

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

VICTORIA MAZOTTI RODRIGUES DA SILVA

**UMA VISÃO DINÂMICA DE ALGUNS TEOREMAS GEOMÉTRICOS CLÁSSICOS
VIA GEOGEBRA**

CURITIBA

2022

VICTORIA MAZOTTI RODRIGUES DA SILVA

**UMA VISÃO DINÂMICA DE ALGUNS TEOREMAS GEOMÉTRICOS CLÁSSICOS
VIA GEOGEBRA**

A dynamic view of some classical geometric theorems via GeoGebra

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre no Programa Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Orientador: Prof. Dr. Rudimar Luiz Nós

Coorientadora: Profa. Dra. Mari Sano

CURITIBA

2022



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

Esta licença permite que outros remixem, adaptem e criem a partir do trabalho licenciado para fins não comerciais, desde que atribuam ao autor o devido crédito e que licenciem as novas criações sob termos idênticos.



Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Curitiba



VICTORIA MAZOTTI RODRIGUES DA SILVA

UMA VISÃO DINÂMICA DE ALGUNS TEOREMAS GEOMÉTRICOS CLÁSSICOS VIA GEOGEBRA

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Matemática.

Data de aprovação: 19 de Agosto de 2022

Dr. Rudimar Luiz Nos, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dra. Patricia Massae Kitani, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Yuri Dumaresq Sobral, Doutorado - Universidade de Brasília (Unb)

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 19/08/2022.

Dedico este trabalho à minha tia Josefa (in memoriam) que amava aprender, mesmo perdendo completamente a visão em seus últimos anos, e se alegrava por cada conquista minha, inclusive esta que ela não chegou a ver concluída.

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter me dado saúde, forças, paciência e oportunidades durante esses anos.

Aos meus pais, Cleide e Vicente, que sempre me ensinaram que a única coisa que ninguém pode me tirar é o meu conhecimento.

Ao meu irmão, Matheus, por sempre me acolher nos momentos difíceis para comer bobeira e tomar sorvete.

À minha avó, Sefa, por entender meus sumiços para escrever a dissertação. Sempre me recebendo com um sorriso enorme, confiando que eu já terminei.

Ao meu orientador, Prof. Rudimar, pelo incentivo, confiança e até mesmo puxões de orelha. Minha trajetória acadêmica não seria a mesma sem seus conselhos. Obrigada por ter aceitado me orientar antes mesmo da minha inscrição no ENA.

À minha co-orientadora, Profa. Mari Sano, pelos desafios propostos ao longo desse trabalho. Ele não seria tão rico sem suas indicações.

Às minhas amigas Roberta Andrade, que mesmo de férias na Suíça me ajudou com as traduções do Francês, e Tatiana Maciel Chenisz, que sempre me apoiaram e não se importaram de me ouvir reclamar e chorar por não terminar.

Ao meu colega, Enoque Sobral, por todo o seu apoio durante o curso, topando minhas loucuras por Curitiba e fazendo com que o curso fosse muito mais leve.

À Escola Estadual Maria Vidal Novaes, onde leciono, pelo ajuste de horários para que eu pudesse fazer as disciplinas às sextas-feiras, e aos meus alunos, que sempre sentem orgulho da "prô" por fazer mestrado.

À Sociedade Brasileira de Matemática que, na busca da melhoria do ensino de matemática na Educação Básica, viabilizou a implementação do PROFMAT.

À CAPES, pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior.

Ao PROFMAT-CT e à DIRPPG-CT, pelo apoio financeiro através da concessão de uma bolsa de estudos durante um ano.

Matemática não é apenas números e sim envolve letras e toda a capacidade que o ser humano conseguir expressar.

François Viète (1540 - 1603): advogado e matemático francês.

RESUMO

SILVA, Victoria Mazotti Rodrigues da. **Uma visão dinâmica de alguns teoremas geométricos clássicos via GeoGebra**. 102 f. Dissertação - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2022.

Apresentamos neste trabalho demonstrações formais e visualizações dinâmicas de alguns teoremas geométricos clássicos, como os teoremas de Pitágoras, de Pascal e de Napoleão. Nas visualizações dinâmicas desses teoremas, assim como de alguns lugares geométricos, entre os quais os pontos de Fermat, de Nagel e de Gergonne, empregamos o GeoGebra. Concluimos que o GeoGebra é uma excelente ferramenta para construir abordagens dinâmicas, possibilitando investigações detalhadas das hipóteses e da tese de um teorema geométrico.

Palavras-chave: Teorema de Pitágoras; Último teorema de Fermat; Lugares geométricos; Triângulos.

ABSTRACT

SILVA, Victoria Mazotti Rodrigues da. **A dynamic view of some classical geometric theorems via GeoGebra.** 102 pg. Dissertation - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2022.

We present in this work formal demonstrations and dynamic views of some classical geometric theorems, such as the theorems of Pythagoras, Pascal, and Napoleon. In the dynamic views of these theorems, as well as of some loci, including the Fermat, Nagel, and Gergonne points, we use GeoGebra. We conclude that GeoGebra is an excellent tool for building dynamic approaches, enabling detailed investigations of the hypotheses and thesis of a geometric theorem.

Keywords: Pythagorean theorem; Fermat's last theorem; Loci; Triangles.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Menu de opções do GeoGebra	18
Figura 1.2 – Janela de entrada do GeoGebra	18
Figura 1.3 – Janela de Álgebra do GeoGebra	18
Figura 1.4 – Página do GeoGebra sobre o teorema de Morley	22
Figura 1.5 – Menu de opções na página do GeoGebra	22
Figura 1.6 – Movimentação dinâmica dos vértices do triângulo ABC	23
Figura 2.1 – Demonstração algébrica número 1 de Loomis (1968)	27
Figura 2.2 – Demonstração algébrico-geométrica número 100 de Loomis (1968)	29
Figura 2.3 – Demonstração geométrica número 9 de Loomis (1968): a equicomposição de Perigal	30
Figura 2.4 – Demonstração geométrica número 63 de Loomis (1968)	32
Figura 2.5 – Demonstração geométrica número 153 de Loomis (1968)	33
Figura 2.6 – Demonstração vetorial número 1 de Loomis (1968)	34
Figura 2.7 – Demonstração vetorial número 4 de Loomis (1968)	35
Figura 3.1 – Pontos colineares pertencentes aos lados do triângulo ABC ou a seus prolongamentos	39
Figura 3.2 – Perpendiculares à reta r baixadas dos vértices do triângulo ABC	40
Figura 3.3 – Interseção das retas que passam pelos pontos X e Y e A e C	40
Figura 3.4 – Triângulo ABC e os pontos X , Y e Z , com $BZ \parallel AY \parallel CX$	42
Figura 3.5 – Triângulo ABC e os pontos X , Y , Z e K , com $K = AY \cap BZ \cap CX$	42
Figura 3.6 – Triângulo ABC e os pontos X , Y , Z e P , com $AY \parallel BZ \parallel CP$	43
Figura 3.7 – Triângulo ABC e os pontos X , Y , Z , P e Q , com as retas definidas por A e Y e B e Z concorrentes em Q	43
Figura 3.8 – Hipóteses do teorema de Pascal	44
Figura 3.9 – Pontos X , Y e Z e a circunferência Γ	45
Figura 3.10–Triângulo XYZ e os pontos Q , B e C	45
Figura 3.11–Triângulo XYZ e os pontos P , D e E	46
Figura 3.12–Triângulo XYZ e os pontos R , F e A	46
Figura 3.13–Potência do ponto X em relação à circunferência Γ	47
Figura 3.14–Potência do ponto Y em relação à circunferência Γ	47
Figura 3.15–Potência do ponto Z em relação à circunferência Γ	47
Figura 3.16–Circunferência Γ inscrita no quadrilátero $ABCD$	49
Figura 3.17–Circunferência Γ inscrita no quadrilátero $ABCD$ e os pontos colineares O , D e X	49
Figura 3.18–Circunferência Γ inscrita no quadrilátero $ABCD$ e os pontos colineares B , O e X	50

Figura 3.19–Circunferência Γ inscrita no quadrilátero $ABCD$ e os pontos colineares Y , C e O	50
Figura 3.20–Circunferência Γ inscrita no quadrilátero $ABCD$ e os pontos colineares A , O e Y	51
Figura 3.21–Triângulos ABC e $A'B'C'$ e o ponto de concorrência O	52
Figura 3.22–Triângulos ABC e $A'B'C'$ e os pontos de concorrência O, P, Q e R	52
Figura 3.23–Triângulo OAB e os pontos A', B' e R	53
Figura 3.24–Triângulo OCB e os pontos C', B' e P	53
Figura 3.25–Triângulo OAC e os pontos A', C' e Q	54
Figura 3.26–Hexágono convexo $ABCDEF$ circunscrito à circunferência Γ	55
Figura 3.27–Circunferência Γ , o quadrilátero $AMDN$ e o ponto A'	55
Figura 3.28–Circunferência Γ , o quadrilátero $CSFT$ e o ponto C'	56
Figura 3.29–Retas coincidentes que passam pelos pontos I e L e A' e C'	56
Figura 3.30–Circunferência Γ , o quadrilátero $ERBQ$ e o ponto B'	56
Figura 3.31–Circunferência Γ e os pontos A, O, C e P	57
Figura 3.32–Tese do teorema de Brianchon	57
Figura 3.33–Triângulos equiláteros ABF, ACD e BCE , construídos sobre os lados do triângulo ABC	58
Figura 3.34–Triângulos ABC, ABF, ACD, BCE e HCG	59
Figura 3.35–Triângulos ABC, ABF, ACD, BCE e IAG	60
Figura 3.36–Triângulos ABC, ABF, ACD, BCE, BCF e IBH	61
Figura 3.37–Interseção das trissetrizes adjacentes dos ângulo internos do triângulo ABC	62
Figura 3.38–Circunferências Γ e γ e os pontos A, B e C	67
Figura 3.39–Circunferências Γ e γ e os pontos A, B, C, P, X e Y	67
Figura 3.40–Triângulo ABC , as cordas $A'B'$ e $A'C'$ e as circunferências Γ e γ	69
Figura 4.1 – Pontos da circunferência Γ , que distam r do ponto O	70
Figura 4.2 – Retas paralelas s e s' , que distam r da reta t	71
Figura 4.3 – Mediatriz m , cujos pontos equidistam dos pontos A e B	71
Figura 4.4 – Bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$, cujos pontos equidistam dos lados do ângulo	72
Figura 4.5 – Ponto M de Miquel	73
Figura 4.6 – Triângulos ABC, ABM e $A'BM'$	74
Figura 4.7 – Ponto de Fermat: interseção das retas AB', BC' e CA'	75
Figura 4.8 – Farol no ponto F de Fermat	76
Figura 4.9 – Triângulo ABC , o ponto F de Fermat, os pontos A_1, B_1 e C_1 e o triângulo DEB_1	76
Figura 4.10–Cevianas isotômicas AA_1 e AA_2 do triângulo ABC	78
Figura 4.11–Cevianas isotômicas AA_1 e AA_2, BB_1 e BB_2 e CC_1 e CC_2 do triângulo ABC e os pontos recíprocos P e P'	78
Figura 4.12–Triângulo ABC , onde $A \equiv B_1, B \equiv A_1, C \equiv A_2 \equiv B_2$ e $P_1 \equiv C_1$	80

Figura 4.13–Triângulo ABC , onde $A \equiv P_1 \equiv B_1 \equiv C_2$, $B \equiv C_1$ e $C \equiv B_2$	80
Figura 4.14–Triângulo ABC , as cevianas isotômicas AA_1 e AA_2 , BB_1 e BB_2 e CC_1 e CC_2 e o ponto G_1	82
Figura 4.15–Triângulo ABC , as cevianas isotômicas AA_1 e AA_2 , BB_1 e BB_2 e CC_1 e CC_2 e os pontos recíprocos G_1 e G_2	83
Figura 4.16–Ponto G de Gergonne	84
Figura 4.17–Triângulo ABC , a circunferência inscrita Γ e os pontos de interseção H , I e J	85
Figura 4.18–Pontos recíprocos: o ponto G de Gergonne e o ponto N de Nagel	86
Figura 4.19–Triângulo ABC e as circunferências inscrita γ , de centro I , circunscrita Γ , de centro O , e ex-inscrita Γ_B em relação a AC , de centro I_B	87
Figura 4.20–Triângulo isósceles ABC , de base AC , e as circunferências inscrita γ , de centro I , circunscrita Γ , de centro O , e ex-inscrita Γ_B em relação a AC , de centro I_B	88
Figura 4.21–Relações entre o ponto N de Nagel e os pontos notáveis do triângulo ABC	90
Figura 4.22–Triângulo ABC , a circunferência inscrita γ e a circunferência ex-inscrita Γ_A	91
Figura 4.23–Triângulo ABC , a circunferência inscrita γ , a circunferência ex-inscrita Γ_A e o ponto N de Nagel de ABC	93
Figura 4.24–Triângulo ABC , a circunferência inscrita γ , a circunferência ex-inscrita Γ_A , o ponto N de Nagel, o ortocentro H_1 e o isobaricentro G_1 de ABC	94

LISTA DE SÍMBOLOS

$\alpha, \beta, \gamma, \Gamma$	letras gregas alfa, beta, gama e gamma
$=$	igual a
\Rightarrow	condicional; implica; se ..., então
\Leftrightarrow	bicondicional; se, e somente se
\cup	união com
\cap	interseção com
$>$	maior do que
$\not>$	não é maior do que
$<$	menor do que
$\not<$	não é menor do que
\equiv	congruente a; coincidente a
\neq	não congruente a; não coincidente a
\sim	semelhante a
\parallel	paralelo(a) a
\perp	perpendicular a
AB	segmento de reta de extremos nos pontos A e B ou o comprimento do segmento
\overrightarrow{AB}	semirreta de origem no ponto A e que passa pelo ponto B
\overleftrightarrow{AB}	reta definida pelos pontos A e B
$\triangle ABC$	triângulo de vértices A , B e C
\vec{u}	vetor u
$\ \vec{u}\ $	norma (ou comprimento) do vetor u
\vec{AB}	vetor com origem no ponto A e extremidade no ponto B
$\mathcal{A}(ABC)$	área do triângulo ABC

$\mathcal{A}(ABCD)$ área do quadrilátero $ABCD$

\hat{A} ângulo de vértice A

$\angle ABC$ ângulo de vértice B e lados BA e BC

$\angle(\vec{AB}, \vec{BC})$ ângulo entre os vetores \vec{AB} e \vec{BC}

$\text{sen}(\alpha)$ seno do ângulo α

$\text{cos}(\beta)$ cosseno do ângulo β

Π produtório

$G_1 = \text{Bar}\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$ coordenadas baricêntricas do ponto G_1
em relação ao triângulo ABC

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
1.1	Justificativa para a escolha do tema	19
1.2	Revisão da bibliografia	20
1.3	Objetivos	21
1.3.1	Objetivo geral	21
1.3.2	Objetivos específicos	21
1.4	Procedimentos metodológicos	21
1.5	Estrutura do trabalho	23
2	O TEOREMA DE PITÁGORAS	25
2.1	Demonstrações algébricas	26
2.2	Demonstrações geométricas	29
2.3	Demonstrações vetoriais	34
2.4	O último teorema de Fermat	35
3	TEOREMAS CLÁSSICOS	39
3.1	O teorema de Menelaus	39
3.2	O teorema de Ceva	41
3.3	O teorema de Pascal	44
3.4	O teorema de Newton	48
3.5	O teorema de Desargues	51
3.6	O teorema de Brianchon	54
3.7	O teorema de Napoleão	58
3.8	O teorema de Morley	61
3.9	O teorema de Euler	66
3.10	O teorema de Poncelet	68
4	LUGARES GEOMÉTRICOS	70
4.1	Definição e exemplos	70
4.2	Ponto de Miquel	72
4.3	Ponto de Fermat	74
4.4	Farol em pontos de Fermat	75
4.5	Cevianas isotômicas	77
4.6	Coordenadas baricêntricas	81
4.7	Ponto de Gergonne	84
4.7.1	Propriedade	85

4.8	Ponto de Nagel	86
4.8.1	Propriedades	89
5	CONCLUSÃO	96
	REFERÊNCIAS	97
	Índice	101

1 INTRODUÇÃO

Todo matemático está familiarizado com a palavra demonstração, seja pela dificuldade de aprender a fazê-la na graduação, ou pela beleza de uma demonstração que não deixa pontas soltas e prova a tese sem deixar dúvidas ao leitor. Mas o que é de fato uma demonstração?

Entre os povos antigos, não existiam demonstrações formais como conhecemos hoje. Logo, “o critério de confiabilidade das regras e procedimentos usados era simplesmente a concordância com a realidade a que se destinavam” (DOMINGUES, 2002, p. 56). Dessa forma, se era possível constatar a veracidade de forma visual e ela sempre funcionava, ela era adotada como verdade.

Com o tempo, acredita-se que a Irmandade Pitagórica tenha sido a pioneira no método dedutivo, mesmo sem base axiomática pré-estabelecida. O que eles faziam era “encadear raciocínios para estabelecer propriedades e encadear propriedades para deduzir outras propriedades de certas partes da geometria” (DOMINGUES, 2002, p. 58).

Os métodos de demonstração mudam a partir de Euclides, que traz um método que lembra o axiomático-dedutivo por iniciar sua obra, *Os elementos* (EUCLIDES, 2009), com cinco postulados e basear-se neles em grande parte do texto.

Podemos então dizer que “uma demonstração é uma entidade objetivamente existente no espaço lógico [...] é algo capaz de induzir a uma vivência subjetiva indutora de convicção em um agente matemático real” (SILVA, 2002, p. 69). Logo, precisamos de uma sequência lógica para caracterizar uma demonstração de fato.

Segundo Bicudo (2002, p. 81), a demonstração caracteriza “o que vem a ser um SISTEMA FORMAL, que é, grosseiramente falando, a parte sintática de um sistema axiomático”. Temos então três partes em uma demonstração: primeiro uma linguagem, que deve ser definida inicialmente; depois axiomas, e por último regras de inferência, que fazem com que as hipóteses conduzam à conclusão (BICUDO, 2002).

O que os matemáticos não previam era o surgimento do computador e como ele seria altamente difundido e utilizado para diversas áreas além da matemática. Tal mudança trouxe muitas objeções ao uso do computador para demonstrações. Contudo, “com a ciência cada vez mais dependente do computador e com os matemáticos não podendo se isolar cientificamente, objeções como essa não poderiam vingar e a tendência é desaparecerem” (DOMINGUES, 2002, p. 66).

Como a leitura de uma demonstração “exige que se desloque, frequentemente, o olhar para as representações visual, linguística e simbólica” (NÓBRIGA, 2019, p. 12), nascem então os ambientes de geometria dinâmica, que podem ser definidos, segundo Gravina (1996, p. 6),

como:

São ferramentas de construção: desenhos de objetos e configurações geométricas são feitos a partir das propriedades que os definem. Através de deslocamentos aplicados aos elementos que compõem o desenho, este se transforma, mantendo as relações geométricas que caracterizam a situação. Assim, para um dado objeto ou propriedade, temos associada uma coleção de “desenhos em movimento”, e os invariantes que aí aparecem correspondem às propriedades geométricas intrínsecas ao problema. E este é o recurso didático importante oferecido: a variedade de desenhos estabelece harmonia entre os aspectos conceituais e figurais; configurações geométricas clássicas passam a ter multiplicidade de representações; propriedades geométricas são descobertas a partir dos invariantes no movimento.

Dessa forma, podemos “tornar manipuláveis as representações semióticas como se fossem objetos concretos” (NÓBRIGA, 2019, p. 5). Assim, trabalhamos o ambiente dinâmico como um auxílio para a construção de imagens e a visualização das possibilidades. Logo, “entende-se que as demonstrações feitas em ambientes estáticos (papel ou quadro) podem dificultar a percepção das variações dos registros, porque tais ambientes não permitem variações concomitantes” (NÓBRIGA, 2019, p. 14). Podemos então pensar nas demonstrações matemáticas dinâmicas utilizando os ambientes de geometria dinâmica.

Inicialmente, precisamos enfatizar que “não se trata de uma nova estratégia de demonstração, mas sim de como apresentá-la” (NÓBRIGA, 2019, p. 14). Portanto, as demonstrações dinâmicas podem ser consideradas como demonstrações com um apoio visual maior, que fazem com que o estudante compreenda os mecanismos antes da prova matemática formal.

Para construir demonstrações dinâmicas é necessário “um ambiente que permita a integração dinâmica das diferentes representações, tenha um editor intuitivo de texto e equações, além de espaços específicos para as diferentes representações” (NÓBRIGA, 2019, p. 15).

Temos hoje uma variedade de ambientes de geometria dinâmica. Os mais conhecidos talvez sejam o *Cabri-Géomètre* e o GeoGebra. Ambos possibilitam que construções geométricas sejam feitas e movidas dinamicamente para avaliarmos o que acontece a partir do movimento. Ambos também permitem mesclar elementos como figuras, textos e equações, que se modificam sempre que um parâmetro é alterado, acompanhando as mudanças feitas ao se arrastar ou mover um ponto, uma reta ou controles deslizantes.

Devido às nossas experiências com o GeoGebra (SILVA, 2018; SILVA; NOS, 2018; NÓS; SILVA, 2019; NÓS; SILVA, 2020; SILVA; NÓS, 2021; LAGO; NÓS, 2020; NÓS; SANO; LAGO, 2021), escolhemos esse aplicativo para construir visualizações dinâmicas. O GeoGebra pode ser baixado ou acessado de forma *online* pelo site

<https://www.geogebra.org/calculator>.

O aplicativo funciona como uma calculadora, um ambiente que plota gráficos ou um ambiente de geometria que constrói figuras planas e/ou espaciais.

De plataforma simples, o GeoGebra possibilita construções a partir do menu de opções ilustrado na Figura 1.1, onde temos as opções mover, ponto, reta, reta perpendicular, polígono, círculo, elipse, ângulo, reflexão, controle deslizante e mover tela.

Figura 1.1 – Menu de opções do GeoGebra



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Caso se queira utilizar o GeoGebra como calculadora numérica ou gráfica, pode-se digitar o cálculo ou a função na janela de Entrada - Figura 1.2.

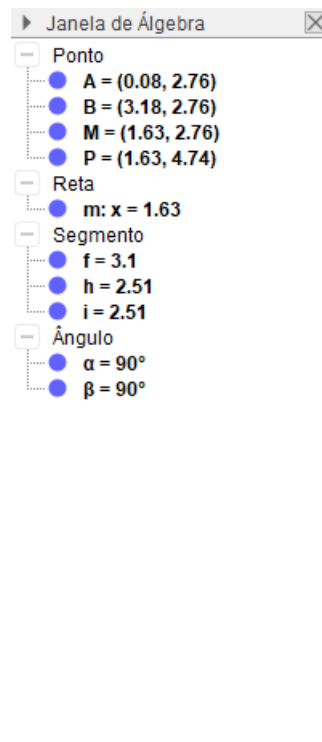
Figura 1.2 – Janela de entrada do GeoGebra



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Essa janela também permite construções mais elaboradas, pois aceita comandos específicos como, por exemplo, "Baricentro (Lista de Pontos)". Todos os comandos utilizados aparecem na Janela de Álgebra, ilustrada na Figura 1.3.

Figura 1.3 – Janela de Álgebra do GeoGebra



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

1.1 JUSTIFICATIVA PARA A ESCOLHA DO TEMA

Por ser uma das cinco unidades temáticas propostas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (MEC, 2018), a geometria torna-se um conteúdo importante na vida escolar dos estudantes, tanto das séries iniciais e finais do Ensino Fundamental quanto do Ensino Médio.

A quinta competência específica da BNCC para a matemática no Ensino Fundamental é “utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados” (MEC, 2018, p. 267). Dessa forma, a utilização de softwares de geometria dinâmica é recomendada tanto nas séries finais quanto iniciais do Ensino Fundamental.

Ao final do Ensino Fundamental, “os alunos devem dominar também o cálculo de porcentagem, porcentagem de porcentagem, juros, descontos e acréscimos, incluindo o uso de tecnologias digitais” (MEC, 2018, p. 269). Para tanto, é importante que as tecnologias digitais sejam incluídas no cotidiano escolar dos estudantes e isso precisa ser feito através das vivências e do encaminhamento dos professores.

A BNCC indica o uso de softwares de geometria dinâmica no ensino de geometria quando se ensina simetria, plano cartesiano, congruência de figuras planas, ângulos, ampliação e redução, área, posições relativas entre duas retas, ângulos formados por retas paralelas intersectadas por transversais, arcos e ângulos na circunferência e polígonos regulares, pois “softwares de geometria dinâmica têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas” (MEC, 2018, p. 276).

Adequando seu currículo à BNCC, o estado do Paraná criou o Currículo da Rede Estadual Paranaense (CREP) (PARANÁ, 2021). Nesse documento, cita-se o uso de metodologias, sendo elas “História da Matemática, Etnomatemática, Modelagem Matemática, Resolução de Problemas, Mídias Digitais, Metodologias Ativas dentre outras” (PARANÁ, 2021, p. 6).

