Bianca Giovanini de Oliveira

O Teorema da Matriz-Árvore de Kirchhoff

Santo André, 2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

CENTRO DE MATEMÁTICA, COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO

BIANCA GIOVANINI DE OLIVEIRA

O TEOREMA DA MATRIZ-ÁRVORE DE KIRCHHOFF

Orientador: Prof. Dr. Sinuê Dayan Barbero Lodovici

Dissertação de mestrado apresentada ao Centro de Matemática, Computação e Cognição para obtenção do título de Mestre em Matemática.

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELA ALUNA BIANCA GIOVANINI DE OLIVEIRA, E ORIENTADA PELO PROF. DR. SINUÊ DAYAN BARBERO LODOVICI.

SANTO ANDRÉ, 2022

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

de Oliveira, Bianca Giovanini
O Teorema da Matriz-Àrvore de Kirchhoff / Bianca Giovanini de Oliveira. — 2022.

81 fls. : il.

Orientador: Sinuê Dayan Barbero Lodovici

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Santo André, 2022.

1. transformações lineares. 2. grafos. 3. matriz Laplaciana. 4. matriz árvore. 5. Kirchhoff. I. Barbero Lodovici, Sinuê Dayan. II. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2022. III. Título.

FOLHA DE ASSINATURAS **ATA N°1**

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata BIANCA GIOVANINI DE OLIVEIRA, realizada em 3 de Junho de 2022:

SLodovici

Dr. SINUE DAYAN BARBERO LODOVICI, UFABC

Presidente - Interno ao Programa

Dr. MARCIO FABIANO DA SILVA, UFABC

Membro Titular - Examinador(a) Interno ao Programa

SLodovici

Dr. ALEXANDRE LYMBEROPOULOS, USP

Membro Titular - Examinador(a) Externo à Instituição

SLodovici

Dr. RAFAEL DE MATTOS GRISI, UFABC

Membro Suplente - Examinador(a) Interno ao Programa

Dr. ARMANDO TRALDI JUNIOR, IFSP

Membro Suplente - Examinador(a) Externo à Instituição

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca examinadora no dia da defesa, sob responsabilidade única do(a) autor(a) e com a anuência do(a) (co)orientador(a).

Santo André, 08 **de** agosto **de** 2022 .

Documento assinado digitalmente
gov.br BIANCA GIOVANINI DE OLIVEIRA
Data: 08/08/2022 09:16:36-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

____

Bianca Giovanini de Oliveira

Documento assinado digitalmente
gov.br SINUE DAYAN BARBERO LODOVICI
Data: 08/08/2022 11:23:57-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

____

Sinue Dayan Barbero Lodovici

Dedico este trabalho à meu marido Fabiano e minha filha Valentina, que me apoiaram e em muitos momentos foram privados de minha companhia e de divertimentos em virtude dos meus estudos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Oxalá e aos orixás por terem me mantido na trilha certa durante este projeto de pesquisa com saúde e forças para chegar até o final. Sou grata à minha família pelo apoio emocional que me deram durante toda minha vida. Deixo um agradecimento especial ao meu orientador pelo incentivo e pela dedicação do seu tempo ao meu projeto de pesquisa. Também quero agradecer à Universidade Federal do ABC e a todos os professores do meu curso pela elevada qualidade do ensino oferecido. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

"A educação é a arma mais poderosa que você pode usar para mudar o mundo."

(Nelson Mandela)

RESUMO

Este trabalho apresenta conceitos básicos de Álgebra Linear, como espaços vetoriais, transformações lineares, seus autovalores e suas representações diagonais. Também são abordadas noções elementares sobre grafos, que nos permitem apresentar o objetivo principal da dissertação: a demonstração do Teorema da Matriz-Árvore de Kirchhoff para grafos.

Palavras-chave: transformações lineares; grafos; matriz Laplaciana; matriz-árvore; Kirchhoff

ABSTRACT

This text presents fundamental concepts of Linear Algebra, such as linear spaces, linear maps, its eigenvalues and diagonal representations. We also approach some elementary theory on graphs, which allow us to present the main topic of this dissertation: the proof of Kirchhoff's Matrix Tree Theorem on graphs.

Keywords: linear transformations; graphs; Laplacian matrix; tree matrix; Kirchhoff

CONTEÚDO

INTRODUÇÃO

Esse trabalho foi motivado pela curiosidade de compreender um ramo da Matemática denominado de Teoria dos Grafos, o que me conduziu ao estudo do Teorema da Matriz-Árvore de Kirchhoff.

Como a Teoria dos Grafos não se mostrou familiar a minha rotina profissional me deparei com a necessidade de resgatar conhecimentos prévios de álgebra linear, essenciais para compreensão desse tema como autovalor, autovetor, diagonalização de matrizes e noções sobre grafos.

Dessa forma, para alcançar o principal objetivo da dissertação em apresentar a demonstração do Teorema da Matriz-Árvore de Kirchhoff para grafos na tentativa de atrelar esses assuntos ao cotidiano profissional em que estou inserida, foi elaborada uma escalada de aprendizagem focada em galgar desde os conceitos básicos, ou seja, o embasamento conceitual mais simples até a compreensão da demonstração.

Primeiramente, serão definidos conceitos básicos de espaço vetorial, assim como seus axiomas e propriedades. Ainda neste capítulo aprofundaremos os conhecimentos sobre as dependências lineares envolvidas.

Num segundo momento, trabalharemos com matrizes, suas operações, determinantes além de discorrer sobre a fórmula de Binet-Cauchy.

Na terceira parte aprofundaremos os conhecimentos sobre transformações lineares, autovalores e autovetores.

No quarto capítulo, apresentaremos as noções básicas sobre grafos, suas representações, teoremas e corolários.

No quinto capítulo, abordaremos a matriz Laplaciana, que se mostra extremamente necessária para realização da demonstração foco desta dissertação.

Próximo a conclusão da escalada será realizado o estudo do Teorema do Posto, parte constituinte da demonstração objeto deste trabalho.

Finalmente, concluiremos o trabalho desenvolvendo a demonstração do Teorema da Matriz-Árvore de Kirchhoff e por fim será realizado o fechamento do trabalho abordando todo o desenrolar dessa dissertação.

1

ESPAÇO VETORIAL, SUBESPAÇO, BASES E DEPENDÊNCIA LINEAR

Na álgebra linear são utilizados com frequência autovalores e autovetores. Como a dissertação foca na demonstração do Teorema da Matriz-Árvore de Kirchhoff, serão necessários alguns conceitos básicos de álgebra linear. As referências utilizadas nesse capítulo foram: [7], [1], [10] e [2].

1.1 ESPAÇO VETORIAL

Um espaço vetorial, também chamado de espaço linear, é um conjunto de vetores onde estão definidas as operações de adição e multiplicação. Essas operações devem satisfazer os axiomas de espaço vetorial. Da mesma forma que, em geometria analítica, somamos pares de vetores (do plano ou do espaço) e multiplicamos tais vetores por escalares, o conjunto de todas as matrizes reais admite estrutura de espaço vetorial pois somamos matrizes e multiplicamos por escalares sendo respeitados os axiomas.

Definição 1.1. Um espaço vetorial E é um conjunto não vazio de elementos, chamados vetores, em que estão definidas duas operações: a adição em que, sendo $u, v \in E$ um par de vetores pertencentes a E, corresponde um novo vetor $u + v \in E$, denominado *soma* de u e v; a multiplicação por um número real, sendo um número $\alpha \in \mathbb{R}$ e um vetor $v \in E$ corresponde um vetor $\alpha \cdot v$ ou αv , sendo que para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e u,v e $w \in E$ as operações devem satisfazer os axiomas a seguir.

1.1.1 *Axiomas do espaço vetorial*

- **comutatividade** : $u + v = v + u$;
- **associatividade** : $(u + v) + w = u + (v + w)$ e $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$;
- **vetor nulo** : existe um vetor $0 \in E$, denominado vetor nulo, tal que $v + 0 = 0 + v = v$ para todo $v \in E$;
- **inverso aditivo** : para cada $v \in E$ existe um vetor $-v \in E$, denominado inverso aditivo tal que $-v + v = v + (-v) = 0$;
- **distributividade** :$(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$ e $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$;
- **multiplicação por 1**: $1 \cdot v = v$.

1.2 SUBESPAÇOS

Considerando E um espaço vetorial e $F \subset E$ um subconjunto. É dito que F é um subespaço vetorial de E se, além de ser um subconjunto, F munido das mesmas operações de E é por si só um espaço vetorial. De fato, para decidir se um subconjunto F é subespaço de E, não é necessário verificar todas as propriedades da definição de espaço vetorial, basta atender as propriedades abaixo.

1.2.1 *Propriedades do Subespaço*

- $0 \in F$;
- Se $u, v \in F$ então $u + v \in F$;
- Se $v \in F$ então, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha v \in F$.

Para alcançar o conceito de base é necessária abordagem de alguns conhecimentos básicos estudados a seguir.

1.3 COMBINAÇÕES LINEARES

Definição 1.2. Seja E um espaço vetorial real. Um vetor x em E é uma *combinação linear* dos vetores $v_1, v_2, \cdots, v_m$ em E se existirem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$, tais que x pode ser expresso na forma

$$x = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i$$

Os escalares $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ são denominados coeficientes da combinação linear.

No caso em que $m = 1$, a expressão da definição acima se torna $x = \alpha_1 v_1$. Desse modo, dizer que x é uma combinação linear de v_1 é o mesmo que dizer que x é um múltiplo escalar de v_1 .

Definição 1.3. Dizemos que os vetores $v_1, \ldots, v_m$ geram um espaço (subespaço) vetorial E se todo vetor de E puder ser escrito como combinação linear dos vetores $v_1, \ldots, v_m$.

1.4 DEPENDÊNCIA E INDEPENDÊNCIA LINEAR

Os espaços vetoriais possuem uma estrutura algébrica em que, fixada uma base num espaço vetorial de dimensão m, tem como elementos combinações lineares dos m vetores com coeficientes univocamente determinados. Torna-se muito importante, em álgebra linear, saber se um dado vetor v de um espaço vetorial E é combinação linear de outros vetores desse espaço.

1.4.1 *Conjunto linearmente independente*

Um conjunto $X \subset E$ é *linearmente independente* quando nenhum vetor $v \in X$ é combinação linear de outros elementos de X, sendo E um espaço vetorial. Quando o conjunto X é L.I (abreviação de linearmente independente) seus elementos são todos $\neq 0$, dado que o vetor nulo é combinação linear de quaisquer outros: $0 = 0 \cdot v_1 + \ldots + 0 \cdot v_m$.

Teorema 1.4. *A combinação linear de vetores L.I. dando o vetor nulo é única.*
Seja X um conjunto L.I, no espaço vetorial E. Se $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m = 0$ com $v_1, \ldots, v_m \in X$

então $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 0$.
Reciprocamente , se a única combinação linear nula de vetores de X *é aquela cujos coeficientes são todos iguais a zero, então* X *é um conjunto L.I.*

Pode-se concluir facilmente que todo subconjunto de um conjunto L.I. é ainda L.I.

Corolário 1.5. *Se* $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_m v_m$ *e os vetores* $v_1, \cdots, v_m$ *são L.I. então* $\alpha_1 = \beta_1, \cdots, \alpha_m = \beta_m$.

Neste caso teríamos $(\alpha_1 - \beta_1)v_1 + \ldots + (\alpha_m - \beta_m)v_m = 0$ portanto, pelo Teorema 1.4, $(\alpha_1 - \beta_1) = \ldots = (\alpha_m - \beta_m) = 0$.

Teorema 1.6. *Sejam* $v_1, \ldots, v_m$ *vetores não-nulos do espaço vetorial* E*. Se nenhum deles é combinação linear dos anteriores então o conjunto* $X = \{v_1, \ldots, v_m\}$ *é L.I.*

1.4.2 *Conjunto linearmente dependente*

Definição 1.7. Um conjunto $X \subset E$ é dito linearmente dependente (abreviação L.D.) se X não é L.I.

Do Teorema 1.4 percebemos que a definição acima é equivalente a afirmar que $X \subset E$ é linearmente dependente se e somente se equação $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m = 0$ (com incógnitas α_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$) admite solução com algum $\alpha_i \neq 0$ (solução não-trivial).

Teorema 1.8. *Se os vetores* $v_1, \ldots, v_m$ *geram espaço vetorial* E *então qualquer conjunto com mais de* m *vetores em* E *é L.D.*

1.5 BASES

Definição 1.9. Um conjunto $B \subset E$ é uma **base** para E se é L.I. e se B gera E, ou seja, todo vetor de E pode ser escrito como combinação linear dos elementos de B.

Chamamos o número $\dim E$ de elementos (ou a cardinalidade) de B de dimensão do espaço E.

Notamos que a dimensão de E não depende da escolha da base B, ou seja, todas as bases de E têm mesma cardinalidade. Além disso, os conceitos de base e dimensão se estendem naturalmente a subespaços $F \subset E$, uma vez que esses são também espaços vetoriais.

2

MATRIZES

Neste capítulo abordaremos conceitos básicos de matrizes presentes no currículo do ensino médio. Como referências utilizadas nesse capítulo temos: [7], [5], [10] e [6].

2.1 MATRIZES

Denomina-se **matriz m por n**, $M = [a_{ij}]$, uma lista de números reais a_{ij}, onde $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, onde M é formada por números reais distribuídos em m linhas e n colunas.

Definição 2.1. Seja M uma matriz qualquer em que cada elemento é indicado por a_{ij}. Tem-se que o índice i indica a linha e o índice j indica a coluna a que o elemento pertence. Uma matriz $m \times n$ é representada por:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots. & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots. & \ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots. & a_{mn} \end{pmatrix}$$

A matriz M pode ser representada por: $M = (a_{ij})$ sendo $i \in \{1, 2, 3, ..., m\}$ e $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$; ou ainda $M = (a_{ij})_{m \times n}$. Note que o conjunto $M_{(m \times n)}$ de todas as matrizes $m \times n$ será um espaço vetorial se definidos a soma de matrizes e o produto de uma matriz por um número real, realizando as operações coordenada a coordenada.

