Universidade Federal de Juiz de Fora
PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Edgard Antônio Carvalho Faria

Determinação do volume de sólidos geométricos através da fórmula dos três níveis

Juiz de Fora
2013

Edgard Antônio Carvalho Faria

Determinação do volume de sólidos geométricos através da fórmula dos três níveis

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) na Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática, na área de concentração em Geometria e Topologia.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Fernando de Oliveira Faria

Juiz de Fora
2013

Faria, Edgard Antônio Carvalho.

Determinação do volume de sólidos geométricos através da fórmula dos três níveis/Edgard Antônio Carvalho Faria. - 2013.

65f. : il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.

1. Método de exaustão. 2. Volume. 3. Fórmula dos três níveis.

I. Título

CDU 51

Edgard Antônio Carvalho Faria

Determinação do volume de sólidos

geométricos através da fórmula dos três níveis

Dissertação aprovada pela Comissão Examinadora abaixo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Geometria e Topologia.

___________________________ .

Prof. Dr. Luiz Fernando de Oliveira Faria
(Orientador)
PROFMAT-UFJF

___________________________ .

Prof. Dr. Luis Fernando Crocco Afonso
PROFMAT-UFJF

___________________________ .

Prof. Dr. Ezequiel Rodrigues Barbosa
UFMG

Juiz de Fora, 15 de agosto de 2013.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela oportunidade a mim concedida.

Aos colegas de classe, em especial ao Leandro Sodré, que com palavras de incentivo e apoio intelectual me ajudou a não desistir quando o corpo e a mente fraquejavam.

A minha mãe e as minhas irmãs que sempre estiveram disponíveis para ficar com minha filha para que eu pudesse estudar.

A Hila, minha esposa e eterna companheira, que sempre esteve ao meu lado e que muitas vezes se sacrificou em prol dos meus estudos e trabalhos. Obrigado meu amor, sem você me incentivando eu não conseguiria.

A Laís, minha filha, que com apenas um ano de vida teve que dividir a atenção do pai com os estudos e agora, com três anos, já compreende a importância desses momentos. Um dia será sua vez!

Aos professores do Departamento de Matemática da UFJF pelo acolhimento, paciência e dedicação durante esses dois anos, em especial ao meu orientador Luiz Fernando de Oliveira Faria, sempre solicito e atencioso com minha dissertação.

À CAPES pelo apoio financeiro recebido.

Resumo

Este estudo tem como objetivo apresentar uma fórmula para o cálculo de volume dos mais variados sólidos geométricos estudados no ensino médio e outros mais, a chamada Fórmula dos Três Níveis.

A intenção é fornecer aos alunos do ensino médio uma única forma para calcular o volume de sólidos geométricos, desde que estes satisfaçam a uma certa propriedade, proporcionando aos alunos autonomia no estudo desse assunto. A prova do resultado é baseada no método de exaustão e, portanto, o professor que optar por fazer tal demonstração introduzirá ao aluno conceitos primitivos do Cálculo Diferencial e Integral.

Palavras chaves : Método de exaustão; Volume; Fórmula dos três níveis.

Abstract

This study aims to present a new formula for the calculation of volume of various geometrical solids studied in high school, as well as others, the so-called Three-Level Formula.

The goal is to provide high schoolers with a single formula to calculate the volume of geometrical solids, as longs as they satisfy a certain property, allowing pupils autonomy in the study of this subject. The proof of this study is based on the method of exhaustion, and, therefore, the teacher who chooses to demonstrate this will introduce students to primitive concepts of differential and integral calculus.

Key-words: Exhaustion Technique; Volume; Three-Level Formula.

Conteúdo

Lista de Figuras

.

Introdução

Um dos assuntos mais importantes não apenas da Matemática, mas também de todo nosso cotidiano, é a noção de comprimento, de área e de volume. Esses conceitos são utilizados praticamente todo o tempo e em todo lugar. Por exemplo: quando uma costureira quer colocar um elástico em uma calça, ela precisa saber qual é o comprimento do mesmo; quando um pedreiro vai orçar uma obra, antes de colocar a mão na massa ele precisa conhecer a área do projeto; e quando alguém vai comprar uma caixa d'água, uma das primeiras informações que procura saber é o volume de água que ela comporta.

O objetivo deste trabalho é apresentar uma fórmula para o cálculo de volume de todos os sólidos clássicos estudados no ensino médio e outros mais, visando aplicação na resolução de exercícios.

Intuitivamente, o volume de um sólido é a quantidade de espaço por ele ocupado. Para exprimir essa "quantidade de espaço" através de um número, podemos compará-la com uma unidade e o resultado dessa comparação é chamado de volume. Utilizaremos a unidade usual de volume dada pelo cubo de aresta 1. Então, o volume de um sólido S é o número de cubos unitários contidos em S.

Para exemplificar, considere um paralelepípedo com 10 cm de comprimento, 20 cm de largura e 30 cm de altura. É fácil perceber que cabem 600 cubos de aresta 1 cm dentro do paralelepípedo e dessa forma dizemos que o volume é 600 cm^3. Mas, como esse sólido S pode ter uma forma bastante irregular, não fica claro o que significa o número de vezes que um sólido contém esse cubo. Vejamos uma esfera de raio R, quantos cubos de aresta 1 estão contidos nessa esfera?

Para responder a essa e a muitas outras perguntas foram desenvolvidos, ao longo da história, vários métodos que nos permitiram determinar o volume dos mais variados sólidos através de fórmulas que são comumente apresentadas no ensino médio.

Veja alguns exemplos:

	Prismas	**Pirâmide**	**Tronco de Pirâmide**
Volume	$A_b\,h$	$\frac{1}{3}A_b h$	$\frac{h}{3}\big(A_B + \sqrt{A_B\,A_b} + A_b\big)$
	Cilindro	**Cone**	**Esfera**
Volume	$\pi r^2 h$	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$	$\frac{4}{3}\pi r^3$

Tabela 1: Volume de alguns sólidos

em que A_b é área da base, A_B é área da base maior, h é a altura, r é o raio e V é o volume.

Baseado em [1], apresentamos neste trabalho mais uma forma de determinar volume de sólidos em geral, a chamada Fórmula dos Três Níveis.

No Capítulo 1, abordamos um pouco da história do cálculo de volumes, com destaque para os fatos que efetivamente enriquecem as teorias utilizadas em nosso trabalho. Sendo assim, contemplamos os papiros de Moscou e sua versão para o cálculo de volume do tronco de pirâmide, Arquimedes e o método de exaustão para determinação de áreas e volumes e Cavalieri e os indivisíveis. Como referência gostaríamos de citar [2].

No Capítulo 2, descrevemos algumas fórmulas baseadas nos binômios de Newton para o cálculo de somas de potências dos n primeiros números naturais e as apresentamos em notação de somatório. Essas fórmulas serão úteis para o cálculo das áreas sob gráficos de funções.

No Capítulo 3, descrevemos o método de exaustão para determinação de áreas sob gráficos de funções e calculamos a área sob o gráfico de uma reta, parábola e parábola cúbica e definimos algumas propriedades.

No Capítulo 4, descrevemos o método de exaustão para determinação de volumes e calculamos, como exemplo, o volume de uma pirâmide de base qualquer através do método de exaustão.

Já no Capítulo 5, enunciamos a fórmula dos três níveis e a ilustramos determinando os volumes dos seguintes sólidos: Pirâmide, Cone de revolução, Esfera e Cunha esférica. Fazemos sua demonstração e respondemos alguns questionamentos a respeito de sua aplicabilidade no ensino médio.

No Capítulo 6, resolvemos alguns exercícios aplicando a fórmula dos três níveis e fazemos algumas considerações finais deste estudo.

No apêndice, seguem algumas demonstrações e complementações para o enriquecimento teórico do conteúdo exposto neste trabalho.

É importante salientar que este estudo tem como principal referencial teórico o trabalho

[1]. Com o intuito de deixar a leitura mais suave utilizamos no corpo do texto uma linguagem mais intuitiva e deixamos alguns resultados teóricos no apêndice. Fazemos uma breve introdução histórica dos principais conceitos , abrimos um pouco mais as contas, introduzimos novos exemplos e acrescentamos uma discussão sobre em que circunstâncias utilizar a Fórmula dos Três Níveis. Não é objetivo deste estudo comparar modelos e sim propiciar aos alunos mais um caminho para soluções de exercícios e refinar ideias intuitivas a respeito do cálculo de volumes.

Capítulo 1

Prelúdio à história do cálculo de áreas e volumes

1.1 Papiro de Moscou e Rhind

Dentre todos os documentos matemáticos que chegaram aos dias de hoje, talvez os mais famosos sejam os chamados papiros de Ahmes (ou Rhind) e o papiro de Moscou. O de Rhind é um longo papiro egípcio de cerca de 1650 a.C., no qual um escriba de nome Ahmes ensina as soluções de 85 problemas de aritmética e geometria. Esse papiro foi encontrado pelo egiptólogo inglês Rhind no final do século XIX e hoje está exposto no Museu Britânico, em Londres.

O papiro de Moscou é mais antigo e contém a fórmula correta para o cálculo do volume de um tronco de pirâmide. Muito provavelmente existiram papiros análogos anteriores, mas esses foram os mais antigos que se salvaram.

Muitos dos problemas dos papiros Moscou e Rhind são geométricos. Decorrem de fórmulas de mensuração necessárias para o cálculo de áreas e volumes. Assume-se que a área de um círculo é igual à de um quadrado de lado igual a 8/9 do diâmetro e que o volume de um cilindro reto é o produto da área da base pelo comprimento da altura. Investigações recentes parecem mostrar que os egípcios sabiam que a área de um triângulo qualquer é o semiproduto da base pela altura. Alguns dos problemas parecem envolver a cotangente do ângulo diedro entre a base e uma face da pirâmide e outros mostram algum conhecimento da teoria das proporções.

É realmente notável a existência, no papiro Moscou, de um exemplo correto da fórmula do volume de um tronco de pirâmide de bases quadradas. No problema 14 do papiro Moscou, encontramos o seguinte exemplo numérico: “Se lhe for dito: Um tronco de pirâmide de altura vertical 6 por 4 na base e por 2 no topo. Você deve quadrar esse 4, resultando 16. Você deve dobrar 4, resultando 8. Você deve quadrar 2, resultando 4. Você deve somar o 16, o 8 e o 4, resultando 28. Você deve tomar um terço de 6, resultando 2. Você deve tomar o dobro de 28, resultando 56. Veja, é 56. Você o encontrará corretamente”. Para um estudo mais detalhado ver [2].

$$V = \frac{1}{3}\, h(a^2 + ab + b^2) \tag{1.1}$$

em que, h é altura entre as bases, a é aresta da base menor e b é aresta da base maior.

1.2 O método de Exaustão de Eudoxo

Arquimedes de Siracusa (287 - 212 a.C.) é considerado consensualmente o maior matemático da antiguidade. Superou todos os outros pela quantidade e dificuldade dos problemas que tratou, pela originalidade de seus métodos e pelo rigor de suas demonstrações. Interessava-se tanto pela matemática pura quanto pela aplicada. Tornou-se famoso por suas invenções mecânicas, algumas delas utilizadas na defesa da cidade de Siracusa contra o ataque das tropas romanas comandadas pelo general Marcelo, durante a segunda guerra Púnica (218 - 201 a.C.).

Em seu trabalho, desenvolveu também o método de exaustão, creditado a Eudoxo, pelo qual se aproxima a quantidade desejada pelas somas parciais de uma série ou pelos termos de uma sequência. Obteve aproximações da área de um círculo comparando-a com as áreas de polígonos regulares inscritos e circunscritos. Para mais detalhes gostaríamos de citar [3].

As contribuições de Arquimedes na matemática foram bastante significativas, como na determinação de áreas de figuras cilíndricas, parabólicas e elípticas. Determinou também volumes do cone e da esfera utilizando para isso métodos bastante rigorosos.

Para achar áreas e volumes, o versátil Arquimedes usou sua própria versão primitiva do cálculo integral, que, de alguma maneira, é muito semelhante, quanto ao espírito, ao cálculo atual. Numa carta a Eratóstenes, Arquimedes expôs seu “método da alavanca” para descobrir fórmulas de áreas e volumes. Contudo, quando publicava provas para essas fórmulas, ele utilizava o método de exaustão para se ajustar aos padrões de rigor da época. Deve-se notar que a frase "método de exaustão"não era usada pelos gregos antigos, sendo uma invenção moderna. Todavia, está tão firmemente estabelecida na história da matemática que continuamos a fazer uso dela.

Nesse contexto, Arquimedes fez aplicações muito importantes do chamado "método de exaustão", as quais contribuíram para marcar a importância desse método na matemática antiga e para o desenvolvimento de grande parte da matemática como a concebemos hoje. No entanto, nem Arquimedes nem qualquer outro matemático grego apresentam o método de exaustão sob a forma de um resultado geral aplicável a todas as figuras (ou pelo menos a mais de um caso). Dada a figura, observava-a e tentava formar figuras circunscritas e/ou inscritas, valendo-se das propriedades daquela figura particular. Era este o procedimento empregado nas primeiras obras. Isso quer dizer que o método era particular (usado de forma diferente) para cada problema.

1.3 Cavalieri e os indivisíveis

No início do século XVII, os métodos deixados pelos gregos para cálculos de áreas e volumes, apesar de sua beleza e rigor, mostravam-se cada vez menos adequados a um mundo em franco progresso científico, pois faltavam a eles operacionalidade e algoritmos para implementá-los. E como não havia ainda condições matemáticas de obter esses requisitos, os métodos então surgidos eram sempre passíveis de críticas como o mais famoso deles, que descreveremos a seguir, a geometria dos indivisíveis, de Bonaventura Cavalieri (1598-1647).

Bonaventura Cavalieri nasceu em Milão em 1598, foi aluno de Galileu e atuou como professor de matemática da Universidade de Bolonha de 1629 até 1647, ano de sua morte. Deixou uma obra vasta abrangendo Matemática, Óptica e Astronomia. Em grande parte foi o responsável pela introdução, *logo*, dos logaritmos na Europa. Tudo isso fez dele um matemático muito influente. Mas a obra que mais o projetou, aliás sua grande contribuição à matemática, é o tratado Geometria indivisibilibus, publicado em sua versão inicial no ano de 1635. Nesse trabalho ele apresenta seu método dos indivisíveis, cujas raízes remontam a Demócrito (c. 410 a.C.) e Arquimedes (c. 287-212 a.C.), mas cuja motivação direta talvez se encontre nas tentativas de achar certas áreas e certos volumes.