Ainda, o CREP define que:

as Mídias Digitais vêm ao encontro do uso de tecnologias e metodologias ativas no processo de ensino e de aprendizagem e construção do conhecimento matemático, podendo ser ferramentas para que os objetivos desse processo sejam alcançados, e surgem ainda como ferramentas mediadoras da construção e compreensão de novos objetos matemáticos. (PARANÁ, 2021, p. 6)

Desta forma, o uso de softwares de geometria dinâmica é amparado por documentos oficiais, tanto a nível estadual quanto nacional, sendo fortemente recomendado no ensino de matemática.

1.2 REVISÃO DA BIBLIOGRAFIA

Ao realizar uma pesquisa no banco de dissertações do PROFMAT com a palavra “dinâmica”, obtemos 65 resultados. Entre estes, 40 apresentam demonstrações dinâmicas, GeoGebra, softwares ou geometria dinâmica em seu título. Desses trabalhos, os que mais se assemelham ao que realizamos são os de Almeida (2014), Silva (2020) e Biancatto (2021).

Almeida descreve as particularidades do teorema de Poncelet. Em sua dissertação, utiliza um software (não especificado) para construir imagens de apoio e enuncia e prova formalmente teoremas que utilizará para demonstrar, ao final, o teorema de Poncelet e o porisma de Poncelet. O trabalho de Almeida é extremamente teórico e, por vezes, precisamos voltar às figuras e equações para compreendê-lo. Um arquivo do GeoGebra, como fazemos no Capítulo 3, ajudaria o leitor a visualizar o que precisa ser provado antes da execução da demonstração formal.

Silva relata sobre visualizações dinâmicas de teoremas de geometria plana estudados na disciplina MA13-Geometria do PROFMAT. No trabalho, aborda os teoremas da bissetriz interna, de Menelaus e de Ceva. Cada um desses teoremas tem quatro partes: o enunciado do teorema, a demonstração algébrica, a demonstração dinâmica por meio de *prints* da tela e um protocolo de construção da demonstração dinâmica por meio de um *print* da sequência de comandos feitos no GeoGebra. A dissertação de Silva contém diversos *prints* das telas das demonstrações dinâmicas, porém não traz os links para as demonstrações. Assim, o trabalho mais se parece com um tutorial. Como a proposta é criar um ebook, poderiam ser incluídos links externos para as demonstrações dinâmicas.

Biancatto cria um livro digital onde enuncia definições, proposições, axiomas e teoremas, e os demonstra dinamicamente por meio de um link externo. No texto da dissertação, ilustra os enunciados com imagens produzidas no GeoGebra. O trabalho de Biancatto traz as demonstrações dinâmicas em links externos, porém não traz nenhum indício da demonstração no corpo do texto, apenas uma imagem estática que ilustra o enunciado. Dessa forma, se os links não estiverem mais disponíveis, o trabalho se perde por completo.

Os teoremas abordados por Almeida e Silva também constam na relação de teoremas que selecionamos. Entretanto, propomos um trabalho que se assemelha ao que fazia Alexander Bogomolny (1948-2018), matemático americano nascido na Rússia. Os trabalhos de Bogomolny, disponíveis na internet e dos quais utilizamos alguns como referência (BOGOMOLNY, 2018a; BOGOMOLNY, 2018b; BOGOMOLNY, 2018c; BOGOMOLNY, 2018d; BOGOMOLNY, 2018e), têm demonstrações formais no corpo do texto e um link externo manipulável, onde o leitor pode mover dinamicamente alguns pontos e compreender como os parâmetros se modificam ou como a tese se prova verdadeira por meio da construção apresentada.

Desta maneira, apresentamos sempre a demonstração formal do teorema geométrico para, em seguida, conduzir o leitor a uma experiência dinâmica, na qual as hipóteses podem ser modificadas e os resultados visuais dessas alterações observados. Dividimos os teoremas

selecionados em dois grupos. No primeiro, abordamos somente o teorema de Pitágoras, presente no currículo de matemática da Educação Básica, e sua generalização. Nesta etapa, empregamos as obras de Loomis (1968) e Singh (2010). No segundo grupo, elegemos teoremas geométricos presentes em sua maioria na referência básica (NETO, 2013) utilizada na disciplina MA13-Geometria do PROFMAT.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 OBJETIVO GERAL

Construir experiências dinâmicas para teoremas clássicos da geometria utilizando o GeoGebra.

1.3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Provar formalmente teoremas geométricos empregando as seguintes técnicas de demonstração: condicional simples, bicondicional, redução ao absurdo.
2. Construir figuras geométricas bidimensionais no GeoGebra.
3. Desenvolver páginas na plataforma do GeoGebra acessadas por links externos.
4. Produzir material didático complementar à disciplina MA13 do PROFMAT.

1.4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A metodologia utilizada no trabalho é quantitativa, bibliográfica e descritiva. Neste sentido, adotamos os seguintes procedimentos metodológicos:

1. seleção bibliográfica de teoremas geométricos (COXETER; GREITZER, 1967; LOOMIS, 1968; NETO, 2013; SINGH, 2010; SORTAIS; SORTAIS, 1997);
2. emprego do software GeoGebra (GEOGEBRA, 2022);
3. organização de experiências dinâmicas acessadas através de links externos.

As experiências dinâmicas foram construídas em páginas do GeoGebra (GEOGEBRA, 2022), as quais podem ser acessadas diretamente do texto e manipuladas via *app*. Caso o leitor queira salvar as abordagens dinâmicas, basta executar os passos do tutorial descrito a seguir.

1. Clicar no link para a experiência dinâmica:

<https://www.geogebra.org/m/frdqkkkn>.

2. O link conduz a uma página do GeoGebra - Figura 1.4. A experiência dinâmica pode ser executada de maneira *online* nessa página.

Figura 1.4 – Página do GeoGebra sobre o teorema de Morley

GeoGebra CRIAR SALA

Teorema de Morley

Autor: Victoria Mazotti

Reta	
<input type="radio"/>	f: $-1.91x + 5.94y = 4.34$
<input type="radio"/>	g: $1.88x + 5.95y = 19.86$
<input type="radio"/>	h: $2.98x + 4.15y = 25.74$
<input type="radio"/>	i: $5x + 1.03y = 25.97$
<input type="radio"/>	j: $-5.14x + 1.19y = -15.0$
<input type="radio"/>	k: $3.03x - 4.32y = -1.67$

Texto

texto1 = "FE = 1"

Teorema de Morley

Neste arquivo, podemos modificar os pontos A, B e C de modo a obter um triângulo qualquer. Podemos assim demonstrar que: Se ABC é um triângulo qualquer, então os pontos de interseção das trissetrizes adjacentes dos ângulos internos $\angle CAB$, $\angle ABC$ e $\angle BCA$ são os vértices de um triângulo equilátero.

Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

3. Na página do GeoGebra, clicar nos três pontos no canto superior direito - Figura 1.5.

Figura 1.5 – Menu de opções na página do GeoGebra

CRIAR SALA

- Incluir aos Favoritos
- Compartilhar
- Abrir com GeoGebra App
- Detalhes

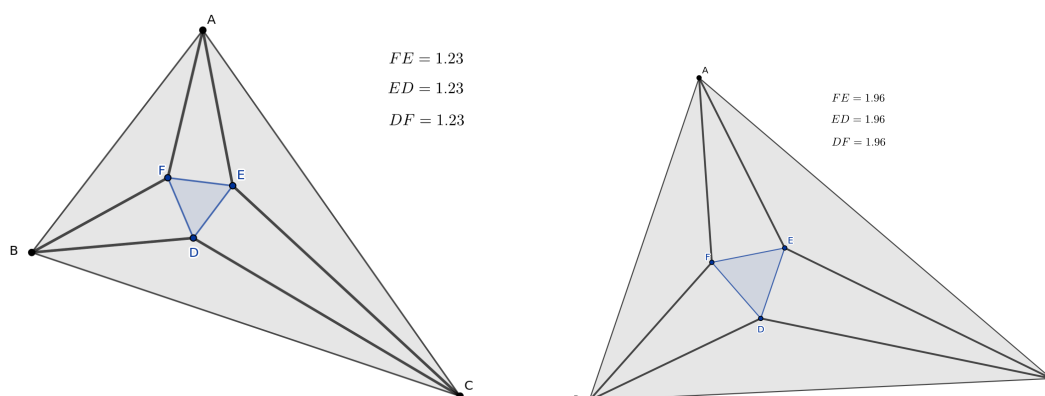
Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

4. No menu disponibilizado, clicar em “Abrir com GeoGebra App”. O aplicativo disponibiliza assim uma página na qual a experiência dinâmica pode ser salva em um arquivo com

extensão .ggb. Para tanto, basta clicar no ícone \equiv no canto superior direito e selecionar a opção “Gravar”.

A manipulação de parâmetros na página do GeoGebra permite ao leitor testar as hipóteses e a tese de cada um dos teoremas selecionados. A Figura 1.6 ilustra duas novas posições do triângulo inicial - Figura 1.4, obtidas pela movimentação dos vértices.

Figura 1.6 – Movimentação dinâmica dos vértices do triângulo ABC



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Cada link possui um título, um arquivo dinâmico que pode ser modificado pelo leitor e um texto na parte inferior que cita o teorema e informa os parâmetros que podem ser modificados. Desta forma, o leitor consegue verificar que: quando todas as hipóteses são cumpridas, a tese se verifica; quando uma das hipóteses não for cumprida, um dos parâmetros se altera e assim o teorema deixa de ser válido. Isto fica visualmente evidente pois as construções não ilustram mais a tese proposta.

1.5 ESTRUTURA DO TRABALHO

O trabalho está organizado em cinco capítulos.

O primeiro capítulo traz os objetivos gerais e específicos, a justificativa, a revisão bibliográfica e os procedimentos metodológicos.

O segundo capítulo apresenta diversas demonstrações formais do teorema de Pitágoras, bem como visualizações dinâmicas, selecionadas da obra de Loomis (1968). Neste capítulo, discorreremos ainda sobre a generalização do teorema de Pitágoras, o último teorema de Fermat.

O terceiro capítulo traz demonstrações formais e visualizações dinâmicas de dez teoremas clássicos da geometria plana: Menelaus, Ceva, Pascal, Newton, Desargues, Brianchon, Napoleão, Morley, Euler e Poncelet.

O quarto capítulo apresenta demonstrações formais e visualizações dinâmicas de quatro lugares geométricos: os pontos de Miquel, Fermat, Gergonne e Nagel. Além disso, são apresentadas propriedades dos pontos de Gergonne e de Nagel.

O quinto capítulo menciona as conclusões do trabalho.

2 O TEOREMA DE PITÁGORAS

Nascido na ilha grega de Samos em meados de 570 a.C., Pitágoras de Samos é uma das figuras mais místicas e influentes da história da matemática. Devido às lendas em torno de sua história, e também de sua Irmandade, os historiadores têm dificuldades para escrever sobre sua vida.

Como não existem relatos originais de sua vida e de seus trabalhos, Pitágoras está envolto no mito e na lenda, tornando difícil para os historiadores separar o fato da ficção. O que parece certo é que Pitágoras desenvolveu a ideia da lógica numérica e foi responsável pela primeira idade de ouro da matemática. Graças ao seu gênio, os números deixaram de ser apenas coisas usadas meramente para contar e calcular e passaram a ser apreciados por suas próprias características (SINGH, 2010, p. 28).

Segundo Singh (2010), após vários anos de estudo em viagens, Pitágoras retornou à Samos com a intenção de abrir uma escola. Porém, a visão política de Polícrates, tirano que governou Samos de 538 a 522 a.C., transformou Samos em uma cidade conservadora, e não mais aberta a novas ideias. Para não ser perseguido, Pitágoras se escondeu em uma caverna afim de continuar seus estudos matemáticos.

A Irmandade Pitagórica só passou a existir depois que Pitágoras fugiu de Samos com sua mãe e seu discípulo, que se acredita chamar Pitágoras também, e se estabeleceu em Crotona, onde recebeu o apoio de Milos, um dos homens mais fortes de toda a história (SINGH, 2010).

Várias são as descobertas matemáticas ligadas a Pitágoras, como os números perfeitos¹, a harmonia musical e o famoso teorema que define o ângulo reto. O que poucos sabem é que “embora este teorema esteja eternamente associado a Pitágoras, ele já era usado pelos chineses e babilônios mil anos antes” (SINGH, 2010, p. 40). O que faz com que esse teorema leve o nome de Pitágoras é “que foi ele o primeiro a demonstrar esta verdade universal” (SINGH, 2010, p. 40).

De enunciado simples, o teorema de Pitágoras consta na Proposição 47 do Livro I de *Os elementos* de Euclides (EUCLIDES, 2009) com o enunciado do Teorema 2.1.

Teorema 2.1 (de Pitágoras). *Nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contêm o ângulo reto.*

Em um triângulo retângulo, o lado oposto ao ângulo reto é denominado hipotenusa (do grego *hypotenousa*: que se estende debaixo do ângulo reto), enquanto que os lados que determinam o ângulo reto são denominados catetos (do grego *káthetos*: descido, abaixado de

¹ Um número natural é perfeito quando é igual à soma de seus divisores.

maneira reta). Desta forma, se a hipotenusa mede c e os catetos medem a e b , a tese do Teorema 2.1 pode ser enunciada pela igualdade $c^2 = a^2 + b^2$.

O Teorema 2.1 fascinou diversos matemáticos, entre eles Elisha Scott Loomis (1852-1940), um professor de matemática em Cleveland, Ohio (EUA). Loomis colecionou durante 20 anos, de 1907 a 1927, demonstrações desse teorema e as agrupou em um livro denominado *The Pythagorean Proposition* (A proposição de Pitágoras). O livro foi lançado inicialmente em duas edições: a primeira em 1927 com 230 demonstrações; a segunda em 1940 com 370 demonstrações. Após a morte de Loomis, o livro foi reimpresso mais duas vezes, em 1968 e 1972, pelo *National Council of Teachers of Mathematics* dos Estados Unidos (ROSA, 1983).

Em seu livro, Loomis separa as demonstrações do Teorema 2.1 em quatro categorias: a algébrica, que utiliza as relações métricas no triângulo retângulo; a geométrica, que compara áreas; a vetorial, que emprega operações com vetores; a dinâmica, que usa conceitos físicos, como massa e velocidade. Na parte final do livro, apresenta cinco quadrados pitagóricos mágicos.

Assim, motivados pelo trabalho de Loomis, apresentamos neste capítulo algumas demonstrações algébricas, geométricas e vetoriais do teorema de Pitágoras selecionadas do livro *The Pythagorean Proposition*. Para as demonstrações algébrico-geométricas e vetoriais, construímos demonstrações dinâmicas com o software GeoGebra.

2.1 DEMONSTRAÇÕES ALGÉBRICAS

Loomis (1968) organizou 109 demonstrações algébricas, as quais foram divididas em sete grupos, cada um deles com um método de demonstração. Selecionamos as demonstrações algébricas de números 1, 16 e 100, sendo esta última uma demonstração algébrico-geométrica. A demonstração algébrica mais utilizada nos livros didáticos de matemática atualmente, que depende das razões entre os lados de triângulos semelhantes, é também a primeira demonstração algébrica apresentada por Loomis. Esta demonstração é direta, do tipo implicação simples (se ..., então ...)² (FOSSA, 2009). Para tanto, basta reescrever o Teorema 2.1 como:

Se em um triângulo retângulo ABC a hipotenusa mede c e os catetos medem a e b , então

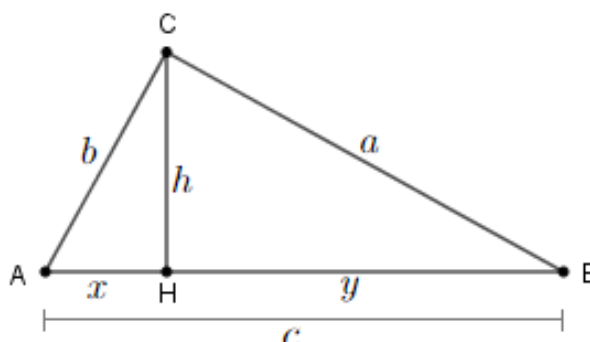
$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Demonstração algébrica 1. Sejam o triângulo ABC , retângulo em \hat{C} , de lados $AB = c$, $AC = b$ e $BC = a$, e $h = CH$ a altura relativa ao lado AB , onde H divide esse lado nos segmentos $AH = x$ e $BH = y$, tais que $x + y = c$ - Figura 2.1.

Por construção, temos que $HC \perp AB$. Logo, os triângulos ABC , ACH e BCH são retângulos. Como possuem o ângulo \hat{A} em comum, os triângulos retângulos ABC e ACH

² A demonstração também pode ser do tipo implicação dupla (se, e somente se).

Figura 2.1 – Demonstração algébrica número 1 de Loomis (1968)



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

são semelhantes pelo caso *AA* (ângulo-ângulo) (NETO, 2013). Assim, usando as razões de semelhança obtemos que:

$$\begin{aligned} \frac{b}{x} &= \frac{x+y}{b} \Leftrightarrow b^2 = x^2 + xy; \\ \frac{h}{x} &= \frac{a}{b} \Leftrightarrow hb = ax; \\ \frac{b}{h} &= \frac{x+y}{a} \Leftrightarrow ab = hx + hy. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Os triângulos retângulos *ABC* e *CBH* também são semelhantes pelo caso *AA*. Logo, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{a}{x+y} &= \frac{y}{a} \Leftrightarrow a^2 = xy + y^2; \\ \frac{a}{b} &= \frac{y}{h} \Leftrightarrow by = ah; \\ \frac{b}{x+y} &= \frac{h}{a} \Leftrightarrow ab = hx + hy. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Finalmente, os triângulos retângulos *ACH* e *CBH* também são semelhantes pelo caso *AA*. Portanto:

$$\begin{aligned} \frac{b}{h} &= \frac{a}{y} \Leftrightarrow by = ah; \\ \frac{b}{x} &= \frac{a}{h} \Leftrightarrow bh = ax; \\ \frac{h}{x} &= \frac{y}{h} \Leftrightarrow h^2 = xy. \end{aligned}$$

Somando as igualdades (2.1) e (2.2) e fatorando o trinômio quadrado perfeito (COXFORD; SHULTE, 1994), constatamos que:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= x^2 + xy + xy + y^2; \\ a^2 + b^2 &= x^2 + 2xy + y^2; \\ a^2 + b^2 &= (x+y)^2. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Empregando $AB = x + y = c$ em (2.3), concluímos que:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

□

Outra forma de demonstração muito utilizada nos cursos de álgebra é a redução ao absurdo (*reductio ad absurdum*) (FOSSA, 2009). Essa técnica consiste na obtenção de uma contradição a partir da negação da tese do teorema. Loomis (1968) utiliza a redução ao absurdo nas demonstrações algébricas de números 16 e 32.

Demonstração algébrica 16. Seja o triângulo retângulo ABC , de hipotenusa de medida c e catetos de medidas a e b . Pela lei da tricotomia, temos que:

$$a^2 + b^2 > c^2 \text{ ou}$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ ou}$$

$$a^2 + b^2 < c^2.$$

Suponhamos inicialmente que

$$a^2 + b^2 > c^2. \tag{2.4}$$

Substituindo (2.3) em (2.4) e considerando que $x + y = c$ - Figura 2.1, temos que:

$$(x + y)^2 > c^2;$$

$$c^2 > c^2. \tag{2.5}$$

Como temos uma contradição em (2.5), consideremos agora que

$$a^2 + b^2 < c^2. \tag{2.6}$$

Substituindo (2.3) em (2.6) e considerando novamente que $x + y = c$, obtemos que:

$$(x + y)^2 < c^2;$$

$$c^2 < c^2. \tag{2.7}$$

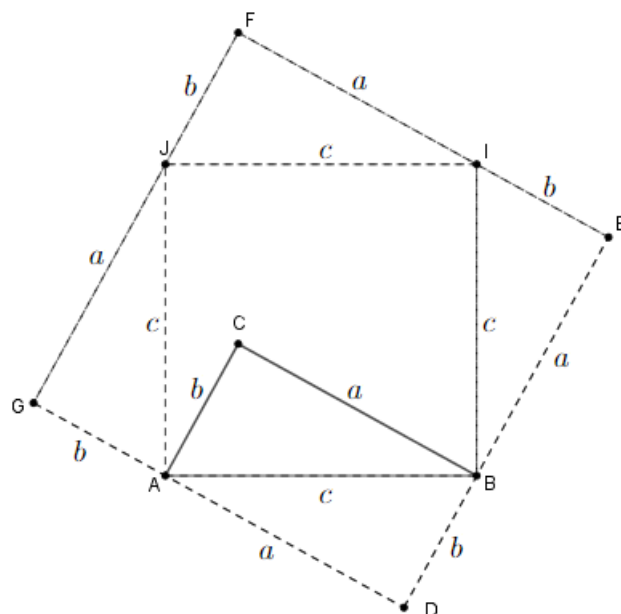
Temos em (2.7) novamente uma contradição. Assim, $a^2 + b^2 \not> c^2$ e $a^2 + b^2 \not< c^2$. Portanto, $a^2 + b^2 = c^2$.

□

Na centésima demonstração do teorema de Pitágoras, Loomis (1968) utiliza uma estratégia algébrico-geométrica que compara áreas.

Demonstração algébrico-geométrica 100. Sejam o triângulo ABC , retângulo em \widehat{C} e de lados $AB = c$, $BC = a$ e $AC = b$, o quadrado $DEFG$, de lado $a + b$, e o quadrado $ABIJ$, de lado c - Figura 2.2.

Figura 2.2 – Demonstração algébrico-geométrica número 100 de Loomis (1968)



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Na Figura 2.2, o quadrado $DEFG$ é equivalente à união do quadrado $ABIJ$ com os triângulos FIJ , EIB , DAB e GAJ . Como esses quatro triângulos são congruentes ao triângulo ABC , concluímos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(DEFG) &= \mathcal{A}(ABIJ) + 4\mathcal{A}(\triangle ABC); \\ (a + b)^2 &= c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2}; \\ a^2 + 2ab + b^2 &= c^2 + 2ab; \\ a^2 + b^2 &= c^2. \end{aligned}$$

□

Construímos no GeoGebra a visualização dinâmica da centésima demonstração de Loomis (1968) para o teorema de Pitágoras e a disponibilizamos no link

<https://www.geogebra.org/m/krkgpaqe>.

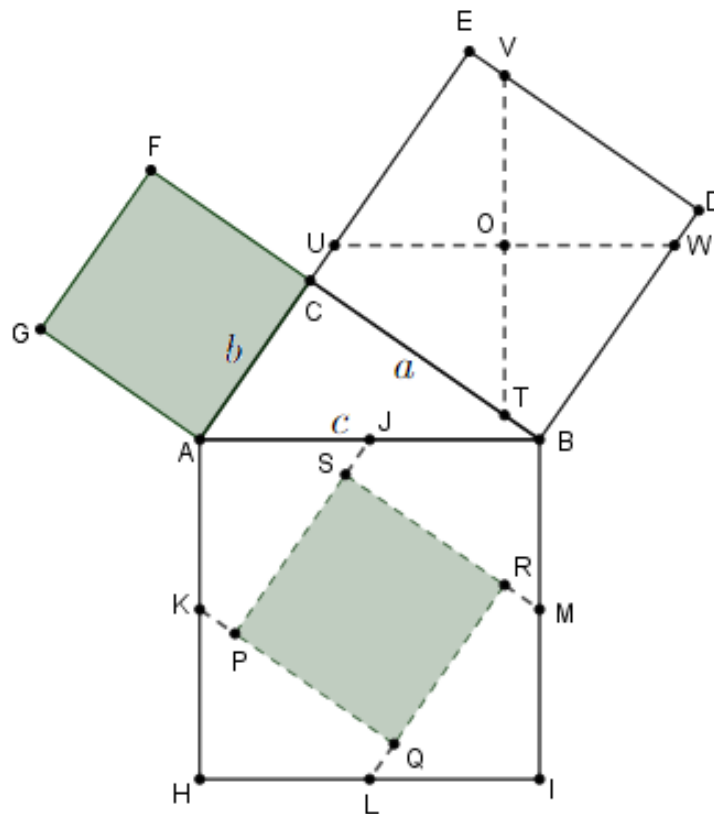
No GeoGebra App, os vértices do triângulo ABC podem ser movidos dinamicamente.

2.2 DEMONSTRAÇÕES GEOMÉTRICAS

Nas demonstrações do teorema de Pitágoras, Loomis (1968) organizou 256 demonstrações geométricas. Estas foram divididas em dez grupos, cada um deles com um método de

demonstração. As demonstrações geométricas de números 9 a 32 consistem na divisão dos quadrados construídos sobre os lados de um triângulo retângulo em partes congruentes, e na comprovação de que a união das partes dos quadrados menores forma o quadrado maior (ou que a união das partes do quadrado maior forma os quadrados menores). Nesse grupo, selecionamos a demonstração 9, que corresponde à equicomposição de Henry Perigal (1801-1898) (NÓS; FERNANDES, 2019), ilustrada na Figura 2.3.