2.1.1 *Matrizes especiais*

Existem matrizes que recebem nomes especiais por suas características que serão mencionadas a seguir.

Matriz linha

É denominada **matriz linha** toda matriz do tipo $1 \times n$ que é composta por uma única linha.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \end{pmatrix}$$

Matriz coluna

É denominada **matriz coluna** toda matriz do tipo $m \times 1$ que é composta por uma única coluna.

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ ...... \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

Matriz nula

É denominada **matriz nula** toda matriz que é composta somente por elementos iguais a zero. Exemplos:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & .... & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ...... \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & .... & 0 \\ 0 & 0 & .... & 0 \\ ...... & ...... & .... & ...... \\ 0 & 0 & .... & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz quadrada de ordem n

É denominada **matriz quadrada de ordem n** toda matriz do tipo $n \times n$ composta por quantidade idêntica de linhas e colunas.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ ...... & ...... & .... & ...... \\ a_{n1} & a_{n2} & .... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

É necessário esclarecer que chama-se **diagonal principal** de uma matriz quadrada M de ordem n a matriz linha formada pelos elementos de M que têm os índices i e j iguais:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} & a_{33} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

É necessário comentar também que chama-se **diagonal secundária** de uma matriz quadrada M de ordem n a matriz linha formada pelos elementos de M que têm a soma dos índices i e j igual a $n+1$.

$$\begin{pmatrix} a_{1n} & a_{2(n-1)} & a_{3(n-2)} & \dots & a_{n1} \end{pmatrix}$$

Exemplo 2.1.

$$\begin{pmatrix} 8 & 9 & -7 \\ 6 & 4 & -5 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

A matriz acima é quadrada de ordem 3, tendo como diagonal principal $\begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ e sua diagonal secundária é $\begin{pmatrix} -7 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Exemplo 2.2.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & -1 & -2 \\ -3 & -4 & -5 & -6 \end{pmatrix}$$

A matriz acima é quadrada de ordem 4, tendo como diagonal principal $\begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 & -6 \end{pmatrix}$ e sua diagonal secundária é $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 & -3 \end{pmatrix}$.

Matriz diagonal

É denominada **matriz diagonal** toda matriz quadrada cujos elementos que não pertencem à diagonal principal são iguais a zero.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & .... & 0 \\ 0 & a_{22} & .... & 0 \\ ...... & ...... & .... & ...... \\ 0 & 0 & .... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Note que nada impede que $a_{11} = a_{22} = ... = a_{nn} = 0$.

Matriz identidade de ordem n

É denominada **matriz identidade**, I_n, a matriz diagonal cujos elementos que pertencem à diagonal principal são iguais a 1.

$$\mathbf{I_n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & .... & 0 \\ 0 & 1 & .... & 0 \\ ...... & ...... & .... & ...... \\ 0 & 0 & .... & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz transposta

Definição 2.2. Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, é denominada *transposta* de A a matriz $A^t = (a'_{ji})_{n \times m}$ tal que $a_{ij} = a'_{ji}$ para todo i e todo j.

Exemplo 2.3. Determine a matriz transposta de A.

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

Exemplo 2.4. Encontre a matriz transposta de B.

$$B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$$

Exemplo 2.5. Determine a matriz transposta de C.

$$C = \begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix} \Rightarrow C^t = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

2.1.2 *Operações com Matrizes*

Adição de Matrizes

Definição 2.3. Dadas duas matrizes, $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$, é chamada **soma** de $A + B$, a matriz $C = (c_{ij})_{m\times n}$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para todo i e j. Note que a soma de duas matrizes A e B do tipo $m \times n$ é uma matriz C do mesmo tipo em que cada elemento é a soma dos elementos correspondentes em A e B.

Exemplo 2.6. Dadas as matrizes a seguir foram realizadas as adições.

(a) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4 & 2-1 & 3+1 \\ 4-4 & 5+0 & 6-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) $\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7+0 & 8+1 \\ 9+2 & 9+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 5 & 11 & 3/4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+1 & 11-2 & 3/4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 15/4 \end{pmatrix}$

Propriedades da Adição de Matrizes

associativa: $(A+B)+C = A+(B+C)$ sendo A, B e C quaisquer do tipo $m \times n$;

Demonstração. Tome $(A+B)+C = X$ e $A+(B+C) = Y$. Se $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{m\times n}$, $C = (c_{ij})_{m\times n}$, $X = (x_{ij})_{m\times n}$ e $Y = (y_{ij})_{m\times n}$ teremos que: $x_{ij} = (a_{ij}+b_{ij})+c_{ij} = a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij}) = y_{ij}$ para todos $i \in \{1, \ldots, m\}$ e $j \in \{1, \ldots, n\}$. □

comutativa: $A+B = B+A$ sendo A e B quaisquer do tipo $m \times n$;

Demonstração. Tome $A+B = X$ e $B+A = Y$. Usando a mesma notação adotada na demonstração da propriedade associativa, teremos que: $x_{ij} = a_{ij}+b_{ij} = b_{ij}+a_{ij} = y_{ij}$ para todos $i \in \{1, \ldots, m\}$ e $j \in \{1, \ldots, n\}$. □

elemento neutro: Qualquer que seja A do tipo $m \times n$, existe M, elemento neutro da soma, tal que $A + M = A$;

Demonstração. Basta tomar M a matriz $m \times n$ com todas as entradas iguais a 0 e somar coordenada a coordenada. □

Note que, se $A+M = A$ sucede: $a_{ij} + m_{ij} - a_{ij} \Rightarrow m_{ij} = 0 \Rightarrow M = 0$ Portanto o elemento neutro é único, ou seja, é necessariamente a matriz nula do tipo $m \times n$.

É usual denotar o elemento neutro da soma por 0.

elemento simétrico (oposto): Para todo A do tipo $m \times n$ existe A', denominada matriz oposta de A, tal que $A + A' = 0$.

Demonstração. Basta tomar $A' = (a'_{ij})$ com $a'_{ij} = -a_{ij}$, onde a_{ij} denotam os elementos da matriz A. □

Analogamente ao que ocorre com a matriz nula, fixada A a matriz oposta é única.

Impondo $A + A' = M = 0$, resulta em: $a_{ij} + a'_{ij} = 0 \Rightarrow a'_{ij} = -a_{ij}\ \forall i, \forall j$. Ou seja, a simétrica da matriz A para a adição é a matriz A' de mesmo tipo que A, em que cada elemento é simétrico do correspondente de A. É usual denotar a matriz oposta A' por $-A$.

Produto de matriz por um escalar

Definição 2.4. Dado um escalar k e uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ chama-se *produto kA* a matriz $B = (b_{ij})_{m\times n}$ tal que $b_{ij} = ka_{ij}$ para todo i e todo j. Ou seja, multiplicar uma matriz A por um escalar k é construir uma matriz B formada pelos elementos de A todos multiplicados por k.

Exemplo 2.7. Dadas as matrizes abaixo foi realizado o produto de uma matriz por um escalar.

(a) $3.\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 5 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.1 & 3.7 & 3.2 \\ 3.5 & 3.(-1) & 3.(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 21 & 6 \\ 15 & -3 & -6 \end{pmatrix}$

(b) $\frac{1}{2}.\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 8 & 6 & 4 \\ 10 & 12 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & -3 \end{pmatrix}$

(c) $(-2).\begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 2 & -6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2).(-1) & (-2).8 \\ (-2).2 & (-2).(-6) \\ (-2).(-3) & (-2).5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -16 \\ -4 & 12 \\ 6 & -10 \end{pmatrix}$

Propriedades do Produto de Matriz por um escalar

O produto de um escalar por uma matriz apresenta as seguintes propriedades que podem ser deduzidas de maneira semelhante àquela que fizemos para as propriedades associativa e comutativa da adição, ou seja, coordenada a coordenada. Se $a, b \in \mathbb{R}$ (a, b números reais) e A, B são matrizes com o mesmo número de linhas e colunas temos:

- **associativa**: $a.(b.A) = (ab).A$;
- **distributiva do escalar**: $a.(A + B) = a.A + a.B$;
- **distributiva da matriz**: $(a + b).A = a.A + b.A$;
- **elemento neutro do produto**: $1.A = A$.

Decorre de todas essas propriedades o seguinte resultado:

Proposição 2.5. *O espaço $M_{m\times n}$ das matrizes m por n munido das operações de adição e multiplicação por escalar aqui descritas é um espaço vetorial.*

Produtos de Matrizes

Definição 2.6. Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{jk})_{n\times p}$, chama-se *produto AB* a matriz $C = (c_{ik})_{m\times p}$ tal que

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + a_{i3} \cdot b_{3k} + \cdots + a_{in} \cdot b_{1k} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

para todo $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$ e todo $k \in \{1, 2, \cdots, p\}$. Note que:

A definição acima garante a existência do produto *AB* somente se o número de colunas de *A* for igual ao número de linhas de *B*, sendo A do tipo $m \times n$ e *B* do tipo $n \times p$.

A definição acima também garante que o produto *AB* é uma matriz que tem o número de linhas de *A* e o número de coluna de *B*, visto que $C = AB$ é do tipo $m \times p$.

Pela definição, um elemento c_{ik} da matriz *AB* será obtido pelo processo abaixo:

toma-se uma linha *i* da matriz *A*:

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & .... & a_{in} \end{pmatrix}$$

toma-se a coluna *k* da matriz *B*:

$$\begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ ...... \\ b_{nk} \end{pmatrix}$$

coloca-se a linha i de A na "vertical"ao lado da coluna k de B:

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & .... & a_{in} \end{pmatrix}$$

toma-se a coluna k da matriz B:

$$\begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ ...... \\ a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ ...... \\ b_{nk} \end{pmatrix}$$

calculam-se os n produtos dos elementos que ficaram lado a lado:

$$\begin{pmatrix} a_{i1} \cdot b_{1k} \\ a_{i2} \cdot b_{2k} \\ \vdots \\ a_{in} \cdot b_{nk} \end{pmatrix}$$

somam-se esses n produtos , obtendo c_{ik}.

Exemplo 2.8. Dada as matrizes A e B, vamos calcular o produto AB.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Observe que sendo A do tipo 2×3 e B do tipo 3×1 existe AB e é do tipo 2×1, sendo $AB = C$.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.7 + 2.8 + 3.9 \\ 4.7 + 5.8 + 6.9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 122 \end{pmatrix}$$

Exemplo 2.9. Calcular AB dadas as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Note que A é do tipo 2×2 e B do tipo 2×2, assim teremos:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 + 2.7 & 1.6 + 2.8 \\ 3.5 + 4.7 & 3.6 + 4.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

Propriedades do Produto de Matrizes

associativa: $(AB)C = A(BC)$, quaisquer que sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{jk})_{n\times p}$ e $C = (c_{kl})_{p\times r}$;

distributiva à direita em relação a adição : $(A + B)C = AC + BC$, quaisquer que sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{m\times n}$ e $C = (c_{jk})_{n\times p}$;

distributiva à esquerda: $C(A + B) = CA + CB$, quaisquer que sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$,$B = (b_{ij})_{m\times n}$ e $C = (c_{ki})_{p\times m}$;

comutatividade do escalar: $(kA)B = A(kB) = k(AB)$, quaisquer que sejam o número k e as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$,$B = (b_{jk})_{n\times p}$;

identidade: Se I_m e I_n são , respectivamente, as matrizes diagonais $m \times m$ e $n \times n$ com os elementos da diagonal iguais a 1, então $I_mA = AI_n = A$, qualquer que seja a matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$.

Note que a multiplicação de matrizes não é, em geral, comutativa, ou seja, para duas matrizes quaisquer A e B é incorreto assumir que $A.B = B.A$.

Possíveis situações:

- 1) Existem casos no qual existe AB e não existe BA. Isso sucede quando A é uma matriz $m \times n$, B é uma matriz $n \times p$ e $m \neq p$ com base na definição de produto de matrizes.

Exemplo 2.10. Determine o produto de $A.B$ e $B.A$.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} 23 \\ 86 \end{pmatrix}$

BA não existe pois, pela definição do produto de matrizes, o número de colunas de B é diferente do número de linhas de A.

- 2) Há casos em que existe AB e BA, entretanto são matrizes de tipos diferentes e, portanto, $AB \neq BA$.Isto ocorre quando A é $m \times n$, B é $n \times m$ e $m \neq n$.

Exemplo 2.11. Determine o produto de $A.B$ e $B.A$.

$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} 20 & 32 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 16 & 11 & 6 \\ 30 & 21 & 12 \end{pmatrix}$

- 3) Nos casos em que AB e BA são do mesmo tipo, ou seja, A e B são matrizes quadradas e de mesma ordem, temos quase sempre $AB \neq BA$.

Exemplo 2.12. Determine o produto de $A.B$ e $B.A$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 26 & 10 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 14 & 15 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Observe que quando A e B são tais que $AB = BA$, dizemos que A e B comutam. Note que uma condição necessária para A e B comutarem é que sejam matrizes quadradas e de mesma ordem.

2.2 DETERMINANTE

Será importante a abordagem de determinante para realização dessa dissertação devido a dependência desse conceito para utilização da Fórmula de Binet-Cauchy que será empregada na demonstração do Teorema da Matriz-Árvore de Kirchhoff.

2.2.1 *Determinante de uma matriz de ordem $n \leq 3$*

Definição 2.7. Considere o conjunto das matrizes quadradas de elementos reais. Seja A uma matriz quadrada de ordem n, chamaremos de *determinante da matriz A*, com notação $det(A)$, o número obtido indutivamente pela fórmula que alguns livros de ensino médio trazem como o *Teorema de Laplace*:

- **base da indução**: No caso em que A é de ordem 1 (n=1), definimos o $det(A)$ como o único elemento de A, ou seja, se $A = [a_{11}]$ então $det(A) = a_{11}$.
- **passo de indução**: Para $n \geq 2$ definimos:

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}.a_{ij}.det(\overline{A}_{ij})$$

ou

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}.a_{ij}.det(\overline{A}_{ij})$$

onde $i \in \{1, \ldots, n\}$ ou $j \in \{1, \ldots, n\}$ é fixado e $\overline{A}_{ij}$ é a matriz $(n-1) \times (n-1)$ obtida de A após serem removidas sua linha i e sua coluna j.

