, é um sinal cerebral que reflete atenção consciente a erros. Isso acontece quando existe consciência de que um erro foi cometido e a atenção consciente é dada a ele.

Neste estudo de Moser, foram analisadas as mentalidades das pessoas e feita uma comparação entre as respostas NRE e Pe quando cometiam erros ao responder. Dois resultados importantes foram observados, os cérebros dos estudantes reagiam com maiores respostas NRE e Pe quando cometiam erros, e atividade cerebral era maior após erros nos indivíduos com mentalidade de crescimento.

Na Figura 2 observa-se a diferença de atividade cerebral registrada em pessoas com mentalidade fixa e de crescimento quando erram.

Figura 2 – Atividade cerebral em indivíduos com mentalidade fixa e de crescimento




Fonte: MOSER el al, 2011 apud BOALER, 2018, p. 12

Esse estudo mostrou, também, que o nível de consciência do erro é maior em pessoas com mentalidade de crescimento do que em pessoas com a mentalidade fixa, e, por isso, as primeiras mostram-se mais dispostas a voltar a pensar e corrigir os erros.

Quando cometemos erros, a atividade elétrica aumenta e nosso cérebro dispara e cresce, e portanto, os erros consistem em oportunidades para a aprendizagem, mas não somente isso, são também oportunidades para o crescimento do cérebro e por isso se revelam muito importantes.

Entretanto, crianças e adultos possuem uma maneira diferente de olhar os erros. "Eles pensam que o erro significa que não são pessoas aptas para a matemática pois foram educados numa cultura voltada para o desempenho, na qual erros não são valorizados - ou pior são punidos"(BOALER, 2018, p. 12). Pelo exposto, verifica-se ser necessário que os alunos cometam erros, no entanto, a maioria das aulas de matemáticas são planejadas com atividades cujo o foco é apenas o acerto.

O estudo de Moser também mostrou que as concepções que temos sobre nós mesmos alteram os mecanismos de nossos cérebros. "Se acreditamos que podemos aprender e que erros são valiosos, nossos cérebros se desenvolvem mais ao cometermos um erro"(BOALER, 2018, p. 13).

Nesta linha de pensamento, também na esfera empresarial, o que separa os executivos mais bem-sucedidos dos menos não é o número de êxitos, mas sim o número de erros que cometem, sendo os mais bem-sucedidos aqueles que cometem mais erros. Sobre isso, Peter Sims, colaborador do The New York Times, escreveu sobre a importância dos erros para um pensamento empresarial e criativo. Ele diz:

> A imperfeição faz parte de qualquer processo criativo e da vida, mas, por algum motivo, vivemos em uma cultura que tem um medo paralisante do fracasso, o qual impede a ação e reforça um perfeccionismo rígido. Esse é o estado de espírito mais incapacitante em que você pode estar se quer ser mais criativo, inventivo ou empreendedor (SIMS, 2011 apud BOALER, 2018, p. 13).

Os hábitos das pessoas bem-sucedidas são resumidas da seguinte forma:

> - Sentem-se confortáveis com seus erros.
> - Experimentam ideias aparentemente extravagantes.
> - Estão abertas a experiências diferentes.
> - Brincam com ideias sem julgá-las.
> - Estão dispostas a ir contra ideias tradicionais.
> - Persistem apesar das dificuldades. (BOALER, 2018, p. 13)

Estas ideias, podem e devem ser usadas na aprendizagem matemática. Assim, o ideal é que os alunos se sintam livres ao estudar matemática, experimentando caminhos diferentes e sem medo de cometer erros. Que eles brinquem com as atividades matemática e tentem experimentar *ideias aparentemente extravagantes*. Que não desistam, que persistam apesar das dificuldades e que estejam dispostos a desafiar as ideias tradicionais.

Uma das mensagens mais poderosas que professores e pais podem transmitir consiste nas mensagens que passam sobre erros e respostas erradas em matemática. Quando explicamos aos estudantes que os erros são positivos e qual a sua importância para o crescimento cerebral, isso tem um efeito libertador para eles.

Uma das estratégias citada por Jo Boaler para celebrar os erros em sala de aula, é o professor destacar seus erros preferidos cometidos em algum trabalho ou avaliação. O professor compartilha os erros com a turma e abre uma discussão sobre o motivo de ser um erro e o que esteve na sua origem. Esse momento é importante para reforçar a mensagem de que cometer um erro é bom, pois quando se comete um erro, o cérebro dispara sinapses e com isso cresce.

A valorização dos erros em sala de aula é fundamental, mas essa mensagem positiva que o professor procura transmitir, tanto ao grupo, como individualmente, tem um forte adversário. Um dos aspectos muito importantes e que transmite uma mensagem negativa sobre os erros é a avaliação quantitativa das tarefas de matemática. A realização de provas e as notas a elas atribuídas são um entrave muito grande ao ensino de uma mentalidade de crescimento. Por isso, o ideal seria deixar de sujeitar os alunos a provas.

A ideia de que o processo de aprendizagem se resumia à memorização de regras e procedimentos foi rejeitada por Piaget, nos anos 30 do século passado. Em contraponto, ele refere que a verdadeira aprendizagem depende do entendimento de como as ideias se entrelaçam. Para Piaget, "os estudantes possuem modelos mentais que mapeiam o modo como as ideias se encaixam, e quando seus modelos fazem sentido eles se encontram em um estado que ele chamou de equilíbrio"(BOALER, 2018, p. 17). Perante novas ideias, os estudantes realizaram um esforço para conseguir as encaixar em seus modelos mentais. Quando tal não é possível, o modelo existente precisa de se modificar, entrando num estado que Piaget chamou de desequilíbrio. Este pode ser desconfortável, mas é ele que conduz à verdadeira aprendizagem, provocando novos estados de equilíbrio.

Esse estado de desequilíbrio só poderá ocorrer se as tarefas propostas aos alunos forem desafiadoras e se propiciam o erro. Mas não pode ser esquecido que este processo precisa ser acompanhado de mensagens positivas sobre o erro, de modo que os alunos se sintam confortáveis ao errar e se sintam estimulados a experimentar novas ideias. Este posicionamento sobre o papel que o erro desempenha na aprendizagem tem que ser transmitido aos pais. Eles precisam entender que acertar tudo não significa aprender.

## 2.3 A criatividade e a beleza da matemática

Qual é a melhor definição do que é matemática? Por que os alunos têm uma relação de amor e ódio com esta disciplina? E por que ela difere tanto das outras matérias? A matemática é diferente não só porque ela é ensinada de forma distintas das outras disciplinas, mas também porque as pessoas têm crenças diferentes a seu respeito. Muitas pessoas vão dizer que a matemática é a matéria que possui respostas certas e respostas erradas, que não há espaço para o debate, que devemos aceitar sem questionar. E, neste sentido, o papel do estudante na aula de matemática é de apenas acertar as perguntas.

> Os estudantes raramente pensam que estão nas aulas de matemática para apreciar a beleza da disciplina, fazer perguntas profundas, para explorar o rico conjunto de conexões que compõe a matéria, ou mesmo para aprender sobre a aplicabilidade dela. Eles acham que estão nas aulas de matemática para executar tarefas (BOALER, 2018, p. 21).

Segundo Boaler (2018, p. 21), "os alunos em geral dizem qua a matemática é uma matéria de cálculos, procedimentos ou regras". Esta concepção contrasta com a resposta do que é a matemática dada pelos próprios matemáticos: "a matemática é o estudo de padrões, é uma disciplina estética, criativa e bela."(DEVLIN, 1997 apud BOALER, 2018, p. 21).

Essa diferença entre a matemática real e a matemática vista pelos alunos em sala de aula é o ponto fulcral dos problemas com a matemática que são enfrentados pelos professores na educação. Para Boaler, se as aulas fossem focadas em mostrar a natureza real da disciplina não teríamos tantos maus resultados e tanto desinteresse que boa parte dos alunos têm pela matemática. Ela diz que "a matemática é um fenômeno cultural; um conjunto de ideias, conexões e relações desenvolvidos para que as pessoas compreendam o mundo. Em sua essência, a matemática trata de padrões"(2018, p. 22).

Esse pensamento de Boaler contrasta muito com que encontramos em sala de aula. Para os alunos, a matemática é uma matéria que não tem serventia no cotidiano, e que a função deles é fazer um monte de contas sem sentido. Muitos querem terminar logo a escola para que possam se ver livres da matemática. Entretanto, para compreender a real natureza da matemática, é fundamental observarmos a matemática da natureza. Um exemplo, muito citado, é o da famosa sequência atribuída ao matemático italiano Leonardo Fibonacci (1170-1250) cujos dois primeiros termos são iguais a 1 e cada um dos termos seguintes é obtido pela soma dos seus dois antecessores $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...)$. Se pegarmos cada termo, a partir do segundo, e dividirmos pelo seu antecessor, à medida que fazemos isso, vamos chegar muito próximo do número $1,618$ chamado de proporção áurea. Esta constante tem um papel importante na arte clássica e está presente nas espirais em pinhas, flores e abacaxis por exemplo. Outro exemplo interessante é o do golfinho que emite ondas sonoras para descobrir onde estão os outros golfinhos. Através do tempo em que as ondas vão e vêm, ele consegue estimar a distância, fazendo assim um cálculo algébrico. Estes exemplos citados por Boaler (2018) são interessantes e excelentes pontos de partida para mostrar aos estudantes que a matemática é uma disciplina onde o fundamental não é saber fazer contas. É necessário que os alunos percebam que a matemática é a disciplina do estudo de padrões.

Pesquisas mostram que quando os alunos têm a oportunidade para propor problemas matemáticos e pensar situações do cotidiano, na matemática envolvida dentro destas situações, eles se envolvem de uma maneira profunda e alcançam melhores resultados (Silver, 1994 apud Boaler, 2018). Com o passar dos anos, a matemática escolar foi se distanciando cada vez mais da matemática real e da matemática usada no cotidiano, com o intuito de mudar este panorama, o matemático britânico Conrad Wolfram, citou quatro etapas fundamentais para trabalhar com matemática (WOLFRAM, 2010 apud BOALER, p. 26):

1. Propor uma questão.

> 2. Passar da vida real para um modelo matemático.
> 3. Realizar um cálculo.
> 4. Passar do modelo para a vida real, para ver se a pergunta original foi respondida.

A grande importância das etapas 1, 2 e 4 é reconhecida por Wolfram, no entanto, 80% da matemática escolar está centrada na etapa 3. Mas, são as outras etapas que ajudam os estudantes a desenvolver o raciocínio, que é fundamental na construção da matemática real. Matemáticos provam teoremas através do raciocínio, produzindo argumentos que vão convencer outros matemáticos de que a sua ideia está correta. Neste sentido, percebemos que a matemática é uma disciplina social, onde cada matemático precisa da ajuda do outro para provar os teoremas e suas conjecturas. Quando os alunos focam apenas nos cálculos, eles se fecham na sua individualidade e não trocam ideias com seus colegas. Quando se preocupam em entender o problema e raciocinar sobre, eles têm uma conexão com a matemática real, se interessam mais e ainda conseguem se ajudar. Desta maneira, é muito importante que as atividade propostas pelos professores tenham essa abertura para estimular o debate entre os alunos, onde cada um pode mostrar a sua ideia, o seu raciocínio, e discutir suas propostas com os outros. Para Wolfram, uma pessoa que não sabe raciocinar sobre matemática é ineficaz no seu ambiente de trabalho. Portanto desenvolver o raciocínio não é importante somente num contexto escolar, mas também num contexto de vida profissional, pois "pessoas que apenas dão respostas a cálculos não são úteis no trabalho: elas devem ser capazes de argumentar sobre eles"(BOALER, 2018, p. 28).

Outra questão problemática que os professores enfrentam no ensino e na aprendizagem matemática, é o pensamento de que velocidade significa inteligência. A ideia de que pessoas boas em matemática são aquelas que conseguem realizar cálculos com rapidez é extremamente danosa. Com isso, temos situações em que aqueles alunos que desenvolvem um mesmo cálculo em um tempo maior que outros estudantes, acham que não são bons em matemática e acabam desistindo facilmente. "Contudo, os matemáticos, que poderíamos considerar as pessoas mais capacitadas para matemática, frequentemente, são lentos com ela"(BOALER, 2018, p. 28). Os matemáticos são lentos pois pensam a matemática de maneira minuciosa e profunda. Do mesmo modo, existem muitos estudantes que são lentos, mas que pensam a matemática de maneira profunda, mas por serem lentos, acabam achando que não são pessoas de matemática.

Uma das chaves de aprendizagem sugerida por Boaler é: "A velocidade de pensamento não é uma medida de aptidão. A aprendizagem é otimizada quando abordamos ideias, e a vida, com criatividade e flexibilidade"(2020, p. 106). A missão dos professores é ajudar os alunos a desenvolverem esta criatividade e esta flexibilidade, e também precisam ajudar a desfazer este mito de que a rapidez é necessária na aprendizagem matemática. Desta maneira os alunos vão conseguir se desenvolver e aprender cada vez mais. Isto acaba sendo uma missão difícil pois os professores recebem listas com muitos conteúdos a serem tralhados em sala e com muito pouco tempo para se aprofundar em qualquer um destes. Estes conteúdos muitas vezes são apresentados em tópicos separados, sem estabelecer nenhuma relação entre eles. Com isso, os alunos não conseguem perceber a conexão entre os assuntos, e ficam achando que aquilo simplesmente surgiu "do nada"como muitos deles dizem. Um exemplo deste fato é que em determinadas escolas, em turmas do 9° ano, os alunos aprendem sobre números irracionais no primeiro bimestre, mas só veem o teorema de Pitágoras no terceiro bimestre, sendo assim difícil estabelecer a conexão de que por exemplo o número $\sqrt{2}$ é a medida da diagonal de um quadrado de lado 1. Esta falta de conectividade entre os assuntos, faz com que os professores se deparem com uma disciplina reduzida a suas partes básicas, como uma bicicleta desmontada (Boaler, 2018). O ideal é que as listas de conteúdo estejam apresentadas de uma maneira onde seja possível estabelecer as conexões entre eles, formando grandes ideias em torno da qual vários conceitos gravitam. Listas que não sejam tão extensas e que o professor tenha liberdade para mostrar a beleza da matemática e que ele consiga desenvolver a flexibilidade e a criatividade dos seus alunos. Para que assim, eles possam olhar a bicicleta, andar e se divertir e não observar apenas as peças soltas.

## 2.4 Criando mentalidades matemática: A importância da flexibilidade com números

Em alguns lugares do mundo, como os Estados Unidos e o Reino Unido, os estudantes com até sete anos já foram apresentados a algoritmos de adição, subtração, multiplicação e divisão. Também já passaram pela árdua missão de "decorar"a tabuada. Para muitos, essas primeiras experiências podem ser traumatizantes e, a partir daí, começarem os seus problemas e suas dificuldades com a matemática. A curiosidade que está naturalmente presente nos primeiros anos de vida das crianças antes de se depararem com esses métodos é substituída pela certeza de que a matemática é uma disciplina onde o fundamental é seguir uma série de instruções e regras. "O melhor e mais importante impulso que podemos proporcionar a nossos alunos é incentivá-los a brincar com números e formas, pensando sobre os padrões que eles são capazes de perceber"(BOALER, 2018, p. 31).

O que diferencia os alunos bem sucedidos em matemática daqueles que são menos bem sucedidos é o fato dos primeiros buscarem entender a matemática, procurar sentido nas suas ideias e explorar as suas conexões. Eles abordam a matemática com uma mentalidade matemática, a disciplina é vista como uma matéria de crescimento, onde eles têm que pensar sobre, buscar fazer conexões e encontrar um sentido para as ideias. Geralmente, acontece o contrário, eles pensam que a matemática é um conjunto fixo de ideias e métodos, que eles conseguem compreender ou não. Entretanto, quando eles enxergam a matemática da maneira citada, "como um conjunto de ideias e relações, e conseguem dar sentido a elas, eles desenvolvem uma mentalidade matemática"(BOALER, 2018, p. 32).

Fica então a pergunta: Como desenvolver mentalidades matemáticas nos estudantes para que eles vejam a matemática como uma busca de sentido?

Um dos aspectos mais importantes na busca de sentido matemático é o senso numérico. Desenvolver o senso numérico é extremamente importante para os alunos obterem sucesso na matemática. O senso numérico é a capacidade de interagir com os números de maneira flexível e conceitual. Podemos ver um exemplo de senso numérico ao resolver a conta $98 \times 15$ na Figura 3:

Figura 3 – Calculando $98 \times 15$

Modo 1

$$\begin{array}{r} 98 \\ \times 15 \\ \hline 490 \\ +98\phantom{0} \\ \hline 1470 \end{array}$$

Modo 2

$$100 \times 15 = 1500$$
$$2 \times 15 = 30$$
$$1500 - 30 = 1470$$

Fonte: O autor, 2022

No modo 1, o cálculo é feito de maneira tradicional, usando o algoritmo ensinado nas escolas brasileiras. O modo 2 é resolvido pensando de outra maneira, uma maneira mais flexível. É mais fácil multiplicar por potências de 10, e dessa forma o 98 é visto como $100 - 2$, tornando-se uma maneira muito mais fácil e muito mais rápida. Para Gray e Tall, a presença do senso numérico é o que diferencia os alunos de alto rendimento, dos alunos de baixo rendimento (1994 apud BOALER, 2018). Os alunos de baixo rendimento não lidam com os números com flexibilidade e senso numérico, eles ficam presos a métodos e procedimentos que memorizaram. Quando estes alunos são identificados como estudantes que têm dificuldade e, como consequência, recebem mais exercícios do mesmo tipo, e com isso reforçando nos alunos a ideia de que os algoritmos e métodos são apenas o único caminho para resolver esses problemas, e consolidando o pensamento de que a matemática é uma disciplina de métodos e regras. O correto seria passar para eles atividades onde eles possam buscar compreender e encontrar sentido nas tarefas. "Uma mentalidade matemática reflete uma abordagem ativa do conhecimento de matemática, na qual os estudantes veem seu papel como o de compreensão e busca de sentido"(BOALER, 2018, p. 33).

O desenvolvimento do senso numérico se dá através do aprofundamento da matemática, e é fundamental ter uma mentalidade de crescimento para obtê-lo. Com essa mentalidade, o aluno foca em dar sentido aos conceitos matemáticos. "O senso numérico e as mentalidades matemáticas se desenvolvem juntos, e o aprendizado de um ajuda no desenvolvimento do outro"(BOALER, 2018, p. 33).

Quando aprendemos uma nova ideia em matemática, o nosso cérebro gasta um tempo razoável nela, até entender como ela funciona, e em descobrir quais são as outras ideias que você já conhece que estão relacionadas a ela. As ideias, e os conceitos já conhecidos, ocupam um espaço compactado em nossos cérebros. Muitos estudantes não enxergam a beleza da matemática justamente por não estarem engajados na compreensão das ideias matemáticas. Nosso cérebro só é capaz de comprimir conceitos, não consegue comprimir regras e métodos (Boaler, 2018). Desta maneira, aqueles alunos, que pensam que a matemática é um conjunto de regras e métodos, não estão envolvidos no processo de compreensão, e daí a dificuldade do seus cérebros em concatenar as ideias matemáticas. Portanto, é de extrema importância que os alunos consigam enxergar os conceitos matemáticos por trás de uma determinada ideia. "Abordar a matemática conceitualmente é a essência do que descrevo como uma mentalidade matemática"(BOALER, 2018, p. 35).

E em relação aos fatos matemáticos, como os alunos devem reagir perante eles? Por exemplo em relação a tabuada. Professores passaram décadas e mais décadas dizendo que os alunos devem decorar a tabuada, como então essas ideias de Boaler podem se relacionar com isso. Para ela, existem alguns fatos matemáticos que é bom memorizar, mas isso não contrasta com a ideia de que podemos trabalhar com eles conceitualmente. Os estudantes podem fixa-los na memória, através da abordagem conceitual. Fatos matemáticos são uma pequena parte da matemática e que podem ser ensinados através da criação de contextos e diferentes situações. Mas infelizmente, ao contrário daquilo que é desejado, muitas salas de aulas estão focadas nos fatos matemáticos de maneira isolada, dando a impressão de que a matemática limita-se apenas a estes fatos, ou ainda, de que recordar esses fatos rapidamente é um sinal de domínio da matemática (BOALER, 2018).

Além do foco em fatos matemáticos isolados, outro grande problema no ensino da matemática é a utilização de provas com tempo fixo, para avaliação do desempenho em matemática. "Para cerca de um terço dos alunos, o início das provas com tempo limitado é o começo da ansiedade ante a matemática"(Boaler, 2018, p35). Quando estudantes estão sobre um momento de estresse, a memória operacional sofre um bloqueio, e os estudantes não conseguem acessar os fatos matemáticos conhecidos (BEILOCK, 2011 apud BOALER, 2018). Muitos estudantes já possuem uma ansiedade quando se deparam com a matemática, e ainda é criado para eles mais um ambiente estressante, o resultado disso só pode ser catastrófico. A confiança matemática dos estudantes é destruída aos poucos. Segundo Boaler (2018) a ansiedade matemática já foi registrada em alunos de cinco anos e os testes cronometrados são a principal causa disto. "Testes cronometrados evocam emoções tão fortes que os estudantes podem passar a acreditar que ser rápido com fatos matemáticos é a essência da matemática"(BOALER, 2018, p. 36). A melhor maneira com a qual os professores podem ajudar os estudantes a aprender fatos matemáticos é oferecer atividades nas quais os alunos vão desenvolver os conceitos, compreender os fatos numéricos e estimular o senso numérico (BOALER, 2018).

A eficácia da aprendizagem também está relacionada com a existência de rotas neurais diversificadas e com o reforço destas. Pesquisadores descobriram que a aprendizagem acontece da maneira mais poderosa quando utilizamos diferentes rotas cerebrais. O lado esquerdo do cérebro administra informações concretas e técnicas, enquanto o lado direito, informações visuais e espaciais. "Os pesquisadores descobriram que a aprendizagem e o desempenho matemático são otimizados quando os dois lados do cérebro estão se comunicando"(PARK; BRANNON, 2013, apud BOALER, 2018, p. 36). Foi, também, descoberto, que ao solucionar problemas aritméticos, os alunos que demonstraram melhor desempenho apresentam conexões mais fortes entre os dois lados do cérebro. Estas descobertas são de suma importância pois elas revelaram que a aprendizagem abstrata é elevada quando os estudantes usam o raciocínio visual, criativo e intuitivo.

Em outro estudo, os pesquisadores examinaram os cérebros dos estudantes enquanto eles aprendiam a memorizar fatos matemáticos. Eles notaram que haviam estudantes que memorizavam fatos matemáticos com mais facilidade que outros (BOALER, 2018). Isso não é surpreendente, visto que as pessoas vêm de lugares diferentes e passaram por experiências diferentes. O que não pode ser feito é concluir que estes que têm facilidade na memorização são mais capazes de aprender matemática do que os outros. O mais interessante neste estudo é que os pesquisadores descobriram que aqueles que memorizavam com mais facilidade não eram os que tinham melhor rendimento em matemática. Eles não apresentavam o que os pesquisadores chamaram de habilidade matemática e nem tinham os QI's mais elevados (SUPERKAR et al., 2013 apud Boaler, 2018).