Figura 2.3 – Demonstração geométrica número 9 de Loomis (1968): a equicomposição de Perigal



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Demonstração geométrica 9. Sejam: o triângulo ABC , retângulo em \hat{C} e de lados $AB = c$, $BC = a$ e $AC = b$; os quadrados $ACFG$, $CBDE$ e $ABIH$ construídos, respectivamente, sobre os lados AC , BC e AB do triângulo ABC ; os pontos J , K , L e M , pontos médios dos lados AB , HA , IH e BI , respectivamente, do quadrado $ABIH$; os pontos P , Q , R e S interiores ao quadrado $ABIH$, com $JP \parallel RL \parallel AC$ e $SM \parallel KQ \parallel BC$, onde $S \in JP$, $Q \in RL$, $R \in SM$ e $P \in KQ$; o ponto O , centro do quadrado $CBDE$; os pontos T , U , V e W pertencentes, respectivamente, aos lados CB , EC , DE e BD do quadrado $CBDE$, tais que $UW \parallel AB$ e $VT \perp UW$ - Figura 2.3.

Desta forma, temos que o quadrado $PQRS$ é congruente ao quadrado $ACFG$, $VT \parallel BI$, $VO \equiv OT \equiv BM$ e $AU \equiv BW \equiv JP \equiv SM \equiv RL \equiv KQ \equiv DV \equiv EU \equiv CT$. Ainda, como $UW \parallel AB$ e $AJ \equiv JB \equiv UO \equiv OW \equiv AK$, os quadriláteros $HLQK$, $IMRL$,

$BJSM, AKPJ, UCTO, TBWO, WDVO$ e $VEUO$ são congruentes. Logo, temos que:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(ABIH) &= \mathcal{A}(PQRS) + 4\mathcal{A}(AKPJ); \\ \mathcal{A}(ABIH) &= \mathcal{A}(ACFG) + 4\mathcal{A}(VEUO); \\ \mathcal{A}(ABHI) &= \mathcal{A}(ACFG) + \mathcal{A}(CBDE).\end{aligned}\tag{2.8}$$

Como os lados dos quadrados $ABHI$, $ACFG$ e $CBDE$ medem, respectivamente, c , b e a , concluímos de (2.8) que $c^2 = a^2 + b^2$.

□

A demonstração da equicomposição de Perigal (demonstração geométrica 9 de Loomis) pode ser efetuada com mais detalhes, como em Fernandes (2018) e Sette (2013).

Construímos no GeoGebra a visualização dinâmica da equicomposição de Perigal (demonstração geométrica 9 de Loomis (1968)) para o teorema de Pitágoras e a disponibilizamos no link

<https://www.geogebra.org/m/vzjfw5vk>.

No GeoGebra App, os vértices do triângulo ABC podem ser movimentados dinamicamente.

As demonstrações geométricas de números 43 a 69 de Loomis (1968) comparam, geralmente, as áreas dos quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo com as áreas de outros quadriláteros - Figura 2.4. Nesse grupo, selecionamos a demonstração de número 63.

Demonstração geométrica 63. Sejam o triângulo ABC , retângulo em \widehat{C} e de lados $AB = c$, $BC = a$ e $AC = b$, e os quadrados $ACFG$, $CBHI$ e $ABED$ construídos, respectivamente, sobre os lados AC , BC e AB do triângulo ABC . Inicialmente, prolongamos o segmento GF até os pontos K e J , o segmento HI até os pontos J e M e traçamos o segmento KL paralelamente ao segmento HI , com $LM \parallel JK$, $D \in KL$ e $E \in LM$. Em seguida, prolongamos o segmento FC até o ponto $O \in LM$, o segmento GA até o ponto $P \in LM$, o segmento CA até o ponto $N \in KL$ e o segmento HB até o ponto $S \in KL$. Finalmente, demarcamos o ponto R na interseção dos segmentos GP e HS . Assim, construímos o retângulo $JKLM$, de lados $a + 2b$ e $2a + b$ - Figura 2.4.

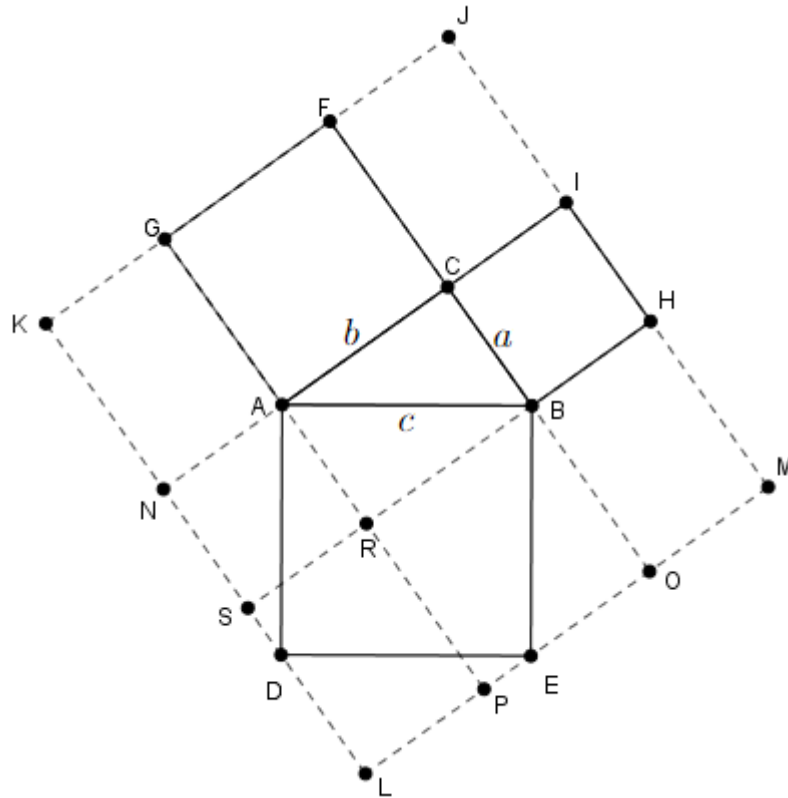
Em decorrência da construção descrita anteriormente, temos que:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(JKLM) &= \mathcal{A}(ABED) + 4\mathcal{A}(\triangle ABC) + \mathcal{A}(CIMO) + \mathcal{A}(GAIJ) + \mathcal{A}(GANK); \\ \mathcal{A}(JKLM) &= \mathcal{A}(NAPL) + \mathcal{A}(ACOP) + \mathcal{A}(CIMO) + \mathcal{A}(GAIJ) + \mathcal{A}(GANK);\end{aligned}\tag{2.9}$$

$$\mathcal{A}(NAPL) = \mathcal{A}(CIHB) + 2\mathcal{A}(ABC);\tag{2.10}$$

$$\mathcal{A}(ACOP) = \mathcal{A}(ACFG) + 2\mathcal{A}(ABC).\tag{2.11}$$

Figura 2.4 – Demonstração geométrica número 63 de Loomis (1968)



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Substituindo (2.10) e (2.11) em (2.9), obtemos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(JKLM) &= \mathcal{A}(CIHB) + 2\mathcal{A}(ABC) + \mathcal{A}(ACFG) + 2\mathcal{A}(ABC) + \\ &\quad + \mathcal{A}(CIMO) + \mathcal{A}(GAIJ) + \mathcal{A}(GANK); \\ \mathcal{A}(JKLM) &= \mathcal{A}(CIHB) + 4\mathcal{A}(ABC) + \mathcal{A}(ACFG) + \\ &\quad + \mathcal{A}(CIMO) + \mathcal{A}(GAIJ) + \mathcal{A}(GANK). \end{aligned} \quad (2.12)$$

A área do quadrado $ABED$ pode ser obtida a partir da área do quadrilátero $JKLM$, ou seja:

$$\mathcal{A}(ABED) = \mathcal{A}(JKLM) - 4\mathcal{A}(ABC) - \mathcal{A}(CIMO) - \mathcal{A}(GAIJ) - \mathcal{A}(GANK). \quad (2.13)$$

Substituindo (2.12) em (2.13), constatamos que:

$$\mathcal{A}(ABED) = \mathcal{A}(CIHB) + \mathcal{A}(ACFG). \quad (2.14)$$

Como os lados dos quadrados $ABED$, $ACFG$ e $CIHB$ medem, respectivamente, c , b e a , concluímos de (2.14) que $c^2 = a^2 + b^2$.

□

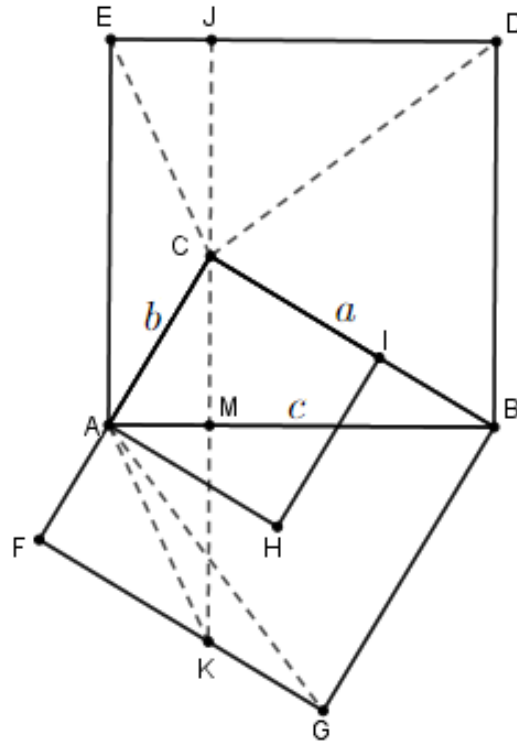
Construímos no GeoGebra a visualização dinâmica da demonstração geométrica 63 de Loomis (1968) para o teorema de Pitágoras e a disponibilizamos no link

<https://www.geogebra.org/m/qbnkx4rp>.

No GeoGebra App, os vértices do triângulo ABC podem ser movidos dinamicamente.

As demonstrações geométricas de números 71 a 157 de Loomis (1968) empregam, geralmente, o triângulo retângulo contido em pelo menos um dos quadrados construídos sobre os lados do triângulo - Figura 2.5. Nesse grupo, selecionamos a demonstração de número 153.

Figura 2.5 – Demonstração geométrica número 153 de Loomis (1968)



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Demonstração geométrica 153. Sejam: o triângulo ABC , retângulo em \widehat{C} e de lados $AB = c$, $BC = a$ e $AC = b$; os quadrados $ABDE$, $BCFG$ e $ACIH$ construídos, respectivamente, sobre os lados AB , BC e AC do triângulo ABC ; $JK \perp AB$ no ponto M , com $M \in AB$, $J \in DE$, $K \in FG$ e $C \in JK$; os segmentos AK , AG , EC e DC - Figura 2.5.

Devido à construção descrita anteriormente, temos que:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}(ABDE) &= \mathcal{A}(AMJE) + \mathcal{A}(BMJD); \\
 \mathcal{A}(ABDE) &= \mathcal{A}(ECKA) + 2\mathcal{A}(BCD); \\
 \mathcal{A}(ABDE) &= 2\mathcal{A}(CAK) + 2\mathcal{A}(AGB); \\
 \mathcal{A}(ABDE) &= \mathcal{A}(ACIH) + \mathcal{A}(BCFG).
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Como os lados dos quadrados $ABDE$, $BCFG$ e $ACIH$ medem, respectivamente, c , a e b , concluímos de (2.15) que $c^2 = a^2 + b^2$.

□

Construímos no GeoGebra a visualização dinâmica da demonstração geométrica 153 de Loomis (1968) para o teorema de Pitágoras e a disponibilizamos no link

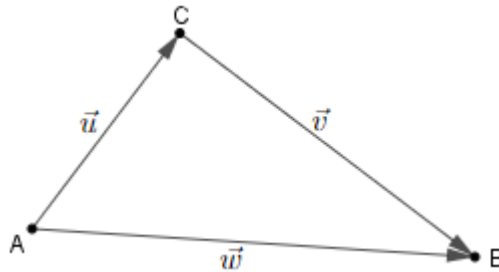
<https://www.geogebra.org/m/p7msbees>.

No GeoGebra App, os vértices do triângulo ABC podem ser movimentados dinamicamente.

2.3 DEMONSTRAÇÕES VETORIAIS

Loomis (1968) apresenta quatro demonstrações para o teorema de Pitágoras utilizando operações com vetores - Figura 2.6. Selecionamos as demonstrações vetoriais de números 1 e 4.

Figura 2.6 – Demonstração vetorial número 1 de Loomis (1968)



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Demonstração vetorial 1. Sejam $\vec{u} = \vec{AC}$, $\vec{v} = \vec{CB}$, $\vec{w} = \vec{AB}$ e $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$, com $\vec{u} \perp \vec{v}$ - Figura 2.6. Desta forma, temos que:

$$\begin{aligned}\vec{w} &= \vec{u} + \vec{v}; \\ \|\vec{w}\|^2 &= \|\vec{u} + \vec{v}\|^2; \\ \|\vec{w}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2.\end{aligned}\tag{2.16}$$

Como os vetores \vec{u} e \vec{v} são perpendiculares, temos que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ (LIPSCHUTZ, 1978). Substituindo essa igualdade em (2.16), concluímos que $\|\vec{w}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$.

□

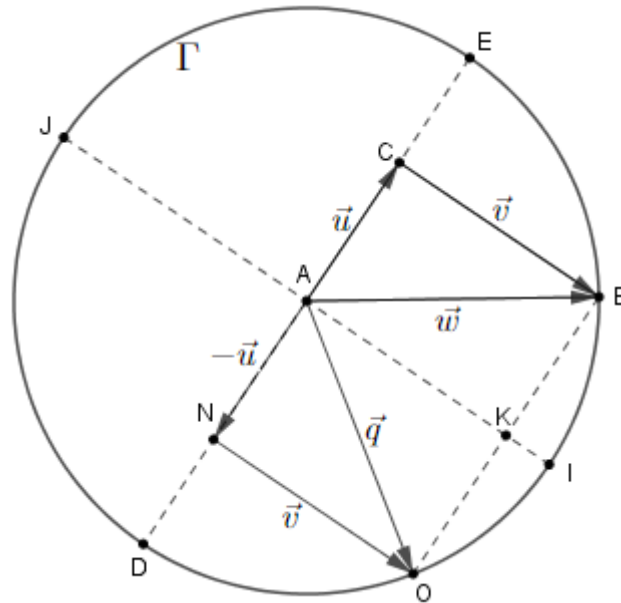
Construímos no GeoGebra a visualização dinâmica da demonstração vetorial 1 de Loomis (1968) para o teorema de Pitágoras e a disponibilizamos no link

<https://www.geogebra.org/m/ejdhqyt7>.

No GeoGebra App, os vértices do triângulo ABC podem ser movidos dinamicamente.

Demonstração vetorial 4. Sejam: $\vec{u} = \vec{AC}$; $\vec{v} = \vec{CB}$; $\vec{w} = \vec{AB}$; $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$ com $\vec{u} \perp \vec{v}$; Γ a circunferência de centro A e raio AB ; o ponto $N \in DE$, onde DE é um diâmetro de Γ , com $AC \subset DE$ e $\vec{AN} = -\vec{u}$; o ponto $O \in \Gamma$, com $\vec{NO} = \vec{v}$, $\vec{AO} = \vec{q}$ e \vec{q} simétrico a \vec{w} segundo o diâmetro IJ - Figura 2.7.

Figura 2.7 – Demonstração vetorial número 4 de Loomis (1968)



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Como $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$, $\vec{q} = -\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} \perp \vec{v}$ e AB e AO são raios de Γ , o que implica $\|\vec{w}\| = \|\vec{q}\|$, temos que:

$$\begin{aligned} \|\vec{w}\|^2 + \|\vec{q}\|^2 &= \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{-u} + \vec{v}\|^2; \\ \|\vec{w}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 &= 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2; \\ 2\|\vec{w}\|^2 &= 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2); \\ \|\vec{w}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2. \end{aligned}$$

□

Construímos no GeoGebra a visualização dinâmica da demonstração vetorial 4 de Loomis (1968) para o teorema de Pitágoras e a disponibilizamos no link

<https://www.geogebra.org/m/g93wybme>.

No GeoGebra App, os vértices do triângulo ABC podem ser movimentados dinamicamente.

2.4 O ÚLTIMO TEOREMA DE FERMAT

A equação $x^2 + y^2 = z^2$, que define o teorema de Pitágoras, tem uma infinidade de soluções inteiras (x, y, z) , denominadas trios (ou tríades) pitagóricas. As soluções inteiras ainda existem se reescrevermos a equação como $x^n + y^n = z^n$, onde $n \in \mathbb{N}$ e $n > 2$? Pierre de Fermat (1601-1665), magistrado, matemático e cientista francês, conjecturou em 1637, na margem de sua cópia de *Arithmetica* de Diofante, que não havia soluções inteiras para a equação. Esse teorema, uma generalização do teorema de Pitágoras, é denominado *último teorema de Fermat* e foi demonstrado em 1994 por Andrew John Wiles (1953-), matemático britânico.

Nascido em 20 de agosto de 1601 em Beaumont-de-Lomagne, no sudoeste da França, Pierre de Fermat recebeu formação no Monastério Franciscano de Grandselve e depois na Universidade de Toulouse. “Não há nenhum registro de que o jovem Fermat mostrasse qualquer talento especial para a matemática” (SINGH, 2010, p. 55).

Após pressões familiares, Fermat assumiu em 1631 um cargo no serviço público na Câmara de Requerimentos. Lá, intermediava os encontros entre o povo e o rei. Dessa forma, se alguém quisesse pedir algo ao rei, deveria convencer Fermat de que seria um pedido válido, e se ele concordasse, o encontro aconteceria.

Como “a praga estava devastando a Europa e aqueles que sobreviviam à doença eram promovidos para ocupar os lugares dos que tinham morrido” (SINGH, 2010, p. 56), Fermat subiu de cargo rapidamente. Devido aos riscos da política do século XVII, Fermat se concentrou em fazer o seu trabalho sem se destacar demais, para não ser perseguido. Em seu tempo vago, se dedicava ao seu novo *hobby*, a matemática.

Fermat adotou a estratégia de cumprir com suas obrigações de modo eficiente, mas sem chamar a atenção para si mesmo. Ele não tinha grandes ambições políticas e fez o melhor que podia para evitar as disputas do Parlamento. Fermat dedicava toda a energia que lhe sobrava à matemática e, quando não estava mandando sacerdotes para a fogueira, ele cuidava do seu *hobby*. Fermat era um verdadeiro estudioso amador, um homem que E. T. Bell chamou de “Príncipe dos Amadores”. Mas era tão talentoso que, quando Julian Coolidge escreveu sua *Matemática dos grandes amadores*, ele excluiu Fermat, dizendo que “fora tão grande que devia ser considerado profissional” (SINGH, 2010, p. 57).

Fermat não revelava suas demonstrações para os outros; pelo contrário, ele “tinha um toque travesso, o qual, combinado com o sigilo, levava-o a comunicar-se com outros matemáticos unicamente para zombar deles” (SINGH, 2010, p. 59). Ele escrevia cartas aos matemáticos dando enunciados de teoremas mas sem qualquer demonstração, desafiando seus leitores a provarem aquilo que propunha.

Quando entrou em contato com o livro *Aritmética* de Diofante, na versão de 1621 de Bachet, Fermat mergulhou na teoria de números.

Felizmente, para nós, a edição da *Aritmética* de Bachet tinha grandes margens em torno do texto, em cada uma de suas páginas, e às vezes Fermat apressadamente escrevia comentários e fórmulas nessas bordas. Essas notas se tornariam um valiosíssimo registro, ainda que esparso, dos mais brilhantes cálculos deste gênio (SINGH, 2010, p. 76).

Durante seus estudos do Livro II da *Aritmética* de Diofante, Fermat se deparou com o teorema de Pitágoras e os trios pitagóricos. Nesse momento, fez uma observação na margem do livro na qual “tinha apenas mudado a potência de 2 para 3, do quadrado para o cubo, mas sua nova equação aparentemente não tinha solução para qualquer número inteiro” (SINGH, 2010, p. 79). A partir disso, formula-se o último teorema de Fermat com a clássica escrita na

borda da página: “*Cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi hanc marginis exiguitas non caperet*”³ (SINGH, 2010, p. 80).

A anotação, feita em meados de 1637, foi publicada em 1670 pelo filho mais velho Clément-Samuel Fermat, cinco anos após a morte de Fermat, com o título “*Aritmética de Diofante contendo observações de P. de Fermat*” (SINGH, 2010, p. 81). A publicação contém 48 observações de Fermat e diversos teoremas que vieram a ser provados ao longo dos anos. O único que desafiou os matemáticos por mais de três séculos foi o Teorema 2.2.

Teorema 2.2 (último teorema de Fermat). *Não existe solução inteira não nula para x, y e z quando $n > 2$ na equação $x^n + y^n = z^n$.*

Leonhard Euler (1707-1783) estabeleceu uma prova para o Teorema 2.2, mas apenas para $n = 3$ e $n = 4$. Em uma das páginas da Aritmética de Diofanto, Fermat deixou uma observação da prova por contradição, conhecida como *método da descida infinita*, para $n = 4$. Ainda, Adrien-Marie Legendre (1752-1833) obteve a prova para $n = 5$ e Gabriel Lamé (1795-1870) para $n = 7$ (SINGH, 2010). O grande problema era o fato dos números naturais serem infinitos e provar o teorema para casos isolados não era o mesmo que prová-lo para todo número natural maior do que dois.

O Teorema 2.2 foi finalmente demonstrado em 1994 por Andrew Wiles, após muitos anos de estudos. Desde os 10 anos, quando teve o primeiro contato com o teorema, Wiles sentia que encontraria a demonstração. Ele tentou durante anos utilizando toda a matemática disponível em seus livros didáticos, porém não obteve sucesso em suas tentativas (SINGH, 2010).

Em seu doutoramento, Wiles foi orientado por John Henry Coates (1945-2022), que o direcionou para a pesquisa das curvas elípticas. O que Coates não sabia, é que “essa decisão se mostraria um ponto vital na carreira de Wiles e lhe daria as técnicas necessárias para uma nova abordagem do Último Teorema de Fermat” (SINGH, 2010, p. 175), pois em 1984 Gerhard Frey (1944-) rearranjou a equação do Teorema 2.2 para se tornar uma equação elíptica.

Em 1984, durante um simpósio, Frey apresentou sua equação elíptica, a qual ele mesmo chamou de “estranha”, e afirmou que se ela existisse de fato, nunca poderia ser modular⁴. Porém, isso contradizia a conjectura de Taniyama-Shimura, que diz que toda equação elíptica é uma equação modular. Como a conjectura não havia sido provada, nascia um novo desafio para os matemáticos da época.

Segundo Singh (2010), Frey afirmou que se o último teorema de Fermat estivesse errado, então sua equação elíptica existiria e não seria modular. Logo, a conjectura de Taniyama-Shimura seria falsa. Porém, o contrário também poderia ser provado: se a conjectura de Taniyama-Shimura fosse verdadeira, então toda equação elíptica seria modular e, portanto, a equação de Frey não

³ Tradução do latim: Eu descobri uma demonstração notável deste teorema mas a margem é muito pequena para contê-la.

⁴ Encontra-se uma definição de equação modular em Weisstein (2022a).

existiria e o último teorema de Fermat seria verdadeiro. Wiles percebeu então que se provasse a conjectura de Taniyama-Shimura, o último teorema de Fermat seria provado.

Utilizando teoria de grupos e o método de Kolyvagin-Flach, Wiles acreditou ter provado que a conjectura de Taniyama-Shimura era verdadeira. Assim, o último teorema de Fermat também seria verdadeiro. Wiles apresentou sua demonstração em um seminário no Instituto Isaac Newton, em Cambridge, em três palestras ocorridas nos dias 21, 22 e 23 de junho de 1993 (SINGH, 2010).

O trabalho de Wiles foi corrigido por uma banca especializada, que encontrou uma inconsistência no capítulo 3. Esse erro assombrou Wiles por meses, até que um colega sugeriu que ele confiasse em alguém qualificado para trabalharem juntos na correção. Wiles escolheu Richard Lawrence Taylor (1962-), um ex-aluno que era professor em Princeton (SINGH, 2010).

Percebendo que o método de Kolyvagin-Flach não era suficiente, Wiles e Taylor se voltaram para a álgebra de Hecke (Erich Hecke (1887-1947)) para solucionar o problema e, 14 meses após a palestra no Instituto Isaac Newton, Wiles entregou um manuscrito com a demonstração. Dessa vez, nenhuma inconsistência foi encontrada e o teorema foi enfim provado. A demonstração rendeu a Wiles os Prêmios *Wolfskehl*, no valor de 50 mil dólares, e *Wolf*, no valor de 100 mil dólares, que foram divididos com Taylor (SINGH, 2010).