É comum denotarmos o determinante de uma matriz escrevendo seus elementos entre barras verticais simples, por exemplo:

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Notamos que o somatório *não* depende da escolha de utilização da linha ou coluna. Observe que, assim, a escolha de uma linha ou coluna com a maior quantidade de zeros se mostra como uma forma de reduzir os cálculos.

Definição 2.8. Observamos que, para matrizes de ordem 2 e 3 o cálculo do determinante é simples:

1. No caso em que A é de ordem 2 (n=2), o produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundária.

   $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \rightarrow det(A) = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$

2. No caso em que A é de ordem 3 (n=3), teremos de repetir as duas primeiras colunas ao lado da matriz, os termos antecedidos pelo sinal positivo serão obtidos multiplicando os elementos seguindo na mesma direção da diagonal principal e os termos antecedidos pelo sinal negativo serão obtidos multiplicando os elementos seguindo a mesma direção da diagonal secundária. Esse procedimento é denominado *Regra e Sarrus*.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \rightarrow det(A) = \left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right.$$

$det(A) = a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32} - a_{13}.a_{22}.a_{31} - a_{11}.a_{23}.a_{32} - a_{12}.a_{21}.a_{33}$

Exemplo 2.13. Calcule os determinantes das matrizes a seguir:

$A = (21)$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

$det(A) = 21$

$det(B) = 3.2 - 4.1 = 2$

$$det(C) = \left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 4 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & -3 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 4 \end{array} \right. = 1.2.2 + 3.(-3).1 + 4.5.4 - 4.2.1 - 1.(-3).4 - 3.5.2$$

$det(C) = 4 - 9 + 80 - 8 + 12 - 30 = 49.$

2.2.2 *Determinante de uma matriz de ordem $n \geq 4$*

Exemplo 2.14. Calcule o determinante da matriz A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Como a matriz A é de ordem 4, será escolhida a coluna 3, pois é a coluna que possui a maior quantidade de zeros, temos

$$det(A) = \sum_{i=1}^{4} (-1)^{i+3}.a_{i3}.det(A_{-i-3})$$

$$det(A) = (-1)^{1+3}.0. \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}.2. \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{3+3}.1. \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{4+3}.0. \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$det(A) = 1.0.20 - 1.2.21 + 1.1.5 - 1.0.(-13) = 0 - 42 + 5 - 0 = -37.$

Aplicamos a *Regra de Sarrus* no cálculo de cada um desses determinantes, obtendo $det(A) = -37$.

2.3 FÓRMULA DE BINET-CAUCHY

A fórmula de Binet-Cauchy é integrante dos resultados da Álgebra Linear e será necessária na demonstração do Teorema da Matriz-Árvore de Kirchhoff para grafos. Portanto para conclusão desse trabalho mostra-se significativa sua abordagem.

Teorema 2.9. *(Fórmula de Binet-Cauchy)*

Sejam A e B matrizes de ordem $m \times n$ e $n \times m$, respectivamente. Então $det(A.B) = 0$, se $m > n$. Se $m \leq n$,

$$det(A.B) = \sum_{P} det(A_P) det(B_P)$$

no qual a somatória será sobre todos os subconjuntos P de $S = \{1, 2, \cdots, n\}$ com m elementos.

Para cada P, A_P é a matriz $m \times m$ alcançada a partir de A mantendo as colunas de A cujos índices pertencem a P; B_P é a matriz $m \times m$ obtida de B mantendo as linhas de B cujos índices pertencem a P.

Exemplo 2.15. Utilizando a Fórmula de Binet-Cauchy para obter $det(A.B)$ quando

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ -2 & 0 & 1 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } B=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Com base no teorema 2.9 temos $S = \{1,2,3,4\}$ e os subconjuntos de P são: $P_1 = \{1,2,3\}$, $P_2 = \{1,2,4\}$, $P_3 = \{1,3,4\}$ e $P_4 = \{2,3,4\}$. Obtendo:

$$A_{P_1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}, B_{P_1}=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}, A_{P_2}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -2 & 0 & 5 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}, B_{P_2}=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix},$$

$$A_{P_3}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -2 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B_{P_3}=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}, A_{P_4}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B_{P_4}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Assim $det(A.B) = det(A_{P_1}).(B_{P_1}) + det(A_{P_2}).(B_{P_2}) + det(A_{P_3}).(B_{P_3}) + det(A_{P_4}).(B_{P_4})$

$$det(A.B) = (-23).51 + (-37).19 + 33.(-73) + 39.(-40)$$

$$det(A.B) = -1173 - 703 - 2409 - 1560 = -5845.$$

Note que no teorema 2.9, se $m = n$, então $det(A.B) = det(A).det(B)$, resultado do determinante do produto de duas matrizes quadradas e de mesma ordem.

2.4 COFATOR

Definição 2.10. Considere a matriz A de ordem $n \geq 2$, sendo a_{ij} um elemento de A. Definimos como D_{ij} o determinante da matriz obtida suprimindo a i-ésima linha e a j-ésima coluna de A e denominamos de *Cofator* A_{ij} *do elemento* a_{ij}, o número dado por

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}.D_{ij}$$

Exemplo 2.16. Determine os cofatores da matriz A.

$$(A) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Eliminada a primeira linha e primeira coluna teremos:

$$D_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^2.(1.2 - 3.5) = 2 - 15 = -13$$

Eliminada a primeira linha e segunda coluna teremos:

$$D_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^3.(2.2 - 3.5) = (-1)(4 - 15) = 11$$

Eliminada a primeira linha e terceira coluna teremos:

$$D_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^4.(2.3 - 3.1) = (6 - 3) = 3$$

Eliminada a segunda linha e primeira coluna teremos:

$$D_{21} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^3.(3.2 - 3.4) = (-1)(6 - 12) = 6$$

Eliminada a segunda linha e segunda coluna teremos:

$$D_{22} = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^4.(4.2 - 3.4) = (8 - 12) = -4$$

Eliminada a segunda linha e terceira coluna teremos:

$$D_{23} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^5.(4.3 - 3.3) = (-1)(12 - 9) = -3$$

Eliminada a terceira linha e primeira coluna teremos:

$$D_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^4.(3.5 - 1.4) = (15 - 4) = 11$$

Eliminada a terceira linha e segunda coluna teremos:

$$D_{32} = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^5.(4.5 - 2.4) = (-1)(20 - 8) = -12$$

Eliminada a terceira linha e terceira coluna teremos:

$$D_{33} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^6.(4.1 - 2.3) = (4 - 6) = -2$$

Usando a notação definida aqui para cofatores as fórmulas de Laplace para o determinante (Definição 2.7) podem ser simplificadas para:

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}.A_{ij}$$

ou

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.A_{ij}.$$

2.5 MATRIZ ADJUNTA

Definição 2.11. Dada a matriz $A = [a_{ij}]$, a **matriz adjunta de A** $Adj(A)$ é definida por:

$$Adj(A) = (Cof(A))^t$$

onde $(Cof(A))$ é a matriz na qual os elementos são os cofatores A_{ij} da matriz A,ou seja, é a matriz onde cada elemento a_{ij} é igual ao cofator A_{ij} da matriz A.

Exemplo 2.17. Determine a matriz adjunta de A dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Baseado nos resultados obtidos no exemplo 2.16 teremos:

$$Cof(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 11 & 3 \\ 6 & -4 & -3 \\ 11 & -12 & -2 \end{pmatrix}$$

$$Adj(A) = (Cof(A))^t = \begin{pmatrix} -13 & 6 & 11 \\ 11 & -4 & -12 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

2.6 MATRIZ INVERSA

Definição 2.12. Dada uma matriz quadrada A de ordem n dizemos que A é invertível com **inversa** A^{-1} se existe a matriz A^{-1} tal que:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n,$$

onde I_n é a matriz identidade de ordem n.

Pode-se mostrar que A é invertível se e somente se $det(A) \neq 0$. Nesse caso teremos:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Adj(A).$$

3

TRANSFORMAÇÕES LINEARES

As transformações lineares, também chamadas de aplicações ou operadores, são funções cujo domínio e contradomínio são subconjuntos de espaços vetoriais.

Serão introduzidos alguns conceitos e notações de transformações lineares e então falaremos sobre a representação matricial de uma transformação linear, estabelecendo, assim, um vínculo com o assunto discutido no capítulo anterior.

Explanaremos aqui alguns dos principais conceitos associados a transformações lineares, como núcleo, imagem, autovalores e autovetores. Novamente nossas principais referências para esse capítulo são: [7], [5], [10] e [6].

3.1 IMAGEM OU TRANSFORMADO DE v

Definição 3.1. Sejam E e F espaços vetoriais. Uma transformação linear é uma função $A : E \to F$ é uma relação que associa a cada vetor $v \in E$ um vetor $A(v) = A \cdot v = Av \in F$ de tal forma que valham, para quaisquer $u, v \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, as relações:

$$A(u + v) = Au + Av,$$

$$A(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot Av$$

O vetor $A \cdot v$ é denominado imagem ou transformado de v pela transformação A.

Teorema 3.2. *Sejam E e F espaços vetoriais e B uma base de E. A cada vetor $u \in B$, façamos corresponder de maneira arbitrária um vetor $u' \in F$. Assim existe uma única transformação linear $A : E \to F$ tal que $A.u = u'$ para cada $u \in B$.*

Demonstração. Todo vetor $v \in E$ se apresenta, de forma única, como uma combinação linear $v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_m u_m$ de elementos $u_1, \cdots, u_m$ da base B. Definimos $A : E \to F$ pondo

$$A.v = \alpha_1 u_1' + \cdots + \alpha_m u_m'$$

Mostremos agora que A assim definida é, de fato, uma transformação linear. Sejam $v, w \in E$. Temos:

$$v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_m u_m$$

e

$$w = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_m u_m$$

Mesmo que a base B seja infinita, pode-se exprimir v e w como combinações lineares dos mesmos elementos de B, completando com coeficientes zero os múltiplos de u_i que aparecem apenas numa das duas expressões.

Então

$$v + w = \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i + \beta_i) u_i$$

logo

$$A(v + w) = \sum (\alpha_i + \beta_i) u_i' = \sum \alpha_i u_i' + \sum \beta_i u_i' = A.v + A.w$$

De forma análoga percebe-se que $A(\alpha v) = \alpha.Av$, portanto $A : E \to F$ é uma transformação linear, tal que $A.u = u'$ para todo $u \in B$. Em relação à unicidade, seja $B : E \to F$ outra transformação linear tal que $B.u = u'$ para todo $u \in B$. Então , para cada $v = \sum \alpha_i u_i \in E$ tem-se

$$B.v = B(\sum \alpha_i u_i) = \sum \alpha_i . B u_i = \sum \alpha_i . u_i' = A.v$$

Portanto $B = A$ $\square$

Sejam E e F espaços vetoriais de dimensão finita e $A : E \to F$ uma transformação linear. Fixadas bases $\nu = \{v_1, \cdots, v_n\} \subset E$ e $w = \{w_1, \cdots, w_m\} \subset F$, para cada $j = \{1, \cdots, n\}$ o vetor Av_j se exprime como combinação linear dos vetores de base w:

$$Av_j = a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + \cdots + a_{mj}w_m = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}w_j$$

Dessa maneira, a transformação linear $A : E \to F$ juntamente com as bases $\nu \subset E$ e $\omega \subset F$ determinam uma matriz $a = [a_{ij}] \in M(m \times n)$, chamada **representação matricial** (ou simplesmente **a matriz**) da transformação linear A relativa as bases ν, ω.

Por definição, a j-ésima coluna da matriz a é formada pelas coordenadas de Av_j em relação a base ω.

É importante destacar que os vetores nas bases ν e ω são dispostos numa ordem fixa, sem o que a matriz a não ficaria bem definida.

3.2 TRANSFORMAÇÕES LINEARES REPRESENTADAS POR MATRIZES DIAGONAIS

Para que uma transformação linear tenha uma representação matricial diagonal é essencial definir uma condição necessária e suficiente.

Teorema 3.3. *Seja $A : F \to F$ uma transformação linear, com dim $F = n$. Se A admite uma representação matricial diagonal, então existe em F um conjunto independente de elementos $v_1, \cdots, v_k$ que constituem uma base para F e um correspondente conjunto de escalares $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ tais que*

$$A(v_k) = \lambda_k v_k$$

para $k = 1, 2, \cdots, n$.

Inversamente, se existe um conjunto independente $v_1, \cdots, v_n$ de elementos de F e um correspondente conjunto de escalares $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ considerando o teorema acima teremos então a matriz

$$M = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$$

que é uma representação de A, relativa à base $(v_1, \cdots, v_n)$.

Note que os elementos v_k e os escalares λ_k são chamados de autovetores e autovalores de A respectivamente e serão estudados numa próxima seção.

3.3 NÚCLEO

Nos capítulos posteriores será necessário o conhecimento sobre os conceitos de núcleo que mencionaremos a seguir.

Dada uma transformação linear $A : E \to F$, o *núcleo* é o conjunto dos vetores $v \in E$ de tal forma que $Av = 0$. Será utilizada a notação N(A) como representação do núcleo de A. Note que N(A) é um subespaço vetorial de E.