Outro pensamento equivocado a respeito da aprendizagem matemática é o de que para se tornar bom na disciplina é necessário fazer muitas listas de exercício. Fazer exercícios é importante, pois para fixar uma ideia nova no cérebro é necessário revê-la algumas vezes, mas isto é muito diferente de resolver o mesmo tipo de questão em demasia. Esta ideia acaba tendo um efeito oposto, pois quando os alunos veem listas enormes, e muitas vezes com exercícios repetidos, trocando apenas os números, acabam desanimando e, assim, causam neles uma aversão à matemática. Segundo Gladwell (2011, apud BOALER 2018) são necessárias aproximadamente 10 mil horas de prática para alcançarmos o domínio em algum campo. Ele cita o exemplo de Ludwig van Beethoven que apesar de ser considerado gênio por muitas pessoas, dedicou-se bastante na música para realizar seus grandes feitos. Entretanto, falando da matemática, essas 10 mil horas não se resumem a trabalho mecânico, repetitivo. São 10 mil horas de trabalho matemático, no qual o aluno precisa buscar o sentido, entender os conceitos e fazer as relações necessárias, considerando as ideias e as conexões matemáticas. Boaler cita que nos Estados Unidos, a maioria dos autores de livros didáticos baseia a sua abordagem na ideia de elencar métodos. Esta prática não é diferente do que acontece no Brasil, e é extremamente problemática. Em primeiro lugar porque isto desestimula os estudantes, que não veem as conexões, e pensam que seu papel é aceitar o método de modo passivo e repetí-lo diversas vezes. Em segundo lugar, a maioria dos exemplos dados pelos professores oferece a versão mais simples de um determinado problema, e ao resolvê-lo, isso não dá nenhuma percepção real ao aluno de quando usar tal método e quando não usar. "Quando livros didáticos apresentam apenas a versão mais simples de uma ideia nega-se aos estudantes a oportunidade de aprender a ideia como ela realmente é"(BOALER, 2018, p. 40). Para aprender uma ideia nova é útil que esta seja apresentada sobre os diversos olhares de diferentes exemplos. Um aspecto importante para sedimentar os conhecimentos está relacionado com os atributos necessários para "ser"e, em contraponto, o que é necessário ocorrer para "não ser". Assim, ao dar exemplos que satisfazem uma definição, deve também procurar-se dar exemplos do que não a satisfaz.

Um outro problema apresentado por Boaler é relativo à pratica de maneira isolada e repetitiva de métodos, provocando que o aluno apenas identifique aquele método a determinada situação, não sabendo aplicá-lo em outras situações. Os alunos ficam presos naquele exemplo específico, que foi estudado por diversas vezes e não conseguem resolver questões que envolvam outros contextos, principalmente quando as questões estão voltadas para uma matemática da vida real. A maioria dos problemas da matemática real envolvem a escolha e adaptação de um método, aspecto em que muitos alunos manifestam dificuldades e muitos não conseguem fazer essa transposição, pois não aprenderam a pensar, eles apenas aprenderam a reproduzir processos. Boaler fez uma pesquisa com dois grupos de alunos: no primeiro grupo ela trabalharia com os alunos numa perspectiva prática, usando apenas os métodos matemáticos e no segundo grupo ela abordaria a complexidade matemática, esperando que os alunos pensassem conceitualmente, escolhendo e utilizando os métodos. Os dois grupos continham o mesmo perfil de estudante. Ela notou que os alunos do grupo na qual a prática dos métodos era repetida várias vezes, obtiveram uma pontuação baixa no exame nacional de matemática comparando com aqueles que foram encorajados a pensar de modo conceitual. O problema que os alunos do primeiro grupo enfrentaram na resolução das provas, foi que eles não sabiam qual método utilizar para responder às questões.

> A supersimplificação da matemática e a prática de métodos por meio de procedimentos simplificados isolados faz parte da razão pela qual observamos fracasso generalizado nos Estados Unidos e no Reino Unido. E também faz parte da razão pela qual os alunos não desenvolvem uma mentalidade matemática (BOALER, 2018, p. 42)

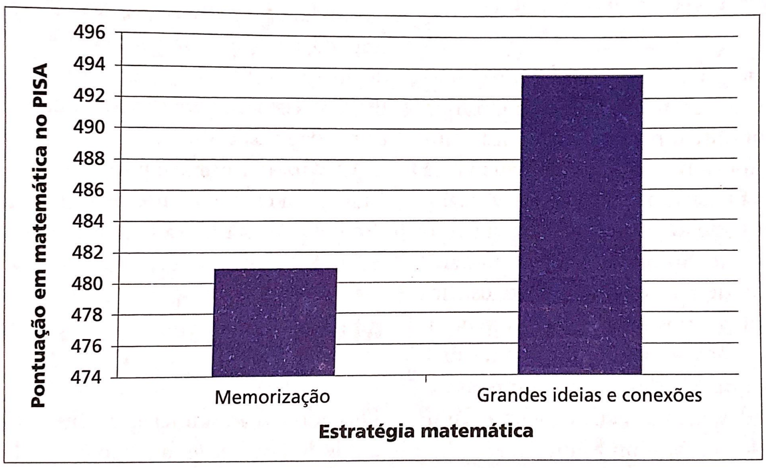
Quando praticam os métodos de maneira isolada, os alunos não percebem que o seu papel dentro da aula de matemática é o de encontrar sentido e fazer conexões. Esse procedimento reforça o pensamento errado de que o fundamental na matemática é decorar as ideias e repetir os métodos. Os alunos são levados a pensar erradamente de que não existe raciocínio e nem criatividade dentro da prática matemática.

Prestar muita atenção é o que 97% dos alunos inquiridos em uma pesquisa, consideram ser seu papel na aula de matemática. Esta função de espectador passivo, está longe de o levar à construção do conhecimento, e também não desenvolve no aluno uma mentalidade matemática.

Outro problema apontado por Boaler é o chamado dever de casa. A primeira questão consiste em saber qual o objetivo que o professor pretende atingir quando envia uma tarefa de casa para seus alunos. Por qual razão ele está fazendo isso? Na sequência da resposta a esta questão, é pertinente pensar no tipo de atividades que se consideram adequadas para dever de casa. Longas listas de exercício têm um efeito negativo em sala de aula, como já foi referido, e esse mesmo efeito acontece em casa. Por outro lado, os pais podem cobrar de seus filhos a resolução deste exercícios o que pode gerar mais ansiedade e rejeição à matemática. O dever de casa, assim como as tarefas em aula, deve procurar fazer com que o aluno busque encontrar o sentido nas ideias matemáticas e entender os conceitos.

Dados coletado pela OCDE, como podemos observar na Figura 4, mostram que os alunos com pior rendimento em matemática, no PISA, são aqueles que usam apenas estratégias de memorização de métodos. Em contrapartida, aqueles que obtiveram melhor rendimento foram os que pensaram em ideias fundamentais e estabeleceram conexões entre elas.

Figura 4 – Estratégias matemáticas e rendimento




Fonte: Program for International Student Assessment, 2012 apud BOALER, 2018, p. 45

Segundo Boaler (2018) uma ótima forma de ensinar os alunos a pensar e a aprender apreciando a natureza conceitual da matemática são as chamadas "conversas numéricas". Este método, desenvolvido por Ruth Parker e Kathy Richardson, consiste numa atividade breve com a qual os professores podem iniciar suas aulas. Propõe-se uma questão matemática abstrata e pede-se aos alunos que a resolvam mentalmente. Após isso, os alunos explicam como pensaram para resolver a questão e mostram aos colegas porque suas sugestões funcionam. A Figura 5 mostra diferentes maneiras para se resolver o cálculo $15 \times 12$.

Figura 5 – Calculando $15 \times 12$

| | |
|---|---|
| 15 x 10 = 150 | 12 x 5 = 60 |
| 15 x 2 = 30 | 12 x 10 = 120 |
| 150 + 30 = 180 | 120 + 60 = 180 |
| 30 x 12 = 360 | 12 x 12 = 144 |
| 360 ÷ 2 = 180 | 12 x 3 = 36 |
| | 144 + 36 = 180 |
| 12 x 15 = | |
| 6 x 30 | |
| 6 x 30 = 180 | |

Fonte: BOALER, 2018, p. 44

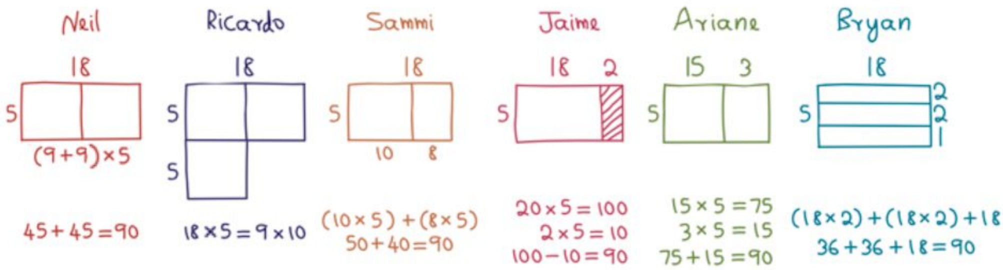
Este tipo de atividade proporciona o envolvimento de todos os alunos. A adesão é grande, pois eles gostam de mostrar suas ideias e geralmente ficam surpreendidos quando lhes são apresentados diferentes procedimentos. Neste tipo de tarefa, os alunos aprendem matemática mental, memorizam fatos matemáticos e desenvolvem uma compreensão conceitual dos números e das propriedades aritméticas. "Falas numéricas são o melhor método pedagógico que eu conheço para desenvolver o senso numérico e ajudar os estudantes a enxergar a natureza flexível e conceitual da matemática"(BOALER, 2018, p. 44).

## 2.5 Atividades matemáticas produtivas

É indiscutível que a sala de aula deve ser centrada no aluno, mas o papel do professor é fundamental. Segundo Boaler, "os professores são o recurso mais importante dos estudantes"(2018, p. 51). É ao professor que cabe a dinamização de um ambiente propício ao desenvolvimento do estudante, isso através do envio constante de mensagens positivas e utilização de tarefas que despertam o interesse dos alunos em matemática. Para Darling-Hammond (2000 apud BOALER, 2018), o professor tem mais impacto do que qualquer outro aspecto dentro da aprendizagem dos alunos. Além do professor, também as atividades matemáticas, que ele desenvolve junto com a turma são de extrema importância para o crescimento dos alunos. Boas tarefas ajudam os estudantes a desenvolverem uma mentalidade matemática e criam condições para uma compreensão profunda da disciplina (BOALER, 2018).

Que tipo de tarefas ajudam a despertar o entusiasmo e promovem o engajamento matemático? O primeiro exemplo que vamos ver diz respeito a uma situação que ocorreu numa empresa. Jo Boaler foi convidada para prestar consultoria e no decorrer de uma conversa com a equipe, sobre o que é uma questão boa para ensinar matemática, ela propôs que cada um fizesse o simples cálculo de $18 \times 5$. Cada um resolveu a questão, individualmente, e, após todos terem finalizado, as respostas foram recolhidas, e foram obtidas seis soluções diferentes das quais ela fez uma representação visual conforme pode ser visto a seguir na Figura 6:

Figura 6 – Calculando $18 \times 5$

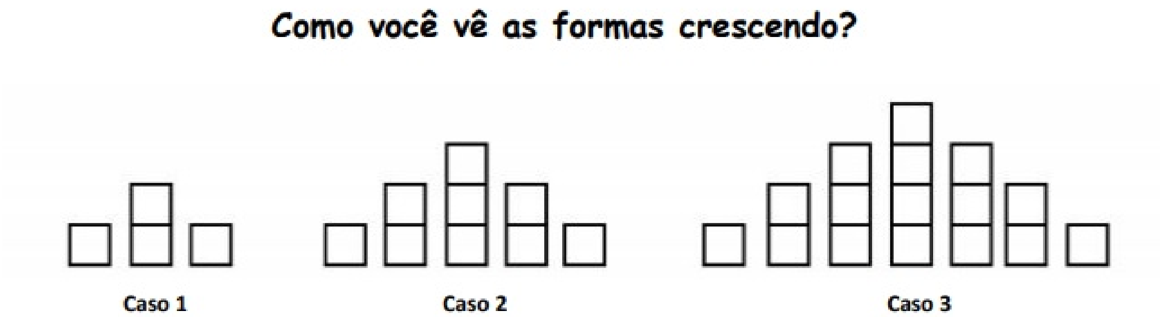



Fonte: BOALER, 2018, p.52

A diversidade de respostas surpreendeu o grupo e a discussão gerada em torno da questão fascinou a equipe de tal maneira que criaram camisas com a logo escrita $18 \times 5$, eles até criaram um mini-curso sobre este cálculo. É interessante pensar que uma simples conta gerou este tipo de reação em adultos. Isto mostra que uma atividade bem preparada, que busque estabelecer conexões matemática, que vise ampliar o senso númerico da pessoas e que esteja aberta a criatividade, faz toda a diferença e desperta nas pessoas aquilo que anteriormente Boaler chamou de engajamento matemático, e como ela mesmo diz: "acredito que esse envolvimento ocorre porque as pessoas descobrem a criatividade da matemática e as diferentes formas pelas quais as pessoas veem as ideias matemáticas"(BOALER, 2018, p. 53). Os professores precisam incutir este engajamento matemático em seus alunos, nas suas tarefas, abrindo o protagonismo para os próprios estudantes, perguntando-lhes diferentes maneiras de resolver um problema e fazendo também com que eles discutam entre si as diversas maneiras que foram apresentadas. Fazendo isso, eles não aprendem somente matemática, mas aprendem a ouvir os outros e respeitar os seus pensamentos.

O segundo exemplo diz respeito a padrões e à evolução dos mesmos. Perante uma sequência de quadrados, conforme mostra a Figura 7, pede-se para os alunos dizerem como a mesma vai crescendo.

Figura 7 – Formas crescendo




Fonte: BOALER, 2018, p. 54

Esta questão foi proposta a alunos de diferentes níveis, e até mesmo a professores, para que cada um dissesse de onde vêm os quadrados que surgem de uma figura para outra. Boaler refere que quando ela aplicou esta tarefa num curso de verão para alunos dos anos finais do ensino fundamental, ocorreu um episódio muito interessante, três alunos que não estavam participando das aulas, ficaram num mesmo grupo para resolver a questão. Esses alunos se envolveram de tal maneira que passaram 70 minutos focados em resolver a questão. Um deles enxergava o crescimento como gotas de chuva que caiam do céu, conforme vemos na Figura 8:

Figura 8 – Gotas de chuva

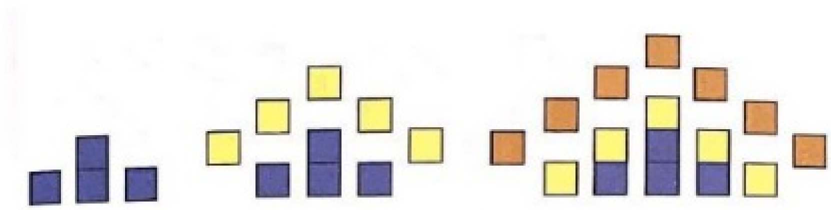


Figura 5.3 O Método da Gota de Chuva: os cubos caem do céu como gotas de chuva.

Fonte: BOALER, 2018, p. 57

Os outros dois enxergavam o crescimento como uma pista de boliche, onde os próximos quadrados são como uma fileira de pinos que é adicionada. Podemos ver este pensamento na Figura 9:

Figura 9 – Pista de boliche

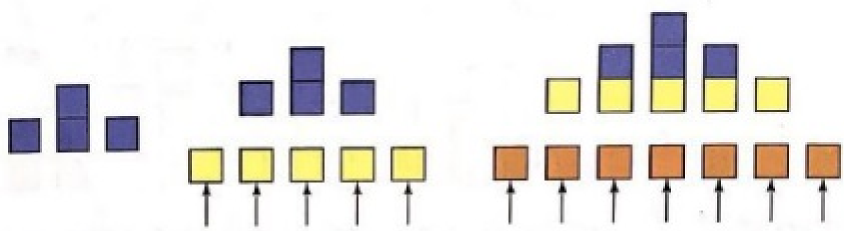


**Figura 5.4** O Método da Pista de Boliche: os cubos são adicionados como pinos de uma pista de boliche.

Fonte: BOALER, 2018, p. 57

Vamos mostrar, a seguir, algumas outras ideias para a questão apresentadas pelos alunos e professores para os quais Boaler propôs esta tarefa.

A próxima imagem, Figura 10, mostra o método do vulcão: uma coluna de quadrados do meio aumenta e os quadrados restantes seguem como se fossem uma lava expelida pelo vulcão.

Figura 10 – Vulcão

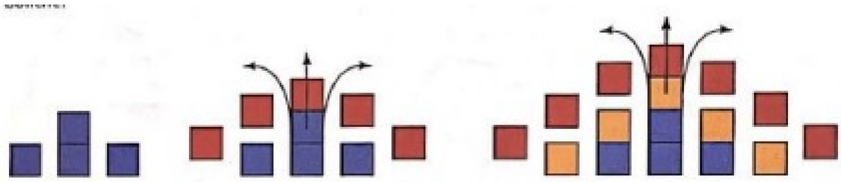


**Figura 5.5** O Método do Vulcão: a coluna de cubos do meio cresce, e o resto segue como a lava expelida por um vulcão.

Fonte: BOALER, 2018, p. 57

Na imagem seguinte, Figura 11, temos o método da divisão do mar vermelho, as colunas se dividem e após isso, a coluna do meio chega.

Figura 11 – O mar vermelho

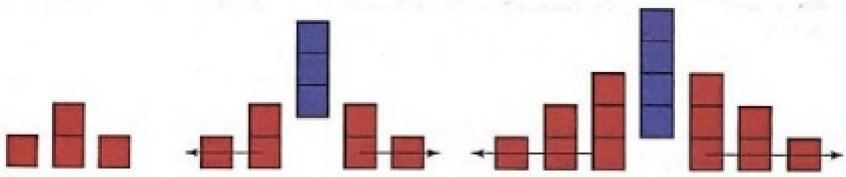


**Figura 5.6** O Método da Divisão do Mar Vermelho: as colunas se dividem, e a coluna do meio chega.

Fonte: BOALER, 2018, p. 57

O próximo exemplo, Figura 12, temos o métodos dos triângulos semelhantes, as camadas de quadrados são vistas como triângulos.

Figura 12 – Triângulos Semelhantes

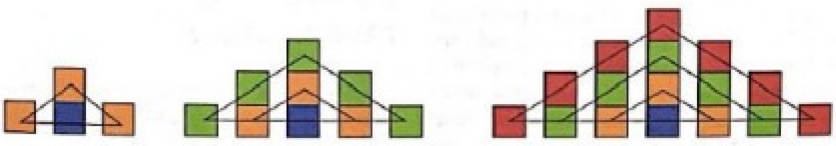


Figura 5.7 O Método dos Triângulos Semelhantes: as camadas podem ser vistas como triângulos.

Fonte: BOALER, 2018, p. 57

Outros exemplos podem ser vistos em Boaler (2018, p. 58).

Ao propor este tipo de questão, não se fala sobre álgebra e nem sobre função. É um exemplo simples, em que qualquer pessoa pode enxergar o aumento no número de quadrados. A este tipo de atividade, Jo Boaler chama de atividade de teto baixo, isto é, aquela que qualquer pessoa, mesmo sem conhecimento nenhum de matemática pode fazer.

Quando Jo Boaler apresentou esta última tarefa em palestras e workshops, uma questão importante surgiu aos professores participantes: quais conteúdos se podem ensinar com este tipo de atividades? Alguns que não são tão intuitivos como no primeiro caso, uma adição simples, ou no segundo caso, sequências que têm um padrão de crescimento. Como fazer para ensinar, usando essas ideias estimulantes, temas como trigonometria por exemplo? Um estudo importante (SCHWARTZ; BRANSFORD, 1998 apud BOALER, 2018) comparou três maneiras de se ensinar um determinado assunto em matemática. Os alunos foram divididos em grupo, e para cada grupo seria usada uma metodologia de ensino diferente. A primeira maneira foi aquela que a maioria do professores aplica nas suas aulas: o professor apresentava o método e os alunos resolviam exercícios utilizando esse método. Na segunda maneira, os alunos descobriam os métodos através da exploração. A terceira maneira, aquela que foi considerada mais eficaz pela pesquisa, era o inverso da primeira, os alunos recebiam as questões antes de conhecerem o método para realizá-las, tentavam resolver, cada um pela sua maneira, e após ter esse primeiro contato, o professor ensinava o método. O terceiro grupo foi aquele que obteve o melhor rendimento em comparação com os outros dois. Os pesquisadores descobriram que quando os alunos recebiam os problemas e tinham oportunidades de investiga-los, mesmo não conhecendo os métodos necessários para resolvê-los, eles ficavam curiosos e seus cérebros estavam abertos para receber novas informações a cerca de possíveis métodos, eles tinham mais motivação e mais disposição para aprender. A partir deste estudo percebemos que a melhor maneira de ensinar os métodos é contá-los aos alunos após proporcionarem a eles um primeiro contato com o tema que vai ser ensinado.

Jo Boaler relata um caso que ilustra muito bem este pensamento dos alunos entrarem em contato com a tarefa antes de conhecer os métodos. Ela conta que estava numa aula de pré-calculo, onde os alunos estavam tendo contato com a disciplina pela primeira vez. A professora pediu aos alunos que pensassem em maneiras de calcular o volume de um limão. A partir desta tarefa, os estudantes foram usando o seus conhecimentos e a sua intuição para buscar maneiras de realizar a tarefa. Um grupo decidiu mergulhar o limão em um recipiente com água, outro grupo mediu minuciosamente o limão e outro decidiu cortar o limão em fatias finas e pensar nelas como seções bidimensionais. Este grupo foi aquele que mais se aproximou do método formal para calcular aquilo que foi pedido na tarefa. Após esta primeira tentativa de resolução da parte dos alunos, a professora mostrou a eles o método empregando integrais para realizar o cálculo do volume, e os alunos ficaram muito empolgados.

A curiosidade inerente ao ser humano, é aproveitada pelo professor que procura fazer este tipo de abordagem, ele se aproveita desta característica para causar o engajamento nos alunos, e eles começam a usar a sua intuição matemática. Isso é muito importante pois: "quando se pede aos alunos que pensem intuitivamente, muitas coisas boas acontecem"(Boaler, 2018, p62). Quando usam a sua intuição, os alunos param de pensar apenas nos métodos e passam a considerar a matemática de maneira mais ampliada. Eles percebem que precisam usar o próprio raciocínio e buscar sentido naquilo que estão fazendo. Com isso, eles percebem que a tarefa deles não é somente repetir métodos e sim pensar.

Planejar e adaptar as tarefas matemática para que elas tenham este foco, de buscar incentivar o engajamento nos alunos é fundamental para aprendizagem. Jo Boaler organiza seis itens que devem ser observados na hora de propor ou adaptar uma tarefa matemática. São eles:

> 1. Abra a tarefa para que haja diversos métodos, rotas e representações.
> 2. Inclua oportunidades de investigação.
> 3. Formule o problema antes de ensinar o método.
> 4. Acrescente um componente visual e pergunte aos alunos como eles veem a matemática.
> 5. Amplie a tarefa para que ela tenha "piso mais baixo e teto mais alto.
> 6. Peça aos alunos que convençam e argumentem; sejam céticos (2018, p. 77).

