





KAIO FELIPE DE QUEIROZ PADILHA

**CIRCUNFERÊNCIAS DE TUCKER**

Santo André, 2022







**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC**

**CENTRO DE MATEMÁTICA, COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO**

**KAIO FELIPE DE QUEIROZ PADILHA**

**CIRCUNFERÊNCIAS DE TUCKER**

**Orientador: Prof. Dr. Márcio Fabiano da Silva**

Dissertação de mestrado apresentada ao Centro de  
Matemática, Computação e Cognição para  
obtenção do título de Mestre em Matemática

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO  
DEFENDIDA PELO ALUNO KAIO FELIPE DE QUEIROZ PADILHA,  
E ORIENTADA PELO PROF. DR. MÁRCIO FABIANO DA SILVA.

**SANTO ANDRÉ, 2022**

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC  
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

de Queiroz Padilha, Kaio Felipe  
Circunferências de Tucker / Kaio Felipe de Queiroz  
Padilha. — 2022.


105 fls. : il.

Orientador: Marcio Fabiano da Silva

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC,  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional -  
PROFMAT, Santo André, 2022.

1. Circunferência. 2. Tucker. 3. Lemoine. 4. Hexágono. I.  
da Silva, Marcio Fabiano. II. Mestrado Profissional em  
Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2022. III. Título.

**Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca examinadora no dia da defesa, sob responsabilidade única do(a) autor(a) e com a anuência do(a) (co)orientador(a).**

Santo André , 21 de Julho de 2022 .



Documento assinado digitalmente  
KAIO FELIPE DE QUEIROZ PADILHA  
Data: 05/08/2022 00:57:36-0300  
Verifique em <https://verificador.iti.br>

\_\_\_\_\_  
**Nome completo e Assinatura do(a) autor(a)**



Documento assinado digitalmente  
MARCIO FABIANO DA SILVA  
Data: 02/08/2022 17:27:32-0300  
Verifique em <https://verificador.iti.br>

\_\_\_\_\_  
**Nome completo e Assinatura do(a) (co)orientador(a)**



**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO**

**Fundação Universidade Federal do ABC**

Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP  
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017

**FOLHA DE ASSINATURAS**

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato, KAIO FELIPE DE QUEIROZ PADILHA realizada em 03 de Junho de 2022:

Documento assinado digitalmente  
**gov.br** ARMANDO TRALDI JUNIOR  
Data: 08/06/2022 18:32:30-0300  
Verifique em <https://verificador.itl.br>

---

**Prof.(a) ARMANDO TRALDI JUNIOR**  
INSTITUTO FEDERAL DE SÃO PAULO

Documento assinado digitalmente  
**gov.br** EDUARDO GUERON  
Data: 09/06/2022 15:21:30-0300  
Verifique em <https://verificador.itl.br>

---

**Prof.(a) EDUARDO GUERON**  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

---

**Prof.(a) DANIEL MIRANDA MACHADO**  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

---

**Prof.(a) DAVID PIRES DIAS**

Documento assinado digitalmente  
**gov.br** MARCIO FABIANO DA SILVA  
Data: 08/06/2022 00:38:54-0300  
Verifique em <https://verificador.itl.br>

---

**Prof.(a) MARCIO FABIANO DA SILVA**  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC - Presidente

\* Por ausência do membro titular, foi substituído pelo membro suplente descrito acima: nome completo, instituição e assinatura



Universidade Federal do ABC



"O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001"



---

Dedico este trabalho a todas as pessoas importantes que me ajudaram a se tornar a pessoa que sou hoje.



---

## AGRADECIMENTOS

---

Agradeço a minha família, principalmente minha mãe Edineia por me incentivar e apoiar durante esse caminho longo.

Agradeço minha mulher Alyne pelo incentivo e apoio durante esse tempo.

Agradeço meus amigos, por compartilharem seus conhecimentos e incentivo durante o curso.

Agradeço aos professores da UFABC pelos ensinamentos e conhecimentos passados em suas aulas.

Agradeço ao meu orientador Dr. Márcio Fabiano da Silva por ter me ensinado, ajudado e incentivado durante a elaboração dessa dissertação.



---

*"A grandeza da vida não consiste em não cair nunca,  
mas em nos levantarmos cada vez que caímos."*

*(Nelson Mandela, O longo caminho para a liberdade)*





---

## RESUMO

---

Neste trabalho estudamos as Circunferências de Tucker, apresentando algumas de suas propriedades, bem como alguns casos especiais, como a Circunferência do Cosseno e a Primeira Circunferência de Lemoine.

**Palavras-chave:** Circunferência de Tucker, Hexágono de Tucker, Lemoine.



---

## ABSTRACT

---

In this work we study Tucker circles. We present some of their properties and some special cases, such as the Cosine circle and the First Lemoine circle.

**Keywords:** Tucker circle, Tucker hexagon, Lemoine.



---

## LISTA DE FIGURAS

---

Figura 1	Retas antiparalelas . . . . .	4
Figura 2	$A - C - E$ . . . . .	4
Figura 3	$\overline{OA} \perp \overline{DE}$ . . . . .	5
Figura 4	Condição para que $DEHI$ seja um trapézio. . . . .	6
Figura 5	Nesta representação, $a' < 0, b', c' > 0$ . . . . .	8
Figura 6	Área com sinal . . . . .	8
Figura 7	Coordenadas trilineares exatas do ponto $T$ . . . . .	10
Figura 8	Retas simedianas do triângulo $\triangle ABC$ . . . . .	13
Figura 9	$\triangle ABC$ e $\triangle ADE$ são triângulos semelhantes. . . . .	15
Figura 10	Simediana bissectando a antiparalela. . . . .	15
Figura 11	Simedianas, medianas e bissetrizes do triângulo $\triangle ABC$ . . . . .	16
Figura 12	(a) Caso em que $A - D - E - B$ ; (b) Caso em que $A - B - D - E$ . . . . .	19
Figura 13	Caso em que $E = B$ . . . . .	20
Figura 14	Recíproca da Proposição 1.14. . . . .	21
Figura 15	Ângulos de Brocard do triângulo $\triangle ABC$ . . . . .	23
Figura 16	Determinação do primeiro ponto de Brocard $P$ do triângulo $\triangle ABC$ . . . . .	24
Figura 17	Construção auxiliar para a prova da Proposição 1.22. . . . .	25
Figura 18	Prova de que $B, P$ e $E$ são colineares. . . . .	26
Figura 19	$\angle BAC$ é agudo com $H_1 - B - C - D$ . . . . .	27
Figura 20	$\angle BAC$ é agudo com $B = H_1 - C - D$ . . . . .	27
Figura 21	Caso em que $\angle BAC$ é obtuso. . . . .	28
Figura 22	Caso em que $\angle BAC$ é reto. . . . .	29
Figura 23	Distâncias do primeiro ponto de Brocard aos lados do $\triangle ABC$ . . . . .	32
Figura 24	Distâncias do segundo ponto de Brocard aos lados do $\triangle ABC$ . . . . .	35
Figura 25	Distâncias do ponto médio de Brocard $T$ aos lados do $\triangle ABC$ . . . . .	36
Figura 26	Centros de Kimberling de um triângulo $\triangle ABC$ . . . . .	39
Figura 27	$X_6$ - Ponto Simediano do triângulo $\triangle ABC$ . . . . .	40
Figura 28	(a) $O$ e $A$ do mesmo lado de $\overleftrightarrow{BC}$ ; (b) $O$ e $A$ em lados opostos de $\overleftrightarrow{BC}$ . . . . .	42

Figura 29	(a) $O$ é o ponto médio de $\overline{BC}$ . . . . .	44
Figura 30	Trapézio degenerado $KGIO$ . . . . .	45
Figura 31	Ponto médio $Z$ do diâmetro de Brocard, com $A$ e $O$ do mesmo lado de $\overleftrightarrow{BC}$ . . . . .	48
Figura 32	Ponto médio $Z$ do diâmetro de Brocard, com $A$ e $O$ em lados opostos de $\overleftrightarrow{BC}$ , assim como $A$ e $Z$ . . . . .	48
Figura 33	Ponto médio $Z$ do diâmetro de Brocard, com $A$ e $O$ em lados opostos de $\overleftrightarrow{BC}$ , mas $A$ e $Z$ do mesmo lado. . . . .	49
Figura 34	Hexágono de Tucker, com $p$ antiparalela a $\overline{BC}$ . . . . .	52
Figura 35	Hexágono de Tucker, com $p$ paralela a $\overline{BC}$ . . . . .	54
Figura 36	Circunferência de Tucker. . . . .	55
Figura 37	(a) e (c) Circunferência de Tucker com $Y \in \overline{KO}$ ; (b) Circunferência de Tucker com $Y \notin \overline{KO}$ . . . . .	56
Figura 38	Circunferência de Tucker. . . . .	58
Figura 39	Circunferência de Tucker. . . . .	59
Figura 40	Circunferência do Cosseno do triângulo $\triangle ABC$ . . . . .	61
Figura 41	Propriedade da Circunferência do Cosseno. . . . .	63
Figura 42	Prova de que $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overline{AB}$ . . . . .	64
Figura 43	Prova de que $\overleftrightarrow{FG}$ é antiparalela a $\overline{AC}$ . . . . .	65
Figura 44	Prova de que $\overleftrightarrow{DE}$ é antiparalela a $\overline{BC}$ . . . . .	66
Figura 45	Primeira circunferência de Lemoine do triângulo $\triangle ABC$ . . . . .	67
Figura 46	Propriedade da Primeira Circunferência de Lemoine. . . . .	68
Figura 47	Propriedade da Primeira Circunferência de Lemoine. . . . .	70
Figura 48	Prova de que $\overleftrightarrow{DI} \parallel \overline{AC}$ . . . . .	71
Figura 49	Construção do triângulo $\triangle ABC$ . . . . .	73
Figura 50	Construção da reta antiparalela $r_1$ ao lado $\overline{BC}$ . . . . .	74
Figura 51	Construção da reta paralela $r_2$ ao lado $\overline{AB}$ . . . . .	75
Figura 52	Construção da reta antiparalela $r_3$ ao lado $\overline{AC}$ . . . . .	76
Figura 53	Construção da reta paralela $r_4$ ao lado $\overline{BC}$ . . . . .	77
Figura 54	Construção da reta antiparalela $r_5$ ao lado $\overline{AB}$ . . . . .	78
Figura 55	Construção da reta paralela $r_6$ ao lado $\overline{AC}$ . . . . .	79
Figura 56	Circunferência de Tucker do triângulo $\triangle ABC$ . . . . .	80

---

## LISTA DE TABELAS

---

Tabela 1	Algumas Circunferências de Tucker especiais. . . . .	61
----------	--	----





---

# CONTEÚDO

---

Lista de Figuras	xvii
Lista de Tabelas	xix
Introdução	1
1 RESULTADOS PRELIMINARES	3
1.1 Geometria dos triângulos e trapézios . . . . .	3
1.1.1 Retas antiparalelas . . . . .	3
1.1.2 Trapézios isósceles . . . . .	6
1.1.3 Coordenadas trilineares . . . . .	7
1.1.4 Simedianas . . . . .	12
1.1.5 Ângulos de Brocard . . . . .	22
1.1.6 Notação de Conway . . . . .	38
1.1.7 Centros de Kimberling . . . . .	38
2 CIRCUNFERÊNCIAS DE TUCKER	51
2.1 Hexágono de Tucker . . . . .	51
2.2 Casos especiais de circunferências de Tucker . . . . .	61
2.2.1 Circunferência do Cosseno ou Segunda Circunferência de Lemoine	61
2.2.2 Primeira Circunferência de Lemoine . . . . .	66
3 ATIVIDADE	73
3.1 Construindo uma Circunferência de Tucker com o Geogebra . . . . .	73
Bibliografia	83



---

# INTRODUÇÃO

---

Graças à beleza e riqueza de suas propriedades intrínsecas, a circunferência é um dos objetos mais investigados na história da Matemática. No entanto, ela também desempenha um papel fundamental no estudo de propriedades geométricas de outros objetos, como triângulos, quadriláteros e, em geral, os polígonos.

Na educação básica, sua abordagem é superficial e sem muitas conexões com outros temas. Basicamente, as circunferências especiais lá trabalhadas são as circunferências inscrita e circunscrita a um dado triângulo.

Neste trabalho, estudamos uma classe especial de circunferências, que são obtidas a partir de retas antiparalelas e paralelas aos lados de um dado triângulo. Elas são conhecidas como Circunferências de Tucker. Dentre as Circunferências de Tucker, exploraremos dois casos especiais, que são as duas primeiras circunferências de Lemoine.

A dissertação está assim organizada. No Capítulo 1, apresentamos alguns resultados básicos de geometria plana, que serão utilizados nos próximos capítulos. Destacamos as seções sobre Simedianas de um triângulo e Pontos de Brocard de um triângulo.

No Capítulo 2, discutimos a construção de um Hexágono de Tucker de um dado triângulo e, a partir disto, provamos a existência das Circunferências de Tucker do triângulo. Além disso, exibimos uma parametrização para as Circunferências de Tucker. Ainda, estudamos, em detalhes, as duas primeiras circunferências de Lemoine. Para caracterizá-las como casos especiais de Circunferências de Tucker, provamos algumas relações geométricas que raramente são citadas na literatura. Destacamos, neste sentido, as Observações [2.14](#), [2.15](#), [2.16](#), [2.22](#) e [2.23](#), com as quais é possível enfraquecer as hipóteses geralmente estabelecidas na apresentação dessas circunferências, como em [\[2\]](#).

No Capítulo 3, sugerimos uma atividade relacionada às Circunferências de Tucker, com o intuito de possibilitar ao professor de Matemática uma abertura para discutir tópicos importantes de geometria, que exigem somente conhecimentos básicos da geometria plana.



---

## RESULTADOS PRELIMINARES

---

Neste capítulo, apresentamos algumas definições e resultados básicos da geometria plana que nos serão úteis posteriormente na construção do Hexágono de Tucker e da Circunferência de Tucker.

### 1.1 GEOMETRIA DOS TRIÂNGULOS E TRAPÉZIOS

A seguir, estudamos algumas propriedades geométricas dos triângulos e dos trapézios, geralmente omitidas na Matemática escolar.

#### 1.1.1 Retas antiparalelas

Começamos definindo as antiparalelas em relação a outras retas. Isso será importante na construção do hexágono de Tucker, no próximo capítulo.

**Definição 1.1.** (Retas Antiparalelas) Dadas duas retas  $r$  e  $s$  tais que  $r \cap s = \{A\}$ , seja  $t$  uma transversal a  $r$  e  $s$ , com  $A \notin t$ ,  $\{B\} = r \cap t$ ,  $\{C\} = s \cap t$ . Dizemos que uma reta  $u = \overleftrightarrow{DE}$  transversal a  $r$  e  $s$ , com  $A - D - B$  e  $A - E - C$ , é antiparalela à reta  $t$  com relação às retas  $r$  e  $s$  se  $\angle ADE \cong \angle BCA$ .

Neste caso, temos que  $\angle AED \cong \angle CBA$ . Na figura ??, ilustramos as antiparalelas  $u$  e  $t$  em relação às retas  $r$  e  $s$ .

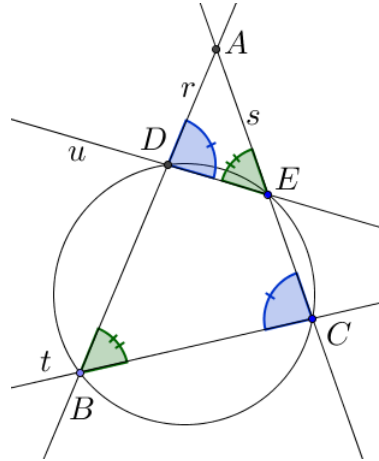


Figura 1: Retas antiparalelas

Nas condições da Definição 1.1, temos que os pontos  $B, C, D$  e  $E$  são concíclicos, ou seja, o quadrilátero  $\square BDEC$  é inscritível. Isso é uma consequência do fato que os ângulos opostos  $\angle BDE$  e  $\angle BCA$  são suplementares.

Assim, dadas as retas  $r, s$  e  $t$  como na Definição 1.1, mostramos a seguir como obter uma reta  $u$  de modo que  $u$  e  $t$  sejam antiparalelas com relação às retas  $r$  e  $s$ . Para isto, basta traçar uma circunferência  $\mathcal{C}$  que passe pelos pontos  $B$  e  $C$  e intercepte as retas  $r$  e  $s$  em pontos  $D$  e  $E$ , respectivamente, com  $D$  entre  $A$  e  $B$ , e  $E$  entre  $A$  e  $C$ , como está ilustrado na Figura 1. Deste modo, por construção,  $u = \overleftrightarrow{DE}$  é antiparalela à reta  $t$ , em relação às retas  $r$  e  $s$ .

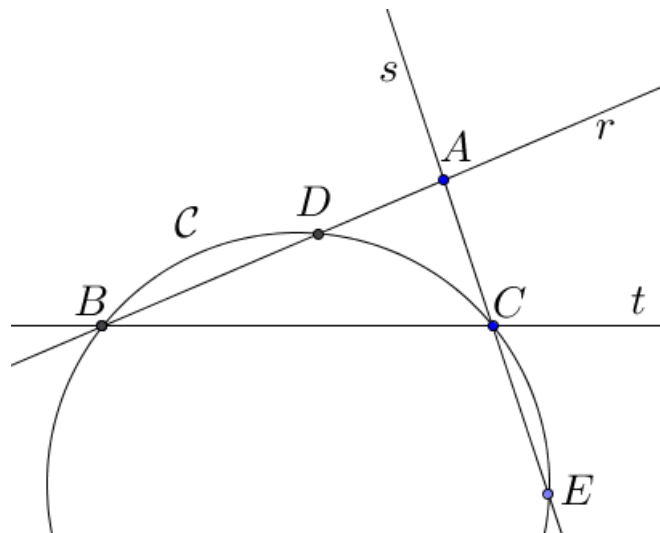


Figura 2:  $A - C - E$ .

**Observação 1.2.** Observamos que a construção anterior não pode ser enfraquecida fixando o ponto  $D$  e deixando de exigir que a circunferência  $\mathcal{C}$  intercepte a reta  $s$  num ponto  $E$ , com  $E$  entre  $A$  e  $C$ . De fato, é possível não existir tal ponto  $E$ , como está ilustrado na Figura 2.

A seguir, apresentamos um resultado que será útil na prova da Proposição 2.10. Nele, mostramos que o raio da circunferência circunscrita a um triângulo  $\triangle ABC$  passando por um vértice do triângulo é perpendicular às antiparalelas ao lado oposto ao vértice.

**Lema 1.3.** Dado um triângulo  $\triangle ABC$  qualquer, sejam  $\overleftrightarrow{DE}$  uma antiparalela ao lado  $\overline{BC}$ , com  $A - D - B$  e  $A - E - C$ ,  $O$  o circuncentro do triângulo  $\triangle ABC$ ,  $M$  o ponto médio do lado  $\overline{AB}$  e  $\{J\} = \overleftrightarrow{OA} \cap \overleftrightarrow{DE}$ . Então  $\overline{OJ} \perp \overline{DE}$ .

*Demonstração.* Em relação à antiparalela  $\overleftrightarrow{DE}$  ao lado  $\overline{BC}$ , pode ocorrer de  $A$  e  $O$  estarem do mesmo lado ou em lados opostos. Do mesmo modo, pode ocorrer de  $J \in \overline{DE}$  ou de  $J \notin \overline{DE}$ , embora continuem colineares, pela construção de  $J$ . Na Figura 3 (a),  $A$  e  $O$  estão em lados em relação à reta  $\overleftrightarrow{DE}$  e  $J \in \overline{DE}$ . Na Figura 3 (b),  $A$  e  $O$  estão no mesmo lado em relação à reta  $\overleftrightarrow{DE}$  e  $J \in \overline{DE}$ . Na Figura 3 (c),  $A$  e  $O$  estão em lados em relação à reta  $\overleftrightarrow{DE}$  e  $J \notin \overline{DE}$ . Finalmente, na Figura 3 (d),  $A$  e  $O$  estão no mesmo lado em relação à reta  $\overleftrightarrow{DE}$  e  $J \notin \overline{DE}$ .

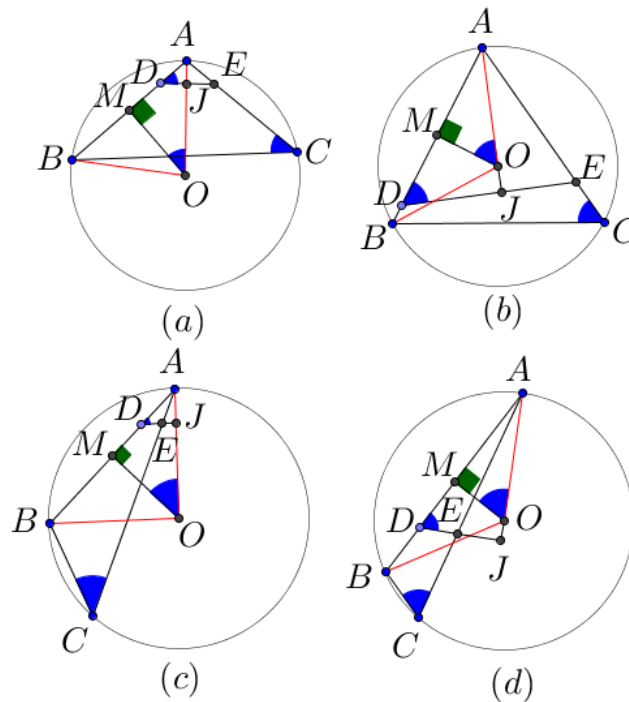


Figura 3:  $\overline{OA} \perp \overline{DE}$ .

A prova que agora damos engloba todos estes casos. Sendo o triângulo  $\triangle AOB$  isósceles com  $OA = OB$  e  $M$  o ponto médio de  $\overline{AB}$ , então  $\angle AOM \cong \angle BOM$ . Mas, a medida do ângulo central  $\angle AOB$  é igual a  $\text{med}(\angle AOB) = 2 \text{med}(\angle ACB)$ . Logo,  $\text{med}(\angle AOM) = \text{med}(\angle ACB)$ . Por sua vez,  $\angle ACB \cong \angle ADE$ , pois  $\overleftrightarrow{DE}$  é antiparalela ao lado  $\overline{BC}$ . Logo,  $\angle ADE \cong \angle AOM$ . Deste modo,  $\triangle ADJ \sim \triangle AOM$ , pelo caso ângulo-ângulo de semelhanças de triângulos. Consequentemente,  $\angle AJD \cong \angle AMO$ , que é um ângulo reto, pois  $\overline{MO}$  está contido na mediatriz do segmento  $\overline{AB}$ . Portanto,  $\overline{OJ} \perp \overline{DE}$ .

□

### 1.1.2 Trapézios isósceles

Nesta subseção, provamos um resultado básico de geometria plana que fornece uma condição necessária e suficiente para um quadrilátero ser um trapézio isósceles.

**Teorema 1.4.** *Um quadrilátero convexo  $DEHI$  é um trapézio que possui os lados  $\overline{DI}$  e  $\overline{HE}$  paralelos se, e somente se:*

$$\frac{DE}{HI} = \frac{\text{sen}(\angle EHI)}{\text{sen}(\angle HED)} \quad (1.1)$$

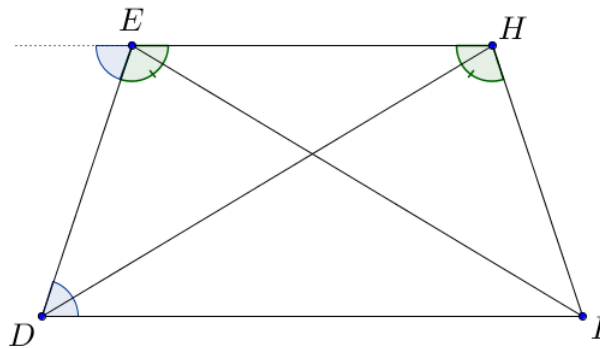


Figura 4: Condição para que  $DEHI$  seja um trapézio.

*Demonstração.* O quadrilátero  $DEHI$  será um trapézio com  $\overline{DI}$  e  $\overline{EH}$  paralelos se, e somente se, os triângulos  $\triangle DHE$  e  $\triangle IHE$  possuírem a mesma altura em relação ao lado  $\overline{HE}$ . Neste caso,  $S_{DHE} = S_{IHE}$ , onde  $S_{DHE}$  e  $S_{IHE}$  denotam a área dos triângulos  $\triangle DHE$  e  $\triangle IHE$ , respectivamente. Isto é,

$$\frac{1}{2} HE DE \text{sen}(\angle HED) = \frac{1}{2} HE HI \text{sen}(\angle EHI),$$



donde temos

$$\frac{DE}{HI} = \frac{\text{sen}(\angle EHI)}{\text{sen}(\angle HED)}$$

□

**Corolário 1.5.** *Seja  $DEHI$  um quadrilátero convexo com  $\angle EHI \cong \angle HED$ . Se  $DE = HI$  então  $DEHI$  é um trapézio (isósceles) de bases paralelas  $\overline{DI}$  e  $\overline{HE}$ .*

*Demonstração.* Basta observarmos que (1.1) é válida, pois

$$\frac{DE}{HI} = 1 = \frac{\text{sen}(\angle EHI)}{\text{sen}(\angle HED)}$$

Segue do Teorema 1.4 que  $DEHI$  é um trapézio (isósceles) de bases paralelas  $\overline{DI}$  e  $\overline{HE}$ .

□

### 1.1.3 Coordenadas trilineares

Uma potencial ferramenta de estudo da geometria dos triângulos são as coordenadas trilineares, definidas nesta seção em função das distâncias com sinal de um ponto às retas suportes dos lados de um dado triângulo. Sem perda de generalidade, suponha que  $r$  seja a reta suporte do lado  $\overline{BC}$  do triângulo  $\triangle ABC$ .

**Definição 1.6.** (Distância com sinal) Dados um  $\triangle ABC$  e um ponto  $T$  qualquer no plano que contém o triângulo  $\triangle ABC$ , a distância com sinal de  $T$  à reta  $r = \overleftrightarrow{BC}$ , denotada por  $\text{dist}_s(T, r)$ , é dada por

$$\text{dist}_s(T, r) = \begin{cases} \text{dist}(T, r), & \text{se } T \text{ e } A \text{ estiverem do mesmo lado em relação à reta } r \\ -\text{dist}(T, r), & \text{se } T \text{ e } A \text{ estiverem em lados opostos em relação à reta } r \end{cases}$$

onde  $\text{dist}(T, r)$  denota a distância euclidiana usual entre  $T$  e  $r$ .

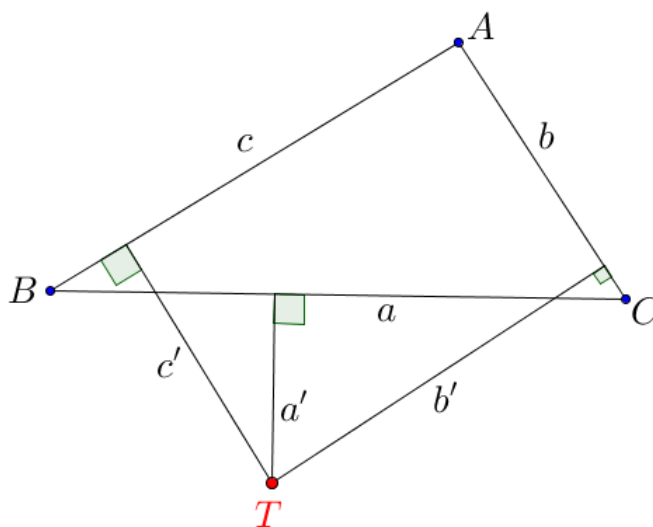


Figura 5: Nesta representação,  $a' < 0, b', c' > 0$ .

Definimos também a área com sinal de um triângulo. Para isso, consideramos um triângulo  $\triangle ABC$  e um ponto  $T$ . Temos os triângulos  $\triangle TAB$ ,  $\triangle TAC$  e  $\triangle TBC$ , como na Figura 6. Sem perda de generalidade, damos a definição para o triângulo  $\triangle TBC$ .

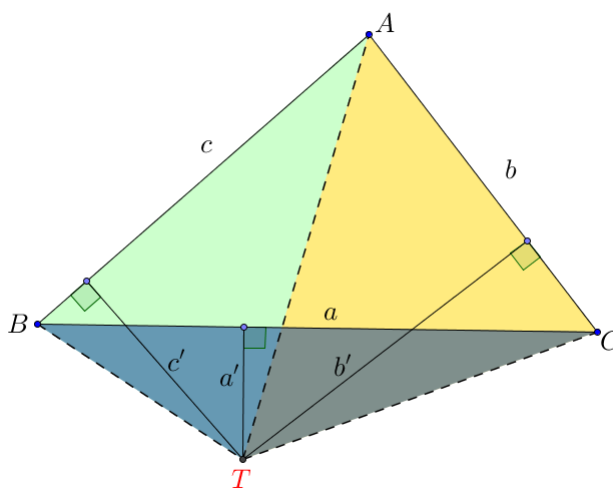


Figura 6: Área com sinal

**Definição 1.7.** (Área com sinal) Dados um  $\triangle ABC$  e um ponto  $T$  qualquer, a área com sinal do triângulo  $\triangle TBC$ , denotada por  $S_{TBC}^s$ , é dada por

$$S_{TBC}^s = \begin{cases} 0, & \text{se } T \text{ pertence à reta } \overleftrightarrow{BC} \\ S_{TBC}, & \text{se } T \text{ e } A \text{ estiverem do mesmo lado em relação à reta } \overleftrightarrow{BC} \\ -S_{TBC}, & \text{se } T \text{ e } A \text{ estiverem em lados opostos em relação à reta } \overleftrightarrow{BC} \end{cases}$$

onde  $S_{TBC}$  denota a área euclidiana usual do triângulo  $\triangle TBC$ .

No caso em que  $T$  pertence ao interior do triângulo  $\triangle ABC$ , temos que

$$S_{BTC}^s + S_{ATC}^s + S_{BTA}^s = S_{BTC} + S_{ATC} + S_{BTA} = S_{ABC}.$$

No entanto, se  $T$  pertence ao exterior do triângulo  $\triangle ABC$ , como na Figura 6, na qual estão destacados os triângulos  $\triangle TBA$ ,  $\triangle TAC$  e  $\triangle TBC$ , temos, de acordo com a Definição 1.7, que  $S_{TBC}^s < 0$ , enquanto que  $S_{TAB}^s, S_{TAC}^s > 0$ . Deste modo,

$$S_{BTC}^s + S_{ATC}^s + S_{BTA}^s = -S_{BTC} + S_{ATC} + S_{BTA} = S_{ABC}. \quad (1.2)$$

Em seguida, definimos as coordenadas trilineares de um ponto qualquer em relação a um triângulo de referência.