Teorema 3.4. *Com o objetivo de que uma transformação linear $A : E \to F$ seja injetiva é necessário e suficiente que seu núcleo N(A) contenha apenas o vetor nulo.*

Demonstração. Uma transformação linear $A : E \to F$ será injetiva quando $v \neq v'$ em $E \Rightarrow Av \neq Av'$ em F. De modo idêntico: $Av = Av' \Rightarrow v = v'$.
Seja A injetiva temos $v \in N(A) \Rightarrow A.v = 0 = A.0 \Rightarrow v = 0$, portanto $N(A) = \{0\}$.
Seja $N(A) = \{0\}$, então $Av = Av' \Rightarrow A(v - v') = Av - Av' = 0 \Rightarrow v - v' \in N(A) \Rightarrow v - v' = 0 \Rightarrow v = v'$, portanto A é injetiva. □

Teorema 3.5. *Uma transformação linear é injetiva se, e somente se, leva vetores L.I. em vetores L.I.*

Demonstração. Seja $A : E \to F$ uma transformação linear injetiva. Provaremos que se os vetores $v_1, \cdots, v_n \in E$ são linearmente independentes suas imagens $Av_1, \cdots, Av_n \in F$ são vetores linearmente independentes.
Se $\alpha_1.Av_1 + \cdots + \alpha_n.Av_n = 0$ consequentemente $A(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = 0$, logo $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$ pois A é injetiva.
Como $v_1, \cdots, v_n$ são L.I., temos $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$, logo $Av_1, \cdots, Av_n$ são L.I.
Reciprocamente, se a transformação linear $A : E \to F$ leva vetores L.I. em vetores L.I. então $v \neq 0$ em $E \Rightarrow v$ L.I. $\Rightarrow Av$ L.I. $\Rightarrow Av \neq 0$, portanto $N(A) = 0$ e A é injetiva. □

3.4 AUTOVALOR E AUTOVETOR

Considere F um espaço linear e E um subespaço de F, sendo que os mesmos não são necessariamente de dimensão finita.

Definição 3.6. Seja $A : E \to F$ uma transformação linear de E em F. Um escalar λ é chamado autovalor de A se existe em E um elemento v não nulo tal que

$$Av = \lambda v$$

O elemento v é denominado autovetor de A associado a λ, sendo o escalar λ chamado autovalor de A.

Note que pedimos v não nulo, pois para toda transformação linear A e todo $\lambda \in \mathbb{R}$ temos $A0 = 0 = \lambda 0$.

3.4.1 *Independência linear de autovetores correspondentes a autovalores distintos*

Uma importante propriedade dos autovalores é relacionada no teorema a seguir, sendo que E representa um subespaço de um espaço linear F.

Teorema 3.7. *Se $v_1, \cdots, v_k$ são autovetores de uma transformação linear $A : E \to E$ e os autovalores correspondentes $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ são distintos, então os autovetores $v_1, \cdots, v_k$ são linearmente independentes.*

Demonstração. Será realizada por indução matemática.
Para k=1, v_1 é linearmente independente uma vez que $v_1 \neq 0$, pois v_1 é autovetor de A. Suponha que seja válido para k autovalores distintos de A os autovetores associados $v_1, \cdots, v_k$ são L.I. Vamos mostrar que é válido para k+1 se A possui k+1 autovalores distintos, então os k+1 autovetores associados são L.I. Considere a combinação linear nula:

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1} = 0$$

Aplicando a transformação linear A nessa equação e lembrando que $Av_i = \lambda_i v_i$, pois λ_i são autovalores de A associados aos autovetores v_i para $i = \{1, \cdots, k+1\}$, obtendo:

$$\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + \alpha_k \lambda_k v_k + \alpha_{k+1} \lambda_{k+1} v_{k+1} = 0$$

Multiplicando a primeira equação por λ_{k+1} e subtraindo da segunda equação, tem-se:

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})v_1 + \cdots + \alpha_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})v_k = 0$$

Pela hipótese de indução, temos $v_1, \cdots, v_k$ são linearmente independentes, assim temos que $\alpha_i(\lambda_i - \lambda_{k+1}) = 0$ para $i = \{1, \cdots, k\}$. Mas $\alpha_i(\lambda_i - \lambda_{k+1}) = 0 \Leftrightarrow \alpha_i = 0$ ou

$\lambda_i - \lambda_{k+1} = 0$. Como os autovalores de A são distintos, ou seja, $\lambda_i \neq \lambda_{k+1}$ para $i \neq k+1$ obtemos $\alpha_i = 0$ para $i = \{1, \cdots, k\}$. Substituindo na combinação linear nula temos:

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1} = 0 \Rightarrow \alpha_{k+1} v_{k+1} = 0 \Rightarrow \alpha_{k+1} = 0$$

visto que $v_{k+1} \neq 0$, pois é um autovetor de A. Sendo assim, pode-se verificar que $\alpha_i = 0$, para $i = \{1, \cdots, k\}$, isto significa que $v_1, \cdots, v_k, v_{k+1}$ são linearmente independentes. □

Note que o Teorema 3.7 não seria verdadeiro se o elemento zero fosse autovetor. Além disso,por essa razão o 0 é excluído como autovetor.

Corolário 3.8. *Se dim $E = n$, toda transformação linear $A : E \to E$ admite no máximo n autovalores distintos. Se A tem precisamente n autovalores distintos, então os autovetores correspondentes formam uma base para E e a matriz de A, em relação a esta base, é uma matriz diagonal com os autovalores como elementos diagonais.*

Demonstração. Se existisse $n+1$ autovalores distintos então, pelo teorema 3.2 E compreenderia $n+1$ elementos independentes. O que não é possível já que dim $E = n$. A segunda afirmação é resultado dos teoremas 3.2 e 3.3. □

3.5 MATRIZES SEMELHANTES

Teorema 3.9. *Se duas matrizes $n \times n$, A e D, representam a mesma transformação linear, então existe uma matriz não singular P tal que*

$$D = P^{-1}AP$$

Além disso, se A é a matriz da transformação linear relativa à base $G = [g_1, \cdots, g_n]$ e se D é a matriz da transformação relativa à base $U = [u_1, \cdots, u_n]$, então para P pode-se considerar a matriz não singular que relaciona as duas bases através da equação matricial $U = GP$.

Note que o inverso do teorema 3.9 também é verdadeiro.

Demonstração. Considere o caso em que $E = F$, e admita que se considera a mesma base ordenada $(g_1, \cdots, g_n)$ em E e F. Seja $B = (b_{ik})$ a matriz de A relativa a esta base. Isto significa que se tem

$$A(g_k) = \sum_{i=1}^{n} b_{ik} g_i \tag{3.1}$$

para $k = 1, 2, \cdots, n$.
Escolhendo outra base ordenada $(u_1, \cdots, u_n)$ para E e F e seja $D = d_{kj}$ a matriz de A relativa a essa nova base. Têm-se:

$$A(u_j) = \sum_{k=1}^{n} d_{kj} u_k \tag{3.2}$$

para $j = 1, 2, \cdots, n$.
Uma vez que cada u_j pertence ao espaço gerado por $g_1, \cdots, g_n$ pode-se escrever

$$u_j = \sum_{k=1}^{n} p_{kj} g_k \tag{3.3}$$

para $j = 1, 2, \cdots, n$.
Para algum conjunto de escalares p_{kj}. Desse modo a matriz $P = (p_{kj})$, $n \times n$, definida por estes escalares é *não singular* pois representa uma transformação linear que aplica uma base E sobre outra base E. Aplicando A a ambos os membros de 3.3 resultam do mesmo modo as equações:

$$A(u_i) = \sum_{k=1}^{n} p_{kj} A(g_k) \tag{3.4}$$

para $j = 1, 2, \cdots, n$.
Os sistemas de equações de 3.1 a 3.4 acima podem ser escritos de modo mais simples na forma matricial inserindo matrizes cujos elementos sejam vetores. Sejam

$$G = [g_1, \cdots, g_n] \quad \text{e} \quad U = [u_1, \cdots, u_n]$$

matrizes linha, $1 \times n$ cujos elementos são os das bases que se consideram. Assim o conjunto de equações em 3.3 pode ser escrito como uma equação matricial

$$U = GP \tag{3.5}$$

De forma análoga introduzindo

$$G' = [A(g_1), \cdots, A(g_n)] \quad \text{e} \quad U' = [A(u_1), \cdots, A(u_n)]$$

as equações 3.1, 3.2 e 3.4 escrevem-se respectivamente:

$$G' = GA, \quad U' = UD, \quad U' = G'P \tag{3.6}$$

de 3.5 resulta

$$G = UP^{-1}$$

.

Para encontrar a relação entre A e D foi expresso U' de duas formas diferentes em função de U. A partir de 3.5 resulta

$$U' = UD$$

e

$$U' = G'P = GAP = UP^{-1}AP$$

Portanto $UD = UP^{-1}AP$. Contudo cada elemento nessa equação matricial é uma combinação linear dos vetores $u_1, \cdots, u_n$, pois como os u_i são independentes teremos

$$D = P^{-1}AP$$

□

Teorema 3.10. *Se A e D são duas matrizes $n \times n$ relacionadas pela equação da forma $D = P^{-1}AP$, com P uma matriz $n \times n$ não singular, então A e D representam a mesma transformação linear.*

Definição 3.11. Duas matrizes $n \times n$, A e D, são ditas semelhantes se existir uma matriz não singular P tal que $D = P^{-1}AP$.

Observe que os teoremas 3.9 e 3.10 combinados dão origem a:

Teorema 3.12. *Duas matrizes são semelhantes se e somente se representam a mesma transformação linear.*

Duas representantes matriciais distintas de uma transformação linear têm o mesmo polinômio característico. Admitindo que $A : E \to F$ é uma aplicação de um espaço n dimensional E num espaço m dimensional F. Sejam $(g_1, \cdots, g_n)$ e $(w_1, \cdots, w_m)$ bases ordenadas para E e F respectivamente. A representação matricial de A relativa a esta escolha de bases é a matriz $m \times n$ cujas colunas são as componentes de $A(g_1), \cdots, A(g_n)$ relativamente à base $(w_1, \cdots, w_n)$. Diferentes representações matriciais são devidas a diferentes escolhas das bases.

Teorema 3.13. *Matrizes semelhantes tem o mesmo polinômio característico e portanto os mesmos autovalores.*

Demonstração. Seja $D = P^{-1}AP$ com P não singular.

Temos $D - \lambda I = P^{-1}AP - \lambda I$. Mas como $P^{-1}IP = I$ segue:

$$D - \lambda I = P^{-1}(A - \lambda I)P.$$

Daí:

$$det(D - \lambda I) = det(P^{-1}(A - \lambda I)P) = (detP)^{-1}det(A - \lambda I)detP = det(A - \lambda I),$$

onde usamos a Fórmula de Binet-Cauchy. □

3.5.1 *Polinômios Característicos*

Se dim $E = n$, o problema de determinação de autovalores de uma transformação linear $A : E \to E$ pode ser resolvido via determinantes. Pretende-se determinar os escalares λ tais que a equação $Av = \lambda v$ tenha uma solução $v \neq 0$. A equação $Av = \lambda v$ pode escrever-se na forma

$$\lambda Iv - Av = 0$$

$$(\lambda I - A)v = 0$$

Se $(\lambda I - A)$ tem seu determinante diferente de zero, existe inversa e o sistema acima tem uma única solução $v = 0$, dado que

$$(\lambda I - A)v = 0$$
$$v = (\lambda I - A)^{-1}0$$
$$v = 0$$

Como pretende-se obter soluções com $v \neq 0$, é necessário buscar valores de λ para os quais a matriz $(\lambda I - A)$ tenha determinante igual a zero.

$$det(\lambda I - A) = 0$$

Essa equação é denominada *equação característica*.

Definição 3.14. (Polinômio Característico) Seja A uma matriz quadrada de ordem n, tem-se que o *polinômio característico de A* é

$$det(\lambda I - A)$$

Proposição 3.15. *São chamados de autovalores da transformação representada pela matriz A as raízes do polinômio característico de A. Note que o polinômio característico pode ser definido como $(A - \lambda I)$ ao invés de $(\lambda I - A)$ obtendo um polinômio característico com sinal trocado, entretanto as raízes adquiridas são as mesmas.*

Notamos que as raízes do polinômio característico podem ser números reais ($\mathbb{R}$) ou complexos ($\mathbb{C}$).

Teorema 3.16. *Seja*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

o polinômio característico de uma matriz M. Então

$$a_{n-1} = -(-1)^n trM$$
$$a_0 = detM$$

onde trM é a soma das raízes do polinômio característico.

Chamamos trM de *traço de M*. Têm-se que *o traço de M* é igual a soma dos elementos da diagonal de A.

3.5.2 *Traço de uma matriz*

Demonstração. Seja $f(\lambda)$ o polinômio característico de uma matriz M, nxn e representadas as n raízes de $f(\lambda)$ por $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, com cada raíz escrita de acordo com o grau de multiplicidade.

$$f(\lambda) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0$$

Na forma fatorada tem-se

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)\cdots(\lambda - \lambda_n)$$

Baseado na comparação das duas formas conclui-se que o termo constante c_0 e o coeficiente λ^{n-1} são dados pelas fórmulas

$$c_0 = (-1)^n \lambda_1 \cdots \lambda_n$$

e

$$c_{n-1} = -(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)$$

Dado que $c_0 = (-1)^n detM$, têm-se que

$$\lambda_1 \cdots \lambda_n = detM$$

sendo o produto das raízes do polinômio característico de M é igual ao determinante de M. Note que o determinante de uma matriz triangular é igual ao produto dos elementos da diagonal e assim se M é triangular:

$$det(M - \lambda I) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)\cdots(a_{nn} - \lambda)$$

Portanto os autovalores de uma matriz triangular são iguais aos elementos da diagonal.

O coeficiente de λ^{n-1} é dado por $c_{n-1} = -trM$. Pode-se calcular esse coeficiente a partir de $f(\lambda)$ na forma de determinante e obtemos

$$c_{n-1} = -(a_{11} + \cdots + a_{nn}),$$

onde $M = (a_{ij})$. □

Corolário 3.17. *Uma **matriz é singular**, ou seja, não invertível se e somente se o seu polinômio característico não tem termo independente.*

Definição 3.18. (Multiplicidade algébrica de autovalor)

A multiplicidade algébrica do autovalor λ é sua multiplicidade enquanto raiz do polinômio característico de A.