O tratado de Cavalieri é prolixo e pouco claro, sendo difícil até descobrir o que ele entendia por "indivisível". Tudo indica que um indivisível de uma porção plana dada é uma corda dessa porção e um indivisível de um sólido dado é uma secção desse sólido. Considera-se que uma porção plana seja formada de uma infinidade de cordas paralelas e que um sólido seja formado de uma infinidade de secções planas paralelas. Então, argumentava Cavalieri, fazendo-se deslizar cada um dos elementos do conjunto das cordas paralelas de uma porção plana dada ao longo de seu próprio eixo, de modo que as extremidades das cordas ainda descrevam um contorno contínuo, a área da nova porção plana é igual à da original, uma vez que ambas são formadas das mesmas cordas. Um procedimento análogo com os elementos do conjunto das secções planas paralelas de um sólido dado fornecerá um outro sólido com o mesmo volume do original.

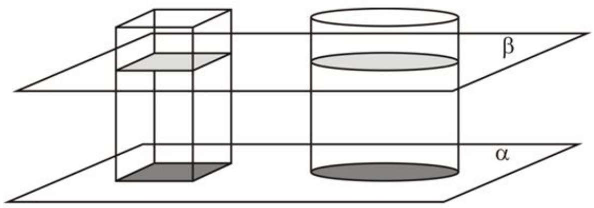


Figura 1.1: Princípio de Cavalieri.

Note que se os dois sólidos são tais que todo plano secante a eles e paralelo ao plano α determina nos sólidos secções de mesma área, então os volumes desses sólidos são iguais. Intuitivamente, é o mesmo que utilizar o método de exaustão, ou seja, a soma das áreas de todas as secções nos fornece o volume.

Esses resultados, ligeiramente generalizados, fornecem os chamados princípios de Cavalieri descritos a seguir:

1. Se duas porções planas são tais que toda reta secante a elas e paralela a uma reta dada determina nas porções segmentos de reta cuja razão é constante, então a razão entre as áreas dessas porções é a mesma constante.

2. Se dois sólidos são tais que todo plano secante a eles e paralelo a um plano dado determina nos sólidos secções cuja razão é constante, então a razão entre os volumes desses sólidos é a mesma constante. Para maiores detalhes, veja [2].

Os princípios de Cavalieri representam ferramentas poderosas para o cálculo de áreas e volumes e, ademais, sua base intuitiva pode facilmente tornar-se rigorosa com o Cálculo

Integral moderno. Com a aceitação desses princípios como evidentes, intuitivamente, podem-se resolver muitos problemas de mensuração que normalmente requereriam técnicas avançadas de cálculo.

Capítulo 2

Soma de potências inteiras dos números naturais

Neste capítulo, determinamos as somas de potências inteiras dos n primeiros números naturais, através de alguns binômios de Newton e no apêndice A1 verificaremos as fórmulas por indução matemática.

2.1 Binômios de Newton

Considere a expressão $(1 + X)^n$, em que X é uma variável e n é um número natural não nulo. Observamos que o desenvolvimento dessa potência é um polinômio de grau n em X cujos coeficientes são números naturais:

$$(1 + X)^n = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n \,. \tag{2.1}$$

Como pode ser verificado em [8].

Nessa última equação, o coeficiente a_i, $i = 0, ..., n$, será denotado pelo símbolo $a_i = \binom{n}{i}$ e calculado por $\frac{n!}{i!(n-i)!}$.

Notemos que: $a_a = \binom{n}{0} = 1$ e $a_n = \binom{n}{n} = 1$.

Sejam a e b números reais e seja $n \in \mathbb{N}$. Tem-se que:

$$(a + b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + ... + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n \,. \tag{2.2}$$

DEMONSTRAÇÃO

Se $a = 0$, o resultado é trivial. Se $a \neq 0$, basta substituir X por $\frac{b}{a}$ na expansão de

$(1+X)^n$ e multiplicar ambos os lados por a^n.

$$\left(1+\frac{b}{a}\right)^n = a_0 + a_1\left(\frac{b}{a}\right) + a_2\left(\frac{b}{a}\right)^2 + ... + a_{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1} + a_n\left(\frac{b}{a}\right)^n, \tag{2.3}$$

$$\left(1+\frac{b}{a}\right)^n a^n = \left[a_0 + a_1\left(\frac{b}{a}\right) + a_2\left(\frac{b}{a}\right)^2 + ... + a_{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1} + a_n\left(\frac{b}{a}\right)^n\right] a^n \tag{2.4}$$

e portanto,

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + ... + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n\,. \tag{2.5}$$

Veja alguns exemplos:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2;\\ (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;\\ (a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4\,.\end{aligned} \tag{2.6}$$

2.2 Soma dos números naturais

Nesta seção determinamos a soma dos n primeiros números naturais dada por $S_n^1 = 1 + 2 + 3 + ... + n$.

A partir de $(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$ podemos escrever $(k+1)^2 - k^2 = 2k + 1$ e daí:

$$\begin{aligned}2^2 - 1^2 &= 2\times 1 + 1\\ 3^2 - 2^2 &= 2\times 2 + 1\\ 4^2 - 3^2 &= 2\times 3 + 1\\ &\vdots\\ n^2 - (n-1)^2 &= 2(n-1) + 1\\ (n+1)^2 - n^2 &= 2n + 1\,.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Somando todas as parcelas do lado esquerdo e todas as parcelas do lado direito e igualando as somas temos:

$$\begin{aligned}&(2^2-1^2) + (3^2-2^2) + (4^2-3^2) + .,. + (n^2-(n-1)^2) + ((n+1)^2-n^2)\\ =\ &(2\times 1+1) + (2\times 2+1) + (2\times 3+1) + ... + (2(n-1)+1) + (2n+1)\,.\end{aligned} \tag{2.8}$$

Eliminando as parcelas simétricas da soma no 1º membro da igualdade e manipulando o 2º membro, temos:

$$(n+1)^2 - 1^2 = 2(1 + 2 + 3 + ... + (n-1) + n) + (1 + 1 + 1 + ... + 1)\,. \tag{2.9}$$

Como, $S_n^1 = 1 + 2 + 3 + ... + n$, e $(1 + 1 + 1 + ... + 1)$ é a soma do 1, n vezes, vem:

$$\begin{aligned}
(n+1)^2 - 1^2 &= 2S_n^1 + n\,, \\
2S_n^1 &= (n+1)^2 - (n+1)\,, \\
2S_n^1 &= (n+1)n\,, \\
S_n^1 &= \frac{n(n+1)}{2}\,. \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

2.3 Soma dos quadrados dos números naturais

O mesmo raciocínio pode ser empregado para o cálculo de $S_n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$, em que S_n^2 significa a soma dos quadrados dos n primeiros números naturais.

A partir de $(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + k$ podemos escrever $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + k$ e daí:

$$\begin{aligned}
2^3 - 1^3 &= 3 \times 1^2 + 3 \times 1 + 1 \\
3^3 - 2^3 &= 3 \times 2^2 + 3 \times 2 + 1 \\
4^3 - 3^3 &= 3 \times 3^2 + 3 \times 3 + 1 \\
&\vdots \\
n^3 - (n-1)^3 &= 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1 \\
(n+1)^3 - n^3 &= 3n^2 + 3n + 1\,. \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

Somando os lados esquerdos de todas as igualdades e igualando a soma dos lados direitos correspondentes temos:

$$\begin{aligned}
& (2^3 - 1^3) + (3^3 - 2^3) + (4^3 - 3^3) + .. + (n^3 - (n-1)^3) + ((n+1)^3 - n^3) \\
= \; & (3 \times 1^2 + 3 \times 1 + 1) + (3 \times 2^2 + 3 \times 2 + 1) + (3 \times 3^2 + 3 \times 3 + 1) \\
+ \; & ... + (3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1) + (3n^2 + 3n + 1)\,. \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

Eliminando as parcelas simétricas da soma no 1º membro da igualdade e manipulando o 2º membro, temos:

$$\begin{aligned}
(n+1)^3 - 1^3 &= 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (n-1)^2 + n^2) \\
&+ 3(1 + 2 + 3 + ... + (n-1) + n) + (1 + 1 + 1 + ... + 1)\,. \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

Como, $S_n^1 = 1 + 2 + 3 + ... + n$, $S_n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$ e $(1 + 1 + 1 + ... + 1)$ é a soma do 1, n vezes, vem:

$$\begin{aligned}
(n+1)^3 - 1^3 &= 3S_n^2 + 3S_n^1 + n\,, \\
(n+1)^3 - 1 &= 3S_n^2 + \frac{3n(n+1)}{2} + n\,, \\
2(n^3 + 3n^2 + 3n) &= 6S_n^2 + 3n^2 + 5n\,, \\
2n^3 + 3n^2 + n &= 6S_n^2\,, \\
S_n^2 &= \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{6}\,, \\
S_n^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,. \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

2.4 Soma dos cubos dos números naturais

Mais uma vez vamos usar as ideias anteriores para calcular o valor de $S_n^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$, em que S_n^3 é a soma dos cubos dos n primeiros números naturais.

A partir de $(k+1)^4 = k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$ podemos escrever $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$, assim:

$$\begin{aligned}
2^4 - 1^4 &= 4 \times 1^3 + 6 \times 1^2 + 4 \times 1 + 1 \\
3^4 - 2^4 &= 4 \times 2^3 + 6 \times 2^2 + 4 \times 2 + 1 \\
4^4 - 3^4 &= 4 \times 3^3 + 6 \times 3^2 + 4 \times 3 + 1 \\
&\vdots \\
n^4 - (n-1)^4 &= 4(n-1)^3 + 6(n-1)^2 + 4(n-1) + 1 \\
(n+1)^4 - n^4 &= 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1\,. \qquad (2.15)
\end{aligned}$$

Somando os lados esquerdos de todas as igualdades e igualando a soma dos lados direitos correspondentes, temos de maneira análoga aos cálculos anteriores:

$$\begin{aligned}
(n+1)^4 - 1^4 &= 4S_n^3 + 6S_n^2 + 4S_n^1 + n\,, \\
(n+1)^4 - 1 &= 4S_n^3 + 6\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4\,\frac{n(n+1)}{2} + n\,, \\
(n+1)^4 - 1 &= 4S_n^3 + 2n^3 + 3n^2 + n + 2n^2 + 2n + n\,, \\
n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n &= 4S_n^3 + 2n^3 + 5n^2 + 4n\,, \\
4S_n^3 &= n^4 + 2n^3 + n^2\,, \\
4S_n^3 &= n^2(n^2 + 2n + 1)\,, \\
S_n^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4}\,, \\
S_n^3 &= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2. \qquad (2.16)
\end{aligned}$$

Observa-se ainda que $S_n^3 = (S_n^1)^2$, ou seja, $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + 3 + ... + n)^2$.

2.5 Notação de Somatório

Uma maneira conveniente de escrever as somas usa a letra grega Σ (sigma maiúsculo, correspondente à nossa letra S) e é chamada notação de somatório.

Definição

Se $a_m, a_{m+1}, ..., a_n$ forem números reais e m e n inteiros, tais que $m \leq n$, então

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + ... + a_{n-1} + a_n\,.$$

Assim, o símbolo $\sum\limits_{i=m}^{n}$ indica uma soma na qual a letra i (denominada índice do somatório) assume valores inteiros consecutivos começando em m e terminando em n, isto é, $m, m+1, ..., n$.

Dessa forma, podemos reescrever as fórmulas das somas apresentadas nos itens anteriores da seguinte forma:

$$S_n^1 = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}\,, \qquad (2.17)$$

$$S_n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,, \qquad (2.18)$$

$$S_n^3 = \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2, \qquad (2.19)$$

ou

$$S_n^3 = \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\sum_{i=1}^{n} i\right]^2 . \tag{2.20}$$

Para auxiliar o que ainda será apresentado nesse trabalho, temos três regras simples para se trabalhar com somatórios:

$$\sum_{i=m}^{n} c\, a_i = c \sum_{i=m}^{n} a_i \,, \tag{2.21}$$

$$\sum_{i=m}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i \,, \tag{2.22}$$

e

$$\sum_{i=m}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i - \sum_{i=m}^{n} b_i \,. \tag{2.23}$$

Demonstração da equação (2.21).

$$\begin{aligned} \sum_{i=m}^{n} c\, a_i &= c\, a_m + c\, a_{m+1} + c\, a_{m+2} + ... + c\, a_{n-1} + c\, a_n \\ &= c\big(a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + ... + a_{n-1} + a_n\big) \\ &= c \sum_{i=m}^{n} a_i \,. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Demonstração da equação (2.22).

$$\begin{aligned} \sum_{i=m}^{n} (a_i + b_i) &= (a_m + b_m) + (a_{m+1} + b_{m+1}) + ... + (a_{n-1} + b_{n-1}) + (a_n + b_n) \\ &= (a_m + a_{m+1} + a_{n-1} + a_n) + (b_m + b_{m+1} + b_{n-1} + b_n) \\ &= \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i \,. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Demonstração da equação (2.23).

$$\begin{aligned} \sum_{i=m}^{n} (a_i - b_i) &= (a_m - b_m) + (a_{m+1} - b_{m+1}) + ... + (a_{n-1} - b_{n-1}) + (a_n - b_n) \\ &= (a_m + a_{m+1} + a_{n-1} + a_n) - (b_m + b_{m+1} + b_{n-1} + b_n) \\ &= \sum_{i=m}^{n} a_i - \sum_{i=m}^{n} b_i \,. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Capítulo 3

Método de exaustão

A área de uma região plana delimitada por segmentos de retas pode ser facilmente determinada subdividindo o polígono em triângulos. Já para calcular áreas de regiões mais complexas, cujas fronteiras envolvem gráficos de funções, são comumente utilizados conceitos do Cálculo Diferencial e Integral.

Nesta seção utilizamos o método de exaustão para determinar áreas e volumes. Para um leitor mais interessado, apresentamos no apêndice B conceitos mais precisos sobre integral definida para o cálculo de áreas.