**Definição 1.8.** (Coordenadas Trilineares) Dado um triângulo de referência  $\triangle ABC$ , as coordenadas trilineares de um ponto  $T$  qualquer em relação ao  $\triangle ABC$  são uma tripla ordenada de números reais diretamente proporcionais, respectivamente, às distâncias com sinal de  $T$  às retas suportes dos lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$ .

Em outras palavras, sendo  $a' = \text{dist}_s(T, \overleftrightarrow{BC})$ ,  $b' = \text{dist}_s(T, \overleftrightarrow{AC})$  e  $c' = \text{dist}_s(T, \overleftrightarrow{AB})$ , se  $a', b', c'$  forem não-nulos, isto é, se  $T$  não pertencer às retas suportes dos lados do triângulo de referência  $\triangle ABC$ , então

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{a'}{b'}, \quad \frac{\beta}{\gamma} = \frac{b'}{c'}.$$

Consequentemente,

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{c'}{a'}.$$

Deste modo, se  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$ , nesta ordem, são as coordenadas trilineares de  $T$ , que denotamos por  $\alpha : \beta : \gamma$ , então  $\mu\alpha : \mu\beta : \mu\gamma$  representam as coordenadas trilineares do mesmo ponto  $T$ , pois

$$\frac{\mu\alpha}{\mu\beta} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{a'}{b'}, \quad \frac{\mu\beta}{\mu\gamma} = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{b'}{c'}$$

onde  $\mu$  é uma constante real não nula qualquer. Ou seja,

$$T = \alpha : \beta : \gamma = \mu\alpha : \mu\beta : \mu\gamma.$$

Segue disto e da Definição 1.8 que se as coordenadas trilineares de um ponto forem  $\alpha : \beta : \gamma$  então  $\alpha = ka', \beta = kb'$  e  $\gamma = kc'$ , para algum  $k \neq 0$ , que será obtido na próxima proposição, na qual mostra-se como determinar as distâncias com sinal de um ponto às retas suportes dos lados do triângulo de referência, a partir das coordenadas trilineares do ponto.

Se  $k = 1$ , dizemos que  $a', b'$  e  $c'$ , nesta ordem, são as coordenadas trilineares exatas (ou reais) do ponto  $T$ . Neste caso, denotamos por

$$T = (a', b', c').$$

Observamos que, no caso de  $T$  pertencer ao interior do triângulo  $\triangle ABC$ , como na Figura 7, as coordenadas trilineares exatas de  $T$  são

$$(\text{dist}(T, \overleftrightarrow{BC}), \text{dist}(T, \overleftrightarrow{AC}), \text{dist}(T, \overleftrightarrow{AB}))$$

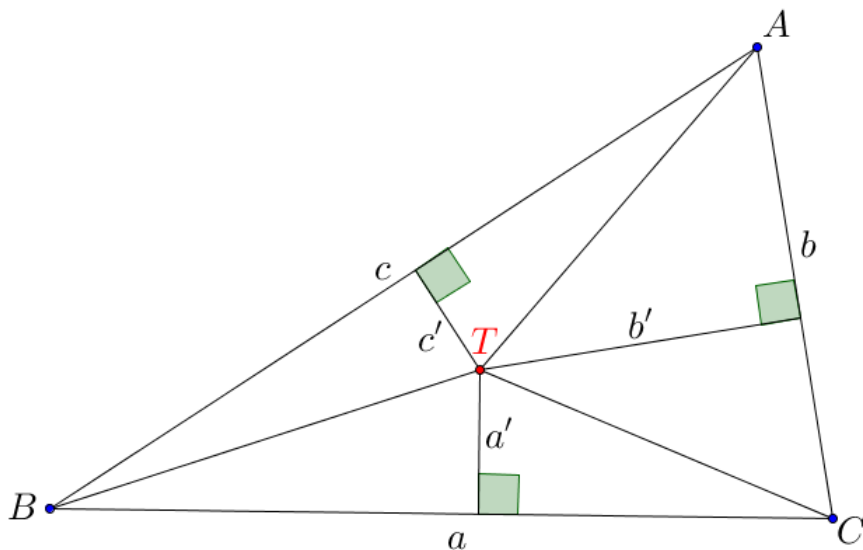


Figura 7: Coordenadas trilineares exatas do ponto  $T$ .

Se  $T$  pertencer à reta suporte de um lado do triângulo de referência  $\triangle ABC$ , então a respectiva coordenada trilinear é igual a 0. Assim, as coordenadas trilineares exatas dos vértices do triângulo de referência  $\triangle ABC$  são

$$A = (a', 0, 0) \quad B = (0, b', 0) \quad C = (0, 0, c').$$

Multiplicando estas coordenadas por  $1/a'$ ,  $1/b'$  e  $1/c'$ , respectivamente, obtemos as coordenadas trilineares dos vértices  $A, B$  e  $C$ :

$$A = 1 : 0 : 0 \quad B = 0 : 1 : 0 \quad C = 0 : 0 : 1.$$

**Proposição 1.9.** *Sejam  $\triangle ABC$  um triângulo qualquer com  $a = BC$ ,  $b = AC$  e  $c = AB$ ,  $T$  um ponto qualquer com coordenadas trilineares  $\alpha : \beta : \gamma$ . Sendo  $a' = \text{dist}_s(T, \overleftrightarrow{BC})$ ,  $b' = \text{dist}_s(T, \overleftrightarrow{AC})$  e  $c' = \text{dist}_s(T, \overleftrightarrow{AB})$ , então*

$$a' = \frac{2\alpha S_{ABC}}{a\alpha + b\beta + c\gamma}, \quad b' = \frac{2\beta S_{ABC}}{a\alpha + b\beta + c\gamma}, \quad c' = \frac{2\gamma S_{ABC}}{a\alpha + b\beta + c\gamma} \quad (1.3)$$

*Demonstração.* Sendo  $k$  uma constante real não nula tal que  $\alpha = ka'$ ,  $\beta = kb'$ ,  $\gamma = kc'$ , temos, por (1.2), que

$$S_{ABC} = S_{BTC}^s + S_{ATC}^s + S_{BTA}^s = \frac{1}{2}aa' + \frac{1}{2}bb' + \frac{1}{2}cc' = \frac{1}{2}\left(a\frac{\alpha}{k} + b\frac{\beta}{k} + c\frac{\gamma}{k}\right) = \frac{1}{2k}(a\alpha + b\beta + c\gamma)$$

Assim,  $2kS_{ABC} = a\alpha + b\beta + c\gamma$ .

Como  $k, S_{ABC} \neq 0$ , temos que  $a\alpha + b\beta + c\gamma \neq 0$ . Consequentemente,

$$2kS_{ABC}a' = (a\alpha + b\beta + c\gamma)a'$$

Por outro lado,

$$2kS_{ABC}a' = 2(ka')S_{ABC} = 2\alpha S_{ABC}$$

Portanto,

$$a' = \frac{2\alpha S_{ABC}}{a\alpha + b\beta + c\gamma}$$

Analogamente, obtemos

$$b' = \frac{2\beta S_{ABC}}{a\alpha + b\beta + c\gamma}$$

e

$$c' = \frac{2\gamma S_{ABC}}{a\alpha + b\beta + c\gamma}$$

□

#### 1.1.4 Simedianas

Nesta subseção, apresentamos algumas propriedades envolvendo as simedianas de um triângulo qualquer. Para saber mais sobre este tema, recomendamos a referência [5]. Para definir uma simediana, tomamos, sem perda de generalidade, um vértice do triângulo como referência.

**Definição 1.10.** (Simediana): Dado um triângulo  $\triangle ABC$ , consideramos a reta suporte  $m_1$  da mediana que parte de  $A$  e a reta suporte  $b_1$  da bissetriz interna do ângulo  $\angle BAC$ . A reta  $s_1$  obtida pela reflexão de  $m_1$  em relação a  $b_1$  é chamada de simediana do triângulo  $\triangle ABC$ .

Na Figura 8 estão ilustradas as simedianas de um triângulo  $\triangle ABC$ . Observamos que se  $AB = AC$  então  $m_1 = b_1$ . Neste caso,  $s_1 = m_1 = b_1$ .

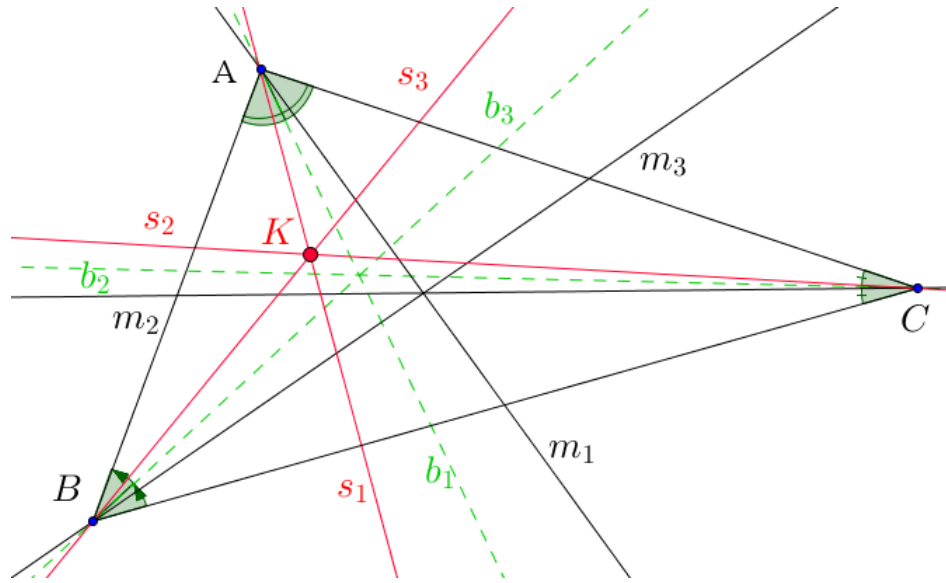


Figura 8: Retas simedianas do triângulo  $\triangle ABC$ .

Nas condições da Definição 1.10, apresentamos o ponto simediano de um triângulo.

**Definição 1.11.** Dado um triângulo  $\triangle ABC$  qualquer, o ponto de intersecção  $K$  de suas simedianas é chamado de ponto simediano do triângulo  $\triangle ABC$ .

O ponto simediano de um triângulo  $\triangle ABC$  qualquer é também chamado ponto de Lemoine ou ponto de Grabe do triângulo  $\triangle ABC$ . Na Figura 8, ele está denotado pelo ponto  $K$ . A prova de sua existência pode ser encontrada em [4, p. 22] e consiste basicamente de uma aplicação do Teorema de Ceva.

**Observação 1.12.** Observamos que uma mediana de um triângulo e sua simediana formam ângulos congruentes com os lados do triângulo. De fato, consideremos  $\triangle ABC$  um triângulo qualquer,  $m_1$  a reta suporte da mediana que passa por  $A$ ,  $b_1$  a reta suporte da bissetriz do ângulo  $\angle BAC$ ,  $s_1$  a simediana correspondente a  $m_1$ . Sem perda de generalidade, supomos que a medida  $\theta$  do ângulo formado entre  $m_1$  e o lado  $\overline{AC}$  seja tal que  $\theta \leq \frac{\text{med}(\angle BAC)}{2}$ , como está ilustrado na Figura 8. Assim, a medida do ângulo entre  $m_1$  e  $b_1$  é  $\frac{\text{med}(\angle BAC)}{2} - \theta$ , que é também a medida do ângulo entre  $b_1$  e  $s_1$ , pois reflexões em relação a retas preservam medida angular. Consequentemente, a medida do ângulo formado entre  $s_1$  e o lado  $\overline{AB}$  é  $\theta$ . Portanto, a medida do ângulo formado entre  $m_1$  e o lado  $\overline{AC}$  é igual

à medida do ângulo formado entre  $s_1$  e o lado  $\overline{AB}$ . Consequentemente, as cevianas, sem suas extremidades, determinadas pelas simedianas do triângulo  $\triangle ABC$  estão contidas no interior do triângulo  $\triangle ABC$ , de modo que o ponto simediano  $K$  do triângulo  $\triangle ABC$  pertence ao seu interior.

A seguir, provaremos uma propriedade que relaciona as simedianas às antiparalelas relativas aos lados do triângulo. Para isso, usaremos o seguinte resultado básico sobre semelhança de triângulos, o qual afirma que uma mediana de triângulo corresponde a uma mediana do triângulo semelhante a ele, como está ilustrado na Figura 9.

**Lema 1.13.** *Se  $\triangle ABC$  e  $\triangle ADE$  dois triângulos semelhantes, cuja correspondência é  $ABC \leftrightarrow ADE$ , se  $\overline{AM}$  é uma mediana do triângulo  $\triangle ABC$  e  $\overline{AT}$  é o segmento correspondente a  $\overline{AM}$  então  $\overline{AT}$  é uma mediana do triângulo  $\triangle ADE$ .*

*Demonstração.* Como  $\triangle ABC \sim \triangle ADE$  então

$$\frac{BC}{DE} = \frac{AC}{AE} \quad (1.4)$$

Além disso, como  $\overline{AM}$  e  $\overline{AT}$  são correspondentes, temos que  $\angle AMC \cong \angle ATE$ , donde concluímos, pelo caso ângulo-ângulo de semelhança de triângulos, que  $\triangle AMC \sim \triangle ATE$ , com correspondência  $AMC \leftrightarrow ATE$  entre seus vértices. Logo,

$$\frac{AC}{AE} = \frac{MC}{TE}$$

Mas,  $M$  é ponto médio de  $\overline{BC}$ , de modo que

$$\frac{AC}{AE} = \frac{\frac{BC}{2}}{TE} \quad (1.5)$$

Por (1.4) e (1.5), concluímos que  $DE = 2TE$ . Consequentemente,  $T$  é o ponto médio de  $\overline{DE}$  e  $\overline{AT}$  é uma mediana do triângulo  $\triangle ADE$ .

□



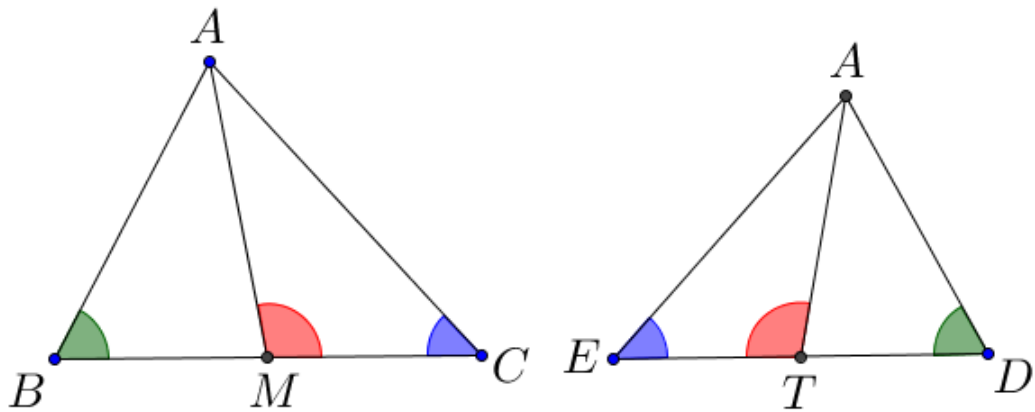


Figura 9:  $\triangle ABC$  e  $\triangle ADE$  são triângulos semelhantes.

Baseados na Definição 1.1, provamos a seguir que a simediana que passa por um determinado vértice de um triângulo bissecta o segmento (contido no interior do triângulo) determinado por uma antiparalela ao lado oposto àquele vértice.

**Proposição 1.14.** *Sejam  $\triangle ABC$  um triângulo qualquer,  $\overleftrightarrow{DE}$  antiparalela em relação às retas  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $\overleftrightarrow{AC}$ , com  $A - D - B$  e  $A - E - C$ ,  $\overline{AM}$  uma mediana do triângulo  $\triangle ABC$ , com  $B - M - C$ , e  $\overleftrightarrow{AS}$  a simediana relativa a  $\overline{AM}$ , com  $B - S - C$ , como está ilustrado na Figura 10. Se  $\{T\} = \overline{AS} \cap \overline{DE}$  então  $\overline{AT}$  é uma mediana do triângulo  $\triangle ADE$ .*

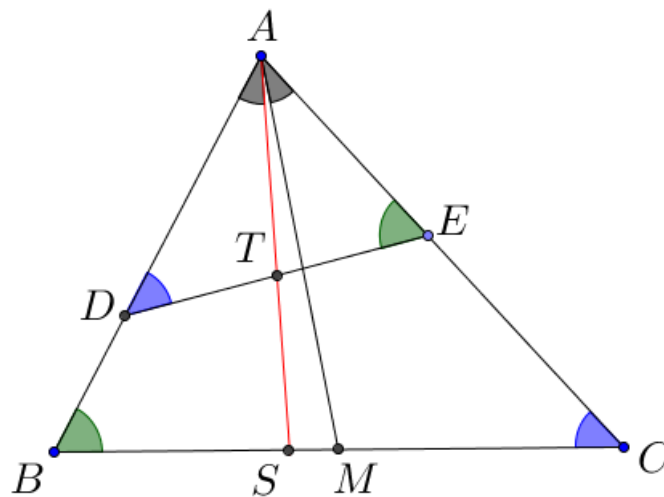


Figura 10: Simediana bissectando a antiparalela.

*Demonstração.* Como, por hipótese,  $\overleftrightarrow{DE}$  é antiparalela em relação às retas  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $\overleftrightarrow{AC}$ , então  $\angle ADE \cong \angle ACB$ . Temos que  $\angle BAC = \angle EAD$ . Assim, pelo caso ângulo-ângulo de semelhança de triângulos, os triângulos  $\triangle AED$  e  $\triangle ABC$  são semelhantes, com a correspondência  $ABC \leftrightarrow AED$ .

Segue da Observação 1.12 que a medida do ângulo formado entre  $\overline{AM}$  e o lado  $\overline{AC}$  é igual à medida do ângulo formado entre  $\overline{AS}$  e o lado  $\overline{AB}$ . Logo, o segmento  $\overline{AM}$  do triângulo  $\triangle ABC$  corresponde ao segmento  $\overline{AT}$  do triângulo  $\triangle ADE$ . Como  $\overline{AM}$  é mediana do triângulo  $\triangle ABC$  então, pelo Lema 1.13,  $\overline{AT}$  é mediana do triângulo  $\triangle ADE$ , isto é,  $T$  é ponto médio do segmento  $\overline{DE}$ .  $\square$

A seguir, obtemos uma relação entre alturas a partir do ponto simediano  $K$  com as medidas dos lados do triângulo  $\triangle ABC$ , que será útil na obtenção das coordenadas trilineares de  $K$ . Antes, porém, provamos o seguinte resultado auxiliar.

**Lema 1.15.** Dado um triângulo  $\triangle ABC$ , sejam  $\overleftrightarrow{AF}$ ,  $\overleftrightarrow{BI}$ ,  $\overleftrightarrow{CH}$  suas simedianas e  $\overline{AG}$ ,  $\overline{BH}$  e  $\overline{CE}$  suas medianas, com  $D, E \in \overline{AB}$ ,  $F, G \in \overline{BC}$  e  $H, I \in \overline{AC}$ , como está ilustrado na Figura 11. Então

$$\frac{FB}{FC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2, \quad \frac{DA}{DB} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2, \quad \frac{IA}{IC} = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2.$$

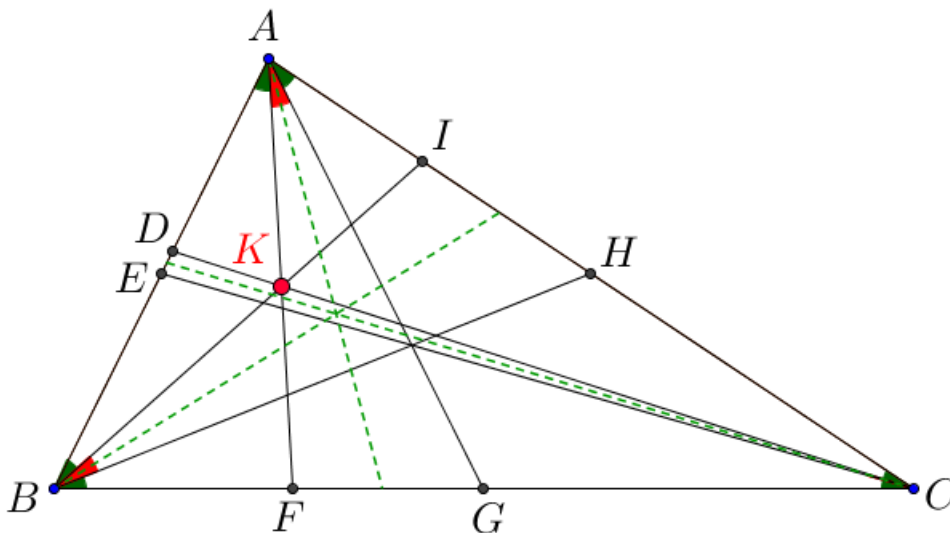


Figura 11: Simedianas, medianas e bissetrizes do triângulo  $\triangle ABC$ .

*Demonstração.* Como os triângulos  $\triangle ABF$  e  $\triangle ACF$  possuem a mesma altura em relação ao vértice  $A$ , então

$$\frac{BF}{FC} = \frac{S_{BAF}}{S_{CAF}} = \frac{\frac{AB \cdot AF \cdot \sin(\angle BAF)}{2}}{\frac{AC \cdot AF \cdot \sin(\angle CAF)}{2}} = \frac{AB \cdot \sin(\angle BAF)}{AC \cdot \sin(\angle CAF)}. \quad (1.6)$$

Do mesmo modo, como os triângulos  $\triangle BAG$  e  $\triangle CAG$  possuem a mesma altura em relação ao vértice  $A$ , então

$$\frac{GB}{GC} = \frac{S_{BAG}}{S_{CAG}} = \frac{\frac{AB \cdot AG \cdot \sin(\angle BAG)}{2}}{\frac{AC \cdot AG \cdot \sin(\angle CAG)}{2}} = \frac{AB \cdot \sin(\angle BAG)}{AC \cdot \sin(\angle CAG)}. \quad (1.7)$$

Como  $GB = GC$ , segue de (1.7) que

$$\frac{\sin(\angle CAG)}{\sin(\angle BAG)} = \frac{AB}{AC}. \quad (1.8)$$

De acordo com a Observação 1.12, temos que  $\angle BAF \cong \angle CAG$ . Sem perda de generalidades, supomos que  $B - F - G - C$ , como está ilustrado na Figura 11. Neste caso,  $\text{med}(\angle BAG) = \text{med}(\angle BAF) + \text{med}(\angle FAG)$  e  $\text{med}(\angle CAF) = \text{med}(\angle CAG) + \text{med}(\angle GAF)$ . Como  $\angle BAF \cong \angle CAG$  então  $\angle BAG \cong \angle CAF$ . Consequentemente, por (1.6) e (1.8), obtemos

$$\frac{BF}{FC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2.$$

Analogamente,

$$\frac{AD}{DB} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2$$

e

$$\frac{AH}{HC} = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2.$$

□

**Observação 1.16.** Caso o triângulo  $\triangle ABC$  seja isósceles, por exemplo com  $AB = AC$ , teríamos  $F = G$ , ou seja,  $F$  tornar-se-ia o ponto médio de  $\overline{BC}$ . Assim, a relação  $\frac{BF}{FC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$  continua válida, pois  $\frac{BF}{FC} = 1 = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$ .

Mostramos também que é verdadeira a recíproca do Lema 1.15, que nos dá uma caracterização das simedianas de um triângulo.

**Lema 1.17.** Dado um triângulo  $\triangle ABC$ , seja  $F \in \overline{BC}$  um ponto tal que

$$\frac{FB}{FC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2.$$

Então  $\overleftrightarrow{AF}$  é uma simediana do triângulo  $\triangle ABC$ .

*Demonstração.* Seja  $\overleftrightarrow{AF'}$  uma simediana do triângulo  $\triangle ABC$ , com  $F' \in \overline{BC}$ . Pelo Lema 1.15, temos que

$$\frac{F'B}{F'C} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2.$$

Logo,

$$\frac{FB}{FC} = \frac{F'B}{F'C}.$$

Consequentemente,

$$\frac{FB + FC}{FC} = \frac{F'B + F'C}{F'C},$$

isto é,

$$\frac{BC}{FC} = \frac{BC}{F'C}.$$

Assim,  $FC = F'C$ , com  $F, F' \in \overline{BC}$ . Portanto,  $F = F'$ .

□

No resultado seguinte, consideraremos a simediana de um triângulo  $\triangle ABC$  passando por  $A$ . Podemos afirmar que esta é a reta  $\overleftrightarrow{AF}$ , com  $B - F - C$ , em vista da Observação 1.12.

**Proposição 1.18.** Sejam  $\triangle ABC$  um triângulo qualquer,  $\overleftrightarrow{AF}$  uma simediana do triângulo, com  $B - F - C$ , e  $K'$  um ponto qualquer pertencente a  $\overline{AF} \setminus \{A\}$ . Então a razão das distâncias de  $K'$  aos lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$ , nesta ordem, é igual à razão dos comprimentos dos lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$ .

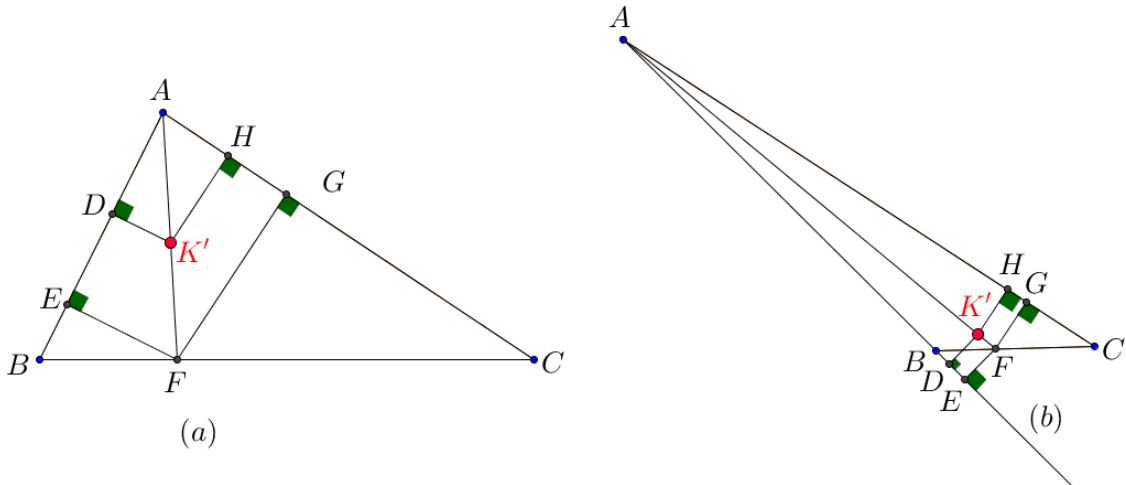


Figura 12: (a) Caso em que  $A - D - E - B$ ; (b) Caso em que  $A - B - D - E$ .

*Demonstração.* Sejam  $D, H$  as projeções ortogonais de  $K'$  sobre os lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$ , ou seus prolongamentos, respectivamente, assim como  $E, G$  as projeções ortogonais de  $F$  sobre os lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$ , ou seus prolongamentos, respectivamente, como está ilustrado na Figura 12(a) e 12(b). Pelo caso ângulo-ângulo de semelhança de triângulos, temos que  $\triangle ADK' \sim \triangle AEF$  e  $\triangle AHK' \sim \triangle AGF$ . Disto segue que

$$\frac{AK'}{AF} = \frac{K'D}{FE} \quad \text{e} \quad \frac{AK'}{AF} = \frac{K'H}{FG}.$$

Deste modo,

$$\frac{K'D}{FE} = \frac{K'H}{FG} \tag{1.9}$$

Em relação aos triângulos  $\triangle FBE$  e  $\triangle FCG$ , temos  $FE = BF \operatorname{sen}(\angle ABC)$  e  $FG = FC \operatorname{sen}(\angle BCA)$ , pois ainda que ocorra  $A - B - D - E$ , como na Figura 12(b), temos  $FE = BF \operatorname{sen}(\pi - \operatorname{med}(\angle ABC)) = BF \operatorname{sen}(\angle ABC)$ . Logo, (1.9) torna-se

$$\frac{K'D}{BF \operatorname{sen}(\angle ABC)} = \frac{K'H}{FC \operatorname{sen}(\angle BCA)}$$

Ou seja,

$$\frac{K'D}{K'H} = \frac{BF \operatorname{sen}(\angle ABC)}{FC \operatorname{sen}(\angle BCA)}. \tag{1.10}$$

Pelo Lema 1.15,  $\frac{BF}{FC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$ , de modo que (1.10) se reescreve como

$$\frac{K'D}{K'H} = \frac{AB^2 \operatorname{sen}(\angle ABC)}{AC^2 \operatorname{sen}(\angle BCA)}.$$

Portanto, se  $A - D - E - B$  então

$$\frac{K'D}{K'H} = \frac{BC \cdot AB^2 \cdot \text{sen}(\angle ABC)}{BC \cdot AC^2 \cdot \text{sen}(\angle BCA)} = \frac{AB \cdot 2S_{ABC}}{AC \cdot 2S_{ABC}} = \frac{AB}{AC},$$

enquanto que se  $A - B - D - E$  então

$$\frac{K'D}{K'H} = \frac{BC \cdot AB^2 \cdot \text{sen}(\angle ABC)}{BC \cdot AC^2 \cdot \text{sen}(\angle BCA)} = \frac{BC \cdot AB^2 \cdot \text{sen}(\pi - \text{med}(\angle ABC))}{BC \cdot AC^2 \cdot \text{sen}(\angle BCA)} = \frac{AB \cdot 2S_{ABC}}{AC \cdot 2S_{ABC}} = \frac{AB}{AC}.$$

□

**Observação 1.19.** A prova anterior continua válida para o caso em  $B = E$ , como está ilustrado na Figura 13. A única adaptação é

$$FE = BF \text{sen}(\angle ABC),$$

que continua sendo verdadeira, uma vez que  $BF = FE$  e  $\text{sen}(\angle ABC) = \text{sen}(\pi/2) = 1$ .

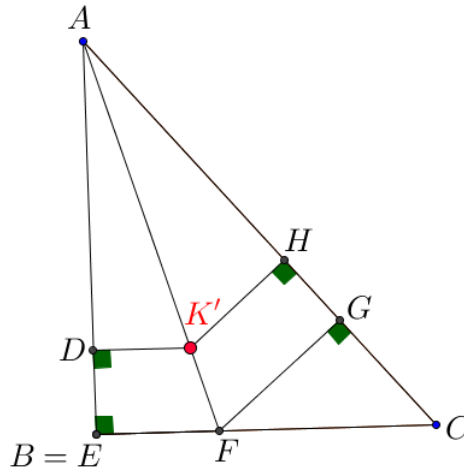


Figura 13: Caso em que  $E = B$ .