Proposição 3.19. *Se λ é autovalor de $A : E \to E$ então $E(\lambda) = \{v \in E; Av = \lambda v\}$ é subespaço de E e $dim E(\lambda) \leq$ (multiplicidade algébrica de λ).*

3.5.3 *Método para determinar autovalores e autovetores*

Para determinar os autovalores e autovetores de uma matriz A, obtenha o polinômio característico de A, sendo as raízes deste polinômio os autovalores de A. Posteriormente resolva $Av = \lambda v$, para todos os autovalores λ, obtêm-se os autovetores de A.

Exemplo 3.1. Considere uma matriz com todos os autovalores distintos. A matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

tem o polinômio característico $det(\lambda I - A)$

$$det \left[\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \right]$$

$$det \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & -1 \\ -2 & \lambda - 3 & -4 \\ 1 & 1 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 3)$$

As raízes do polinômio característico de uma matriz A são os autovalores distintos: $1, -1$ e 3. Para determinar os autovetores correspondentes a $\lambda = 1$, resolvemos o sistema $Av = v$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

que resulta em

$$\begin{aligned} 2v_1 + v_2 + v_3 &= v_1 \\ 2v_1 + 3v_2 + 4v_3 &= v_2 \\ -v_1 - v_2 - 2v_3 &= v_3 \end{aligned}$$

pode-se escrever

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 + v_3 &= 0 \\ 2v_1 + 2v_2 + 4v_3 &= 0 \\ -v_1 - v_2 - 3v_3 &= 0 \end{aligned}$$

Somando membro a membro a primeira e terceira equação encontramos $v_3 = 0$ e as três equações são reduzidas a $v_1 + v_2 = 0$. Assim os autovetores correspondentes a $\lambda = 1$ são múltiplos de $(1, -1, 0)$.
Analogamente encontramos os autovetores $(0, 1, -1)$ correspondente a $\lambda = -1$ e $(2, 3, -1)$ correspondente a $\lambda = 3$. Uma vez que os autovalores são distintos os correspondentes autovetores $(1, -1, 0)$, $(0, 1, -1)$ e $(2, 3, -1)$ são independentes. Os resultados resumem-se como segue:

Autovalor λ	Autovetores	dim
1	$t(1, -1, 0)$, $t \neq 0$	1
-1	$t(0, 1, -1)$, $t \neq 0$	1
3	$t(2, 3, -1)$, $t \neq 0$	1

Exemplo 3.2. Considere uma matriz com os autovalores repetidos. A matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

corresponde o polinômio característico $det(\lambda I - A)$

$$\det \left[\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right]$$

$$det \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 & -1 \\ 0 & \lambda - 3 & 1 \\ -2 & -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 2)(\lambda - 4)$$

Os autovalores são: $2, 2$ e 4, mas note que o autovalor 2 é uma raiz dupla do polinômio característico e para determinar os autovetores correspondentes a $\lambda = 2$, resolvemos o sistema $Av = 2v$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 2. \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

que resulta em

$$2v_1 - v_2 + v_3 = 2v_1$$

$$3v_2 - v_3 = 2v_2$$

$$2v_1 + v_2 + 3v_3 = 2v_3$$

que se reduz a

$$-v_2 + v_3 = 0$$

$$v_2 - v_3 = 0$$

$$2v_1 + v_2 + v_3 = 0$$

Têm-se como solução $v_2 = v_3 = -v_1$ em que autovetores correspondentes a $\lambda = 2$ são $t(-1,1,1)$, com $t \neq 0$. De forma análoga encontramos $t(1,-1,1)$ correspondendo ao autovalor $\lambda = 4$. Os resultados seguem a seguir:

Autovalor λ	Autovetores	dim
2,2	$t(-1,1,1)$, $t \neq 0$	1
4	$t(1,-1,1)$, $t \neq 0$	1

Exemplo 3.3. Tomando uma matriz com autovalores repetidos. A matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

tem o polinômio característico $det(\lambda I - A)$

$$\det \left[\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \right]$$

$$det \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & -1 \\ -2 & \lambda - 3 & -2 \\ -3 & -3 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda - 7),$$

As raízes do polinômio característico de uma matriz A são os autovalores distintos: $1, 1$ e 4. Para determinar os autovetores correspondentes a $\lambda = 7$, resolvemos o sistema $Av = 7v$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 7. \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

que resulta em

$$2v_1 + v_2 + v_3 = 7v_1$$
$$2v_1 + 3v_2 + 2v_3 = 7v_2$$
$$3v_1 + 3v_2 + 4v_3 = 7v_3$$

pode-se escrever

$$-5v_1 + v_2 + v_3 = 0$$
$$2v_1 - 4v_2 + 2v_3 = 0$$
$$3v_1 + 3v_2 - 3v_3 = 0$$

Esta solução admite $v_2 = 2.v_1$, $v_3 = 3v_1$; em que os autovetores correspondentes a $\lambda = 7$ são $t(1,2,3)$, com $t \neq 0$. Para o autovalor $\lambda = 1$, o sistema $Av = v$ teremos:

$$v_1 + v_2 + v_3 = 0$$
$$v_1 + v_2 + v_3 = 0$$
$$v_1 + v_2 + v_3 = 0$$

Para determinar a solução deste sistema pode-se considerar $v_1 = a$, $v_2 = b$, com a e b arbitrários e tomar $v_3 = -a - b$. Desse modo cada autovetor correspondente a $\lambda = 1$ tem a forma

$$(a, b, -a - b) = a(1, 0, -1) + b(0, 1, -1)$$

onde $a \neq 0$ e $b \neq 0$.Portanto os vetores $(1, 0, -1)$ e $(0, 1, -1)$ formam uma base para $E(1)$. Assim sendo $dimE(\lambda) = 2$ quando $\lambda = 1$. Os resultados podem ser resumidos a seguir.

Autovalor λ	Autovetores	dim $E(\lambda)$
7	$t(1,2,3)$, $t \neq 0$	1
1, 1	$a(1,0,-1) + b(0,1,-1)$, $a \neq 0$ e $b \neq 0$	2

Verifica-se no exemplo 3.3 que existem três autovetores independentes, mas somente dois autovalores distintos.

3.6 DIAGONALIZAÇÃO DE MATRIZES

A diagonalização de matrizes busca encontrar uma matriz diagonal semelhante a uma dada matriz. Isso está diretamente ligado a encontrar uma base para um dado espaço vetorial que torne a representação matricial de uma dada transformação linear o mais simples possível.

Definição 3.20. Uma matriz quadrada A é *diagonalizável* se existe P tal que $P^{-1}AP$ é diagonal.

Proposição 3.21. *Uma matriz quadrada de ordem n é diagonalizável se e somente se tem n autovetores linearmente independentes.*

Método de Diagonalização de matriz

Encontre n autovetores linearmente independentes de A denotados por $v_1, v_2, \cdots, v_n$. Seja $P = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ têm-se que a matriz $D = P^{-1}AP$ é diagonal. Pode-se admitir um conjunto qualquer de autovetores linearmente independentes para diagonalizar uma matriz, note que cada conjunto resultará numa base diferente em que a transformação pode ser redigida como matriz diagonal. Veja que a mudança de base e a decorrente mudança das matrizes de mudança de base não altera a matriz diagonal que representa a transformação, sendo a sua diagonal composta pelos autovalores da transformação.

Exemplo 3.4. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

primeiramente encontra-se o polinômio característico $det = (\lambda I - A)$

$$\det \left[\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right]$$

$$\det \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda - 1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda + 1) - 1.1.(\lambda + 1) = (\lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda).$$

A matriz A tem autovalores $0, -1$ e 2. Para determinar os autovetores correspondentes a $\lambda = 0$, resolvemos o sistema $Av = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0$$

que resulta em

$$v_1 - v_2 + v_3 = 0$$

$$-v_1 + v_2 + v_3 = 0$$

$$-v_3 = 0$$

Tendo assim os autovetores pertencentes a 0 na forma $(x, x, 0)^T$. De forma análoga obtêm-se os autovetores de -1 na forma $(y, y, -y)^T$ e os autovetores de 2 na forma $(z, -z, 0)^T$.
Adota-se então os autovetores para as coluna da matriz de mudança de base: $(1, 1, 0)^T$, $(1, 1, -1)^T$, $(1, -1, 0)^T$. Assim

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Escolhendo agora autovetores diferentes para as colunas da matriz de mudança de base:$(-2, -2, 0)^T$, $(3, 3, -3)^T$, $(1, -1, 0)^T$.Têm-se dessa forma:

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & -1/4 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/3 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemplo 3.5. Dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

tem como polinômio característico $(2 - x)^2$ e duas raízes iguais; o autovalor 2 tem multiplicidade algébrica igual a 2. Este autovalor tem somente autovetores da forma

$$\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$$

e não podemos obter, portanto dois autovetores linearmente independentes para construir uma matriz de mudança de base. A matriz não é diagonalizável.

Exemplo 3.6. Seja uma matriz qualquer na forma

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & k & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}$$

com a constante k na diagonal e uns acima da diagonal terá n autovalores iguais a k, e o autoespaço de todos terá dimensão um. Nenhuma dessas matrizes é diagonalizável. Portanto não podemos obter dois autovetores linearmente independentes para construir uma matriz de mudança de base. A matriz não é diagonalizável.

4

NOÇÕES SOBRE GRAFOS

A teoria de grafos tem origem no século XVIII e mostra-se como uma ferramenta influente para a modelagem de várias situações reais como pesquisa operacional, classificação de relevância (pagerank), engenharia entre outros. Nesse capítulo serão apresentadas algumas definições e resultados da Teoria de Grafos fundamentais para o entendimento das demonstrações que serão apresentadas posteriormente. Foram utilizadas como referências: [12], [9], [11].

4.1 DEFINIÇÕES BÁSICAS

Um *grafo G = (N, A)* é composto por um conjunto (*finito e não-vazio*) N de *nós* e um conjunto A de *arcos*. Cada *arco* é um par não-ordenado de *nós distintos*. Diz-se que i e j são *extremidades* do arco se este arco corresponde ao par de nós $\{i, j\}$, dizemos que i e j são as *extremidades* do arco. Será adotado, por convenção, que cada nó do grafo será representado por um círculo e os arcos do grafo serão representados por linhas ligando estes círculos, como mostra a Figura 1.

Definição 4.1. Os *multigrafos* são os grafos em que dois ou mais arcos são associados a um mesmo par de nós

Observe que os exemplos a seguir: na Figura 2, estão associados dois arcos aos nós 1 e 3 e na Figura 3 o arco a está associado a um único nó, enquanto o arco b está associado aos nós 1 e 2. Portanto, dois nós do par não ordenado não são necessariamente distintos, conforme exemplificado na Figura 3, em que o arco a associa o nó 1 a ele mesmo.

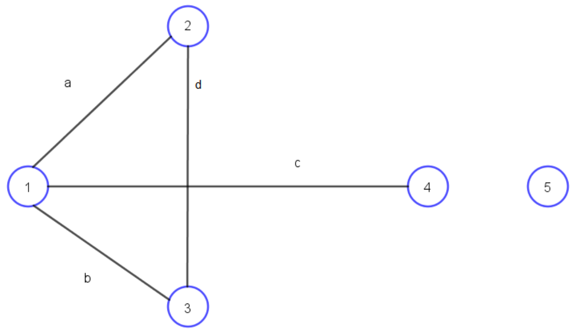

Figura 1: Grafo -$N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $A = \{a, b, c, d\}$

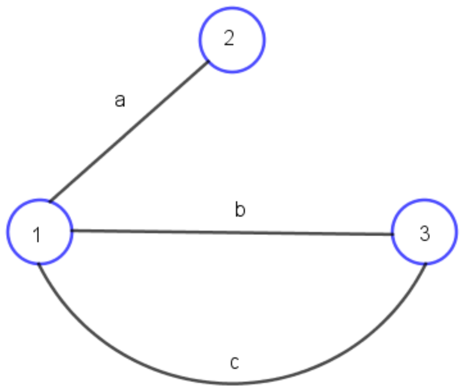

Figura 2: Multigrafos (a)

Definição 4.2. É definido como *laço* o arco que associa um nó a ele mesmo.

Observe o exemplo da Figura 3, cujo arco a liga o nó 1 ao próprio nó 1.

Definição 4.3. Um arco é dito *incidente* nos nós ao qual está associado.

A descrição realizada acima pode ser observada na Figura 2 onde os arcos b e c são incidentes nos nós 1 e 3 e na Figura 1 o nó 3 do grafo é incidente nos arcos $\{1, 3\}$ e $\{2, 3\}$.

Definição 4.4. É denominado *nó isolado*, aquele nó que não está ligado a nenhum outro, ou seja, não existe nenhum arco incidente.

O *nó isolado* pode ser exemplificado na Figura 1 pelo nó 5.

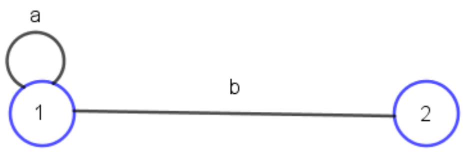

Figura 3: Multigrafos (b)

Definição 4.5. São chamados *arcos adjacentes* dois arcos incidentes no mesmo nó. Assim como dois nós incidentes num mesmo arco também são denominados *adjacentes*.

Como exemplo podemos citar a Figura 1, em que os nós 1 e 4 são adjacentes, além dos arcos $\{1,2\}$ e $\{1,3\}$.

Definição 4.6. O *grau de um nó* é definido pelo número de arcos incidentes no nó, sendo que cada laço é computado como dois arcos.

Analisando a Figura 3, note que o nó 1 possui grau 3, pois possui arco $\{1,2\}$ e o laço no nó 1 que deve ser contado como dois arcos.Note que observando o nó 2 da mesma figura tem grau 1, devido ao único arco $\{1,2\}$.