O primeiro item fala da importância de uma tarefa ser aberta, isto é, a tarefa admite muitos caminhos diferentes para a sua resolução. Tarefas abertas motivam e engajam os alunos na aprendizagem matemática. Pedir aos alunos que busquem encontrar sentido nas suas resposta é uma maneira de abrir uma tarefa. O segundo item fala da investigação, isto é, deixar os alunos livres para tentar entender o que o problema está pedindo, é mergulhar nas possibilidades. Um exemplo de como essa investigação pode ser feita é dado por Boaler: ao invés do professor dar as dimensões de um retângulo e pedir aos alunos para calcularem a área, é fazer o contrário, dar uma determinada área e pedir aos alunos para pensarem nos tipos de retângulo que possuem aquela área. O terceiro item fala de formular um problema antes de ensinar o método. Já vimos a importância deste ato anteriormente e como isto motivou os alunos. Ratificamos este fato com uma fala de Boaler: "Quando propormos problemas para os quais os estudantes precisam conhecer um método antes de apresentá-lo oferecemos uma grande oportunidade para aprender e para usar a intuição"(2018, p. 71). O quarto item fala da importância dos alunos fazerem uma representação visual do problema. Também vimos o quão engajador é fazer este tipo de representação no problema do crescimento dos quadrados e na questão levantada por Boaler no cálculo $18 \times 5$. O quinto item fala de tornar a tarefa como uma atividade de piso baixo e teto alto. É importante salientar que piso baixo quer dizer uma tarefa na qual todas as pessoas que não tenham nenhum conhecimento de matemática podem realizá-la, como no caso da tarefa $18 \times 5$ e teto alto quer dizer que a tarefa pode prolongar-se a alto nível de matemática. Jo Boaler diz que uma boa maneira de "rebaixar o piso"é perguntar aos alunos como eles enxergam o problema, e uma maneira de "elevar o teto", é pedir aos alunos que formulem uma nova questão referente ao problema, mas com um grau de dificuldade maior. O sexto item fala sobre convencimento e argumentação que os alunos devem ter uns com os outros. É muito importante que os alunos troquem ideias entre si sobre as diferentes resoluções de um problema. É ainda mais importante que eles tenham convicção do que estão falando. A argumentação está na essência da matemática, e garante aos alunos o acesso à compreensão. Ao serem capazes de formular bons argumentos e conseguir convencer outros alunos a aceitar suas ideias, eles estão compreendendo o assunto abordado.

Se os professores seguirem essas ideias e conseguirem adapta-las para sua realidade, isto vai trazer um grande bem para a educação, pois os professores estarão oferecendo aos seus alunos oportunidades de aprendizagem cada vez mais profundas. Os estudantes amam ser desafiados, descobrir ideias novas, e tudo isto deve ser apresentado a eles de uma maneira visual e criativa.

## 2.6 A matemática e o caminho para equidade

A matemática é uma disciplina linda, que pode e deve cativar os estudantes. Como vimos, é importante que seja ensinada de maneira criativa para causar o engajamento matemático nos alunos. Mas, infelizmente não é assim que acontece em muitas salas de aula. Como vimos, muitos professores têm o pensamento de que existem estudantes que "são de matemática"e existem estudantes que "não são de matemática". E muitos com esse pensamento, acabam criando uma separação na turma, promovendo um elitismo entre os próprios alunos. Isso é péssimo, porque acaba rotulando os alunos como "capazes"e "incapazes", e como já vimos, os "incapazes"acabam desistindo da matemática e isto traz consequências ruins nas suas vidas, acabando por desistir de muitas carreiras que poderiam exercer e fechando muitas portas. O ensino de matemática deve ser um ensino que promova a equidade, que promova união entre os alunos e professores, e que não cause uma separação, como acontece em muitos casos.

Jo Boaler diz que "algumas pessoas, incluindo alguns professores, construíram sua identidade sobre a ideia de que poderiam se sair bem em matemática, pois eram especiais, geneticamente superiores às outras"(2018, p80). Infelizmente esse pensamento está presente na nossa sociedade. As pessoas se esforçam para manter esse pensamento de que qualquer criança que é boa em matemática ou é gênio, ou nasceu com o "dom", e como vimos anteriormente, pode até existir uma diferença cerebral no momento do nascimento das criança, mas essas diferenças podem ser compensadas através das experiências que as crianças vão tendo ao longo da vida.

> A rotulação dos estudantes como "talentosos"fere não somente aqueles que são considerados destituídos de talento, mas também aqueles que recebem o rótulo de superdotado, pois isso os coloca em uma rota de mentalidade fixa, tornando-os mais vulneráveis e menos propensos a correr riscos. (BOALER, 2018, p. 80).

Como foi visto anteriormente, os alunos que são considerados superdotados, ficam com medo de se expor a novos desafios, e acabam criando uma mentalidade fixa, pois têm medo de falhar e de não serem mais considerados inteligentes. Acontece também com esses alunos que quando têm alguma dificuldade e precisam de se esforçar, eles se consideram impostores, pois consideram que a única conquista válida e que prova que eles são de fato inteligentes é a conquista sem esforço. Para eles, "pessoas de matemática"são aqueles que tem um bom desempenho na disciplina sem esforço, pois nasceram com habilidades e somente elas têm essa competência. Para Boaler, "muitas pessoas reconhecem que a desigualdade matemática é oriunda das ideias estereotipadas sobre quem tem competência para ela e, cotidianamente , tentam combatê-las". (Boaler, 2018, p80). Entretanto existem aqueles que acabam fazendo o contrário, eles colaboram para que este cenário continue e reforçam esta ideia, alguns de maneira consciente e outros sem esta intenção. Jo Boaler cita que conheceu alguns professores de matemática que se sentiam superiores em relação aos professores de outras disciplinas. Eles pensavam que a função deles era encontrar outros estudantes que também possuiam esse "gene"matemático. Alguns professores entendiam que o fracasso dos alunos estava relacionado ao "dom"que estes não tinham e nunca refletiam sobre o seu papel na formação destes alunos. Talvez os alunos fracassassem por causa desta postura arrogante que muitos professores têm. Jo Boaler relata um absurdo que alguns departamentos de matemática de algumas universidades faziam. Atribuíam uma nota menor para os alunos que buscassem ajuda para entender a matéria. Eles fazem isto por que acham que o aluno ao buscar ajuda revela não possuir o dom. Mas o correto é justamente o contrário, o aluno tem uma dificuldade e quer supera-la, quer vencê-la. Ou seja, o esforço e a dedicação estão sendo punidos. Essa atitude cria um pensamento elitista dentro da matemática. "Quando essa ideia elitista se combina com ideias estereotipadas sobre quem tem o dom, iniquidades cruéis são produzidas". (BOALER, 2018, p. 81).

Um estudo da Noyce Foundation mostrou dados extremamente perturbadores que revelam que as escolhas dos tópicos de prosseguimento de estudos do 8º para o 9º ano, de acordo com a raça, permitem concluir que a grande redução do número de alunos afrodescendentes e latinos do estudo de álgebra para o de geometria é um caso de discriminação racial, tendo sido tomadas medidas visando melhorar esta situação. Não sabemos se os professores estavam excluindo os alunos por raça ou etnicidade da maneira proposital ou não, entretanto eles utilizavam métodos em suas aulas que causava um impacto maior nos alunos não brancos.

Um diretor de uma escola dos anos finais do ensino fundamental, chamou Jo Boaler para analisar alguns dados que ele tinha coletado. Este diretor descobriu que os alunos que foram aprovados em álgebra no 8° ano, estavam sendo colocados para repetir as aulas de álgebra no ensino médio. Analisando os dados, ele e Jo Boaler perceberam que os alunos que estavam avançando eram principalmente brancos e os que estavam sendo reprovados eram em sua maioria latinos. Jo Boaler perguntou ao diretor qual seria o motivo deste fato, e ele respondeu que os professores do ensino fundamental tinham uma conduta de não promover alunos que pudessem vir a falhar futuramente e que aqueles que atrasavam as tarefas de casa e aqueles não se destacavam em aula deviam ser reprovados. Estes eventos são absurdos, mas eles acontecem porque alguns professores acreditam que sua tarefa é encontrar alunos que se destaquem em matemática.

Jo Boaler fez um estudo em duas escolas na Inglaterra (2002a apud BOALER, 2018), a primeira escola dividiu os alunos em dois grupos, um com alunos de alto rendimento em matemática e outro com alunos de baixo rendimento. Os alunos de baixo nível eram preparados para exames de nível inferior. Eles recebiam questões mais fáceis e tinham bom desempenho ao resolvê-las, e começaram a acreditar que eram bons em matemática. Quando eles descobriram que foram inscritos para uma prova de nível inferior, muitos ficaram arrasados e desistiram de fazer o exame. Na segunda escola estudada por Boaler, o diretor não separou os alunos de acordo com seus "níveis", ele inscreveu todos os alunos na prova de nível superior. O resultado foi surpreendente: houve um aumento em relação ao ano anterior, antes 40% dos alunos obtiveram a nota desejada, e no ano em que o diretor não separou os alunos, 90% obtiveram a nota desejada. Naquele ano, os professores ensinaram matemática de nível superior para todos os alunos. Com isso, os estudantes considerados de baixo rendimento, receberam essa mensagem positiva de que eram capazes, se esforçaram e se adaptaram para aprender um conteúdo considerado elevado para eles e obtiveram um bom desempenho.

> Precisamos que todos os professores acreditem em todos os alunos, rejeitem a ideia de alguns estudantes serem adequados para matemática de nível superior e outros não, e trabalhem para disponibilizar a matemática para todos, qualquer que seja seu desempenho anterior, etnia ou gênero (BOALER, 2018, p. 85).

É urgente que os professores e todos que trabalham com educação mudem esta ideia de que a matemática é uma matéria elitista focada apenas no desempenho dos alunos e que tem sido usada para separar alunos e selecionar os "melhores", e que ela se torne aquilo que de fato ela é, uma disciplina bela e que busca explicar o mundo ao nosso redor. Que o foco do ensino em matemática seja na aprendizagem daqueles bem-sucedidos, que estão se afastando da disciplina em números recordes, e naqueles considerados malsucedidos, a quem está sendo negado o acesso a matemática por terem alguma dificuldade inicial.

Jo Boaler cita algumas estratégias que ela considera fundamentais para tornar a educação matemática mais equitativa. A primeira delas é oferecer ao todos os alunos conteúdos de alto nível. É muito importante oferecer a todos a oportunidade de conhecer a matemática a fundo. Podemos ver como isso foi importante na situação relatada por Boaler sobre o diretor que inscreveu todos os alunos para fazerem uma prova de matemática de nível superior. A segunda estratégia é trabalhar para mudar ideias sobre quem pode ter êxito em matemática. Como os estudos de Dweck mostram, "as crenças de mentalidade mantidas pelos professores abrem ou fecham portas para os estudantes"(Boaler, 2018, p88). A aprendizagem partindo de uma mentalidade fixa é um dos principais responsáveis pelas injustiças que são cometidas na matemática. Cabe então aos professores mudar este paradigma. A terceira estratégia é incentivar os estudantes a pensar profundamente sobre matemática. Jones, Howe e Rua dizem que "muitos estudantes se veem como pensadores e comunicadores e como pessoas que podem fazer a diferença no mundo"(2000 apud BOALER, 2018, p. 89), por isso, ensinar apenas os procedimentos e métodos matemáticos pode ser desinteressante para os alunos. Uma matemática profunda, com atividades de piso baixo e teto alto é fundamental para causar o engajamento matemático e despertar a curiosidade dos alunos, fazendo com que eles busquem pensar de maneira profunda a matemática. A quarta estratégia é ensinar os estudantes a trabalharem juntos. Como vimos no caso citado por Boaler da atividade da sequência de quadrados, os alunos formaram trios e trabalharam juntos, discutindo suas ideias e pensando em conjunto sobre o problema proposto. Pesquisas revelam que quando os estudantes trabalham juntos, acontecem desfechos equitativos (BOALER; STAPLES, 2005 apud BOALER, 2018). A quinta estratégia é dar às meninas e aos estudantes não brancos encorajamento adicional para aprender matemática e ciências. Segundo Jo Boaler, "tanto meninas quanto estudantes não brancos - especialmente minorias sub-representadas - precisam receber mensagens ponderadas e positivas sobre o seu valioso lugar na matemática"(2018, p91). Infelizmente, em algumas salas de aula exite a crença de que o melhor desempenho em matemática acontece em estudantes brancos ou em asiáticos. É urgente mudar este cenário e acabar com esse esteriótipo, e um dos meios de se fazer isso é destacar as realizações das mulheres e das minorias sub-representadas em matemática. Para exemplificar essa ideia, Jo Boaler, no dia internacional da mulher, fez uma celebração para comemorar o dia e realizou sessões de matemática apenas para as meninas, que trabalharam juntas nas atividades matemáticas e enquanto enalteciam a mulheres matemáticas famosas. Essa atividade fez com que muitas meninas tímidas, que antes não eram engajadas na disciplina, ganhassem confiança e começassem a participar mais na matemática. Esse envolvimento continuou posteriormente. Para Jo Boaler alguns estudantes enfrentam barreiras e desvantagens que outros estudantes não enfrentam. Portanto, os professores devem trabalhar para enfrentá-las para que enfim tenhamos uma sociedade mais equitativa. A sexta estratégia é eliminar, ou pelo menos mudar a natureza, os deveres de casa. Alguns estudos demonstraram que as tarefas de casa influenciam de maneira negativa, ou não influenciam, a aprendizagem (BOALER, 2018). Boaler também cita a dificuldade que alguns estudantes podem ter na hora de realizar as tarefas, como por exemplo em lares onde os estudantes não possuem um lugar tranquilo, ou um lugar adequado para estudar. Também fala dos estudantes que precisam trabalhar depois das aulas, ou que tem que realizar tarefas domiciliares quando os pais não estão em casa. Tudo isso são agentes dificultadores que impendem que o aluno faça o dever de casa, e de uma certa forma, acaba criando barreiras nesses alunos que são os que mais precisam de suporte. Ela também cita que os deveres de casa diminuem o tempo que os alunos passam com a família, momentos importantes são deixados de lado por conta das tarefas, e muitas vezes as famílias têm pouco tempo durante o dia para conversarem e se relacionarem. Cita ainda que muitas dessas tarefas de casa são mal preparadas, de uma qualidade baixa, que terão pouca ou nenhuma influência na aprendizagem do aluno, mas que podem causar estresse. Porém, algumas escolas não abrem mão do dever de casa e caso seja necessário que o professor os mantenha, Jo Boaler dá algumas sugestões para alterar a natureza das tarefas domiciliares. Uma das sugestões é passar uma tarefa em que o aluno seja incentivado a pensar sobre a matemática vista na aula e focar nas ideias fundamentais, muito diferente dos deveres de casa habituais onde o foco esta apenas no desempenho e em acerto das questões. Para Boaler, "tarefas de casa só devem ser solicitadas se valerem a pena e proporcionarem uma oportunidade para reflexão ou investigação ativa no ambiente doméstico"(2018, p. 95).

A matemática é uma matéria fundamental para o futuro de todos os alunos, especialmente aqueles que futuramente vão seguir a área de exatas. Isto quer dizer que os professores de matemática têm a responsabilidade de tornar a disciplina acessível a todos os alunos. Os professores são peça chave no processo de aprendizagem e também de superação para aqueles alunos que enfrentam dificuldades na hora de aprender ou até mesmo aqueles que enfrentam algumas barreiras nas suas vidas. Eles devem oferecer oportunidades para esses alunos vulneráveis, encorajar e enviar mensagens positivas para que estes superem suas dificuldades, medos e traumas em relação a disciplina.

## 2.7 Da separação por habilidade ao agrupamento para uma mentalidade de crescimento

Boaler (2018) destaca como determinante na aprendizagem a "oportunidade de aprender"(BOALER, 2018, p. 97) uma vez que oferecer um conteúdo de alto nível aos alunos possibilita que seu aprendizado seja de alto nível, também. Esta ideia é contrária a prática de separação dos alunos de acordo com a habilidade em matemática, pois esta estabelece uma "rota de nível baixo"(BOALER, 2018, p. 97) para um grande contingente de alunos e, com isso, os priva de receber com qualidade o ensino da matemática, conseguindo realmente compreender o conteúdo. Muitas vezes, essa segregação por habilidade ocorre em idade precoce, impactando a aprendizagem da matemática ao longo de toda a vida. Na Inglaterra, por exemplo, foi constatado que 88% dos alunos que passaram pela separação em níveis de habilidade quando tinham quatro anos de idade, permaneceram nos mesmo níveis em todo o percurso escolar (DIXON, 2002 apud BOALER, 2018).

Por outro lado, o melhor contexto para aprendizagem envolve conteúdo de alto nível junto com a valorização dos interesses dos alunos, com professores que sempre reconheçam e alimentem o potencial dos estudantes, para que eles se desenvolvam, e não sintam-se limitados. As práticas de educação na escola comunicam aos alunos algumas mensagens e é importante estar atento às mensagens de mentalidade fixa que são transmitidas. A separação dos alunos por habilidade traz muito fortemente ideias de mentalidade fixa. Ao mesmo tempo que os divide pelo desempenho atual, determina o nível de ensino que eles terão e os inclui em grupos tidos como inferiores ou superiores. Esta prática, chamada *tracking*, mostra-se prejudicial a alunos de todos os grupos. Porém, Boaler (2018) destaca uma pesquisa de Romero (2013) na qual foi constatado que o maior impacto negativo da mensagem de mentalidade fixa transmitida por meio da prática de separação de alunos por habilidades se dava em alunos incluídos em grupos de nível superior.

Há diferentes realidade em diferentes países no que se refere ao *tracking*. Porém, é observado maior sucesso no desempenho em matemática quando o agrupamento por habilidade é realizado o mínimo possível e da forma mais tardia possível. Boaler (2018) cita o Terceiro Estudo Internacional de Matemática e Ciências (TIMSS), no qual a Coreia se destacou pelo alto rendimento, sendo ao mesmo tempo o país com desempenho mais igualitário e que menos realiza a prática de agrupamentos por habilidade. A Finlândia e a China, com melhores resultado no desempenho dos alunos em matemática, não realizavam agrupamentos por habilidade e ofereciam o ensino de alto nível a todos. Enquanto isso, os EUA apresentaram maios variabilidade de desempenho e maior separação por habilidade (Boaler, 2018). Em um dos maiores distritos escolares da Califórnio, os alunos até a 1ª série do ensino médio são incentivados a alcançar os níveis mais altos que conseguirem. Todos os alunos podem cursar disciplinas de alto nível, como cálculo. Na maioria dos distritos escolares nos EUA, os estudantes são selecionados para caminhos inferiores ou superiores em idade muito precoce. É muito desagradável para os pais de crianças novas perceberem que portas estão se fechando para o futuro de seus filhos.

Um dos motivos pelos quais os alunos desempenham níveis inferiores quando separados, é que eles têm necessidades e bagagens diferentes. Entretanto, os professores tendem a pensar que todos são iguais e escolhem questões curtas, que são fáceis para alguns, mas são difíceis para outros. Outra razão pela qual o *tracking* reduz o rendimento é a mensagem fixa que ele transmite aos alunos (BOALER, 2018).

Um estudo mostrou o impacto da não segregação de alunos por habilidades no distrito escolar em Nova York. Aconteceu da seguinte maneira, as aulas avançadas foram excluídas e todos os alunos passaram a ver conteúdos de alto nível. Durante três anos pesquisadores puderam acompanhar alunos trabalhando em turmas separadas e depois, por mais três anos, quando os alunos estudaram em turmas heterogêneas. Eles constataram que os alunos que aprenderam sem aulas avançadas gostavam mais de matemática e passaram no teste estadual um ano mais cedo do que aqueles alunos que foram separados (BOALER, 2018).

Para Boaler (2018), a maior parte da falta de motivação e do mau comportamento que acontecem nas salas de aula vem dos alunos que não acreditam que podem aprender. Alguns professores têm o receio de que, eliminando a separação em grupos, os alunos com mau comportamento se misturaram com os outros e podem causar problemas. Entretanto, Boaler relata, com sua experiência escolar como docente, que quando os alunos começam a acreditar que podem aprender matemática, o mau comportamento e a falta de motivação desaparecem.

Nas aulas para grupos heterogêneos, é importante oferecer aos alunos a oportunidade de levar a matemática em diferentes níveis e não somente dar questões fechadas adequadas apenas a alguns estudantes da classe. Existem diversas maneiras pelas quais os alunos podem ser encorajados e se interessarem a levar a matemática a níveis mais elevados, que são citadas por Jo Boaler. A primeira delas é apresentar tarefas abertas, isto é, tarefas de "piso baixo"e "teto alto", pois elas permitem que todos os alunos tenham acesso a ela e as elevem a altos níveis. Segundo Boaler, o papel do professores em sala é discutir a matemática, orientá-los e ampliar suas ideias. Em uma sala com uma mentalidade de crescimento, o professor desafia os alunos, ajuda-os, desenvolve os estudantes no nível certo, propõe tarefas abertas e faz discussões com alunos, fazendo com que estes se tornem protagonistas e fiquem engajados na sua aprendizagem.

Outra maneira é oferecer diferentes opções de tarefas. Numa sala de aula onde se deseja desenvolver uma mentalidade de crescimento nos alunos, eles não podem ficar presos a apenas um tipo de tarefa. Eles podem e devem receber diferentes tipos de atividades que abordem níveis e áreas da matemática distintos. O importante é que os estudantes sejam capazes de escolher a tarefa na qual desejem trabalhar ao invés desta escolha ser feita pelo professor Boaler (2018).

Tarefas matemática são de extrema importância em aulas heterogêneas, e a forma como os alunos trabalham em conjunto também é essencial. Muitos professores sabem que o trabalho em grupo em sala de aula pode fracassar quando os estudantes participam de maneira desigual nos grupos. Se os alunos são deixados por conta própria e não são encorajados, o que acaba acontecendo é que alguns alunos acabam fazendo a maior parte do trabalho enquanto outro têm pouca participação. Cabe então ao professor desenvolver maneiras de fazer com que todos os alunos tenham uma participação nos trabalhos em grupo, pois esta é uma ferramenta fundamental para causar engajamento dos alunos, ensinar o trabalho colaborativo entre ele e diminuir as diferenças entre eles, fazendo com que eles se aproximem e tenham contato com diferentes realidades.

Segundo Jo Boaler, uma aula de matemática unidimensional, é aquela em que uma prática é valorizada acima de todas as outras, em geral a de executar procedimentos corretamente (2018, p. 105). Isso significa que alguns estudantes sobem no topo dessas classe unidimensionais por conseguirem executar esta competência, recebendo assim, boas notas e elogios do professor, enquanto os outros afundam, criando assim, uma hierarquia dentro da classe. Essas salas de aula são consideradas unidimensionais pois nelas existe apenas uma maneira de ser bem-sucedido (BOALER, 2018). "Em uma aula de matemática multidimensional, os professores pensam em todas as formas de ser matemático"(BOALER, 2018, p. 106). Olhando o trabalho dos matemáticos, percebemos que além de executar cálculos, ele também precisam fazer boas perguntas, criar ideias, conectar diferentes métodos raciocinar por caminhos distintos e etc. Portanto, percebemos que a matemática é uma disciplina ampla e multidimensional.

Jo Boaler menciona várias vezes o exemplo de uma escola urbana de ensino médio que ela denominou Railside. Esta escola ensina matemática através da instrução complexa. A instrução complexa se constitui de quatro princípios: multidimensionalidade, papéis, atribuição de competência e responsabilidade compartilhada com os estudantes (BOALER, 2018, p. 105). O grande lema repetido nessa escola é: "ninguém é bom em todas essas maneiras de trabalhar, mas todos são bons em algumas delas"(Boaler, 2018, p106). Ao serem questionados sobre o que era necessário para ser bom em matemática, os alunos da Railside citaram alguns itens bastante interessantes como:

- Fazer boas perguntas
- Reformular problemas
- Explicar
- Usar lógica
- Justificar métodos
- Usar manipulativos
- Conectar ideias
- Ajudar os outros (BOALER, 2018, p. 106)

Os professores podem criar classes multidimensionais valorizando as multidimensões do trabalho matemático. Isso pode ser feito através de tarefas ricas, onde seja necessário o trabalho em grupo, problemas que individualmente podem ser difíceis de resolver e por isso, exigem a colaboração de diferentes membros do grupo.