Diversas teorias da matemática foram exploradas nas tentativas para se provar o último teorema de Fermat, entre elas os números complexos, os números primos, as formas de demonstração e os processos lógicos associados a elas, a teoria de jogos e probabilidade, a criptografia, a teoria de grupos e as equações elípticas e modulares (SINGH, 2010).

Construímos uma animação no GeoGebra com soluções não inteiras do último teorema de Fermat e a disponibilizamos no link

<https://www.geogebra.org/m/kbjwvrzw>.

No GeoGebra App, as superfícies podem ser observadas para n variando de 3 a 100.

3 TEOREMAS CLÁSSICOS

Apresentamos neste capítulo demonstrações formais e visualizações dinâmicas de alguns teoremas geométricos clássicos referentes a propriedades do triângulo e da circunferência. Algumas das provas formais encontram-se em Li (2005), Neto (2013), Coxeter e Greitzer (1967) e Almeida (2014).

3.1 O TEOREMA DE MENELAUS

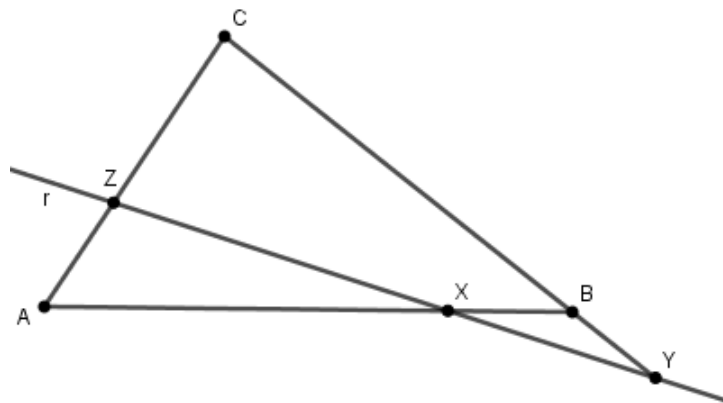
O Teorema 3.1, proposto por Menelaus de Alexandria (70-140), astrônomo e matemático grego, estabelece a colinearidade de pontos pertencentes aos lados de um triângulo ou a seus prolongamentos. O enunciado do Teorema 3.1 depende do comprimento algébrico de um segmento orientado (LAGO, 2018).

Teorema 3.1 (de Menelaus). *Se X , Y e Z são, respectivamente, pontos pertencentes às retas suporte dos lados AB , BC e CA do triângulo ABC , então X , Y e Z são colineares se, e somente se,*

$$\frac{XA}{XB} \cdot \frac{YB}{YC} \cdot \frac{ZC}{ZA} = 1.$$

Demonstração. Sejam o triângulo ABC , os pontos colineares X , Y e Z tais que Y pertence ao prolongamento de BC , $X \in AB$ e $Z \in AC$, e a reta r que passa pelos pontos X , Y e Z , como ilustra a Figura 3.1.

Figura 3.1 – Pontos colineares pertencentes aos lados do triângulo ABC ou a seus prolongamentos

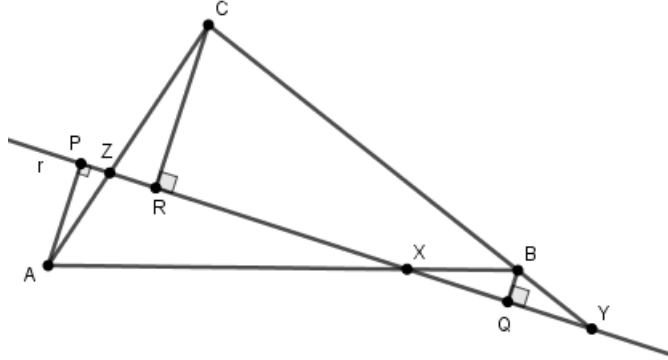


Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Traçando as perpendiculares à reta r que passam pelos vértices do triângulo ABC , onde P é o pé da perpendicular em A , Q é o pé da perpendicular em B e R é o pé da perpendicular

em C - Figura 3.2, observamos que os triângulos APZ e CZR , CRY e BQY e APX e BQX são semelhantes pelo caso AA (ângulo-ângulo).

Figura 3.2 – Perpendiculares à reta r baixadas dos vértices do triângulo ABC



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Assim, estabelecendo as razões de semelhança nos pares de triângulos semelhantes, temos que:

$$\frac{CR}{AP} = \frac{ZC}{ZA}; \quad (3.1)$$

$$\frac{BQ}{CR} = \frac{YB}{YC}; \quad (3.2)$$

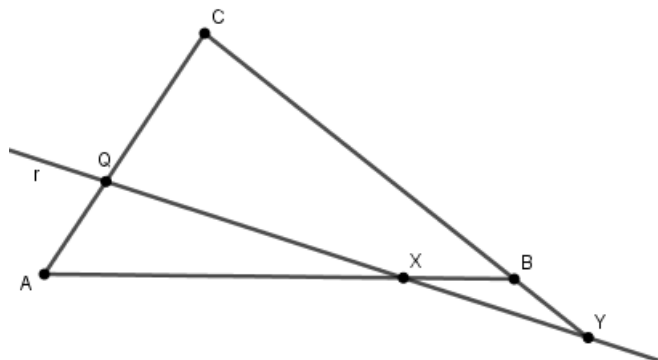
$$\frac{AP}{BQ} = \frac{XA}{XB}. \quad (3.3)$$

Multiplicando as igualdades (3.1), (3.2) e (3.3), concluímos que:

$$\frac{ZC}{ZA} \cdot \frac{YB}{YC} \cdot \frac{XA}{XB} = \frac{CR}{AP} \cdot \frac{BQ}{CR} \cdot \frac{AP}{BQ} = 1. \quad (3.4)$$

Reciprocamente, sejam X , Y e Z pontos situados sobre as retas suportes dos lados AB , BC e AC , respectivamente, todos distintos dos vértices do triângulo ABC , e Q o ponto de interseção das retas \overleftrightarrow{XY} e \overleftrightarrow{AC} , como na Figura 3.3.

Figura 3.3 – Interseção das retas que passam pelos pontos X e Y e A e C



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Como X , Y e Q são colineares, temos que:

$$\frac{BY}{YC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AX}{XB} = 1. \quad (3.5)$$

Comparando (3.4) e (3.5), concluímos que $\frac{ZC}{ZA} = \frac{CQ}{QA}$. Desta igualdade decorre que $Q \equiv Z$. Logo, X , Y e Z são colineares.

□

Construímos a visualização dinâmica do teorema de Menelaus no GeoGebra e a disponibilizamos no link

<https://www.geogebra.org/m/jzmt7xyh>.

No GeoGebra App, os vértices do triângulo ABC e os pontos X , Y e Z podem ser movidos dinamicamente.

3.2 O TEOREMA DE CEVA

O Teorema 3.2, proposto por Giovanni Ceva (1647-1734), matemático italiano, estabelece a concorrência das retas que passam pelos vértices e por pontos dos lados (ou seus prolongamentos) opostos a cada um dos vértices de um triângulo. O teorema de ceva possibilita demonstrar que as medianas, as bissetrizes internas e as retas suportes das alturas de um triângulo são concorrentes (NETO, 2013). O enunciado do Teorema 3.2 também depende do comprimento algébrico de um segmento orientado (LAGO, 2018).

Teorema 3.2 (de Ceva). *Se X , Y e Z são, respectivamente, pontos pertencentes às retas suporte dos lados AB , BC e CA do triângulo ABC , então as retas \overleftrightarrow{AY} , \overleftrightarrow{BZ} e \overleftrightarrow{CX} são concorrentes ou paralelas se, e somente se,*

$$\frac{YB}{YC} \cdot \frac{ZC}{ZA} \cdot \frac{XA}{XB} = -1.$$

Demonstração. Inicialmente, provemos que a relação é válida se as retas \overleftrightarrow{AY} , \overleftrightarrow{BZ} e \overleftrightarrow{CX} são concorrentes ou paralelas.

Suponhamos que \overleftrightarrow{AY} , \overleftrightarrow{BZ} e \overleftrightarrow{CX} são paralelas - Figura 3.4.

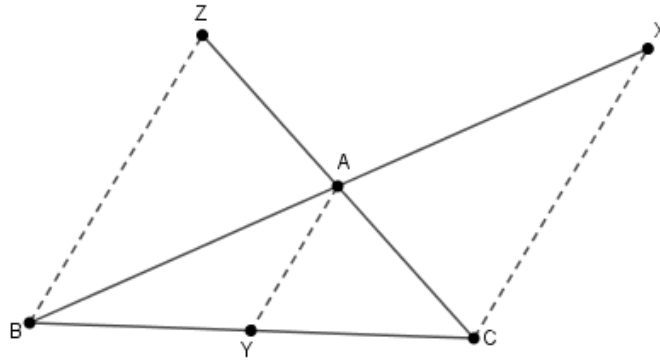
Pelo teorema de Tales¹, temos que:

$$\frac{ZC}{ZA} = \frac{BC}{BY}; \quad (3.6)$$

$$\frac{XA}{XB} = \frac{CY}{CB}. \quad (3.7)$$

¹ Tales de Mileto (624 A.C.-547 A.C.), matemático grego. Teorema de Tales: um feixe de retas paralelas determina sobre duas retas transversais segmentos proporcionais.

Figura 3.4 – Triângulo ABC e os pontos X, Y e Z , com $BZ \parallel AY \parallel CX$



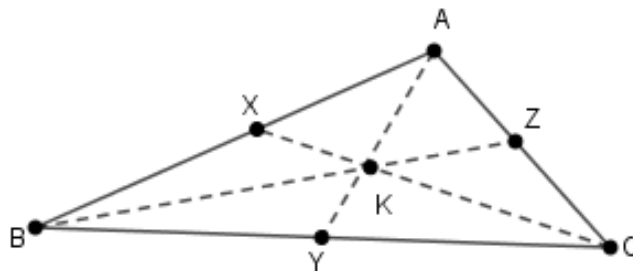
Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Multiplicando membro a membro (3.6) e (3.7), obtemos que:

$$\frac{ZC}{ZA} \cdot \frac{XA}{XB} = -\frac{CY}{BY} \Rightarrow \frac{YB}{YC} \cdot \frac{ZC}{ZA} \cdot \frac{XA}{XB} = -1.$$

Suponhamos agora que \overleftrightarrow{AY} , \overleftrightarrow{BZ} e \overleftrightarrow{CX} são concorrentes em um ponto K - Figura 3.5.

Figura 3.5 – Triângulo ABC e os pontos X, Y, Z e K , com $K = AY \cap BZ \cap CX$



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Aplicando o Teorema 3.1 (de Menelaus) aos triângulos ACY e ABY , temos, respectivamente, que:

$$\frac{BY}{BC} \cdot \frac{ZC}{ZA} \cdot \frac{KA}{KY} = 1, \quad (3.8)$$

$$\frac{CB}{CY} \cdot \frac{KY}{KA} \cdot \frac{XA}{XB} = 1. \quad (3.9)$$

Multiplicando membro a membro (3.8) e (3.9), obtemos que:

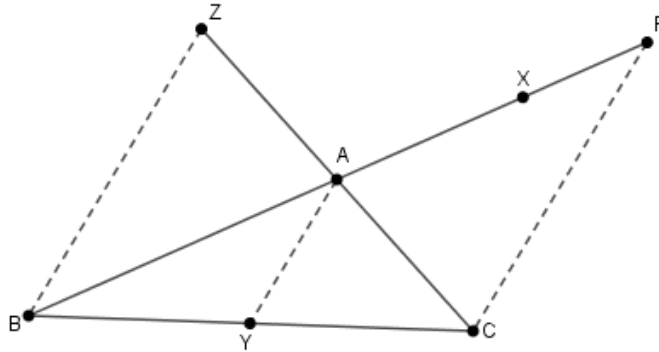
$$-\frac{BY}{CY} \cdot \frac{ZC}{ZA} \cdot \frac{XA}{XB} = 1 \Rightarrow \frac{YB}{YC} \cdot \frac{ZC}{ZA} \cdot \frac{XA}{XB} = -1.$$

Reciprocamente, suponhamos que X, Y e Z satisfazem a equação

$$\frac{YB}{YC} \cdot \frac{ZC}{ZA} \cdot \frac{XA}{XB} = -1. \quad (3.10)$$

Consideremos que \overleftrightarrow{AY} e \overleftrightarrow{BZ} são paralelas. Tracemos uma paralela a AY por C que intersecta AB em P , com $X \in AP$ - Figura 3.6.

Figura 3.6 – Triângulo ABC e os pontos X, Y, Z e P , com $AY \parallel BZ \parallel CP$



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Como X, Y e P verificam

$$\frac{YB}{YC} \cdot \frac{ZC}{ZA} \cdot \frac{PA}{PB} = -1, \quad (3.11)$$

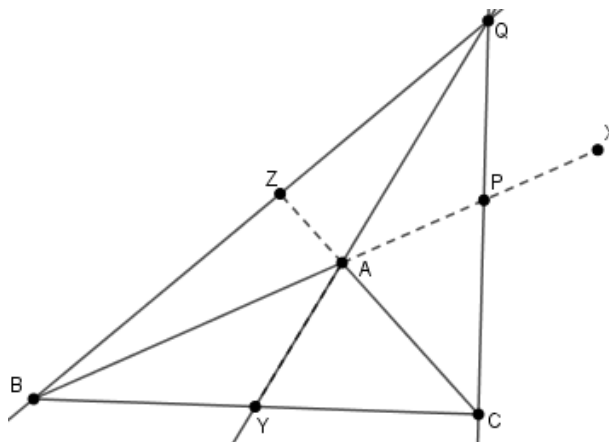
temos, de (3.10) e (3.11), que:

$$\frac{PA}{PB} = \frac{XA}{XB}. \quad (3.12)$$

Sendo P, X, A e B pontos colineares, decorre de (3.12) que $X \equiv P$. Logo, $CX \parallel AY \parallel BZ$.

Por fim, suponhamos que \overleftrightarrow{AY} e \overleftrightarrow{BZ} são concorrentes em um ponto Q - Figura 3.7.

Figura 3.7 – Triângulo ABC e os pontos X, Y, Z, P e Q , com as retas definidas por A e Y e B e Z concorrentes em Q



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Seja $P = \overleftrightarrow{CQ} \cap \overleftrightarrow{AB}$. Logo, pelo Teorema 3.1 (de Menelaus), temos que:

$$\frac{YB}{YC} \cdot \frac{ZC}{ZA} \cdot \frac{PA}{PB} = -1. \quad (3.13)$$

Por hipótese, os pontos X , Y e Z satisfazem (3.10). Dessa forma, de (3.10) e (3.13), decorre que:

$$\frac{PA}{PB} = \frac{XA}{XB}. \quad (3.14)$$

Pelo teorema de Tales, podemos deduzir de (3.14) que $P \equiv X$. Assim, como $CP \equiv CX$ e $Q \in \overleftrightarrow{CP}$, temos que $Q \in \overleftrightarrow{CX}$. Portanto, as retas \overleftrightarrow{AY} , \overleftrightarrow{BZ} e \overleftrightarrow{CX} são concorrentes em Q .

□

Construímos a visualização dinâmica do teorema de Ceva no GeoGebra e a disponibilizamos no link

<https://www.geogebra.org/m/gjunrjux>.

No GeoGebra App, os vértices do triângulo ABC e os pontos X , Y e Z podem ser movidos dinamicamente.

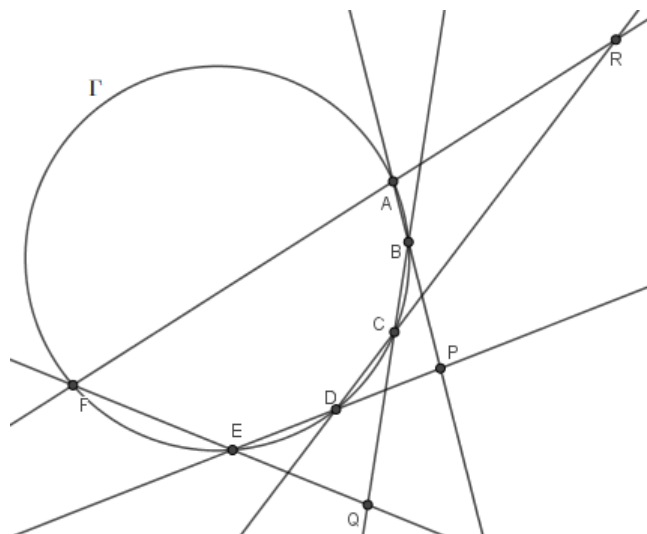
3.3 O TEOREMA DE PASCAL

O Teorema 3.3 foi proposto pelo matemático, físico e inventor francês Blaise Pascal (1623-1662). Esse teorema estabelece a colinearidade de pontos a partir de pontos pertencentes a uma circunferência.

Teorema 3.3 (de Pascal). *Se A, B, C, D, E e F são pontos de uma circunferência Γ , não necessariamente em ordem cíclica, com $P = \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{DE}$, $Q = \overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{EF}$ e $R = \overleftrightarrow{CD} \cap \overleftrightarrow{FA}$, então P, Q e R são colineares.*

Demonstração. Sejam A, B, C, D, E e F pontos na circunferência Γ e os pontos $P = \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{DE}$, $Q = \overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{EF}$ e $R = \overleftrightarrow{CD} \cap \overleftrightarrow{FA}$, como na Figura 3.8.

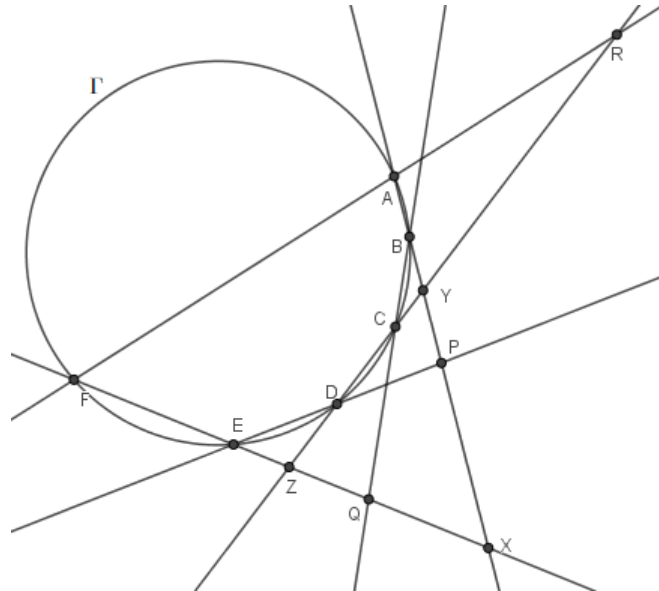
Figura 3.8 – Hipóteses do teorema de Pascal



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Consideremos os pontos $X = \overleftrightarrow{EF} \cap \overleftrightarrow{AB}$, $Y = \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD}$ e $Z = \overleftrightarrow{CD} \cap \overleftrightarrow{EF}$, como ilustrado na Figura 3.9.

Figura 3.9 – Pontos X , Y e Z e a circunferência Γ

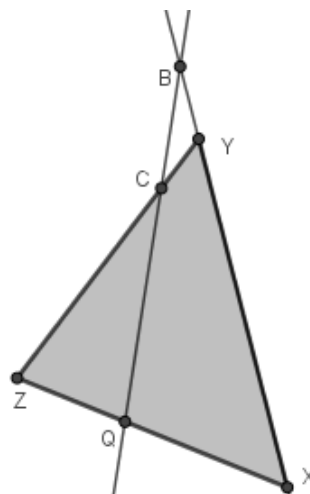


Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Na Figura 3.9, destacamos o triângulo XYZ e os pontos Q , B e C - Figura 3.10. Aplicando o Teorema 3.1 (de Menelaus) a esse triângulo, obtemos que:

$$\frac{QZ}{QX} \cdot \frac{CY}{CZ} \cdot \frac{BX}{BY} = 1. \quad (3.15)$$

Figura 3.10 – Triângulo XYZ e os pontos Q , B e C

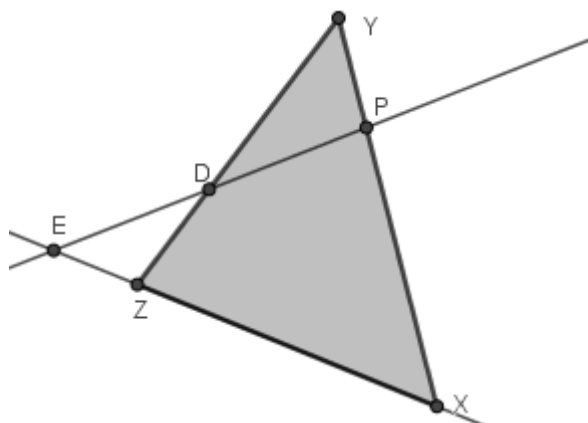


Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Destacando agora na Figura 3.9 o triângulo XYZ e os pontos P , D e E - Figura 3.11, e aplicando o Teorema 3.1 (de Menelaus) a esse triângulo, temos que:

$$\frac{PX}{PY} \cdot \frac{DY}{DZ} \cdot \frac{EZ}{EX} = 1. \quad (3.16)$$

Figura 3.11 – Triângulo XYZ e os pontos P , D e E

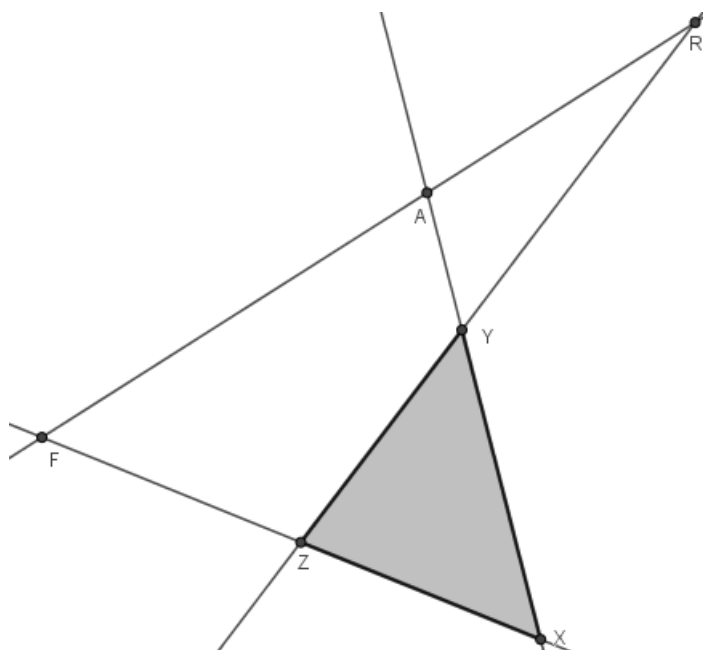


Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Ainda, destacamos na Figura 3.9 o triângulo XYZ e os pontos R , F e A - Figura 3.12. Aplicando o Teorema 3.1 (de Menelaus) a esse triângulo, obtemos que:

$$\frac{AX}{AY} \cdot \frac{RY}{RZ} \cdot \frac{FZ}{FX} = 1. \quad (3.17)$$

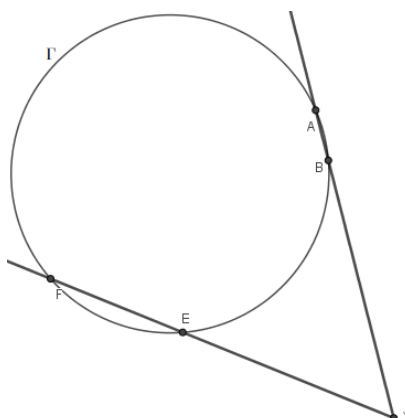
Figura 3.12 – Triângulo XYZ e os pontos R , F e A



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Por fim, aplicando a potência de ponto (DOLCE; POMPEO, 1993; HELLMEISTER, 2013; NETO, 2013) na circunferência Γ com os pontos exteriores X , Y e Z - Figuras 3.13 a 3.15, temos, respectivamente, que:

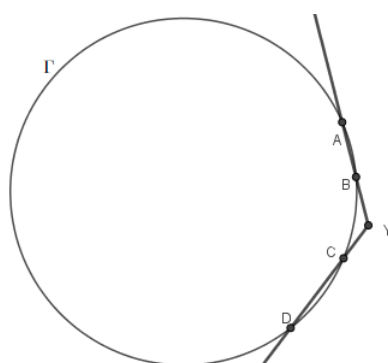
Figura 3.13 – Potência do ponto X em relação à circunferência Γ



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

$$AX \cdot BX = EX \cdot FX; \quad (3.18)$$

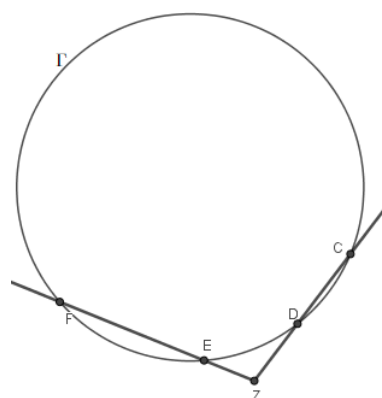
Figura 3.14 – Potência do ponto Y em relação à circunferência Γ



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

$$AY \cdot BY = DY \cdot CY; \quad (3.19)$$

Figura 3.15 – Potência do ponto Z em relação à circunferência Γ



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

$$EZ \cdot FZ = CZ \cdot DZ. \quad (3.20)$$

Multiplicando as igualdades (3.15), (3.16) e (3.17), obtemos que:

$$\frac{QZ}{QX} \cdot \frac{CY}{CZ} \cdot \frac{BX}{BY} \cdot \frac{PX}{PY} \cdot \frac{DY}{DZ} \cdot \frac{EZ}{EX} \cdot \frac{AX}{AY} \cdot \frac{RY}{RZ} \cdot \frac{FZ}{FX} = 1.1.1 = 1. \quad (3.21)$$

Rearranjando a igualdade (3.21), temos que:

$$\frac{QZ}{QX} \cdot \frac{CY}{CZ} \cdot \frac{PX}{PY} \cdot \frac{DY}{DZ} \cdot \frac{AX}{AY} \cdot \frac{BX}{BY} \cdot \frac{RY}{RZ} \cdot \frac{EZ}{EX} \cdot \frac{FZ}{FX} = 1. \quad (3.22)$$

Substituindo (3.18), (3.19) e (3.20) em (3.22), concluímos que:

$$\begin{aligned} \frac{QZ}{QX} \cdot \frac{CY}{CZ} \cdot \frac{PX}{PY} \cdot \frac{DY}{DZ} \cdot \frac{EX}{DY} \cdot \frac{FX}{CY} \cdot \frac{RY}{RZ} \cdot \frac{CZ}{EX} \cdot \frac{DZ}{FX} &= 1; \\ \frac{QZ}{QX} \cdot \frac{PX}{PY} \cdot \frac{RY}{RZ} &= 1. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Dessa forma, aplicando o Teorema 3.1 (de Menelaus) no triângulo XYZ - Figura 3.9, obtemos (3.23). Portanto, P , Q e R são colineares. □

Construímos a visualização dinâmica do teorema de Pascal no GeoGebra e a disponibilizamos no link

<https://www.geogebra.org/m/jnhwm2uz>.