3.1 Descrição do método de exaustão para determinação de área

Consideremos uma região S de um plano coordenado, limitada por duas retas verticais que interceptam o eixo das abscissas em a e b, pelo gráfico de uma função f contínua e não negativa em $[a, b]$ e pelo eixo das abscissas. Veja Figura 3.1

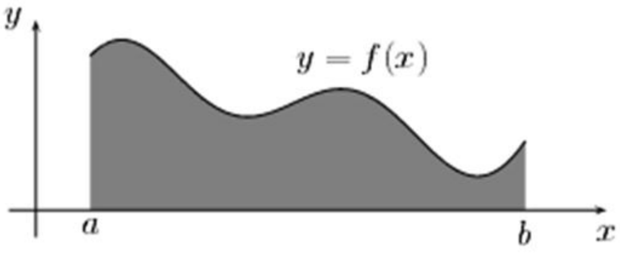


Figura 3.1: Área sob o gráfico de uma função no intervalo de $[a, b]$.

Como $f(x) \geq 0$ para todo x em $[a, b]$, o gráfico não tem parte alguma abaixo do eixo x. Nosso objetivo é definir a área S.

Seja n um inteiro positivo. Podemos dividir o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de medidas iguais a $(b-a)/n$, que será a base de cada um dos n retângulos definidos a seguir. Escolhendo números $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ em que $a = x_0$, $b = x_n$ e $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$ para $i = 1, 2, ..., n$ e denotando Δx como o comprimento $(b-a)/n$ de cada subintervalo (base do retângulo) temos, para cada i, que $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ e consequentemente $x_i = x_{i-1} + \Delta x$.

Assim,

$$x_0 = a\,,\ \ x_1 = a + \Delta x\,,\ \ x_2 = a + 2\Delta x\,, ...,\ \ x_i = a + i\Delta x, ...,\ \ x_n = a + n\Delta x = b \qquad (3.1)$$

Como f é contínua em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, temos dois tipos de retângulos de mesma base Δx a serem definidos:

Os retângulos do primeiro tipo (Figura 3.2A) estarão totalmente abaixo do gráfico de f (cálculo por falta), no qual a altura é igual à menor distância $f(u_i)$, $u_i \in [x_{i-1}, x_i]$ do eixo x ao gráfico de f neste intervalo. Os do segundo tipo (Figura 3.2B) conterão totalmente o gráfico de f (cálculo por excesso) no qual a altura é igual à maior distância $f(v_i)$, $v_i \in [x_{i-1}, x_i]$ do eixo x ao gráfico de f neste intervalo. Essa ideia é melhor fundamentada pelo Teorema de Weierstrass descrito no apêndice C.

Por uma questão de conveniência de linguagem, denotamos por b_i a área de um retângulo do primeiro tipo, isto é, $b_i = f(u_i)\,\Delta x$ e por c_i a área de um retângulo do segundo tipo, isto é, $c_i = f(v_i)\,\Delta x$ como mostrado na Figura 3.2.

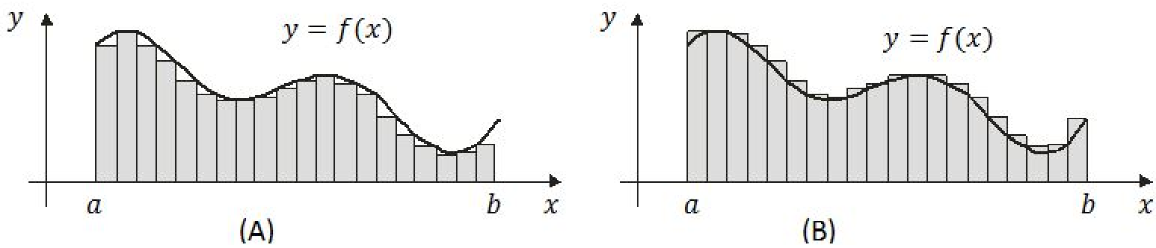


Figura 3.2: Método de exaustão.

Note que se n é muito grande, ou, equivalentemente, se Δx é muito pequeno, a área da região dada por $B_n = \sum_{i=1}^{n} b_i$ fica tão próxima da área dada por $C_n = \sum_{i=1}^{n} c_i$ quanto quisermos e assim $\sum_{i=1}^{n} b_i \leq S \leq \sum_{i=1}^{n} c_i$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Esse é o princípio do método de exaustão.

Para esclarecer melhor o que foi apresentado, faremos três exemplos utilizando o método de exaustão, sendo seus resultados úteis para demonstração do objetivo desse trabalho que é a definição da chamada Fórmula dos Três Níveis.

3.2 Área sob o gráfico da reta

Nesta seção faremos o cálculo da área sob o gráfico de uma reta definida da seguinte forma:

Seja f uma função definida no intervalo $[0, b]$ por $f(x) = x$.

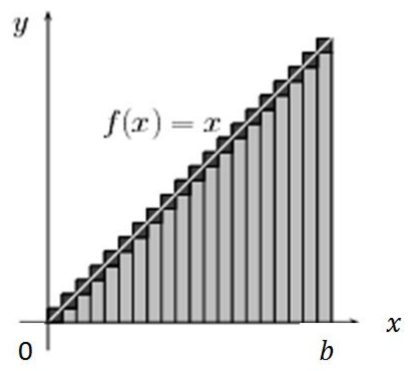


Figura 3.3: Área sob o gráfico da função $f(x) = x$ no intervalo de $[0, b]$.

Dividimos o intervalo $[0, b]$ em n subintervalos de medidas iguais a $\Delta x = \dfrac{b}{n}$, que formarão as bases dos retângulos dos tipos b_i (totalmente contidos na região sob o gráfico da função) e c_i (contém totalmente a região sob o gráfico da função), conforme a Figura 3.3.

Como apresentado anteriormente em (3.1) os subintervalos possuem as seguintes coordenadas:

$$x_0 = 0\,, \qquad x_1 = \frac{b}{n}\,, \qquad x_2 = \frac{2b}{n}\,, \qquad x_3 = \frac{3b}{n}, ..., \qquad x_{n-1} = \frac{(n-1)b}{n}\,, \qquad x_n = b\,. \qquad (3.2)$$

O retângulo do tipo b_i tem altura igual a $f(x_{i-1}) = x_{i-1}$ pois como a função é crescente, isto é, o menor valor que f atinge no subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ ocorre na extremidade esquerda do subintervalo.

Assim,

$$b_i = (\Delta x)\, f(x_{i-1}) = (\Delta x)\, x_{i-1} = \frac{b}{n}\, x_{i-1} = \frac{b}{n} \frac{(i-1)\, b}{n}\,. \qquad (3.3)$$

A soma das áreas de todos os retângulos do tipo b_i, representado por B_n, é dado por:

$$B_n = \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{b}{n}\right)\left[\frac{(i-1)\,b}{n}\right]. \tag{3.4}$$

Utilizando as propriedades de somatório apresentadas na Subseção 2.5, vem:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{b}{n}\right)\left[\frac{(i-1)\,b}{n}\right] = \left(\frac{b}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^{n}(i-1) \tag{3.5}$$

e como já visto em (2.17) temos que

$$\sum_{i=1}^{n}(i-1) = \frac{(n-1)n}{2}. \tag{3.6}$$

Logo:

$$\begin{aligned} \left(\frac{b}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^{n}(i-1) &= \left(\frac{b^2}{n^2}\right)\frac{n(n-1)}{2} = \left(\frac{b^2}{2}\right)\frac{n(n-1)}{n^2} = \left(\frac{b^2}{2}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right) \\ &= \left(\frac{b^2}{2}\right) - \left(\frac{b^2}{2n}\right). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Já os retângulos do tipo c_i, têm altura igual a $f(x_i) = x_i$, pois como a função é crescente, isto é, o maior valor que f atinge no subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ ocorre na extremidade direita do subintervalo.

Assim,

$$c_i = (\Delta x) f(x_i) = (\Delta x)\, x_i = \frac{b}{n} x_i = \frac{b}{n}\frac{(ib)}{n}. \tag{3.8}$$

A soma das áreas de todos os retângulos do tipo c_i, representado por C_n, é dado por:

$$C_n = \sum_{i=1}^{n} c_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{b}{n}\right)\left(\frac{ib}{n}\right). \tag{3.9}$$

Utilizando das propriedades de somatório, vem:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{b}{n}\right)\left(\frac{ib}{n}\right) = \left(\frac{b}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} i, \tag{3.10}$$

e como já demonstrado em (2.17), sabemos que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

Logo:

$$\begin{aligned} \left(\frac{b}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} i &= \left(\frac{b^2}{n^2}\right)\frac{n(n+1)}{2} = \left(\frac{b^2}{2}\right)\frac{n(n+1)}{n^2} = \left(\frac{b^2}{2}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ &= \left(\frac{b^2}{2}\right) + \left(\frac{b^2}{2n}\right). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Daí, pelo método de exaustão:

$$\left(\frac{b^2}{2}\right) - \left(\frac{b^2}{2n}\right) \leq S \leq \left(\frac{b^2}{2}\right) + \left(\frac{b^2}{2n}\right). \tag{3.12}$$

Subtraindo $b^2/2$ em todos os membros da desigualdade, temos:

$$-\left(\frac{b^2}{2n}\right) \leq S - \left(\frac{b^2}{2}\right) \leq \left(\frac{b^2}{2n}\right). \tag{3.13}$$

Como o valor de b é arbitrário (porém fixado) e já que o denominador da fração $b^2/2n$ torna-se arbitrariamente grande quando aumentamos o valor de n, resulta que $b^2/2n$ fica menor do que qualquer valor previamente fixado (bastando para isso escolher um valor suficientemente grande para n). Então a diferença entre o valor da área S e $b^2/2$ fica menor do que qualquer quantidade previamente fixada, por menor que seja. Isto só é verdade se, e somente se, os valores de S e $b^2/2$ forem iguais.

Concluímos então que $S = b^2/2$.

3.3 Área sob o gráfico da parábola

Nesta secão faremos o cálculo da área sob o gráfico da parábola definida da seguinte forma:

Seja f uma função definida no intervalo $[0, b]$ por $f(x) = x^2$.

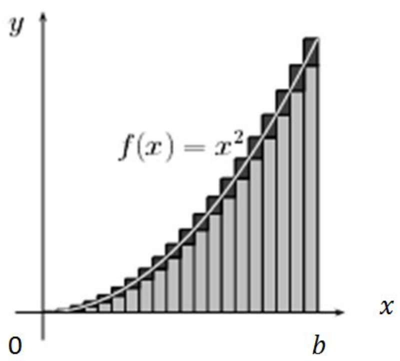


Figura 3.4: Área sob o gráfico da função $f(x) = x^2$ no intervalo de $[0, b]$.

Conforme a Figura 3.4 e de forma análoga ao já apresentado no exemplo anterior e ao que foi mostrado em (3.1), temos que o retângulo do tipo b_i (retângulos por falta) tem altura igual a $f(x_{i-1}) = (x_{i-1})^2$, pois como a função é crescente, isto é, o menor valor que f atinge no subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ ocorre na extremidade esquerda do subintervalo.

Assim,

$$b_i = (\Delta x)\, f(x_{i-1}) = (\Delta x)(x_{i-1})^2 = \frac{b}{n}(x_{i-1})^2 = \frac{b}{n}\Big[\frac{(i-1)b}{n}\Big]^2. \tag{3.14}$$

Daí, a soma da área de todos os retângulos do tipo b_i, representado por B_n, é dado por:

$$B_n = \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{b}{n}\Big)\Big[\frac{(i-1)b}{n}\Big]^2 = \Big(\frac{b}{n}\Big)^3 \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2 \tag{3.15}$$

e como já foi visto em (2.18) temos que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (i-1)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$.

Logo:

$$\begin{aligned}
\Big(\frac{b}{n}\Big)^3 \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2 &= \Big(\frac{b^3}{n^3}\Big)\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \Big(\frac{b^3}{6}\Big)\frac{(n-1)n(2n-1)}{n^3} \\
&= \Big(\frac{b^3}{6}\Big)\Big[\frac{(n-1)(2n-1)}{n^2}\Big] = \Big(\frac{b^3}{6}\Big)\Big(\frac{2n^2-3n+1}{n^2}\Big) \\
&= \Big(\frac{b^3}{6}\Big)\Big(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\Big) = \Big(\frac{b^3}{3}\Big)\Big(1 - \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2}\Big).
\end{aligned} \tag{3.16}$$

O retângulo do tipo c_i (por excesso) tem altura igual a $f(x_i) = (x_i)^2$, pois como a função é crescente, isto é, o maior valor que f atinge no subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ ocorre na extremidade direita do subintervalo.

Assim,

$$c_i = (\Delta x) f(x_i) = (\Delta x)(x_i)^2 = \frac{b}{n}(x_i)^2 = \frac{b}{n}\Big(\frac{ib}{n}\Big)^2. \tag{3.17}$$

Daí, a soma da área de todos os retângulos do tipo c_i, representado por C_n, é dado por:

$$C_n = \sum_{i=1}^{n} c_i = \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{b}{n}\Big)\Big(\frac{ib}{n}\Big)^2 = \Big(\frac{b}{n}\Big)^3 \sum_{i=1}^{n} i^2. \tag{3.18}$$

Como já foi demonstrado em (2.18) sabemos que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)n(2n+1)}{6}$.

Logo:

$$\begin{aligned}
\Big(\frac{b}{n}\Big)^3 \sum_{i=1}^{n} i^2 &= \Big(\frac{b^3}{n^3}\Big)\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \Big(\frac{b^3}{6}\Big)\frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3} \\
&= \Big(\frac{b^3}{6}\Big)\Big(\frac{2n^2+3n+1}{n^2}\Big) = \Big(\frac{b^3}{6}\Big)\Big(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\Big) \\
&= \Big(\frac{b^3}{3}\Big)\Big(1 + \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2}\Big).
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Temos então a seguinte desigualdade:

$$\left(\frac{b^3}{3}\right)\left(1 - \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right) \leq S \leq \left(\frac{b^3}{3}\right)\left(1 + \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right). \tag{3.20}$$

Subtraindo $b^3/3$ em todos os membros da desigualdade, fica:

$$\frac{b^3}{3}\left(-\frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right) \leq S - \frac{b^3}{3} \leq \frac{b^3}{3}\left(\frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right). \tag{3.21}$$

Como o valor de b é arbitrário (porém fixado), quando aumentamos o valor de n, resulta que $\dfrac{b^3}{3}\left(-\frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right)$ e $\dfrac{b^3}{3}\left(\frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right)$ ficam menor do que qualquer valor previamente fixado (bastando para isso escolher um valor suficientemente grande para n). Então a diferença entre o valor da área S e $b^3/3$ fica menor do que qualquer quantidade previamente fixada, por menor que seja. Isto só é verdade se, e somente se, os valores de S e $b^3/3$ forem iguais.