## 2.8 Ensinar matemática para uma mentalidade de crescimento

Segundo Boaler, para aprendizagem de matemática ter sucesso, os alunos devem ver a matemática como uma disciplina aberta, de crescimento e de aprendizagem, e ver a si mesmos como agentes potentes no processo de aprendizagem (Boaler, 2018, p147). Muitos alunos são inseguros a respeito das expectativas que os professores têm em relação a eles. Para acabar com essa insegurança, é necessários que os alunos tenham em mente que, não existe cérebro matemático ou gene matemático, que todos são capazes de aprender e alcançar altos níveis, que erros são importantes e todas vez que cometemos um erro nosso cérebro cresce, que o fracasso e as dificuldades não significam que uma pessoa não pode fazer matemática, que a rapidez não é importante, que é muito mais importante ter profundidade do que velocidade, que os alunos devem perguntar o máximo possível para que toda classe possa refletir sobre estas.

Como vimos anteriormente, uma ótima maneira dos alnos desenvolverem uma mentalidade de crescimento é passar atividades em grupo. O professor deve encorajar o trabalho em equipe e ensinar seus alunos a trabalhar bem em grupo, ouvindo uns outros, respeitando-se e levando em conta todas as ideias levantadas em discussão, sem menosprezá-las e debater sobre cada uma delas. O professor deve estar atento para orientar os grupos, sempre se preocupando em fazer dessa atividade uma experiência de desenvolvimento e colaboração entre os alunos. "Quando os estudantes estão trabalhando bem em grupos, respeitando-se mutuamente e fazendo boas perguntas, as salas de aula são um ótimo lugar para se estar, para alunos e professores"(BOALER, 2018, p. 150).

É muito importante que os estudantes percebam que seu professor acredita no seu potencial. Quando o alunos percebe que os professores não acreditam nele, ele desenvolvem mentalidade fixa, que prejudica sua aprendizagem e sua confiança em si mesmo. Ainda que o professor não expresse essa opinião de maneira clara, ele pode transmitir essa mensagem de forma implícita. Um exemplo disso, que vimos no trabalho, é quando os estudantes são separados em grupos de habilidade. Os alunos, que foram colocados em grupos inferiores sabem disso e se sentem como a própria palavra diz, inferiores em relação aos outros alunos, e com isso, suas mentalidades tornam-se fixas. Uma das grandes armar que os professores têm para eliminar a mentalidade fixa dos alunos é comunicá-los de que todos são capazes de aprender. O professor não deve dizer apenas isso, mas ele deve acreditar também.

"A importância dos alunos pensarem que o seu professor acredita neles foi confirmada em um estudo recente que teve um resultado extremamente poderoso"(COHEN; GARCIA, 2014 apud BOALER, 2018, p. 151). A pesquisa aconteceu da seguinte forma: os alunos escreveram redações e recebiam uma devolutiva diagnóstica dos professores com a seguinte frase: "Eu estou dando esta devolutiva a você porque acredito em você."Metade dos alunos receberam esta mensagem. Dentre os alunos que fizeram parte desse estudo, aquele que receberam a frase adicional tiveram rendimento muito superior um ano depois. Uma única e simples frase foi capaz de elevar o desempenho dos estudantes.

Professores podem comunicar expectativas positivas aos seus alunos usando palavras de encorajamento. Isso é fácil de fazer para aqueles que aprendem rápido, mas também deve ser feito, sobretudo com aqueles alunos que possuem uma aprendizagem mais lenta. Da mesma forma, o alunos precisam perceber que velocidade não é igual a inteligência, como foi dito anteriormente.

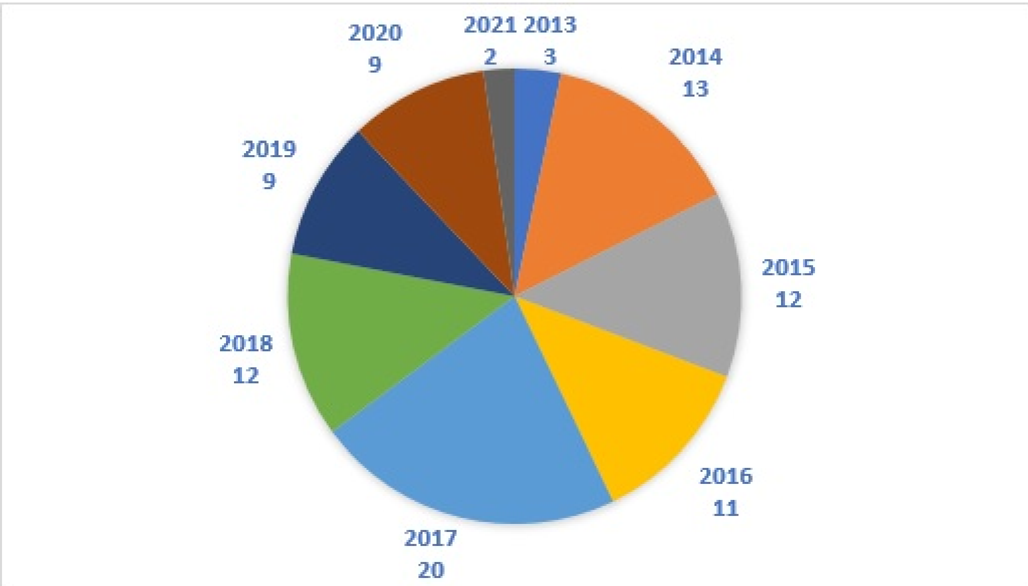
Alguns estudantes tiveram más experiências e receberam mensagens ruins, desde muito novos. Não receberam mensagens positivas e nem tiveram oportunidades de crescimento cerebral do que outros estudantes, e por isso, estão em níveis mais baixos do que estes. Contudo, isso não quer dizer que eles estão limitados a isso, pelo contrário, eles podem elevar seus níveis em matemática desde que recebam mensagens positivas, sejam encorajados e que tenham altas expectativas de seu professor. "Geralmente, é preciso apenas uma pessoa - uma pessoa que os estudantes jamais vão esquecer"(BOALER, 2018, p. 152).

# 3 O ESTUDO DE GRAFOS NAS DISSERTAÇÕES DO PROFMAT

Neste capítulo, será apresentado um levantamento com base nas dissertações disponíveis até setembro de 2021 no site do PRFOMAT, tendo sido selecionadas aquelas que abordavam Teoria de Grafos. O levantamento teve como objetivo investigar o que foi produzido no PROFMAT acerca do tema. A pesquisa foi realizada no banco de dados das dissertações do PROFMAT com a palavra chave "Grafos". Foram encontrados 91 trabalhos que serão descritos a seguir.

O gráfico da Figura 13 apresenta a quantidade de dissertações de acordo com o ano que em elas foram concluídas, considerando o período de janeiro de 2013 a setembro de 2021.

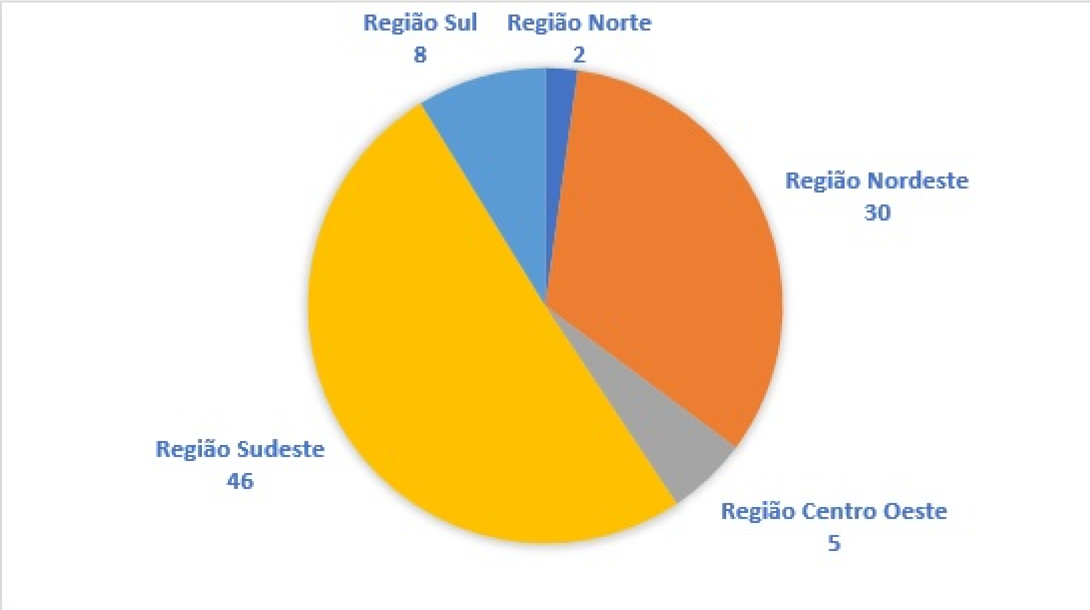
Figura 13 – Gráfico da distribuição das dissertações por ano de publicação




Fonte: O autor, 2021

No que se refere ao local de publicação, as dissertações foram agrupadas de acordo com as regiões brasileiras, como indica o gráfico da Figura 14:

Figura 14 – Gráfico da distribuição das dissertações por região




Fonte: O autor, 2021

Para descrever os resultados de forma mais detalhada, a Tabela 1 apresenta a distribuição das dissertações de acordo com o local e instituição de publicação. As dissertações encontradas no site do PROFMAT[1] foram organizadas de acordo com suas principais contribuições, para que pudessem ser identificados os principais temas abordados por elas. A partir disso, foram elaboradas categorias de maneira que uma mesma dissertação poderia fazer parte de mais de uma categoria caso abordasse o aspecto referente à mesma.

A maior parte das dissertações encontradas no levantamento abordaram, de forma geral, a aplicação prática da Teoria de Grafos na Educação básica. Em 14 trabalhos, foi observada a ênfase no ensino fundamental, especialmente no 8° e 9° anos. No entanto, 46 dissertações abordaram o ensino de grafos no ensino médio, entendendo a relevância de se desenvolver o raciocínio matemático com grafos nesta etapa da educação básica. Apenas três trabalhos mencionaram o estudo de grafos em cursos de graduação.

Em relação às contribuições práticas dos trabalhos encontrados, 40 dissertações deram enfoque à resolução de situações problema que envolviam grafos, apresentando soluções de problemas clássicos no estudo de grafos, de problemas na vida cotidiana ou de questões tradicionais por meios de grafos. Das 91 dissertações encontradas, 31 trabalhos fizeram propostas de ensino da Teoria de Grafos por meio de sequências didáticas, sugestões de atividades ou através de relatos de experiências em aulas práticas. Nestes trabalhos, os autores buscaram oferecer um roteiro pedagógico para que a teoria de grafos pudesse ser bem trabalhada em sala de aula.

[1] Disponível em: <https://profmat-sbm.org.br/>, último acesso em 02/09/2021

Tabela 1 – Distribuição das dissertações por intituição

| **Região** | **Estado** | **Instituição** |
|---|---|---|
| Norte | Acre | UFAC(1) |
| | Amazonas | UFAM(1) |
| Nordeste | Bahia | UEFS(5), UESC(2), UNIVASF(1), UFRB(1), UFBA(1) |
| | Ceará | UFC(2), UFCA(1) |
| | Maranhão | UFMA(2) |
| | Paraíba | UFPB(3), UEPB(1) |
| | Pernambuco | UFRPE(4) |
| | Piauí | UFPI(1) |
| | Sergipe | UFS(6) |
| Centro-Oeste | Distrito Federal | UNB(2) |
| | Goiás | UFJ(1) |
| | Mato Grosso | UFMT(1) |
| | Mato Grosso do Sul | UFGD(1) |
| Sudeste | Espírito Santo | UFES(3) |
| | Minas Gerais | UFSJ(4), UFTM(3), UFV(2), UFOP(1), UFJF(1) |
| | Rio de Janeiro | UFRRJ(7), IMPA(3), UERJ(3), CPII(2), PUC-Rio(2), UNIRIO(1), UENF(1), UFRJ(1) |
| | São Paulo | UNICAMP(4), USP(3), UNESP(2), UFABC(2), IFSP(1) |
| Sul | Paraná | UEM(2), UTFPR(1) |
| | Rio Grande do Sul | UFSM(2) |
| | Santa Catarina | UFSC(3) |

Fonte: O autor, 2021

A relação entre a teoria de grafos e outras temas da matemática foi desenvolvida em 14 trabalhos. Da mesma forma, de todas as dissertações encontradas, 16 delas deram enfoque especial ao aprofundamento teórico. Dos 91 trabalhos analisados, apenas dois apresentaram a teoria de grafos aplicada a um contexto não relacionado à educação.

A utilização de jogos e recursos lúdicos foi abordada por oito dissertações, que destacaram a importância de passatempos, jogos, oficinas e desafios para o ensino de grafos. Foi observada em cinco dissertações a busca por utilizar recursos tecnológicos para o desenvolvimento do raciocínio matemático com grafos por diferentes meios, como softwares, atividades digitais e computadorizadas.

Por fim, uma ideia presente nas dissertações encontradas nesse levantamento foi a importância de incluir o estudo da teoria de grafos no ensino básico, em especial no ensino médio, contribuindo para o desenvolvimento do raciocínio matemático combinatório e resolução de problemas. Além dos roteiros pedagógicos e atividades trazidas pelos trabalhos, destacaram-se os benefícios do uso da tecnologia e propostas lúdicas envolvendo grafos para potencializar a aprendizagem matemática, com protagonismo dos alunos.

É importante dizer que de todas as dissertações sobre teoria dos grafos analisadas, em nenhuma delas foi encontrado o uso de aplicativos de celulares envolvendo grafos.

Vale ressaltar que nenhuma das dissertações sobre Teoria de Grafos abordou as mentalidades matemáticas propostas por Boaler (2018). Foi constatado ainda que, de todas as dissertações disponíveis no banco de dados do PROFMAT, considerando todos os temas, apenas uma, publicada por Valle (2019), abordou as mentalidades matemáticas, sendo este o enfoque principal de seu trabalho. O estudo de Valle (2019) contextualizou a pesquisa de Jo Boaler, apresentando seus principais fundamentos e apontando a importância de serem realizados estudos brasileiros acerca das mentalidades matemáticas na prática do ensino e aprendizagem em matemática, com transformações positivas tanto para os alunos, como para os professores.

A seguir iremos apresentar algumas noções elementares sobre grafos, que dão o suporte teórico necessário para a resolução das atividades propostas e que permitem entender o funcionamento do aplicativo utilizado.

# 4 TEORIA DOS GRAFOS

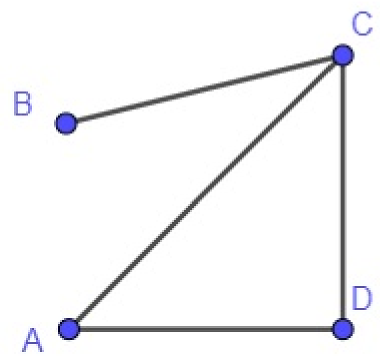
Na nossa vida cotidiana estamos sempre em contato com rotas, caminhos, conexões, redes, circuitos e etc. Dentre esses exemplos que observamos, todos eles podem ser representados por grafos. Mas afinal, o que são grafos? As definições e conceitos a seguir apresentadas podem ser encontrados em Golbarg (2012) e em Netto e Jurkiewicz (2009):

**Definição 1.** *Um **grafo** G é um par (V(G), E(G)) em que V(G) é um conjunto finito e não-vazio, e E(G) é um conjunto de pares de elementos não necessariamente distintos de V(G).*

$V(G)$ ou simplesmente $V$, é o conjunto dos vértices de $G$ e $E(G)$ ou simplesmente $E$, é o conjunto das arestas de $G$. Os vértices geralmente são representados por pontos e as arestas são representadas por segmentos de reta.

Um exemplo de grafo pode ser visto na figura abaixo:

Figura 15 – Grafo exemplo



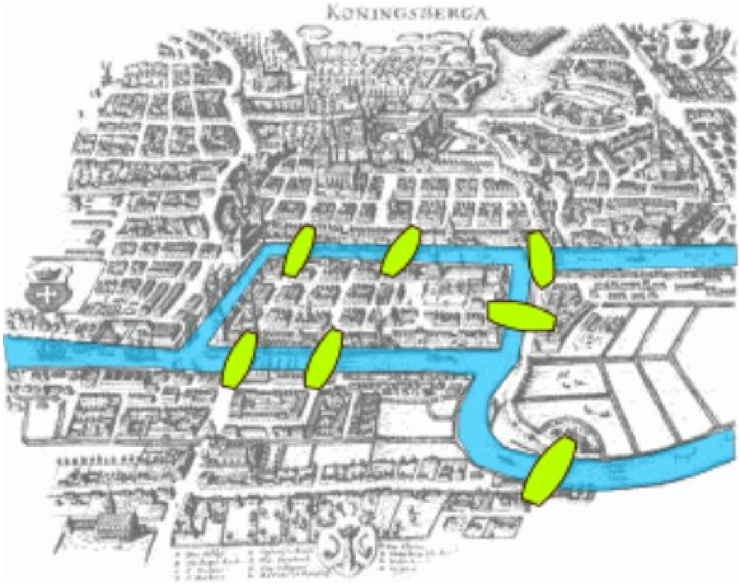

Fonte: O autor, 2022

A Figura 15 mostra um grafo com conjunto de vértices $V = \{A, B, C, D\}$ e arestas $E = \{AC, AD, BC, CD\}$.

Os grafos são utilizados para a modelagem de problemas do cotidiano envolvendo os tópicos citados anteriormente.

A introdução do conceito de grafos e o estudo de suas propriedades, se deu através do matemático suiço Leonard Euler (1707-1783). Aconteceu que no século XVIII, na cidade de Königsberg, que ficava localizada na antiga Prússia (atualmente Rússia), existiam sete pontes que ligavam as margens do rio Pregel e a ilha, conforme mostra a Figura 16.

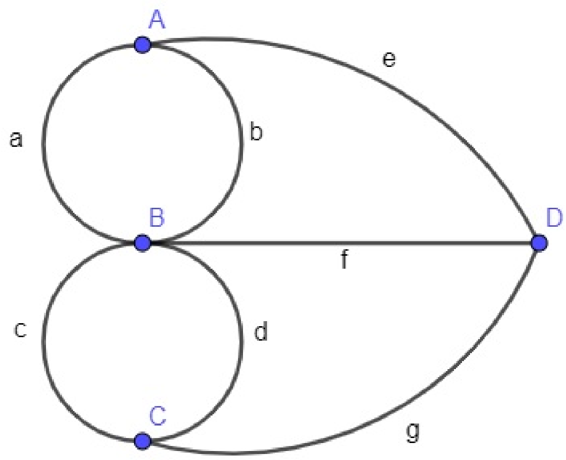
Figura 16 – As pontes de Königsberg




Fonte: <https://en.wikipedia.org/wiki/Seven_Bridges_of_Königsberg>

Os moradores da cidade tinham a curiosidade de saber se era possível andar pela cidade, percorrendo todas as pontes mas atravessando cada ponte apenas uma vez. Devido a diversas tentativas frustradas de alguns cidadãos, a maioria dos habitantes acreditava não ser possível realizar esta tarefa. Coube então a Euler a tarefa de apresentar uma solução da impossibilidade de resolver o problema. Ele observou que as pontes conectavam quatro regiões distintas. Representou essas regiões por pontos e as pontes por segmentos de reta ou de curva. A imagem a seguir, Figura 17, mostra a ideia desta representação.

Figura 17 – Representação gráfica do problema das pontes




Fonte: O autor, 2022

O problema foi transformado num grafo G que possui quatro vértices e sete arestas, dos quais temos: $V(G) = \{A, B, C, D\}$ e $E(G) = \{a, b, c, d, e, f, g\}$.

Ao analisar esta estrutura, Euler provou que passar por cada ponte apenas uma vez seria impossível, devido a paridade sobre o número de pontes ligadas a certas regiões. Este trabalho, que foi publicado em 1736, é considerado o primeiro artigo em Teoria de Grafos.

No século XIX a teoria dos grafos foi desenvolvida de maneira gradual, quando houve aplicações em engenharia e química. No século XX, sua importância aumentou bastante com o surgimento das redes de energia elétrica, das telecomunicações e dos computadores.

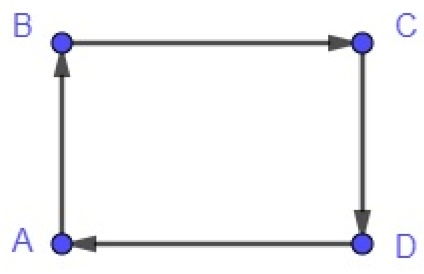
## 4.1 Conceitos elementares

Veremos agora algumas definições básicas e alguns conceitos importantes para entendermos a teoria dos grafos.

**Definição 2.** *Dado um grafo qualquer, quando existe uma orientação nas arestas dizemos que o grafo é* ***orientado*** *ou* ***direcionado****. Caso contrário, ele é denominado não-orientado ou não-direcionado.*

A Figura 18 mostra um exemplo de um grafo orientado:

Figura 18 – Grafo orientado



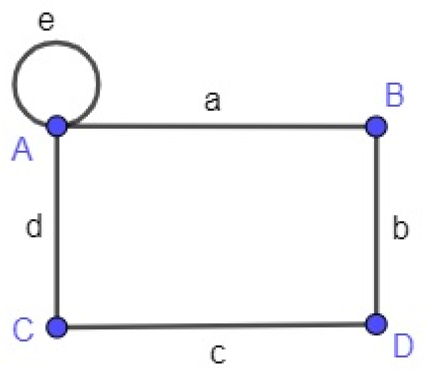

Fonte: O autor, 2022

Num grafo orientado, as arestas são pares ordenados, isto é, um vértice é considerado a origem da aresta e o outro, destino. Na figura acima, o sentido de cada aresta é indicado por uma seta da origem para o destino.

Em termos de nomenclatura, neste trabalho consideraremos a palavra grafo para nos referirmos a um grafo não-orientado.

**Definição 3.** *Dizemos que uma aresta é um* ***laço*** *se ela liga um vértice a ele mesmo.*

Figura 19 – Laço

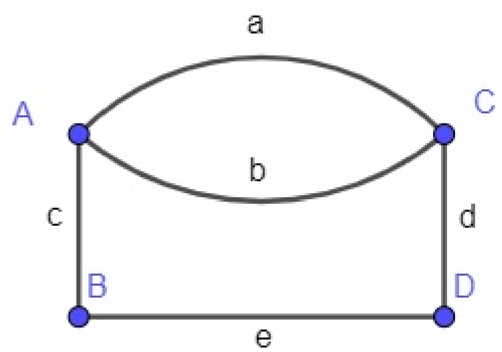



Fonte: O autor, 2022

A Figura 19 mostra um grafo cuja aresta $e$ é um laço.

**Definição 4.** *Dizemos que duas arestas são* ***arestas paralelas*** *se as mesmas representam ligações diferentes entre vértices idênticos.*

Figura 20 – Grafo com arestas paralelas




Fonte: O autor, 2022

Na Figura 20 as arestas $a$ e $b$ são paralelas. Da mesma forma podemos observar que o grafo que representa o problema das pontes de Königsberg (Figura 16) possui arestas paralelas.