No GeoGebra App, os pontos A , B , C , D , E e F pertencentes à circunferência Γ podem ser movimentados dinamicamente.

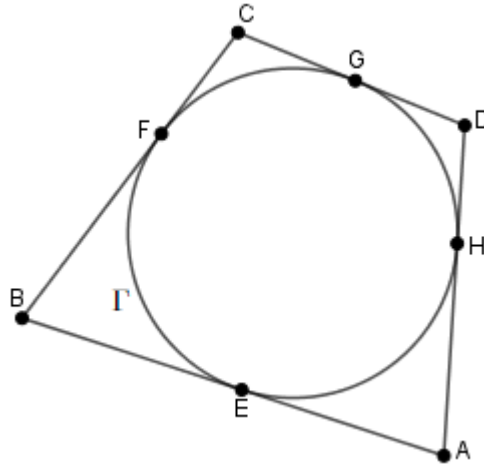
3.4 O TEOREMA DE NEWTON

O Teorema 3.4, proposto por Isaac Newton (1643-1727), matemático e físico inglês, estabelece a concorrência de retas secantes a uma circunferência inscrita em um quadrilátero. Esse teorema pode ser derivado do teorema de Anne (Pierre-Léon Anne (1806-1850)), matemático francês, o qual descreve a equivalência de áreas em um quadrilátero convexo (BOGOMOLNY, 2018a; BOGOMOLNY, 2018b). Neste trabalho usamos o Teorema 3.3 (de Pascal) para provar o Teorema 3.4.

Teorema 3.4 (de Newton). *Se Γ é uma circunferência inscrita em um quadrilátero $ABCD$, de lados AB , BC , CD e DA que tangenciam a circunferência nos pontos E , F , G e H , respectivamente, então as retas \overleftrightarrow{AC} , \overleftrightarrow{EG} , \overleftrightarrow{BD} e \overleftrightarrow{FH} são concorrentes.*

Demonstração. Seja Γ uma circunferência que tangencia os lados AB , BC , CD e DA de um quadrilátero $ABCD$ nos pontos E , F , G e H , respectivamente, como na Figura 3.16.

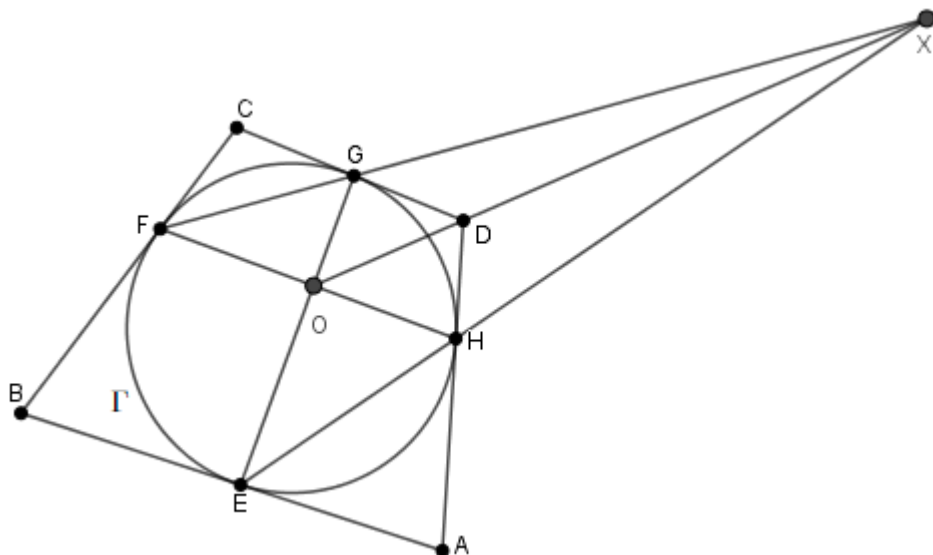
Figura 3.16 – Circunferência Γ inscrita no quadrilátero $ABCD$



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Consideremos os pontos $O = \overleftrightarrow{EG} \cap \overleftrightarrow{FH}$ e $X = \overleftrightarrow{EH} \cap \overleftrightarrow{FG}$. Como o ponto D é a interseção das retas tangentes à circunferência Γ nos pontos G e H , ao aplicarmos o Teorema 3.3 (de Pascal) nos pontos E , G , G , F , H e H , concluímos que os pontos O , D e X são colineares - Figura 3.17.

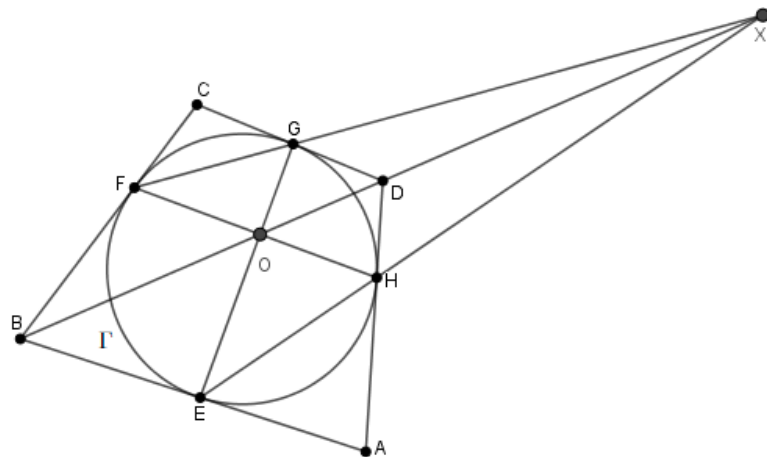
Figura 3.17 – Circunferência Γ inscrita no quadrilátero $ABCD$ e os pontos colineares O , D e X



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Aplicando o Teorema 3.3 (de Pascal) nos pontos E , E , H , F , F e G , constatamos que os pontos B , O e X são colineares - Figura 3.18.

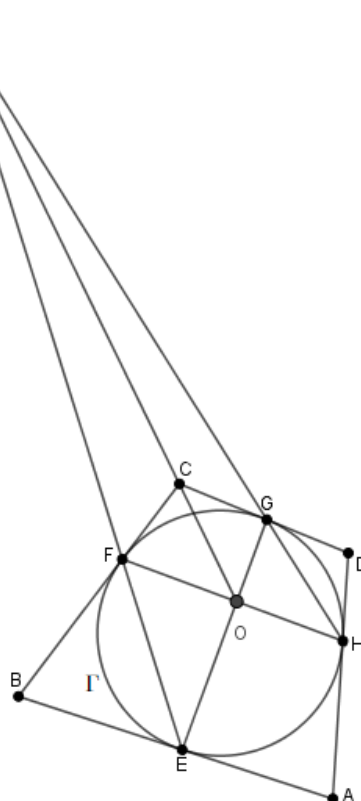
Figura 3.18 – Circunferência Γ inscrita no quadrilátero $ABCD$ e os pontos colineares B, O e X



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Assim, como EG e FH são concorrentes no ponto O e os pontos B, O, D e X são colineares, temos que as retas \overleftrightarrow{BD} , \overleftrightarrow{EG} e \overleftrightarrow{FH} são concorrentes no ponto O . Falta provarmos que a reta \overleftrightarrow{AC} também passa por esse ponto. Para tanto, consideremos $Y = \overleftrightarrow{EF} \cap \overleftrightarrow{HG}$. Como C é o ponto de interseção das retas tangentes à circunferência Γ nos pontos F e G , ao aplicarmos o Teorema 3.3 (de Pascal) nos pontos F, F, E, G, G e H , verificamos que os pontos Y, C e O são colineares - Figura 3.19.

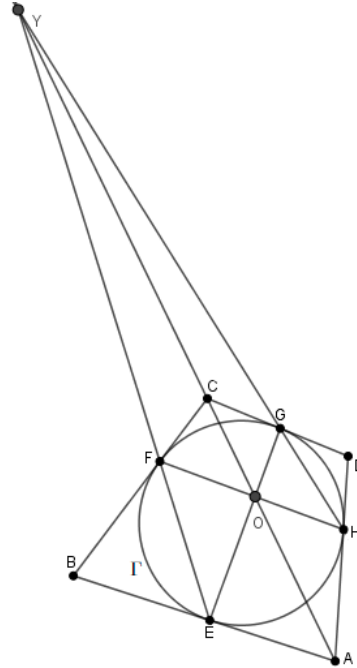
Figura 3.19 – Circunferência Γ inscrita no quadrilátero $ABCD$ e os pontos colineares Y, C e O



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Aplicando agora o Teorema 3.3 (de Pascal) nos pontos E, F, G, H e A, O e Y , concluímos que os pontos A, O e Y são colineares - Figura 3.20.

Figura 3.20 – Circunferência Γ inscrita no quadrilátero $ABCD$ e os pontos colineares A, O e Y



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Assim, os pontos A, O, C e Y são colineares. Como EG e FH são concorrentes no ponto O e os pontos B, O, D e X também são colineares, então as retas \overleftrightarrow{AC} , \overleftrightarrow{EG} , \overleftrightarrow{BD} e \overleftrightarrow{FH} são concorrentes no ponto O .

□

Construímos a visualização dinâmica do teorema de Newton no GeoGebra e a disponibilizamos no link

<https://www.geogebra.org/m/zusnaf9m>.

No GeoGebra App, os pontos E, F, G e H pertencentes à circunferência Γ e ao quadrilátero $ABCD$ podem ser movidos dinamicamente.

3.5 O TEOREMA DE DESARGUES

O Teorema 3.5 foi proposto por Girard Desargues (1591-1661), matemático, arquiteto e engenheiro militar francês, precursor da geometria projetiva. Esse teorema estabelece a colinearidade de pontos na interseção das retas suportes dos lados de dois triângulos a partir da concorrência das retas que passam pelos vértices dos dois triângulos.

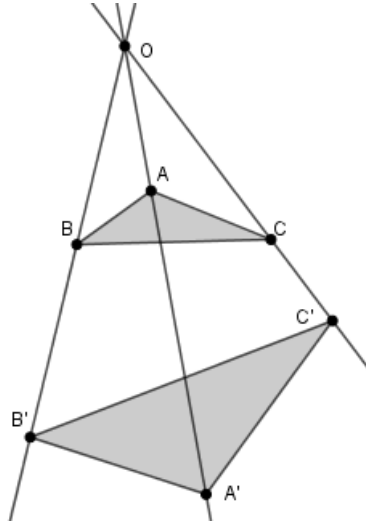
Teorema 3.5 (de Desargues). *Se nos triângulos ABC e $A'B'C'$ as retas $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ e $\overleftrightarrow{CC'}$ são concorrentes no ponto O^2 , então os pontos P, Q e R , onde $P = \overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{B'C'}$, $Q = \overleftrightarrow{CA} \cap \overleftrightarrow{C'A'}$ e*

² Em geometria projetiva, o ponto de concorrência O é denominado centro de perspectiva.

$R = \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'}$, são colineares³.

Demonstração. Sejam os triângulos ABC e $A'B'C'$, nos quais as retas $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ e $\overleftrightarrow{CC'}$ concorrem no ponto O - Figura 3.21.

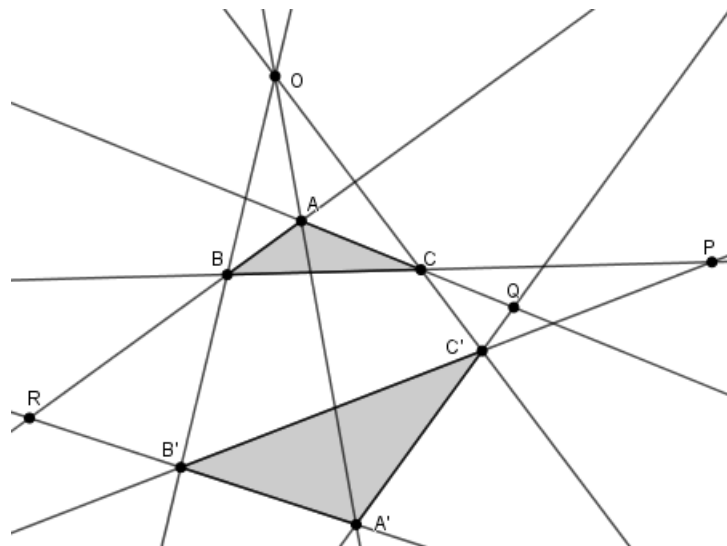
Figura 3.21 – Triângulos ABC e $A'B'C'$ e o ponto de concorrência O



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Provaremos que os pontos $P = \overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{B'C'}$, $Q = \overleftrightarrow{CA} \cap \overleftrightarrow{C'A'}$ e $R = \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'}$ são colineares - Figura 3.22, empregando o Teorema 3.1 (de Menelaus).

Figura 3.22 – Triângulos ABC e $A'B'C'$ e os pontos de concorrência O , P , Q e R



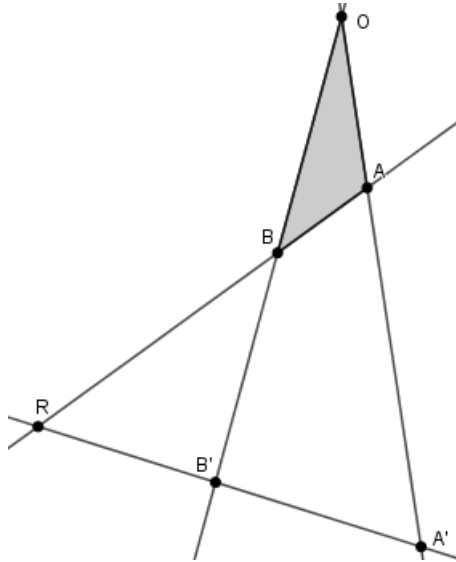
Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

³ Em geometria projetiva, a reta que passa pelos pontos P , Q e R é o eixo de perspectiva

Aplicando inicialmente o Teorema 3.1 (de Menelaus) no triângulo OAB e nos pontos A' , B' e R - Figura 3.23, temos que:

$$\frac{A'O}{A'A} \cdot \frac{RA}{RB} \cdot \frac{B'B}{B'O} = 1. \quad (3.24)$$

Figura 3.23 – Triângulo OAB e os pontos A' , B' e R

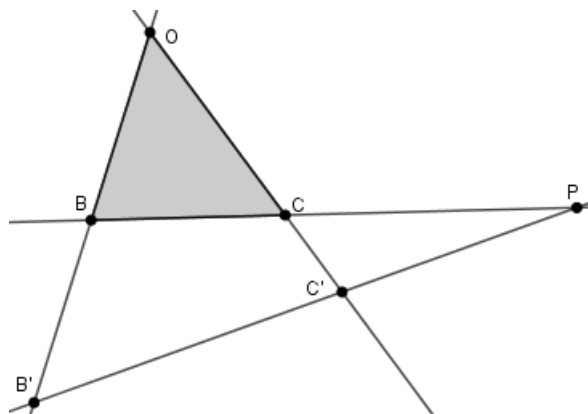


Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Usando o Teorema 3.1 (de Menelaus) no triângulo OCB e nos pontos C' , B' e P - Figura 3.24, obtemos que:

$$\frac{B'O}{B'B} \cdot \frac{PB}{PC} \cdot \frac{C'C}{C'O} = 1. \quad (3.25)$$

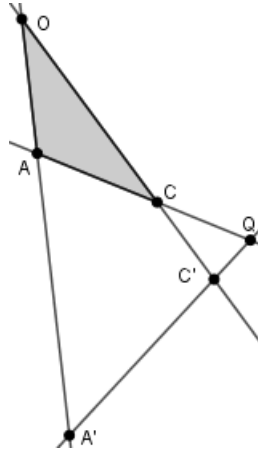
Figura 3.24 – Triângulo OCB e os pontos C' , B' e P



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Finalmente, aplicando o Teorema 3.1 (de Menelaus) no triângulo OAC e nos pontos A' , C' e Q - Figura 3.25, constatamos que:

$$\frac{A'A}{A'O} \cdot \frac{C'O}{C'C} \cdot \frac{QC}{QA} = 1. \quad (3.26)$$

Figura 3.25 – Triângulo OAC e os pontos A' , C' e Q 

Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Multiplicando as igualdades (3.24), (3.25) e (3.26), verificamos que:

$$\frac{A'O}{A'A} \cdot \frac{RA}{RB} \cdot \frac{B'B}{B'O} \cdot \frac{B'O}{B'B} \cdot \frac{PB}{PC} \cdot \frac{C'C}{C'O} \cdot \frac{A'A}{A'O} \cdot \frac{C'O}{C'C} \cdot \frac{QC}{QA} = 1.1.1 = 1;$$

$$\frac{RA}{RB} \cdot \frac{PB}{PC} \cdot \frac{QC}{QA} = 1. \quad (3.27)$$

Logo, concluímos de (3.27), pela recíproca do Teorema 3.1 (de Menelaus), que os pontos P , Q e R são colineares.

□

Construímos a visualização dinâmica do teorema de Desargues no GeoGebra e a disponibilizamos no link

<https://www.geogebra.org/m/bbprqctc>.

No GeoGebra App, os pontos A , A' , B , B' , C , C' e O podem ser movimentados dinamicamente.

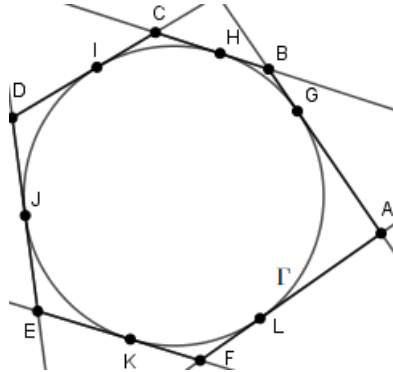
3.6 O TEOREMA DE BRIANCHON

O Teorema 3.6, proposto por Charles Julien Brianchon (1783-1864), matemático e químico francês, estabelece que as retas que passam pelos vértices opostos de um hexágono convexo, circunscrito a uma circunferência, são concorrentes. Na geometria projetiva, o teorema de Brianchon é o dual do teorema de Pascal, tendo sido generalizado em 1847 por August Ferdinand Möbius (1790-1868), matemático e astrônomo alemão (WEISSTEIN, 2022b).

Teorema 3.6 (de Brianchon). *Se $ABCDEF$ é um hexágono convexo circunscrito à uma circunferência Γ e as retas \overleftrightarrow{AB} , \overleftrightarrow{BC} , \overleftrightarrow{CD} , \overleftrightarrow{DE} , \overleftrightarrow{EF} e \overleftrightarrow{FA} são, respectivamente, tangentes à circunferência nos pontos G , H , I , J , K e L (não necessariamente em ordem cíclica), então as retas \overleftrightarrow{AD} , \overleftrightarrow{BE} e \overleftrightarrow{CF} que passam pelos vértices opostos de $ABCDEF$ são concorrentes.*

Demonstração. Sejam o hexágono convexo $ABCDEF$, circunscrito à circunferência Γ , e as retas \overleftrightarrow{AB} , \overleftrightarrow{BC} , \overleftrightarrow{CD} , \overleftrightarrow{DE} , \overleftrightarrow{EF} e \overleftrightarrow{FA} , tangentes a Γ nos pontos G, H, I, J, K e L , respectivamente - Figura 3.26.

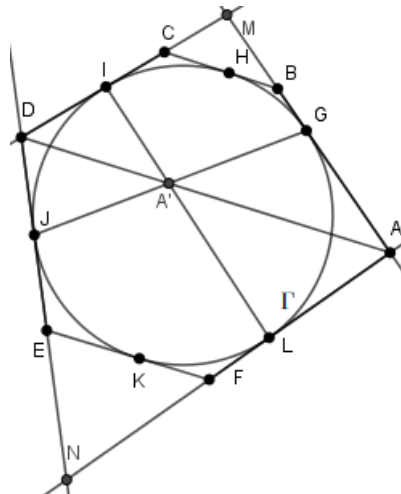
Figura 3.26 – Hexágono convexo $ABCDEF$ circunscrito à circunferência Γ



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Consideremos $M = \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD}$ e $N = \overleftrightarrow{DE} \cap \overleftrightarrow{FA}$. Aplicando o Teorema 3.4 (de Newton) no quadrilátero $AMDN$, temos que as retas \overleftrightarrow{AD} , \overleftrightarrow{IL} e \overleftrightarrow{GJ} são concorrentes no ponto A' - Figura 3.27.

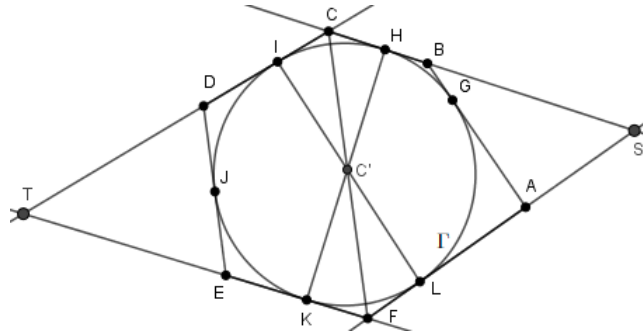
Figura 3.27 – Circunferência Γ , o quadrilátero $AMDN$ e o ponto A'



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Sejam agora os pontos $S = \overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{FA}$ e $T = \overleftrightarrow{CD} \cap \overleftrightarrow{EF}$. Aplicando o Teorema 3.4 (de Newton) no quadrilátero $CSFT$, verificamos que as retas \overleftrightarrow{CF} , \overleftrightarrow{HK} e \overleftrightarrow{IL} são concorrentes no ponto C' - Figura 3.28.

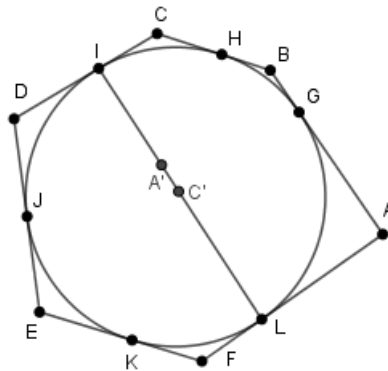
Figura 3.28 – Circunferência Γ , o quadrilátero $CSFT$ e o ponto C'



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Desta forma, temos que as retas \overleftrightarrow{IL} e $\overleftrightarrow{A'C'}$ são coincidentes - Figura 3.29.