Concluímos então que $S = b^3/3$.

3.4 Área sob o gráfico da parábola cúbica

Nesta seção fizemos o cálculo da área sob o gráfico da parábola cúbica definida da seguinte forma:

Seja f uma função definida no intervalo $[0, b]$ por $f(x) = x^3$.

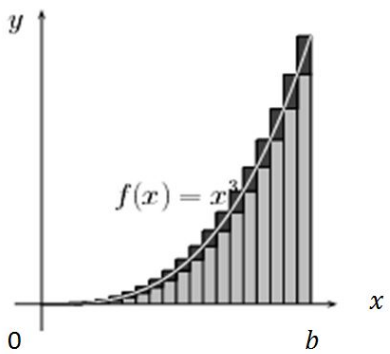


Figura 3.5: Área sob o gráfico da função $f(x) = x^3$ no intervalo de $[0, b]$.

Conforme a Figura 3.5 e de forma análoga ao já apresentado no exemplo anterior e ao que foi mostrado em (3.1) temos que o retângulo do tipo b_i (por falta) tem altura igual a $f(x_{i-1}) = (x_{i-1})^3$, pois como a função é crescente, isto é, o menor valor que f atinge no subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ ocorre na extremidade esquerda do subintervalo.

Assim,

$$b_i = (\Delta x)\, f(x_{i-1}) = (\Delta x)(x_{i-1})^3 = \frac{b}{n}(x_{i-1})^3 = \frac{b}{n}\Big[\frac{(i-1)b}{n}\Big]^3 . \tag{3.22}$$

Daí, a soma da área de todos os retângulos do tipo b_i, representado por B_n, é dado por:

$$B_n = \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{b}{n}\Big)\Big[\frac{(i-1)b}{n}\Big]^3 = \Big(\frac{b}{n}\Big)^4 \sum_{i=1}^{n} (i-1)^3 . \tag{3.23}$$

e como já foi visto em (2.19) temos que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (i-1)^3 = \frac{(n-1)^2(n)^2}{4}$.

Logo:

$$\begin{aligned}\Big(\frac{b}{n}\Big)^4 \sum_{i=1}^{n} (i-1)^3 &= \Big(\frac{b^4}{n^4}\Big)\frac{(n-1)^2n^2}{4} = \Big(\frac{b^4}{4}\Big)\frac{(n-1)n^2}{n^4} = \Big(\frac{b^4}{4}\Big)\Big[\frac{(n-1)^2}{n^2}\Big]\\ &= \Big(\frac{b^4}{4}\Big)\Big(\frac{n^2-2n+1}{n^2}\Big) = \Big(\frac{b^4}{4}\Big)\Big(1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\Big) .\end{aligned} \tag{3.24}$$

Já o retângulo do tipo c_i tem altura igual a $f(x_i) = (x_i)^3$, pois como a função é crescente, isto é, o maior valor que f atinge no subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ ocorre na extremidade direita do subintervalo.

Assim,

$$c_i = (\Delta x)f(x_i) = (\Delta x)(x_i)^3 = \frac{b}{n}(x_i)^3 = \frac{b}{n}\Big(\frac{ib}{n}\Big)^3 . \tag{3.25}$$

Daí, a soma da área de todos os retângulos do tipo c_i, representado por C_n, é dado por:

$$C_n = \sum_{i=1}^{n} c_i = \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{b}{n}\Big)\Big(\frac{ib}{n}\Big)^3 = \Big(\frac{b}{n}\Big)^4 \sum_{i=1}^{n} i^3 . \tag{3.26}$$

Como já foi demonstrado em (2.19) sabemos que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Logo:

$$\begin{aligned}\Big(\frac{b}{n}\Big)^4 \sum_{i=1}^{n} i^3 &= \Big(\frac{b^4}{n^4}\Big)\frac{n^2(n+1)^2}{4} = \Big(\frac{b^4}{4}\Big)\frac{n^2(n+1)^2}{n^4} = \Big(\frac{b^4}{4}\Big)\Big(\frac{n^2+2n+1}{n^2}\Big)\\ &= \Big(\frac{b^4}{4}\Big)\Big(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\Big) .\end{aligned} \tag{3.27}$$

Temos então a seguinte desigualdade:

$$\Big(\frac{b^4}{4}\Big)\Big(1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\Big) \leq S \leq \Big(\frac{b^4}{4}\Big)\Big(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\Big) . \tag{3.28}$$

Subtraindo $b^4/4$ em todos os membros da desigualdade, fica:

$$\frac{b^4}{4}\Big(-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\Big) \leq S - \frac{b^4}{4} \leq \frac{b^4}{4}\Big(\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\Big) . \tag{3.29}$$

Como o valor de b é arbitrário (porém fixado), quando aumentamos o valor de n, resulta que $\frac{b^4}{4}\Big(-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\Big)$ e $\frac{b^4}{4}\Big(\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\Big)$ ficam menor do que qualquer valor previamente fixado (bastando para isso escolher um valor suficientemente grande para n). Então a diferença entre o valor da área S e $b^4/4$ fica menor do que qualquer quantidade previamente fixada, por menor que seja. Isto só é verdade se, e somente se, os valores de S e $b^4/4$ forem iguais.

Concluímos então que $S = b^4/4$.

3.5 Propriedades gerais

Para melhor representar as áreas determinadas anteriormente, introduzimos a notação $I_a^b(f(x))$ para representar a área sob o gráfico da função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida no intervalo fechado $[a,b]$. Assim, com base nos cálculos já apresentados temos as seguintes propriedades:

1. $I_a^b(1) = b - a\,.$
2. $I_a^b(x) = \dfrac{b^2}{2} - \dfrac{a^2}{2}\,.$
3. $I_a^b(x^2) = \dfrac{b^3}{3} - \dfrac{a^3}{3}\,.$
4. $I_a^b(x^3) = \dfrac{b^4}{4} - \dfrac{a^4}{4}\,.$
5. $I_a^b(c\,f(x)) = c\,I_a^b(f(x))\,.$
6. $I_a^b(f(x)+g(x)) = I_a^b(f(x)) + I_a^b(g(x))\,.$
7. $I_a^b(c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3) = c_0(b-a) + \dfrac{c_1}{2}(b^2-a^2) + \dfrac{c_2}{3}(b^3-a^3) + \dfrac{c_3}{4}(b^4-a^4)\,.$

Faremos as demonstrações das propriedades 5, 6 e 7 no apêndice D uma vez que 1 é trivial e 2, 3 e 4 já foram feitas para o caso $a = 0$. Para o caso geral, basta tomar $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ e o resultado segue analogamente.

Capítulo 4

Cálculo de Volume pelo método de exaustão

Neste capítulo, descrevemos o método de exaustão para determinação de volumes e resolvemos, como exemplo, o volume de uma pirâmide de base qualquer.

4.1 Descrição do método de exaustão para determinação de volume

Se um plano intercepta um sólido K, então a região comum ao plano e ao sólido é chamada uma secção transversal do sólido. Vejamos que para cada x de um intervalo fechado $[a, b]$ o plano P_x perpendicular ao eixo x no ponto de coordenada x intercepta o sólido segundo uma secção transversal cuja a área é dada por $S(x)$, em que S é uma função em $[a, b]$. Veja Figura 4.1.

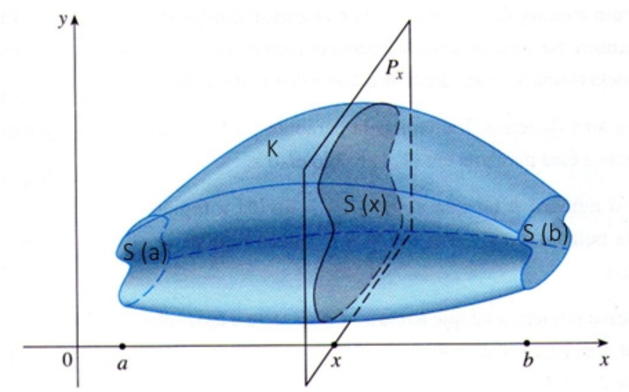


Figura 4.1: Sólido K e a área da secção transversal.

O sólido será um cilindro se todas as secções transversas forem iguais. Se estivermos interessados apenas na parte do sólido limitado entre os planos pelos pontos de coordenadas a e b, então as secções transversais determinadas por esses planos são chamadas de bases do cilindro e a distância entre as bases é a altura. Por definição, o volume de tal cilindro é igual ao produto da área da base pela altura. O sólido K ilustrado na Figura 4.1 não é um cilindro, pois as secções transversas por planos perpendiculares ao eixo x não são iguais.

Para calcular o volume, começamos dividindo o sólido em n fatias de larguras iguais a Δx, veja Figura 4.2. Podemos dividir o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de comprimentos iguais a $(b-a)/n$, que será a altura de cada um dos n cilindros ao qual o sólido foi dividido. Ver exemplo na Figura 4.3. Escolhendo números $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ em que $a_0 = x$, $b = x_n$, $x_i - x_{i-1} = (b - a)/n$ para $i = 1, 2, ..., n$ e denotando Δx como a altura $(b - a)/n$ de cada cilindro e tendo para cada i que $\Delta x = x_i - x_{i-1}$, o volume do sólido pode ser aproximado (por falta ou por excesso) por cilindros cujas alturas valem Δx e as áreas de suas bases são $S(x_i^*)$, para algum x_i^* em $[x_{i-1}, x_i]$. Por uma questão de conveniência de linguagem, denotemos por b_i o volume do sólido (por falta) e por c_i o volume do sólido (por excesso). Isto é, $b_i = f(u_i)\,\Delta x$ e $c_i = f(v_i)\,\Delta x$, em que $f(u_i) = min\{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ e $f(v_i) = max\{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\}$.

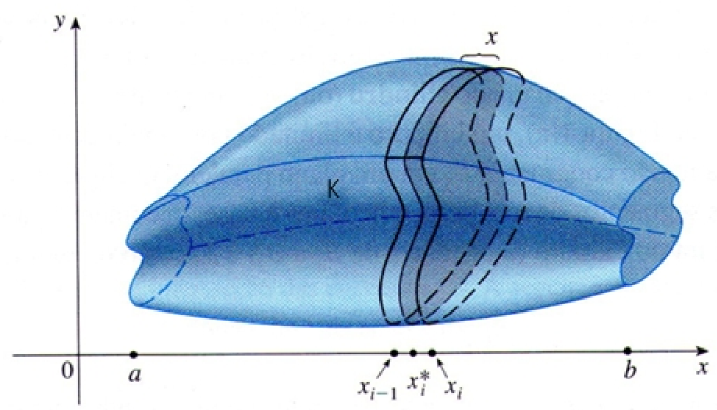


Figura 4.2: Divisão do sólido K em fatias.

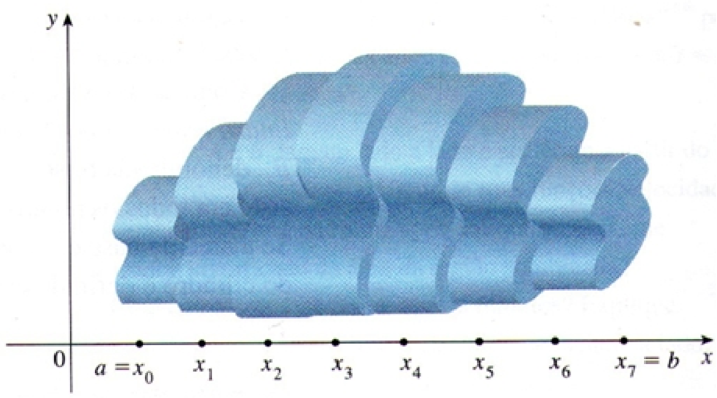


Figura 4.3: Divisão do sólido K em cilindros.

Assim,

$$x_0 = a\,,\;\; x_1 = a + \Delta x\,,\;\; x_2 = a + 2\Delta x\,, ...,\;\; x_i = a + i\Delta x, ..., x_n = a + n\Delta x = b\,. \quad (4.1)$$

Temos que se n é muito grande, ou, equivalentemente, se Δx é muito pequeno, o volume do sólido dado por $\sum_{i=1}^{n} b_i$ fica tão próximo do volume do sólido dado por $\sum_{i=1}^{n} c_i$ quanto quisermos. O valor do volume V do sólido K é estimado por $\sum_{i=1}^{n} b_i \leq V_K \leq \sum_{i=1}^{n} c_i$. Esse é o princípio do método de exaustão para determinação de volume.

Para exemplificar, determinamos o volume de uma pirâmide de base qualquer.

4.2 Cálculo do volume de uma pirâmide

Considere uma pirâmide de área da base igual a A e altura h.

Colocamos a origem O no vértice da pirâmide e o eixo x ao longo do seu eixo central como na Figura 4.4A. Qualquer secção transversal $S(x_i)$, que passa por um certo $x_i \in [0, h]$ e é perpendicular ao eixo x, é semelhante à base A como visto na Figura 4.4B.

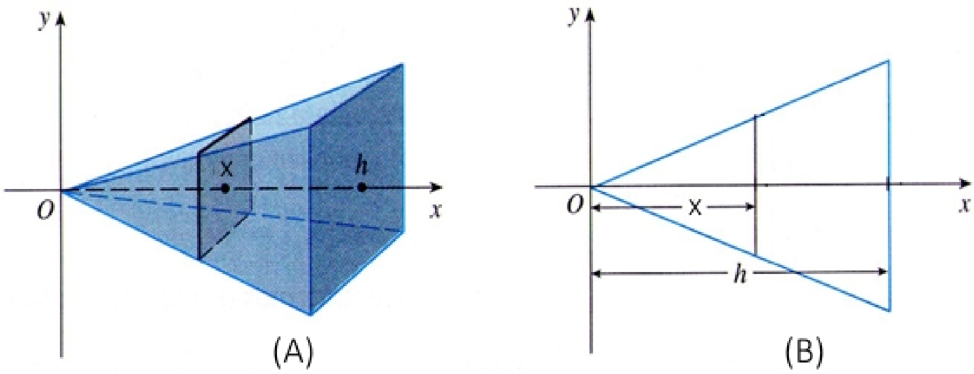


Figura 4.4: Pirâmide de base qualquer igual a A.