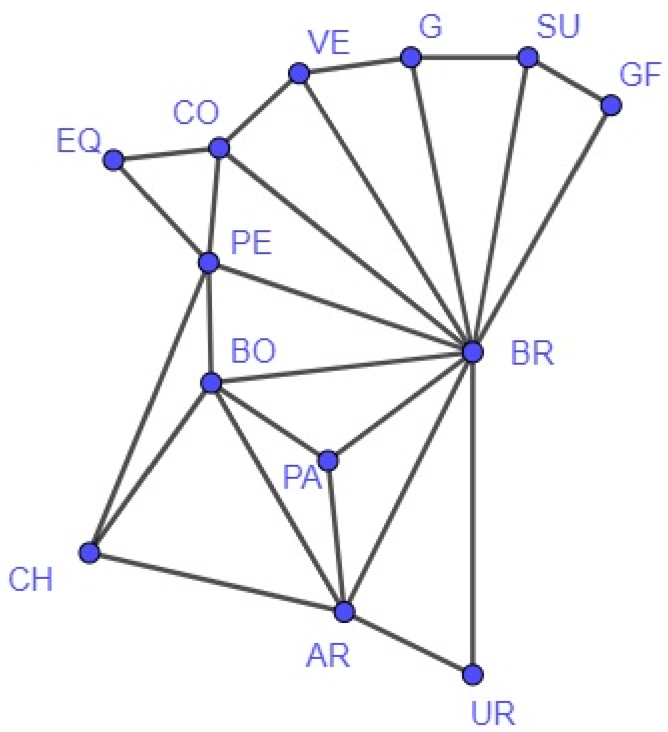
**Definição 5.** *Dizemos que um grafo é* ***simples*** *quando este não contém laços ou arestas paralelas.*

**Definição 6.** *Dizemos que um grafo é um* ***multigrafo*** *quando este possui no mínimo duas arestas paralelas.*

Na Figura 16 e na Figura 20 temos exemplos de multigrafos.

Vejamos agora um exemplo de grafo representando os países da América do Sul, onde cada vértice representa um país e cada aresta representa que existe fronteira entre os países (Figura 21):

Figura 21 – Grafo da América do Sul




Fonte: O autor, 2022

Este grafo possui 13 vértices e 25 arestas.

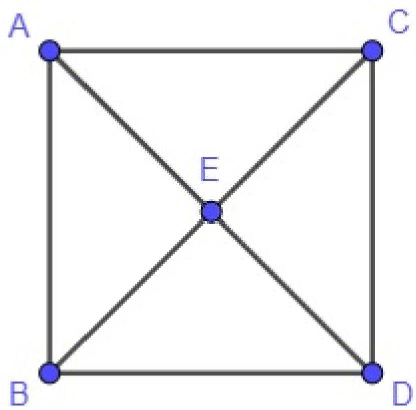
**Definição 7.** *Dados dois vértices A e B de um grafo G, dizemos que eles são* ***vizinhos*** *ou* ***adjacentes*** *se e somente se, existe uma aresta de G cujos extremos são A e B.*

Esta relação entre os vértices é chamada vizinhança.

Um outro conceito importante a respeito dos grafos é o que associa cada vértice com a quantidade de arestas ligadas a ele, que chamaremos de grau do vértice.

**Definição 8.** *Seja G um grafo e $A \in V(G)$ um vértice de G. Chamaremos de* ***grau*** *de A ao número de arestas ligadas a A e denotaremos esse número por d(A).*

Figura 22 – Grafo com 5 vértices e 8 arestas




Fonte: O autor, 2022

Analisando a Figura 22, percebemos que o vértice $E$ possui grau 4 e os demais vértices possuem grau 3. Desta forma, temos que $d(E) = 4$ e $d(A) = d(B) = d(C) = d(D) = 3$.

No grafo apresentado na Figura 19, o vértice A possui um laço, e dessa forma temos $d(A) = 4$, pois o laço contribui com mais duas arestas sobre o vértice.

Agora reparemos o seguinte, o grafo apresentado na Figura 22 possui oito arestas e se somarmos os graus de todos os vértices, obtemos 16. Ou seja, a soma dos graus de todos os vértices é igual ao dobro do número de arestas, isto é assegurado pelo Teorema 1.

**Teorema 1.** *Seja $G$ um grafo com vértices $V_1$, $V_2$, ... , $V_n$. Se $m$ é o número de arestas de $G$, então*

$$\sum_{i=1}^{n} d(V_i) = 2m.$$

*Demonstração.* Se o grafo $G$ não possui arestas, então todos os vértices têm grau zero e a afirmação é verdadeira. Se o grafo $G$ tem arestas, cada uma delas envolve dois vértices e então cada aresta contribuirá com duas unidades na soma total dos graus dos vértices. □

Uma consequência importante deste teorema é o seguinte:

**Corolário 1.1.** *O número de vértices com grau ímpar em todo grafo $G = (V, E)$ é par.*

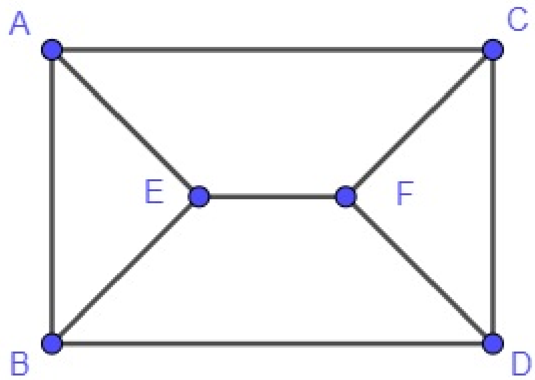
*Demonstração.* Sejam $P$ o conjunto de todos os vértices de grau par, $I$ o conjunto de todos os vértices de grau ímpar e $m$ o número de arestas de $G$, portanto: $\sum_{v \in V} d(v) = \sum_{v \in P} d(v) + \sum_{v \in I} d(v) = 2m$

E portanto: $\sum_{v \in I} d(v) = 2m - \sum_{v \in P} d(v)$.

O lado direito da equação é par. Como a soma das parcelas ímpares é par somente se o número de parcelas for par, podemos concluir que o número de elementos de I é par. □

**Definição 9.** *Dizemos que um grafo G é* ***regular*** *se todos os seus vértices possuem o mesmo grau. Em particular, se o grau dos vértices é r, então dizemos que G é* ***r-regular****.*

Figura 23 – Grafo 3-regular

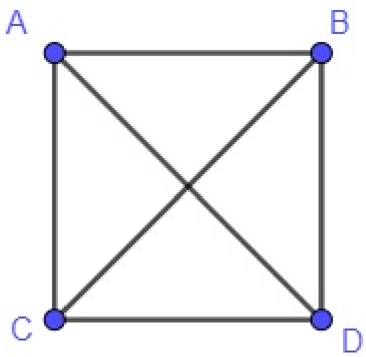



Fonte: O autor, 2022

**Definição 10.** *Dizemos que um grafo G é* ***completo*** *se para cada par de vértices de G existe uma aresta que lhe é associada.*

Percebemos que um grafo completo é um grafo regular. Denotaremos por $K_n$ um grafo completo com $n$ vértices (que também é $(n-1)-$regular).

Figura 24 – Grafo $K_4$

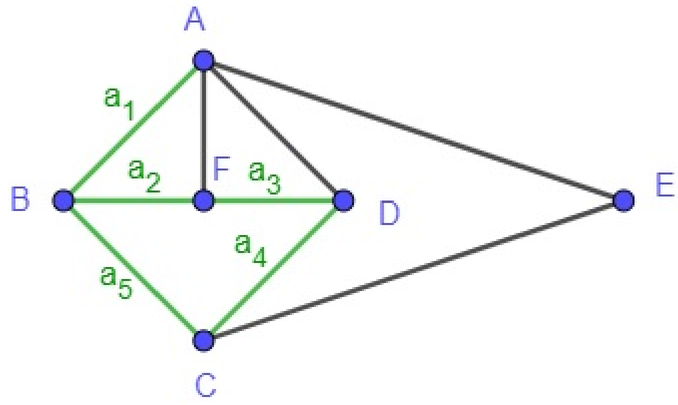



Fonte: O autor, 2022

**Definição 11.** *Um passeio em um grafo é uma sequência finita de vértices e arestas* $x_0, a_1, x_1, a_2, ..., x_{k-1}, a_k, x_k$ *começando e terminando com vértices tais que* $x_{i-1}$ *e* $x_i$ *são os vértices terminais da aresta* $a_i$*,* $1 \leq i \leq k$*.*

Na Figura 25 temos um passeio iniciando no vértice $A$, avançando na sequência $A - a_1 - B - a_2 - F - a_3 - D - a_4 - C - a_5 - B - a_2 - F - a_3 - D$. Uma outra representação possível é através da sequência de vértices, ou seja, $A - B - F - D - C - B - F - D$.

Figura 25 – Exemplo de um passeio sobre um grafo



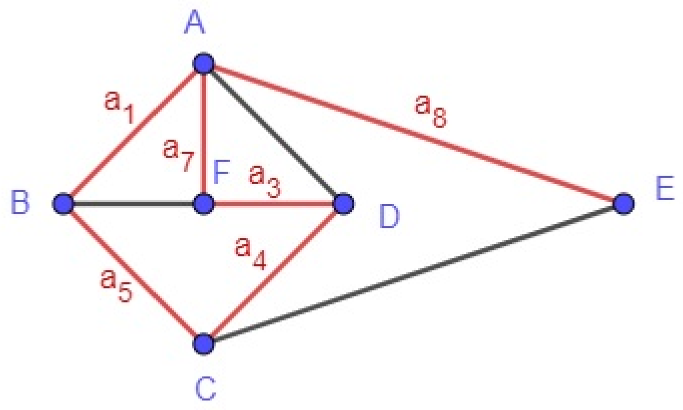

Fonte: O autor, 2022

Um passeio é dito **aberto** quando o vértice onde inicia-se o passeio é diferente do vértice onde termina-se o passeio. Caso contrário, dizemos que o passeio é **fechado**. Na Figura 25 temos um exemplo de passeio aberto.

**Definição 12.** *Uma* ***cadeia*** *ou* ***trilha*** *é um passeio sem repetição de arestas.*

A Figura 26 mostra um exemplo de trilha aberta $E - a_8 - A - a_7 - F - a_3 - D - a_4 - C - a_5 - B - a_1 - A$. Quando nenhuma observação for feita, consideraremos que toda trilha citada neste trabalho será uma trilha aberta.

Figura 26 – Exemplo de uma trilha aberta

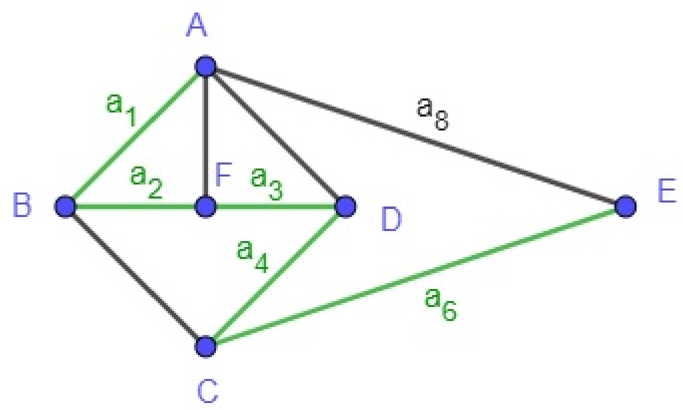



Fonte: O autor, 2022

**Definição 13.** *Um **caminho** é uma trilha aberta sem repetições de vértices.*

Um caminho entre os vértices A e B será denotado por $A - B$ ou por $P_{A-B}$. O caminho da Figura 27 percorre os vértices $A - B - F - D - C - E$, passando pelas arestas $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ e $a_6$.

Figura 27 – Exemplo de um caminho sobre um grafo




Fonte: O autor, 2022

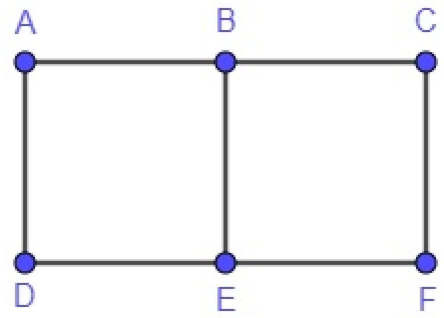
**Definição 14.** *Em um grafo $G = (V, E)$ chamamos de **comprimento de um caminho** o número de arestas deste caminho.*

Na Figura 27 o comprimento do caminho $A - B - F - D - C - E$ é igual a 5, o número de suas arestas.

**Definição 15.** *A distância entre um par de vértices $x_i$ e $x_j$, denotada por $d(x_i, x_j)$, corresponde ao caminho de menor comprimento capaz de ligar $x_i$ a $x_j$. No caso do caminho não existir, diremos que $d(x_i, x_j) = \infty$.*

A Figura 28 nos mostra um grafo que possui seis vértices e sete arestas. Um caminho possível entre os vértices A e F pode ser dado por $A - D - E - B - C - F$, que possui comprimento igual a 5. Entretanto, a distância entre os vértices A e F é igual a 3, pois existe o caminho $A - B - C - F$ de comprimento 3, não existindo um caminho mais curto que este.

Figura 28 – Grafo com 6 vértices e 7 arestas




Fonte: O autor, 2022

**Teorema 2.** *Em um grafo $G = (V, E)$ se existe um passeio entre dois vértices $A$ e $B$, então existe um caminho entre esses dois vértices.*

*Demonstração.* Seja $W$ um passeio entre $A$ e $B$. Se $W$ não possui vértices repetidos então $W$ é um caminho. Agora se $W$ possui vértices repetidos, seja $n$ o número de vértices repetidos e seja $K$ um desses vértices. Podemos dividir o passeio $W$ em três partes:

$W_1$: começa em $A$ e segue $P$ até a primeira ocorrência de $K$.

$W_2$: começa em $K$ e termina em $K$, seguindo $P$ desde a primeira ocorrência de $K$ até sua última ocorrência.

$W_3$: começa em $K$ e termina em $B$, seguindo $P$ a partir da última ocorrência de $K$.

Seja $W' = W_1 \cup W_3$. Temos que $W'$ é um passeio no qual o vértice $K$ não apresenta repetições. Desta forma, $W'$ tem $(n-1)$ vértices repetidos. Repete-se este processo $(n-1)$ vezes, fazendo com que exista um passeio $W^{n-1}$ que não tenha nenhum vértice repetido. Desta forma, $W^{n-1}$ é um caminho. $\square$

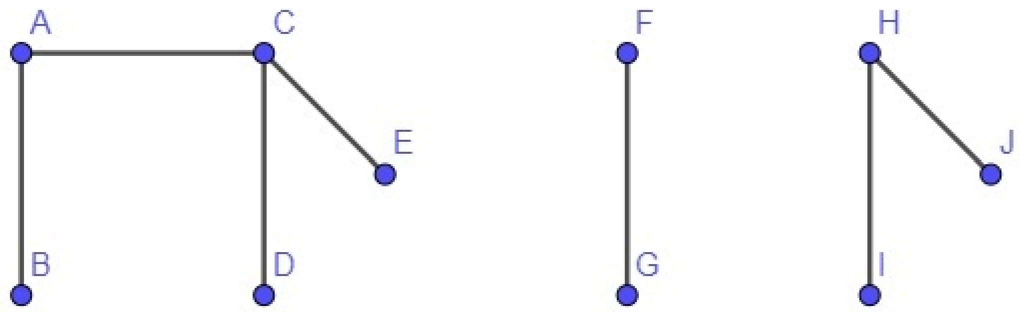
**Definição 16.** *Um **circuito** em um grafo $G = (V, E)$ é um passeio fechado.*

**Definição 17.** *Um **ciclo** em um grafo $G = (V, E)$ é um circuito em que não há repetição de arestas ou vértices. Um ciclo de comprimento $k$ é chamado **k-ciclo**.*

**Definição 18.** *Dizemos que um grafo é **conexo** se for possível visitar qualquer vértice, partindo de um outro, utilizando as arestas.*

Dado um grafo $G = (V, E)$, dizemos que um vértice $A \in V$ está conectado a um vértice $B \in V$, se e somente se, existe um caminho em $G$ com início em $A$ e término em $B$. Desta forma, também podemos dizer que um grafo é conexo se ele é não vazio e quaisquer dois de seus vértices estão conectados. Caso contrário, dizemos que o grafo é **desconexo**. Na Figura 29 vemos um grafo desconexo com três componentes conexas.

Figura 29 – Grafo desconexo




Fonte: O autor, 2022

## 4.2 Grafos Eulerianos

Para analisar o problema das pontes de Königsberg, Euler modelou o mapa apresentado na Figura 16 em um grafo, conforme visto na Figura 17, de modo que cada vértice representa uma região (margem do rio ou ilha) e cada aresta representa uma ponte. O problema pede um passeio no grafo $G$ que passe apenas uma vez por cada aresta de $G$, ou seja, uma trilha que passe por todas as arestas. Isso nos leva a uma definição muito importante:

**Definição 19.** *Uma trilha de um grafo $G$ é chamada de **cadeia euleriana** se ela passa por todas as arestas de $G$ apenas uma vez. Da mesma forma, dizemos que um circuito é **euleriano** se ele contém todas as arestas do grafo.*

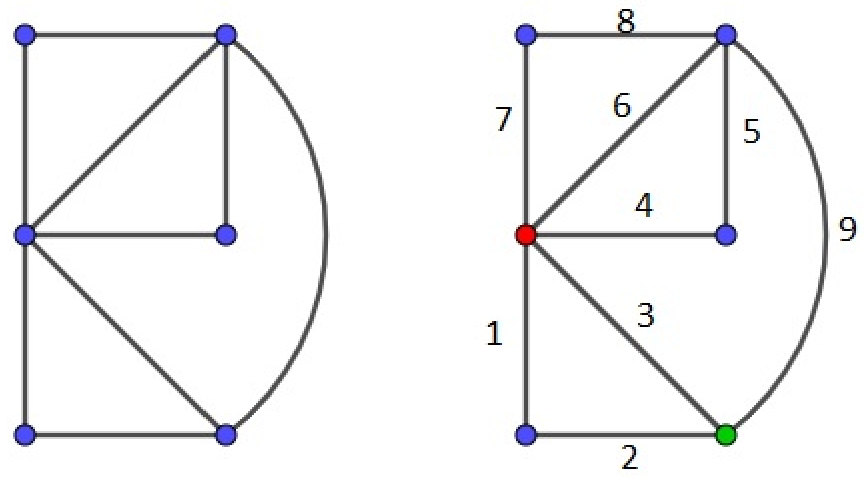
Alguns autores usam os termos caminho euleriano e ciclo euleriano para se referirem a cadeia euleriana e ao circuito euleriano, respectivamente.

**Definição 20.** *Um grafo que contém um circuito euleriano é chamado de **grafo euleriano**. Um grafo que não contém um circuito euleriano, mas contém uma cadeia euleriana é chamado **grafo semi-euleriano**.*

**Definição 21.** *Um caminho de $G$ diz-se **euleriano** se ele passa por todas as arestas apenas uma vez.*

A imagem abaixo, Figura 30, mostra um grafo à esquerda e uma possível trilha euleriana à direita. O caminho começa no vértice vermelho, segue a sequência de arestas que foram numeradas em ordem crescente e termina no vértice verde. Este grafo é semi-euleriano.

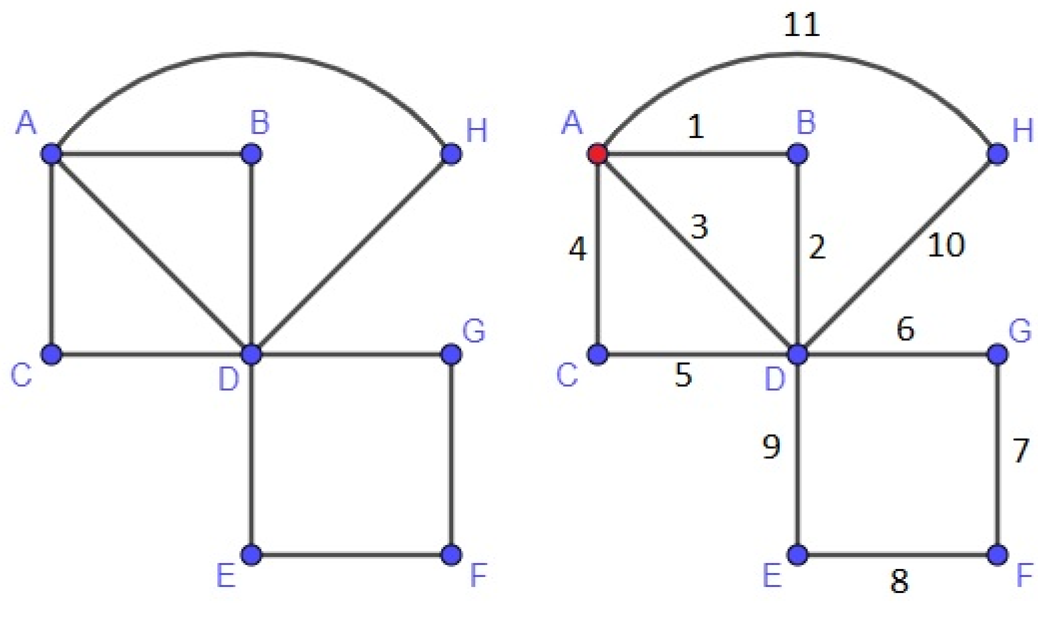
Figura 30 – Um grafo e um possível caminho euleriano




Fonte: O autor, 2022

A Figura 31 apresenta um grafo euleriano à esquerda e um circuito euleriano à direita.

Figura 31 – Grafo euleriano




Fonte: O autor, 2022

Por definição, todo caminho é conexo. Como um circuito euleriano possui todas as arestas de um grafo, podemos concluir que um grafo euleriano é conexo.

Ao resolver o problema das pontes de Königsberg, Euler encontrou uma condição necessária e suficiente para que um grafo possua um circuito euleriano. Antes de vermos este resultado, veremos um lema importante.

**Lema 1.** *Se todo vértice de um grafo $G$ tem grau maior ou igual a 2, então $G$ contém um ciclo.*

*Demonstração.* Se $G$ contém laços ou arestas paralelas, não há o que provar, pois $G$ automaticamente contém um ciclo. Sendo $G$ um grafo simples, partindo de um vértice $A$ qualquer, iniciamos nossa trilha. Quando chegamos a um vértice qualquer, ou estamos visitando-o pela primeira vez e podemos continuar, ou chegamos a um vértice já visitado, produzindo, assim, um ciclo. Como o número de vértices é finito, o lema está provado. □

**Teorema 3.** *Um grafo conexo $G$ é euleriano se e somente se, todos os seus vértices têm grau par.*

*Demonstração.* ($\Rightarrow$) Suponha que $G$ tenha uma trilha fechada de comprimento $m$. Cada vez que a trilha passa por um vértice utiliza duas novas arestas, uma para entrar e outra para sair. Logo, o grau de cada vértice deve ser obrigatoriamente par.

($\Leftarrow$) Vamos usar a indução sobre o número de arestas $m$ do grafo. Por vacuidade, o teorema é válido quando $m = 0$. Suponha que o teorema seja válido para todos os grafos com menos do que $m$ arestas. Sendo $G$ conexo, todos os vértices têm grau maior ou igual a 2, pois os graus são pares. Pelo lema anterior, $G$ contém um ciclo, ou seja, uma trilha fechada. Dentre todas as trilhas fechadas em $G$ escolhemos uma trilha $T$ com comprimento máximo. Se $T$ tem comprimento $m$, o teorema está provado. Caso contrário, consideramos o grafo $H$ resultante das arestas retiradas de $T$. Como retiramos um número par de arestas de cada vértice de $T$, e todos os vértices têm grau par, pelo menos uma das componentes de $H$ tem um vértice comum com $T$ e tem todos os vértices com grau par. Pela hipótese de indução, $H$ tem uma trilha fechada que passa por todos os vértices de $H$, e podemos formar uma trilha fechada maior concatenando $T$ com a trilha em $H$. Mas isto contraria a maximalidade na escolha de $T$.

□

**Corolário 3.1.** *Um grafo conexo $G$ é semieuleriano se, e somente se, no máximo, dois vértices têm grau ímpar.*

*Demonstração.* ($\Rightarrow$) $G$ é semieuleriano, então possui um trilha aberta $P$ que inicia num vértice $A$ e termina num vértice $B$. Como a trilha inicia-se em $A$, temos que o grau de $A$ é um número ímpar. Cada vez que a trilha passa por um vértice, ela utiliza duas novas arestas, uma para entrar e outra para sair. Ao chegarmos no final da trilha, ela utiliza o vértice $B$ para chegar. Portanto o grau de B também é ímpar.