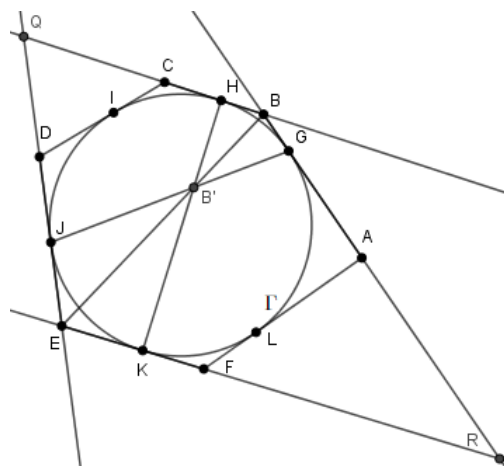
Figura 3.29 – Retas coincidentes que passam pelos pontos I e L e A' e C'



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Ainda, sejam os pontos $Q = \overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{DE}$ e $R = \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{EF}$. Aplicando o Teorema 3.4 (de Newton) no quadrilátero $ERBQ$, constatamos que as retas \overleftrightarrow{BE} , \overleftrightarrow{HK} e \overleftrightarrow{GJ} são concorrentes no ponto B' - Figura 3.30.

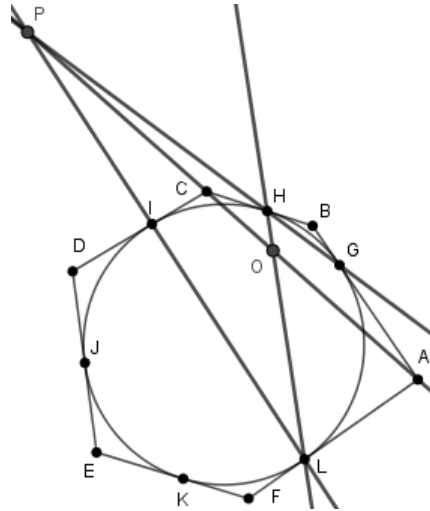
Figura 3.30 – Circunferência Γ , o quadrilátero $ERBQ$ e o ponto B'



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Consideremos agora os pontos $O = \overleftrightarrow{GI} \cap \overleftrightarrow{LH}$ e $P = \overleftrightarrow{IL} \cap \overleftrightarrow{GH}$. Aplicando o Teorema 3.3 (de Pascal) nos pontos G, G, I, L, L e H , temos que os pontos A, O e P são colineares; aplicando esse mesmo teorema nos pontos H, H, L, I, I e G , verificamos que os pontos C, O e P são colineares. Portanto, os pontos A, C e P são colineares - Figura 3.31.

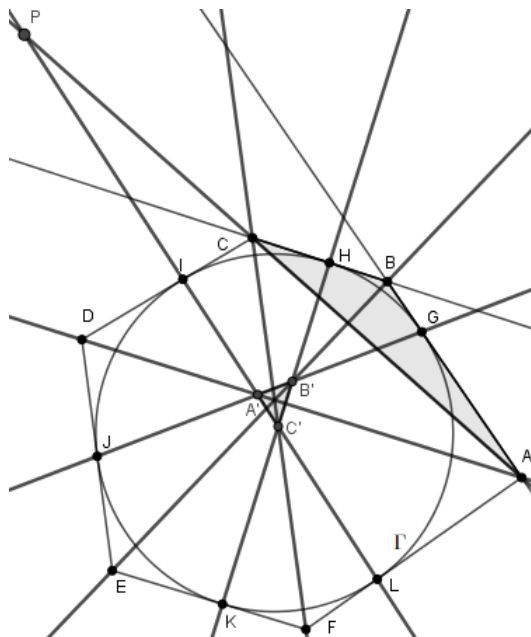
Figura 3.31 – Circunferência Γ e os pontos A, O, C e P



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Para finalizar, temos que $G = \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'}$, $H = \overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{B'C'}$ e $P = \overleftrightarrow{CA} \cap \overleftrightarrow{IL} = \overleftrightarrow{CA} \cap \overleftrightarrow{C'A'}$. Logo, aplicando o Teorema 3.5 (de Desargues) nos triângulos ABC e $A'B'C'$, concluímos que as retas $\overleftrightarrow{AA'} = \overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{BB'} = \overleftrightarrow{BE}$ e $\overleftrightarrow{CC'} = \overleftrightarrow{CF}$ são concorrentes - Figura 3.32.

Figura 3.32 – Tese do teorema de Brianchon



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Construímos a visualização dinâmica do teorema de Brianchon no GeoGebra e a disponibilizamos no link

<https://www.geogebra.org/m/bbprqctc>.

No GeoGebra App, os pontos G , H , I , J , K e L podem ser movidos dinamicamente.

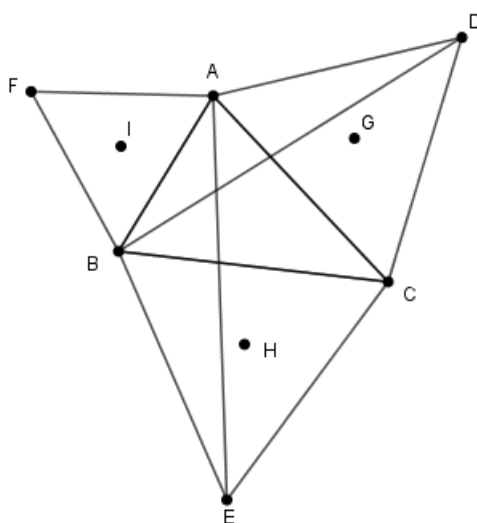
3.7 O TEOREMA DE NAPOLEÃO

O Teorema 3.7 é atribuído a Napoleão Bonaparte (1769-1821), político, militar e imperador francês. Esse teorema estabelece que os centros dos triângulos equiláteros construídos sobre os lados de um triângulo são os vértices de um triângulo equilátero. Uma propriedade adicional dos triângulos equiláteros construídos sobre os lados do triângulo inicial, também atribuída a Napoleão, é que as circunferências circunscritas concorrem no primeiro ponto de Fermat⁴ (WEISSTEIN, 2022c). O teorema de Napoleão é um caso especial do teorema de Petr-Neumann-Douglas (LAMOEN; WEISSTEIN, 2022).

Teorema 3.7 (de Napoleão). *Se ACD , BCE e ABF são triângulos equiláteros construídos sobre os lados de um triângulo ABC , então o triângulo GHI , cujos vértices são, respectivamente, os baricentros dos triângulos equiláteros, é equilátero.*

Demonstração. Sejam o triângulo ABC , os triângulos equiláteros ABF , ACD e BCE , construídos sobre os lados de ABC , e os pontos G , H e I , baricentros dos triângulos ACD , BCE e ABF , respectivamente - Figura 3.33.

Figura 3.33 – Triângulos equiláteros ABF , ACD e BCE , construídos sobre os lados do triângulo ABC



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

⁴ O primeiro ponto de Fermat, também denominado ponto de Fermat ou ponto de Torricelli, é o ponto X que minimiza a soma das distâncias aos vértices de um triângulo ABC com ângulos internos menores do que 120° , ou seja, a soma $|AX| + |BX| + |CX|$ é mínima.

Os triângulos ECA e BCD são congruentes pelo caso LAL (lado-ângulo-lado) (NETO, 2013), uma vez que $EC \equiv BC$, $DC \equiv AC$ e $\angle ECA \equiv \angle BCD$ - Figura 3.33. Logo, $BD \equiv AE$. Analogamente, temos que:

$$CF \equiv BD \equiv AE. \quad (3.28)$$

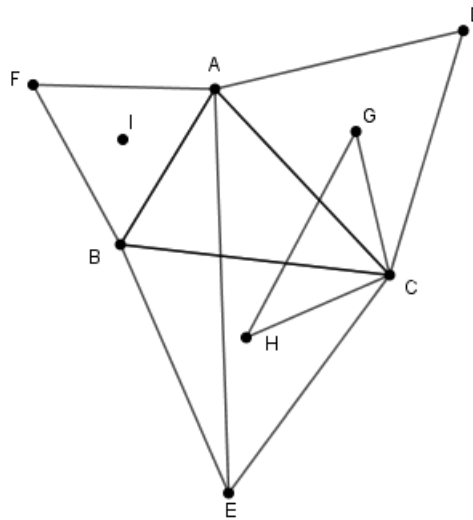
Empregando as propriedades do baricentro (NETO, 2013) nos triângulos equiláteros BCE e ACD - Figura 3.34, verificamos que $\angle HCB = 30^\circ$ e $\angle ACG = 30^\circ$. Logo:

$$\angle HCG \equiv \angle ECA; \quad (3.29)$$

$$HC = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot EC = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot EC; \quad (3.30)$$

$$CG = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AC = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot AC. \quad (3.31)$$

Figura 3.34 – Triângulos ABC , ABF , ACD , BCE e HCG



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Das igualdades (3.30) e (3.31), obtemos que:

$$\frac{HC}{EC} = \frac{CG}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad (3.32)$$

De (3.29) e (3.32), concluímos que os triângulos HCG e ECA são semelhantes (caso LAL). Portanto:

$$\frac{HC}{EC} = \frac{CG}{AC} = \frac{GH}{AE} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad (3.33)$$

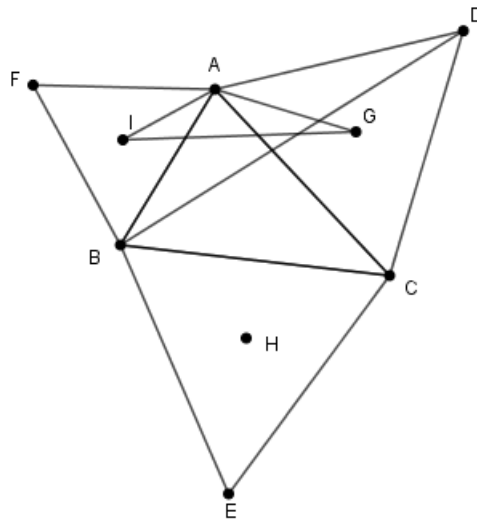
De forma análoga, temos nos triângulos BAD e IAG - Figura 3.35, que $\angle IAB = 30^\circ$ e $\angle CAG = 30^\circ$. Logo:

$$\angle IAG \equiv \angle BAD; \quad (3.34)$$

$$AG = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AD = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot AD; \quad (3.35)$$

$$AI = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot BA = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot BA. \quad (3.36)$$

Figura 3.35 – Triângulos ABC , ABF , ACD , BCE e IAG



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Das igualdades (3.35) e (3.36), constatamos que:

$$\frac{AG}{AD} = \frac{AI}{BA} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad (3.37)$$

De (3.34) e (3.37), concluímos que os triângulos IAG e BAD são semelhantes (caso LAL). Desta maneira:

$$\frac{AG}{AD} = \frac{AI}{BA} = \frac{IG}{BD} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad (3.38)$$

Analisando os triângulos IBH e FBC - Figura 3.36, temos que $\angle ABI = 30^\circ$ e $\angle CBH = 30^\circ$. Logo:

$$\angle IBH \equiv \angle CBF; \quad (3.39)$$

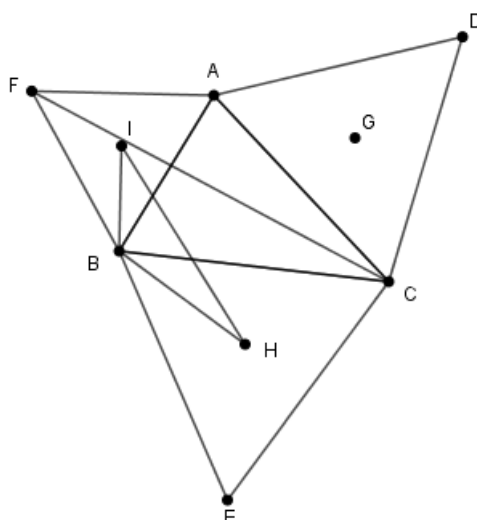
$$IB = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot BF = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot BF; \quad (3.40)$$

$$BH = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot BC = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot BC. \quad (3.41)$$

Das igualdades (3.40) e (3.41), temos que:

$$\frac{IB}{BF} = \frac{BH}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad (3.42)$$

Figura 3.36 – Triângulos ABC , ABF , ACD , BCE , BCF e IBH



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Assim, concluímos de (3.39) e (3.42) que os triângulos IBH e FBC são semelhantes (caso LAL). Portanto:

$$\frac{IB}{BF} = \frac{BH}{BC} = \frac{IH}{FC} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad (3.43)$$

Comparando as igualdades (3.33), (3.38) e (3.43), obtemos que:

$$\frac{IH}{FC} = \frac{IG}{BD} = \frac{GH}{AE} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad (3.44)$$

Finalmente, de (3.28) e (3.44), concluímos que:

$$IH \equiv IG \equiv GH. \quad (3.45)$$

A relação (3.45) estabelece que os lados do triângulo GHI são congruentes. Portanto, o triângulo GHI é equilátero.

□

Construímos a visualização dinâmica do teorema de Napoleão no GeoGebra e a disponibilizamos no link

<https://www.geogebra.org/m/amhb8fng>.

No GeoGebra App, os pontos A , B e C podem ser movimentados dinamicamente.

3.8 O TEOREMA DE MORLEY

O Teorema 3.8, proposto por Frank Morley (1860-1937), matemático britânico, estabelece que os pontos de interseção das trissetrizes⁵ adjacentes dos ângulos internos de um triângulo

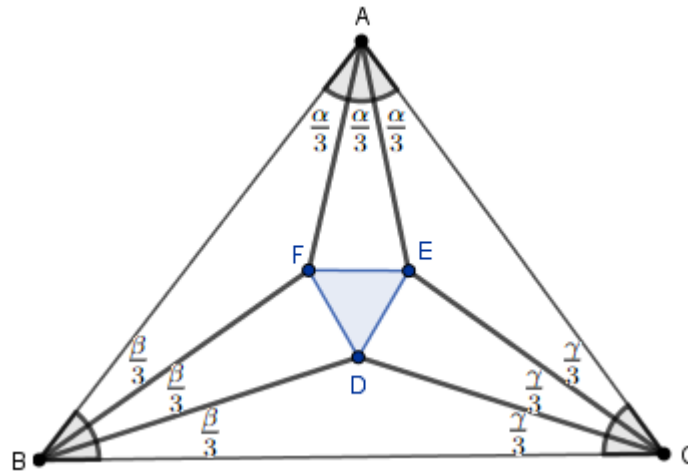
⁵ Trissetrizes são as duas semirretas que dividem um ângulo interno de um triângulo em três ângulos congruentes.

são vértices de um triângulo equilátero (BOGOMOLNY, 2018c). Morley propôs em 1900 uma generalização para esse teorema, a qual foi publicada somente em 1914 (WEISSTEIN, 2022d).

Teorema 3.8 (de Morley). *Se ABC é um triângulo qualquer, então os pontos de interseção das trissetrizes adjacentes dos ângulos internos $\angle CAB$, $\angle ABC$ e $\angle BCA$ são os vértices de um triângulo equilátero.*

Demonstração. Seja o triângulo ABC , de lados $BC = \ell_1$, $AB = \ell_2$ e $AC = \ell_3$, e ângulos internos $\angle CAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$ e $\angle BCA = \gamma$. Trissectando cada um desses ângulos, temos que as interseções das trissetrizes adjacentes são os vértices do triângulo DEF - Figura 3.37.

Figura 3.37 – Interseção das trissetrizes adjacentes dos ângulos internos do triângulo ABC



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Aplicando a lei dos senos (CARMO; MORGADO; WAGNER, 2005) ao triângulo ABC , obtemos que:

$$BC = 2r \operatorname{sen}(\alpha); \quad (3.46)$$

$$AB = 2r \operatorname{sen}(\gamma); \quad (3.47)$$

$$AC = 2r \operatorname{sen}(\beta), \quad (3.48)$$

onde r é a medida do raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC .

A partir da identidade trigonométrica

$$\operatorname{sen}(n\varphi) = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \operatorname{sen}\left(\varphi + k\frac{\pi}{n}\right),$$

onde $n \in \mathbb{N}$, podemos derivar o seno do arco triplo ($n = 3$), ou seja,

$$\operatorname{sen}(3\varphi) = 4\operatorname{sen}(\varphi)\operatorname{sen}\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right)\operatorname{sen}\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right), \quad (3.49)$$

sendo esta uma relação equivalente a $\operatorname{sen}(3\varphi) = 3\operatorname{sen}(\varphi) - 4\operatorname{sen}^3(\varphi)$ (IEZZI, 1993).

Empregando em (3.49) $3\varphi = \alpha$, $3\varphi = \gamma$ e $3\varphi = \beta$, e substituindo, respectivamente, nas igualdades (3.46), (3.47) e (3.48), temos que:

$$BC = 8r \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha}{3} \right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{\pi + \alpha}{3} \right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi + \alpha}{3} \right); \quad (3.50)$$

$$AB = 8r \operatorname{sen} \left(\frac{\gamma}{3} \right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{\pi + \gamma}{3} \right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi + \gamma}{3} \right); \quad (3.51)$$

$$AC = 8r \operatorname{sen} \left(\frac{\beta}{3} \right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{\pi + \beta}{3} \right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi + \beta}{3} \right). \quad (3.52)$$

No triângulo DBC , temos que $\angle DBC = \frac{\beta}{3}$ e $\angle DCB = \frac{\gamma}{3}$. Logo:

$$\angle BDC = \pi - \frac{\beta}{3} - \frac{\gamma}{3} = \frac{3\pi - \beta - \gamma}{3} = \frac{2\pi + (\pi - \beta - \gamma)}{3} = \frac{2\pi + \alpha}{3}.$$

Aplicando a lei dos senos no triângulo DBC , obtemos que:

$$\frac{DC}{\operatorname{sen} \left(\frac{\beta}{3} \right)} = \frac{BC}{\operatorname{sen} \left(\frac{2\pi + \alpha}{3} \right)} \Rightarrow DC = \frac{BC \operatorname{sen} \left(\frac{\beta}{3} \right)}{\operatorname{sen} \left(\frac{2\pi + \alpha}{3} \right)}. \quad (3.53)$$

Substituindo (3.50) em (3.53), verificamos que:

$$DC = \frac{8r \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha}{3} \right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{\pi + \alpha}{3} \right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi + \alpha}{3} \right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{\beta}{3} \right)}{\operatorname{sen} \left(\frac{2\pi + \alpha}{3} \right)};$$

$$DC = 8r \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha}{3} \right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{\pi + \alpha}{3} \right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{\beta}{3} \right). \quad (3.54)$$

Considerando agora os triângulos AEC e AFB , temos, de forma análoga, que:

$$EC = 8r \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha}{3} \right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{\pi + \beta}{3} \right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{\beta}{3} \right); \quad (3.55)$$

$$AE = 8r \operatorname{sen} \left(\frac{\gamma}{3} \right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{\pi + \beta}{3} \right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{\beta}{3} \right); \quad (3.56)$$

$$AF = 8r \operatorname{sen} \left(\frac{\beta}{3} \right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{\pi + \gamma}{3} \right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{\gamma}{3} \right); \quad (3.57)$$

$$BF = 8r \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha}{3} \right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{\pi + \gamma}{3} \right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{\gamma}{3} \right); \quad (3.58)$$

$$BD = 8r \operatorname{sen} \left(\frac{\gamma}{3} \right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{\pi + \alpha}{3} \right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha}{3} \right). \quad (3.59)$$

Aplicando a lei dos cossenos (CARMO; MORGADO; WAGNER, 2005) nos triângulos DBF , EAF e DCE , obtemos, respectivamente, que:

$$DF^2 = BD^2 + BF^2 - 2.BD.BF. \cos\left(\frac{\beta}{3}\right); \quad (3.60)$$

$$FE^2 = AF^2 + AE^2 - 2.AF.AE. \cos\left(\frac{\alpha}{3}\right); \quad (3.61)$$

$$ED^2 = EC^2 + DC^2 - 2.EC.DC. \cos\left(\frac{\gamma}{3}\right). \quad (3.62)$$

Doravante, consideremos $\alpha = 3a$, $\beta = 3b$ e $\gamma = 3c$. Logo, $a = \frac{\alpha}{3}$, $b = \frac{\beta}{3}$ e $c = \frac{\gamma}{3}$.

Substituindo (3.58) e (3.59) em (3.60), temos que:

$$\begin{aligned} DF^2 &= 64r^2. \operatorname{sen}^2 c. \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{3} + a\right). \operatorname{sen}^2 a + 64r^2. \operatorname{sen}^2 a. \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{3} + c\right). \operatorname{sen}^2 c + \\ &\quad - 128r^2. \operatorname{sen}^2 c. \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + a\right). \operatorname{sen}^2 a. \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + c\right). \cos b; \\ DF^2 &= 64r^2. \operatorname{sen}^2 a. \operatorname{sen}^2 c. \left[\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{3} + a\right) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{3} + c\right) - 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + a\right). \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + c\right). \cos b \right]. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Das relações (3.60) e (3.63), concluímos que os ângulos internos do triângulo BDF são b , $a + \frac{\pi}{3}$ e $c + \frac{\pi}{3}$. Assim, aplicando a lei dos senos nesse triângulo, obtemos que:

$$BD = 2r_1. \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + a\right); \quad (3.64)$$

$$DF = 2r_1. \operatorname{sen} b; \quad (3.65)$$

$$BF = 2r_1. \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + c\right), \quad (3.66)$$

onde r_1 é a medida do raio da circunferência circunscrita ao triângulo BDF .

Substituindo (3.64), (3.65) e (3.66) em (3.60), temos que:

$$\begin{aligned} 4r_1^2. \operatorname{sen}^2 b &= 4r_1^2. \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{3} + a\right) + 4r_1^2. \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{3} + c\right) - 8r_1^2. \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + a\right). \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + c\right). \cos b; \\ \operatorname{sen}^2 b &= \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{3} + a\right) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{3} + c\right) - 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + a\right). \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + c\right). \cos b. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Para finalizar, substituindo (3.67) em (3.63), concluímos que:

$$\begin{aligned} DF^2 &= 64r^2. \operatorname{sen}^2 a. \operatorname{sen}^2 c. \operatorname{sen}^2 b; \\ DF &= 8r. \operatorname{sen} a. \operatorname{sen} b. \operatorname{sen} c. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Substituindo agora (3.56) e (3.57) em (3.61), temos que:

$$\begin{aligned} FE^2 &= 64r^2. \operatorname{sen}^2 b. \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{3} + c\right). \operatorname{sen}^2 c + 64r^2. \operatorname{sen}^2 c. \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{3} + b\right). \operatorname{sen}^2 b + \\ &\quad - 128r^2. \operatorname{sen}^2 b. \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + c\right). \operatorname{sen}^2 c. \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + b\right). \cos a; \\ FE^2 &= 64r^2. \operatorname{sen}^2 b. \operatorname{sen}^2 c. \left[\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{3} + b\right) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{3} + c\right) - 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + b\right). \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + c\right). \cos a \right]. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Das relações (3.61) e (3.69), concluímos que os ângulos internos do triângulo EAF são a , $b + \frac{\pi}{3}$ e $c + \frac{\pi}{3}$. Dessa forma, aplicando a lei dos senos nesse triângulo, obtemos que:

$$AE = 2r_2 \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi}{3} + b \right); \quad (3.70)$$

$$FE = 2r_2 \cdot \text{sen} a; \quad (3.71)$$

$$AF = 2r_2 \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi}{3} + c \right), \quad (3.72)$$

onde r_2 é a medida do raio da circunferência circunscrita ao triângulo EAF .

Substituindo (3.70), (3.71) e (3.72) em (3.61), temos que:

$$\begin{aligned} 4r_2^2 \cdot \text{sen}^2 a &= 4r_2^2 \cdot \text{sen}^2 \left(\frac{\pi}{3} + c \right) + 4r_2^2 \cdot \text{sen}^2 \left(\frac{\pi}{3} + b \right) - 8r_2^2 \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi}{3} + c \right) \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi}{3} + b \right) \cdot \cos a; \\ \text{sen}^2 a &= \text{sen}^2 \left(\frac{\pi}{3} + b \right) + \text{sen}^2 \left(\frac{\pi}{3} + c \right) - 2 \text{sen} \left(\frac{\pi}{3} + b \right) \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi}{3} + c \right) \cdot \cos a. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Logo, substituindo (3.73) em (3.69), constatamos que:

$$\begin{aligned} FE^2 &= 64r^2 \cdot \text{sen}^2 b \cdot \text{sen}^2 c \cdot \text{sen}^2 a; \\ FE &= 8r \cdot \text{sen} a \cdot \text{sen} b \cdot \text{sen} c. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Finalmente, substituindo (3.54) e (3.55) em (3.62), verificamos que:

$$\begin{aligned} ED^2 &= 64r^2 \cdot \text{sen}^2 a \cdot \text{sen}^2 \left(\frac{\pi}{3} + b \right) \cdot \text{sen}^2 b + 64r^2 \cdot \text{sen}^2 a \cdot \text{sen}^2 \left(\frac{\pi}{3} + a \right) \cdot \text{sen}^2 b + \\ &\quad - 128r^2 \cdot \text{sen}^2 a \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi}{3} + b \right) \cdot \text{sen}^2 b \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi}{3} + a \right) \cdot \cos c; \\ ED^2 &= 64r^2 \cdot \text{sen}^2 a \cdot \text{sen}^2 b \cdot \left[\text{sen}^2 \left(\frac{\pi}{3} + a \right) + \text{sen}^2 \left(\frac{\pi}{3} + b \right) - 2 \text{sen} \left(\frac{\pi}{3} + a \right) \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi}{3} + b \right) \cdot \cos c \right]. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Das relações (3.62) e (3.75), concluímos que os ângulos internos do triângulo DCE são c , $a + \frac{\pi}{3}$ e $b + \frac{\pi}{3}$. Assim, aplicando a lei dos senos nesse triângulo, obtemos que:

$$DC = 2r_3 \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi}{3} + a \right); \quad (3.76)$$

$$ED = 2r_3 \cdot \text{sen} c; \quad (3.77)$$

$$EC = 2r_3 \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi}{3} + b \right), \quad (3.78)$$

onde r_3 é a medida do raio da circunferência circunscrita ao triângulo DCE .