Através da semelhança de pirâmides, podemos expressar $S(x)$ como:

$$\left(\frac{h}{x}\right)^2 = \frac{A}{S(x)} \Rightarrow S(x) = \frac{A(x)^2}{h^2}\,.$$

De (4.1), vem: $x_{i-1} = \frac{(i-1)h}{n}$.

Assim, temos:

$$S(x) = \frac{\frac{A(i-1)^2h^2}{n^2}}{h^2} = A\frac{(i-1)^2h^2}{n^2}\frac{1}{h^2} = A\frac{(i-1)^2}{n^2}\,.$$

Daí,

$$b_i = A\frac{(i-1)^2}{n^2}\frac{h}{n} = \frac{A\,h(i-1)^2}{n^3}\,. \tag{4.2}$$

Então,

$$B_n = \sum_{i=1}^{n} b_i = \frac{A\,h}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2\,. \tag{4.3}$$

Sabemos de (2.18) que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$, então:

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{Ah}{n^3}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{Ah}{6}\frac{(n-1)(2n-1)}{n^2} = \frac{Ah}{6}\left(\frac{2n^2-3n+1}{n^2}\right), \\ &= \frac{Ah}{3}\left(1-\frac{3}{2n}+\frac{1}{2n^2}\right). \end{aligned} \tag{4.4}$$

De forma análoga, determinamos C_n.

De (4.1) vem: $c_i = \dfrac{A(i)^2}{n^2}\dfrac{h}{n} = \dfrac{Ah(i^2)}{n^3}$.

Assim,

$$C_n = \sum_{i=1}^{n} c_i = \frac{Ah}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i)^2\,. \tag{4.5}$$

Sabemos de (2.18) que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(i)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, então:

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{Ah}{n^3}\frac{(n+1)n(2n+1)}{6} = \frac{Ah}{6}\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} = \frac{Ah}{6}\Big(\frac{2n^2+3n+1}{n^2}\Big), \\ &= \frac{Ah}{3}\Big(1+\frac{3}{2n}+\frac{1}{2n^2}\Big). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Dessa forma, temos a seguinte desigualdade: $B_n \leq V \leq C_n$, que implica em:

$$\frac{Ah}{3}\Big(1-\frac{3}{2n}+\frac{1}{2n^2}\Big) \leq V \leq \frac{Ah}{3}\Big(1+\frac{3}{2n}+\frac{1}{2n^2}\Big). \tag{4.7}$$

Subtraindo $Ah/3$ em todos os membros da desigualdade, fica:

$$\frac{Ah}{3}\Big(1-\frac{3}{2n}+\frac{1}{2n^2}\Big)-\frac{Ah}{3} \leq V-\frac{Ah}{3} \leq \frac{Ah}{3}\Big(1+\frac{3}{2n}+\frac{1}{2n^2}\Big)-\frac{Ah}{3}, \tag{4.8}$$

ou seja,

$$\frac{Ah}{3}\Big(-\frac{3}{2n}+\frac{1}{2n^2}\Big) \leq V-\frac{Ah}{3} \leq \frac{Ah}{3}\Big(\frac{3}{2n}+\frac{1}{2n^2}\Big). \tag{4.9}$$

Como o valor de h é arbitrário (porém fixado) e o valor de A é positivo, quando aumentamos o valor de n, resulta que $\frac{Ah}{3}\big(-\frac{3}{2n}+\frac{1}{2n^2}\big)$ e $\frac{Ah}{3}\big(\frac{3}{2n}+\frac{1}{2n^2}\big)$ ficam menor do que qualquer valor previamente fixado (bastando para isso escolher um valor suficientemente grande para n). Então a diferença entre o valor do volume V e $Ah/3$ fica menor do que qualquer quantidade previamente fixada, por menor que seja. Isto só é verdade se os valores de V e $Ah/3$ forem iguais.

Concluímos então que $V = \dfrac{A\,h}{3}$.

Capítulo 5

A fórmula dos três níveis

Neste capítulo enunciamos a fórmula dos três níveis, exibimos alguns exemplos e fazemos sua demonstração.

A chamada fórmula dos três níveis possibilita a determinação do cálculo do volume de qualquer sólido clássico estudado no ensino médio e outros mais. Esta fórmula é dada por:

$$V_K = \frac{b-a}{6}\left[S(a) + 4S\left(\frac{a+b}{2}\right) + S(b)\right] \tag{5.1}$$

em que K é um sólido no espaço tridimensional compreendido entre os planos $x = a$ e $x = b$ em que $S(x)$ representa a área da secção transversal obtida interceptando o sólido K por um plano perpendicular ao eixo x na posição x. A fórmula dos três níveis permite calcular o volume do sólido K usando as áreas de três secções adequadamente escolhidas. É importante ressaltar que $S(x)$ deve ser um polinômio de grau no máximo 3 na variável x.

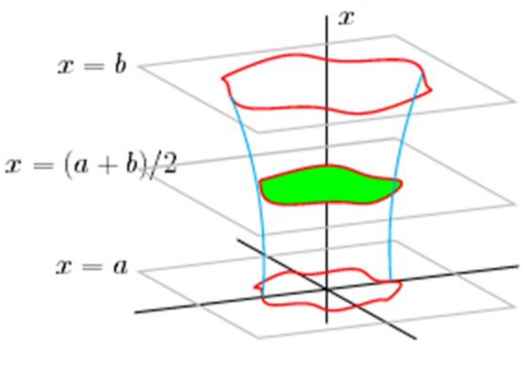


Figura 5.1: Fórmula dos três níveis.

Para ilustrar a aplicação dessa fórmula, usamos o exemplo já exposto da pirâmide de base qualquer e acrescentamos o cone de revolução, a esfera e a cunha esférica.

5.1 Pirâmide de base qualquer

Seja P uma pirâmide de área da base igual a A e altura h.

Colocamos a origem O no vértice da pirâmide e o eixo x ao longo do seu eixo central, conforme Figura 5.2A. Qualquer plano $S(x)$, que passa por um certo $x_i \in [0, h]$ e é perpendicular ao eixo x, é semelhante à área da base A. Ver Figura 5.2B.

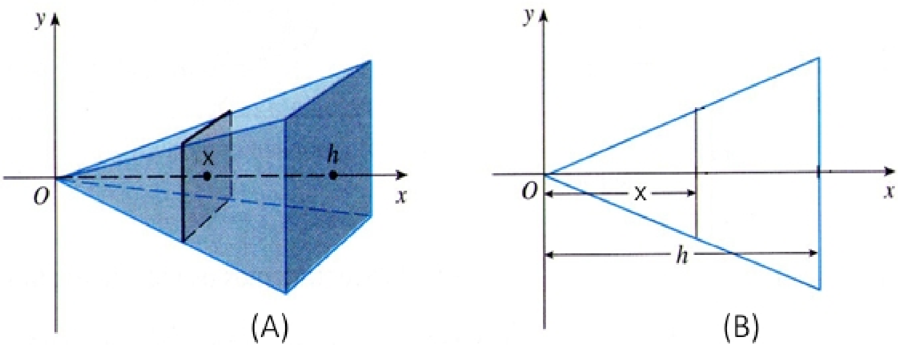


Figura 5.2: Pirâmide de base qualquer.

Podemos expressar a área S em termos de x observando a semelhança de pirâmides obtida na Figura 5.2 B, como:

$$\frac{S(x)}{S(h)} = \left(\frac{x}{h}\right)^2 \Rightarrow S(x) = \frac{x^2}{h^2}\, S(h)\,, \tag{5.2}$$

em que $S(h)$ é a área da base da pirâmide, logo, $S(h) = A$.

Assim, a secção $S(x)$ perpendicular ao eixo x que passa em $x \in [0, h]$ é dado por:

$$S(x) = \frac{A\,x^2}{h^2} = \frac{A}{h^2}\,x^2\,. \tag{5.3}$$

Note que $S(x)$ é um polinômio de grau 2 em x.

Daí,

$$\begin{aligned} S(a) &= S(0) = 0\,, \\ S(b) &= S(h) = A\,, \\ S\Big(\frac{a+b}{2}\Big) &= S\Big(\frac{h}{2}\Big) = \frac{A}{h^2}\frac{h^2}{4} = \frac{A}{4}\,. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Substituindo na fórmula dos três níveis, temos:

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{(b-a)}{6}\left[S(a) + 4S\left(\frac{a+b}{2}\right) + S(b)\right], \\
&= \frac{h}{6}\left(0 + 4\,\frac{A}{4} + A\right), \\
&= \frac{h}{6}\,2A\,, \\
&= \frac{Ah}{3}\,.
\end{aligned} \tag{5.5}
$$

5.2 Cone de revolução

Seja $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = x$. Ao rotacionarmos a região sob o gráfico em torno do eixo x obtemos um cone de revolução de altura b como o apresentado na Figura 5.3A.

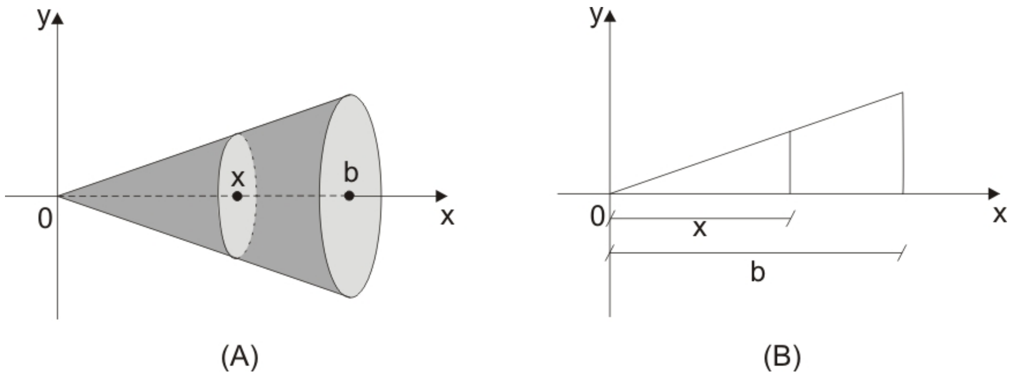


Figura 5.3: Cone de revolução.

Podemos expressar a área S em termos de x observando a semelhança entre os cones obtida na Figura 5.3 B, como:

$$\frac{S(x)}{S(b)} = \left(\frac{x}{b}\right)^2 \Rightarrow S(x) = \frac{x^2}{b^2}\,S(b)\,, \tag{5.6}$$

em que $S(b)$ é a área da base do cone, dada pelo círculo de raio $f(b) = b$, logo, $S(b) = \pi\, b^2$.

Assim, a secção $S(x)$, perpendicular ao eixo x que passa em $x \in [0, b]$ é dado por:

$$S(x) = \frac{x^2}{b^2}\,\pi\, b^2 = \pi\, x^2\,. \tag{5.7}$$

Note que $S(x)$ é um polinômio de grau 2.

Daí,

$$\begin{aligned} S(a) &= S(0) = 0\,, \\ S(b) &= \pi\, b^2\,, \\ S\Big(\frac{a+b}{2}\Big) &= S\Big(\frac{b}{2}\Big) = \pi\,\frac{b^2}{4}\,. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Substituindo na fórmula dos três níveis, temos:

$$\begin{aligned} V &= \frac{(b-a)}{6}\Big[S(a) + 4S\Big(\frac{a+b}{2}\Big) + S(b)\Big]\,, \\ &= \frac{b}{6}\Big(0 + 4\,\pi\,\frac{b^2}{4} + \pi\, b^2\Big)\,, \\ &= \frac{b}{6}\,2\,\pi\, b^2, \\ &= \frac{1}{3}\,\pi\, b^2\, b\,. \end{aligned} \tag{5.9}$$

5.3 Esfera

Consideremos uma esfera de raio $r > 0$.

Colocamos a origem O no centro da esfera. Figura 5.4.

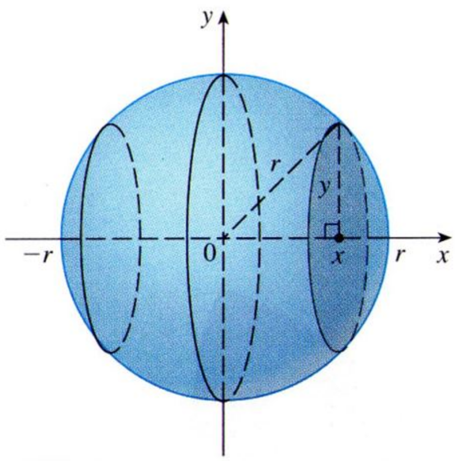


Figura 5.4: Esfera

Como $y^2 = r^2 - x^2$, a secção $S(x)$ perpendicular ao eixo x que passa em $x \in [-r, r]$ é dado por:

$$S(x) = \pi(r^2 - x^2)\,. \tag{5.10}$$

Note que $S(x)$ é um polinômio de grau 2.

Daí:

$$\begin{aligned} S(a) &= S(-r) = 0\,, \\ S(b) &= S(r) = 0\,, \\ S\Big(\frac{a+b}{2}\Big) &= S(0) = \pi\, r^2\,. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Substituindo na fórmula dos três níveis, temos:

$$\begin{aligned} V &= \frac{(b-a)}{6}\Big[S(a) + 4S\Big(\frac{a+b}{2}\Big) + S(b)\Big]\,, \\ &= \frac{2r}{6}\,(0 + 4\pi r^2 + 0)\,, \\ &= \frac{r}{3}\,4\,\pi\, r^2\,, \\ &= \frac{1}{3}\,4\,\pi\, r^3\,. \end{aligned} \tag{5.12}$$

5.4 Cunha esférica

Seja C a cunha esférica obtida pela intersecção de um cilindro circular reto com dois planos (um deles paralelo a base e o outro formando um ângulo α com o primeiro). Veja Figura 5.5A.