Para finalizarmos esta seção em que abordamos algumas propriedades das simedianas de um triângulo, mostramos que é verdadeira a recíproca da Proposição 1.14, isto é, que se uma simediana bissecta um segmento de um triângulo, ele está contido numa antiparalela do triângulo. Mais especificamente,

**Proposição 1.20.** *Sejam  $\triangle ABC$  um triângulo qualquer,  $\overleftrightarrow{DE}$  uma reta, com  $A - D - B$  e  $A - E - C$ ,  $\overleftrightarrow{AS}$  uma simediana do triângulo, com  $B - S - C$ , como está ilustrado na Figura 14. Se  $\{T\} = \overleftrightarrow{AS} \cap \overleftrightarrow{DE}$  é o ponto médio de  $\overleftrightarrow{DE}$  então  $\overleftrightarrow{DE}$  é uma antiparalela ao lado  $\overline{BC}$ .*

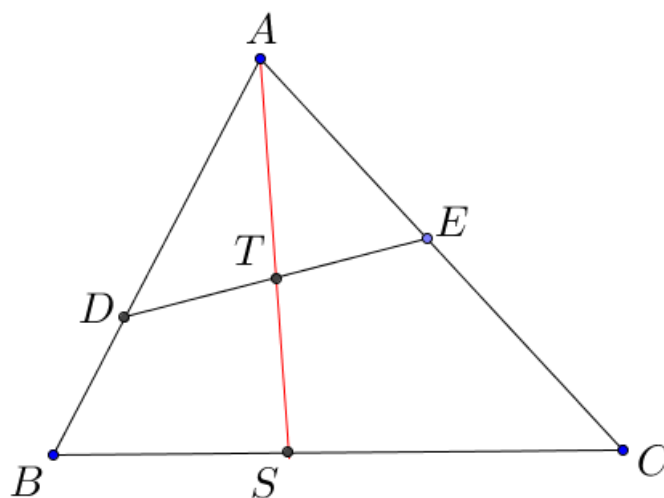


Figura 14: Recíproca da Proposição 1.14.

*Demonstração.* Aplicando a lei dos senos aos triângulos  $\triangle ABS$  e  $\triangle ACS$ , temos que

$$\frac{SB}{\text{sen}(\angle SAB)} = \frac{AB}{\text{sen}(\angle ASB)} \quad \text{e} \quad \frac{SC}{\text{sen}(\angle SAC)} = \frac{AC}{\text{sen}(\angle ASC)}.$$

Mas,  $\text{med}(\angle ASC) = \pi - \text{med}(\angle ASB)$ , de modo que  $\text{sen}(\angle ASC) = \text{sen}(\angle ASB)$ . Então

$$\frac{SB}{SC} = \frac{AB \text{sen}(\angle SAB)}{AC \text{sen}(\angle SAC)} = \frac{AB \text{sen}(\angle TAD)}{AC \text{sen}(\angle TAE)}.$$

Pelo Lema 1.15, temos

$$\frac{SB}{SC} = \left( \frac{AB}{AC} \right)^2.$$

Assim, obtemos

$$\frac{AB}{AC} = \frac{\text{sen}(\angle TAD)}{\text{sen}(\angle TAE)}. \quad (1.11)$$

Por outro lado, aplicando a lei dos senos aos triângulos  $\triangle ADT$  e  $\triangle AET$ , temos que

$$\frac{DT}{\text{sen}(\angle TAD)} = \frac{AD}{\text{sen}(\angle ATD)} \quad \text{e} \quad \frac{ET}{\text{sen}(\angle TAE)} = \frac{AE}{\text{sen}(\angle ATE)}.$$

Mas,  $\text{med}(\angle ATE) = \pi - \text{med}(\angle ATD)$ , de modo que  $\text{sen}(\angle ATE) = \text{sen}(\angle ATD)$ . Então

$$\frac{DT}{ET} = \frac{AD \text{sen}(\angle TAD)}{AE \text{sen}(\angle TAE)}.$$

Por hipótese,  $T$  é o ponto médio de  $\overline{DE}$ . Logo,  $DT = ET$  e

$$\frac{AE}{AD} = \frac{\text{sen}(\angle TAD)}{\text{sen}(\angle TAE)}. \quad (1.12)$$

Por (1.11) e (1.12), concluímos que

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD}.$$

Como  $\angle DAE = \angle CAB$ , temos, pelo caso lado-ângulo-lado de semelhança de triângulos, que  $\triangle ADE \sim \triangle ACB$ . Deste modo,  $\angle ADE \cong \angle ACB$ . Portanto,  $\overleftrightarrow{DE}$  é uma antiparalela ao lado  $\overline{BC}$  do triângulo  $\triangle ABC$ .  $\square$

### 1.1.5 Ângulos de Brocard

Nesta subsecção, definimos os ângulos de Brocard de um triângulo qualquer e obtemos suas coordenadas trilineares.

**Definição 1.21.** (Ângulos de Brocard) Sendo  $\triangle ABC$  um triângulo qualquer, os pontos  $P$  e  $Q$  tais que

$$\angle PAB \cong \angle PBC \cong \angle PCA,$$

e

$$\angle QAC \cong \angle QBA \cong \angle QCB$$

são chamados, respectivamente, de primeiro e segundo pontos de Brocard do triângulo  $\triangle ABC$ . Neste caso, o ponto médio  $T$  de  $\overline{PQ}$  é chamado de terceiro ponto de Brocard do  $\triangle ABC$  e as medidas  $\omega = \text{med}(\angle PAB)$  e  $\omega' = \text{med}(\angle QAC)$  são chamadas de ângulos de Brocard do  $\triangle ABC$ .



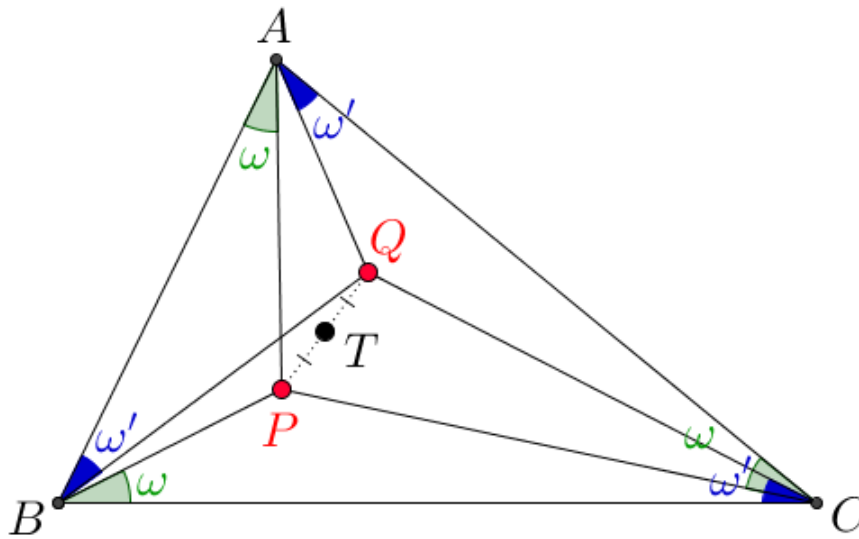


Figura 15: Ângulos de Brocard do triângulo  $\triangle ABC$ .

Na Figura 15 estão ilustrados o primeiro, segundo e terceiro pontos de Brocard, bem como os ângulos de Brocard do triângulo  $\triangle ABC$ . Observamos que, como as somas das medidas dos ângulos (internos) de um triângulo é igual a  $\pi$ , então  $3\omega < \pi$ , donde  $\omega < 60$ , isto é, o primeiro ângulo de Brocard é sempre um ângulo agudo. A prova da existência dos pontos de Brocard de um triângulo, assim como suas construções, podem ser encontradas em [2, p. 264, 265]. Por exemplo, sendo  $\mathcal{C}_1$  a circunferência que tangencia  $\overline{AB}$  no ponto  $A$  e que passa por  $C$ ,  $\mathcal{C}_2$  a circunferência que tangencia  $\overline{BC}$  no ponto  $B$  e que passa por  $A$ ,  $\mathcal{C}_3$  a circunferência que tangencia  $\overline{AC}$  no ponto  $C$  e que passa por  $B$ , então primeiro ponto de Brocard  $P$  é obtido por  $\{P\} = \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3$ , como está ilustrado na Figura 16. De modo análogo, o segundo ponto de Brocard  $Q$  pode ser obtido pela intersecção das circunferências  $\mathcal{C}'_1 \cap \mathcal{C}'_2 \cap \mathcal{C}'_3$ , onde  $\mathcal{C}'_1$  é a circunferência que tangencia  $\overline{AC}$  no ponto  $A$  e que passa por  $B$ ,  $\mathcal{C}'_2$  é a circunferência que tangencia  $\overline{AB}$  no ponto  $B$  e que passa por  $C$ ,  $\mathcal{C}'_3$  é a circunferência que tangencia  $\overline{BC}$  no ponto  $C$  e que passa por  $A$ .

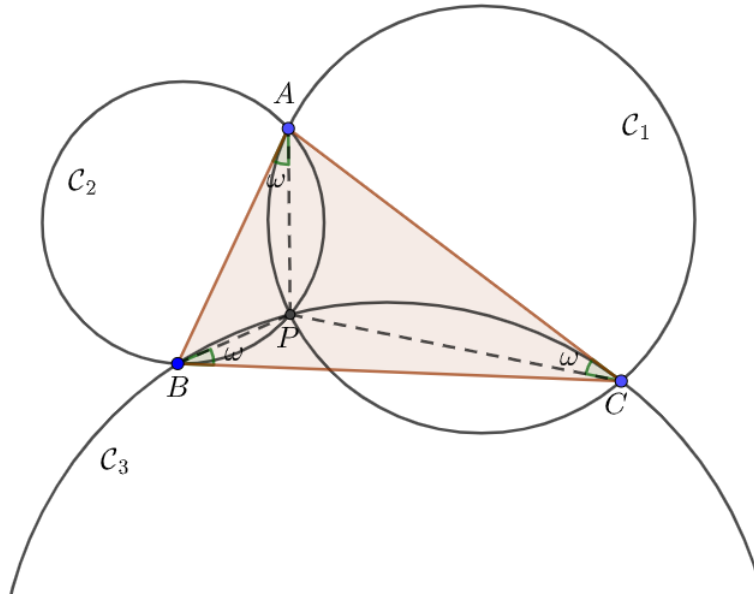


Figura 16: Determinação do primeiro ponto de Brocard  $P$  do triângulo  $\triangle ABC$ .

A seguir, daremos duas maneiras para calcular o ângulo de Brocard  $\omega$ . A primeira delas está em função dos ângulos internos do triângulo, enquanto que na segunda está em função da área e das medidas dos lados do triângulo.

**Proposição 1.22.** *Dado um triângulo  $\triangle ABC$ , nas condições da Definição 1.21 temos que*

(a)

$$\cot \omega = \cot(\angle BAC) + \cot(\angle ABC) + \cot(\angle ACB) \tag{1.13}$$

(b)

$$\cot \omega = \frac{AB^2 + AC^2 + BC^2}{4S_{ABC}}. \tag{1.14}$$

(c)

$$\cot \omega' = \cot \omega. \tag{1.15}$$

*Demonstração.* (Parte (a)) Sejam  $r$  a reta passando por  $A$  e paralela à reta  $\overleftrightarrow{BC}$ ,  $C$  a circunferência circunscrita ao triângulo  $\triangle ABC$ ,  $t$  a reta tangente à circunferência  $C$  no ponto  $C$  e  $\{E\} = r \cap t$ , como está ilustrado na Figura 17. Sejam ainda  $H_1$  o pé da perpendicular baixada de  $A$  sobre  $\overleftrightarrow{BC}$  e  $D$  o pé da perpendicular baixada de  $E$  sobre  $\overleftrightarrow{BC}$ .

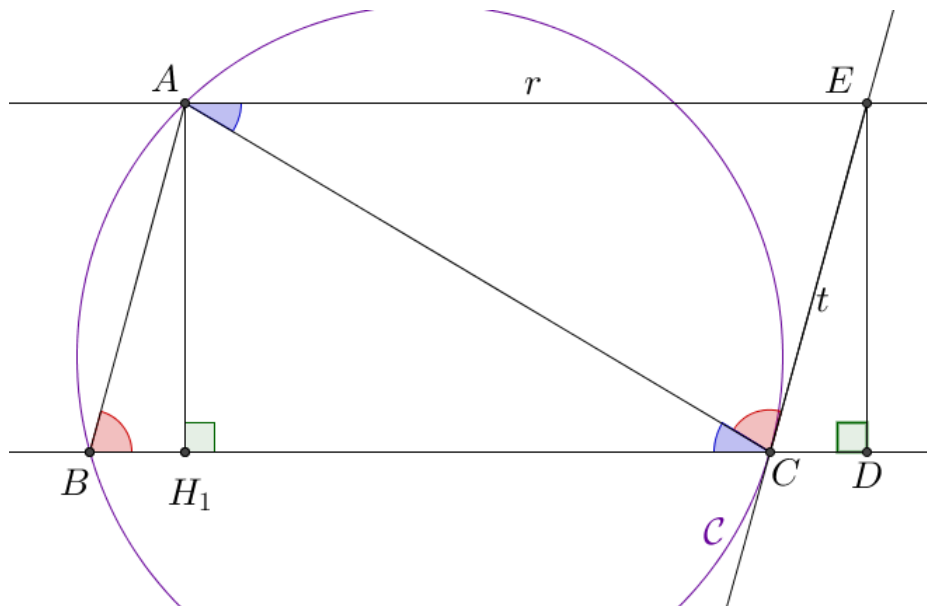


Figura 17: Construção auxiliar para a prova da Proposição 1.22.

Como  $r$  é paralela a  $\overleftrightarrow{BC}$ , então  $\angle BCA \cong \angle EAC$ . Além disso, a medida do ângulo de segmento  $\angle ACE$  é igual à metade da medida do arco  $\widehat{CA}$ , que, por sua vez, mede o dobro da medida do ângulo  $\angle ABC$  nele inscrito. Logo,  $\angle ACE \cong \angle ABC$ . Deste modo, em relação ao triângulo  $\triangle ACE$ ,

$$\begin{aligned} \text{med}(\angle CEA) &= \pi - \text{med}(\angle EAC) - \text{med}(\angle ACE) \\ &= \pi - \text{med}(\angle BCA) - \text{med}(\angle ABC) \\ &= \text{med}(\angle BAC). \end{aligned}$$

Consequentemente, como  $r$  é paralela a  $\overleftrightarrow{BC}$ , então  $\angle DCE \cong \angle CEA \cong \angle BAC$ .

Sendo  $P$  o primeiro ponto de Brocard do triângulo  $\triangle ABC$ , mostramos agora que  $B, P$  e  $E$  são colineares, como está ilustrado na Figura 18.

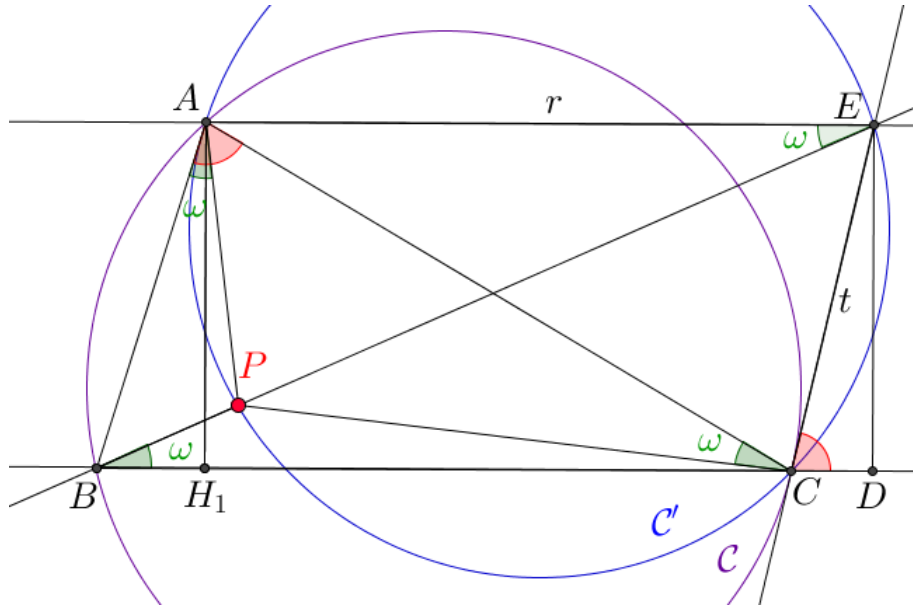


Figura 18: Prova de que  $B, P$  e  $E$  são colineares.

De acordo com a Definição 1.21, temos que  $\text{med}(\angle PCA) = \text{med}(\angle PAB) = \omega$ . Logo,  $\text{med}(\angle PAC) = \text{med}(\angle BAC) - \omega$  e

$$\text{med}(\angle CPA) = \pi - \omega - (\text{med}(\angle BAC) - \omega) = \pi - \text{med}(\angle BAC).$$

Seja  $C'$  a circunferência que passa por  $A, C$  e  $E$ . Como  $\text{med}(\angle CPA) = \pi - \text{med}(\angle BAC)$ , então  $P \in C'$  e  $P$  e  $E$  estão em lados opostos em relação à reta  $\overleftrightarrow{AC}$ . Consequentemente, os ângulos  $\angle PEA$  e  $\angle PCA$  estão inscritos no mesmo arco  $\widehat{AP}$  de  $C'$ , donde  $\angle PEA \cong \angle PCA$ . Mas,  $\angle PCA \cong \angle PBC$ . Deste modo,  $\angle PBC \cong \angle PEA$ . Além disso, por construção,  $\overline{BC} \parallel \overline{AE}$ . Portanto,  $B, P$  e  $E$  são colineares. Observamos que  $C'$  é a circunferência  $C_1$  da construção do primeiro ponto de Brocard, feita anteriormente.

A continuação desta demonstração será dada em função da natureza do  $\angle BAC$ , ou seja, agudo, obtuso ou reto. No caso em que  $\angle BAC$  é agudo, temos que  $\angle DCE \cong \angle BAC$  é agudo, de modo que podem ocorrer as seguintes possibilidades:

- i)  $B - H_1 - C - D$ , como está ilustrado na Figura 18;
- ii)  $H_1 - B - C - D$ , como está ilustrado na Figura 19;
- iii)  $B = H_1 - C - D$ , como está ilustrado na Figura 20.



Mas, como vimos,  $\angle ECD \cong \angle BAC$ . Portanto,

$$\cot \omega = \cot(\angle ABC) + \cot(\angle ACB) + \cot(\angle BAC).$$

Em *ii*), temos que

$$\begin{aligned} \cot \omega &= \frac{BD}{ED} = \frac{H_1C}{ED} - \frac{H_1B}{ED} + \frac{CD}{ED} = \frac{H_1C}{AH_1} - \frac{H_1B}{AH_1} + \frac{CD}{ED} \\ &= \cot(\angle ACB) - \cot(\pi - \angle ABC) + \cot(\angle BAC) \\ &= \cot(\angle ACB) + \cot(\angle ABC) + \cot(\angle BAC). \end{aligned}$$

Em *iii*), temos que

$$\begin{aligned} \cot \omega &= \frac{BD}{ED} = \frac{BC}{ED} + \frac{CD}{ED} = \frac{BC}{AB} + \frac{CD}{ED} + 0 \\ &= \cot(\angle ACB) + \cot(\angle BAC) + \cot\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cot(\angle ACB) + \cot(\angle BAC) + \cot(\angle ABC). \end{aligned}$$

De modo análogo ao caso anterior, quando  $\angle BAC$  é obtuso temos que  $\angle ECF \cong \angle BAC$ , onde  $F$  é tal que  $B - C - F$ . Assim, necessariamente deve ocorrer  $B - D - C$ . Além disso, se  $B$  e  $C$  estivessem do mesmo lado em relação à reta  $\overleftrightarrow{AH_1}$ , então  $\text{med}(\angle BAC) < \text{med}(\angle H_1AE) = \frac{\pi}{2}$ , de modo que  $\angle BAC$  não seria obtuso. Com isso, quando  $\angle BAC$  é obtuso, a única possibilidade é  $B - H_1 - D - C$ , como está ilustrado na Figura 21.

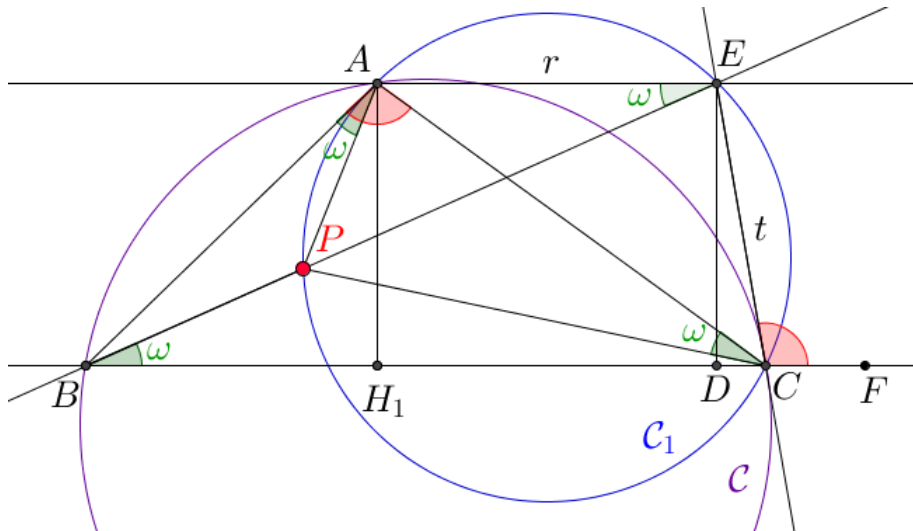


Figura 21: Caso em que  $\angle BAC$  é obtuso.

Neste caso,

$$\begin{aligned} \cot \omega &= \frac{BD}{ED} = \frac{BH_1}{ED} + \frac{H_1C}{ED} - \frac{DC}{ED} = \frac{BH_1}{AH_1} + \frac{H_1C}{AH_1} - \frac{DC}{ED} \\ &= \cot(\angle ABC) + \cot(\angle ACB) + \cot(\pi - \angle BAC) \\ &= \cot(\angle ABC) + \cot(\angle ACB) + \cot(\angle BAC). \end{aligned}$$

Finalmente, quando  $\angle BAC$  é reto temos que  $\angle ECF \cong \angle BAC$ , onde  $F$  é tal que  $B - C - F$ . Ou seja,  $\angle ECF$  é reto, de modo que  $D = C$  neste caso. Além disso,  $A$  pertence à circunferência de diâmetro  $\overline{BC}$ , donde segue que necessariamente deve ocorrer  $B - H_1 - C$ . Com isso, quando  $\angle BAC$  é reto, a única possibilidade é  $B - H_1 - D = C$ , como está ilustrado na Figura 22.

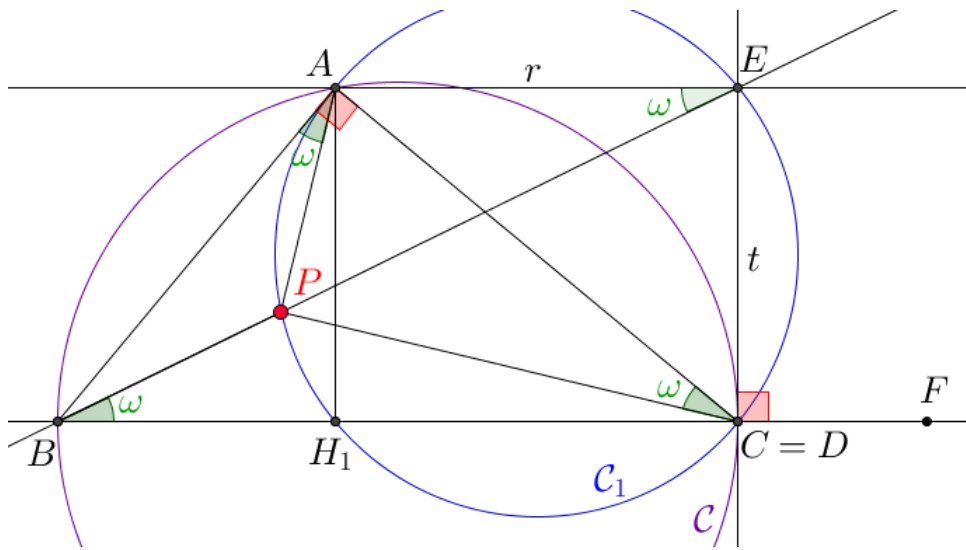


Figura 22: Caso em que  $\angle BAC$  é reto.

Neste caso,

$$\begin{aligned} \cot \omega &= \frac{BD}{ED} = \frac{BH_1}{ED} + \frac{H_1C}{ED} + 0 = \frac{BH_1}{AH_1} + \frac{H_1C}{AH_1} + \cot\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cot(\angle ABC) + \cot(\angle ACB) + \cot(\angle BAC). \end{aligned}$$

(Parte (b)) Temos que

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot \sin(\angle ABC)}{2} \tag{1.16}$$

e, pela lei dos cossenos,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos(\angle ABC). \tag{1.17}$$

De (1.16) e (1.17), obtemos

$$\cot(\angle ABC) = \frac{-AC^2 + AB^2 + BC^2}{4S_{ABC}} \quad (1.18)$$

Analogamente,

$$\cot(\angle ACB) = \frac{AC^2 - AB^2 + BC^2}{4S_{ABC}} \quad (1.19)$$

e

$$\cot(\angle BAC) = \frac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{4S_{ABC}} \quad (1.20)$$

Substituindo (1.18), (1.19) e (1.20) em (1.13),

$$\begin{aligned} \cot \omega &= \frac{(-AC^2 + AB^2 + BC^2) + (AC^2 - AB^2 + BC^2) + (AC^2 + AB^2 - BC^2)}{4S_{ABC}} \\ &= \frac{AB^2 + AC^2 + BC^2}{4S_{ABC}}. \end{aligned}$$

(Parte (c)) A prova de que  $\cot \omega' = \cot(\angle ABC) + \cot(\angle ACB) + \cot(\angle BAC)$  é análoga àquela da Parte (a). No entanto, para o cálculo de  $\cot \omega'$ , damos uma prova mais simples, que também poderia ser adaptada para provar (1.13). A prova dada na Parte (a) usou fortemente a construção de  $P$ , enquanto que a prova que apresentamos aqui depende basicamente da Definição 1.21.

Aplicando a lei dos senos ao triângulo  $\triangle ABQ$ , ilustrado na Figura 15, obtemos

$$\frac{\text{sen}(\angle BAC - \omega')}{BQ} = \frac{\text{sen}(\angle AQB)}{AB}.$$

Mas,

$$\text{med}(\angle AQB) = \pi - \omega' - (\text{med}(\angle BAC) - \omega') = \pi - \text{med}(\angle BAC).$$

Como  $\text{sen}(\pi - \angle BAC) = \text{sen}(\angle BAC)$ , então

$$\frac{\text{sen}(\angle BAC - \omega')}{BQ} = \frac{\text{sen}(\angle BAC)}{AB}. \quad (1.21)$$

Analogamente, aplicando a lei dos senos ao triângulo  $\triangle BQC$ , obtemos

$$\frac{\text{sen}(\omega')}{BQ} = \frac{\text{sen}(\angle BQC)}{BC}.$$

Mas,

$$\text{med}(\angle BQC) = \pi - \omega' - (\text{med}(\angle ABC) - \omega') = \pi - \text{med}(\angle ABC).$$



Assim,

$$\frac{\text{sen}(\omega')}{BQ} = \frac{\text{sen}(\angle ABC)}{BC}. \quad (1.22)$$

Segue de (1.21) e (1.22) que

$$\frac{\text{sen}(\angle BAC - \omega')}{\text{sen}(\omega')} = \frac{BC \text{sen}(\angle BAC)}{AB \text{sen}(\angle ABC)}.$$

Pela lei dos senos no triângulo  $\triangle ABC$ , temos que

$$\frac{BC}{AB} = \frac{\text{sen}(\angle BAC)}{\text{sen}(\angle ACB)}.$$

Consequentemente,

$$\frac{\text{sen}(\angle BAC - \omega')}{\text{sen}(\omega')} = \frac{\text{sen}(\angle BAC) \text{sen}(\angle BAC)}{\text{sen}(\angle ACB) \text{sen}(\angle ABC)}.$$

Ou seja,

$$\frac{\text{sen}(\angle BAC - \omega')}{\text{sen}(\angle BAC) \text{sen}(\omega')} = \frac{\text{sen}(\angle BAC)}{\text{sen}(\angle ACB) \text{sen}(\angle ABC)}.$$

Mas,  $\text{med}(\angle BAC) = \pi - (\text{med}(\angle ABC) + \text{med}(\angle ACB))$ . Desse modo,

$$\frac{\text{sen}(\angle BAC - \omega')}{\text{sen}(\angle BAC) \text{sen}(\omega')} = \frac{\text{sen}(\pi - (\angle ABC + \angle ACB))}{\text{sen}(\angle ACB) \text{sen}(\angle ABC)} = \frac{\text{sen}(\angle ABC + \angle ACB)}{\text{sen}(\angle ACB) \text{sen}(\angle ABC)}.$$

Finalmente, calculando o seno da diferença e soma de arcos, obtemos

$$\cot(\omega') - \cot(\angle BAC) = \cot(\angle ABC) + \cot(\angle ACB),$$

ou seja,

$$\cot(\omega') = \cot(\angle BAC) + \cot(\angle ABC) + \cot(\angle ACB).$$

□

**Observação 1.23.** *Segue de (1.15) que as medidas dos ângulos de Brocard do triângulo  $\triangle ABC$  são iguais, dado que  $\omega$  e  $\omega'$  são ângulos agudos.*

A seguir, obtemos as coordenadas trilineares do primeiro, segundo e terceiro pontos de Brocard de um triângulo  $\triangle ABC$ .

**Proposição 1.24.** *Nas condições da Definição 1.21, o primeiro ponto de Brocard  $P$ , o segundo ponto de Brocard  $Q$  e o terceiro ponto de Brocard  $T$  de um triângulo  $\triangle ABC$  têm as seguintes coordenadas trilineares*

i) 
$$P = \frac{AB}{AC} : \frac{BC}{AB} : \frac{AC}{BC} \tag{1.23}$$

ii) 
$$Q = \frac{AC}{AB} : \frac{BA}{BC} : \frac{CB}{AC} \tag{1.24}$$

iii) 
$$T = AB(BC^2 + AC^2) : BC(AC^2 + AB^2) : AC(AB^2 + BC^2) \tag{1.25}$$

*Demonstração.* i) Sejam  $D \in \overline{AB}$ ,  $E \in \overline{BC}$  e  $F \in \overline{AC}$  tais que  $C - P - D$ ,  $A - P - E$  e  $B - P - F$ , como está ilustrado na Figura 23. Além disso, sejam  $G, H$  e  $I$  os pés das perpendiculares baixadas de  $P$  sobre os lados  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  e  $\overline{AC}$ , respectivamente,  $a' = PH$ ,  $b' = PF$  e  $c' = PG$ . Primeiramente, calculemos  $BP, CP$  e  $AP$ .