Definição 4.7. Um *passeio* entre dois nós i e j de um grafo ou multigrafo é determinado como uma sequência alternante de nós e arcos iniciando em um dos nós i, j; e finalizando no outro, de forma que cada arco é incidente aos nós que o circundam na sequência.

Como exemplo podemos citar da Figura 1, o passeio entre os nós 1 e 4 será (1, $\{1,3\}$, 3, $\{2,3\}$, 2, $\{1,2\}$, 1,$\{1,4\}$, 4). Note que nos casos de multigrafos que contém mais de um arco entre o mesmo par de nós, a subsequência de nós pode gerar ambiguidade. Analisando o caso da Figura 2 teremos os passeios (2, a, 1, b, 3) e (2, a, 1, c, 3) que descreve a mesma sequência de nós. Ocasionalmente utiliza-se apenas uma das subsequências para a definição de passeio, para descomplicar a notação. A subsequência de nós será utilizada somente se não houver ambiguidade.

Definição 4.8. Um *caminho* é um passeio que não compreende nós repetidos.

Exemplificando podemos verificar na Figura 1 entre os nós 2 e 4 os caminhos baseados apenas nos nós: (2,1,4), (2,3,1,4).

Definição 4.9. Um *circuito* trata-se de um caminho fechado entre dois nós idênticos.

Definição 4.10. Um *ciclo* é um caminho fechado, isto é, um passeio que contém precisamente dois nós iguais: o primeiro e o último.

4.1.1 *Ciclo hamiltoniano*

Um ciclo é chamado *hamiltoniano* quando é possível formar um ciclo que inclua todos os nós, dado um grafo ou multigrafo. O ciclo recebe essa designação pois foi o matemático irlandês William Rowan Hamilton que definiu esse conceito. Um grafo que compreenda esse tipo de ciclo é chamado *grafo hamiltoniano*. A seguir temos o exemplo de um *grafo hamiltoniano* a Figura 4, em que os arcos azuis constituem um ciclo hamiltoniano.

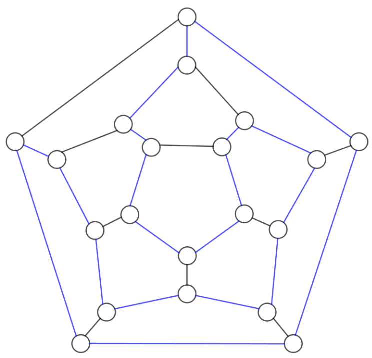

Figura 4: Grafo dodecaedro

As Figuras 5 e 6 exemplificam um *grafo não-hamiltoniano*.Observe que o grafo de Herschel não é hamiltoniano pois trata-se de um grafo bipartido com um número ímpar de nós.

Definição 4.11. Dois nós são chamados de *conectados* se existe caminho entre eles. Um grafo ou multigrafo é *conexo* se qualquer par de nós estão conectados.

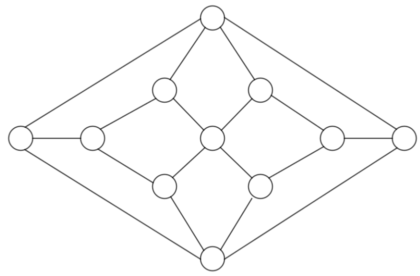

Figura 5: Grafo de Herschel

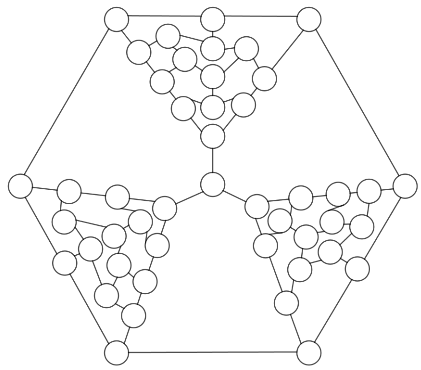

Figura 6: Grafo de Tutte

Podemos citar como exemplos de multigrafo conexo as Figuras 2 e 3. Note que o grafo da Figura 1, é dito desconexo, ou seja, não é conexo.

Definição 4.12. O grafo $H = (N_H, A_H)$ é um subgrafo de um grafo $G = (N, A)$ se $N_H \subseteq N$ e $A_H \subseteq A$. Os componentes conexos de um grafo são os *subgrafos* conexos deste grafo que não estão de forma rigorosa contidos em outros subgrafos conexos.

Observe a Figura 1, é um subgrafo conexo o subgrafo composto pelos nós 1 e 2 e pelo arco (1,2); entretanto não se trata de um componente conexo, porque está contido no subgrafo que contém os nós 1,2 e 3 e o arcos entre estes nós. Pode-se verificar que no grafo da Figura 1 contém dois componentes conexos: um constituído pelo nó 5 e outro composto pelos nós 1,2,3,4 e os arcos entre estes nós.

4.2 REPRESENTAÇÕES DE GRAFOS OU MULTIGRAFOS

O desenho do grafo é bastante vantajoso, entretanto para resolver grafos maiores e complexos torna-se fundamental outra forma de descrição para o grafo.

4.2.1 *Listagem*

A listagem dos elementos N e A é uma forma de descrever um grafo ou multigrafo. Abaixo serão exibidas as listagens das Figuras 1, 2 e 3.

Grafo/Multigrafo	Descrição
Figura 1	$N = \{1,2,3,4,5\}$ e $A = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\}\}$.
Figura 2	$N = \{1,2,3\}$ e $A = \{a,b,c\}$, onde a está associado aos nós 1 e 2; b e c aos nós 1 e 3.
Figura 3	$N = \{1,2\}$ e $A = \{a,b\}$, onde a está associado ao nó 1 e b aos nós 1 e 2.

4.2.2 *Grafos expressos por Matrizes*

Os grafos e multigrafos também podem ser expressos através de matrizes, o que determina uma ligação com a álgebra. A *matriz de incidência* em que as linhas estão associadas aos nós e as colunas aos arcos. Um elemento na linha i e coluna j é igual a 1 se o nó i é incidente no arco j e 0 em caso contrário. Para elucidar o que é uma matriz de incidência será apresentado o exemplo da Figura 2.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A *matriz de adjacência* tem suas linhas e colunas associadas aos nós. O elemento na linha i e coluna j é o número de arcos que possui i e j como extremidades.

Para esclarecer o que é uma matriz de adjacência será apresentada a seguir a matriz de adjacência da Figura 2.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4.3 TEOREMAS E COROLÁRIOS

Teorema 4.13. *A soma dos graus dos nós de um grafo é igual ao dobro do número de arcos.*

Demonstração. Observe que ao acrescentar os graus conta-se cada arco duas vezes, sendo uma vez de cada extremidade. □

Teorema 4.14. *O número de nós de grau ímpar de um grafo é par.*

Demonstração. Considerando o grafo $G = (N, A)$, sendo expresso por d_i o grau do nó i temos:

$$2|A| = \sum_{i \in N} d_i = \sum_{i \in N | d_i par} d_i + \sum_{i \in N | d_i impar} d_i$$

Note que o somatório foi separado em duas parcelas, uma contendo os graus pares e a outra os ímpares. Como a primeira parcela é par e a soma das parcelas também é par consequentemente a segunda parcela também será par. Repare que para ter um soma de parcelas ímpares teremos como resultado um número par, para isso é necessário ter um número par de parcelas. □

5

MATRIZ LAPLACIANA

A Matriz Laplaciana é de vital importância para a apresentação do Teorema da Matriz-árvore, que determina o número de árvores geradoras de um grafo baseado nos autovalores dessa matriz. Dessa forma esse conceito será explanado nesse capítulo e retomado posteriormente para realização da demonstração do teorema. As referências utilizadas foram [9] e [11].

5.1 CONCEITOS BÁSICOS

Definição 5.1. A *matriz de incidência* de um grafo G com n vértices e m arestas, simbolizada por $B(G)$, será a matriz de ordem $n \times m$ com entradas:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } e_j \text{ é uma aresta incidente no vértice } v_i; \\ 0, & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$

Exemplo 5.1. Para o grafo G da Figura 7, a matriz de incidência será:

$$B(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

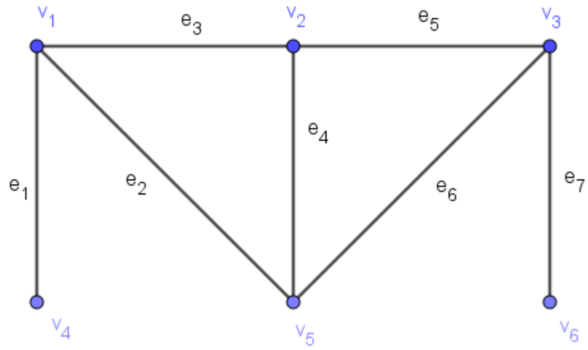

Figura 7: Grafo G

Definição 5.2. Denomina-se A como *matriz de adjacência de G*, tendo entradas $a_{ij} = k$, onde $k \in \mathbb{N}$ é o número de arestas que conectam o vértice v_i ao vértice v_j de G. No caso em que G é um grafo, temos $k \in \{0, 1\}$; no caso em que G é um multigrafo, $k \geq 2$ para pelo menos um par de vértices.

Exemplo 5.2. O grafo da Figura 8

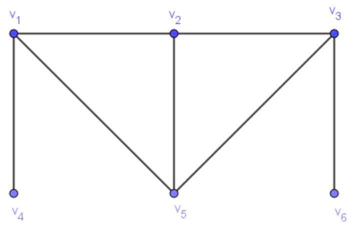

Figura 8: Grafo G

tem como matriz de adjacência:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 5.3. O grafo da Figura 9

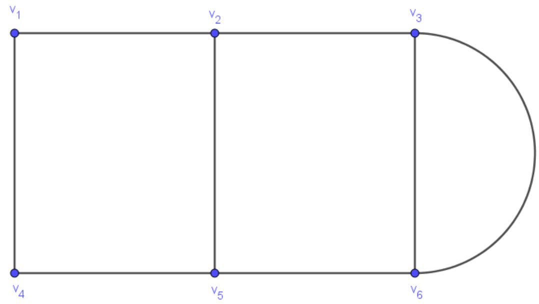

Figura 9: Multigrafo G

tem como matriz de adjacência:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Definição 5.3. Seja D a *matriz diagonal dos graus dos vértices* de um grafo G, em que o grau do vértice v_i, denotado por $d(v_i)$, é a quantidade de arestas que incide em v_i e seja A a *matriz de adjacência* de G. A matriz L é chamada *Matriz Laplaciana*

$$L = D - A$$

Exemplo 5.4. Para o grafo G da Figura 8 , temos a matriz diagonal

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e matriz de adjacência obtida no Exemplo 5.2, conclui-se que

$$L=\begin{pmatrix}3&0&0&0&0&0\\0&3&0&0&0&0\\0&0&3&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&3&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1&0&1&1&0\\1&0&1&0&1&0\\0&1&0&0&1&1\\1&0&0&0&0&0\\1&1&1&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-1&0&-1&-1&0\\-1&3&-1&0&-1&0\\0&-1&3&0&-1&-1\\-1&0&0&1&0&0\\-1&-1&-1&0&3&0\\0&0&-1&0&0&1\end{pmatrix}$$

Definição 5.4. O *espectro da matriz laplaciana* L de um grafo G, expresso por $\varsigma(G)$, é a matriz linha na qual todos os elementos são autovalores de L ordenados na forma $\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_n$ então

$$\varsigma(\mathrm{G}) = (\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_n)$$

Proposição 5.5. *Dado um Grafo G e sendo $\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_n$ os autovalores da matriz laplaciana (L), então*

1. $\mu_n = 0$ *com autovetor associado* $1 = [\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}]^T$;
2. *A multiplicidade algébrica do autovalor 0 é igual ao número de componentes conexas de G.*

Demonstração.

1. Pode-se notar que para cada linha da matriz laplaciana temos uma entrada que corresponde ao grau do vértice representado por essa linha e temos nessa mesma linha a mesma quantidade de entradas com valor -1. Portanto, tendo um autovalor $1 = [\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}]^T$ associado nota-se que a soma dos elementos de uma linha qualquer de L é zero, portanto $L.1 = 0 = 0.1$. Assim, o número zero é autovalor e, todos os autovalores da matriz laplaciana são não negativos, ou seja, todos eles serão maiores ou iguais a zero. Logo, $\mu_n = 0$.
2. No caso do grafo G ser não conexo, aplica-se o resultado para cada uma das componentes conexas de G, em que cada uma dessas componentes terá um autovalor zero. Assim, o espectro de G possui tantos zeros quanto o número de componentes conexas.

□

Pode-se concluir que a *Matriz Laplaciana* (L) possui todos os autovalores maiores ou iguais a zero pela proposição 5.5.

Quando considerado um grafo G orientado é utilizada a definição a seguir.

Definição 5.6. Considere um grafo G com arestas orientadas. A *matriz β de incidência considerando a orientação* terá seus elementos na forma

$$\beta_{ij} = \begin{cases} +1, & \text{se } v_i \text{ é o vértice onde chega } e_j; \\ -1, & \text{se } v_i \text{ é o vértice de onde parte } e_j; \\ 0, & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$

onde $e_j \in E$ e $v_i \in V$.

Exemplo 5.5. Dado o grafo G orientado da figura 10

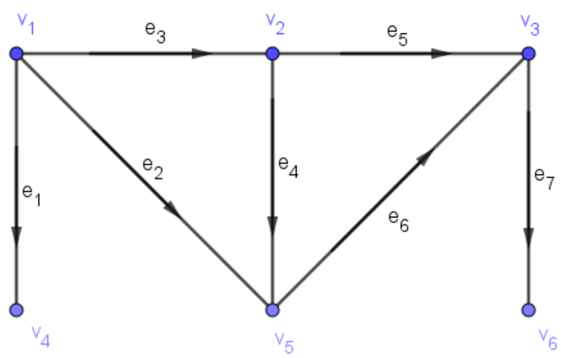

Figura 10: Grafo G Orientado

Obtemos como matriz β de incidência do grafo G orientado

$$\beta = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nota-se que o número de linhas de β é igual ao número de vértices de G e o número de colunas de β é igual ao número de arestas de G. Portanto, a ordem da matriz β é dada pelos vértices e arestas do grafo G sendo $|V| \times |E|$. Pode-se observar que a soma dos elementos de cada coluna de β é igual a zero.