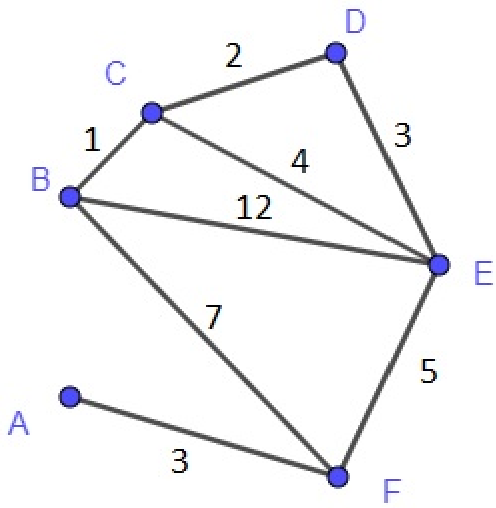
($\Leftarrow$) Suponha que o grafo $G$ tem dois vértices de grau ímpar $A$ e $B$. Vamos criar uma nova aresta, que não pertence ao grafo $G$, que denotaremos por $k$. Esta aresta conecta os vértice $A$ e $B$. Portanto agora $A$ e $B$ tem grau par. Com isso, pelo teorema, o novo grafo $G'$ é euleriano e portanto existe uma trilha fechada em $G'$. Iniciamos esta trilha $P'$ em A, e terminamos A, sendo que a última aresta a ser percorrida é $k$. Se eliminarmos esta aresta $k$, temos uma trilha $P$ passando por todos os vértices de $G$, iniciando em $A$ e terminando em $B$ o que configura uma trilha aberta. Portanto, $G$ é semieuleriano.

$\square$

**Definição 22.** *Dado um grafo G, dizemos que ele é* ***ponderado*** *se existem valores numéricos(pesos) associados às suas arestas ou aos seus vértices.*

A imagem a seguir, Figura 32, mostra um exemplo de um grafo ponderado.

Figura 32 – Grafo ponderado




Fonte: O autor, 2022

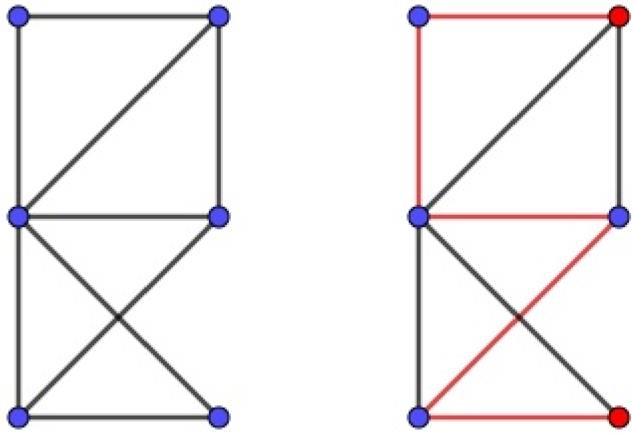
## 4.3 Grafos Hamiltonianos

Um problema muito similar ao dos grafos eulerianos é o de procurar em um grafo uma trilha fechada que passe por todos os vértices apenas uma vez.

**Definição 23.** *Um caminho de G diz-se* ***hamiltoniano*** *se ele passa por todos os vértices apenas uma vez.*

A imagem abaixo, Figura 33, mostra um grafo a esquerda e um dos possíveis caminhos hamiltonianos a direita.

Figura 33 – Um grafo e um possível caminho hamiltoniano



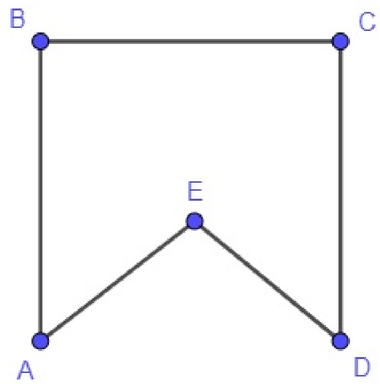
Fonte: O autor, 2022

**Definição 24.** *Dizemos que um ciclo é hamiltoniano quando este é uma trilha hamiltoniana fechada.*

**Definição 25.** *Dizemos que um dado circuito é hamiltoniano se ele contém todos os vértices do grafo.*

Podemos observar que o grafo abaixo admite um circuito euleriano:

Figura 34 – Grafo da bandeirinha de festa junina




Fonte: O autor, 2022

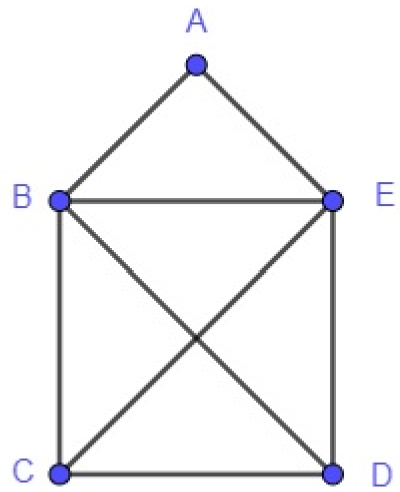
A trilha ABCDEA é um circuito euleriano.

**Definição 26.** *Dado um grafo $G$, se existe um ciclo que contenha todos os vértices de $G$, onde cada vértice aparece apenas uma vez, dizemos que $G$ admite um ciclo hamiltoniano. Neste caso, dizemos que $G$ é hamiltoniano.*

### 4.4 Grafos Eulerianos, semi-eulerianos e as atividades

Após vermos algumas definições, vamos recordar o grafo abaixo colocado na atividade proposta aos estudantes:

Figura 35 – Grafo da Casinha




Fonte: O autor, 2022

Uma das atividades (Anexo A) tinha o problema que consistia em dizer se é possível desenhar este grafo sem tirar a caneta do papel e sem repetir arestas. A solução que alguns alunos chegaram é: depende de qual vértice você irá começar o desenho.

A questão pode ser resolvida se começarmos do vértice C ou do vértice D. Aqui podemos ver uma solução: CB, BA, AE, ED, DB, BE, EC, CD.

Se começarmos de outro vértice, distinto de C ou D, não será possível a solução do problema.

Conseguimos resolver este problema porque o grafo é semieuleriano mas, em todas as soluções possíveis, os vértices inicial e final são distintos. Entretanto, se tentarmos encontrar um circuito euleriano não conseguiremos, já que os vértices C e D possuem grau ímpar. Em relação aos outros grafos apresentados na atividade, alguns são semieulerianos e outros não, uma vez que os primeiros são facilmente identificados atendendo ao número de vértices de grau ímpar.

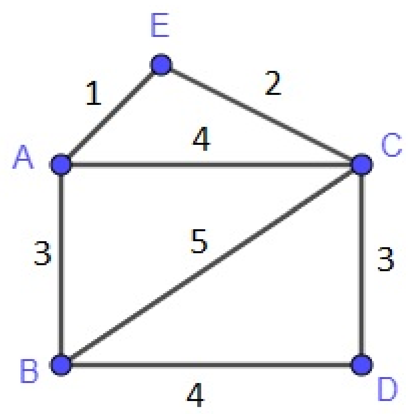
### 4.5 O problema do caixeiro viajante

O problema do caixeiro viajante é um dos mais estudados no campo da pesquisa operacional, mas que até hoje, não foi possível encontrar um algoritmo que computa em tempo polinomial a solução deste problema. Ele é formulado da seguinte forma: imagine que um homem quer vender seus produtos num país. Ele terá que visitar todas as cidades deste local. Para economizar tempo e recursos, ele quer estabelecer uma rota na qual ele visite cada cidade apenas uma vez até retornar à cidade de onde ele iniciou sua jornada, percorrendo a menor distância possível. Desta forma, podemos pensar nas cidades como vértices e as estradas que conectam as cidades como arestas ponderadas. Assim, o problema consiste em encontrar um circuito onde cada vértice aparece apenas uma vez, ou seja, um circuito hamiltoniano.

Apesar de não haver uma maneira de resolver este problema, matemáticos e cientistas da computação desenvolveram vários algoritmos que encontram boas soluções, mesmo que não sejam as melhores. Um desses algoritmos é conhecido como o algoritmo guloso. Este método de resolução de problema consiste em dado um grafo G, escolhemos um vértice A para iniciarmos o caminho. O próximo vértice a ser escolhido é aquele que está mais perto de A, conectado por uma aresta. E desta maneira fazemos as escolhas dos próximos vértices até usarmos todos os vértices.

Observe o grafo ponderado apresentado na Figura 36:

Figura 36 – Percorrendo o grafo usando o algoritmo guloso



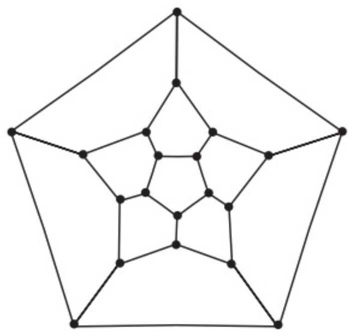

Fonte: O autor, 2022

Partindo do vértice $A$, queremos passar por todos os vértices do grafo percorrendo a menor distância possível, terminando em $A$. O próximo vértice a ser escolhido é $E$, pois está mais perto de $A$. Depois, só temos como opção o vértice $C$. Após isso, o mais próximo é $D$. Escolhemos o vértice $B$ e por fim, retornamos a $A$. Desta maneira o caminho fica $A - E - C - D - B - A$, percorrendo uma distância de $1 + 2 + 3 + 4 + 3 = 13$.

**Definição 27.** *Dado um grafo $G$, se existe um ciclo que contenha todos os vértices de $G$, onde cada vértice aparece apenas uma vez, dizemos que $G$ admite um ciclo hamiltoniano. Neste caso, dizemos que $G$ é hamiltoniano.*

O problema do caixeiro viajante envolve grafos hamiltonianos, definidos na seção anterior. Esse nome é uma homenagem ao matemático irlandês Sir William Rowan Hamilton (1805-1865). Em 1859, Hamilton propôs um quebra-cabeça baseado num dodecaedro. Sabemos que este sólido possui vinte vértices e trinta arestas. Ele nomeou cada vértice do dodecaedro como sendo o nome de uma cidade famosa, e o jogo consistia em tentar encontrar uma rota que passasse por cada cidade apenas uma vez. As conexões entre as cidades eram feitas pelas arestas do dodecaedro. Por se tratar de um objeto tridimensional, fica difícil visualizarmos o problema. Entretanto, podemos pensar num dodecaedro cujas arestas sejam elásticas, altamente flexível e maleável. Desta forma, planarizamos o dodecaedro de maneira que uma das faces torna-se uma face externa e esticamos as demais faces sobre uma superfície, podendo ver a seguinte estrutura, representada na Figura 37:

Figura 37 – Grafo do Dodecaedro



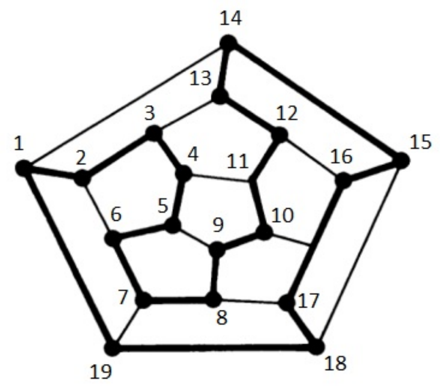
Fonte: Figueiredo (2009)

Neste momento, outro importante conceito de Teoria de Grafos emerge: o conceito de grafos planares.

**Definição 28.** *Dizemos que um grafo $G$ é* ***planar*** *se admite uma representação no plano de modo que nela não existe cruzamento de arestas.*

O grafo apresentado na Figura 37 é hamiltoniano, pois existe um caminho hamiltoniano como podemos ver na Figura 38.

Figura 38 – Caminho hamiltoniano no grafo do Dodecaedro




Fonte: O autor, 2022

A questão de descobrir se um grafo é ou não hamiltoniano é um dos mais estudados da teoria dos grafos por conta da sua aplicabilidade. Entretanto, até hoje, não foi encontrada nenhuma condição necessária e suficiente para que um grafo seja hamiltoniano, este é um problema que se encontra em aberto. Entretanto, existem atualmente, condições necessárias e suficientes separadas. A condição necessária sobre o número de componentes conexas de um subconjunto próprio de $V(G)$. A condição suficiente é dada pelo Teorema de Dirac. Para provarmos o Teorema de Dirac, será necessário conhecermos antes o Teorema de Ore.

**Teorema 4** (Teorema de Ore)**.** *Se $G(V,E)$ é um grafo simples com $n \geq 3$ vértices, e se $d(A) + d(B) \geq n$ para cada par de vértices não adjacentes $A$ e $B$, então $G$ é hamiltoniano.*

*Demonstração.* Faremos a demonstração através da contradição. Suponha que $G$ não é hamiltoniano, mas satisfaz a hipótese. Vamos supor ainda que $G$ é "quase hamiltoniano", no sentido de que a adição de qualquer outra aresta torna-o hamiltoniano. Se este não for o caso, adicionamos arestas extras até que o seja. Note que a adição de arestas não quebra a hipótese.

Sejam $A$ e $B$ vértices não adjacentes. Sabemos que existe pelo menos um par, caso contrário $G$ seria completo e por consequência hamiltoniano. Logo, a adição da aresta $(A, B)$ torna $G$ hamiltoniano, o que implica na existência de um caminho passando por todos os vértices:

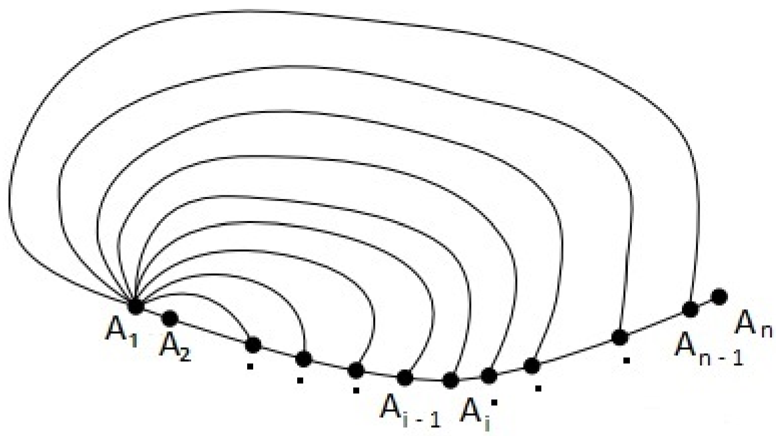
$$A = A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow ... \rightarrow A_n = B$$

.

Por hipótese, $d(A_1) + d(A_n) \geq n$, isto é, existe um conjunto $D$ com ao menos outras $n - 2$ arestas incidentes em $\{A_1, A_n\}$.

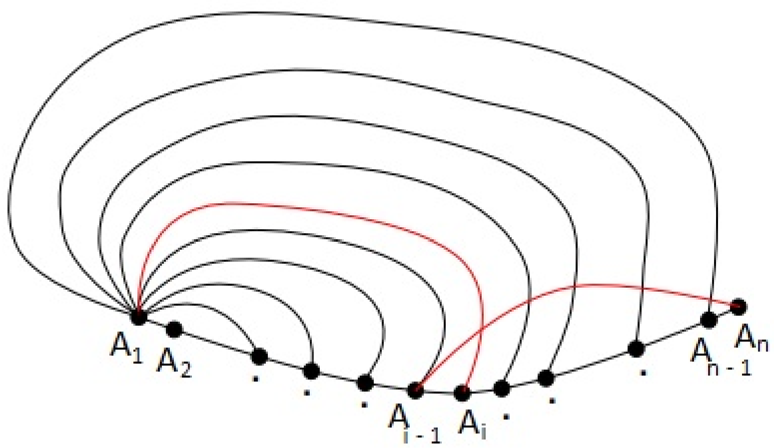
Logo, existem vértices $A_i$ e $A_{i-1}$ tais que $A_i$ é adjacente a $A_1$ e $A_{i-1}$ é adjacente a $A_n$. De fato, se todas as arestas de $D$ incidem, digamos, em $A_1$, teríamos ao menos um par de arestas paralelas, contradizendo o fato de $G$ ser simples. Similarmente, se todas incidem em $A_n$, como podemos ver na Figura 39 e na Figura 40:

Figura 39 – Demonstração do Teorema de Ore




Fonte: O autor, 2022

Figura 40 – Demonstração do Teorema




Fonte: O autor, 2022

Mas neste caso, temos um circuito hamiltoniano:

$$A_1 \to A_2 \to ... \to A_{i-1} \to A_n \to A_{n-1} \to ...A_{i+1} \to A_i \to A_1,$$

em contradição a suposição de que $G$ é hamiltoniano.

$\square$

**Teorema 5** (Teorema de Dirac)**.** *Se $G$ é um grafo simples com $n \geq 3$ vértices, e se $d(A) \geq \dfrac{n}{2}$ para cada vértice $A$, então $G$ é hamiltoniano.*

*Demonstração.* Temos que

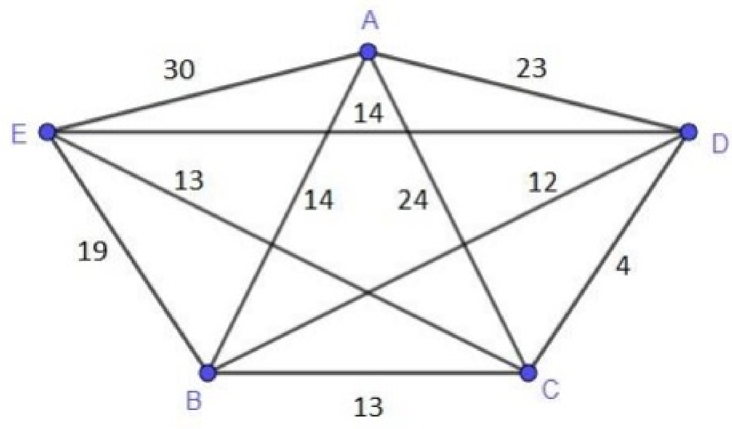
$$d(A) + d(B) \geq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$$

para cada par de vértices $A$ e $B$(adjacentes ou não adjacentes). Segue do Teorema de Ore que $G$ é hamiltoniano. $\square$

## 4.6 Grafos hamiltonianos e atividade

Para entendermos melhor sobre os ciclos hamiltonianos, vamos ver o seguinte problema, que consta na atividade (Anexo A) por nós proposta: João virá ao Rio de Janeiro pela primeira vez na sua vida para participar de um congresso da sua empresa. Neste período, ele reservou um dia para visitar quatro pontos turísticos de seu interesse: O estádio do Maracanã, a praia de Copacabana, o Cristo Redentor e o Pão de Açúcar. O esquema abaixo, Figura 41, representa os pontos turísticos que ele pretende visitar, juntamente com o hotel onde ele está hospedado e mostra as distâncias entre os lugares:

Figura 41 – Grafo que representa a distância entre os locais visitados por João

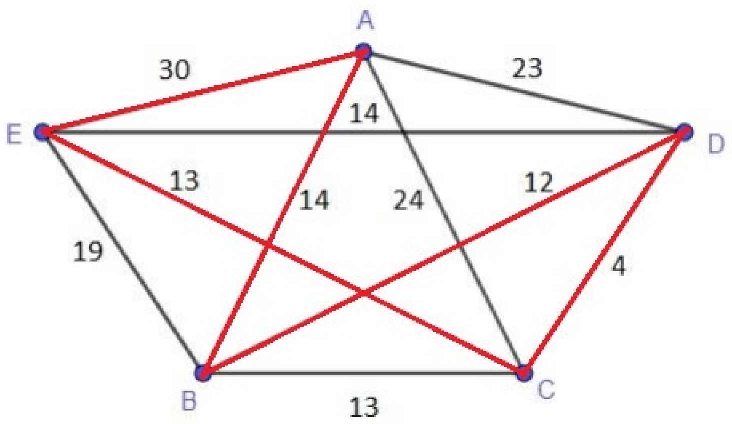



Fonte: O autor, 2022

Os vértices A, B, C, D e E representam os seguintes lugares respectivamente: hotel, Maracanã, Pão de Açúcar, praia de Copacabana e Cristo Redentor. E queremos passar em cada lugar apenas uma vez e retornar ao hotel, ou seja, para resolver este problema, sem repetir passagens pelos pontos turísticos, o grafo tem que ser hamiltoniano.

A ideia para resolvermos este problema é utilizar o algoritmo guloso, que consiste em, partindo de A, procurar sempre a menor distância ao próximo ponto. Neste sentido, partindo de A, a menor distância que encontramos é para o ponto B. De B vamos para D, de D vamos para C, de C vamos para E e de E voltamos para A, ficando assim com o ciclo $A - B - D - C - E - A$ e percorrendo a distância de 73 km. Como podemos observar na Figura 42:

Figura 42 – Grafo que representa a menor distância que João deve percorrer




Fonte: O autor, 2022

# 5 O USO DE TECNOLOGIAS NA APRENDIZAGEM MATEMÁTICA

Atualmente em nossa sociedade é muito difícil encontrar alguém que não esteja conectado à internet, seja por computador, tablet ou smartphone. Cada vez mais temos pessoas conectadas em mídias e redes sociais como Instagram, Facebook, Twitter, Tik Tok, YouTube, entre outras. Os jovens são o grande público-alvo dessas redes e os grandes movimentadores para que estas funcionem. Em decorrência disso, surgiu até uma nova profissão, o influenciador digital, cujo trabalho nas redes sociais lhe garante ganhos financeiros. Com os recursos tecnológicos, é possível interagir, solucionar problemas, desenhar, ter apoio visual para diferentes tarefas, entre outros. Se a tecnologia faz parte do mundo atual e do trabalho, deve também ser parte integrante do planejamento educativo.

Com uma sociedade tão dependente dessas novas tecnologias, podemos pensar: de que maneira os professores e educadores podem se beneficiar disso e utilizar estes recursos na educação? Diversos softwares e aplicativos são lançados e atualizados todos os anos e muitos deles podem ser usados para a aprendizagem dos alunos. Como exemplo, segundo Silva, Silva e Groenwald (2018), temos o famoso software livre GeoGebra, que pode ser utilizado no ensino de álgebra, geometria, estatística, probabilidade e cálculo. Este software permite a construção de applets, recorrendo à representação gráfica de vários objetos matemáticos e pode ser uma ferramenta muito útil. Para fazer o desenho do gráfico de uma função, por exemplo, o utilizador leva apenas alguns minutos e este gráfico pode ser visualizado de forma imediata.

Romanello (2016) investigou o uso do aplicativo *Matemática* em sala de aula para trabalhar o conceito de função, por meio de uma pesquisa qualitativa, incluindo entrevista com o professor que mediou as tarefas realizadas. A pesquisadora destacou que o uso de celulares como recurso tecnológico em sala de aula tem vantagens como o fácil acesso, a boa resolução da tela, câmeras, armazenamento, interface e as opções diversificadas disponíveis, apesar de ser pertinente analisar de forma crítica as consequências do crescimento do uso dessa tecnologia entre os jovens.

Recursos tecnológicos como aplicativos possibilitam que os alunos investiguem e realizem conjecturas com autonomia e de modo simultâneo, diretamente de seus celulares, participando da aula ativamente e experimentando formas de pensar sobre os questionamentos trazidos pelo professor, "ao se apropriar da prática de utilizar as tecnologias nas aulas, em particular, os celulares inteligentes, professor e aluno tornam-se atores colaborativos nos processos de ensino e aprendizagem"(ROMANELLO 2016, p. 9). Esta ideia é reforçada por Silva, Silva e Groenwald (2018) já que desse modo, progressivamente, os professores vêm aderindo ao uso dessas novas ferramentas tecnológicas em suas aulas e estas se tornam fundamentais na aprendizagem dos alunos.