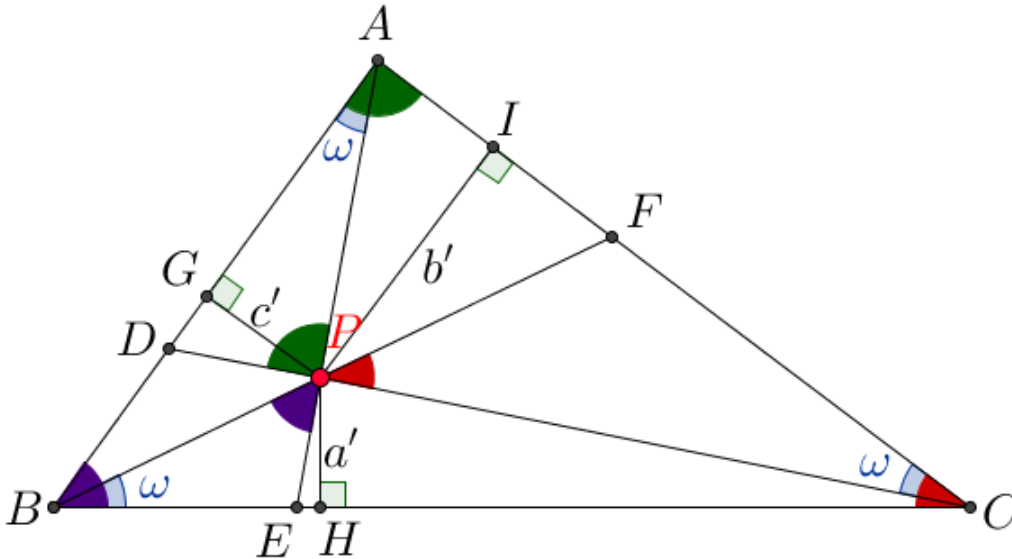


Figura 23: Distâncias do primeiro ponto de Brocard aos lados do  $\triangle ABC$ .

Em relação aos triângulos  $\triangle ABE$  e  $\triangle BPE$ , observamos que  $\angle BAE \cong \angle PBE$  e  $\angle AEB = \angle PEB$ . Logo, pelo caso ângulo-ângulo de semelhança de triângulos, os triângulos  $\triangle ABE$  e  $\triangle BPE$  são semelhantes pela correspondência  $ABE \longleftrightarrow BPE$  entre seus vértices. Assim,

$$\frac{AB}{BE} = \frac{BP}{PE}$$

donde temos

$$BP = \frac{AB PE}{BE} \tag{1.26}$$

Aplicando a lei dos senos ao triângulo  $\triangle BEP$ , temos

$$\frac{PE}{\text{sen}(\angle PBE)} = \frac{BE}{\text{sen}(\angle BPE)},'$$

isto é,

$$\frac{PE}{BE} = \frac{\text{sen}(\angle PBE)}{\text{sen}(\angle BPE)} \quad (1.27)$$

Substituindo 1.27 em 1.26, chegamos a

$$BP = \frac{BA \text{sen}(\angle PBE)}{\text{sen}(\angle BPE)} \quad (1.28)$$

De modo totalmente análogo, obtemos

$$CP = \frac{CB \text{sen}(\angle PCF)}{\text{sen}(\angle CPF)}, \quad (1.29)$$

a partir da semelhança entre os triângulos  $\triangle CBF$  e  $\triangle PCF$ , e

$$AP = \frac{AC \text{sen}(\angle PAD)}{\text{sen}(\angle APD)}, \quad (1.30)$$

a partir da semelhança entre os triângulos  $\triangle ADC$  e  $\triangle PDA$ .

Mas,

$$\text{sen}(\angle PBH) = \frac{PH}{PB},'$$

isto é,

$$PH = PB \text{sen}(\angle PBH). \quad (1.31)$$

Substituindo 1.28 em 1.31, obtemos

$$PH = \frac{BA \text{sen}(\angle PBH) \text{sen}(\angle PBE)}{\text{sen}(\angle BPE)} = \frac{BA(\text{sen}(\angle PBH))^2}{\text{sen}(\angle BPE)} \quad (1.32)$$

De modo análogo,

$$PI = PC \text{sen}(\angle PCI) \quad (1.33)$$

e

$$PG = AP \text{sen}(\angle PAG). \quad (1.34)$$

Substituindo 1.29 em 1.33, obtemos

$$PI = \frac{CB \text{sen}(\angle PCI) \text{sen}(\angle PCF)}{\text{sen}(\angle CPF)} = \frac{CB(\text{sen}(\angle PCI))^2}{\text{sen}(\angle CPF)} \quad (1.35)$$

e substituindo 1.30 em 1.34, obtemos

$$PG = \frac{AC \text{sen}(\angle PAD) \text{sen}(\angle PAG)}{\text{sen}(\angle APD)} = \frac{AC(\text{sen}(\angle PAG))^2}{\text{sen}(\angle APD)}. \quad (1.36)$$

Das semelhanças de triângulos obtidas anteriormente decorre que  $\angle BAC \cong \angle APD$ ,  $\angle ABC \cong \angle BPE$  e  $\angle ACB \cong \angle CPF$ . A área do triângulo  $\triangle ABC$  é dada por

$$S_{ABC} = \frac{AB \ AC \ \text{sen}(\angle BAC)}{2} = \frac{BA \ BC \ \text{sen}(\angle ABC)}{2} = \frac{CA \ CB \ \text{sen}(\angle ACB)}{2},$$

isto é,

$$S_{ABC} = \frac{AB \ AC \ \text{sen}(\angle APD)}{2} = \frac{BA \ BC \ \text{sen}(\angle BPE)}{2} = \frac{CA \ CB \ \text{sen}(\angle CPF)}{2}. \quad (1.37)$$

Por (1.32), (1.35) e (1.36), as coordenadas trilineares exatas do ponto  $P$  são

$$(a', b', c') = \left( \frac{BA(\text{sen}(\angle PBH))^2}{\text{sen}(\angle BPE)}, \frac{CB(\text{sen}(\angle PCI))^2}{\text{sen}(\angle CPF)}, \frac{AC(\text{sen}(\angle PAG))^2}{\text{sen}(\angle APD)} \right) \quad (1.38)$$

Mas,  $\angle PBH \cong \angle PCI \cong \angle PAG$ , pois suas medidas correspondem à medida  $\omega$  do primeiro ângulo de Brocard do triângulo  $\triangle ABC$ . Assim, podemos multiplicar as coordenadas trilineares de  $P$  por  $\frac{1}{\text{sen}^2 \omega}$ , obtendo

$$\frac{BA}{\text{sen}(\angle BPE)} : \frac{CB}{\text{sen}(\angle CPF)} : \frac{AC}{\text{sen}(\angle APD)} \quad (1.39)$$

Substituindo 1.37 em 1.39, obtemos

$$\frac{\frac{BA}{2S_{ABC}}}{\frac{BA \ BC}{AB \ AC}} : \frac{\frac{CB}{2S_{ABC}}}{\frac{CB \ AC}{AB \ AC}} : \frac{\frac{AC}{2S_{ABC}}}{\frac{AB \ AC}{AB \ AC}}$$

ou seja,

$$\frac{CB \ BA^2}{2S_{ABC}} : \frac{AC \ CB^2}{2S_{ABC}} : \frac{BA \ AC^2}{2S_{ABC}} \quad (1.40)$$

Multiplicando as coordenadas trilineares de  $P$  dadas em (1.40) por  $\frac{2S_{ABC}}{AB \ AC \ BC}$ , obtemos

$$P = \frac{AB}{AC} : \frac{BC}{AB} : \frac{AC}{BC}$$

- ii) De acordo com a Observação 1.23, podemos determinar as coordenadas trilineares do segundo ponto de Brocard  $Q$  a partir de (1.26). Tomamos como referência as Figuras 23 e 24. Para isso, basta intercambiar os vértices  $B$  e  $C$  nas expressões de (1.26), mantendo o vértice  $A$  inalterado, e observar que ao fazer esta mudança de  $B$  com  $C$ , são trocados os papéis de  $b'$  e  $c'$  em (1.26).

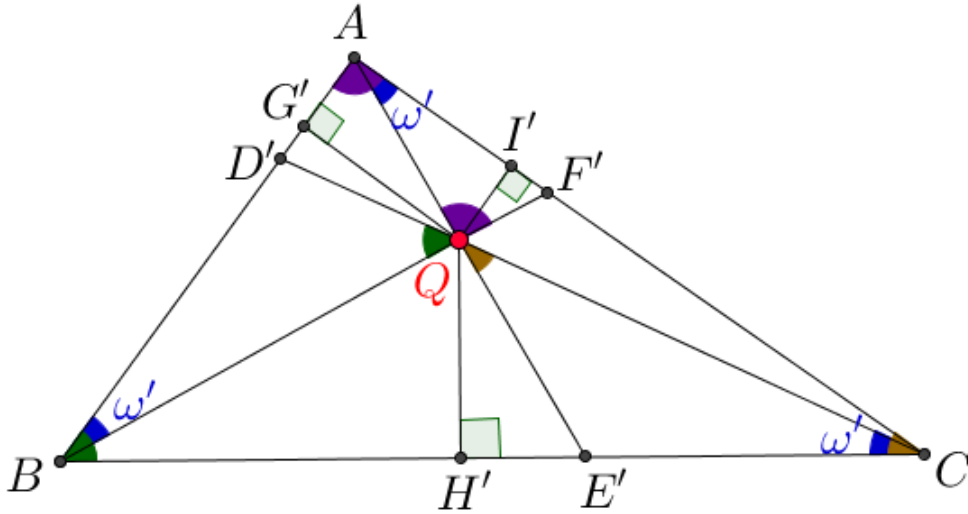


Figura 24: Distâncias do segundo ponto de Brocard aos lados do  $\triangle ABC$ .

Portanto,

$$Q = \frac{AC}{AB} : \frac{BA}{BC} : \frac{CB}{AC}.$$

- iii) Finalmente, obtemos as coordenadas trilineares do terceiro ponto de Brocard, também conhecido como ponto médio de Brocard. Sejam  $X, Y$  e  $Z$  os pés das perpendiculares baixadas de  $T$  sobre os lados  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  e  $\overline{CA}$ . Da mesma forma, sejam  $G, H$  e  $I$  os pés das perpendiculares baixadas de  $P$  sobre os lados  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  e  $\overline{CA}$ , e  $G', H'$  e  $I'$  os pés das perpendiculares baixadas de  $Q$  sobre os lados  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  e  $\overline{CA}$ . Como  $T$  está entre  $P$  e  $Q$  e projeções ortogonais preservam a relação estar-entre, temos  $G' - X - G$ ,  $H - Y - H'$  e  $I' - Z - I$ , como está ilustrado na Figura 25.

Por construção,  $\overline{PH} \parallel \overline{TY} \parallel \overline{QH'}$ ,  $\overline{PI} \parallel \overline{TZ} \parallel \overline{QI'}$  e  $\overline{PG} \parallel \overline{TX} \parallel \overline{QG'}$ . Como  $T$  é o ponto médio de  $\overline{PQ}$ , segue do Teorema de Tales que  $X, Y$  e  $Z$  são os pontos médios de  $\overline{G'G}$ ,  $\overline{HH'}$  e  $\overline{I'I}$ , respectivamente. Logo,  $PQH'H$ ,  $PQI'I$  e  $PQG'G$  são trapézios com bases médias  $\overline{TY}$ ,  $\overline{TZ}$  e  $\overline{TX}$ , respectivamente. Deste modo,

$$TY = \frac{PH + QH'}{2}, \quad TZ = \frac{PI + QI'}{2} \quad \text{e} \quad TX = \frac{PG + QG'}{2}.$$

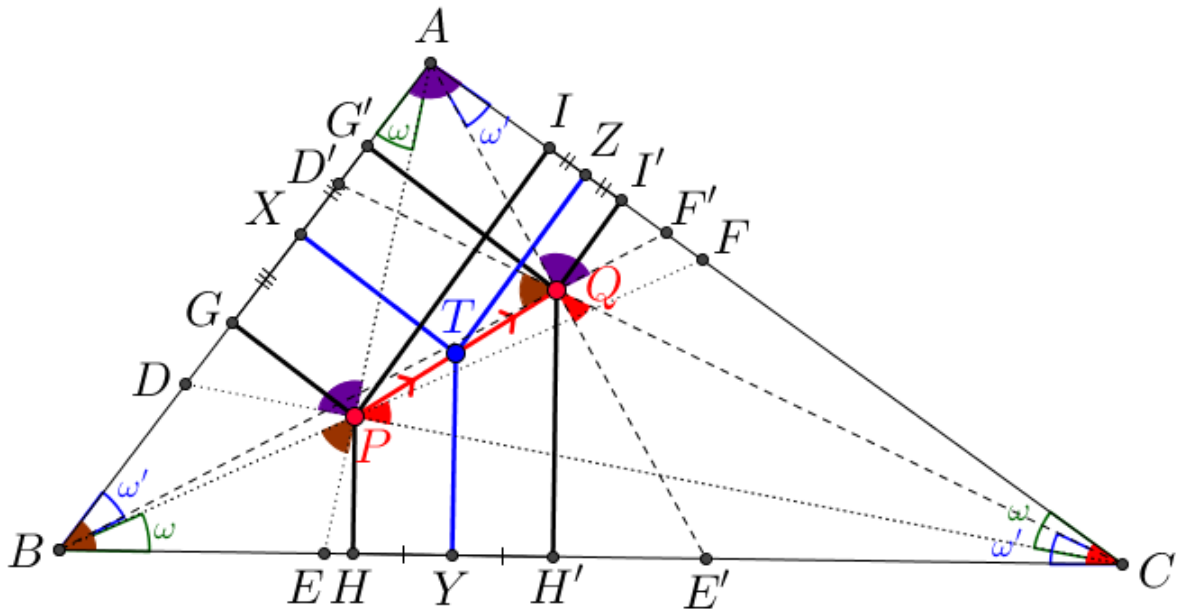


Figura 25: Distâncias do ponto médio de Brocard  $T$  aos lados do  $\triangle ABC$ .

Procedendo de modo análogo ao que fizemos em (1.32), (1.35) e (1.36), obtemos

$$QH' = \frac{AC(\text{sen}(\angle QCH'))^2}{\text{sen}(\angle E'QC)}, \quad QI' = \frac{AB(\text{sen}(\angle QAI'))^2}{\text{sen}(\angle AQF')}, \quad QG' = \frac{BC(\text{sen}(\angle G'BQ))^2}{\text{sen}(\angle D'QB)}.$$

Deste modo, as coordenadas trilineares exatas do ponto  $T$  são  $(TY, TZ, TX)$ , com

$$TY = \frac{\frac{AB(\text{sen}(\angle PBH))^2}{\text{sen}(\angle BPE)} + \frac{AC(\text{sen}(\angle QCH'))^2}{\text{sen}(\angle E'QC)}}{2}$$

$$TZ = \frac{\frac{BC(\text{sen}(\angle PCI))^2}{\text{sen}(\angle CPF)} + \frac{AB(\text{sen}(\angle QAI'))^2}{\text{sen}(\angle AQF')}}{2}$$

e

$$TX = \frac{\frac{AC(\text{sen}(\angle PAG))^2}{\text{sen}(\angle APD)} + \frac{BC(\text{sen}(\angle G'BQ))^2}{\text{sen}(\angle D'QB)}}{2}.$$

Vimos na prova do item i) que são semelhantes os seguintes triângulos:

$$\triangle ABE \sim \triangle BPE, \quad \triangle CBF \sim \triangle PCF, \quad \triangle ADC \sim \triangle PDA.$$

Assim,

- $\angle BPE \cong \angle ABE = \angle ABC$ ;

- $\angle CPF \cong \angle BCF = \angle BCA$ ;
- $\angle APD \cong \angle CAD = \angle CAB$ .

De modo análogo, mostra-se que que são semelhantes os seguintes triângulos:

$$\triangle D'BQ \sim \triangle D'CB, \quad \triangle E'QC \sim \triangle E'CA, \quad \triangle AQF' \sim \triangle BAF'.$$

Assim,

- $\angle D'QB \cong \angle D'BC = \angle ABC$ ;
- $\angle E'QC \cong \angle E'CA = \angle BCA$ ;
- $\angle AQF' \cong \angle BAF' = \angle CAB$ .

Consequentemente,

- $\angle BPE \cong \angle D'QB \cong \angle ABC$ ;
- $\angle CPF \cong \angle E'QC \cong \angle BCA$ ;
- $\angle APD \cong \angle AQF' \cong \angle CAB$ .

Além disso, segue da Definição 1.21 e da Observação 1.23 que  $\angle PBH \cong \angle PCI \cong \angle PAG \cong \angle QCH' \cong \angle G'BQ \cong \angle QAI'$ , cuja medida é  $\omega$ . Multiplicando as coordenadas trilineares exatas de  $T$  por  $\frac{2}{(\text{sen } \omega)^2}$ , obtemos as seguintes coordenadas trilineares de  $T$ :

$$\frac{AB}{\text{sen}(\angle ABC)} + \frac{AC}{\text{sen}(\angle ACB)} : \frac{BC}{\text{sen}(\angle ACB)} + \frac{AB}{\text{sen}(\angle BAC)} : \frac{AC}{\text{sen}(\angle BAC)} + \frac{BC}{\text{sen}(\angle ABC)}$$

Aplicando a lei dos senos ao triângulo  $\triangle ABC$ , temos que

$$\frac{BC}{\text{sen}(\angle BAC)} = \frac{AC}{\text{sen}(\angle ABC)} = \frac{AB}{\text{sen}(\angle ACB)}.$$

Logo, as coordenadas trilineares de  $T$  reescrevem-se como

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\text{sen}(\angle BAC)} \left( \frac{AB \cdot BC}{AC} + \frac{AC \cdot BC}{AB} \right) : \\ & \frac{1}{\text{sen}(\angle ABC)} \left( \frac{BC \cdot AC}{AB} + \frac{AB \cdot AC}{BC} \right) : \\ & \frac{1}{\text{sen}(\angle ACB)} \left( \frac{AC \cdot AB}{BC} + \frac{BC \cdot AB}{AC} \right) \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\frac{AB^2 \cdot BC + AC^2 \cdot BC}{AB \cdot AC \cdot \text{sen}(\angle BAC)} : \frac{BC^2 \cdot AC + AB^2 \cdot AC}{AB \cdot BC \cdot \text{sen}(\angle ABC)} : \frac{AC^2 \cdot AB + BC^2 \cdot AB}{AC \cdot BC \cdot \text{sen}(\angle ACB)}$$

Como  $2S_{ABC} = AB \cdot AC \cdot \sin(\angle BAC) = AB \cdot BC \cdot \sin(\angle ABC) = AC \cdot BC \cdot \sin(\angle ACB)$ , obtemos

$$\frac{AB^2 \cdot BC + AC^2 \cdot BC}{2S_{ABC}} : \frac{BC^2 \cdot AC + AB^2 \cdot AC}{2S_{ABC}} : \frac{AC^2 \cdot AB + BC^2 \cdot AB}{2S_{ABC}}$$

Multiplicando então as coordenadas trilineares de  $T$  por  $2S_{ABC}$ , concluímos que

$$T = BC(AB^2 + AC^2) : AC(BC^2 + AB^2) : AB(AC^2 + BC^2). \quad (1.41)$$

□

### 1.1.6 Notação de Conway

Nesta subseção, apresentamos a notação de Conway para triângulos.

**Definição 1.25.** (Notação de Conway) Denotando por  $S_{ABC}$  a área de um triângulo  $\triangle ABC$  qualquer, por  $\delta = 2S_{ABC}$  e por  $\theta$  a medida de um ângulo qualquer, a notação de Conway é definida por

$$S_\theta = \delta \cot \theta.$$

No caso em que  $\theta$  é igual ao ângulo de Brocard  $\omega$  do triângulo  $\triangle ABC$ , temos, por (1.14), que

$$S_\omega = \delta \cot \omega = 2S_{ABC} \frac{AB^2 + AC^2 + BC^2}{4S_{ABC}} = \frac{AB^2 + AC^2 + BC^2}{2}. \quad (1.42)$$

### 1.1.7 Centros de Kimberling

Nesta subseção, apresentamos alguns centros especiais de um triângulo qualquer, conhecidos como Centros de Kimberling, em honra ao matemático Clark Kimberling, que criou em 1994 a "Clark Kimberling's Encyclopedia of Triangle Centers" [3], uma enciclopedia contendo as coordenadas trilineares e baricêntricas de 37885 centros, identificados pela notação  $X_n$ , onde  $n$  é sua posição na enciclopedia. Dentre esses centros,  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  e  $X_4$  são o incentro, o baricentro, o circuncentro e o ortocentro de



um triângulo  $\triangle ABC$ . Na Figura ??, estão ilustrados alguns centros de Kimberling de um triângulo  $\triangle ABC$ .

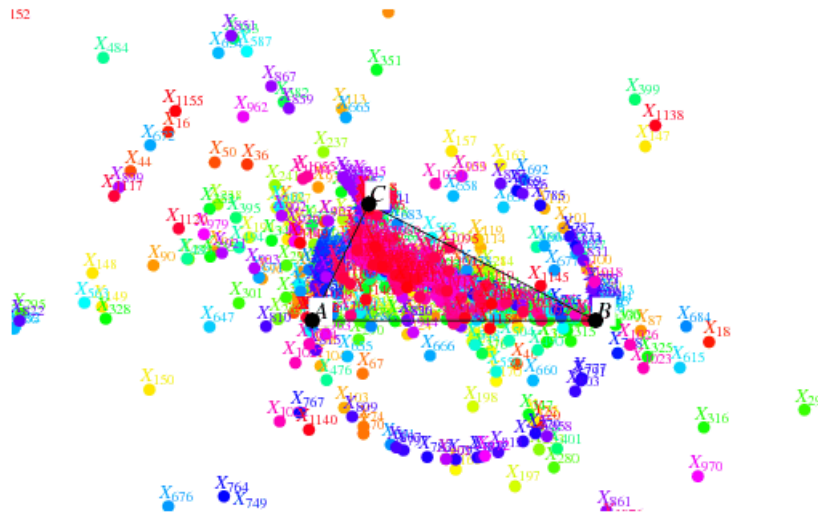


Figura 26: Centros de Kimberling de um triângulo  $\triangle ABC$ .

Fonte: <https://mathworld.wolfram.com/KimberlingCenter.html>

- $X_6$  - Ponto Simediano

Na enciclopédia de Kimberling, o ponto simediano de um triângulo corresponde a  $X_6$ . A seguir, obtemos suas coordenadas trilineares.

**Observação 1.26.** Na Seção 2.2.1, veremos que o ponto simediano de um triângulo  $\triangle ABC$  é o centro da circunferência do cosseno do triângulo  $\triangle ABC$ .

**Proposição 1.27.** As coordenadas trilineares do ponto simediano  $K$  de um triângulo  $\triangle ABC$  são dadas por

$$BC : AC : AB.$$

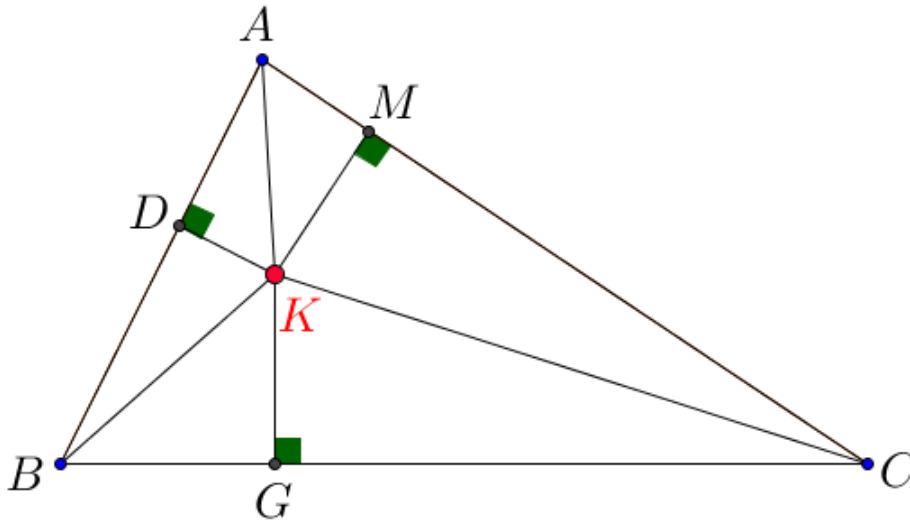


Figura 27:  $X_6$  - Ponto Simediano do triângulo  $\triangle ABC$ .

*Demonstração.* Sejam  $D, G$  e  $M$  os pés das alturas baixadas de  $K$  sobre os lados  $\overline{AB}, \overline{BC}$  e  $\overline{AC}$ , ou seus prolongamentos, respectivamente, como está ilustrado na Figura 27. De acordo com a Observação 1.12, o ponto simediano  $K$  do triângulo  $\triangle ABC$  está sempre no interior do triângulo. Assim,

$$S_{ABC} = S_{AKB} + S_{BKC} + S_{AKC} = \frac{AB \cdot KD}{2} + \frac{BC \cdot KG}{2} + \frac{AC \cdot KM}{2},$$

isto é,

$$2 S_{ABC} = AB \cdot KD + BC \cdot KG + AC \cdot KM \tag{1.43}$$

Segue da Proposição 1.18 que  $\frac{KD}{AB} = \frac{KG}{BC} = \frac{KM}{AC}$ . Substituindo  $KD$  e  $KM$  em 1.43, obtemos

$$2 S_{ABC} = \frac{AB \cdot KG \cdot AB}{BC} + BC \cdot KG + \frac{AC \cdot AC \cdot KG}{BC} = \frac{AB^2 + BC^2 + AC^2}{BC} \cdot KG.$$

Conseqüentemente, usando a notação de Conway da Definição 1.25 e (1.14), temos que

$$KG = \frac{4 S_{ABC} BC}{2 (AB^2 + BC^2 + AC^2)} = \frac{BC}{2 \cot \omega}. \tag{1.44}$$

Analogamente,

$$KM = \frac{AC}{2 \cot \omega} \tag{1.45}$$

e

$$KD = \frac{AB}{2 \cot \omega}. \tag{1.46}$$

Por (1.44), (1.45) e (1.46). as coordenadas trilineares exatas do ponto simediano  $K$  do triângulo  $\triangle ABC$  são

$$K = (KG, KM, KD) = \left( \frac{BC}{2 \cot \omega'}, \frac{AC}{2 \cot \omega'}, \frac{AB}{2 \cot \omega} \right). \quad (1.47)$$

Multiplicando por  $2 \cot \omega$  as coordenadas obtidas em (1.47), obtemos as coordenadas trilineares de  $K$

$$BC : AC : AB.$$

□

- $X_{39}$  - **Ponto médio de Brocard**

Na enciclopédia de Kimberling, o ponto médio de Brocard  $T$  de um triângulo  $\triangle ABC$  também conhecido como terceiro ponto de Brocard do triângulo  $\triangle ABC$ , corresponde a  $X_{39}$ . Suas coordenadas trilineares foram obtidas em (1.25), na Proposição 1.24, como

$$T = AB(BC^2 + AC^2) : BC(AC^2 + AB^2) : AC(AB^2 + BC^2).$$

- $X_{182}$  - **Ponto médio do diâmetro de Brocard**

No Capítulo 2, veremos que o circuncentro e o ponto simediano de um triângulo têm um papel fundamental na construção das circunferências de Tucker, uma vez que o centro da circunferência de Tucker é colinear a eles.

**Definição 1.28.** Sendo  $\triangle ABC$  um triângulo qualquer,  $K$  e  $O$  o ponto simediano e o circuncentro do triângulo  $\triangle ABC$ , o segmento  $\overline{KO}$  é chamado de diâmetro de Brocard do triângulo  $\triangle ABC$ .

**Observação 1.29.** Na Seção 2.18, veremos que o ponto médio do diâmetro de Brocard  $Z$  de um triângulo  $\triangle ABC$  é o centro da primeira circunferência de Lemoine do triângulo  $\triangle ABC$ .

Na enciclopédia de Kimberling, o ponto médio do diâmetro de Brocard  $Z$  de um triângulo corresponde a  $X_{182}$ . A seguir, obtemos suas coordenadas trilineares. Para fazer isto, determinaremos as coordenadas trilineares exatas de  $Z$  como sendo a média entre as coordenadas trilineares exatas de  $K$  e  $O$ . Então, começamos exibindo as coordenadas trilineares exatas do circuncentro do triângulo.

**Lema 1.30.** As coordenadas trilineares exatas do circuncentro  $O$  de um triângulo  $\triangle ABC$  qualquer são dadas por

$$\frac{BC \cot(\angle BAC)}{2} : \frac{AC \cot(\angle ABC)}{2} : \frac{AB \cot(\angle ACB)}{2}. \quad (1.48)$$

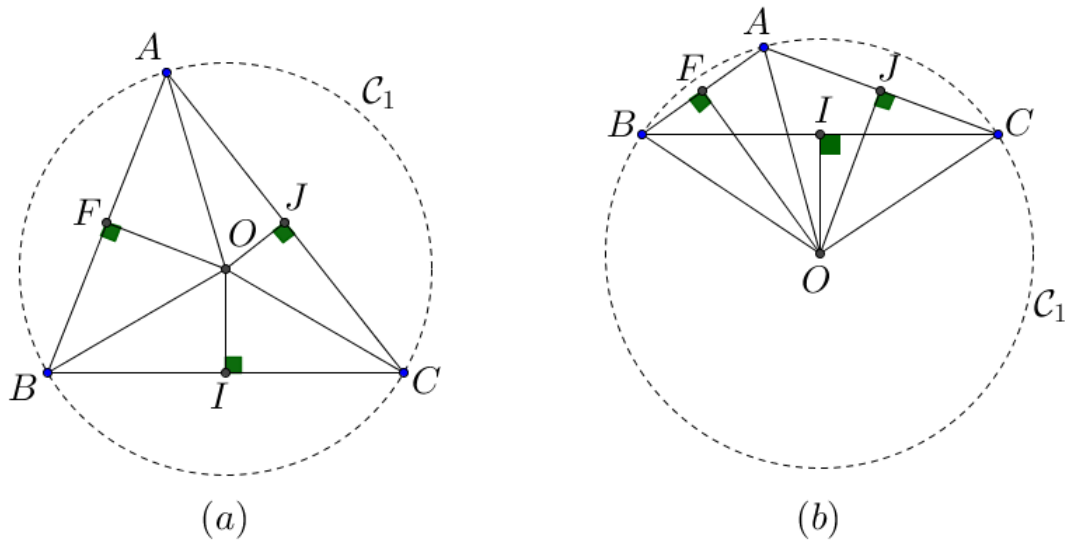


Figura 28: (a)  $O$  e  $A$  do mesmo lado de  $\overleftrightarrow{BC}$ ; (b)  $O$  e  $A$  em lados opostos de  $\overleftrightarrow{BC}$ .