Proposição 5.7. *Seja um grafo G com n vértices, sua matriz laplaciana (L) e sua matriz de incidência β com respeito a uma orientação qualquer. Então, $L = \beta\beta^T$.*

Demonstração. Seja $F = \beta\beta^T$, vamos demonstrar que $F = D - A$ independente da orientação de G. Sabe-se que o número de linhas de β é igual ao número de vértices de G e o número de colunas de β é igual ao número de arestas de G que fornece a ordem da matriz β como $n \times |E|$. Como F é resultado do produto $\beta\beta^T$, que é de ordem $|E| \times n$, consequentemente F é uma matriz quadrada de ordem n. Pela Definição 5.6 atribuímos valores $-1, 0$ ou 1 as entradas da matriz de incidência β de acordo com a orientação da aresta. Quando o vértice v_i possui aresta e_{ij} chegando nele é atribuído valor 1, quando o vértice v_i possui aresta e_{ij} saindo dele é atribuído valor -1 e nos outros casos é atribuído valor 0. Note que a linha i da matriz β terá elementos não nulos independente da orientação adotada no grafo G. Ao multiplicarmos β pela sua transposta, os elementos de F representam o produto interno das linha i e j de β. Quando $i = j$, se v_i possui uma aresta e_{ij} saindo dele temos $\beta_{ij} = -1$ sendo adicionado o valor de $(-1).(-1) = 1$, ao valor do elemento de F no produto interno. Se v_i possui uma aresta e_{ij} chegando nele temos $\beta_{ij} = 1$ sendo adicionado o valor de $1.1 = 1$, ao valor do elemento de F no produto interno e se não sair nem chegar arestas em v_i então $\beta_{ij} = 0$ sendo adicionado 0 ao valor do elemento de F no produto interno. Dessa forma a diagonal da matriz F é igual a diagonal da matriz D. Como G não possui laços a diagonal da matriz A é composta por elementos iguais a zero. Portanto para $i = j$, as entradas de F são iguais as entradas de $D - A$. Quando $i \neq j$, com $0 \leq l \leq |E|$, se a aresta e_l sai de v_i e chega em v_j temos que $\beta_{il} = -1$ e $\beta_{jl} = 1$. Deste modo sendo adicionado o valor $1.(-1) = -1$ ao valor do elemento de F no produto interno. Analogamente se a aresta e_l saísse de v_j e chegasse em v_i tem-se o mesmo resultado mencionado anteriormente. Logo, independente da orientação do grafo G, ao produto interno entre as linha i e j de β sempre será adicionado valor -1 quando houver uma aresta conectando os vértices v_i e v_j. Diante disso temos que o elemento da matriz F, $f_{ij} = -k$, sendo k o número de arestas ligando v_i e v_j. Com base na Definição 5.2, temos $a_{ij} = k$ em que as entradas fora da diagonal da matriz D são nulas, para $i \neq j$ as entradas de F são iguais as entradas de $D - A$. Portanto $F = D - A$ e assim temos $L = \beta\beta^T$.

□

Exemplo 5.6. Aplicando a proposição 5.7 ao Grafo da Figura 8, seguindo a orientação da Figura 10 e utilizando o resultado do Exemplo 5.5 teremos

$$\beta^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Assim, como $L = \beta\beta^T$ teremos

$$L = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Portanto

$$L = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esse resultado pode ser corroborado através do resultado do Exemplo 5.4.

5.2 TEOREMA DO POSTO PARA MATRIZES LAPLACIANAS

Para a demonstração do Teorema da Matriz-Árvore são necessários alguns conceitos de Álgebra Linear entre eles: teorema do posto, núcleo, matriz adjunta, matriz singular, entre outros. Para isso serão desenvolvidos os assuntos mencionados. Foram utilizadas como referências [9], [7], [8], [3] e [4].

Definição 5.8. Uma matriz E de ordem $m \times n$ está na *forma escada* se:

- (i) O primeiro elemento não nulo de uma linha não nula deve ser igual a 1;
- (ii) A coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos da coluna iguais a zero;
- (iii) Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas;
- (iv) Se as linha $1, 2, \cdots, n$ são linhas não nulas, e se o primeiro elemento não nulo da linha i ocorre na coluna k_i então $k_1 < k_2 < \cdots < k_n$.

Exemplo 5.7. As matrizes a seguir estão na forma escada, pois atendem aos itens mencionados na definição 5.8.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Já as matrizes abaixo não estão na forma escada, pois não atendem a algum dos itens mencionados na definição 5.8.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A matriz A não contempla o item (i).

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A matriz B não contempla o item (ii).

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A matriz C não contempla o item (iii).

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A matriz D não contempla o item (iv), pois $k_1 > k_2$.

Intuitivamente a matriz na forma escada recebe essa denominação, claramente, devido a imagem criada após o escalonamento realizado conforme a figura 11

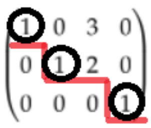

Figura 11: Matriz na forma escada

Isto é, o número de zeros antecedendo o primeiro elemento não nulo de uma linha aumenta a cada linha, até restarem somente linhas nulas, quando houver.

Definição 5.9. Uma matriz é denominada *singular* se o seu determinante é nulo. Caso contrário, dizemos que a matriz é não singular.

Exemplo 5.8. A matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ é uma matriz singular, pois

$det(A) = [1.(-4)] - [2.(-2)] = -4 + 4 = 0.$

Já a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ não é uma matriz singular, pois

$det(B) = [1.1.1] + [0.0.0] + [0.0.0] - [0.1.0] - [1.0.0] - [0.0.1] = 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1.$

Definição 5.10. Dada uma matriz A de ordem $m \times n$, o *posto da matriz* é dado pela ordem da maior submatriz não singular da matriz dada. Denota-se nesse trabalho por $r(A)$ o posto de A.

Exemplo 5.9. Encontre o posto da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Nesse caso pode-se encontrar as submatrizes:

Com submatrizes de ordem 1×1

$a_{11} = 1, a_{12} = 3, a_{13} = 5, a_{21} = 0, a_{22} = -1, a_{23} = 2, a_{31} = 0, a_{32} = 2, a_{33} = -4.$

Com submatrizes de ordem 2×2

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Teremos como determinantes: $A_1 = -1, A_2 = 11, A_3 = 0, A_4 = 0.$

Com a única submatriz de ordem 3×3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Teremos como determinante $A = 0$.

Conclui-se que a maior ordem de submatriz não singular é 2, portanto r=Posto(A)=2.

Definição 5.11. Dada uma matriz A de ordem $m \times n$, a *nulidade da matriz* é dada pela diferença entre o número de colunas e o seu posto. Denota-se $nul(A)$.

$$nul(A) = n - r$$

Exemplo 5.10. Encontre a nulidade da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Conforme resolução do Exemplo 5.9 temos que $r = Posto(A) = 2$ e a ordem da matriz A é igual a 3, ou seja, $n = 3$. Portanto

$$nul(A) = n - r = 3 - 2 = 1$$

Teorema 5.12. *Se A é uma matriz de ordem $m \times n$, o posto da matriz é determinado pelo número de linhas linearmente independentes da matriz, sendo as linhas não nulas obtidas ao reduzir uma matriz na sua forma escada são ditas linhas linearmente independentes.*

É possível concluir que se A é representação matricial de uma transformação linear então o posto de A é exatamente a dimensão da imagem da transformação linear e a nulidade a dimensão do núcleo dessa transformação.

Exemplo 5.11. Encontre o posto da matriz A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Efetuando as seguintes operações com matrizes será obtida a matriz escada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[2L_2+L_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para obter a terceira linha com todos os elementos nulos, foi realizada a seleção da segunda linha da matriz A, seus elementos foram multiplicados por dois e somados com os elementos da terceira linha obtendo:

$2.L_2 = 2.0 \quad 2.(-1) \quad 2.2$

$L_3 = 0 \quad 2 \quad -4$

$2.L_2 + L_3 = 2.0 + 0 \quad 2.(-1) + 2 \quad 2.2 + (-4)$

$2.L_2 + L_3 = 0 \quad 0 \quad 0$

Portanto teremos r(A)=2.

Exemplo 5.12. Encontre o posto da matriz B.

Efetuando as seguintes operações com matrizes será obtida a matriz escada:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -4 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_1+L_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -4 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_1+L_2-L_4]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para obter a matriz na forma escada será necessário que o primeiro elemento da segunda linha seja nulo, para isso foi selecionada a primeira linha da matriz B e somada com a segunda linha.

$L_1 + L_2 = 1 + (-1) \quad 2 + 3 \quad (-2) + 0 \quad 0 + (-1) \quad (-1) + 0$

$L_1 + L_2 = 0 \quad 3 \quad -2 \quad -1 \quad -1$

Para obter a matriz na forma escada será fundamental que o primeiro e o segundo elemento da segunda linha sejam nulos, nesse caso não foi preciso realizar nenhuma operação, pois já atende ao solicitado.

Para obter a matriz na forma escada será preciso que os três primeiros elementos da quarta linha sejam nulos, para isso foi selecionada a primeira linha, e somada com a segunda linha e subtraída a quarta linha.
$L_1 + L_2 - L_4 = 1 + 0 - 1 \quad 2 + 3 - 5 \quad (-2) + (-2) - (-4) \quad 0 + (-1) - (-1) \quad (-1) + (-1) - (-2)$
$L_1 + L_2 - L_4 = 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$

Assim,
$r(B) = 3$ e $nul(B) = r - n = 5 - 3 = 2$

Note que as linhas não nulas obtidas ao reduzir uma matriz na forma escada são linhas *linearmente independentes*.

Observamos que a cada passo de simplificação de uma matriz estamos multiplicando a mesma por uma matriz não singular. No caso de matrizes quadradas o processo de simplificação é análogo àquele de encontrar uma matriz semelhante.

Teorema 5.13. *Se A é uma matriz de ordem $m \times n$, o posto da matriz é determinado pelo número de linhas linearmente independentes da matriz.*

Exemplo 5.13. Considere as matrizes na forma escada a seguir:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como as linhas não nulas são linearmente independentes teremos que seus postos são $r(A) = 1, r(B) = 2$ e $r(C) = 3$, pois as mesmas já se encontram na forma de matriz escada.

Propriedade

Se A é uma matriz de ordem $m \times n$, então

$$r(A) \leq min\,\{m, n\}$$

Lema 5.14. *Seja G um grafo com n vértices e seja β a matriz de incidência de G com uma orientação dada. Logo o posto $r(\beta)$ de β é $n - \omega$, onde ω é o número de componentes conexas de G.*

Demonstração. Cada componente conexa de G possui uma matriz de incidência, respeitando uma orientação atribuída. Dessa forma, escrevemos β como:

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta^{(1)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta^{(2)} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \beta^{(\omega-1)} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \beta^{(\omega)} \end{pmatrix}$$

Onde $\beta^{(i)}$ corresponde à componente conexa $G^{(i)}$, sendo $1 \leq i \leq \omega$.
Teremos $r(\beta^{(i)}) \leq n_i - 1$ pois a soma dos elementos de cada coluna de $\beta^{(i)}$ é igual a zero, ou seja, o posto dessa matriz será no máximo $n_i - 1$ e sendo n_i o número de vértices de $G^{(i)}$.
Como o posto de uma matriz e o posto de sua matriz transposta são iguais temos que $r(\beta^{(i)}) = r({\beta^{(i)}}^T)$, mostraremos que $r({\beta^{(i)}}^T) = n_i - 1$.
Seja $x \in N({\beta^{(i)}}^T)$, sendo N o núcleo de ${\beta^{(i)}}^T$. Considere duas coordenadas x_l e x_k quaisquer e relacionadas aos vértices v_l e v_k de $G^{(i)}$.
Como $G^{(i)}$ é conexo, existe um caminho formado por q arestas ligando os dois vértices relacionados a x_l e x_k. Para cada uma dessas q arestas, encontramos uma coluna c_s sendo que $1 \leq s \leq q$. Como $\beta^{(i)}$ possui uma entrada igual a 1, outra entrada igual a -1 e as entradas restantes iguais a zero, dessa maneira $x^T\beta^{(i)} = 0$ e $x^Tc_s = 0$.
Visto que esse resultado é válido para qualquer aresta, também valerá para $x_l = x_k$ e assim x será o produto entre 1 e qualquer escalar. Logo, 1 criará o subespaço $N({\beta^{(i)}}^T)$ com dimensão 1.
Pode-se concluir que $1 = [\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}]^T$, n_i vezes, é a base do subespaço $N({\beta^{(i)}}^T)$.
Note que como $1^T.\beta^{(i)} = 0$, em que zero é a matriz nula, conclui-se que 1 pertence ao subespaço.
Portanto, $r({\beta^{(i)}}^T) = n_i - 1$, conclui-se $r(\beta^{(i)}) = n_i - 1$ e logo $r(\beta) = n - \omega$.

□

Proposição 5.15. *O posto $r(L)$ da matriz Laplaciana L de um grafo G com n vértices, onde ω é o número de componentes conexas de G é dado por:*

$$r(L) = n - \omega$$

Demonstração. Com base no lema 5.14 o posto da matriz laplaciana é igual ao posto da matriz de incidência β respeitando uma orientação considerada sobre G, uma vez que $L = \beta\beta^T$ conforme demostração da proposição 5.7. □

Exemplo 5.14. Para o grafo da figura 8 temos $\varsigma(G) = (\sqrt{3}+3, 4, \sqrt{2}+2, 3-\sqrt{3}, 2-\sqrt{2}, 0)$. Observe que a multiplicidade do autovalor 0 corresponde a quantidade de componentes conexas do grafo G com base no lema 5.14 e proposição 5.15.