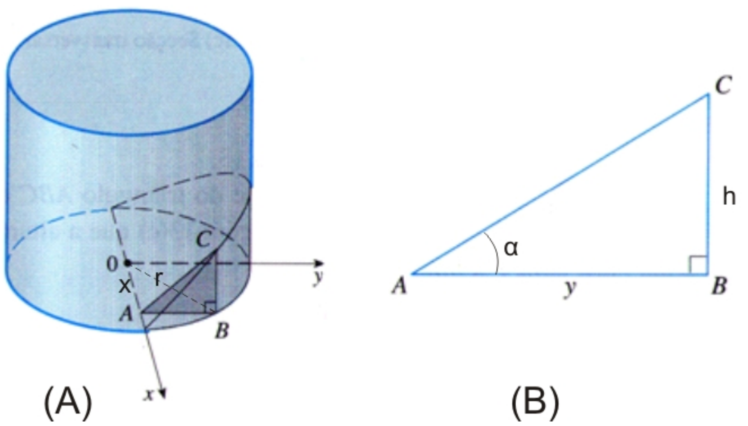


Figura 5.5: Cunha esférica

Observe que as secções verticais (perpendiculares ao eixo x) são triângulos, Figura 5.5B e que $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ e $h = \tan\alpha\sqrt{r^2 - x^2}$. Assim, $S(x)$ em $x \in [-r, r]$, em que r é o raio da base é dado por:

$$S(x) = \frac{\tan\alpha}{2}(r^2 - x^2). \tag{5.13}$$

Note que $S(x)$ é um polinômio de grau 2.

Daí:

$$\begin{aligned} S(a) &= S(-r) = 0\,, \\ S(b) &= S(r) = 0\,, \\ S\Big(\frac{a+b}{2}\Big) &= S(0) = \frac{\tan\alpha}{2}\, r^2\,. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Substituindo na fórmula dos três níveis, temos:

$$\begin{aligned} V &= \frac{(b-a)}{6}\Big[S(a) + 4S\Big(\frac{a+b}{2}\Big) + S(b)\Big]\,, \\ &= \frac{2r}{6}\left(0 + 4\,\frac{\tan\alpha}{2}\, r^2 + 0\right), \\ &= \frac{r}{3}\, 2\, \tan\alpha\, r^2\,, \\ &= \frac{2\tan\alpha}{3}\, r^3\,. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Vistos estes exemplos, passamos ao teorema:

Teorema 5.4.1 (Fórmula dos três níveis) *Seja K um sólido no espaço tridimensional. Se a área $S(x)$ de qualquer secção transversal do sólido é um polinômio de grau no máximo 3, então o volume do sólido K entre os planos nas posições $x = a$ e $x = b$ é dado pela fórmula*

$$V_K = \frac{(b-a)}{6}\Big[S(a) + 4S\Big(\frac{a+b}{2}\Big) + S(b)\Big]\,. \tag{5.16}$$

5.5 Demonstração da fórmula dos três níveis

Seja K um sólido, compreendido entre os planos $x = a$ e $x = b$, cuja área da secção transversal $S(x)$ é um polinômio de grau menor do que ou igual a 3, isto é,

$$S(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 \;\text{ e }\; x \in [a, b].$$

Pelo método de exaustão, temos:

$$\sum_{i=1}^{n} S(\underline{x_i})\,\Delta x \leq V_K \leq \sum_{i=1}^{n} S(\overline{x_i})\,\Delta x\,, \qquad i = 1, 2, ..., n\,, \tag{5.17}$$

em que $S(\underline{x_i})\,\Delta x$ é o volume, por falta, de cada cilindro de altura Δx, respeitando a partição em que o sólido K foi dividido e $S(\overline{x_i})\,\Delta x$ é o volume, por excesso, construído de forma semelhante.

Considere uma função f no intervalo $x \in [a, b]$ dada por $f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$. Como $S(x) = f(x)$, podemos reescrever o volume do sólido K da seguinte forma:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\underline{x_i})\, \Delta x \leq V_K \leq \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})\, \Delta x\,, \qquad i = 1, 2, ..., n\,, \tag{5.18}$$

em que $f(\underline{x_i})\, \Delta x$ é o valor da área, por falta, de cada retângulo em qual a área sob o gráfico da função $f(x)$ foi dividida e $f(\overline{x_i})\, \Delta x$ é o valor da área de cada retângulo por excesso.

Como a desigualdade (5.18) é válida para todo n, temos que V_K é numericamente igual à área sob o gráfico da função $f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$.

Como já visto na Seção 3.5, e demonstrado no apêndice D, temos que a área sob o gráfico da função $f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$ no intervalo fechado $[a, b]$ é dada por:

$$I_a^b(c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3) = c_0(b - a) + \frac{c_1}{2}(b^2 - a^2) + \frac{c_2}{3}(b^3 - a^3) + \frac{c_3}{4}(b^4 - a^4)\,.$$

Daí,

$$V_K = c_0(b - a) + \frac{c_1}{2}(b^2 - a^2) + \frac{c_2}{3}(b^3 - a^3) + \frac{c_3}{4}(b^4 - a^4)\,. \tag{5.19}$$

Assim, utilizando de manipulações algébricas, bem como de alguns produtos notáveis como os listados abaixo, podemos reescrever V_K e definir a fórmula dos três níveis.

$$\begin{aligned}
(b^2 - a^2) &= (b - a)(b + a)\,, \\
(b^3 - a^3) &= (b - a)(b^2 + 2ab + a^2)\,, \\
(b^4 - a^4) &= (b - a)(b^3 + a^2b + ab^2 + a^3)\,, \\
(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2\,, \\
(a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\,.
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Vejamos:

$$
\begin{aligned}
V_K &= c_0(b-a)+\frac{c_1}{2}(b^2-a^2)+\frac{c_2}{3}(b^3-a^3)+\frac{c_3}{4}(b^4-a^4)\,,\\
&= c_0(b-a)+\frac{c_1}{2}(b-a)(b+a)+\frac{c_2}{3}(b-a)(b^2+ab+a^2)\\
&+ \frac{c_3}{4}(b-a)(b^3+a^2b+ab^2+a^3)\,,\\
&= (b-a)\Big[c_0+\frac{c_1}{2}(b+a)+\frac{c_2}{3}(b^2+ab+a^2)+\frac{c_3}{4}(b^3+a^2b+ab^2+a^3)\Big]\,,\\
&= (b-a)\Big[6\,\frac{c_0}{6}+\frac{c_1}{6}\,3(b+a)+\frac{c_2}{6}\,2(b^2+ab+a^2)+\frac{c_3}{12}\,3(b^3+a^2b+ab^2+a^3)\Big]\,,\\
&= (b-a)\Big[6\,\frac{c_0}{6}+\frac{c_1}{6}\big[b+2(b+a)+a\big]+\frac{c_2}{6}(b^2+b^2+2ab+a^2+a^2)\\
&+ \frac{c_3}{12}(2b^3+b^3+3a^2b+3ab^2+a^3+2a^3)\Big]\,,\\
&= (b-a)\Big\{6\,\frac{c_0}{6}+\frac{c_1}{6}\big[b+2(b+a)+a\big]+\frac{c_2}{6}\big[b^2+(a+b)^2+a^2\big]\\
&+ \frac{c_3}{12}\big[2b^3+(a+b)^3+2a^3\big]\Big\}\,,\\
&= (b-a)\Big\{6\,\frac{c_0}{6}+\frac{c_1}{6}\Big[b+4\Big(\frac{a+b}{2}\Big)+a\Big]+\frac{c_2}{6}\Big[b^2+4\Big(\frac{a+b}{2}\Big)^2+a^2\Big]\\
&+ \frac{c_3}{12}\Big[2b^3+8\Big(\frac{a+b}{2}\Big)^3+2a^3\Big]\Big\}\,,\\
&= \frac{(b-a)}{6}\Big\{6\,c_0+c_1\Big[b+4\Big(\frac{a+b}{2}\Big)+a\Big]+c_2\Big[b^2+4\Big(\frac{a+b}{2}\Big)^2+a^2\Big]\\
&+ c_3\Big[b^3+4\Big(\frac{a+b}{2}\Big)^3+a^3\Big]\Big\}\,,\\
&= \frac{(b-a)}{6}\Big[4c_0+c_0+c_0+c_1b+4c_1\Big(\frac{a+b}{2}\Big)+c_1a+c_2b^2+4c_2\Big(\frac{a+b}{2}\Big)^2\\
&+ c_2a^2+c_3b^3+4c_3\Big(\frac{a+b}{2}\Big)^3+c_3a^3\Big]\,,\\
&= \frac{(b-a)}{6}\Big\{(c_0+c_1a+c_2a^2+c_3a^3)\\
&+ 4\Big[c_0+c_1\Big(\frac{a+b}{2}\Big)+c_2\Big(\frac{a+b}{2}\Big)^2+c_3\Big(\frac{a+b}{2}\Big)^3\Big]+(c_0+c_1b+c_2b^2+c_3b^3)\,,\\
&= \frac{(b-a)}{6}\Big[S(a)+4S\Big(\frac{a+b}{2}\Big)+S(b)\Big]\,. \qquad (5.21)
\end{aligned}
$$

De fato, a fórmula dos três níveis pode ser obtida por manipulação algébrica do volume dos sólido K obtido pelo método de exaustão.

5.6 Aplicabilidade da fórmula dos três níveis

Segundo o teorema 5.4.1 apresentado na Seção 5.4, o volume do sólido é determinado pela fórmula dos três níveis somente se a área da secção transversal do sólido for um polinômio de no máximo grau 3.

Dessa forma, ao menos dois questionamentos podem surgir:

Como a Fórmula dos Três Níveis se comporta quando a área da secção transversal do sólido for um polinômio de grau maior do que 3?

E se a área da secção transversal for dada por uma função de potência fracionária em x entre 0 e 3?

Mostraremos agora, o motivo algébrico pelo qual a fórmula dos três níveis não se adequa à área $S(x)$ de qualquer secção transversal do sólido, se $S(x)$ for um polinômio de grau 4. Faremos isso para $S(x) = x^4$.

Através dos mesmos processos apresentados no decorrer deste trabalho, temos que $I_a^b(x^4) = \frac{b^5}{5} - \frac{a^5}{5}$.

Daí, conforme já explicado anteriormente, segue:

$$
\begin{aligned}
V_K &= I_a^b(x^4) = \frac{b^5}{5} - \frac{a^5}{5} = \frac{b^5 - a^5}{5} = \frac{(b-a)}{5}(b^4 + ab^3 + a^2b^2 + a^3b + a^4)\,, \\
&= \frac{(b-a)}{30}\, 6(b^4 + ab^3 + a^2b^2 + a^3b + a^4)\,, \\
&= \frac{(b-a)}{30}\, (6b^4 + 6ab^3 + 6a^2b^2 + 6a^3b + 6a^4)\,, \\
&= \frac{(b-a)}{30}\, (5b^4 + b^4 + 4ab^3 + 2ab^3 + 6a^2b^2 + 4a^3b + 2a^3b + 5a^4 + a^4)\,, \\
&= \frac{(b-a)}{30}\, (5b^4 + b^4 + 4ab^3 + 6a^2b^2 + 4a^3b + a^4 + 2a^3b + 2ab^3 + 5a^4)\,, \\
&= \frac{(b-a)}{30}\, [5b^4 + (a+b)^4 + 2a^3b + 2ab^3 + 5a^4]\,, \\
&= \frac{(b-a)}{6}\, \frac{1}{5}\, [5b^4 + (a+b)^4 + 2a^3b + 2ab^3 + 5a^4]\,, \\
&= \frac{(b-a)}{6} \left[b^4 + \frac{(a+b)^4}{5} + \frac{2}{5}\, a^3b + \frac{2}{5}\, ab^3 + a^4 \right], \\
&= \frac{(b-a)}{6} \left[b^4 + \frac{16}{5}\left(\frac{a+b}{5}\right)^4 + \frac{2}{5}\, ab(a^2 + b^2) + a^4 \right].
\end{aligned}
\tag{5.22}
$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
V_K &= \frac{(b-a)}{6} \left[S(b) + \frac{16}{5}\, S\Big(\frac{a+b}{2}\Big) + \frac{2}{5}\, ab(a^2 + b^2) + S(a) \right], \\
&= \frac{(b-a)}{6} \left[S(b) + \frac{20}{5}\, S\Big(\frac{a+b}{2}\Big) - \frac{4}{5}\, S\Big(\frac{a+b}{2}\Big) + \frac{2}{5}\, ab(a^2 + b^2) + S(a) \right], \\
&= \frac{(b-a)}{6} \left[S(a) + 4\, S\Big(\frac{a+b}{2}\Big) + S(b) - \frac{4}{5}\, S\Big(\frac{a+b}{2}\Big) + \frac{2}{5}\, ab(a^2 + b^2) \right], \\
&= \frac{(b-a)}{6} \left[S(a) + 4S\left(\frac{a+b}{2}\right) + S(b) \right] \\
&+ \frac{(b-a)}{6} \left[\frac{2}{5}\, ab(a^2 + b^2) - \frac{4}{5}\, S\Big(\frac{a+b}{2}\Big) \right].
\end{aligned}
\tag{5.23}
$$

Note que a equação acima é a fórmula dos três níveis mais um termo. Mostraremos, em um exemplo, que este termo não é nulo. Assim, verificamos que se a área $S(x)$ de qualquer secção transversal do sólido for dada por um polinômio de grau 4, o volume não é mais dado pela fórmula dos três níveis e sim por outra, como queríamos mostrar.

Por simplicidade, faremos esta prova utilizando integrais e comparamos o resultado obtido pela fórmula dos três níveis e pela fórmula determinada em (5.23). Para maiores detalhes, veja apêndice B.

Exemplo: Encontre o volume do sólido obtido pela rotação do gráfico da função $f(x)$ em torno do eixo x no intervalo de 0 a 2, sabendo que a área da secção transversal perpendicular ao eixo x em $x \in [0, 2]$ é dada por $S(x) = x^4$.