*Demonstração.* Sejam  $C_1$  a circunferência circunscrita ao triângulo  $\triangle ABC$  e  $R$  o seu raio. Pela lei dos senos aplicada ao triângulo  $\triangle ABC$ , temos que

$$\frac{BC}{\text{sen}(\angle BAC)} = \frac{AB}{\text{sen}(\angle BCA)} = \frac{AC}{\text{sen}(\angle ABC)} = 2R. \quad (1.49)$$

Sendo  $I$  a projeção ortogonal de  $O$  sobre a reta  $\overleftrightarrow{BC}$ , temos que a área do triângulo  $\triangle OBC$  é

$$S_{OBC} = \frac{BC \cdot OI}{2}. \quad (1.50)$$

Por outro lado,

$$S_{OBC} = \frac{OB \cdot OC \cdot \text{sen}(\angle BOC)}{2} = \frac{R^2 \text{sen}(\angle BOC)}{2}. \quad (1.51)$$

Segue de (1.50) e (1.51) que

$$OI = \frac{R^2 \text{sen}(\angle BOC)}{BC}. \quad (1.52)$$

Substituindo (1.49) em (1.52), obtemos

$$OI = \frac{BC^2 \operatorname{sen}(\angle BOC)}{4 BC \operatorname{sen}^2(\angle BAC)} = \frac{BC \operatorname{sen}(\angle BOC)}{4 \operatorname{sen}^2(\angle BAC)}. \quad (1.53)$$

Para determinarmos a medida do ângulo  $\angle BOC$  em função da medida do ângulo  $\angle BAC$ , consideramos os casos:

- **Caso 1:**  $O$  e  $A$  estão do mesmo lado de  $\overleftrightarrow{BC}$ , como está ilustrado na Figura 28(a).

Neste caso, a medida do ângulo central  $\angle BOC$  é igual ao dobro da medida do ângulo inscrito  $\angle BAC$ . Logo,

$$OI = \frac{BC \operatorname{sen}(2 \operatorname{med}(\angle BAC))}{4 \operatorname{sen}^2(\angle BAC)} = \frac{BC 2 \operatorname{sen}(\angle BAC) \cos(\angle BAC)}{4 \operatorname{sen}^2(\angle BAC)} = \frac{BC \cot(\angle BAC)}{2}.$$

- **Caso 2:**  $O$  e  $A$  em lados opostos de  $\overleftrightarrow{BC}$ , como está ilustrado na Figura 28(b).

Neste caso, a medida do ângulo central  $\angle BOC$  é igual a  $2\pi$  menos o dobro da medida do ângulo inscrito  $\angle BAC$ , isto é,  $2(\pi - \operatorname{med}(\angle BAC))$ . Logo,

$$\begin{aligned} OI &= \frac{BC \operatorname{sen}(2(\pi - \operatorname{med}(\angle BAC)))}{4 \operatorname{sen}^2(\angle BAC)} = \frac{2 BC \operatorname{sen}(\pi - \operatorname{med}(\angle BAC)) \cos(\pi - \operatorname{med}(\angle BAC))}{4 \operatorname{sen}^2(\angle BAC)} \\ &= - \frac{BC \operatorname{sen}(\angle BAC) \cos(\angle BAC)}{2 \operatorname{sen}^2(\angle BAC)} = - \frac{BC \cot(\angle BAC)}{2}. \end{aligned}$$

Denotando por  $OI^* = \operatorname{dist}_s(O, \overleftrightarrow{BC})$ , temos pela Definição 1.8 que

$$OI^* = \frac{BC \cot(\angle BAC)}{2}.$$

Analogamente, sendo  $F$  e  $J$  as projeções ortogonais de  $O$  sobre  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $\overleftrightarrow{AC}$ , respectivamente,  $OF^* = \operatorname{dist}_s(O, \overleftrightarrow{AB})$  e  $OJ^* = \operatorname{dist}_s(O, \overleftrightarrow{AC})$ , temos que as coordenadas trilineares exatas do circuncentro  $O$  do triângulo  $\triangle ABC$  são

$$O = (OI^*, OJ^*, OF^*) = \left( \frac{BC \cot(\angle BAC)}{2}, \frac{AC \cot(\angle ABC)}{2}, \frac{AB \cot(\angle ACB)}{2} \right).$$

□

**Observação 1.31.** Observamos que pode ocorrer de  $O$  pertencer à reta  $\overleftrightarrow{BC}$ , como está ilustrado na Figura 29. Por ser o circuncentro  $O$  do triângulo  $\triangle ABC$ , neste caso  $O$  seria o ponto médio de  $\overline{BC}$ . Consequentemente,  $OI^* = 0$  e o ângulo  $\angle BAC$  seria reto, de modo que  $\cot(\angle BAC) = 0$ . Ou seja, continuaria válida a expressão

$$OI^* = \frac{BC \cot(\angle BAC)}{2}.$$

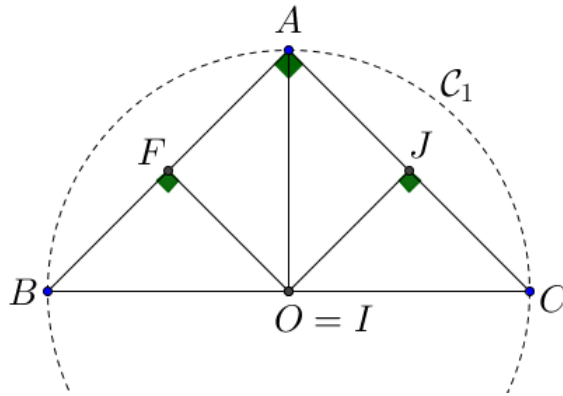


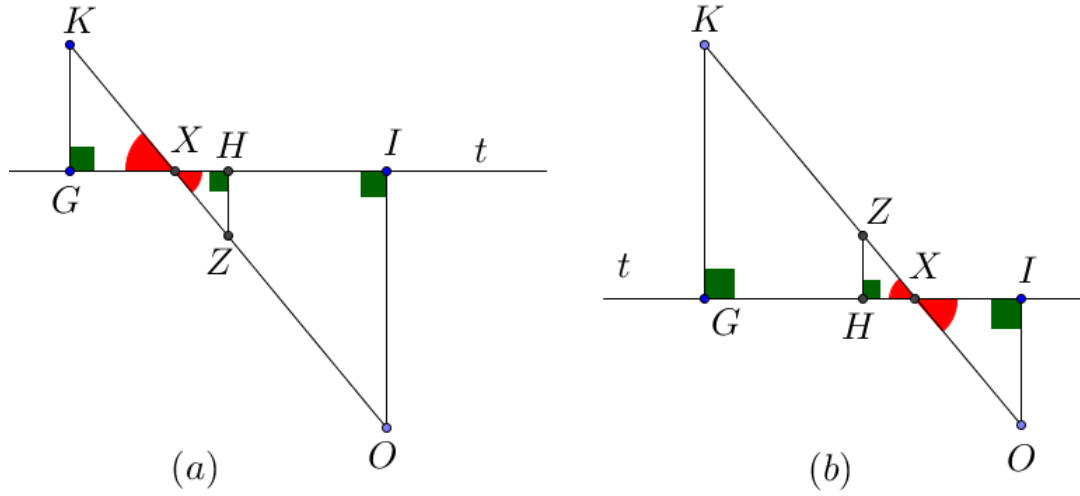
Figura 29: (a)  $O$  é o ponto médio de  $\overline{BC}$ .

**Observação 1.32.** Observamos que a posição do circuncentro  $O$  em relação ao vértice  $A$  determina a natureza do ângulo  $\angle BAC$ . De fato, no caso em que  $O$  e  $A$  estão do mesmo lado de  $\overleftrightarrow{BC}$ , temos que  $2 \operatorname{med}(\angle BAC) = \operatorname{med}(\angle BOC) < \pi$ . Logo,  $\operatorname{med}(\angle BAC) < \pi/2$ , isto é,  $\angle BAC$  é um ângulo agudo. Agora, no caso em que  $O$  e  $A$  estão em lados opostos de  $\overleftrightarrow{BC}$ , temos que  $2\pi - 2 \operatorname{med}(\angle BAC) = \operatorname{med}(\angle BOC) < \pi$ . Logo,  $\operatorname{med}(\angle BAC) > \pi/2$ , isto é,  $\angle BAC$  é um ângulo obtuso.

Lembremos que estamos interessados em determinar as coordenadas trilineares exatas de  $Z$ . No caso em que  $O$  e  $A$  estão do mesmo lado de  $\overleftrightarrow{BC}$ , veremos que basta aplicar o teorema da base média de trapézios. No entanto, se  $O$  e  $A$  estiverem em lados opostos de  $\overleftrightarrow{BC}$ , usaremos o seguinte resultado auxiliar, o qual nos referimos como base média de um trapézio degenerado.

**Lema 1.33.** (Teorema da base média de um trapézio degenerado) Sejam  $\overline{KO}$  um segmento qualquer e  $Z$  seu ponto médio. De um dos lados da reta  $\overleftrightarrow{KO}$ , tomamos um ponto  $G$  tal que  $\overline{KG} \not\parallel \overline{KO}$ . Em seguida, consideramos uma reta  $t$  que passa por  $G$ , perpendicular a  $\overline{KG}$  e que cruza  $\overline{KO} \setminus \{K, O\}$  num ponto  $X \neq Z$ , como está ilustrado na Figura 30. Sejam  $H, I$  pontos sobre a reta  $t$  tais que  $\overline{ZH} \parallel \overline{KG} \parallel \overline{OI}$ . Então

$$ZH = \frac{|KG - OI|}{2}.$$

Figura 30: Trapézio degenerado  $KGIO$ .

*Demonstração.* Temos dois casos possíveis:  $K - X - Z - O$  e  $K - Z - X - O$ . Em qualquer um destes casos, por construção,  $\overline{ZH} \parallel \overline{KG} \parallel \overline{OI}$ . Assim,  $\angle K GX \cong \angle ZHX \cong \angle OIX$ . Além disso, são congruentes os ângulos opostos pelo vértice  $\angle KXG \cong \angle ZXH = \angle OXI$ . Pelo caso ângulo-ângulo de semelhança de triângulos temos que  $\triangle KXG \sim \triangle ZXH \sim \triangle OXI$ . Logo,

$$\frac{GX}{HX} = \frac{KX}{ZX} = \frac{KG}{ZH} \quad (1.54)$$

e

$$\frac{HX}{IX} = \frac{ZX}{OX} = \frac{ZH}{OI}. \quad (1.55)$$

Aplicando propriedades de proporcionalidade a (1.54) e (1.55), obtemos

$$\frac{KX + ZX}{ZX} = \frac{KG + ZH}{ZH}, \quad (1.56)$$

$$\frac{ZX}{OX - ZX} = \frac{ZH}{OI - ZH} \quad (1.57)$$

$$\frac{KX - ZX}{ZX} = \frac{KG - ZH}{ZH}, \quad (1.58)$$

$$\frac{ZX}{OX + ZX} = \frac{ZH}{OI + ZH}. \quad (1.59)$$

Como  $Z$  é o ponto médio de  $\overline{KO}$  então  $KZ = ZO$ . Se

- $K - X - Z - O$  então  $KX + ZX = KZ$  e  $ZX + ZO = XO$ . Assim, (1.56) e (1.57) tornam-se

$$\frac{KZ}{ZX} = \frac{KG + ZH}{ZH} \quad (1.60)$$

e

$$\frac{ZX}{OZ} = \frac{ZH}{OI - ZH}. \quad (1.61)$$

Multiplicando (1.60) e (1.61), obtemos

$$\frac{KZ}{ZX} \frac{ZX}{OZ} = \frac{KG + ZH}{ZH} \frac{ZH}{OI - ZH}'$$

ou seja,

$$1 = \frac{KG + ZH}{OI - ZH}$$

$$OI - ZH = KG + ZH.$$

Logo,

$$ZH = \frac{OI - KG}{2}. \quad (1.62)$$

- $K - Z - X - O$  então  $KX - ZX = KZ$  e  $ZO = ZX + XO$ . Assim, (1.58) e (1.59) tornam-se

$$\frac{KZ}{ZX} = \frac{KG - ZH}{ZH} \quad (1.63)$$

e

$$\frac{ZX}{OZ} = \frac{ZH}{OI + ZH}. \quad (1.64)$$

Multiplicando (1.63) e (1.64), obtemos

$$\frac{KZ}{ZX} \frac{ZX}{OZ} = \frac{KG - ZH}{ZH} \frac{ZH}{OI + ZH}'$$

ou seja,

$$1 = \frac{KG - ZH}{OI + ZH}$$

$$OI + ZH = KG - ZH.$$

Logo,

$$ZH = \frac{KG - OI}{2}. \quad (1.65)$$

Portanto,  $ZH = \frac{|KG - OI|}{2}$ .

□



**Observação 1.34.** Observamos que a posição de  $X$  no segmento  $\overline{KO}$  em relação ao seu ponto médio  $Z$  determina se  $ZH$  é igual a  $\frac{KG - OI}{2}$  ou a  $\frac{OI - KG}{2}$ . De fato, como  $\triangle KXG \sim \triangle OXI$ , a proporcionalidade entre as medidas de seus lados correspondentes é mantida. Assim, se  $K - X - Z - O$  então  $KX < OX$ , donde concluímos que  $KG < OI$ . No entanto, se  $K - Z - X - O$  então  $OX < KX$ , donde concluímos que  $OI < KG$ .

**Observação 1.35.** A seguir, na prova da obtenção das coordenadas trilineares exatas do ponto médio do diâmetro de Brocard, tomaremos um triângulo  $\triangle ABC$  de referência,  $K, O$  e  $Z$  como sendo seus pontos simediano, ortocentro e ponto médio do diâmetro de Brocard. Sabemos que  $K$  está sempre no interior do triângulo  $\triangle ABC$  e que  $Z$  é o ponto médio de  $\overline{KO}$ . Se  $A$  e  $O$  estiverem em lados opostos em relação à reta  $\overleftrightarrow{BC}$ , assim como  $A$  e  $Z$ , como está ilustrado na Figura 32, então, por (1.62), temos que

$$-ZH^* = \frac{-OI^* - KG^*}{2},$$

isto é,

$$ZH^* = \frac{OI^* + KG^*}{2},$$

onde  $ZH^* = \text{dist}_s(Z, \overleftrightarrow{BC})$ ,  $OI^* = \text{dist}_s(O, \overleftrightarrow{BC})$  e  $KG^* = \text{dist}_s(K, \overleftrightarrow{BC})$ .

Agora, Se  $A$  e  $O$  estiverem em lados opostos em relação à reta  $\overleftrightarrow{BC}$ , mas  $A$  e  $Z$  estiverem do mesmo lado, como está ilustrado na Figura 33 então, por (1.65), temos que

$$ZH^* = \frac{KG^* + OI^*}{2}.$$

Em ambos os casos, concluímos que  $ZH^*$  se comporta como uma base média do trapézio degenerado  $KGIO$ , de modo que

$$ZH^* = \frac{KG^* + OI^*}{2}. \quad (1.66)$$

**Proposição 1.36.** As coordenadas trilineares do ponto médio do diâmetro de Brocard  $Z$  de um triângulo  $\triangle ABC$  são dadas por

$$\cos(\angle BAC - \omega) : \cos(\angle ABC - \omega) : \cos(\angle BCA - \omega),$$

onde  $\omega$  é a medida do ângulo de Brocard do triângulo  $\triangle ABC$ .

*Demonstração.* Para o caso em que  $A$  e  $O$  estiverem do mesmo lado em relação à reta  $\overleftrightarrow{BC}$ , como na Figura 31, o teorema da base média de trapézio nos possibilita afirmar que

$$ZH^* = \frac{KG^* + OI^*}{2}.$$

Mesmo que  $A$  e  $O$  estejam em lados opostos em relação à reta  $\overleftrightarrow{BC}$ , a Observação 1.34 garante o mesmo resultado, por (1.66).

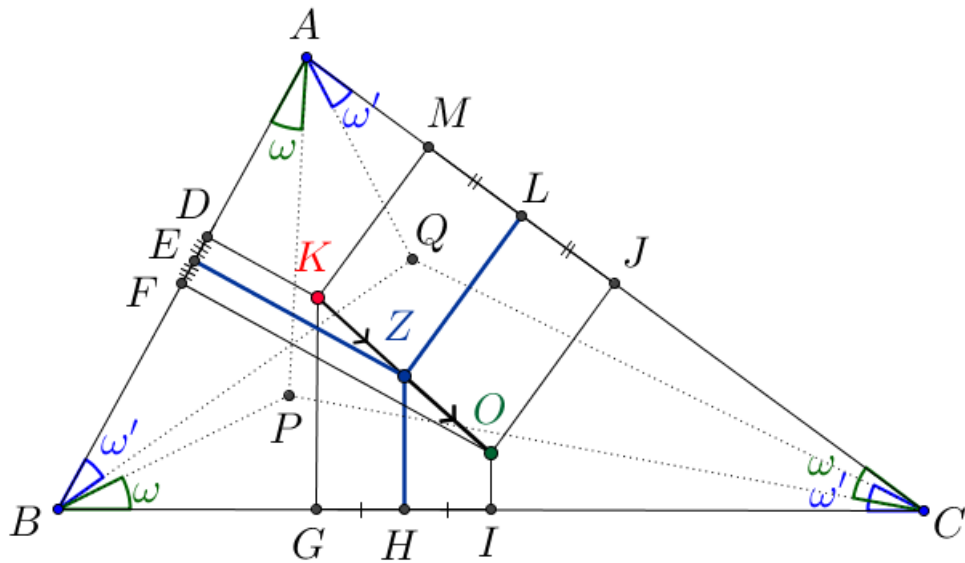


Figura 31: Ponto médio  $Z$  do diâmetro de Brocard, com  $A$  e  $O$  do mesmo lado de  $\overleftrightarrow{BC}$ .

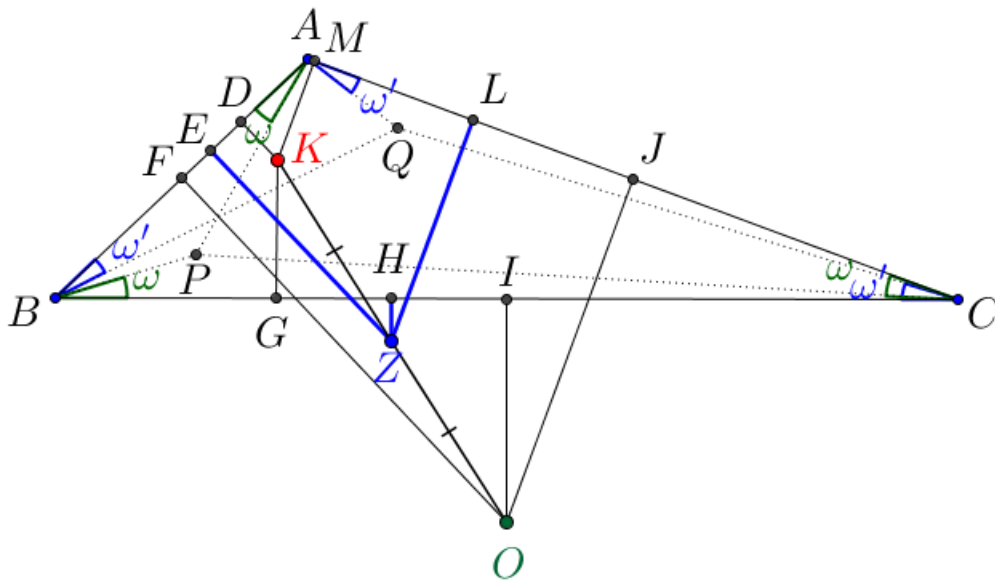


Figura 32: Ponto médio  $Z$  do diâmetro de Brocard, com  $A$  e  $O$  em lados opostos de  $\overleftrightarrow{BC}$ , assim como  $A$  e  $Z$ .

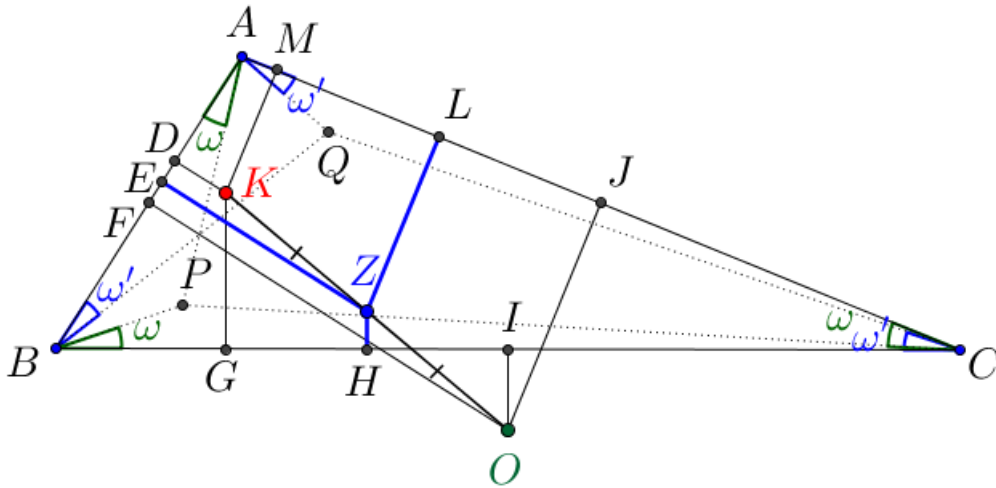


Figura 33: Ponto médio  $Z$  do diâmetro de Brocard, com  $A$  e  $O$  em lados opostos de  $\overleftrightarrow{BC}$ , mas  $A$  e  $Z$  do mesmo lado.

Em (1.48) e (1.47), temos as coordenadas trilineares exatas de  $O$  e  $K$ , respectivamente. Assim, as coordenadas trilineares exatas de  $Z$  são

$$Z = \left( \frac{\frac{BC \cot(\angle BAC)}{2} + \frac{BC}{2 \cot \omega}}{2}, \frac{\frac{AC \cot(\angle ABC)}{2} + \frac{AC}{2 \cot \omega}}{2}, \frac{\frac{AB \cot(\angle ACB)}{2} + \frac{AB}{2 \cot \omega}}{2} \right)$$

$$= \left( \frac{BC \cos(\angle BAC)}{4 \sin(\angle BAC)} + \frac{BC \sin \omega}{4 \cos \omega}, \frac{AC \cos(\angle ABC)}{4 \sin(\angle ABC)} + \frac{AC \sin \omega}{4 \cos \omega}, \frac{AB \cos(\angle ACB)}{4 \sin(\angle ACB)} + \frac{AB \sin \omega}{4 \cos \omega} \right)$$

Mas, por exemplo, a primeira coordenada se reescreve como

$$\frac{BC(\cos(\angle BAC) \cos \omega + \sin \omega \sin(\angle BAC))}{4 \sin(\angle BAC) \cos \omega} = \frac{BC(\cos(\angle BAC - \omega))}{4 \sin(\angle BAC) \cos \omega},$$

de modo que

$$Z = \left( \frac{BC(\cos(\angle BAC - \omega))}{4 \sin(\angle BAC) \cos \omega}, \frac{AC(\cos(\angle ABC - \omega))}{4 \sin(\angle ABC) \cos \omega}, \frac{AB(\cos(\angle ACB - \omega))}{4 \sin(\angle ACB) \cos \omega} \right)$$

Multiplicando as coordenadas trilineares exatas de  $Z$  por  $\frac{4 \cos \omega}{AB \ AC \ BC}$  obtemos as seguintes coordenadas trilineares de  $Z$ :

$$\frac{\cos(\angle BAC - \omega)}{AB \ AC \ \sin(\angle BAC)} : \frac{\cos(\angle ABC - \omega)}{AB \ BC \ \sin(\angle ABC)} : \frac{\cos(\angle ACB - \omega)}{AC \ BC \ \sin(\angle ACB)}$$

$$\frac{\cos(\angle BAC - \omega)}{2S_{ABC}} : \frac{\cos(\angle ABC - \omega)}{2S_{ABC}} : \frac{\cos(\angle ACB - \omega)}{2S_{ABC}}$$

Multiplicando, agora, por  $2S_{ABC}$ , obtemos que  $Z$  tem as seguintes coordenadas trilineares:

$$\cos(\angle BAC - \omega) : \cos(\angle ABC - \omega) : \cos(\angle ACB - \omega).$$

□

---

## CIRCUNFERÊNCIAS DE TUCKER

---

Neste capítulo, definimos as Circunferências de Tucker, além de apresentarmos uma construção para elas. Por fim, exibimos dois casos particulares de Circunferências de Tucker, a Circunferência do Cosseno e a Primeira Circunferência de Lemoine.

### 2.1 HEXÁGONO DE TUCKER

Dado um  $\triangle ABC$ , construímos a seguir um hexágono de modo que seus seis lados sejam, alternadamente, antiparalelos e paralelos às retas suportes dos lados do triângulo  $\triangle ABC$  numa ordem cíclica, como está ilustrado na Figura 34.

Sem perda de generalidades (em relação aos lados do triângulo  $\triangle ABC$ ), começamos construindo uma reta  $p$  que seja antiparalela à reta suporte do lado  $\overline{BC}$  com relação às retas suportes dos lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$ . Sejam  $\{D\} = \overline{AB} \cap p$  e  $\{E\} = \overline{AC} \cap p$ . Temos que  $A - D - B$ ,  $A - E - C$  e  $\angle ADE \cong \angle BCA$ . Em seguida, traçamos a reta  $q$  paralela à reta suporte do  $\overline{AB}$  que passa pelo ponto  $E$ . Seja  $\{F\} = q \cap \overline{BC}$ . Observamos que  $F$  está entre  $B$  e  $C$ , pois  $A - E - C$  e projeções paralelas preservam a relação estar-entre. Agora, traçamos a reta  $r$  que passa por  $F$  e é antiparalela à reta suporte do lado  $\overline{AC}$  com relação às retas suportes dos lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$ . Se existir tal reta  $r$ , seja  $\{G\} = \overline{AB} \cap r$ . Neste caso,  $A - G - B$  e  $\angle BFG \cong \angle CAB$ . Por  $G$ , construímos a reta  $s$  paralela à reta suporte do  $\overline{BC}$ . Seja  $\{H\} = s \cap \overline{AC}$ . Traçamos, caso exista, a reta  $t$  que passa por  $H$  e é antiparalela à reta suporte do lado  $\overline{AB}$  com relação às retas suportes dos lados  $\overline{BC}$  e  $\overline{AC}$ . Seja  $\{I\} = \overline{BC} \cap t$ . Logo,  $B - I - C$  e  $\angle CHI \cong \angle ABC$ . Finalmente, pelo ponto  $I$  traçamos a reta  $u$  paralela à reta suporte do  $\overline{AC}$ . Sendo  $\{J\} = \overline{AB} \cap u$ , mostraremos na Proposição 2.2 que  $J = D$ .

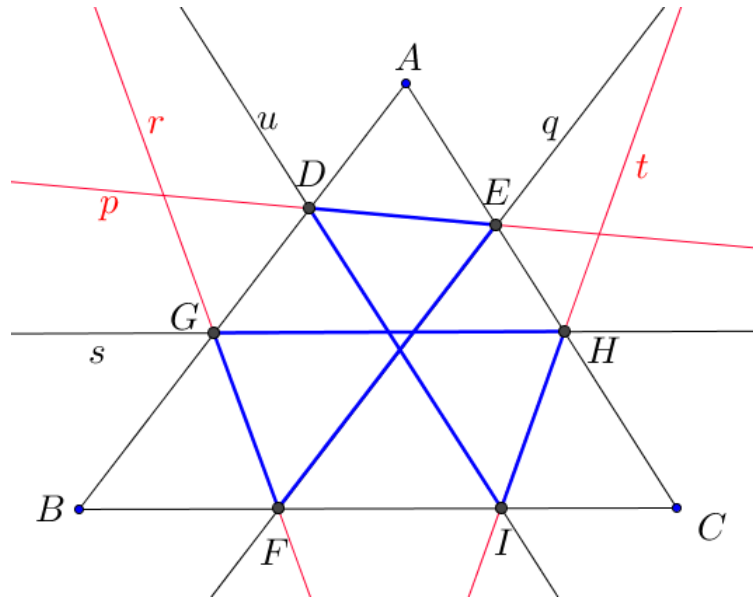


Figura 34: Hexágono de Tucker, com  $p$  antiparalela a  $\overline{BC}$ .

**Definição 2.1.** (Héxagono de Tucker) O hexágono  $DEFGHI$  assim construído é chamado de Hexágono de Tucker.

Nestas condições, temos o seguinte resultado.

**Proposição 2.2.** O Hexágono de Tucker  $DEFGHI$  é fechado, isto é, a reta  $u$  passa pelo ponto  $D$ .

*Demonstração.* Mostraremos que  $\overleftrightarrow{ID} \parallel \overleftrightarrow{AC}$ , concluindo que  $J = D$ , pois, por construção,  $\overleftrightarrow{IJ} \parallel \overleftrightarrow{AC}$  e  $D, J \in \overline{AB}$ .

Como  $\overleftrightarrow{DE}$  é antiparalela a  $\overleftrightarrow{BC}$  (em relação às retas  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $\overleftrightarrow{AC}$ ) e  $\overleftrightarrow{FG}$  é antiparalela a  $\overleftrightarrow{AC}$  (em relação às retas  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $\overleftrightarrow{BC}$ ) então  $\angle ADE \cong \angle ACB$  e  $\angle BGF \cong \angle ACB$ . Consequentemente,  $\angle ADE \cong \angle BGF$ , de modo que são congruentes seus suplementares, isto é,  $\angle GDE \cong \angle FGD$ . Além disso, por construção,  $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ . Logo, o trapézio  $DEFG$  é isósceles, isto é,  $DE = FG$ .

Analogamente, como  $\overleftrightarrow{FG}$  é antiparalela a  $\overleftrightarrow{AC}$  (em relação às retas  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $\overleftrightarrow{BC}$ ) e  $\overleftrightarrow{HI}$  é antiparalela a  $\overleftrightarrow{AB}$  (em relação às retas  $\overleftrightarrow{AC}$  e  $\overleftrightarrow{BC}$ ) então  $\angle BFG \cong \angle BAC$  e  $\angle HIC \cong \angle BAC$ . Consequentemente,  $\angle BFG \cong \angle HIC$ , de modo que são congruentes seus suplementares,

isto é,  $\angle HIF \cong \angle IFG$ . Além disso, por construção,  $\overleftrightarrow{GH} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ . Logo, o trapézio  $FGHI$  é isósceles, isto é,  $FG = HI$ .