6

TEOREMA DA MATRIZ-ÁRVORE

O *Teorema da Matriz-Árvore ou Teorema de Kirchhoff* determina o número de árvores geradoras de um grafo, problema consagrado da Teoria de Grafos que foi provado por Kirchhoff. Observe que o Teorema da Matriz-Árvore é reconhecido como um dos primeiros resultados da Teoria Espectral de Grafos. Neste capítulo será apresentada a demonstração desse teorema, em que foram utilizados conceitos básicos de Álgebra Linear, matrizes e grafos. Foram utilizados como referências [9], [8] e [11].

Definição 6.1. Uma *árvore geradora* de um grafo G é um subgrafo que possui os mesmos vértices de G e é uma árvore.

Exemplo 6.1. Observe o grafo G e suas árvores geradoras na figura 12.

Lema 6.2. *A matriz adjunta de L, denominada $adj(L)$, é um múltiplo de J. Considerando J a matriz quadrada de ordem n cujas entradas são todas iguais a 1.*

Demonstração. Baseado na proposição 5.15 e considerando G conexo tem-se que $r(L) = n-1$ e fundamentado no lema 5.14 sabe-se que o núcleo de L tem dimensão 1 e é gerado por $1 = [\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}]^T$, n vezes.
Note que por outro prisma teremos que $L.adj(L) = det(L).I = 0.I = 0$, onde I é a matriz identidade. Somando todas as linhas de L, obtêm-se uma linha nula. Note que a soma das linhas de uma matriz não altera seu determinante e portanto temos o $det(L) = 0$, onde 0 é a matriz nula de ordem n. Conclui-se que as colunas da $adj(L)$ pertencem ao núcleo de L e são múltiplas de 1^T. Dessa forma como a matriz L é simétrica,

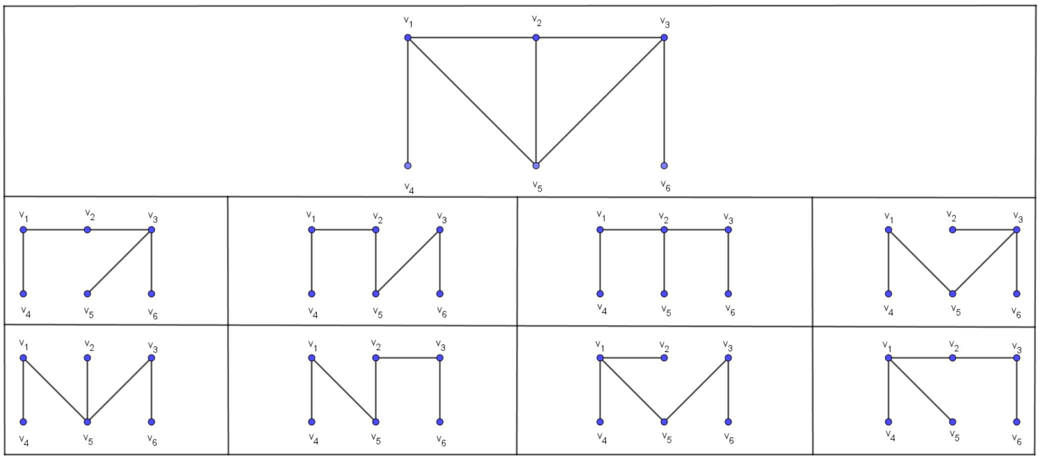

Figura 12: Grafo G e suas árvores geradoras

consequentemente, a matriz $adj(L)$ também é simétrica. Logo constatamos que todas as entradas da $adj(L)$ são iguais, então $adj(L)$ é um múltiplo de J. □

Lema 6.3. *Qualquer submatriz quadrada de β tem determinantes 0, 1 ou -1.*

Demonstração. Seja β' uma submatriz de β, sendo que β' possui somente duas entradas não nulas em cada coluna, então essas entradas serão 1 e -1, por isso conclui-se que cada coluna tem soma igual a zero. Consequentemente β' é singular e $det(\beta') = 0$. Agora supondo que no mínimo uma coluna de β' tenha precisamente uma entrada não nula. Nesse contexto se separarmos o determinante de β' em termos dessa coluna obtemos $det(\beta') = \pm det(\beta'')$, em que β'' é a matriz com uma linha e uma coluna a menos que β'. Prosseguindo nesse processo chegaremos a última submatriz de ordem 1, assim se a entrada dessa submatriz for igual a zero obtemos $det(\beta') = 0$. Caso contrário essa entrada será igual a 1 ou -1 obtendo $det(\beta') = 1$ ou -1. □

Lema 6.4. *Considere qualquer submatriz de β obtida tomando-se $n-1$ de suas colunas. Esta matriz de ordem $n \times (n-1)$ corresponde a um subgrafo H de G contendo todos os seus vértices. Assim, removida qualquer linha da submatriz, a matriz resultante β' é quadrada de ordem $n-1$ e tem $|det(\beta')| = 1$ ou 0, de acordo com o subgrafo H ser ou não uma árvore (se for árvore, H será uma árvore geradora de G).*

Demonstração. Sem perda de generalidade, será removida a n-ésima linha da submatriz β originando a submatriz β' de ordem $n-1$.Aplicando o lema 6.3 temos que $|det(\beta')| = 1$ ou 0.

Supondo que H não é árvore geradora de G e composto por n vértices e $n-1$ arestas teremos que H é desconexo. Portanto existe uma componente que não possui o vértice v_n, à vista disso a soma das colunas de β' correspondentes a essa componente decorrem em uma coluna nula, as linhas de β' são linearmente independentes, dessa forma $det(\beta') = 0$.

Supondo agora que H é árvore geradora de G e renomeando os vértices e arestas, chamaremos de $u_1 \neq v_n$ um vértice de grau 1 de H e de y_1 a aresta que incide em u_1, pois uma árvore tem no mínimo dois vértices de grau 1.

Seja $\beta' = \beta - \{u_1, y_1\}$ a árvore H sem o vértice u_1 e sem a aresta y_1. Selecionando um vértice de β', com exceção de v_n, que seja de grau 1 e chamando esse vértice de u_2 e sendo y_2 a aresta exclusiva incidente em u_2. Repetindo continuamente esse processo, sempre excluindo o vértice renomeado e sua aresta incidente, pode-se notar que cada aresta y_i incide no vértice v_i e vértice v_j com $j > i$. Observe ainda que a renomeação dos vértices de H fornece uma matriz β'', vista como resultado da permutação das linhas de β'. Dessa forma $|det(\beta'')| = |det(\beta')|$. Como β'' é uma matriz triangular inferior que possui como entradas na diagonal principal 1 ou -1 teremos que $|det(\beta'')| = 1$ e $|det(\beta')| = 1$. Consequentemente teremos $|det(\beta')| = 1$ somente se H é uma árvore geradora de G; em caso contrário teremos $|det(\beta')| = 0$. □

Teorema 6.5. *O Teorema da matriz-árvore garante que o número de árvores geradoras de G é igual a qualquer cofator de L, ou seja*

$$adj(L) = \tau(G).J$$

onde $\tau(G)$ indica o número de árvores geradoras.

Demonstração. Considere que G possui n vértices e e arestas; fundamentado no lema 6.2, temos que $adj(L)$ é um múltiplo de J. Assim basta provar que o número de árvores geradoras de G é igual ao valor de qualquer cofator de L.

Seja β_0 a matriz resultante da retirada da última linha da matriz β. Note que removendo a última linha e a última coluna de L é obtida uma submatriz igual a $\beta_0\beta_0^T$, sendo assim o cofator do elemento l_{nn} de L é o $det(\beta_0\beta_0^T)$. Pela *Fórmula de Binet-Cauchy* teremos:

$$det(\beta_0\beta_0^T) = \sum_U det(\beta_U)det(\beta_U^t)$$

onde a somatória é considerada sobre todos os subconjuntos U de $\{1, 2, \cdots, n\}$ com $n-1$ elementos. Logo β_U expressa a submatriz quadrada de β_0 cujas colunas correspondem

precisamente aos elementos de U. Baseados nos lemas 6.3 e 6.4 teremos $det(\beta_U) \neq 0$, se e somente se, o subgrafo cujas arestas estão em U e possui todos os vértices de G é uma árvore geradora de G, assim $det(\beta_U) = 1$ ou -1.
Note que como $det(\beta_U) = det(\beta_U^t)$ e que $det(\beta_0 \beta_0^t) = \tau(G)$. Portanto $adj(L) = \tau(G).J$.

□

Exemplo 6.2. Observe o grafo a seguir e seu determine o número de árvores geradoras.

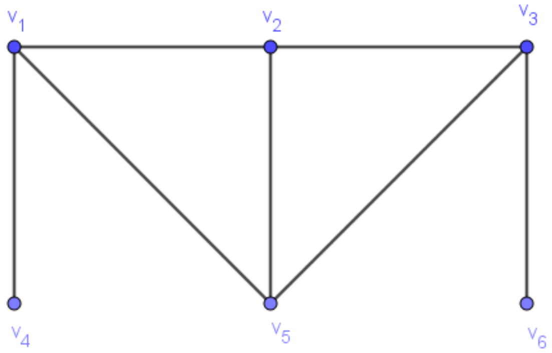

Figura 13: Grafo G

Baseado no Teorema da Matriz-Árvore teremos que $adj(L) = \tau(G).J$ e no resultado obtido no exemplo 5.4 teremos

$$L = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Fundamentado na definição 2.11 em que $Adj(L) = (Cof(L))^t$ e aplicando as definições 2.7 e 2.9 podemos obter

$$Cof(L) = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Adj(L) = Cof(L)^t = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

Como $adj(L) = \tau(G).J$ temos

$$\begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \end{pmatrix} = \tau(G). \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Utilizando a definição 2.4 encontraremos que

$$\tau(G) = 8$$

Dessa forma conclui-se que o número de árvores geradoras do $grafoG$ é 8. Note que esse resultado corrobora com a resposta obtida no exemplo 6.1.

7

CONCLUSÃO

Nesta dissertação, foi desenvolvido o conceito de espaço vetorial onde foram estudados seus axiomas, além da ideia de subespaço e suas propriedades. Foram abordados também temas como base, combinação linear e dependência linear.
O desenvolvimento de matrizes; sua definição, seus tipos, operações, propriedades, cofatores e determinantes; fundamentam o estudo desse trabalho já que se mostram presentes na explicação da demonstração do Teorema da Matriz Árvore de Kirchhoff.
Dentro do tópico de transformações lineares foram discutidos conceitos como autovalor e autovetor; este tópico, diante dos conteúdo abordados na grade curricular da rede estadual de ensino, não se mostrou presente ao meu contexto profissional o que tornou necessário um maior empenho e dedicação para apropriação desses conhecimentos.
Seguindo a sequência de assuntos também foram abordados polinômio característico e diagonalização de matrizes, seus teoremas e definições. Reconheço que torna-se importante minha dedicação em relação as demonstrações, pois foi um ponto de atenção e dificuldade no desdobramento deste trabalho.
Os grafos mostraram-se como um assunto interessante, que não foi abordado durante a minha graduação, e surgiu durante as aulas de Recursos Computacionais no Ensino da Matemática. Baseado no estudo desse conteúdo compreendi a importância e as possíveis aplicações em tarefas e rotinas do cotidiano, sua composição, características, representações entre outros conhecimentos.
Como a matriz laplaciana é parte constituinte da demostração do teorema foco dessa dissertação, foi dedicado um capítulo a esse conteúdo relacionando a matriz laplaciana, matriz diagonal e matriz de adjacência. Ainda foi estudado o teorema do posto que aborda as componentes conexas de um grafo.
No Capítulo 6, foi apresentada a demonstração do Teorema da Matriz Árvore de Kirchhoff, embasada nos conhecimentos adquiridos em capítulos anteriores nos resultados

da Álgebra Linear. O teorema em questão afirma que o número de árvores geradoras de grafos e multigrafos não orientados é igual ao valor de qualquer cofator da matriz adjunta da matriz laplaciana do grafo ou multigrafo.

Acredito que torna-se interessante a continuidade desse trabalho, por meio do aprofundamento nos conceitos de grafos buscando desenvolver o estudo de conectividade algébrica e sua aplicação na vulnerabilidade de redes, além do estudo das aplicações do espectro de um grafo.

BIBLIOGRAFIA

[1] Tom M Apostol, *Cálculo: Cálculo com funções de uma variável, com uma introdução á Álgebra linear*, Reverté, 1988.

[2] ______, *Cálculo: Cálculo com funções de várias variáveis e Álgebra linear, com aplicações ás equações diferenciais e ás probabilidades*, Reverté, 1993.

[3] Sonia Elena Palomino Castro Bean e Daniel Norberto Kozakevich, *Álgebra Linear I*, Universidade Federal de Santa Catarina (2011).

[4] José Luiz Boldrini, Sueli IR Costa, VL Figueredo e Henry G Wetzler, *Álgebra linear*, 1986.

[5] Iezzi Gelson, *Fundamentos da Matemática Elementar: Volume IV. 7^a edição*, São Paulo: Atual (1993).

[6] José Vitor Oliveira de Jesus, *Introdução à teoria espectral de grafos*, Tese de Doutoramento, 2018.

[7] Elon Lages Lima, *Álgebra linear, 2a. ediçao*, IMPA, Rio de Janeiro (1996).

[8] Gregorio Malajovich, *Álgebra linear*, (2021).

[9] Cybele Tavares Maia Vinagre Nair Maria Maia de Abreu, Renata Raposo Del-Vecchio, *Introdução á Teoria Espectral de Grafos com Aplicações*, (2012).

[10] Jerônimo C Pellegrini, *Álgebra Linear*, (2019).

[11] Maurício Policarpo et al., *Grafos e multigrafos: o teorema da matriz-árvore*, (2017).

[12] José Plínio O SANTOS, Margarida P MELLO e Idani TC MURARI, *Introdução à Análise Combinatória. Rio de Janeiro, Ed*, Ciencia Moderna (2007).