Refletindo acerca da importância do uso de tecnologias por meio de aplicativos com jogos, Silva, Silva e Groenwald (2018) mapearam e catalogaram diferentes aplicativos que podem ser utilizados para planejar o trabalho pedagógico, tanto na educação básica como no ensino superior. Segundo os autores, dispositivos tecnológicos enriquecem as propostas pedagógicas para a construção do conhecimento matemático e promovem o engajamento dos alunos, visto que os jovens dedicam boa parte de seu tempo ao uso de tecnologias, como tablets e smartphones. Ou seja, o ensino de matemática precisa ser pensado de forma vinculada à realidade dos alunos.

Com esse novo olhar sobre a relação de ensino e aprendizagem, com uso bem estabelecido dos recursos tecnológicos, há aprendizagem significativa dos conceitos matemáticos, contribuindo para a motivação dos alunos e melhor entendimento dos conceitos matemáticos, que frequentemente são vistos como difíceis por envolverem alto nível de abstração.

> Computadores, tablets, calculadoras, smartphones são instrumentos pertinentes no processo de ensino e aprendizagem, cabendo à escola utilizá-los de forma coerente com uma proposta pedagógica atual e comprometida com uma aprendizagem significativa para a formação integral dos estudantes (Silva; Silva; Groenwald, 2018, p. 60).

O uso da tecnologia em sala de aula ajuda na construção do conhecimento e do raciocínio matemático a partir das propostas dos professores.

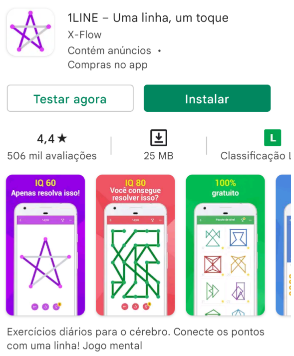
Para estes autores, os ganhos do uso de aparatos tecnológicos são inúmeros. Em primeiro lugar, abre diversas possibilidades de planejamento pedagógico, abrangendo a diversidade de perfis de alunos, auxiliando na inclusão daqueles que apresentam necessidades educativas especiais, tanto na compreensão dos conceitos como na avaliação. Assim, os recursos tecnológicos ajudam a amenizar os efeitos de dificuldades no processo de aprendizagem, promovendo integração educativa e social nas aulas de matemática.

Silva, Silva e Groenwald (2018) destacam, como um outro ponto importante no uso das tecnologias em aulas de matemática, a capacitação dos professores que irão lidar como os recursos tecnológicos e seu manejo em sala de aula. Nesse contexto, a insegurança por parte do professor pode se tornar um obstáculo para a adesão aos novos recursos, assim como a falta de compreensão sobre o papel das tecnologias. Ao mesmo tempo em que é necessária a capacitação dos professores para incluir os aparatos tecnológicos nas aulas de matemática com qualidade, a infraestrutura das escolas também é um fator fundamental, na maior parte das vezes desafiadora, devido à falta de recurso. Assim, o professor tem um papel mediador para inserir recursos digitais através de questionamentos e situações problema a serem analisados e a escola deve ser facilitadora do acesso à tecnologia, principalmente em regiões carentes. Na sequência iremos apresentar o aplicativo que foi utilizado no âmbito do presente trabalho.

## 5.1 O aplicativo 1Line ou One Line

O aplicativo que utilizamos em sala de aula possui dois nomes diferentes, dependendo da plataforma que esteja a ser utilizada. No sistema android, ele está disponível sob o nome de 1Line - uma linha, um toque, conforme podemos ver na Figura 43.

Figura 43 – Aplicativo 1Line versão android




Fonte: O autor, 2022

Para dispositivos que usem o sistema iOs, ele se apresenta como One line - quebra-cabeças, conforme podemos ver na Figura 44.

Figura 44 – Aplicativo One Line versão iOs


Fonte: O autor, 2022

Na descrição do aplicativo, temos "uma linha com um toque é uma maneira simples de fazer exercícios de treinamento cerebral todos os dias. Este é um ótimo jogo de desafio mental com regras simples. Basta tentar conectar todos os pontos com apenas um toque. [1]

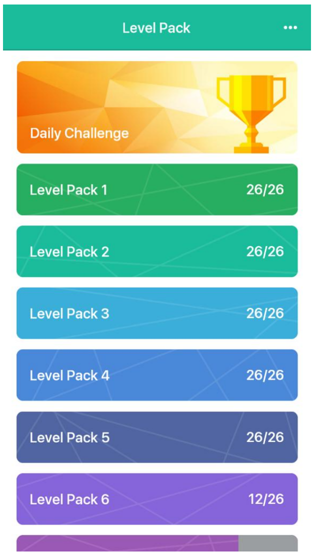
Este aplicativo é um jogo, que apresenta 30 níveis de dificuldade, e cada nível possui 26 fases. Ele ainda possui um desafio diário, onde em cada dia, apresenta um novo quebra-cabeças a ser resolvido. Cada fase apresenta um grafo, e o desafio é percorrer todas as arestas do grafo apenas uma vez. O jogo ainda oferece uma ou mais ajudas caso o

1 Disponível em: <https://play.google.com/store/apps/details?id=com.one1line.onetouch.onestroke.dotgame&hl=pt_BR&gl=US>, último acesso em 30/04/2022

jogador sinta necessidade. O jogo também permite desfazer algumas jogadas recorrendo ao primeiro botão, situado à esquerda na linha inferior, e recomeçar o jogo desde o início, ao clicar no segundo botão que situa no meio.

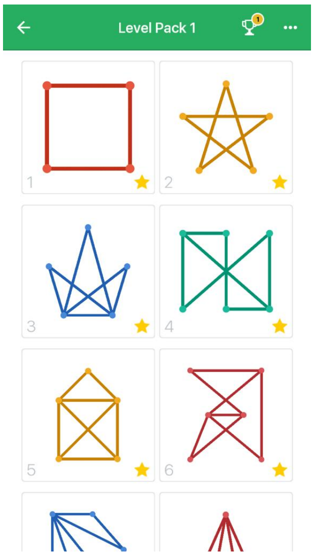
As imagens a seguir, Figura 45 e Figura 46 mostram a tela de abertura do jogo e o primeiro nível:

Figura 45 – Interface do aplicativo




Fonte: O autor, 2022

Figura 46 – Fases do Nível 1 do jogo

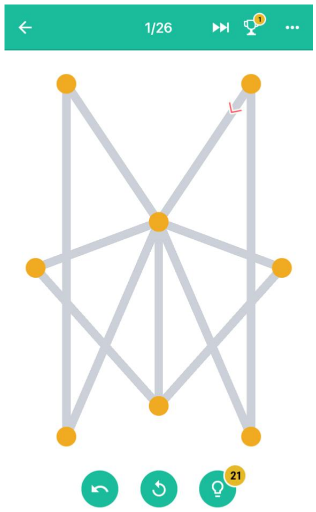



Fonte: O autor, 2022

No segundo nível ja encontramos grafos que possuem arestas orientadas, isto é, um caminho que aponta a direção que tem de ser percorrida conforme podemos ver na

Figura 47, a seguir.

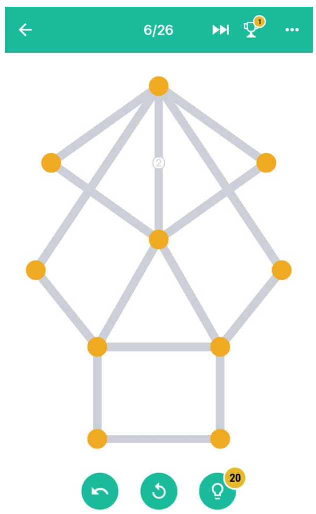
Figura 47 – Fase com grafo de aresta direcionada




Fonte: O autor, 2022

No segundo nível também encontramos arestas que devem ser percorridas duas vezes conforme o jogo indica, como podemos ver na imagem a seguir (Figura 48).

Figura 48 – Fase com aresta dupla



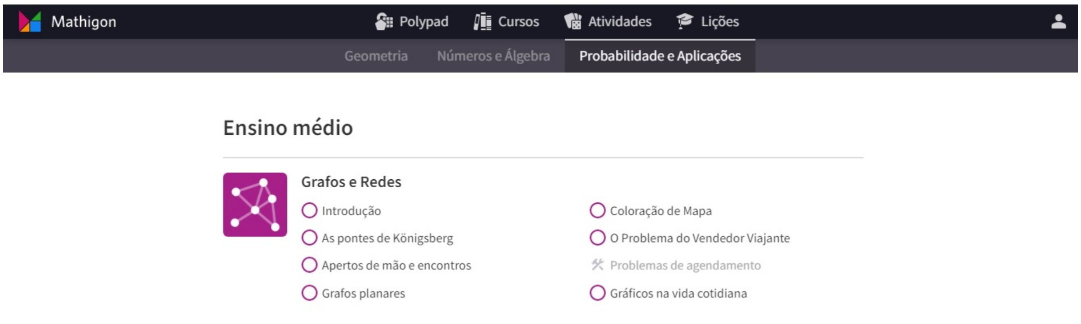

Fonte: O autor, 2022

## 5.2 Atividade interativa envolvendo Teoria de Grafos

Uma grande ferramenta que também pode ser utilizada para despertar a curiosidade dos alunos sobre a teoria de grafos é o site <https://pt.mathigon.org/>, que oferece conteúdos interativos sobre diversos temas em matemática. Embora a maior parte dos conteúdos esteja na língua inglesa, o material interativo sobre grafos está disponível na língua portuguesa. Nele se encontram explicações sobre os conceitos de grafos que foram abordados neste trabalho, juntamente com algumas atividades interativas.

O material é dividido em oito seções: Introdução, Pontes de Königsberg, Aperto de mãos e encontros, Grafos planares, Coloração de mapa, o problema do caixeiro viajante, problemas de agendamento e grafos na vida cotidiana. Conforme podemos ver na Figura 49:

Figura 49 – Site Mathigon: curso sobre grafos

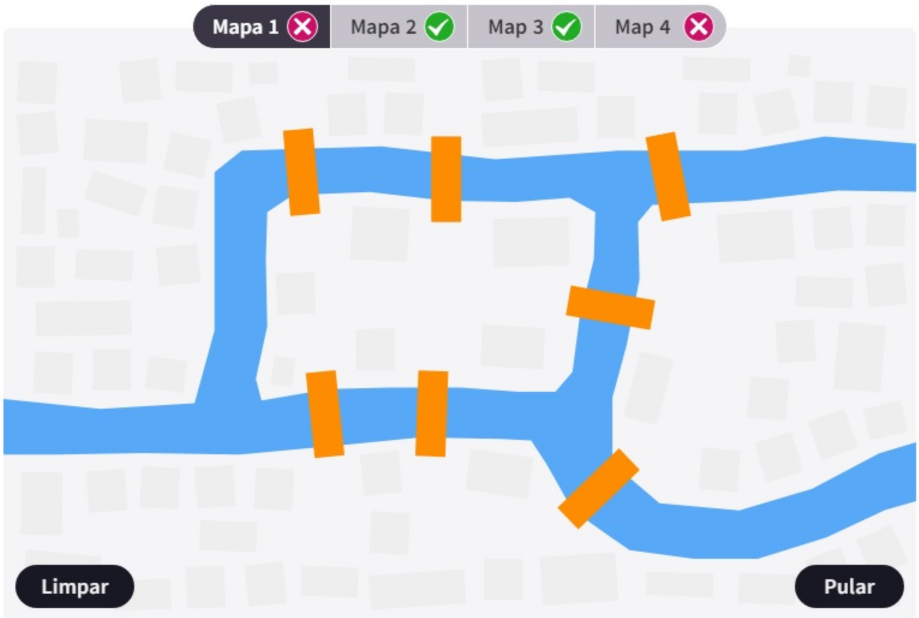



Fonte: O autor, 2022

Na primeira seção, o site apresenta uma breve introdução sobre o que é o estudo dos grafos e mostra a sua representação através dos vértices e das arestas. Além disso, explica alguns conceitos importantes como grafos direcionados, subgrafos, grafos conexos e desconexos, ordem, grau do vértice e ciclos.

Na segunda seção, o site apresenta o problema das pontes de Königsberg, explicando o seu surgimento, pensado pelo matemático Leonard Euler. Nesta parte, o site apresenta quatro problemas semelhantes ao das pontes de Könisberg, dois possíveis de resolver e dois impossíveis, e o leitor tem a oportunidade de tentar solucionar os problemas utilizando o mouse para fazer os caminhos, como podemos ver na Figura 50.

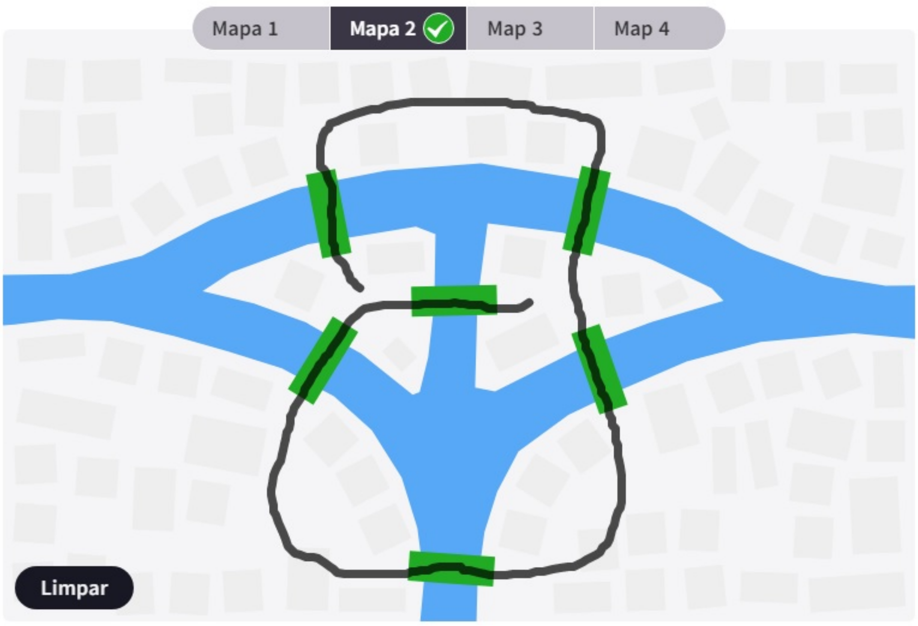
Figura 50 – Atividade interativa das pontes de Königsberg - Mapa 1




Fonte: O autor, 2022

A Figura 51 mostra o segundo quebra-cabeças de pontes com uma possível resolução.

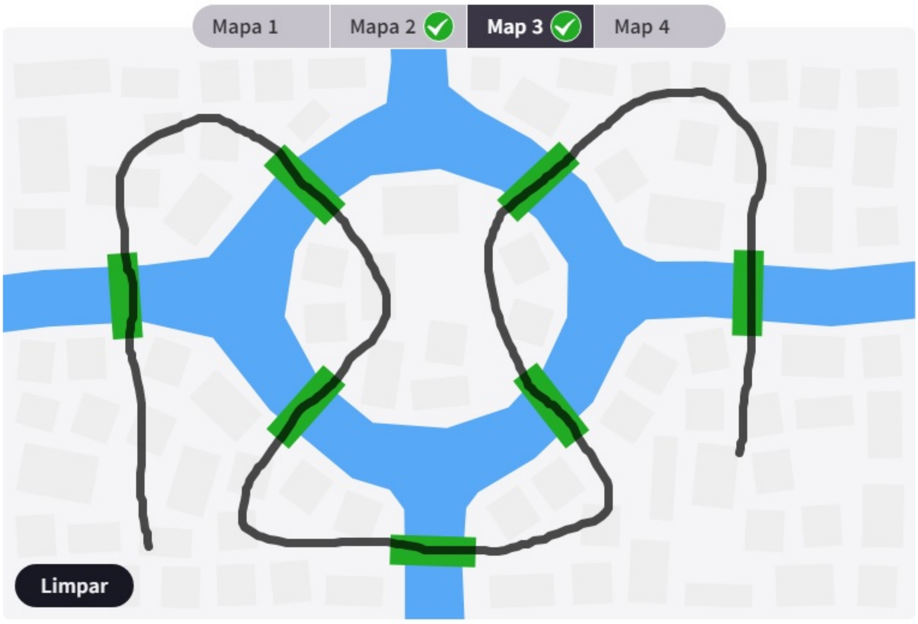
Figura 51 – Atividade interativa das pontes de Königsberg - Mapa 2




Fonte: O autor, 2022

A Figura 52 também mostra outro quebra-cabeça de pontes com uma possível solução.

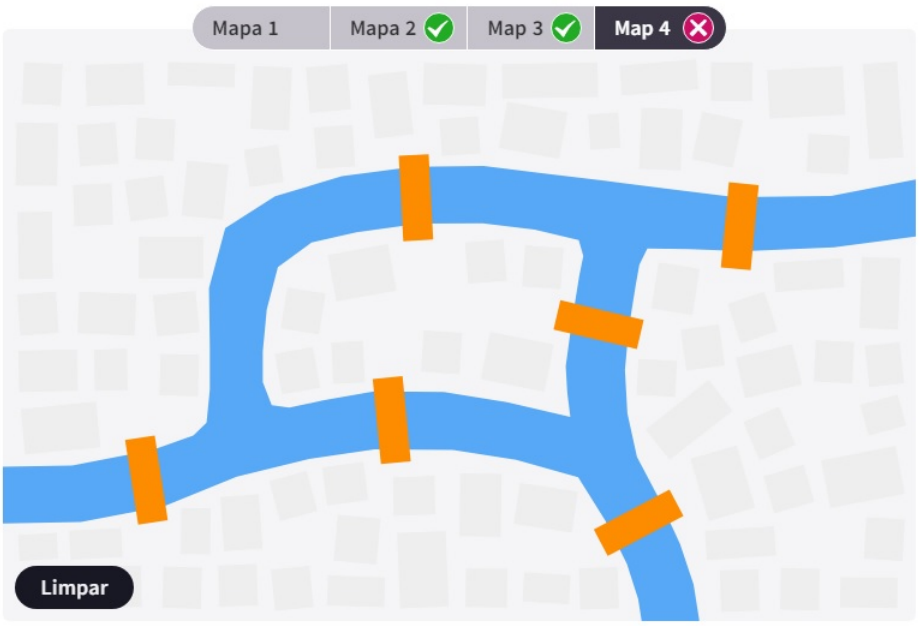
Figura 52 – Atividade interativa das pontes de Königsberg - Mapa 3




Fonte: O autor, 2022

Na Figura 53 mostra um quebra-cabeça impossível de resolver, tal qual o primeiro que foi apresentado.

Figura 53 – Atividade interativa das pontes de Königsberg - Mapa 4

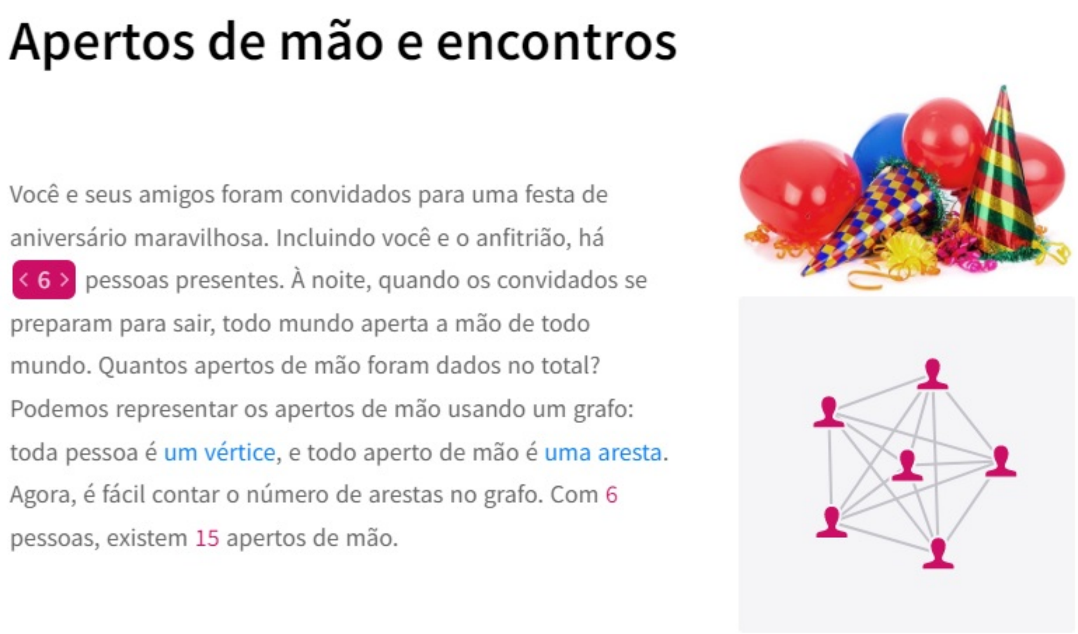



Fonte: O autor, 2022

Ele ainda apresenta mais três problemas semelhantes, sendo dois deles possíveis de resolver e um não. O leitor também pode descobrir quem é Leonard Euler passando o mouse sobre seu nome. Quando isto é feito, o site exibe algumas informações sobre o matemático, como seu lugar de origem, onde estudou e suas contribuições para a matemática. Nesta seção também são explicadas algumas noções em relação ao grau dos vértices.

Na terceira seção é apresentado o problema da quantidade de apertos de mão que podem ser dados entre as pessoas de um determinado grupo, como podemos ver na Figura 54.

Figura 54 – Terceira seção do mathigon

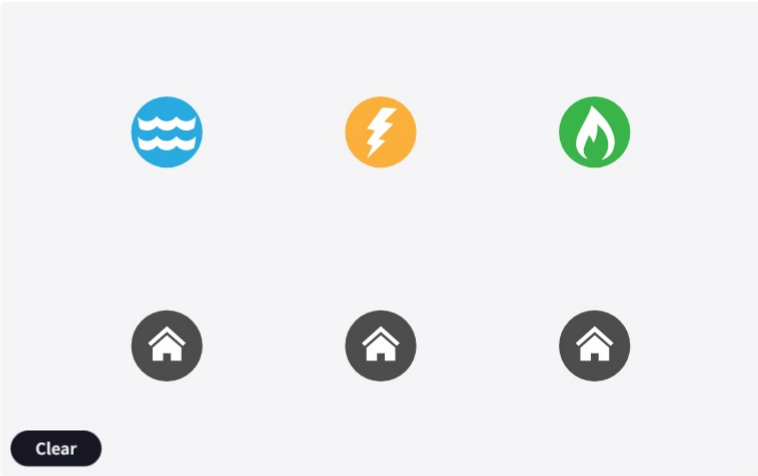



Fonte: O autor, 2022

O aplicativo interage com o leitor, sendo que este pode determinar a quantidade de pessoas que está no grupo, indo de três pessoas até um total de quinze integrantes, com o site fazendo o cálculo do total de apertos de mão a ser dado. Nesta parte também é explicado o conceito de grafos bipartidos, novamente com uma interação, podendo o leitor escolher o número de pessoas envolvidas na situação apresentada.

Na quarta seção, fala-se sobre grafos planares apresentando o clássico problema, que não pode ser resolvido, das três casas que têm de receber água, luz e gás, sem que as conexões se cruzem, conforme mostra a Figura 55.