Também, como  $\overleftrightarrow{DE}$  é antiparalela a  $\overleftrightarrow{BC}$  (em relação às retas  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $\overleftrightarrow{AC}$ ) e  $\overleftrightarrow{HI}$  é antiparalela a  $\overleftrightarrow{AB}$  (em relação às retas  $\overleftrightarrow{AC}$  e  $\overleftrightarrow{BC}$ ) então  $\angle AED \cong \angle ABC$  e  $\angle IHC \cong \angle ABC$ . Consequentemente,  $\angle AED \cong \angle IHC$ , de modo que são congruentes seus suplementares, isto é,  $\angle DEH \cong \angle EHI$ .

Em relação ao quadrilátero  $DEHI$ , obtemos que  $DE = HI$  e  $\angle DEH \cong \angle EHI$ . Pela Proposição 1.5, concluímos que  $\overline{DI} \parallel \overline{EH}$ . Portanto,  $\overleftrightarrow{DI} \parallel \overleftrightarrow{AC}$ .  $\square$

**Corolário 2.3.** *São congruentes os segmentos  $\overline{DE}$ ,  $\overline{FG}$  e  $\overline{HI}$  determinados pelas antiparalelas que formam o hexágono de Tucker  $DEFGHI$ .*

*Demonstração.* A prova é uma consequência do fato que  $DEFG$  é um trapézio isósceles com  $DE = FG$ , assim como  $FGHI$  é um trapézio isósceles, com  $FG = HI$ , conforme vimos na demonstração da Proposição 2.2.  $\square$

**Observação 2.4.** *Observamos que se começarmos a construção do hexágono tomando  $p$  como sendo paralela ao lado  $\overline{BC}$  do triângulo  $\triangle ABC$ , como na Figura 35, e seguindo a alternância entre paralela e antiparalela, o hexágono obtido será fechado. De fato, na prova da Proposição 2.2, bastaria tomarmos  $\overline{HI}$  no papel de  $\overline{DE}$  e trocarmos os vértices  $A, B, C$  por  $B, C, A$ , respectivamente.*

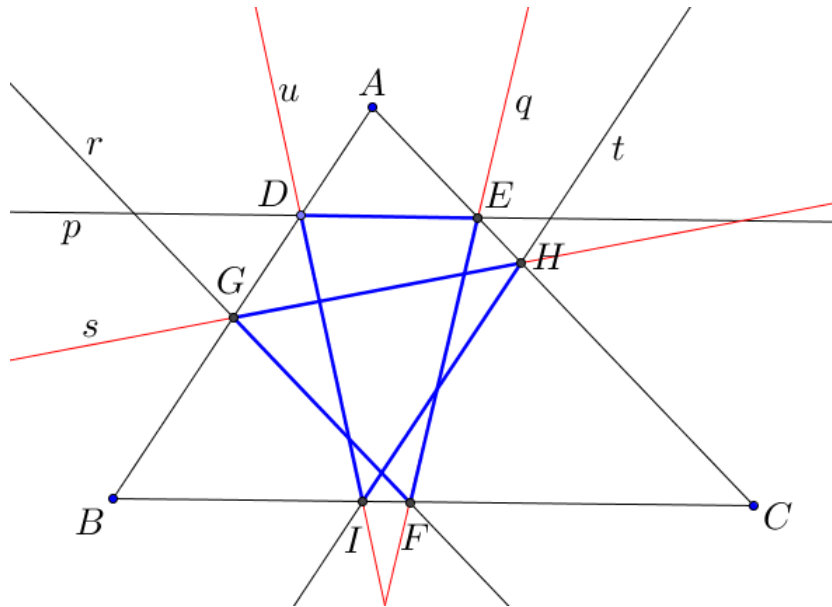


Figura 35: Hexágono de Tucker, com  $p$  paralela a  $\overline{BC}$ .

A seguir, mostramos que é possível inscrever um hexágono de Tucker numa circunferência, que será chamada de Circunferência de Tucker.

**Proposição 2.5.** *Seja  $\triangle ABC$  um triângulo qualquer, se  $DEFGHI$  for um hexágono de Tucker do triângulo  $\triangle ABC$ , como na Definição 2.1, existe uma circunferência passando pelos vértices do hexágono.*

*Demonstração.* Consideremos a (única) circunferência  $\mathcal{C}$  passando pelos pontos  $G$ ,  $H$  e  $I$ . Como vimos na prova da Proposição 2.2, o trapézio  $FGHI$  da Figura 2.10 é isósceles, logo ele é inscritível. Assim,  $F \in \mathcal{C}$ .



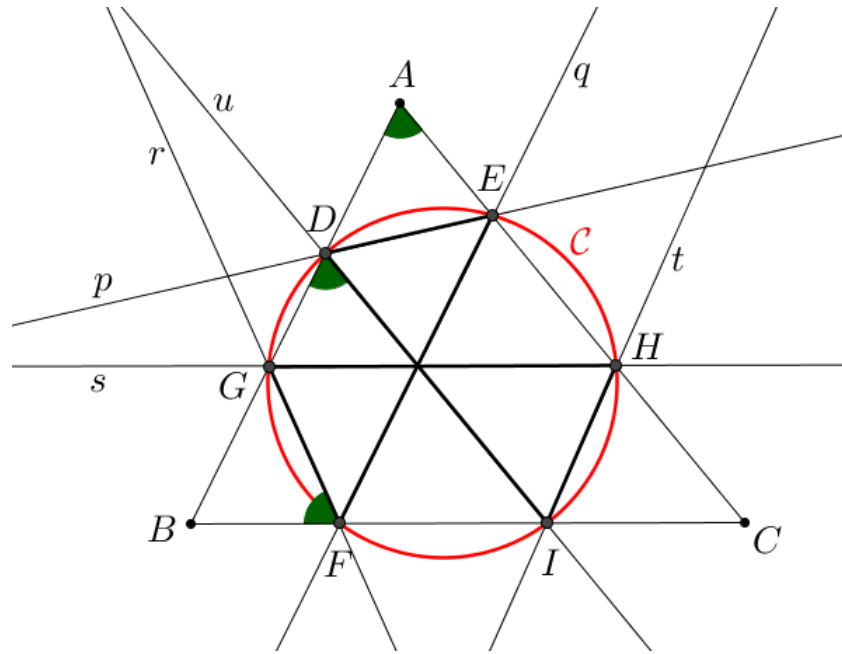


Figura 36: Circunferência de Tucker.

Por construção,  $\overline{DI} \parallel \overline{AC}$  e  $\overleftrightarrow{GF}$  é antiparalela ao lado  $\overline{AC}$ . Deste modo,  $\angle GDI \cong \angle BAC$  e  $\text{med}(\angle GFI) = \pi - \text{med}(\angle BAC)$ . Assim,  $\angle GDI$  e  $\angle GFI$  são ângulos suplementares, de modo que o quadrilátero  $FGDI$  é inscritível. Mas,  $F, G, I \in \mathcal{C}$ , donde temos que  $D \in \mathcal{C}$ . Novamente, como vimos na prova da Proposição 2.2, o trapézio  $DEFG$  é isósceles, logo ele é inscritível. Como  $F, G, D \in \mathcal{C}$ , obtemos que  $E \in \mathcal{C}$ . Portanto, a circunferência  $\mathcal{C}$  passa pelos vértices do hexágono de Tucker  $DEFGHI$ , como está ilustrado na Figura 2.10.  $\square$

**Definição 2.6.** A circunferência  $\mathcal{C}$  assim construída é chamada de Circunferência de Tucker do triângulo  $\triangle ABC$ .

A seguir, apresentamos uma construção para as circunferências de Tucker de um triângulo a partir da obtenção de seu centro.

**Proposição 2.7.** (Construção de uma circunferência de Tucker de um dado triângulo)  
 Sejam  $\triangle ABC$  um triângulo qualquer,  $\overleftrightarrow{DE}$  uma antiparalela ao lado  $\overline{BC}$ , com  $A - D - B$  e  $A - E - C$ ,  $\overline{KO}$  o diâmetro de Brocard do triângulo  $\triangle ABC$  e  $M_1$  o ponto de intersecção entre a simediana  $\overleftrightarrow{AK}$  e a antiparalela  $\overleftrightarrow{DE}$ . Se  $Y$  é o ponto de intersecção entre  $\overleftrightarrow{KO}$  e a

reta paralela a  $\overleftrightarrow{OA}$  passando por  $M_1$ , então  $Y$  é o centro da circunferência de Tucker  $C$  determinada por  $\overline{DE}$ .

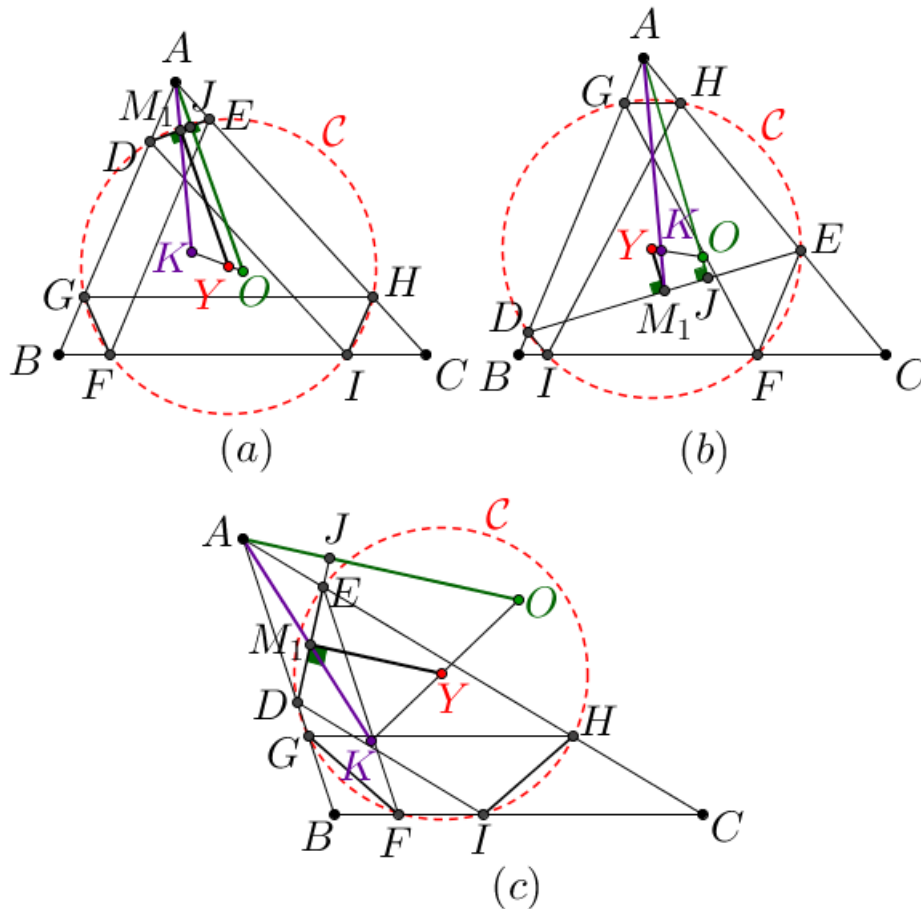


Figura 37: (a) e (c) Circunferência de Tucker com  $Y \in \overline{KO}$ ; (b) Circunferência de Tucker com  $Y \notin \overline{KO}$ .

*Demonstração.* De acordo com a Observação 1.12, o ponto simediano  $K$  pertence ao interior do triângulo  $\triangle ABC$ . Assim, o ponto  $M_1$  determinado pela intersecção da simediana  $\overleftrightarrow{AK}$  e a antiparalela  $\overleftrightarrow{DE}$  é tal que  $D - M_1 - E$ . No entanto, o ponto  $Y$  dado pela intersecção entre  $\overleftrightarrow{KO}$  e a reta paralela a  $\overleftrightarrow{OA}$  passando por  $M_1$  pode pertencer ao diâmetro de Brocard, como na Figura 37 (a) e (c), ou não pertencer a ele, como na Figura 37 (b).

A demonstração que agora damos engloba todos estes casos. Pelo Lema 1.3, temos que  $\overleftrightarrow{OJ} \perp \overleftrightarrow{DE}$ . Mas, por construção,  $\overleftrightarrow{YM_1} \parallel \overleftrightarrow{OA} = \overleftrightarrow{OJ}$ . Assim,  $\overline{YM_1} \perp \overline{DE}$ . Pela Proposição 2.2, temos que  $M_1$  é ponto médio de  $\overline{DE}$ . Consequentemente,  $Y$  pertence à mediatriz de  $\overline{DE}$ .

Procedendo de modo análogo com as antiparalelas  $\overleftrightarrow{FG}$  e  $\overleftrightarrow{HI}$ , mostramos que  $Y$  pertence à mediatriz de  $\overline{FG}$  e à mediatriz de  $\overline{HI}$ . Portanto,  $Y$  é o centro da circunferência de Tucker  $\mathcal{C}$  determinada por  $\overline{DE}$ .

□

**Observação 2.8.** *Dadas as restrições para a construção das antiparalelas, não pode ocorrer que  $K - O - Y$ , ou seja, que o circuncentro do triângulo  $\triangle ABC$  esteja entre seu ponto simediano e o centro de sua circunferência de Tucker. De fato, para que  $\overleftrightarrow{DE}$  seja uma antiparalela ao lado  $\overline{BC}$  do triângulo  $\triangle ABC$ , é necessário que  $A - D - B$  e  $A - E - C$ . Assim,*

- se  $A - M_1 - K$ , como na Figura 37 (a), então suas projeções paralelas sobre a reta  $\overleftrightarrow{KO}$  são tais que  $O - Y - K$ , uma vez que projeções paralelas preservam a relação estar-entre e as projeções de  $A$ ,  $M_1$  e  $K$ , na direção  $\overleftrightarrow{OA}$ , sobre a reta  $\overleftrightarrow{KO}$  são  $O$ ,  $Y$  e  $K$ , respectivamente;
- se  $A - K - M_1$ , como na Figura 37 (b), então suas projeções paralelas sobre a reta  $\overleftrightarrow{KO}$  são tais que  $O - K - Y$ , uma vez que projeções paralelas preservam a relação estar-entre e as projeções de  $A$ ,  $K$  e  $M_1$ , na direção  $\overleftrightarrow{OA}$ , sobre a reta  $\overleftrightarrow{KO}$  são  $O$ ,  $K$  e  $Y$ , respectivamente;
- não ocorre  $K - O - Y$ , pois neste caso, teríamos  $K - A - M_1$ . Mas, como  $\{M_1\} = \overleftrightarrow{AK} \cap \overleftrightarrow{DE}$ , então não valeria  $A - D - B$  ou  $A - E - C$ .

Nosso próximo objetivo é obter uma parametrização para o raio das circunferências de Tucker de um dado triângulo. Consideremos então um triângulo  $\triangle ABC$  qualquer. Sejam  $R$  o raio de sua circunferência circunscrita,  $K$  seu ponto simediano,  $O$  seu circuncentro e  $DEFGHI$  um hexágono de Tucker do triângulo  $\triangle ABC$ , com  $\overleftrightarrow{DE}$  antiparalela a  $\overline{BC}$ ,  $A - D - B$  e  $A - E - C$ . Além disto, sejam  $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$  os pontos médios de  $\overline{DE}$ ,  $\overline{FG}$  e  $\overline{HI}$ , respectivamente, como está ilustrado na Figura 38. Se  $Y$  denota o centro da circunferência de Tucker  $\mathcal{C}$  do triângulo  $\triangle ABC$  construído a partir de  $\overline{DE}$  então, de acordo com a Observação 2.8, podem ocorrer  $K - Y - O$ , como na Figura 37 (a), ou  $Y - K - O$ , como na Figura 37 (b). Em qualquer um destes casos, segue da construção de  $Y$  que são semelhantes, pelo caso ângulo-ângulo de semelhança de triângulos, os triângulos  $\triangle KM_1Y$  e  $\triangle KAO$ , assim como  $\triangle KM_2Y$  e  $\triangle KBO$ ,  $\triangle KM_3Y$  e  $\triangle KCO$ . Consequentemente, sendo

$$\lambda = \frac{KY}{KO},$$

temos que

$$\frac{KM_1}{KA} = \frac{KM_2}{KB} = \frac{KM_3}{KC} = \frac{KY}{KO} = \lambda.$$

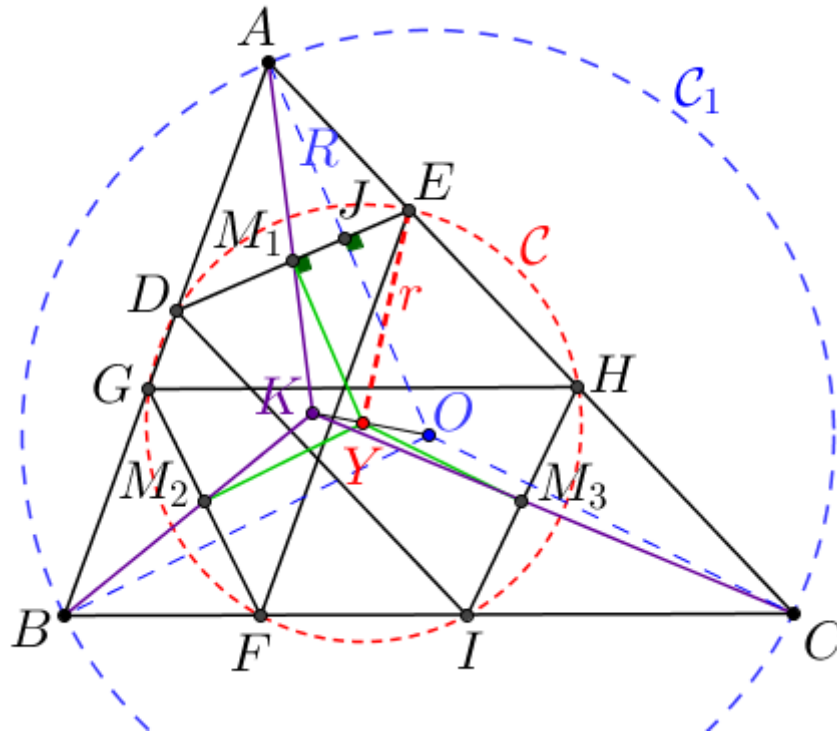


Figura 38: Circunferência de Tucker.

Para diferenciarmos os casos  $K - Y - O$  e  $Y - K - O$  em  $\lambda = \frac{KY}{KO}$ , podemos adotar a seguinte notação:

**Notação 2.9.** Tomamos  $\lambda$  para ser a razão  $\frac{\overline{KY}}{\overline{KO}}$  entre os comprimentos dos segmentos orientados  $\overline{KY}$  e  $\overline{KO}$ . Deste modo,

- se  $0 \leq \lambda \leq 1$  então  $K - Y - O$ , o que é razoável, visto que  $KY < KO$  quando  $K - Y - O$ ;
- se  $\lambda < 0$  então  $Y - K - O$ .

Por exemplo,  $\frac{\overline{KY}}{\overline{KO}} = \frac{1}{2}$  indica que  $Y$  é o ponto médio de  $\overline{KO}$ , enquanto que  $\frac{\overline{KY}}{\overline{KO}} = -\frac{1}{2}$  indica que  $Y - K - O$  com  $KY = \frac{1}{2} KO$ .

Embora esta notação nos permita considerar circunferências de Tucker com  $\lambda < 0$ , para os propósitos deste trabalho, que é o de construir circunferências de Tucker especiais, tomaremos somente o caso em que  $0 \leq \lambda \leq 1$ , isto é,  $K - Y - O$ .

Nestas condições, temos o seguinte resultado, cuja prova está baseada em [1].

**Proposição 2.10.** *O raio  $r$  da circunferência de Tucker  $C$  do triângulo  $\triangle ABC$  é dado por*

$$r = R \sqrt{\lambda^2 + (1 - \lambda)^2 \tan^2 \omega}, \tag{2.1}$$

onde  $\lambda = \frac{KY}{KO}$ , com  $0 \leq \lambda \leq 1$  e  $\omega$  é a medida do ângulo de Brocard do triângulo  $\triangle ABC$ .

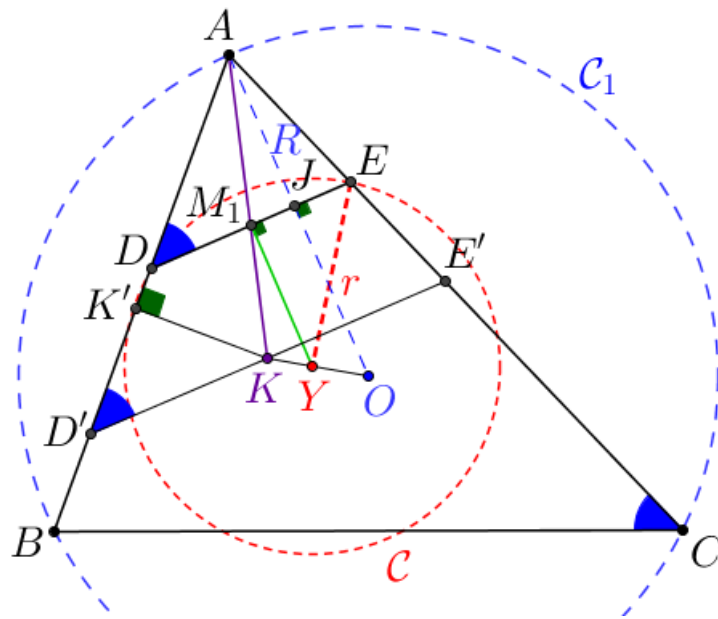


Figura 39: Circunferência de Tucker.

*Demonstração.* Segue da construção de  $Y$  que são semelhantes os triângulos  $\triangle AKO$  e  $\triangle M_1KY$ . Logo,

$$\frac{KY}{KO} = \frac{YM_1}{AO} = \frac{M_1K}{AK}. \tag{2.2}$$

Como  $\frac{KY}{KO} = \lambda$  e  $OA = R$  é o raio da circunferência circunscrita ao triângulo  $\triangle ABC$ , então a primeira igualdade de (2.2) nos garante que

$$YM_1 = \lambda R. \tag{2.3}$$

Tomemos agora a paralela  $\overleftrightarrow{D'E'}$  a  $\overleftrightarrow{DE}$  passando pelo ponto simediano  $K$  do triângulo  $\triangle ABC$ , com  $A - D' - B$  e  $A - E' - C$ , como está ilustrado na Figura 39. Temos que

$\overleftrightarrow{D'E'}$  é uma antiparalela ao lado  $\overline{BC}$  do triângulo  $\triangle ABC$ . Pela Proposição 1.14, a simediana  $\overleftrightarrow{AK}$  do triângulo  $\triangle ABC$  cruza a antiparalela  $\overleftrightarrow{D'E'}$  no ponto médio de  $\overline{D'E'}$ . Como, por construção,  $K \in \overline{D'E'}$ , temos que  $K$  é o ponto médio de  $\overline{D'E'}$ .

Segue da construção de  $\overline{D'E'}$  que são semelhantes os triângulos  $\triangle AD'K$  e  $\triangle ADM_1$ . Logo,

$$\frac{DM_1}{D'K} = \frac{AM_1}{AK}. \quad (2.4)$$

No caso em que  $K - Y - O$ , temos que  $A - M_1 - K$ . Então, por (2.2),

$$\frac{AM_1}{AK} = \frac{AK - M_1K}{AK} = 1 - \frac{M_1K}{AK} = 1 - \frac{KY}{KO} = 1 - \lambda. \quad (2.5)$$

Sendo  $\rho = D'K$ , substituindo (2.5) em (2.4) que

$$DM_1 = (1 - \lambda)\rho. \quad (2.6)$$

Denotando por  $K'$  a projeção ortogonal de  $K$  sobre o lado  $\overline{AB}$ , temos que

$$KK' = KD' \operatorname{sen}(\angle AD'K) = \rho \operatorname{sen}(\angle ACB),$$

pois  $\overleftrightarrow{D'E'}$  é também uma antiparalela ao lado  $\overline{BC}$ . Pela lei dos senos aplicada ao triângulo  $\triangle ABC$ , temos que

$$\frac{AB}{\operatorname{sen}(\angle ACB)} = 2R.$$

Por (1.47), temos que

$$KK' = \frac{AB}{2 \cot \omega}.$$

Logo,

$$\frac{AB}{2 \cot \omega} = \rho \frac{AB}{2R},$$

donde obtemos que

$$\rho = R \tan \omega.$$

Finalmente, (2.6) torna-se

$$DM_1 = M_1E = (1 - \lambda)R \tan \omega. \quad (2.7)$$

Denotando por  $J$  o ponto em que  $\overline{OA}$  cruza  $\overline{DE}$ , temos, pelo Lema 1.3, que  $\overline{OJ} \perp \overline{DE}$ . Como  $\overline{YM_1} \parallel \overline{OA}$  então  $\overline{YM_1} \perp \overline{DE}$ . Como  $YE = r$ , aplicamos o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo  $\triangle YM_1E$ , obtendo, por (2.3) e (2.7), que

$$r = \sqrt{R^2 \lambda^2 + (1 - \lambda)^2 R^2 \tan^2 \omega} = R \sqrt{\lambda^2 + (1 - \lambda)^2 \tan^2 \omega}.$$

□

Na próxima seção, estudaremos algumas circunferências de Tucker especiais, que estão indicadas na Tabela 1, com seu respectivo parâmetro  $\lambda$ .

Tabela 1: Algumas Circunferências de Tucker especiais.

Circunferência de Tucker	$\lambda$
Circunferência do Cosseno	0
Primeira circunferência de Lemoine	$\frac{1}{2}$

2.2 CASOS ESPECIAIS DE CIRCUNFERÊNCIAS DE TUCKER

2.2.1 Circunferência do Cosseno ou Segunda Circunferência de Lemoine

**Proposição 2.11.** *Sejam  $\triangle ABC$  um triângulo qualquer e  $K$  seu ponto simediano. Se  $\overleftrightarrow{DE}$ ,  $\overleftrightarrow{FG}$  e  $\overleftrightarrow{HI}$  forem antiparalelas aos lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$ , respectivamente, passando por  $K$ , com  $A - D - B$ ,  $A - E - C$ ,  $B - F - C$ ,  $A - G - B$ ,  $A - H - C$  e  $B - I - C$ , então existe uma circunferência de centro  $K$  passando por  $D, E, F, G, H, I$ , como está ilustrado na Figura 40.*

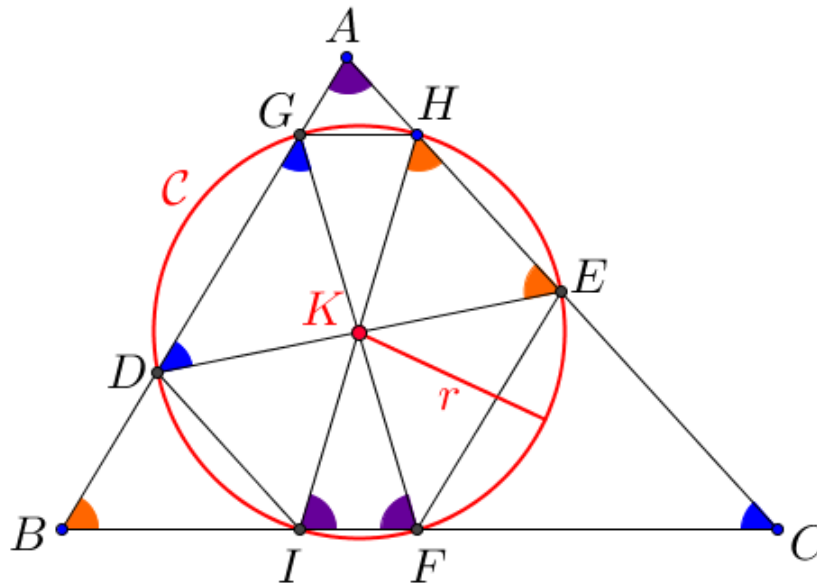


Figura 40: Circunferência do Cosseno do triângulo  $\triangle ABC$ .

*Demonstração.* Como  $\overleftrightarrow{DE}$  é antiparalela ao lado  $\overline{BC}$ , temos, pela Proposição 1.14, que a simediana  $\overleftrightarrow{AK}$  cruza  $\overline{DE}$  em seu ponto médio. Mas, por construção,  $K \in \overline{DE}$ . Logo,  $K$  é o ponto médio de  $\overline{DE}$ , isto é,  $KD = KE$ . Por hipótese,  $\overleftrightarrow{FG}$  e  $\overleftrightarrow{HI}$  são antiparalelas aos lados  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$ , respectivamente. Logo,  $\angle KIF \cong \angle KFI \cong \angle BAC$ , de modo que o triângulo  $\triangle KIF$  é isósceles, com  $KI = KF$ .

De modo análogo, obtemos que  $K$  é o ponto médio  $\overline{FG}$  e de  $\overline{HI}$ , que  $KD = KG$  e  $KE = KH$ . Portanto, sendo  $\mathcal{C}$  a (única) circunferência que passa pelos pontos  $D, E$  e  $F$ , temos que  $G, H, I \in \mathcal{C}$  e  $K$  é o centro de  $\mathcal{C}$ .

□

**Definição 2.12.** Nas condições da Proposição 2.11, a circunferência de centro  $K$  passando pelos pontos  $D, E, F, G, H, I$  é chamada de Circunferência do Cosseno (ou Segunda Circunferência de Lemoine) do triângulo  $\triangle ABC$ .

A razão pela qual tal circunferência é chamada de Circunferência do Cosseno é dada pela seguinte propriedade.

**Propriedade 2.13.** Nas condições da Proposição 2.11, as cordas  $\overline{DG}$ ,  $\overline{EH}$  e  $\overline{IF}$  são proporcionais aos cossenos dos ângulos  $\angle BCA$ ,  $\angle ABC$  e  $\angle BAC$ , respectivamente.



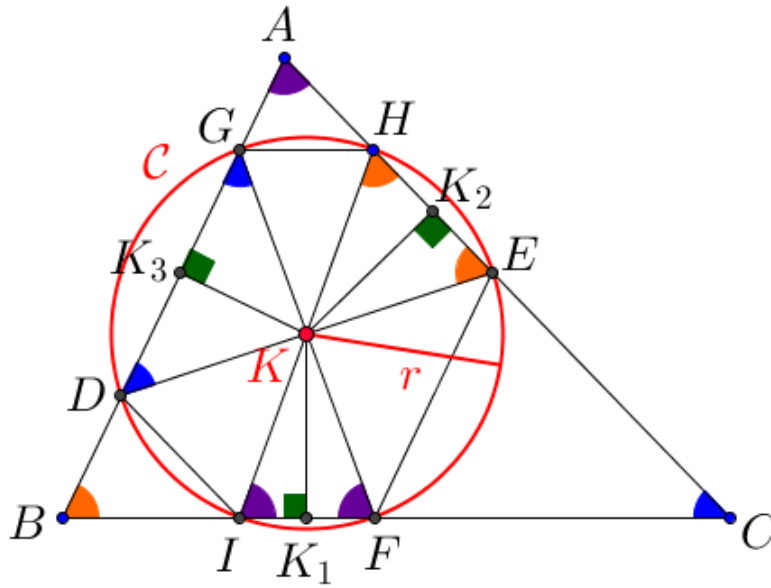


Figura 41: Propriedade da Circunferência do Cosseno.