Substituindo (3.76), (3.77) e (3.78) em (3.62), temos que:

$$\begin{aligned} 4r_3^2 \cdot \text{sen}^2 c &= 4r_3^2 \cdot \text{sen}^2 \left(\frac{\pi}{3} + b \right) + 4r_3^2 \cdot \text{sen}^2 \left(\frac{\pi}{3} + a \right) - 8r_3^2 \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi}{3} + b \right) \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi}{3} + a \right) \cdot \cos c; \\ \text{sen}^2 c &= \text{sen}^2 \left(\frac{\pi}{3} + a \right) + \text{sen}^2 \left(\frac{\pi}{3} + b \right) - 2 \text{sen} \left(\frac{\pi}{3} + a \right) \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi}{3} + b \right) \cdot \cos c. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Agora, substituindo (3.79) em (3.75), verificamos que:

$$\begin{aligned} ED^2 &= 64r^2 \cdot \text{sen}^2 a \cdot \text{sen}^2 b \cdot \text{sen}^2 c; \\ ED &= 8r \cdot \text{sen } a \cdot \text{sen } b \cdot \text{sen } c. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Assim, de (3.68), (3.74) e (3.80), temos que $FD \equiv FE \equiv ED$. Portanto, o triângulo DEF é equilátero.

□

Construímos a visualização dinâmica do teorema de Morley no GeoGebra e a disponibilizamos no link

<https://www.geogebra.org/m/frdqkkkn>.

No GeoGebra App, os vértices do triângulo ABC podem ser movidos dinamicamente.

3.9 O TEOREMA DE EULER

O Teorema 3.9, também denominado fórmula do triângulo de Euler, foi proposto por Leonhard Paul Euler (1707-1783), matemático e físico suíço. Esse teorema estabelece a distância entre o circuncentro⁶ e o incentro⁷ de um triângulo. A desigualdade de Euler é uma decorrência imediata do Teorema 3.9 (WEISSTEIN, 2022e).

Teorema 3.9 (de Euler). *Se γ é uma circunferência de raio r e centro I , interior à circunferência Γ de raio R e centro O , e A , B e C são pontos pertencentes a Γ , onde AB e AC são cordas de Γ tangentes a γ , então γ está inscrita no triângulo ABC se, e somente se,*

$$OI^2 = R(R - 2r).$$

Demonstração. Sejam a circunferência γ de raio r e centro I , interior à circunferência Γ de raio R e centro O , e $A, B, C \in \Gamma$, sendo AB e AC cordas de Γ tangentes a γ - Figura 3.38.

Consideremos o ponto P de interseção da bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$ com Γ . Como essa bissetriz passa pelo ponto I , temos, pelo teorema das cordas (NETO, 2013), que:

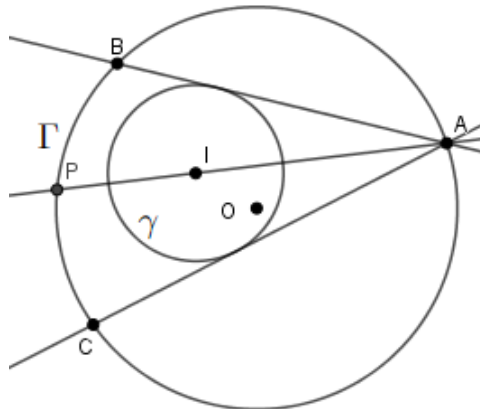
$$AI \cdot IP = R^2 - OI^2. \quad (3.81)$$

Sejam X e Y os pés das perpendiculares traçadas, respectivamente, de O a BP e de I a AC - Figura 3.39.

⁶ O circuncentro é o ponto no qual as mediatrizes dos lados de um triângulo se intersectam. Esse ponto equidista dos vértices do triângulo, sendo o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.

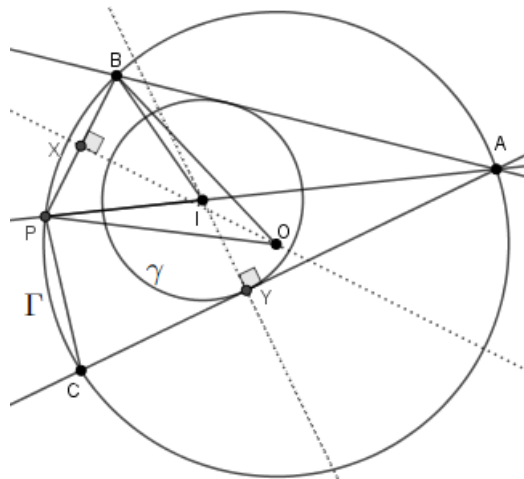
⁷ O incentro é o ponto no qual as três bissetrizes dos ângulos internos de um triângulo se intersectam. Esse ponto equidista dos lados do triângulo, sendo o centro da circunferência inscrita no triângulo.

Figura 3.38 – Circunferências Γ e γ e os pontos A, B e C



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Figura 3.39 – Circunferências Γ e γ e os pontos A, B, C, P, X e Y



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

O triângulo BOP é isósceles e, pelo teorema do ângulo inscrito (NETO, 2013), temos que:

$$\widehat{BAP} = \frac{1}{2}\widehat{BOP}. \quad (3.82)$$

De (3.82) e do fato de que os triângulos BOX e IAY são retângulos por construção, temos que esses triângulos são semelhantes pelo caso AA (ângulo-ângulo) (NETO, 2013). Portanto:

$$\begin{aligned} \frac{BX}{IY} &= \frac{BO}{AI}; \\ BX \cdot AI &= BO \cdot IY. \end{aligned} \quad (3.83)$$

Mas, $BO = R$, $IY = r$ e $BX = \frac{BP}{2}$. Substituindo essas igualdades em (3.83), obtemos que:

$$AI = \frac{2Rr}{BP}. \quad (3.84)$$

Substituindo (3.84) em (3.81), temos que:

$$\begin{aligned} R^2 - OI^2 &= AI \cdot IP = 2Rr \cdot \frac{IP}{BP}; \\ OI^2 &= R^2 - 2Rr \cdot \frac{IP}{BP}. \end{aligned} \quad (3.85)$$

Dessa forma, temos em (3.85) que:

$$OI^2 = R^2 - 2Rr = R(R - 2r) \Leftrightarrow BP \equiv IP.$$

Mas $BP \equiv IP$ se, e somente se, o triângulo PBI é isósceles de base BI . Assim, $P\hat{B}I \equiv P\hat{I}B$. Ainda, como $P\hat{I}B$ é ângulo externo ao triângulo ABI , decorre do teorema do ângulo externo (NETO, 2013) que:

$$P\hat{I}B \equiv P\hat{B}I = I\hat{A}B + I\hat{B}A. \quad (3.86)$$

Empregando $BP \equiv PC$ e o conceito de ângulo inscrito (NETO, 2013), obtemos que:

$$P\hat{B}C \equiv P\hat{A}B \equiv P\hat{A}C \equiv I\hat{A}B. \quad (3.87)$$

No triângulo PBI , temos que:

$$P\hat{B}I = P\hat{B}C + C\hat{B}I. \quad (3.88)$$

Substituindo (3.86) e (3.87) em (3.88), concluímos que:

$$\begin{aligned} I\hat{A}B + I\hat{B}A &= I\hat{A}B + C\hat{B}I; \\ I\hat{B}A &\equiv C\hat{B}I. \end{aligned} \quad (3.89)$$

Em decorrência de (3.89), temos que o ponto I pertence à bissetriz do ângulo $C\hat{B}A$. Como I também pertence à bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$, temos que I pertence à interseção de duas bissetrizes do triângulo ABC . Portanto, I é o incentro do triângulo ABC e γ está inscrita no triângulo ABC . □

Construímos a visualização dinâmica do teorema de Euler no GeoGebra e a disponibilizamos no link

<https://www.geogebra.org/m/wbcktxvs>.

No GeoGebra App, os pontos A , O , I e W podem ser movimentados dinamicamente.

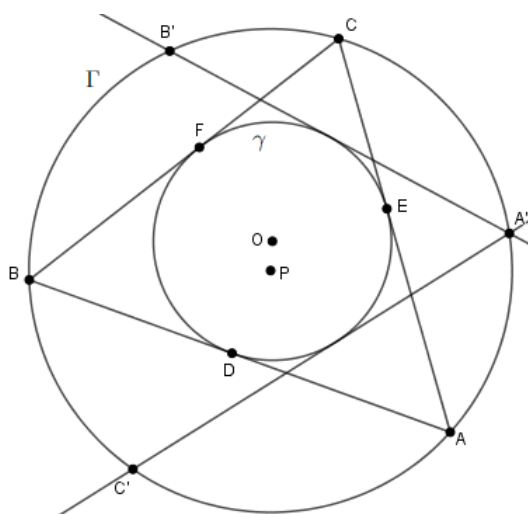
3.10 O TEOREMA DE PONCELET

O Teorema 3.10, proposto por Jean-Victor Poncelet (1788-1867), matemático e engenheiro francês, relaciona as circunferências inscrita e circunscrita a um triângulo. O teorema 3.10 pode ser generalizado para um polígono de n lados simultaneamente inscrito e circunscrito a uma seção cônica (WEISSTEIN, 2022f).

Teorema 3.10 (de Poncelet). *Se γ e Γ são, respectivamente, as circunferências inscrita e circunscrita a um triângulo ABC , A' é um ponto pertencente a Γ , diferente de A , B ou C , e $A'B'$ e $A'C'$ são as cordas de Γ tangentes a γ , então γ está inscrita no triângulo $A'B'C'$.*

Demonstração. Sejam: γ e Γ , respectivamente, as circunferências inscrita e circunscrita ao triângulo ABC , de centros O e P e raios r e R ; D , E e F , respectivamente, os pontos de tangência de γ com os lados AB , AC e BC ; A' um ponto pertencente a Γ , diferente de A , B ou C ; $A'B'$ e $A'C'$ as cordas de Γ tangentes a γ - Figura 3.40.

Figura 3.40 – Triângulo ABC , as cordas $A'B'$ e $A'C'$ e as circunferências Γ e γ



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Aplicando o Teorema 3.9 (de Euler) no triângulo $A'B'C'$, concluímos que $B'C'$ tangencia a circunferência γ . Portanto, γ está inscrita no triângulo $A'B'C'$.

□

Construímos a visualização dinâmica do teorema de Poncelet no GeoGebra e a disponibilizamos no link

<https://www.geogebra.org/m/dxbta6dc>.

No GeoGebra App, os pontos D , E , F e A' podem ser movidos dinamicamente.

4 LUGARES GEOMÉTRICOS

Apresentamos neste capítulo alguns lugares geométricos, assim como demonstrações formais e dinâmicas de teoremas relacionados a propriedades dos triângulos. Na seleção dos teoremas, empregamos as seguintes referências: Sortais (1997), Skutin (2017) e Bogomolny (2018d).

4.1 DEFINIÇÃO E EXEMPLOS

Em geometria, um lugar geométrico é um conjunto de pontos que satisfaz uma determinada propriedade. Geralmente, uma forma ou figura geométrica pode ser definida como um lugar geométrico.

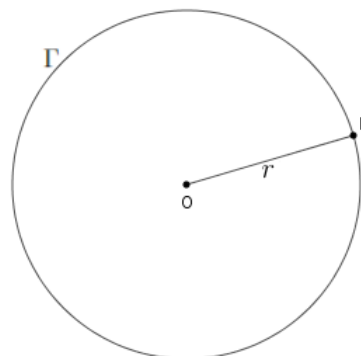
Definição 4.1. *Dada uma propriedade P relativa a um conjunto de pontos em \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 , o lugar geométrico dos pontos que possuem a propriedade P é o subconjunto L que satisfaz às condições:*

1. *todo ponto de L possui a propriedade P ;*
2. *todo ponto que possui a propriedade P pertence a L .*

Provar que um conjunto de pontos define um lugar geométrico pode ser uma tarefa complexa (NETO, 2013). Contudo, há lugares geométricos mais simples, como os Exemplos 4.1 a 4.4, que podem ser explorados na Educação Básica.

Exemplo 4.1. *A circunferência é o lugar geométrico dos pontos de \mathbb{R}^2 que equidistam, a uma distância r , de um ponto O considerado - Figura 4.1.*

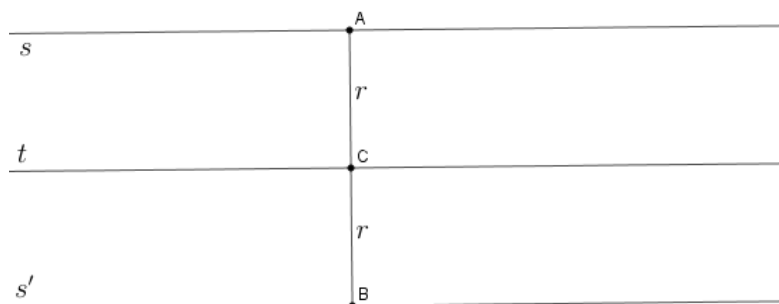
Figura 4.1 – Pontos da circunferência Γ , que distam r do ponto O



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Exemplo 4.2. O lugar geométrico dos pontos de \mathbb{R}^2 que equidistam, a uma distância r não nula, de uma reta t considerada, são os pontos pertencentes às retas s e s' , paralelas entre si e à t , como ilustra a Figura 4.2.

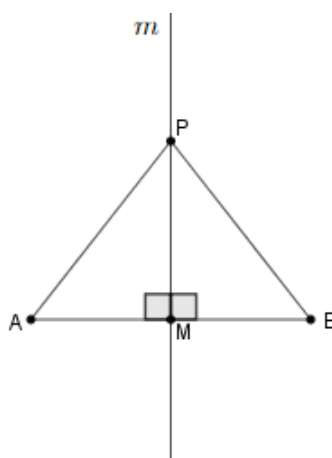
Figura 4.2 – Retas paralelas s e s' , que distam r da reta t



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Exemplo 4.3. O lugar geométrico dos pontos de \mathbb{R}^2 que equidistam de dois pontos A e B , não coincidentes, é a mediatriz do segmento AB , ou seja, é a reta m perpendicular ao segmento AB no ponto médio M - Figura 4.3.

Figura 4.3 – Mediatriz m , cujos pontos equidistam dos pontos A e B



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Demonstração. Sejam: o ponto médio M do segmento AB ; a reta m , perpendicular a AB por M ; o ponto $P \in m$, não coincidente a M - Figura 4.3. Como $m \perp AB$, os triângulos AMP e BMP são retângulos. Sendo M o ponto médio de AB , temos que $AM \equiv MB$. E como MP é lado comum aos dois triângulos retângulos, estes são congruentes pelo caso LAL (lado-ângulo-lado). Portanto, os triângulos AMP e BMP são congruentes e $AP \equiv PB$, isto é, o ponto P equidista dos pontos A e B . Se os pontos P e M são coincidentes, então P equidista de A e B , uma vez que M é ponto médio de AB .

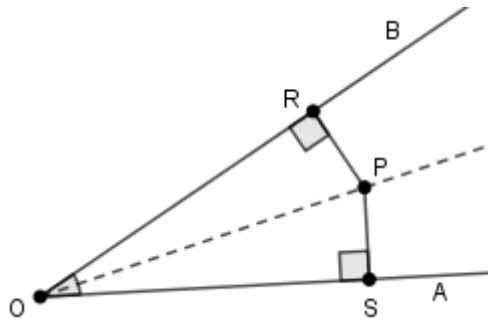
Reciprocamente, seja P um ponto distinto de M tal que $PA \equiv PB$. Como $AM \equiv MB$, uma vez que M é o ponto médio de AB , e PM é lado comum aos triângulos APM e BPM ,

temos que estes dois triângulos são congruentes pelo caso *LLL* (lado-lado-lado) (NETO, 2013). Desta forma, $\widehat{PMA} \equiv \widehat{PMB}$ e como $\widehat{PMA} + \widehat{PMB} = 180^\circ$, segue que $\widehat{PMA} \equiv \widehat{PMB} = 90^\circ$. Logo, $PM \perp AB$ e o ponto P pertence à mediatriz do segmento AB .

□

Exemplo 4.4. O lugar geométrico dos pontos de \mathbb{R}^2 que equidistam dos lados de um ângulo $A\hat{O}B$, de vértice O e lados \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} , é a bissetriz do ângulo, ou seja, é a semirreta \overrightarrow{OP} que divide o ângulo $A\hat{O}B$ em dois ângulos congruentes - Figura 4.4.

Figura 4.4 – Bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$, cujos pontos equidistam dos lados do ângulo



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Demonstração. Sejam: o ângulo $A\hat{O}B$, de vértice O e lados \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} ; o ponto P pertencente à bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$; os pontos R e S , pés das perpendiculares em \overrightarrow{OB} e \overrightarrow{OA} traçadas por P , respectivamente - Figura 4.4. Nos triângulos retângulos ORP e OSP , o lado OP é comum e os ângulos $R\hat{O}P$ e $S\hat{O}P$ são congruentes, pois \overrightarrow{OP} é a bissetriz. Logo, os triângulos ORP e OSP são congruentes pelo caso *LAA*_o (lado-ângulo-ângulo oposto) (NETO, 2013). Portanto, $PR \equiv PS$.

Reciprocamente, seja o ponto P , interior ao ângulo $A\hat{O}B$, tal que $PR \equiv PS$, onde R e S são os pés das perpendiculares em \overrightarrow{OB} e \overrightarrow{OA} traçadas por P , respectivamente. Nos triângulos retângulos ORP e OSP , o lado OP é comum e $PR \equiv PS$. Assim, esses triângulos são congruentes pelo caso especial *CH* (cateto-hipotenusa) (NETO, 2013). Logo, $P\hat{O}R \equiv P\hat{O}S$ e P pertence à bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$.

□

Analisamos agora lugares geométricos mais complexos, como os pontos de Miquel, Fermat, Gergonne e Nagel.

4.2 PONTO DE MIQUEL

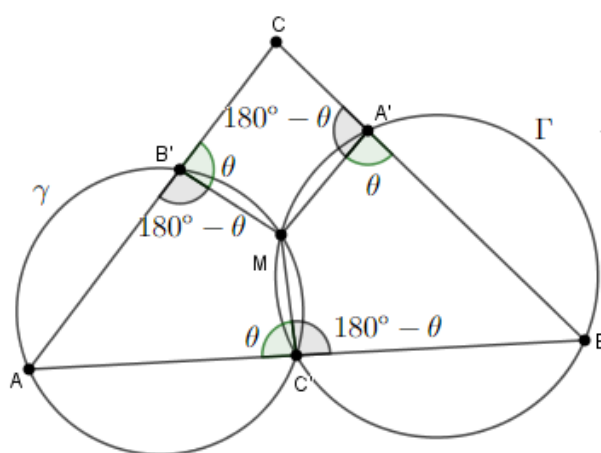
O Teorema 4.1 foi proposto por Auguste Miquel (1816-1851), matemático francês. Esse teorema estabelece o ponto de Miquel, um lugar geométrico definido pela intersecção

de três circunferências que passam pelos vértices de um triângulo. O Teorema 4.1 pode ser generalizado para n circunferências (WEISSTEIN, 2022g) e há uma versão tridimensional para o caso bidimensional com $n = 3$ (HANDWIKI, 2021).

Teorema 4.1 (de Miquel). *Se A' , B' e C' são pontos pertencentes, respectivamente, aos lados BC , AC e AB (ou seus prolongamentos) do triângulo ABC , então as circunferências que passam pelos pontos A , B' e C' , B , A' e C' e C , A' e B' são concorrentes no ponto M , denominado ponto de Miquel.*

Demonstração. Sejam: o triângulo ABC ; as circunferência γ e Γ , que passam, respectivamente, pelos pontos A , B' e C' e B , A' e C' ; o ponto M tal que $\gamma \cap \Gamma = \{C', M\}$ - Figura 4.5.

Figura 4.5 – Ponto M de Miquel



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Consideremos $\widehat{AC'M} = \theta$. Como os quadriláteros $AC'MB'$ e $BC'MA'$ estão inscritos, respectivamente, em γ e Γ , então seus ângulos opostos são suplementares (NETO, 2013; LAGO, 2018). Logo: $\widehat{AB'M} \equiv \widehat{BC'M} = 180^\circ - \theta$ e $\widehat{BA'M} = \theta$.

Ainda, como os ângulos $\widehat{AB'M}$ e $\widehat{CB'M}$ e $\widehat{BA'M}$ e $\widehat{CA'M}$ são suplementares, temos que $\widehat{CB'M} = \theta$ e $\widehat{CA'M} = 180^\circ - \theta$. Desta forma, como os ângulos opostos são suplementares, há uma circunferência que passa pelos vértices do quadrilátero $CB'MA'$. Portanto, as circunferências que passam pelos pontos A , B' e C' , B , A' e C' e C , A' e B' se intersectam no ponto M , o ponto de Miquel.

□

Construímos no GeoGebra a visualização dinâmica do teorema de Miquel e a disponibilizamos no link

<https://www.geogebra.org/m/ekubwmyv>.

No GeoGebra App, os pontos A , B , C , A' , B' e C' podem ser movidos dinamicamente.

4.3 PONTO DE FERMAT

O primeiro ponto de Fermat (ou simplesmente ponto de Fermat ou ponto de Torricelli) é um problema proposto por Pierre de Fermat (1601-1665) a Evangelista Torricelli (1608-1647), matemático e físico italiano que inventou o barômetro. Em uma carta, Fermat desafiou Torricelli a solucionar o Problema 4.1.

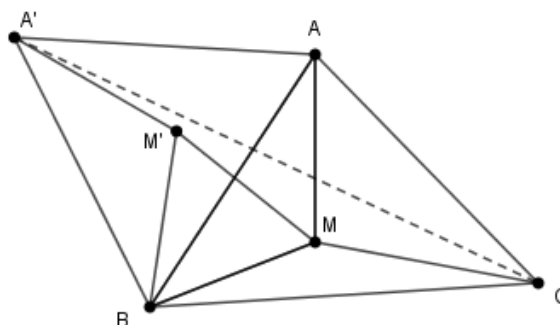
Problema 4.1. *Determinar o ponto tal que a soma de suas distâncias aos vértices de um triângulo seja mínima.*

Toricelli apresentou várias soluções para o problema proposto por Fermat. Em uma dessas soluções, observou que as circunferências circunscritas aos triângulos equiláteros construídos externamente sobre os lados do triângulo são concorrentes em um ponto (BOGOMOLNY, 2018e). Esse ponto recebeu o nome de Fermat, o proponente do problema.

Apresentamos nesta seção a demonstração baseada no Teorema 3.7 (de Napoleão) (BOGOMOLNY, 2018e).

Demonstração. Sejam: o triângulo ABC ; o ponto M , interno ao triângulo ABC ; o triângulo ABM ; o triângulo $A'BM'$, oriundo da rotação de 60° do triângulo ABM em torno do vértice B - Figura 4.6.

Figura 4.6 – Triângulos ABC , ABM e $A'BM'$



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Por construção, temos que o triângulo BMM' é equilátero. Logo, $MB \equiv M'B$ e, como $MA \equiv M'A'$, temos que:

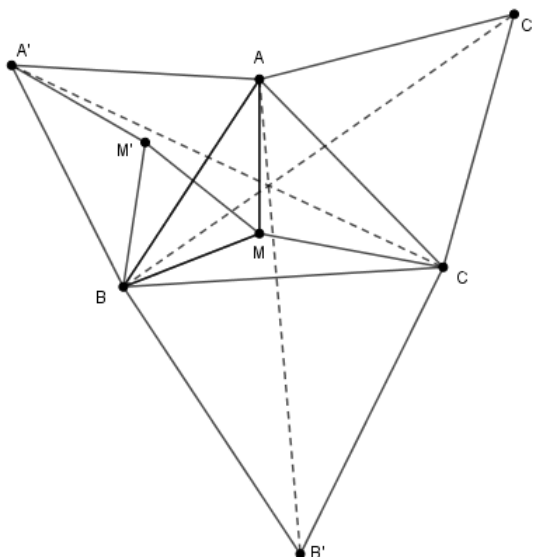
$$MA + MB + MC = A'M' + M'M + MC. \quad (4.1)$$

O ponto A' é obtido pela rotação de A em torno de B . Logo, a posição de A' não depende de M e temos que $MA + MB + MC \geq A'C$. Assim, a soma em (4.1) é mínima quando $M \in A'C$. Para tanto, é preciso que $\widehat{BMA'} = 60^\circ$ ¹.