Figura 55 – Quarta seção do mathigon

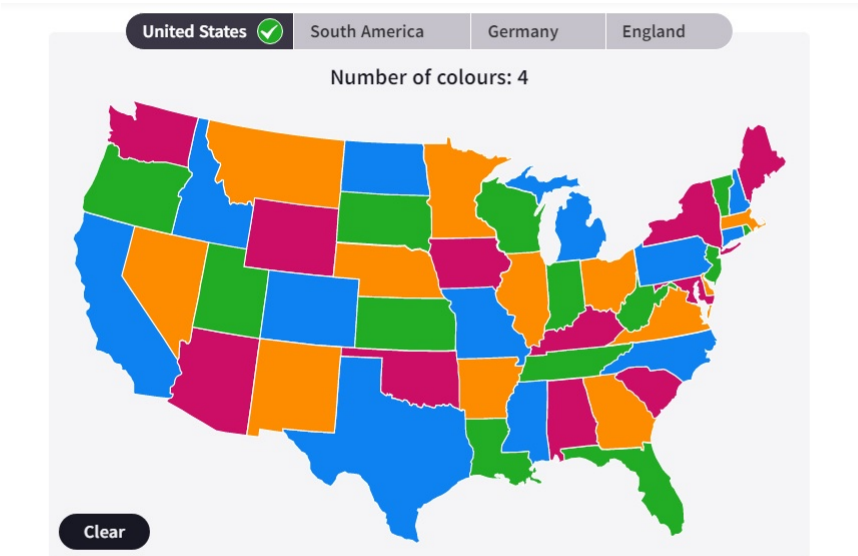



Fonte: O autor, 2022

Esta seção também fala dos conceitos de grafos completos e grafos bipartidos. Aborda também a fórmula de Euler para grafos planares e fala um pouco sobre poliedros, estabelecendo a relação entre os poliedros de platão e os grafos planares.

A quinta seção é dedicada à coloração de mapas, e apresenta o clássico problema do número mínimo de cores diferentes necessárias para colorir um mapa qualquer. Nesta parte, o site apresenta um interatividade com o leitor, apresentando lhe os mapas do Estados Unidos, da América do Sul, da Alemanha e da Inglaterra, conforme podemos ver na Figura 56:

Figura 56 – Quinta seção do mathigon




Fonte: O autor, 2022

A sexta seção apresenta o clássico problema do caixeiro viajante, conforme podemos ver na Figura 57.

Figura 57 – Sexta seção do mathigon


Fonte: O autor, 2022

A sétima seção ainda está em construção e não possuí nenhuma informação, nem atividades. E a última seção vai falar sobre grafos na vida cotidiana, falando das suas aplicações no mundo real, como por exemplo nas redes sociais (Facebook).

# 6 ATIVIDADE PROPOSTA AOS ALUNOS

Com o objetivo de investigar a construção do raciocínio usando a ferramenta grafos e suas propriedades com alunos dos anos finais do ensino fundamental, mais especificamente alunos do 7°, 8° e 9° anos de uma escola da rede privada, foram realizadas atividades, em papel e usando um aplicativo, envolvendo grafos sem que antes fosse abordado qualquer conteúdo teórico sobre os mesmos. A ideia presente nesta atividade constituiu em deixar a tarefa acessível para todos os alunos, mas com desdobramentos matemáticos mais elaborados, uma atividade de piso baixo/teto alto, visto que muitos têm uma certa aversão com a matéria e teorizar o conteúdo a priori poderia fazer com que os alunos não manifestassem interesse para resolver as atividades propostas. Desse modo, pretendia-se verificar se os alunos conseguiriam elaborar estratégias eficientes para a realização das atividades, identificando as propriedades necessárias para tal.

As atividades foram realizadas com três turmas, sendo uma do 7°ano, uma do 8° e uma do 9°. Devido ao contexto da pandemia da COVID-19 as aulas aconteceram no modelo presencial e online, com alunos participando das atividades em sala e em casa. Foram utilizados dois tempos de aula, em dias diferentes, com duração de 50 minutos cada. No primeiro dia, foi realizada, ao ínicio, uma breve explicação sobre os conceitos de vértice e aresta, e foi proposta uma atividade (Anexo A) com três exercícios envolvendo grafos. Esta atividade foi realizada individualmente (para os alunos que estavam assistindo de maneira remota), e em dupla, havendo uma exceção com a turma do 9° onde existiu um trio. No primeiro dia da atividade tivemos a participação de 15 alunos do 7° ano (14 em sala e 1 online), 14 alunos do 8° ano (10 em sala e 4 online) e 26 alunos (16 em sala e 10 online).

O primeiro exercício, presente no Anexo A, consistia em quatro figuras (grafos) que deveriam ser desenhadas pelos alunos sem que tirassem o lápis ou a caneta do papel e sem que passassem duas vezes pelo mesmo lugar. Através desta primeira etapa, os alunos procuraram encotrar caminho eulerianos nos grafos para que pudessem se familiarizar com o jogo que seria realizado na aula seguinte pelo aplicativo One line. Após a realização do primeiro exercício, foi proposto que os alunos refletissem sobre o que haviam feito, sendo questionados se era possível fazer o desenho começando por qualquer um dos vértices e se identificavam alguma regra que deveria ser seguida para conseguir realizar a tarefa. A grande maioria dos estudantes conseguiu realizar essa tarefa sem grandes dificuldades, a única diferença era que uns faziam mais rápido que outros.

No segundo exercício, foram apresentados três grafos e os alunos deveriam identificar quais poderiam ser desenhados da mesma maneira que os grafos do primeiro exercício. Em seguida, os alunos foram orientados a observar as figuras e a identificar propriedades que diferenciassem aquelas que poderiam ser desenhadas conforme o procedimento orientado, daquelas que não poderiam. Após isso, foi solicitado aos alunos que sugerissem possíveis alterações na estrutura dos grafos que não poderiam ser desenhados, a fim de que pudessem ser desenhados. Neste exercício, os alunos conseguiram identificar quais figuras poderiam ser desenhadas e quais não poderiam, mas não conseguiram identificar a propriedade que diferenciasse os grafos. Eles conseguiram resolver essa parte da tarefa por tentativa e erro. Eles também não conseguiram perceber que se tirassem arestas alguns grafos poderiam ser desenhados.

Por fim, o terceiro exercício propôs uma situação problema, contextualizando o conceito de grafos aplicado à vida prática. Os alunos deveriam, com base no grafo apresentado, determinar o trajeto com menor deslocamento para um turista na cidade do Rio de Janeiro, saindo de seu hotel, passando pelos pontos turísticos mencionados e retornando ao hotel. Neste exercício coisas interessantes aconteceram. Nenhum aluno do 7° ano conseguiu descobrir o caminho mínimo para realizar o percurso. Entretanto, o número de alunos que acertaram aumentaram conforme avançamos com os anos. No 8° ano apenas um aluno acertou, o que correspondeu a 10% dos trabalhos que foram entregues. Esse aluno deu duas soluções possíveis para o problema, e uma dessas soluções nem o professor que tinha preparado a atividade percebeu que era possível. Isso foi muito bom, pois mostrou que o estudante estava engajado com a tarefa buscando mais de uma solução, e mostra também que era uma atividade aberta, pois admitia mais de uma solução. No 9° ano tivemos que 5 grupos acertaram a questão, contabilizando aproximadamente 26% em relação ao total de alunos que fizeram a tarefa. A maioria dos acertos vieram dos alunos que participaram de maneira remota da atividade. Neste atividade, percebemos que quanto mais avançávamos nos anos, maior era a quantidade de grupos que acertavam esta questão.

Ao final do primeiro dia, após a realização dos exercícios, foi pedido aos alunos que baixassem o aplicativo do jogo. Alguns alunos baixaram o jogo imediatamente e começaram a jogar no final da aula. Outros baixaram em casa e começaram a jogar em seguida. A ideia inicial era de que todos baixassem o aplicativo ao início da segunda aula. Entretanto, a escola não possuía internet disponível para os alunos, e muitos alunos não tinham como baixar na escola e, por isso, baixaram em casa. Portanto, a maioria dos alunos teve contato com o jogo antes da segunda aula, planejada para a realização do mesmo.

O segundo dia de atividades foi dedicado à realização do jogo de forma individual, durante 40 minutos. Nos 10 minutos finais da aula, os alunos preencheram um questionário sobre as tarefas realizadas (Anexo B). O questionário era composto por cinco perguntas, com o objetivo de informar, respectivamente, quais fases o aluno achou mais fáceis de resolver, quais foram mais difíceis, até qual fase o aluno jogou, se o aluno encontrou alguma regra a ser seguida para conseguir fazer o desenho e, por fim, se gostou do jogo.

Os alunos mostraram-se muito motivados e envolvidos com o jogo. Alguns solicitaram ajuda quando chegaram a fases mais complexas, sendo necessária a mediação do professor. Todos os alunos participaram ativamente e se empenharam em realizar os desafios, o que ocorreu tanto com os alunos que participaram de forma presencial, como com aqueles que participaram de forma online. Inclusive, um grupo de alunos do 9° ano, por iniciativa própria, começou a competir para verificar quem chegaria ao maior nível no jogo até o final da aula. Vale ressaltar a diferença entre os tipos de competições entre os alunos. A competição entre estudantes pode ser boa desde que os alunos se estimulem e que aprendam juntos observando o desenvolvimento um do outro e se engajando na atividade. Uma competição que ofereça oportunidades para que todos possam aprender é ótima.

As tabelas a seguir, mostram o que os alunos responderam em relação ao questionário (Anexo B) que distribuído em sala no segundo dia de atividades. A tabela foi dividida em quatro colunas: a primeira mostras as fases, a segunda aponta a quantidade de alunos que acharam aquelas fases fáceis de resolver, a terceira mostra a quantidade de alunos que acharam as fases difíceis de resolver, e a quarta mostra quantos alunos chegaram naquela fase.

A tabela a seguir mostra as informações coletadas do 7º ano, no qual 13 alunos responderam ao questionário.

| Fases | Fácil | Difícil | Até onde chegou |
|---|---|---|---|
| Pacote 1 | 12 | 5 | 3 |
| Pacote 2 | 2 | 8 | 7 |
| Pacote 3 | 0 | 1 | 3 |
| Desafio Diário | 1 | 0 | - |

A tabela a seguir mostra as informações coletadas do 8º ano, no qual 15 alunos responderam ao questionário.

| Fases | Fácil | Difícil | Até onde chegou |
|---|---|---|---|
| Pacote 1 | 13 | 3 | 0 |
| Pacote 2 | 3 | 2 | 3 |
| Pacote 3 | 1 | 5 | 3 |
| Pacote 4 | 1 | 1 | 3 |
| Pacote 5 | 0 | 2 | 2 |
| Pacote 6 | 0 | 2 | 0 |
| Pacote 7 | 0 | 0 | 4 |
| Desafio Diário | 0 | 2 | - |

A tabela a seguir mostra as informações coletadas do 9º ano, no qual 21 alunos responderam ao questionário.

| Fases | Fácil | Difícil | Até onde chegou |
|---|---|---|---|
| Pacote 1 | 18 | 5 | 3 |
| Pacote 2 | 5 | 8 | 6 |
| Pacote 3 | 2 | 5 | 3 |
| Pacote 4 | 1 | 5 | 4 |
| Pacote 5 | 1 | 3 | 3 |
| Pacote 6 | 1 | 2 | 1 |
| Pacote 7 | 0 | 0 | 1 |

A maior parte dos alunos encontrou dificuldades para identificar a propriedade que permitiria a obtenção das figuras. Os resultados das atividades realizadas mostraram que os alunos tiveram dificuldade em refletir sobre os problemas propostos, e mostraram uma falta de autonomia no processo da aprendizagem, pois alguns deles sempre buscavam ajuda do professor ao não conseguir realizar a tarefa. Isto é um indicativo de que estes alunos podem ter uma mentalidade fixa. Desse modo, seria necessário maior tempo desenvolvendo atividades sobre grafos, possibilitando a construção do raciocínio, através de dicas norteadoras aos alunos. Também ressalta a importância de trabalhar a mentalidade de crescimento desde cedo, enviando mensagens de reforço aos alunos, reafirmando que eles poderão "ainda"não conseguir resolver as atividades, mas com esforço e persistência, irão conseguir chegar lá.

Foi observado que o uso das tecnologias em sala de aula, mais especificamente de aplicativos de jogos, traz maior engajamento e motivação aos alunos, aumentando o nível de participação. Porém, se faz necessário exercitar mais com os alunos o raciocínio matemático, a prática de questionar, criar hipóteses, investigar e fazer análises sobre os desafios que são apresentados, ou seja, se faz necessário ajudar os alunos a desenvolverem mentalidades matemáticas. Nas atividades realizadas, não foi observada uma postura reflexiva sobre a tarefa proposta, de forma que os alunos tentavam fazer os desafios de modo automático sem tentar identificar padrões, sem compreender os porquês dos procedimentos e sem tentar refletir acerca dos erros que cometiam.

Essas atividades realizadas com as turmas dos anos finais do ensino fundamental indicaram a existência de lacunas deixadas pela mentalidade fixa no aprendizado da matemática e na sua relação com os alunos. Eles necessitam de mais experiências para aprender com os erros, e procurar ter mais autonomia quando encontram alguma dificuldade. O que acontecia era justamente o contrário, ao se deparar com uma, eles buscavam ajuda do professor para dizer se aquilo que estavam fazendo estava certo ou errado, e acabavam não pensando sobre o que estavam fazendo. Isso aconteceu algumas vezes com pelo menos metade dos alunos que estavam presentes em sala. Com mais atividades e mais tempo, acredita-se que seria possível desenvolver uma nova atitude diante desta tarefa, sem a preocupação apenas com a solução correta, mas sim produzir questionamentos, alcançar os porquês e caminhos possíveis para encontrar a solução, fazendo assim com que os alunos deixem de ter uma mentalidade fixa e passem a ter uma mentalidade de crescimento.

# 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Aprender matemática é para todos. O papel do professor, portanto, é promover o acesso aos conteúdos de modo que todos os alunos, cada um com sua individualidade, possam compreender os conceitos matemáticos e que estes façam sentido em sua experiência prática. Para isso, é preciso desenvolver formas de ensinar que contribuam para maior motivação, interesse e confiança dos estudantes em sua capacidade de aprender. E isso acontece quando a forma de conduzir o ensino da matemática transmite mensagens de mentalidade de crescimento.

Desenvolver mentalidades matemáticas com os alunos é fundamental para mudar o quadro de desinteresse e insegurança em relação à matemática. Engajamento, protagonismo e curiosidade por parte dos estudantes podem e devem ser parte da experiência de aprender matemática. O uso de recursos e ferramentas didáticas devem ser pensados para incentivar a postura curiosa e investigativa dos alunos, trazendo elementos de matemática presentes no cotidiano, aplicados à vida, dentro do campo de interesse daqueles que estão aprendendo e que muitas vezes, têm uma relação com a matemática marcada por insucesso, medo, frustração e desconforto.

Este trabalho teve como objetivo apresentar as ideias de Jo Boaler acerca das Mentalidades Matemática, articulando sua grande contribuição ao uso de recursos tecnológicos nas aulas de matemática, em particular no ensino de grafos, tema com grande relevância prática. Foi observado neste estudo que mudar a forma como os alunos pensam a matemática é um grande desafio. A tradição de um ensino da matemática a partir de procedimentos repetitivos e tarefas fechadas, onde existe uma única solução e cujo foco é apenas no acerto, são obstáculos para que os alunos tenham novas iniciativas e possam criar hipóteses a partir das propostas trazidas pelo professor. Mudar a forma de se relacionar com a matemática envolve uma prática continua, oportunidades de protagonismo para os alunos e encorajamento para que construam uma nova forma de aprender.

O uso de tecnologias é um excelente começo para uma mudança de perspectiva por parte dos alunos, visto que, cada vez mais, os meios digitais estão presentes na vida deles e despertam grande interesse. Esses recursos são fundamentais para as propostas de ensino nas quais os alunos possam interagir, reformular ideias, construir estratégias e arriscar, vendo no erro uma oportunidade de aprendizado.

No que se refere a estudos futuros, vale ressaltar a importância de investigar o desenvolvimento das mentalidades matemáticas através de propostas que busquem desenvolver conceitos matemáticos ao longo de um período de tempo maior. Tais propostas didáticas teriam como objetivos desenvolver a postura investigativa e a curiosidade, e promover a participação, engajamento e autonomia dos alunos, ajudando a mudar a relação com a matemática e a possibilidade desta se tornar mais acessível aos estudantes. Continuar acompanhando o trabalho de Jo Boaler, vendo suas futuras contribuições, acompanhar os autores que são citados no livro mentalidades matemáticas e fazer estudos aprofundados em teoria dos grafos, trazendo este tópico para a sala de aula através de novas atividades motivadoras e desafiadoras para os alunos.

# REFERÊNCIAS

ABIOLA, O.; DHINDSA, H. Improving classroom practices using our knowledge of how the brain works. *International Journal of Environmental and Science Education*, v. 1, p. 71–81, 03 2011. Citado na página 18.

BOALER, J. *Mentalidades matemáticas: estimulando o potencial dos estudantes por meio da matemática criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador*. Porto Alegre: Penso Editora, 2018. Citado 5 vezes nas páginas 16, 17, 30, 43 e 45.

BOALER, J. *Mente sem barreiras: as chaves para destravar seu potencial ilimitado de aprendizagem*. Porto Alegre: Penso Editora, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 18.

DWECK, C. *Mindset: a nova psicologia do sucesso*. São Paulo: Objetiva, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 20.

FIGUEIREDO, L. M. Matemática discreta. *Fundação CECIERJ*, v. 3, 2009. Citado na página 69.

GOLBARG, M. C. *Grafos: conceitos, algoritmos e aplicações*. Rio de Janeiro: Elsevier, 2012. Citado na página 52.

NETTO, P. O. B.; JURKIEWICZ, S. Grafos: introdução e prática. *São Paulo: Blucher*, 2009. Citado na página 52.

ROMANELLO, L. A. O celular como recurso didático nas aulas de matemática: a visão do professor. In: *XX Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática*. Curitiba: EBRAPEM, 2016. p. 1–12. Citado na página 74.

SILVA, L. T. da; SILVA, K. N. da; GROENWALD, C. L. O. A utilização de dispositivos móveis na educação matemática. *SBEM - Educação Matemática em Revista*, Brasília, v. 23, n. 57, p. 59–76, jan-mar 2018. Citado 2 vezes nas páginas 74 e 75.

VALLE, L. F. do. *Mathematical mindsets (mentalidades matemáticas)*: uma nova abordagem para o ensino e aprendizagem das matemáticas. Dissertação (Mestrado) — Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, São Paulo, 2019. Citado na página 51.

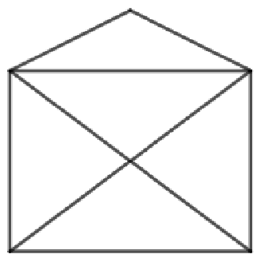
# ANEXOS

# ANEXO A – ATIVIDADES COM OS ALUNOS

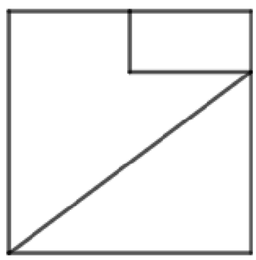
As figuras abaixo são formadas por segmentos consecutivos. Cada um desses segmentos é chamado de "aresta" e o ponto comum a duas arestas consecutivas é chamado "vértice". O nosso objetivo é, partindo de um vértice, desenhar cada uma delas sem tirar a caneta do papel e sem passar duas vezes pela mesma aresta.

1) Em cada uma das figuras seguintes, mostre que, partindo de um vértice à sua escolha, é possível desenhá-la sem tirar a caneta do papel e sem usar a mesma aresta duas vezes. Indique o caminho que você fez.

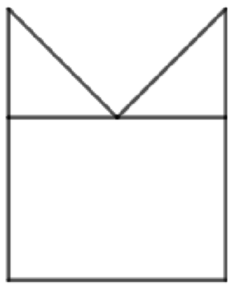
a)



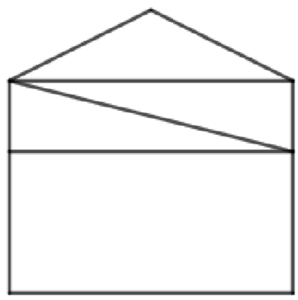
b)



c)



d)



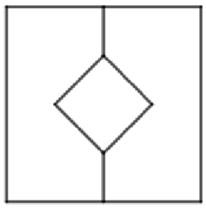
Responda, justificando sempre que possível

- É possível fazer o desenho partindo de qualquer vértice?

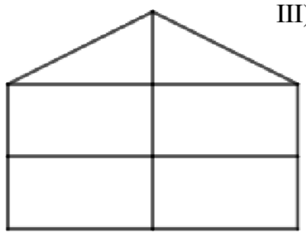
- Você consegue encontrar alguma regra a ser seguida na hora de fazer o desenho?

2) Abaixo se encontram algumas figuras que podem ser feitas seguindo as regras do exercício 1 e outras que não podem ser feitas dessa forma.

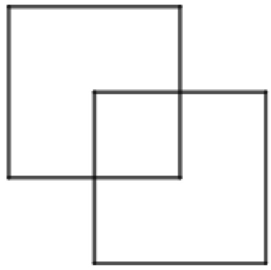
I)



II)



III)



Quais figuras representam os desenhos que podem ser desenhados da maneira desejada?

Compare as figuras que podem ser desenhadas e as que não podem ser desenhadas. Você encontra alguma propriedade que as primeiras tenham e as segundas não?

Considere uma das figuras que não é possível desenhar de acordo com as regras indicadas. O que você sugere que se faça para poder desenhá-la de acordo com o procedimento descrito? A sua sugestão vale para as restantes figuras?

3) João virá ao Rio de Janeiro pela primeira vez na sua vida para participar de um congresso da sua empresa. Neste período, ele reservou um dia para visitar quatro pontos turísticos de seu interesse: O estádio do Maracanã, a praia de Copacabana, o Cristo Redentor e o Pão de Açúcar. O esquema abaixo representa os pontos onde ele vai passar juntamente com o hotel onde está hospedado, e mostra as distâncias entre os lugares.

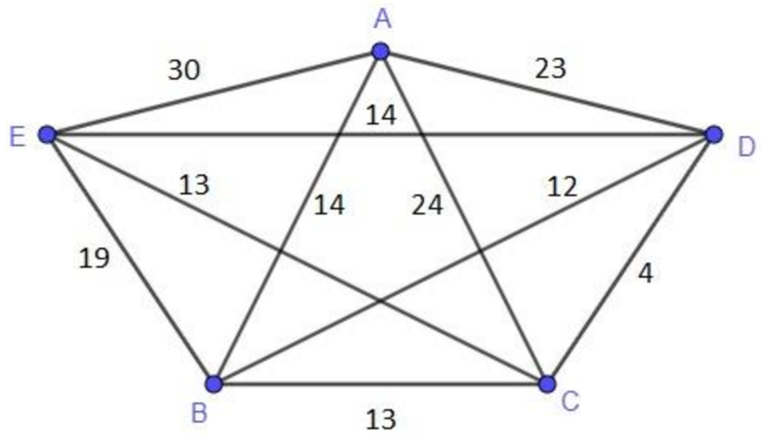
A => Hotel onde João está hospedado

B => Estádio do Maracanã

C => Pão de Açúcar

D => Praia de Copacabana

E => Cristo Redentor




Ajude João e determine qual é o melhor trajeto que ele pode percorrer, partindo do hotel e voltando para o hotel, para visitar todos os pontos, efetuando o menor deslocamento possível.

# ANEXO B – QUESTIONÁRIO

Nome: ______________________________________________________ Turma: ______

1) Quais fases você achou mais fácil resolver?

2) Quais fases você achou mais difícil resolver?

3) Até qual fase conseguiu jogar?

4) Após resolver várias fases, você conseguiu encontrar alguma regra a ser seguida para fazer o desenho? Diga qual.

5) Você gostou do jogou?