*Demonstração.* Sendo  $r$  o raio da Circunferência do Cosseno do triângulo  $\triangle ABC$ , temos que  $KI = KF = r$ , de modo que o triângulo  $\triangle KIF$  é isósceles, como está ilustrado na Figura 41. Assim, se  $K_1$  é o ponto médio de  $\overline{IF}$  então o triângulo  $\triangle KK_1I$  é retângulo, com  $\angle KK_1I$  sendo o ângulo reto.

Como  $\overleftrightarrow{HI}$  é uma antiparalela ao lado  $\overline{AB}$ , então  $\angle KIF \cong \angle BAC$ . Logo,

$$\cos(\angle BAC) = \cos(\angle KIK_1) = \frac{IK_1}{KI} = \frac{IF/2}{r} = \frac{IF}{2r}.$$

Analogamente, obtemos

$$\cos(\angle ABC) = \frac{EH}{2r} \quad \text{e} \quad \cos(\angle ACB) = \frac{DG}{2r}.$$

Portanto,

$$2r = \frac{EH}{\cos(\angle ABC)} = \frac{DG}{\cos(\angle BCA)} = \frac{IF}{\cos(\angle BAC)}.$$

□

A Circunferência do Cosseno de um triângulo  $\triangle ABC$  é um caso especial de uma Circunferência de Tucker obtida para  $\lambda = 0$ . Por (2.3),  $\lambda = 0$  implica que  $Y = K = M_1$ , isto é, o centro da circunferência de Tucker do triângulo  $\triangle ABC$  é seu ponto simediano  $K$ , assim como o ponto médio de  $\overline{DE}$ . O mesmo ocorre com as antiparalelas  $\overleftrightarrow{FG}$  e  $\overleftrightarrow{HI}$ .

Desta forma, a circunferência de Tucker com  $\lambda = 0$  é a circunferência do Cosseno do triângulo  $\triangle ABC$ , conforme a Proposição 2.11.

Por (1.1), o raio da circunferência do Cosseno do triângulo  $\triangle ABC$  é igual a  $r = R \tan \omega$ , onde  $R$  é o raio da circunferência circunscrita ao triângulo  $\triangle ABC$  e  $\omega$  é a medida do ângulo de Brocard do triângulo.

**Observação 2.14.** Para que uma circunferência seja vista como uma particular Circunferência de Tucker, é necessário que ela seja determinada a partir de um Hexágono de Tucker. No caso da Circunferência do Cosseno, a particularidade é que as antiparalelas  $\overleftrightarrow{DE}$ ,  $\overleftrightarrow{FG}$  e  $\overleftrightarrow{HI}$  passam pelo ponto simediano  $K$ . Neste caso,  $K$  torna-se o ponto médio de  $\overline{DE}$ ,  $\overline{FG}$  e  $\overline{HI}$ . Para que a construção do Hexágono de Tucker esteja completa na Proposição 2.11, é necessário que  $\overleftrightarrow{EF}$ ,  $\overleftrightarrow{GH}$  e  $\overleftrightarrow{ID}$  sejam paralelas aos lados  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  e  $\overline{AC}$ , respectivamente. Mostremos que  $\overleftrightarrow{EF}$  é paralela a  $\overline{AB}$ , como está ilustrado na Figura 42, sendo que a prova para as outras duas retas é análoga.

De fato, como  $K$  é o ponto médio de  $\overline{DE}$  e  $\overline{FG}$ , então  $DK = EK$  e  $FK = GK$ . Além disso,  $\angle DKG \cong \angle EKF$ , pois são opostos pelo vértice. Logo, pelo caso lado-ângulo-lado de congruência de triângulos, temos que  $\triangle DKG \cong \triangle EKF$ . Assim,  $\angle KFE \cong \angle KGD$ , que, por sua vez, é congruente a  $\angle ACB$ , pois  $\overleftrightarrow{FG}$  é uma antiparalela ao lado  $\overline{AC}$ . Segue também de  $\overleftrightarrow{FG}$  ser uma antiparalela ao lado  $\overline{AC}$  que  $\angle GFB \cong \angle BAC$ . Consequentemente,

$$\text{med}(\angle EFC) = \pi - \text{med}(\angle BAC) - \text{med}(\angle ACB) = \text{med}(\angle ABC).$$

Portanto,  $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overline{AB}$ .

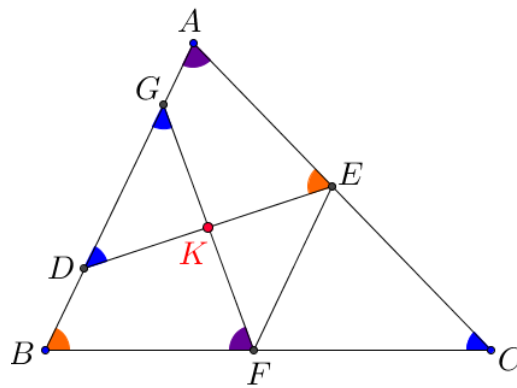


Figura 42: Prova de que  $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overline{AB}$ .

**Observação 2.15.** Observamos que se  $K$  é o ponto simediano do triângulo  $\triangle ABC$ ,  $\overleftrightarrow{DE}$  é uma antiparalela ao lado  $\overline{BC}$  passando por  $K$ , com  $A - D - B$  e  $A - E - C$  e  $\overleftrightarrow{EF}$  é uma

paralela ao lado  $\overline{AB}$ , com  $B - F - C$ , então a antiparalela  $\overleftrightarrow{FG}$  ao lado  $\overline{AC}$  passa pelo ponto  $K$ .

De fato, seja  $G$  o ponto obtido pela intersecção de  $\overleftrightarrow{FK}$  com o lado  $\overline{AB}$  do triângulo  $\triangle ABC$ . Como  $\overleftrightarrow{DE}$  é uma antiparalela ao lado  $\overline{BC}$  então  $\angle ADE \cong \angle BCA$  e  $\angle AED \cong \angle ABC$ . Como  $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overline{AB}$  então  $\angle CEF \cong \angle BAC$ . Assim,

$$\begin{aligned} \text{med}(\angle KEF) &= \pi - \text{med}(\angle CEF) - \text{med}(\angle AED) = \\ &= \pi - \text{med}(\angle BAC) - \text{med}(\angle ABC) = \text{med}(\angle BCA). \end{aligned}$$

Deste modo,  $\angle KDG \cong \angle KEF$ . Sendo  $K$  o ponto médio de  $\overline{DE}$ , temos  $DK = EK$ . Além disso,  $\angle GDK \cong \angle KEF$ , pois são opostos pelo vértice. Pelo caso ângulo-lado-ângulo de congruência de triângulos, temos que  $\triangle KDG \cong \triangle KEF$ , donde segue que  $\overline{KG} \cong \overline{KF}$ , isto é,  $K$  é o ponto médio de  $\overline{FG}$ .

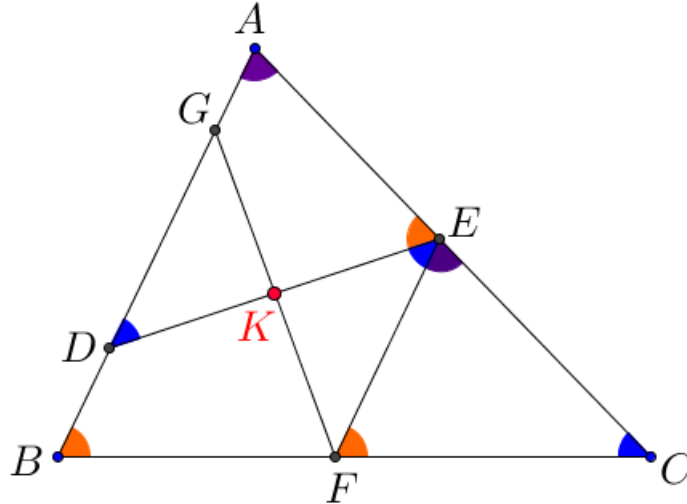


Figura 43: Prova de que  $\overleftrightarrow{FG}$  é antiparalela a  $\overline{AC}$ .

Desta forma, obtemos que o ponto simediano  $K$  do triângulo  $\triangle ABC$  é o ponto médio de  $\overline{FG}$ . Portanto, de acordo com a Proposição 1.20,  $\overleftrightarrow{FG}$  é uma antiparalela ao lado  $\overline{AC}$ . Na verdade, é a antiparalela ao lado  $\overline{AC}$  passando por  $K$ , como está ilustrado na Figura 43.

**Observação 2.16.** Decorre da Observação 2.14 e Observação 2.15 que as hipóteses podem ser enfraquecidas na construção da Circunferência do Cosseno na Proposição 2.11, bastando tomar  $\overleftrightarrow{DE}$  como sendo uma antiparalela ao lado  $\overline{BC}$ . De fato, para a construção do Hexágono de Tucker,  $\overleftrightarrow{EF}$  deve ser necessariamente paralela ao lado  $\overline{AB}$ . Consequentemente, as outras duas antiparalelas  $\overleftrightarrow{FG}$  e  $\overleftrightarrow{HI}$  devem passar por  $K$ .

2.2.2 Primeira Circunferência de Lemoine

Antes de apresentarmos a construção da Primeira Circunferência de Lemoine, provamos um resultado que relaciona duas paralelas passando pelo ponto simediano do triângulo com uma antiparalela determinada por elas.

**Proposição 2.17.** *Sejam  $\triangle ABC$  um triângulo qualquer e  $K$  seu ponto simediano. Se  $\overleftrightarrow{EF}$  e  $\overleftrightarrow{DI}$  forem retas paralelas aos lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$ , respectivamente, passando por  $K$ , com  $A - D - B$ ,  $A - E - C$ ,  $B - F - C$  e  $B - I - C$ , então  $\overleftrightarrow{DE}$  é uma antiparalela ao lado  $\overline{BC}$  do triângulo  $\triangle ABC$ , como está ilustrado na Figura 44.*

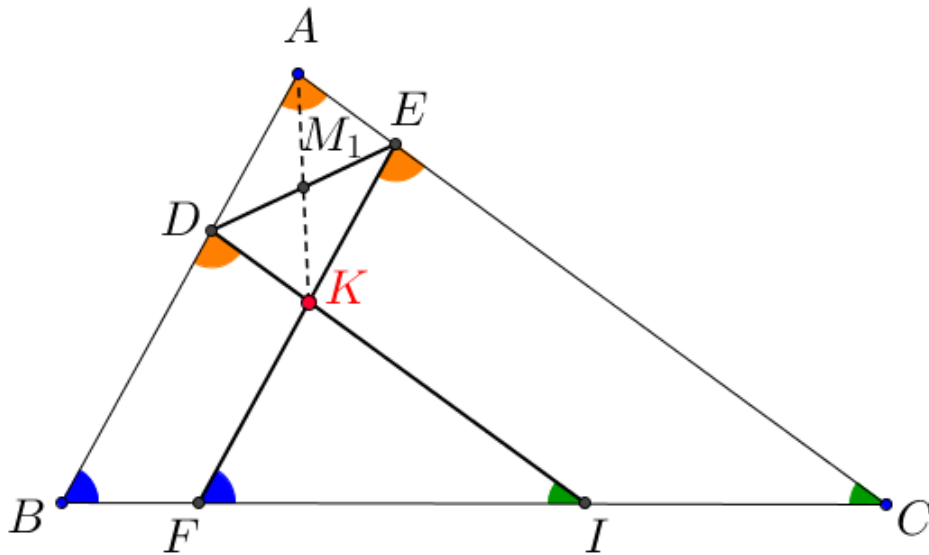


Figura 44: Prova de que  $\overleftrightarrow{DE}$  é antiparalela a  $\overline{BC}$ .

*Demonstração.* Como  $\overleftrightarrow{DI} \parallel \overline{AC}$ ,  $K \in \overline{DI}$  e  $E \in \overline{AC}$ , então  $\overline{DK} \parallel \overline{AE}$ . De modo análogo, temos que  $\overline{AD} \parallel \overline{EK}$ . Então o quadrilátero  $AEKD$  é um paralelogramo. Sendo  $\{M_1\} = \overline{AK} \cap \overline{DE}$ , e sabendo que as diagonais de um paralelogramo cruzam-se em seus pontos médios, obtemos que  $M_1$  é o ponto médio de  $\overline{DE}$ . Como  $M_1$  pertence à simediana  $\overleftrightarrow{AK}$ , concluímos, pela Proposição 1.20, que  $\overleftrightarrow{DE}$  é uma antiparalela ao lado  $\overline{BC}$ . □

Com a Proposição 2.17, podemos garantir que se  $\overleftrightarrow{EF}$ ,  $\overleftrightarrow{HG}$  e  $\overleftrightarrow{DI}$  forem retas paralelas aos lados  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  e  $\overline{AC}$ , respectivamente, passando por  $K$ , então  $\overleftrightarrow{DE}$ ,  $\overleftrightarrow{FG}$  e  $\overleftrightarrow{HI}$  são antiparalelas aos lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$ , respectivamente, de modo que  $DEFGHI$  é um

Hexágono de Tucker. Isto justifica a construção da Primeira Circunferência de Lemoine, dada na Proposição a seguir, como sendo um caso especial de Circunferência de Tucker.

**Proposição 2.18.** *Sejam  $\triangle ABC$  um triângulo qualquer e  $K$  seu ponto simediano. Se  $\overleftrightarrow{EF}$ ,  $\overleftrightarrow{HG}$  e  $\overleftrightarrow{DI}$  forem retas paralelas aos lados  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  e  $\overline{AC}$ , respectivamente, passando por  $K$ , com  $A - D - B$ ,  $A - E - C$ ,  $B - F - C$ ,  $A - G - B$ ,  $A - H - C$  e  $B - I - C$ , então existe uma circunferência  $C$  passando por  $D, E, F, G, H, I$ , como está ilustrado na Figura 45.*

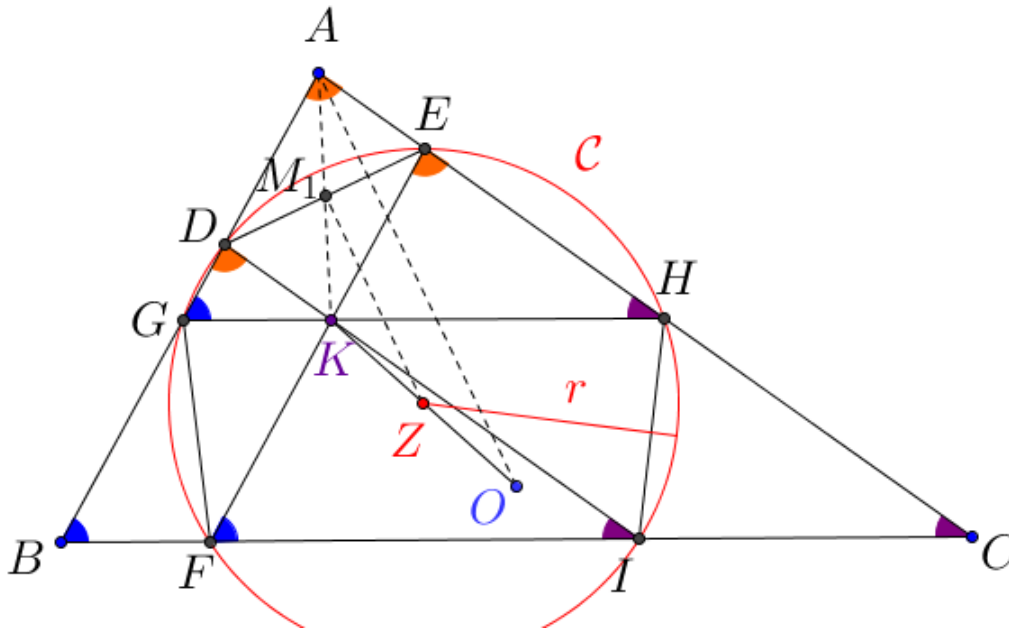


Figura 45: Primeira circunferência de Lemoine do triângulo  $\triangle ABC$ .

*Demonstração.* A prova é uma consequência imediata da Proposição 2.17 e da Proposição 2.5, sendo  $C$  a Circunferência de Tucker determinada pelo Hexágono de Tucker  $DEFGHI$ .  $\square$

**Definição 2.19.** Nas condições da Proposição 2.18, a circunferência de centro  $K$  passando pelos pontos  $D, E, F, G, H, I$  é chamada de Primeira Circunferência de Lemoine do triângulo  $\triangle ABC$ .

O centro  $Z$  da Primeira Circunferência de Lemoine pode ser determinado a partir da Proposição 2.7, na qual tínhamos que o centro da Circunferência de Tucker era

dados pela intersecção do diâmetro de Brocard  $\overline{KO}$  com a reta paralela a  $\overleftrightarrow{OA}$  passando pelo ponto médio de  $\overline{DE}$ . No caso da Primeira Circunferência de Lemoine, temos que o quadrilátero  $ADKE$  é um paralelogramo, de modo que o ponto médio  $M_1$  de  $\overline{DE}$  é também o ponto médio da diagonal  $\overline{AK}$ , como está ilustrado na Figura 45. Consequentemente, os triângulos  $\triangle M_1KZ$  e  $\triangle AKO$  são semelhantes com

$$\frac{ZK}{KO} = \frac{KM_1}{KA} = \frac{1}{2}. \tag{2.8}$$

Portanto, o centro  $Z$  da Primeira Circunferência de Lemoine é o ponto médio do diâmetro de Brocard  $\overline{KO}$ .

A seguir, apresentamos duas propriedades da Primeira Circunferência de Lemoine. A primeira delas garante que a Primeira circunferência de Lemoine divide os lados de um triângulo em segmentos proporcionais aos quadrados das medidas de seus lados.

**Propriedade 2.20.** *Nas condições da Proposição 2.18, temos que*

$$\frac{BF}{AB^2} = \frac{FI}{BC^2} = \frac{IC}{AC^2}.$$

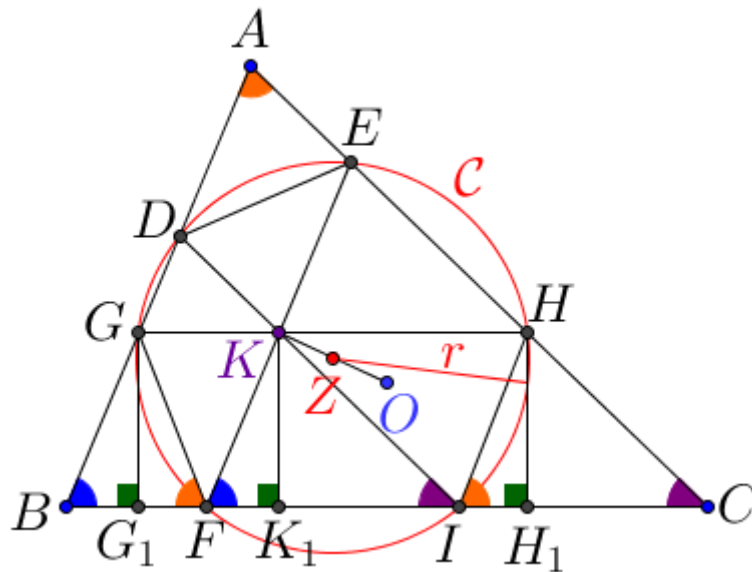


Figura 46: Propriedade da Primeira Circunferência de Lemoine.

*Demonstração.* Temos que  $\overline{GH}$  passa pelo ponto simediano  $K$  e é paralelo ao lado  $\overline{BC}$  do triângulo  $\triangle ABC$ , como está ilustrado na Figura 46. Se  $G_1, K_1$  e  $H_1$  denotarem

as projeções ortogonais de  $G, K$  e  $H$ , respectivamente, sobre  $\overleftrightarrow{BC}$ , então os triângulos  $\triangle GBF$ ,  $\triangle KFI$  e  $\triangle HIC$  possuem alturas  $GG_1 = KK_1 = HH_1$ . Assim,

$$\frac{S_{GBF}}{BF} = \frac{S_{KFI}}{FI} = \frac{S_{HIC}}{IC}. \quad (2.9)$$

Como  $\overleftrightarrow{FG}$  e  $\overleftrightarrow{IH}$  são respectivamente antiparalelas a  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$ , então  $\angle GFB \cong \angle BAC$  e  $\angle HIC \cong \angle BAC$ . Pelo caso ângulo-ângulo de semelhança de triângulos, temos que  $\triangle GBF \sim \triangle CBA$  e  $\triangle HIC \sim \triangle BAC$ . Além disto, como  $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overline{AB}$  e  $\overleftrightarrow{DI} \parallel \overline{AC}$  obtemos que  $\angle KFI \cong \angle ABC$  e  $\angle KIF \cong \angle ACB$ . Novamente, pelo caso ângulo-ângulo de semelhança de triângulos,  $\triangle KFI \sim \triangle ABC$ . Lembrando que a razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança entre seus respectivos lados, temos que

$$\frac{S_{GBF}}{S_{ABC}} = \frac{BF^2}{AB^2} \quad (2.10)$$

$$\frac{S_{KFI}}{S_{ABC}} = \frac{FI^2}{BC^2} \quad (2.11)$$

$$\frac{S_{HIC}}{S_{ABC}} = \frac{IC^2}{AC^2} \quad (2.12)$$

Por (2.9), (2.10), (2.11) e (2.12), concluímos que

$$\frac{BF}{AB^2} = \frac{FI}{BC^2} = \frac{IC}{AC^2}.$$

□

A segunda propriedade da Primeira Circunferência de Lemoine garante que as cordas determinadas por ela nos lados de um triângulo são proporcionais aos cubos dos respectivos lados do triângulo.

**Propriedade 2.21.** *Nas condições da Proposição 2.18, temos que*

$$\frac{FI}{BC^3} = \frac{HE}{AC^3} = \frac{DG}{AB^3}.$$

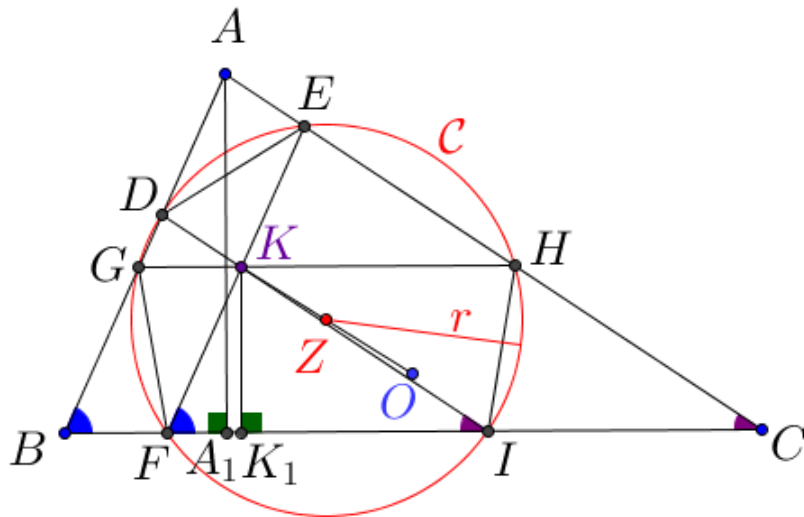


Figura 47: Propriedade da Primeira Circunferência de Lemoine.

*Demonstração.* Como  $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overline{AB}$  e  $\overleftrightarrow{DI} \parallel \overline{AC}$ , então  $\angle KFI \cong \angle ABC$  e  $\angle KIF \cong \angle ACB$ . Pelo caso ângulo-ângulo de semelhança de triângulos, temos que  $\triangle KFI \sim \triangle ABC$ . Logo,

$$\frac{FI}{BC} = \frac{KK_1}{AA_1}, \tag{2.13}$$

onde  $A_1$  e  $K_1$  denotam as projeções ortogonais de  $A$  e  $K$ , respectivamente, sobre  $\overleftrightarrow{BC}$ , como está ilustrado na Figura 47. Mas,

$$S_{ABC} = \frac{BC \cdot AA_1}{2}. \tag{2.14}$$

Por (1.47) e (1.14),

$$KK_1 = \frac{BC}{2 \cot \omega} = \frac{BC \cdot 2 S_{ABC}}{AB^2 + AC^2 + BC^2}. \tag{2.15}$$

Substituindo (2.14) e (2.15) em (2.13), obtemos

$$FI = BC \frac{BC \cdot 2 S_{ABC}}{AB^2 + AC^2 + BC^2} \frac{BC}{2 S_{ABC}} = \frac{BC^3}{AB^2 + BC^2 + AC^2}.$$

Analogamente,

$$HE = \frac{AC^3}{AB^2 + BC^2 + AC^2}$$

e

$$DG = \frac{AB^3}{AB^2 + BC^2 + AC^2}.$$



Portanto,

$$\frac{FI}{BC^3} = \frac{HE}{AC^3} = \frac{DG}{AB^3}.$$

□

**Observação 2.22.** Observamos que se  $K$  é o ponto simediano do triângulo  $\triangle ABC$ ,  $\overleftrightarrow{DE}$  é uma antiparalela ao lado  $\overline{BC}$ , com  $A - D - B$  e  $A - E - C$ , e  $\overleftrightarrow{EF}$  é uma paralela ao lado  $\overline{AB}$  passando por  $K$ , com  $B - F - C$ , então a paralela  $\overleftrightarrow{DI}$  ao lado  $\overline{AC}$  passa pelo ponto  $K$ .

De fato, seja  $I$  o ponto obtido pela intersecção de  $\overleftrightarrow{DK}$  com o lado  $\overline{BC}$  do triângulo  $\triangle ABC$ , como está ilustrado na Figura 48. Como  $\overleftrightarrow{DE}$  é uma antiparalela ao lado  $\overline{BC}$  então  $\angle ADE \cong \angle BCA$  e  $\angle AED \cong \angle ABC$ . Como  $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overline{AB}$  então  $\angle CEF \cong \angle BAC$ . Assim,

$$\begin{aligned} \text{med}(\angle KED) &= \pi - \text{med}(\angle CEF) - \text{med}(\angle AED) = \\ &= \pi - \text{med}(\angle BAC) - \text{med}(\angle ABC) = \text{med}(\angle BCA). \end{aligned}$$

Deste modo,  $\angle ADE \cong \angle KED$ . Sendo  $M_1$  o ponto médio de  $\overline{DE}$ , temos  $DM_1 = EM_1$ . Além disso,  $\angle AM_1D \cong \angle KM_1E$ , pois são opostos pelo vértice. Pelo caso ângulo-lado-ângulo de congruência de triângulos, temos que  $\triangle AM_1D \cong \triangle KM_1E$ , donde segue que  $\overline{AD} \cong \overline{KE}$ . Deste modo,  $\overline{AD}$  e  $\overline{KE}$  são segmentos paralelos e congruentes, donde concluímos que o quadrilátero  $ADKE$  é um paralelogramo. Portanto,  $\overleftrightarrow{DI}$  é paralela ao lado  $\overline{AC}$  e passa por  $K$ .

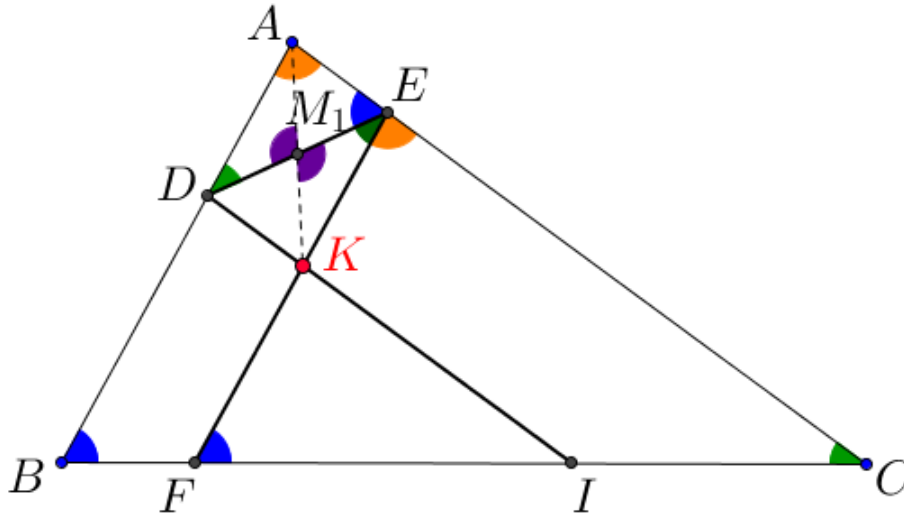


Figura 48: Prova de que  $\overleftrightarrow{DI} \parallel \overline{AC}$ .

**Observação 2.23.** Decorre da Observação 2.22 que as hipóteses podem ser enfraquecidas na construção da Primeira Circunferência de Lemoine na Proposição 2.18, bastando tomar  $\overleftrightarrow{EF}$  como sendo uma paralela ao lado  $\overline{AB}$  passando por  $K$ . De fato, para a construção do Hexágono de Tucker,  $\overleftrightarrow{DE}$  deve ser necessariamente antiparalela ao lado  $\overline{BC}$ . Consequentemente, as outras duas paralelas  $\overleftrightarrow{GH}$  e  $\overleftrightarrow{ID}$  devem passar por  $K$ .

A Primeira Circunferência de Lemoine de um triângulo  $\triangle ABC$  é um caso especial de uma Circunferência de Tucker obtida para  $\lambda = 1/2$ . Por (2.3),  $\lambda = 1/2$  implica que  $Y = Z$  é o ponto médio do diâmetro de Brocard  $\overline{OK}$ , onde  $O$  é o circuncentro e  $K$  é o ponto simediano do triângulo  $\triangle ABC$ .

Observamos que a propriedade definidora de uma Primeira Circunferência de Lemoine, dada na Proposição 2.18, está intimamente ligada ao fato de  $ADKE$  ser um paralelogramo. Para  $\lambda = 1/2$ , temos

$$\frac{ZK}{KO} = \frac{KM_1}{KA} = \frac{1}{2}.$$

Ou seja, o ponto médio  $M_1$  da diagonal  $\overline{DE}$  é também o ponto médio da diagonal  $\overline{AK}$ , de modo a garantir que  $ADKE$  é um paralelogramo. Portanto, a paralela  $\overleftrightarrow{EF}$  ao lado  $\overline{AB}$  passa pelo ponto  $K$ , implicando que  $\overleftrightarrow{GH}$  e  $\overleftrightarrow{DI}$  passam por  $K$ , conforme Observação 2.22.

Por (1.1), o raio da Primeira Circunferência de Lemoine do triângulo  $\triangle ABC$  é igual a

$$r = R \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \tan^2 \omega} = R \frac{\sqrt{1 + \tan^2 \omega}}{2} = \frac{R \sec \omega}{2},$$

onde  $R$  é o raio da circunferência circunscrita ao triângulo  $\triangle ABC$  e  $\omega$  é a medida do ângulo de Brocard do triângulo.