Resolução por integral:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 S(x)\,dx = \int_0^2 x^4(x)\,dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2, \\ V &= \frac{2^5}{5} - \frac{0^5}{5}, \\ V &= \frac{32}{5}. \end{aligned} \tag{5.24}$$

Resolução pela fórmula dos três níveis:

$$V = \frac{(b-a)}{6}\left[S(a) + 4S\left(\frac{a+b}{2}\right) + S(b)\right]. \tag{5.25}$$

Sabemos, $S(x) = x^4$. Daí,

$$\begin{aligned} S(a) &= S(0) = 0\,, \\ S\left(\frac{a+b}{2}\right) &= S(1) = 1^4 = 1\,, \\ S(b) &= S(2) = 2^4 = 16\,. \end{aligned} \tag{5.26}$$

Assim,

$$\begin{aligned} V &= \frac{2}{6}[0 + 4(1) + 16]\,, \\ V &= \frac{20}{3}. \end{aligned} \tag{5.27}$$

Resolução pela fórmula apresentada em (5.23).

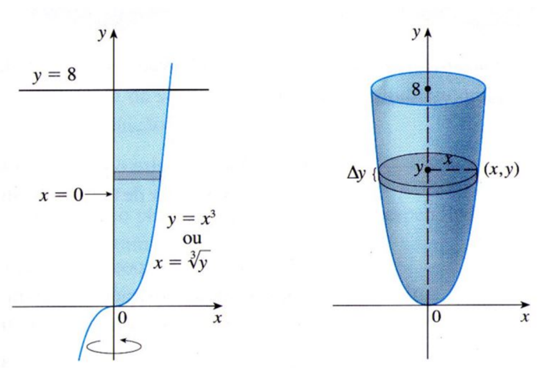
$$\begin{aligned} V &= \frac{(b-a)}{6}\left[S(a) + 4S\left(\frac{a+b}{2}\right) + S(b)\right] + \frac{(b-a)}{6}\left[\frac{2}{5}\,ab(a^2+b^2) - \frac{4}{5}\,S\left(\frac{a+b}{2}\right)\right], \\ V &= \frac{2}{6}\left[0 + 4(1) + 16\right] + \frac{2}{6}\left[\frac{2}{5} \times 0 \times 2(0^2 + 2^2) - \frac{4}{5}(1)\right], \\ V &= \frac{20}{3} - \frac{4}{15}, \\ V &= \frac{96}{15} = \frac{32}{5}. \end{aligned} \tag{5.28}$$

Como podemos perceber neste exemplo, a fórmula dos três níveis não funciona, ao passo que a fórmula apresentada em (5.23) está correta.

Apresentamos agora um exemplo quando a área da secção transversal é dada por uma função de potência fracionária em x entre 0 e 3:

Exemplo: Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada por $y = x^3$, $y = 8$ e $x = 0$ em torno do eixo y.

Resolução:



Temos que $S(x)$ é a área de um círculo de raio igual a $\sqrt[3]{y}$, então, $S(y) = \pi\,(\sqrt[3]{y})^2 = \pi\, y^{2/3}$.

Daí:

$$\begin{aligned} S(a) &= S(0) = 0\,, \\ S\Big(\frac{a+b}{2}\Big) &= S(4) = \sqrt[3]{16}\,\pi\,, \\ S(b) &= S(8) = 4\,\pi\,. \end{aligned} \tag{5.29}$$

Aplicando a fórmula dos três níveis:

$$\begin{aligned} V &= \frac{8}{6}\big(0 + 4\,\sqrt[3]{16} + 4\,\pi\big)\,, \\ &= \frac{4}{3}\,4\pi(\sqrt[3]{16} + 1)\,, \\ &= \frac{16\,\pi}{3}(\sqrt[3]{16} + 1)\,. \end{aligned} \tag{5.30}$$

Utilizando, por simplicidade, técnicas de integral, obtemos:

Temos que a área da secção transversal em y é dada por:

$$S(y) = \pi\,(\sqrt[3]{y})^2 = \pi\,\sqrt[3]{y^2} = \pi\,y^{2/3}\,. \tag{5.31}$$

Já o volume de cada cilindro é calculado por: $S(y)\Delta y = \pi\,y^{2/3}$.

Como o sólido está entre $y = 0$ e $y = 8$, seu volume é

$$\begin{aligned} V &= \int_0^8 S(y)\,dy = \int_0^8 \pi\, y^{2/3} dy = \pi \left[\frac{3}{5} y^{5/3}\right]_0^8, \\ V &= 0 + \pi\,\frac{3}{5}\,8^{5/3} = \frac{96\,\pi}{5}\,. \end{aligned} \tag{5.32}$$

Portanto, não podemos utilizar a fórmula dos três níveis para determinação do volume quando a potência em x é fracionária entre 0 e 3.

Para finalizar, gostaríamos de tornar viável a Fórmula dos Três Níveis para os alunos do ensino médio, tecemos aqui alguns comentários bem interessantes a respeito de sua aplicação na resolução de exercícios:

Para sólidos de revolução, com rotação em torno do eixo x, cuja geratriz é uma função do tipo $f(x) = x^n$, tal que $n = \left\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right\}$, temos como área da secção transversal um círculo de área $S(x) = \pi\,(x^n)^2 = \pi\,x^{2n}$ e, portanto, $S(x)$ só pode ser um polinômio de grau 0, 1, 2 ou 3, sendo assim possível a aplicação da fórmula dos três níveis.

Já para o volume de uma pirâmide de base qualquer temos através da semelhança de triângulos, ver Figura 5.2, que:

$$\frac{A}{S(x)} = \left(\frac{h}{x}\right)^2, \tag{5.33}$$

em que A é a área da base, $S(x)$ é a área da secção transversal em x e h é a altura da pirâmide.

Daí, $S(x) = \frac{Ax^2}{h^2}$ é um polinômio de grau 2 e, portanto, sempre podemos utilizar a fórmula dos três níveis.

Capítulo 6

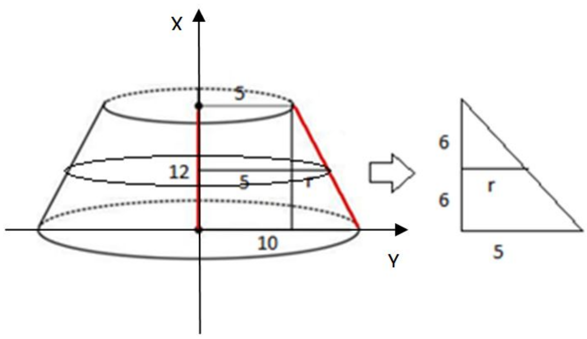
Exercícios de aplicação e considerações finais

Para verificar a aplicabilidade da fórmula dos três níveis, fizemos alguns exercícios numéricos da determinação do volume de alguns sólidos e em seguida apresentamos as considerações finais.

6.1 Exercícios

a) Determine o volume de um tronco de cone de 12 cm de altura, cujas bases são círculos de raios 5cm e 10 cm respectivamente.

Resolução



Como a geratriz é uma reta, temos $S(x)$ de grau 2.

Por semelhança de triângulos, temos:

$$\frac{5}{r} = \frac{12}{6} \Rightarrow r = \frac{5}{2}.$$

Assim, o raio da secção média do tronco é igual a $\frac{15}{2}$ cm, logo:

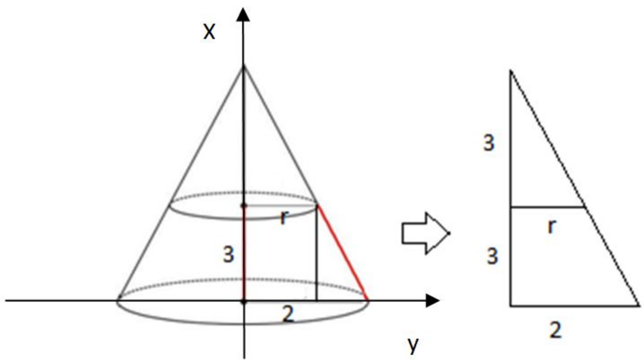
$$\begin{aligned} S(a) &= S(0) = \pi 10^2 = 100\pi\,. \\ S(b) &= S(12)\pi 5^2 = 25\pi\,. \\ S\Big(\frac{a+b}{2}\Big) &= S(6) = \pi\Big(\frac{15}{2}\Big)^2 = \frac{225}{4}\pi\,. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} V &= \frac{12}{6}\Big(100\pi + 4\frac{225}{4}\pi + 25\pi\Big) \\ &= 700\pi\,\mathrm{cm}^3\,. \end{aligned}$$

b) Determine o volume de um cone reto de 6 cm de altura e raio da base igual a 2 cm.

Resolução:



Como a geratriz é uma reta, temos $S(x)$ de grau 2.

Por semelhança de triângulos, temos:

$$\frac{2}{r} = \frac{6}{3} \Rightarrow r = 1\,\mathrm{cm}.$$

Assim:

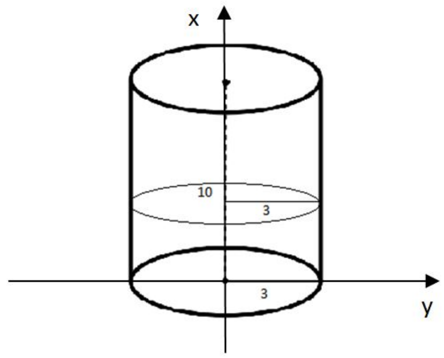
$$\begin{aligned} S(a) &= S(2) = \pi\, 2^2 = 4\,\pi\,. \\ S(b) &= S(0) = \pi\, 0 = 0\,. \\ S\Big(\frac{a+b}{2}\Big) &= S(1) = \pi(1)^2 = \pi\,. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} V &= \frac{6}{6}(4\,\pi + 4\,\pi + 0)\,, \\ &= 8\pi\,\mathrm{cm}^3\,. \end{aligned}$$

c) Determine o volume de um cilindro de altura 10 cm e raio da base igual 3 cm.

Resolução:



Como a geratriz é uma função constante, temos $S(x)$ de grau zero.

Assim:

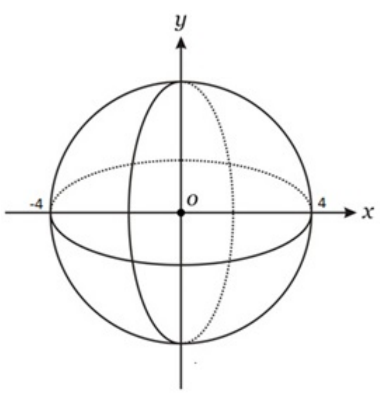
$$\begin{aligned} S(a) &= S(3) = \pi\, 3^2 = 9\,\pi\,. \\ S(b) &= S(3) = \pi\, 3^2 = 9\,\pi\,. \\ S\Big(\frac{a+b}{2}\Big) &= S(3) = \pi\, 3^2 = 9\,\pi\,. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} V &= \frac{10}{6}(9\,\pi + 4 \times 9\,\pi + 9\,\pi)\,, \\ &= 90\pi\,\mathrm{cm}^3\,. \end{aligned}$$

d) Determine o volume da esfera de raio igual a 4cm.

Resolução:



Como a área da secção é um círculo $S(x) = \pi\,(r^2 - x^2)$, temos $S(x)$ de grau 2.

Assim:

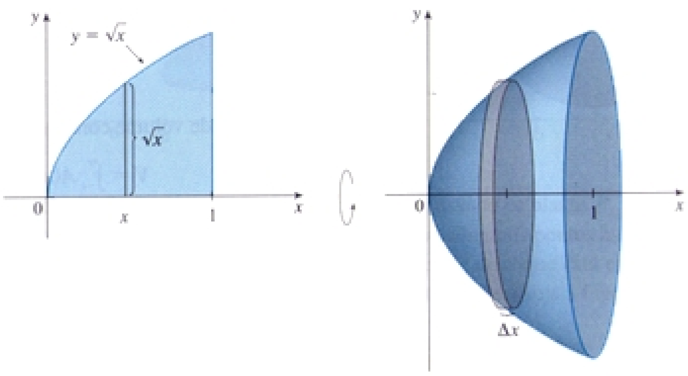
$$\begin{aligned} S(a) &= S(0) = \pi(0)^2 = 0\,. \\ S(b) &= S(0) = \pi(0)^2 = 0\pi\,. \\ S\Big(\frac{a+b}{2}\Big) &= S(4) = \pi\,(4)^2 = 16\pi\,. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} V &= \frac{8}{6}(0 + 4 \times 16\,\pi + 0)\,, \\ &= \frac{256}{3}\,\pi\,\text{cm}^3\,. \end{aligned}$$

e) Encontre o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo x da região da curva $y = \sqrt{x}$ de 0 até 1.

Resolução:



Temos que $S(x)$ é um cilindro de raio igual a $\sqrt{x}$, então: $S(x) = \pi\,(\sqrt{x})^2 = \pi\,x$. Note que $S(x)$ é um polinômio de grau 1.

Daí,

$$\begin{aligned} S(a) &= S(0) = 0\,. \\ S\Big(\frac{a+b}{2}\Big) &= S\Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{2}\,\pi\,. \\ S(b) &= S(1) = \pi\,. \end{aligned}$$

Aplicando a fórmula dos três níveis:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{6}\Big(0 + 4\,\frac{\pi}{2} + \pi\Big)\,, \\ &= \frac{\pi}{2}\,. \end{aligned}$$

6.2 Considerações finais

Diante de todo conteúdo apresentado e dos exemplos que vimos anteriormente, mostramos que a fórmula dos três níveis é uma forma de apresentar o volume em função de dados do sólido, deixando bem claro sua intenção de propiciar mais uma maneira de determinar volumes.

Não preocupados em comparar ou qualificar a dificuldade do que aqui foi proposto, vimos que é possível trabalhar conteúdos avançados de matemática, como limites e integrais, de forma intuitiva, privilegiando o raciocínio e o saber já adquirido dos alunos nos anos iniciais do ensino médio.

Apesar de não termos realizado nenhuma pesquisa de campo propondo resoluções de exercícios a alunos do ensino médio utilizando a fórmula dos três níveis, consideramos positiva sua utilização para determinação de volumes de sólidos não clássicos, não tradicionais, e acreditamos que é possível sua inserção em livros didáticos do 2º ano, servindo até mesmo como estímulo para uma futura escolha na área de exatas.

Consideramos importante mostrar aos alunos o que estar por vir na sequência da carreira acadêmica, contar um pouco dos desafios que irão encontrar e os problemas que darão conta de resolver e que hoje parecem sem solução. É nosso dever estimular os alunos em dose certa, sem perder o respeito da aprendizagem já adquirida por eles, e ao mesmo tempo não deixar transparecer que o que estamos fazendo é mero exibicionismo, sem nenhum propósito.

Apêndice A

Indução Matemática

Conforme descrito em [8], o método de demonstração conhecido como indução matemática pode ser utilizado para mostrar que certas afirmações ou fórmulas são verdadeiras para todos os naturais. Tal método baseia-se no seguinte axioma fundamental.

A.1 Axioma da Indução Matemática

Seja S um subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que

1. $0 \in S$.

2. S é fechado com respeito à operação de "somar 1"a seus elementos, ou seja, $\forall\ n$, $n \in S \Rightarrow n + 1 \in S$,
   Então, $S = \mathbb{N}$.

Segue do Axioma de Indução, o importante instrumento para provar teoremas conhecido como o Princípio de Indução Matemática.

A.2 Princípio de Indução Matemática

Seja $a \in \mathbb{N}$ e seja $p(n)$ uma sentença aberta em n. Suponha que

1. $p(a)$ é verdade, e que

2. $\forall\ n \geq a, \Rightarrow p(n + 1)$ é verdade,
   então, $p(n)$ é verdade para todo $n \geq a$.

Assim, pelo Princípio de Indução Matemática, vamos provar as fórmulas determinadas nas equações (2.10), (2.14) e (2.16).

A.3 Soma dos números naturais

Seja $p(n)$ a afirmação

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)}{2}\,. \tag{A.1}$$

Para $n = 1$: $p(1) = \frac{1(1+1)}{2} = 1$.

Hipótese de indução:

$p(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ seja verdadeiro para algum $n \in \mathbb{N}^*$.

Vamos provar que $p(n+1)$ é verdadeiro somando $n+1$ a ambos os membros desta igualdade:

$$\begin{aligned} p(n+1) &= p(n) + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1) + 2n + 2}{2}\,, \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}\,. \end{aligned} \tag{A.2}$$

o que mostra que $p(n+1)$ é verdadeira, e pelo Princípio de Indução matemática $p(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

A.4 Soma dos quadrados dos números naturais

Seja $p(n)$ a afirmação

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,. \tag{A.3}$$

Para $n = 1$: $p(1) = \frac{1(1+1)(2\times1+1)}{2} = 1$.

Hipótese de indução:

$p(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ seja verdadeiro para algum $n \in \mathbb{N}^*$.

Vamos provar que $p(n+1)$ é verdadeiro somando $(n+1)^2$ a ambos os membros desta igualdade:

$$\begin{aligned} p(n+1) &= p(n) + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2\,, \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6}\,, \\ &= \frac{(n+1)[2n^2 + 7n + 6]}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}\,. \end{aligned} \tag{A.4}$$

o que mostra que $p(n+1)$ é verdadeira, e pelo Princípio de Indução matemática $p(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

A.5 Soma dos cubos dos números naturais

Seja $p(n)$ a afirmação

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2. \tag{A.5}$$

Para $n = 1$: $p(1) = \left[\frac{1(1+1)}{2}\right]^2 = 1$.

Hipótese de indução:

$p(n) = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ seja verdadeiro para algum $n \in \mathbb{N}^*$.

Vamos provar que $p(n+1)$ é verdadeiro somando $(n+1)^3$ a ambos os membros desta igualdade:

$$\begin{aligned} p(n+1) &= p(n) + (n+1)^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 + (n+1)^3, \\ &= \frac{(n+1)^2[n^2 + 4(n+1)]}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}, \\ &= \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2. \end{aligned} \tag{A.6}$$

o que mostra que $p(n+1)$ é verdadeira, e pelo Princípio de Indução matemática $p(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Apêndice B

Integral definida de $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

Partições do intervalo $[a, b]$

Seja $[a, b]$ um intervalo fechado e limitado da reta. Chamamos uma partição p de $[a, b]$ um conjunto finito de pontos $\{x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n\}$, ordenado da seguinte forma

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b.$$

Note que uma tal partição divide o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$. Cada um desses subintervalos tem comprimento $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ e a soma desses comprimentos é igual a $(b - a)$, o comprimento do intervalo original:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x = (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + ... + (x_n - x_{n-1}) = x_n - x_0 = b - a.$$

Chamamos *norma* da partição p o comprimento do seu subintervalo mais longo:

$$\|p\| = max\{\Delta x_i; i = 1, 2, ..., n\}.$$

Somas de Riemann

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função definida no intervalo fechado e limitado $[a, b]$ e seja p uma partição de $[a, b]$. Para cada $i = 1, 2, ..., n$, escolhemos um ponto $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. Definimos a *Soma de Riemann* de f, relativa à partição p e à escolha dos pontos x_i^* por

$$S(f, p) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\, \Delta x_i\,. \tag{B.1}$$

Em geral, as Somas de Riemann de uma função qualquer, que assume valores positivos e negativos, corresponde a uma soma de números positivos ou negativos, dependendo dos valores $f(x_i^*)$. Assim, os retângulos que se encontrarem abaixo do eixo x, contribuirão com parcelas negativas. Veja a Figura B.1.

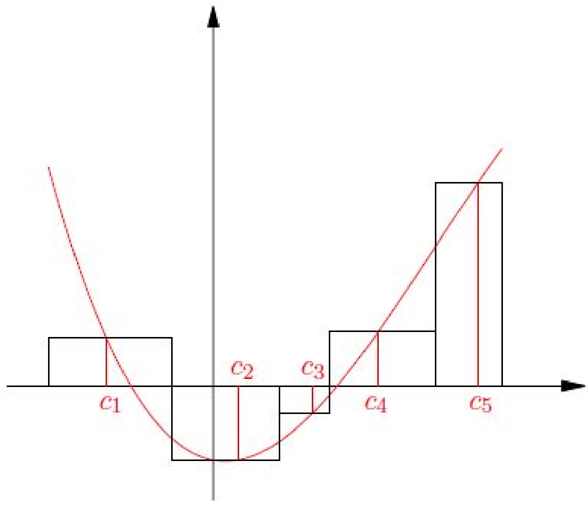


Figura B.1: Somas de Riemann.

$$S(f, p) = \sum_{i=1}^{5} f(x_i^*)\,\Delta x_i = A_1 - A_2 - A_3 + A_4 + A_5\,. \tag{B.2}$$

Em que A_i representa a área do retângulo de base $[x_{i-1}, x_i]$ e altura $|f(x_i^*)|$.

A integral definida da função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é o limite das suas *Somas de Riemann* quando as normas das partições tendem à zero, desde que este limite exista:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|p\|\to 0} S(f, p)\,. \tag{B.3}$$

Uma integral definida pode ser interpretada como a área resultante, se $f \geq 0$.

Se f é uma função contínua definida em $a \leq x \leq b$, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de comprimentos iguais $\Delta x = (b - a)/n$. Sejam $a = x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n = b$ as extremidades desses subintervalos, escolhemos os pontos amostrais $x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*$ nesses subintervalos, de forma que x_i^* esteja no i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Então a integral definida f de a a b é

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x\,, \tag{B.4}$$

desde que esse limite exista. Se ele existir, dizemos que f é integrável em $[a, b]$.

Proposição:

A integral definida de uma potência qualquer de x é dada por:

$$\int_a^b x^n\,dx = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1). \tag{B.5}$$

Apêndice C

Teorema de Weietstrass

Em matemática, o teorema de Weierstrass afirma que qualquer função contínua de um intervalo $[a, b]$ em $\mathbb{R}$ é limitada e que, além disso, assume um máximo e um mínimo nesse intervalo.

Teorema C.0.1 (Weietstrass) *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a \leq b$ e seja f uma função contínua de $[a, b]$ em $\mathbb{R}$. Então existem números x_m, $x_M \in [a, b]$, tais que $\forall\ x \in [a, b]$: $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$.*

Em particular, a função f é limitada.

Uma demonstração desse resultado pode ser encontrada em [10].

Apêndice D

Demonstrações Seção (3.5)

Para demonstração das propriedades 5, 6 e 7 apresentadas na Seção (3.5) utilizaremos da definição de integral definida, das regras de somatório da Seção (2.5) e das seguintes propriedades do limite:

Seja c uma constante e suponha que existam os limites $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Então,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a}\big[f(x)+g(x)\big] &= \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)\,, && \text{(D.1)}\\
\lim_{x\to a}\big[f(x)-g(x)\big] &= \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)\,, && \text{(D.2)}\\
\lim_{x\to a}\big[c\,f(x)\big] &= c\,\lim_{x\to a} f(x)\,, && \text{(D.3)}\\
\lim_{x\to a}\big[f(x)\,g(x)\big] &= \lim_{x\to a} f(x) \times \lim_{x\to a} g(x)\,, && \text{(D.4)}\\
\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] &= \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}\,, \quad \text{se} \quad \lim_{x\to a} g(x) \neq 0\,. && \text{(D.5)}
\end{aligned}$$

Demonstração da propriedade 5.

$$I_a^b[c\,f(x)] = c\,I_a^b[f(x)]\,. \tag{D.6}$$

Temos que

$$I_a^b\,f(x) = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x\,, \tag{D.7}$$

onde $\Delta x = (b-a)/n$.

Daí,

$$\begin{aligned}
I_a^b[c\,f(x)] &= \int_a^b [c\,f(x)]\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[c\,f(x_i)]\,\Delta x = \lim_{n\to\infty}\left[c\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x\right],\\
&= c\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x\right] = c\int_a^b f(x)\,dx = c\,I_a^b[f(x)]\,. && \text{(D.8)}
\end{aligned}$$

Demonstração da propriedade 6.

$$I_a^b[f(x)+g(x)] = I_a^b[f(x)] + I_a^b[g(x)]\,. \tag{D.9}$$

$$I_a^b\, f(x) = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x\,,$$

onde $\Delta x = (b-a)/n$.

Daí,

$$\begin{aligned}
I_a^b\,[f(x)+g(x)] &= \int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)+g(x_i)]\,\Delta x\,,\\
&= \lim_{n\to\infty}\Big[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x + \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\,\Delta x\Big]\,,\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x + \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} g(x_i)\,\Delta x\,,\\
&= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\,,\\
&= I_a^b[f(x)] + I_a^b[g(x)]\,.
\end{aligned} \tag{D.10}$$

Demonstração da propriedade 7.

$$I_a^b(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3) = c_0(b-a) + \frac{c_1}{2}(b^2-a^2)^2 + \frac{c_2}{3}(b^3-a^3) + \frac{c_3}{4}(b^4-a^4)\,. \tag{D.11}$$

$$I_a^b\, f(x) = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x\,,$$

onde $\Delta x = (b-a)/n$.

Daí:

$$
\begin{aligned}
& I_a^b(c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3) = \int_a^b (c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3)dx\,, \\
= \;& \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (c_0 + c_1x_i + c_2x_i^2 + c_3x_i^3)\Delta x \\
= \;& \lim_{n\to\infty} \Big[\sum_{i=1}^{n}(c_0)\Delta x + \sum_{i=1}^{n}(c_1x_i)\Delta x + \sum_{i=1}^{n}(c_2x_i^2)\Delta x + \sum_{i=1}^{n}(c_3x_i^3)\Delta x \Big]\,, \\
= \;& \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}(c_0)\Delta x + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}(c_1x_i)\Delta x + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}(c_2x_i^2)\Delta x + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}(c_3x_i^3)\Delta x\,, \\
= \;& \lim_{n\to\infty} c_0 \sum_{i=1}^{n} \Delta x + \lim_{n\to\infty} c_1 \sum_{i=1}^{n}(x_i)\Delta x + \lim_{n\to\infty} c_2 \sum_{i=1}^{n}(x_i^2)\Delta x + \lim_{n\to\infty} c_3 \sum_{i=1}^{n}(x_i^3)\Delta x\,, \\
= \;& c_0 \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x + c_1 \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}(x_i)\Delta x + c_2 \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}(x_i^2)\Delta x + c_3 \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}(x_i^3)\Delta x\,, \\
= \;& c_0 \int_a^b dx + c_1 \int_a^b x\,dx + c_2 \int_a^b x^2\,dx + c_3 \int_a^b x^3\,dx\,, \\
= \;& c_0 I_a^b(1) + c_1 I_a^b(x) + c_2 I_a^b(x)^2 + c_3 I_a^b(x)^3\,, \\
= \;& c_0(b-a) + c_1\frac{(b^2-a^2)}{2} + c_2\frac{(b^3-a^3)}{3} + c_3\frac{(b^4-a^4)}{4}\,, \\
= \;& c_0(b-a) + \frac{c_1}{2}(b^2-a^2) + \frac{c_2}{3}(b^3-a^3) + \frac{c_3}{4}(b^4-a^4)\,. \qquad \text{(D.12)}
\end{aligned}
$$

Bibliografia

[1] ASSUNÇÃO, Ronaldo B.; CARRIÃO, Paulo C. **Dos Produtos Notáveis ao Cálculo de Volumes**. BIENAL DA SBM, 3, 2006, Goiânia. Belo Horizonte: Universidade Federal de Minas Gerais, 2006. 13 p.

[2] EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**.; tradução Hygino H. Domingues.3.ed. Campinas: Unicamp, 2002.

[3] BOYER, Carl B. **Cálculo**: tópicos de história da matemática para uso em sala de aula. São Paulo: Atual, 1995. v. 6.

[4] ALVARENGA, Mauro Lopes. O método de exaustão e sua contribuição para o desenvolvimento do conhecimento matemático. Disponível em: HTTP://www.ucb.br/sites/100/103/tcc/12006/MauroLopesAlvarenga.pdf. Acesso em 04 jul. 2013.

[5] SWOKOWSKI, Earl William. **Cálculo com geometria analítica**. São Paulo: McGraw-Hill de Brasil, 1983. v. 1.

[6] STEWART, James. **Cálculo**. São Paulo: Cengage Learning, 2012. v.1.

[7] DOLCE, Osvaldo. **Fundamentos de matemática elementar**: geometria espacial, posição e métrica. 5.ed.São Paulo: Atual, 1993. v.10.

[8] HEFEZ, Abramo. **Elementos de aritmética**. 2.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011. 176 p.

[9] MA22- **Tópicos de Cálculo Diferencial e Integral**. Coleção Profmat. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[10] LIMA, Elon Lajes. **Análise Real**. 5.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2001.v.1.

[11] LIMA, Elon Lages;CARVALHO,Paulo Cezar;WAGNER,Eduardo;MORGADO,Augusto César. **A matemática do ensino médio**. 6. Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. V.2.