---

## ATIVIDADE

---

### 3.1 CONSTRUINDO UMA CIRCUNFERÊNCIA DE TUCKER COM O GEOGEBRA

Neste capítulo, preparamos uma atividade que pode ser realizada na sala de aula. Ela consiste em construir um Hexágono de Tucker e uma Circunferência de Tucker de um dado triângulo com as ferramentas do software de geometria dinâmica Geogebra. Certamente, isto possibilita ao professor de Matemática uma abertura para discutir tópicos importantes de geometria, que exigem somente conhecimentos básicos da geometria plana. Com o uso do Geogebra, o professor poderá explorar propriedades das Circunferências de Tucker.

- Usando a ferramenta *Polígono*, construímos um triângulo  $\triangle ABC$ , como está ilustrado na Figura 49.

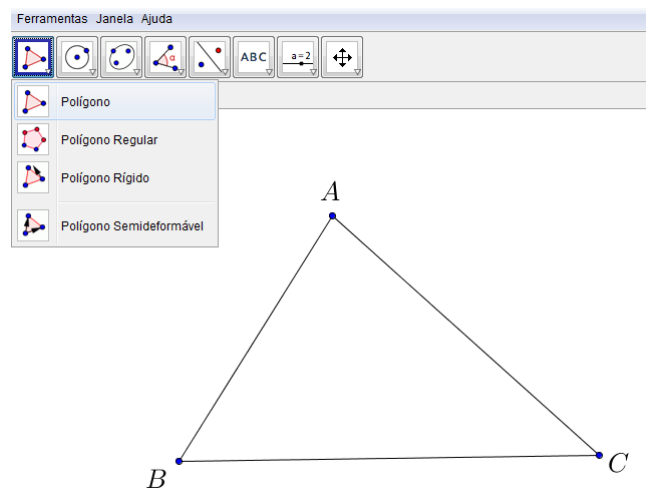


Figura 49: Construção do triângulo  $\triangle ABC$ .

- Construimos uma reta antiparalela  $r_1$  que intercepta o triângulo  $\triangle ABC$  em  $\{D\} = \overline{AB} \cap r_1$  e  $\{E\} = \overline{AC} \cap r_1$ , da seguinte maneira: selecionamos a ferramenta *Círculo definido por três pontos* e clicamos sobre os vértices  $B$  e  $C$  e sobre o segmento  $\overline{AB}\{A, B\}$ . Sejam  $D$  este tal ponto de  $\overline{AB}\{A, B\}$ ,  $C$  a circunferência que passa por  $B, C, D$  e  $E$  o ponto de interseção entre  $C$  e o lado  $\overline{AC}$  do triângulo  $\triangle ABC$ . A reta  $r_1$  é então a reta que passa por  $D$  e  $E$ , como está ilustrado na Figura 50.

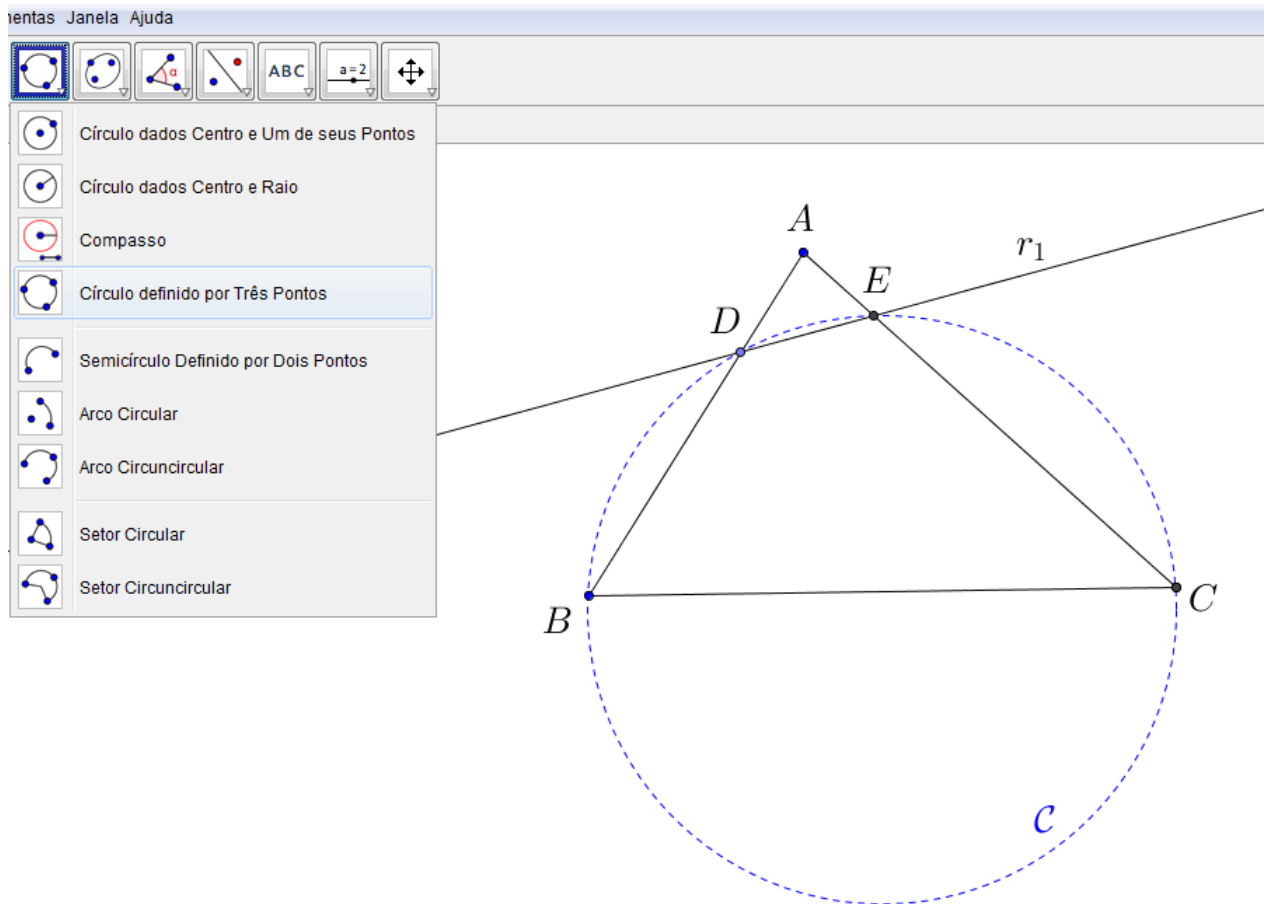


Figura 50: Construção da reta antiparalela  $r_1$  ao lado  $\overline{BC}$ .

- Para construirmos a reta  $r_2$  paralela ao lado  $\overline{AB}$  passando por  $E$ , selecionamos o botão *Reta Paralela*, clicamos sobre o lado  $\overline{AB}$  e, em seguida, sobre o ponto  $E$ . Seja  $F$  o ponto em que  $r_2$  intersecta o lado  $\overline{BC}$ , como está ilustrado na Figura 51.

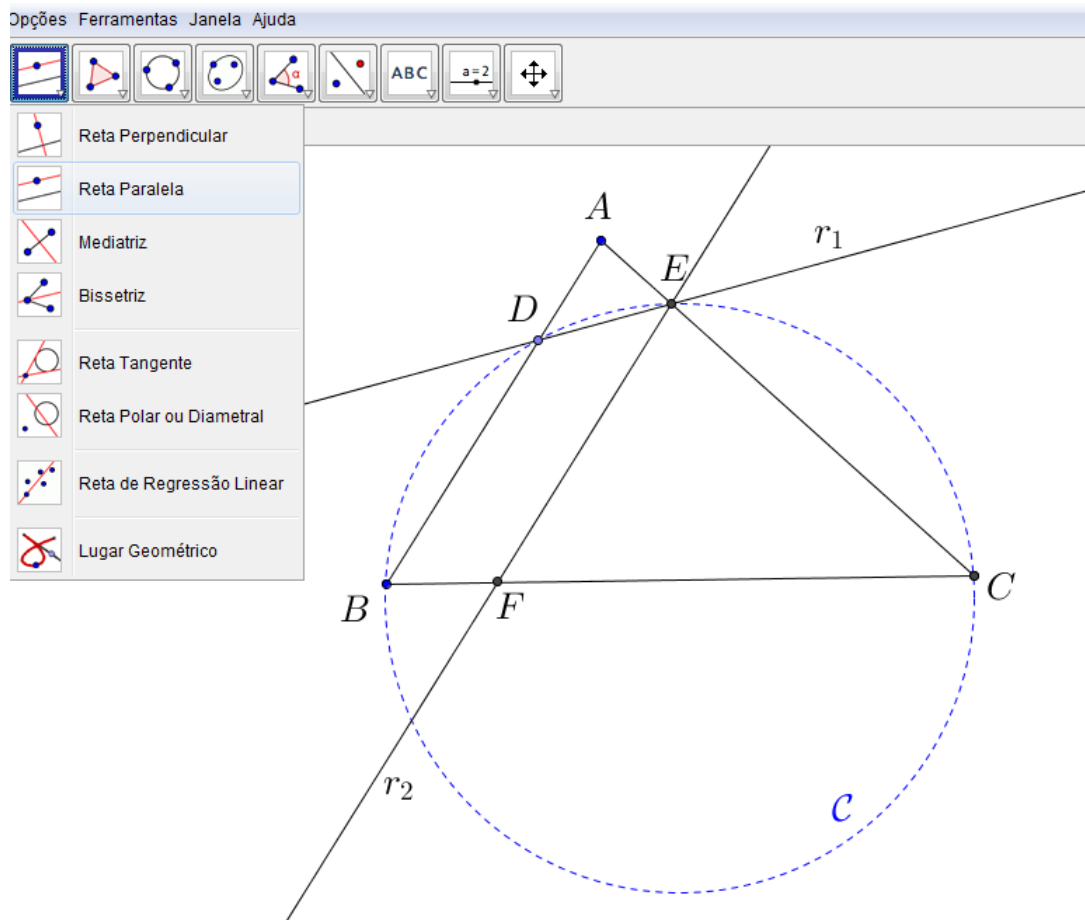


Figura 51: Construção da reta paralela  $r_2$  ao lado  $\overline{AB}$ .

- Como anteriormente fizemos, para construirmos a reta antiparalela  $r_3$  ao lado  $\overline{AC}$  passando por  $F$ , selecionamos o botão *Círculo definido por Três Pontos* e clicamos sobre  $A$ ,  $C$  e  $F$ . Sejam  $C_1$  esta circunferência e  $\{G\} = C_1 \cap \overline{AB}$ , como está ilustrado na Figura 52.

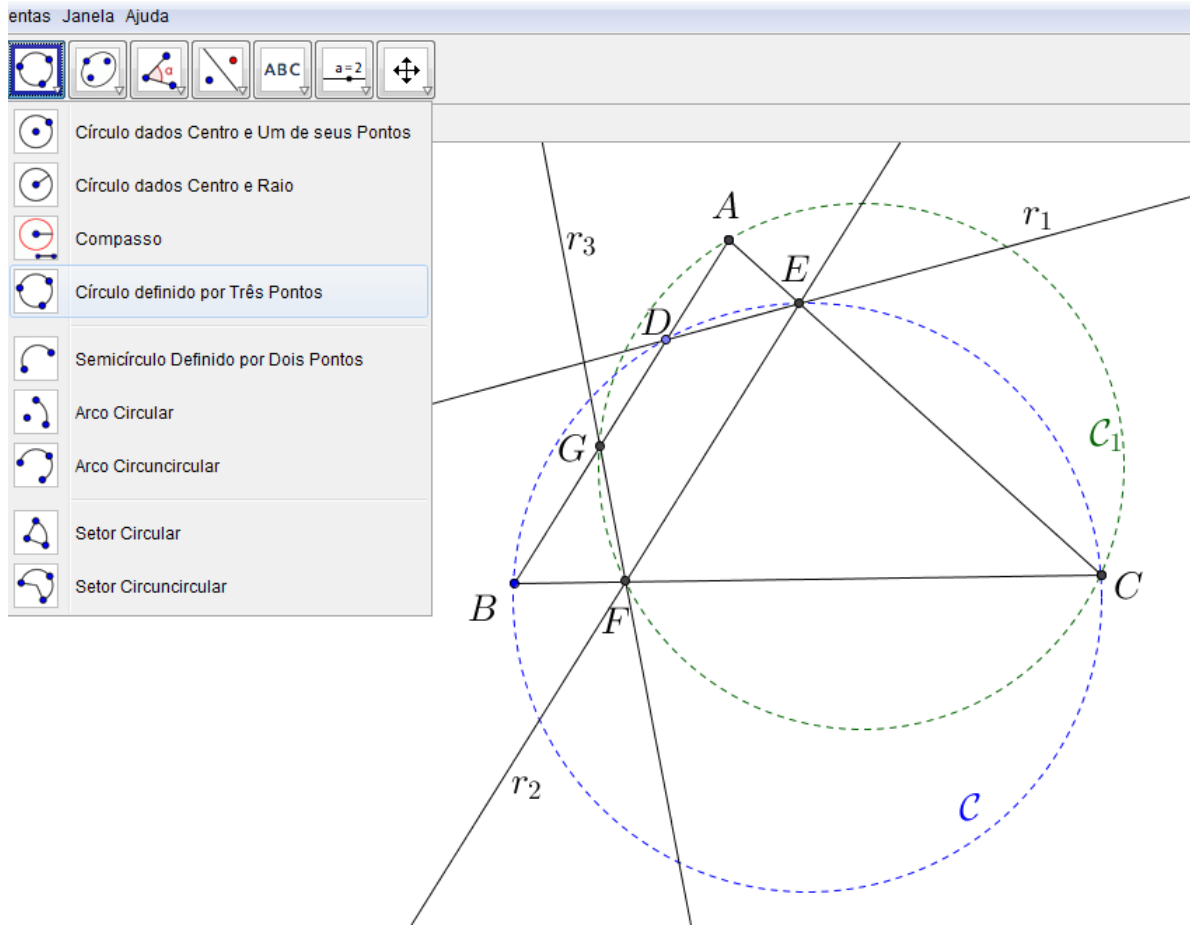


Figura 52: Construção da reta antiparalela  $r_3$  ao lado  $\overline{AC}$ .

- Para construirmos a reta  $r_4$  paralela ao lado  $\overline{BC}$  passando por  $G$ , selecionamos novamente o botão *Reta Paralela*, clicamos sobre o lado  $\overline{BC}$  e, em seguida, sobre o ponto  $G$ . Seja  $\{H\} = r_4 \cap \overline{AC}$ , como está ilustrado na Figura 53.

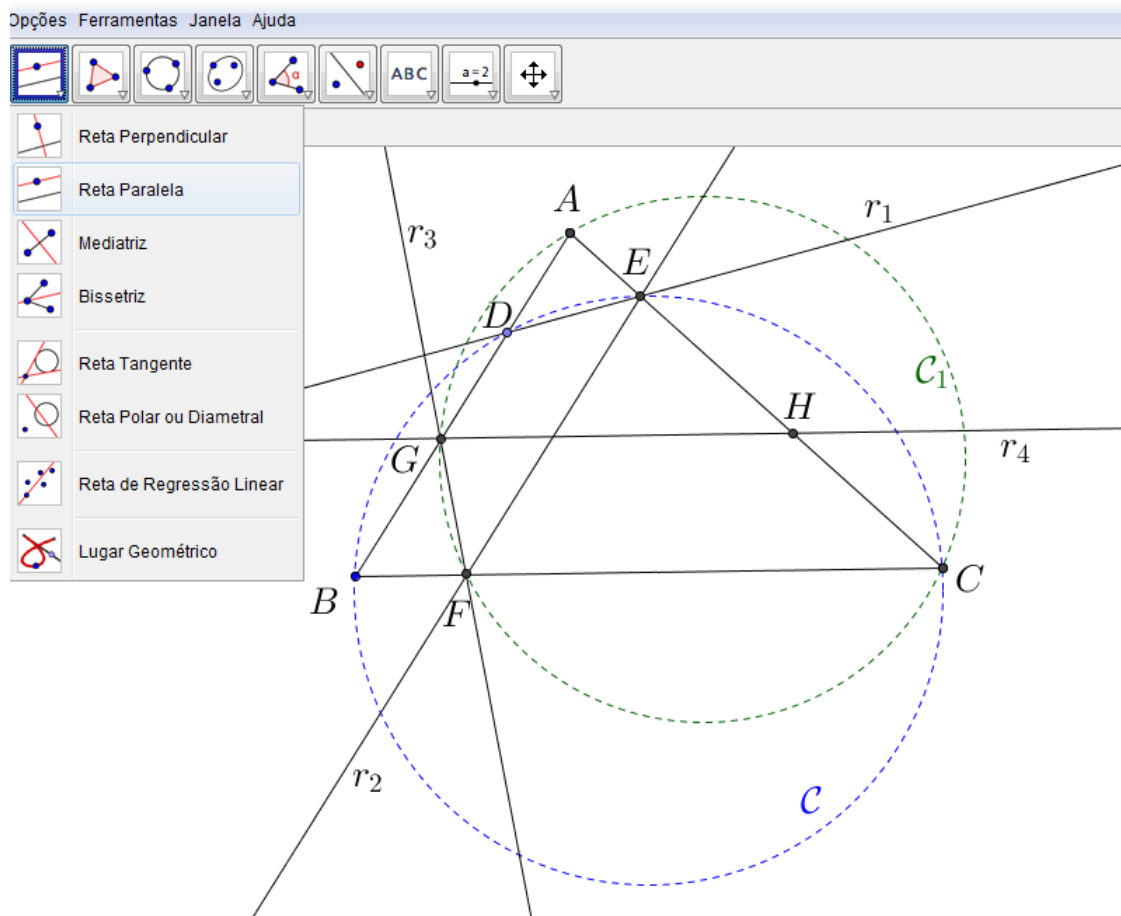


Figura 53: Construção da reta paralela  $r_4$  ao lado  $\overline{BC}$ .

- Usando a ferramenta *Círculo definido por Três Pontos*, clicamos sobre os pontos  $A$ ,  $B$  e  $H$ , obtendo assim a circunferência  $C_2$ . Sejam  $\{I\} = C_2 \cap \overline{BC}$  e  $r_5 = \overleftrightarrow{HI}$  a reta antiparalela ao lado  $\overline{AB}$  que passa por  $H$ , como está ilustrado na Figura 54.

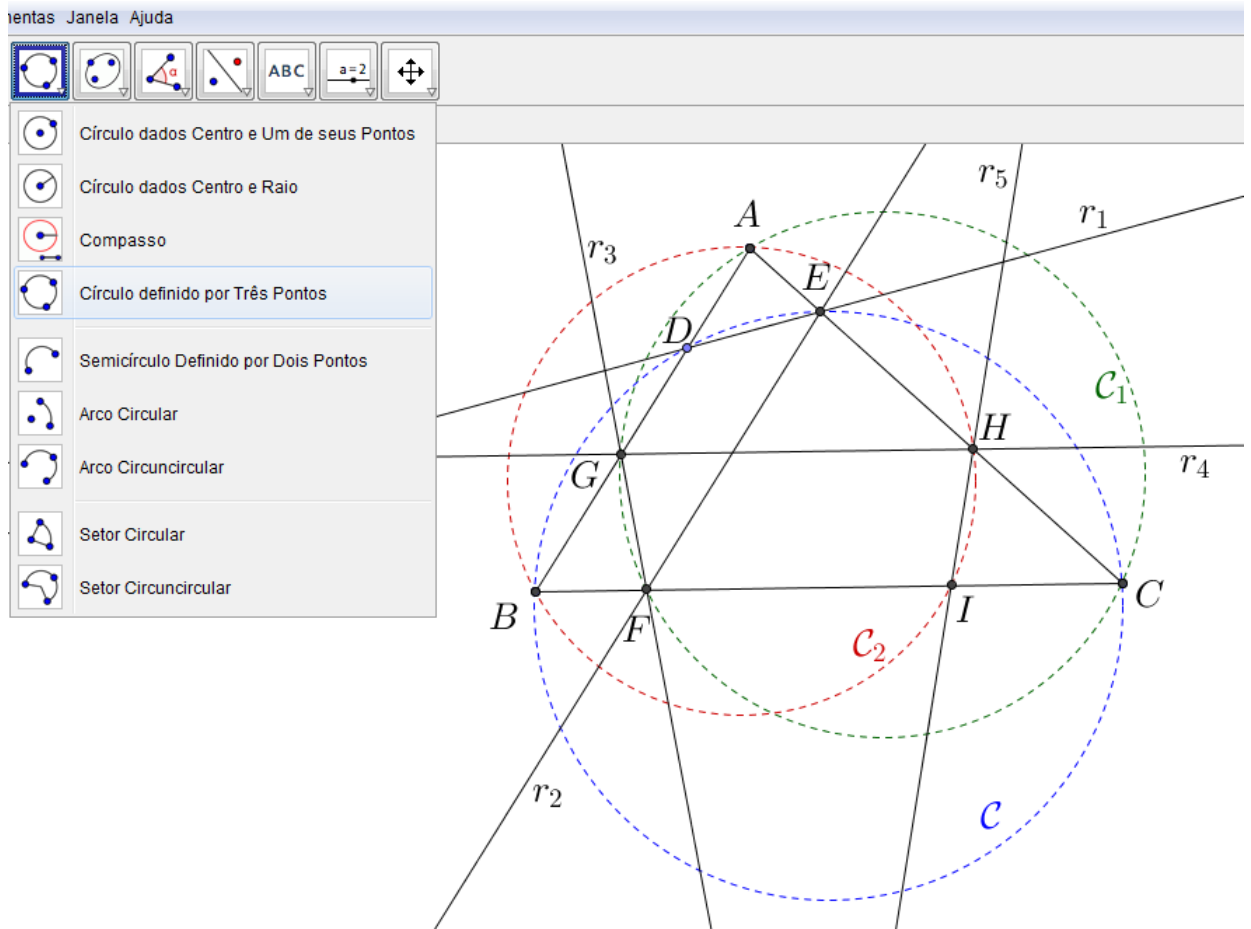


Figura 54: Construção da reta antiparalela  $r_5$  ao lado  $\overline{AB}$ .

- Por fim, selecionamos o botão *Reta* e clicamos sobre os pontos  $I$  e  $D$ . Seja  $r_6 = \overleftrightarrow{ID}$ , como está ilustrado na Figura 55. Com o uso do Geogebra, verificamos que  $r_6$  é paralela ao lado  $\overline{AC}$ , selecionando a ferramenta *Ângulo* e obtendo as medidas dos ângulos  $\angle IDB$  e  $\angle CAB$ .



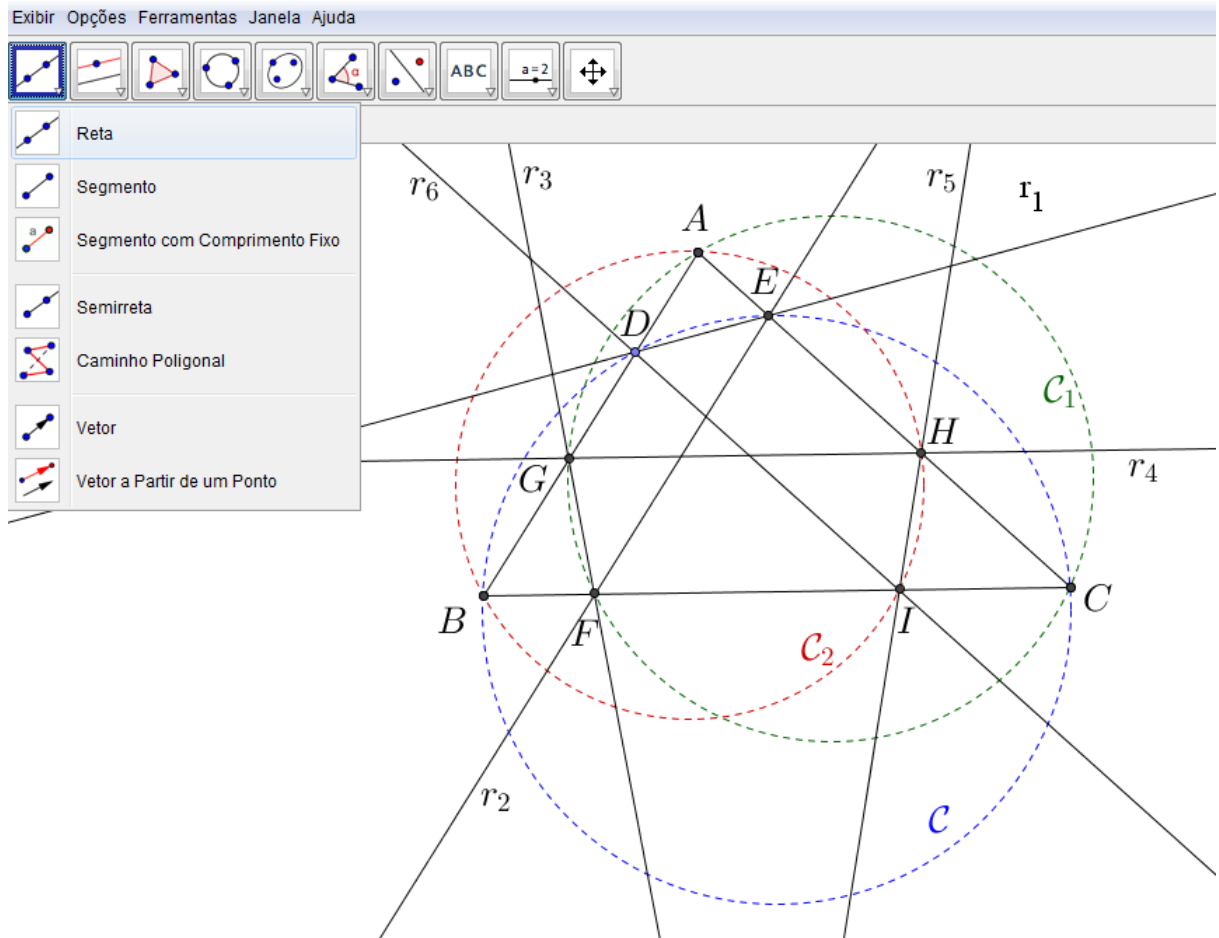


Figura 55: Construção da reta paralela  $r_6$  ao lado  $\overline{AC}$ .

O polígono  $DEFGHI$  é conhecido como Hexágono de Tucker do triângulo  $\triangle ABC$  e a circunferência que passa por esses pontos é chamada de Circunferência de Tucker do triângulo, como está ilustrado na Figura 56.

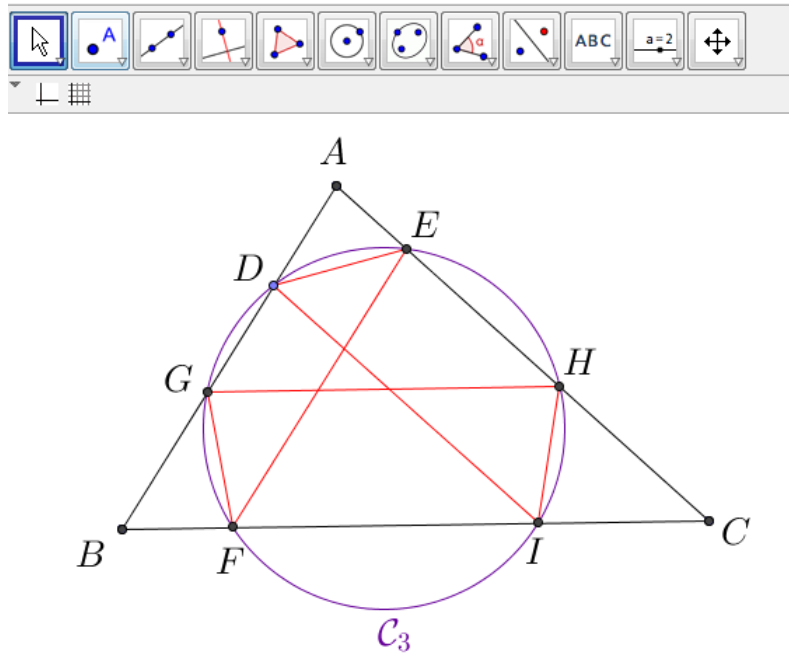


Figura 56: Círcunferência de Tucker do triângulo  $\triangle ABC$ .

---

## CONCLUSÃO

---

O estudo da circunferência na educação básica é superficial, restringindo-se basicamente às circunferências inscrita e circunscrita a um dado triângulo.

Nesta dissertação, investigamos uma classe especial de circunferências, que são conhecidas como Circunferências de Tucker. Para isso, fez-se necessário estudar alguns temas pertinentes a estas circunferências, como antiparalelas, coordenadas trilineares, simedianas e ângulo de Brocard.

Grande parte da pesquisa deste trabalho foi amparada na metodologia proposta por JOHNSON(1960) em [2]. O autor caracteriza uma Circunferência de Tucker a partir da construção de um Hexágono de Tucker de um triângulo, o qual possui três segmentos antiparalelos congruentes. O tema é vasto e enriquecedor.

Acreditamos que este trabalho venha a contribuir para a formação continuada do professor de Matemática da educação básica, desafiando seus conhecimentos e oportunizando-lhe a discussão de temas mais abrangentes na sala de aula.



---

## BIBLIOGRAFIA

---

- [1] BROWN, F. G. W. *The Brocard and Tucker Circles of a Cyclic Quadrilateral*. In: BROWN, Frederick G.W. *The Brocard and Tucker Circles of a Cyclic Quadrilateral*. [S. l.: s. n.], 1917. Disponível em: <https://www.cambridge.org/core/services/aop-cambridge-core/content/view/1D3004A89AAFED44D514E841F1846EC1/S0013091500035239a.pdf/the-brocard-and-tucker-circles-of-a-cyclic-quadrilateral.pdf>. Acesso em: 18 maio 2022.
- [2] JOHNSON, R. A. *Modern Geometry: an elementary treatise on the geometry of the triangle and the circle*. New York: Dover Publications, Inc., 1960. 333 p. Disponível em: <http://www.albertstam.com/usamobooks/Advanced20Euclidean20Geometry200-20Roger20Johnson2028Dover,20196029.pdf>. Acesso em: 01 jun. 2020.
- [3] KIMBERLING, C. *Encyclopedia of triangle centers*, 1994. This is PART 1:Introduction and Centers X(1)-X(1000). Disponível em <https://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>. Acesso em 03 Maio de 2020.
- [4] MAGALHÃES, E. J. S. *Pontos notáveis do triângulo. Quantos você conhece?*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Sergipe, 2013.
- [5] SAMMY L.; POHOATA, C. *Let's Talk About Symmedians!*, [s. l.], 2013. Disponível em: <https://www.awesomemath.org/wp-pdf-files/math-reflections/mr-2013-04/letstalkaboutsymmedians.pdf>. Acesso em: 20 maio 2022.