¹ Se a rotação fosse feita em torno do ponto A , deveríamos ter $\widehat{AMA'} = 60^\circ$.

Construindo triângulos equiláteros sobre os lados do triângulo ABC , obtemos os triângulos ABA' , ACC' e BCB' , e as retas $\overleftrightarrow{A'C}$, $\overleftrightarrow{AB'}$ e $\overleftrightarrow{BC'}$ se intersectam em um ponto - Figura 4.7.

Figura 4.7 – Ponto de Fermat: interseção das retas AB' , BC' e CA'



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

O Teorema 3.7 (de Napoleão) garante que as retas $\overleftrightarrow{A'C}$, $\overleftrightarrow{AB'}$ e $\overleftrightarrow{BC'}$ se intersectam em um ponto e que o ângulo entre elas é de 120° . Temos então que $AB' \equiv BC' \equiv A'C = MA + MB + MC$, sendo M o ponto de Fermat. Portanto, o ponto de Fermat é único e se encontra na interseção das retas que passam pelos vértices opostos dos triângulos equiláteros construídos sobre os lados do triângulo ABC . No caso em que um dos ângulos do triângulo ABC é maior do que ou igual a 120° , o ponto de Fermat será o vértice correspondente ao maior ângulo do triângulo.

□

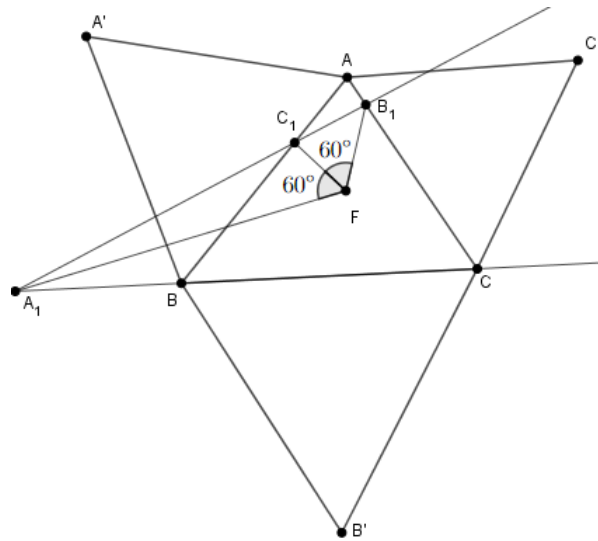
Construímos a visualização dinâmica do ponto de Fermat no GeoGebra e a disponibilizamos no link

<https://www.geogebra.org/m/yypd3p8>.

No GeoGebra App, os pontos A , B , C e M podem ser movidos dinamicamente.

4.4 FAROL EM PONTOS DE FERMAT

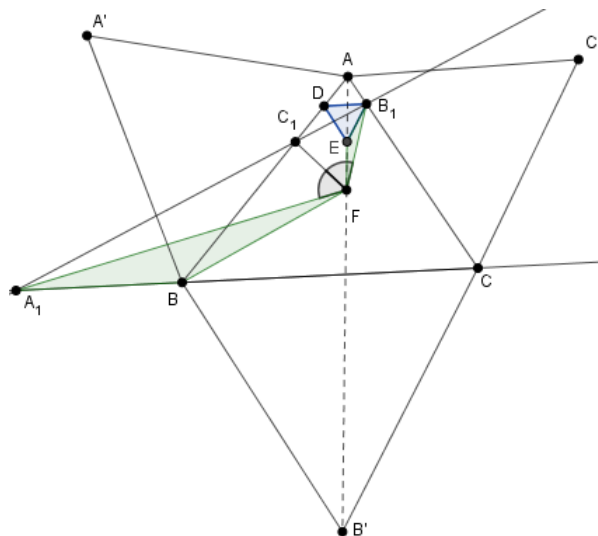
Definido o ponto de Fermat, podemos agora demonstrar o Teorema 4.2. Este teorema relaciona o ponto de Fermat à colinearidade de pontos sobre os lados (ou seus prolongamentos) de um triângulo - Figura 4.8, o que Bogomolny (2018d) denomina farol em pontos de Fermat.

Figura 4.8 – Farol no ponto F de Fermat

Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Teorema 4.2. Se F é o ponto de Fermat no triângulo ABC , e A_1 , B_1 e C_1 são pontos pertencentes, respectivamente, às retas suportes dos lados BC , AC e AB , tais que $A_1\widehat{F}C_1 \equiv B_1\widehat{F}C_1 = 60^\circ$, então A_1 , B_1 e C_1 são colineares.

Demonstração. Sejam: o triângulo ABC ; os triângulos equiláteros $AA'B$, $BB'C$ e $CC'A$, construídos, respectivamente, sobre os lados AB , BC e AC de ABC ; F o ponto de Fermat, pertencente a $AB' \cap A'C \cap BC'$; o triângulo equilátero DEB_1 , uma homotetia² do triângulo $BB'C$, com o centro de homotetia em A e $D \in AB$, $E \in AB'$, $B_1 \in AC$, $DB_1 \parallel BC$, $EB_1 \parallel B'C$ e $DE \parallel BB'$ - Figura 4.9.

Figura 4.9 – Triângulo ABC , o ponto F de Fermat, os pontos A_1 , B_1 e C_1 e o triângulo DEB_1 

Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

² Transformação geométrica que multiplica por um fator constante a distância de um ponto qualquer a um ponto fixo, deslocando-o sobre a reta definida por estes dois pontos.

Seja ainda P o ponto de interseção de A_1B_1 com AB . Mostraremos que $P \equiv C_1$ e, portanto, que A_1, B_1 e C_1 são colineares.

Como $DB_1 \parallel BA_1$, os triângulos B_1DP e A_1BP são semelhantes. Logo, temos que:

$$\frac{B_1D}{A_1B} = \frac{B_1P}{A_1P}. \quad (4.2)$$

Sendo o triângulo DEB_1 equilátero e $DB_1 \parallel BA_1$, deduzimos que $\angle(B_1\vec{E}, A_1\vec{B}) \equiv \angle(\vec{E}\vec{F}, \vec{B}\vec{F}) = 120^\circ$. Assim, $F\hat{E}B_1 \equiv F\hat{B}A_1$. Por construção, $B_1\hat{F}A_1 = 120^\circ$ e, pela propriedade dos pontos de Fermat, $A_1\hat{F}B = 120^\circ$. Desta forma, $A_1\hat{F}B \equiv B_1\hat{F}E$ e os triângulos B_1EF e A_1BF são semelhantes pelo caso AA (ângulo-ângulo). Assim, obtemos que:

$$\frac{B_1E}{A_1B} = \frac{FB_1}{FA_1}. \quad (4.3)$$

Dado que $B_1D \equiv B_1E$, ao compararmos (4.2) e (4.3), constatamos que:

$$\frac{B_1P}{A_1P} = \frac{FB_1}{FA_1}. \quad (4.4)$$

De (4.4), concluímos, pelo teorema da bissetriz interna (DOLCE; POMPEO, 1993; NETO, 2013), que FP é a bissetriz do ângulo $B_1\hat{F}A_1$. Portanto, $P \equiv C_1$.

□

Construímos a visualização dinâmica do farol em pontos de Fermat no GeoGebra e a disponibilizamos no link

<https://www.geogebra.org/m/mjs76auv>.

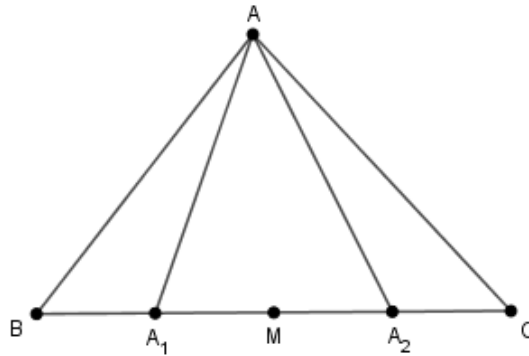
No GeoGebra App, os pontos A, B, C e B_1 podem ser movidos dinamicamente.

4.5 CEVIANAS ISOTÔMICAS

A ceviana é um segmento de reta que tem por extremos um dos vértices de um triângulo e um ponto do lado (ou seu prolongamento) oposto a esse vértice. O ponto de interseção entre a ceviana e o lado (ou seu prolongamento) do triângulo é denominado pé da ceviana. Quando os pés de duas cevianas, que partem do mesmo vértice de um triângulo, são simétricos em relação ao ponto médio do lado oposto ao vértice comum, as cevianas são denominadas isotômicas (SORTAIS; SORTAIS, 1997). A Figura 4.10 ilustra as cevianas AA_1 e AA_2 , cujos pés são simétricos em relação ao ponto médio M do lado BC , oposto ao ângulo \hat{A} .

Desta forma, se os segmentos AA_1, BB_1 e CC_1 são cevianas do triângulo ABC , onde A_1, B_1 e C_1 são os pés das cevianas e M_A, M_B e M_C são os pontos médios dos lados BC, AC e AB , respectivamente, então A_2, B_2 e C_2 são os pontos simétricos a A_1, B_1 e C_1 em relação a M_A, M_B e M_C . Assim, as cevianas AA_2, BB_2 e CC_2 são, respectivamente, isotômicas às cevianas AA_1, BB_1 e CC_1 . Quando as cevianas AA_1, BB_1 e CC_1 se intersectam em um ponto

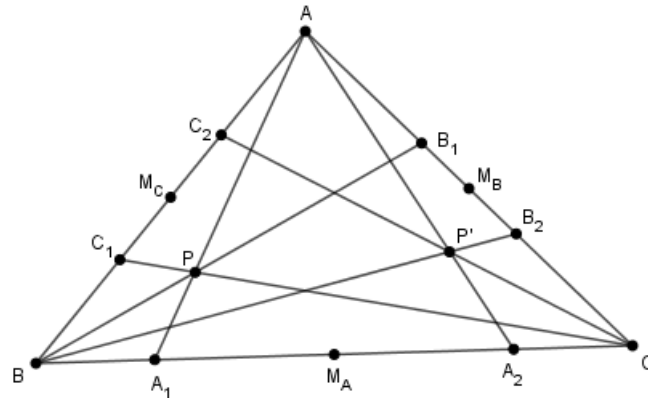
Figura 4.10 – Cevianas isotômicas AA_1 e AA_2 do triângulo ABC



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

P e suas cevianas isotômicas AA_2 , BB_2 e CC_2 se intersectam em um ponto P' , esses dois pontos de interseção são denominados pontos recíprocos (MARTINS; FERNANDES; SACCHETTI, 2008) - Figura 4.11.

Figura 4.11 – Cevianas isotômicas AA_1 e AA_2 , BB_1 e BB_2 e CC_1 e CC_2 do triângulo ABC e os pontos recíprocos P e P'



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Das cevianas isotômicas AA_1 e AA_2 , BB_1 e BB_2 e CC_1 e CC_2 , decorre que³:

$$A_1B = -A_2C; \quad (4.5)$$

$$A_2B = -A_1C; \quad (4.6)$$

$$B_1C = -B_2A; \quad (4.7)$$

$$B_2C = -B_1A; \quad (4.8)$$

$$C_1A = -C_2B; \quad (4.9)$$

$$C_2A = -C_1B. \quad (4.10)$$

Uma vez estabelecido o conceito, apresentamos agora a demonstração do Teorema 4.3 que estabelece uma propriedade relativa às cevianas isotômicas. A demonstração é baseada em Sortais (1997).

³ O sinal negativo é decorrente do comprimento algébrico dos segmentos.

Teorema 4.3. *As cevianas isotômicas a três cevianas concorrentes ou paralelas são também concorrentes ou paralelas.*

Demonstração. Sejam: o triângulo ABC ; as cevianas AA_1 , BB_1 e CC_1 , com $A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$ e $C_1 \in AB$; os pontos A_2 , B_2 e C_2 , simétricos aos pontos A_1 , B_1 e C_1 em relação a M_A , M_B e M_C , pontos médios dos segmentos BC , AC e AB , respectivamente - Figura 4.11.

1. Suponhamos que as cevianas AA_1 , BB_1 e CC_1 são paralelas. Mostremos que $A_1 \notin BC$.

Supondo $A_1 \equiv B$, temos que $AA_1 \parallel AB$. Como $CC_1 \parallel AA_1$, segue que $CC_1 \parallel AB$. Mais precisamente, $CC_1 \cap AB = \emptyset$ porque $C \notin AB$. Contudo, isto contradiz a hipótese porque $CC_1 \cap AB = \{C_1\}$.

As análises são análogas quando consideramos $B_1 \notin AC$ e $C_1 \notin AB$.

Como as cevianas AA_1 , BB_1 e CC_1 são paralelas, temos, pelo Teorema 3.2 (de Ceva), que:

$$\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = -1. \quad (4.11)$$

Substituindo (4.5)-(4.10) em (4.11), obtemos que:

$$\frac{A_2C}{A_2B} \cdot \frac{B_2A}{B_2C} \cdot \frac{C_2B}{C_2A} = -1. \quad (4.12)$$

De (4.12) decorre, pelo Teorema 3.2 (de Ceva), que as cevianas AA_2 , BB_2 e CC_2 , isotômicas às cevianas AA_1 , BB_1 e CC_1 , são concorrentes ou paralelas.

2. Suponhamos agora que as cevianas AA_1 , BB_1 e CC_1 são concorrentes em um ponto P_1 . Assim, temos três possibilidades para analisar.

- a) $P_1 \notin (AB \cup BC \cup AC)$

Neste caso, o mesmo raciocínio empregado anteriormente permite deduzir a relação (4.12) a partir da relação (4.11). Portanto, as cevianas AA_2 , BB_2 e CC_2 são concorrentes ou paralelas.

- b) $P_1 \in ((AB \cup BC \cup AC) - \{A, B, C\})$

Suponhamos que $P_1 \in (AB - \{A, B\})$. Temos então que:

$$AA_1 \equiv AP_1 \Rightarrow A_1 \equiv B;$$

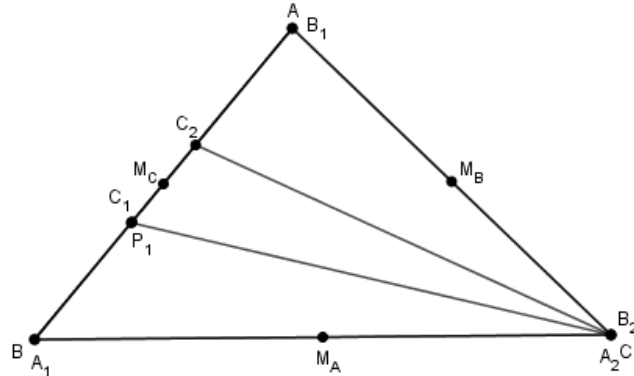
$$BB_1 \equiv BP_1 \Rightarrow B_1 \equiv A;$$

$$CC_1 \equiv CP_1 \Rightarrow P_1 \equiv C_1.$$

As relações (4.5)-(4.10) garantem que $A_2 \equiv C$ e $B_2 \equiv C$. Além disso, C_2 é simétrico a P_1 . Assim, $AA_2 \cap BB_2 \cap CC_2 = AC \cap BC \cap CC_2 = \{C\}$. Portanto, as cevianas

AA_2, BB_2 e CC_2 , isotômicas às cevianas AA_1, BB_1 e CC_1 , respectivamente, são concorrentes em C - Figura 4.12.

Figura 4.12 – Triângulo ABC , onde $A \equiv B_1, B \equiv A_1, C \equiv A_2 \equiv B_2$ e $P_1 \equiv C_1$



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Da mesma forma, se $P_1 \in (BC - \{B, C\})$, então as cevianas AA_2, BB_2 e CC_2 são concorrentes em A ; se $P_1 \in (AC - \{A, C\})$, então as cevianas AA_2, BB_2 e CC_2 são concorrentes em B .

c) $P_1 \in \{A, B, C\}$

Suponhamos que $P_1 \equiv A$. Temos então que:

$$BB_1 \equiv BP_1 \equiv BA \Rightarrow B_1 \equiv A;$$

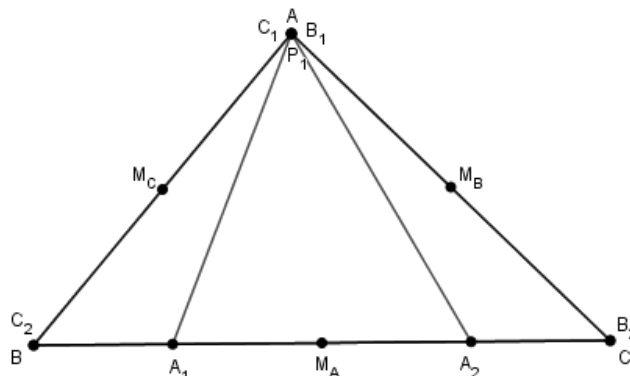
$$CC_1 \equiv CP_1 \equiv CA \Rightarrow C_1 \equiv A.$$

Desta forma, as cevianas AA_1, BB_1 e CC_1 são concorrentes em A - Figura 4.13. Portanto, $AA_1 \not\equiv AB$ e $AA_1 \not\equiv AC$. Assim, $A_1 \in (BC - \{B, C\})$ e

$$B_1 \equiv A \Rightarrow B_2 \equiv C; \tag{4.13}$$

$$C_1 \equiv A \Rightarrow C_2 \equiv B. \tag{4.14}$$

Figura 4.13 – Triângulo ABC , onde $A \equiv P_1 \equiv B_1 \equiv C_2, B \equiv C_1$ e $C \equiv B_2$



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Ainda, como A_2 é simétrico a A_1 e $A_1 \in (BC - \{B, C\})$, temos que $A_2 \in (BC - \{B, C\})$. Assim, $BB_2 \cap CC_2 \cap AA_2 = BC \cap BC \cap AA_2 = \{A_2\}$. Portanto, as cevianas AA_2 , BB_2 e CC_2 têm um ponto comum $A_2 \in (BC - \{B, C\})$, ou seja, são concorrentes.

Obtemos um resultado análogo ao supor que $P_1 \equiv B$ ou $P_1 \equiv C$.

□

Construímos a visualização dinâmica das cevianas isotômicas no GeoGebra e a disponibilizamos no link

<https://www.geogebra.org/m/ztvhbqby>.

No GeoGebra App, os pontos A , B , C , A_2 , B_1 e C_2 podem ser movidos dinamicamente.

4.6 COORDENADAS BARICÊNTRICAS

Em geometria, um sistema de coordenadas baricêntricas, apresentadas pela primeira vez pelo matemático alemão August Ferdinand Möbius (1790-1868), é um sistema de coordenadas no qual a localização de um ponto é especificada em relação a um *simplex* (um triângulo em \mathbb{R}^2 , um tetraedro em \mathbb{R}^3). As coordenadas baricêntricas de um ponto podem ser interpretadas como massas colocadas nos vértices do simplex, de modo que o ponto seja o centro de massa (ou baricentro) dessas massas. Essas massas podem ser nulas ou negativas; serão todas positivas se, e somente se, o ponto estiver no interior do simplex (SKLYARENKO, 2011).

O baricentro de um conjunto finito de pontos no plano ou no espaço é um ponto que permite que certas combinações lineares de vetores sejam reduzidas (PAMFILOS, 2021). As coordenadas baricêntricas permitem provas elegantes dos Teoremas 3.1 (de Menelaus) e 3.2 (de Ceva) (SILVA, 2015; WEISSTEIN, 2022h), ambos abordados no Capítulo 3.

O Teorema 4.4 estabelece as coordenadas baricêntricas de um ponto G_1 em \mathbb{R}^2 empregando os conceitos de cevianas isotômicas e pontos recíprocos (SORTAIS; SORTAIS, 1997). Para demonstrá-lo, precisamos conhecer algumas propriedades das coordenadas baricêntricas de um ponto (MUNKRES, 1930; BORTOLOSSI; FIGUEIREDO, 2017).

Teorema 4.4. *Se AG_1 , BG_1 e CG_1 são cevianas do triângulo ABC concorrentes no ponto G_1 , com $G_1 \notin (AB \cup BC \cup AC)$, então existem três números reais α , β e γ , não nulos, tais que $G_1 = Bar\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$.*

Demonstração. Vamos dividir a demonstração em cinco etapas.

i) Inicialmente, mostremos que α , β e γ são não nulos.

Suponhamos $\alpha = 0$. Assim, $G_1 = Bar\{(B, \beta), (C, \gamma)\}$. Logo, $G_1 \in BC$, o que contradiz a hipótese $G_1 \notin (AB \cup BC \cup AC)$. Portanto, $\alpha \neq 0$. Analogamente, temos que $\beta \neq 0$ e $\gamma \neq 0$.

ii) Provemos agora que $\alpha + \beta \neq 0$, bem como $\beta + \gamma \neq 0$ e $\alpha + \gamma \neq 0$.

Suponhamos $\alpha + \beta = 0$. Logo, $\alpha = -\beta$. Temos então que $\alpha G_1 \vec{A} - \alpha G_1 \vec{B} + \gamma G_1 \vec{C} = \vec{O}$, ou seja, $\alpha \vec{B}A + \gamma G_1 \vec{C} = \vec{O}$. Como α e γ são não nulos, então $\vec{B}A$ e $G_1 \vec{C}$ são colineares. Assim, $G_1 \vec{C} \parallel \vec{B}A$. Mais precisamente, $G_1 C \cap BA = \emptyset$, pois $C \notin AB$. Isto é um absurdo, uma vez que $G_1 C$ é uma ceviana partindo de C , sendo secante a AB . Portanto, $\alpha + \beta \neq 0$. Analogamente, temos que $\beta + \gamma \neq 0$ e $\alpha + \gamma \neq 0$.

iii) Mostremos que $A_1 = \text{Bar}\{(B, \beta), (C, \gamma)\}$ é o pé da ceviana AG_1 e que o baricentro de $\{(B, \frac{1}{\beta}), (C, \frac{1}{\gamma})\}$ é o pé da ceviana isotômica de AG_1 .

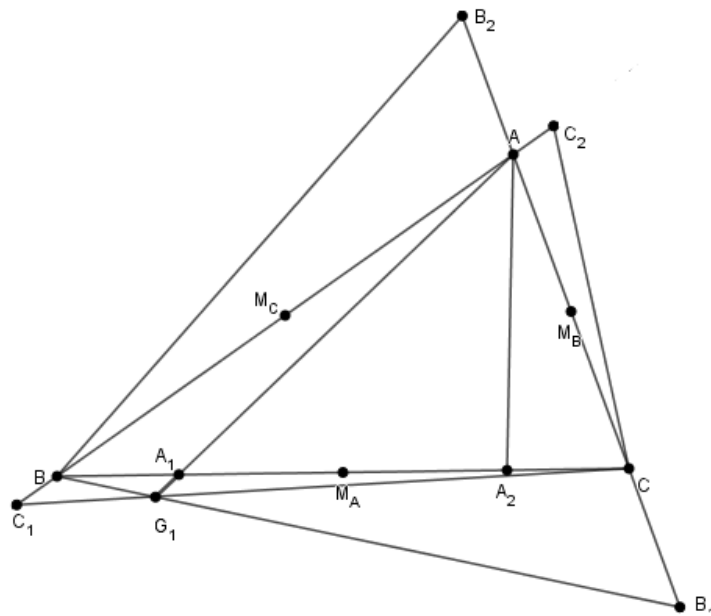
Como $\beta + \gamma \neq 0$, o ponto A_1 , baricentro de $\{(B, \beta), (C, \gamma)\}$, existe e $\beta A_1 \vec{B} + \gamma A_1 \vec{C} = \vec{O}$. Por outro lado, o teorema da associatividade baricêntrica nos permite escrever $G_1 = \text{Bar}\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\} = \text{Bar}\{(A, \alpha), (A_1, \beta + \gamma)\}$. Como $G_1 \in AA_1$ e $A_1 \in BC$, então A_1 é o pé da ceviana AG_1 .

Considerando A_2 o pé da ceviana isotômica de AG_1 , temos que $A_1 B = -A_2 C$ e $A_1 C = -A_2 B$. Dessa forma, $\beta A_1 \vec{B} + \gamma A_1 \vec{C} = \vec{O}$ pode ser reescrito como $\beta A_2 \vec{C} + \gamma A_2 \vec{B} = \vec{O}$. Logo, $A_2 = \text{Bar}\{(B, \gamma), (C, \beta)\} = \text{Bar}\{(B, \frac{1}{\beta}), (C, \frac{1}{\gamma})\}$.

iv) Se $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 0$, mostremos que as cevianas isotômicas de AG_1 , BG_1 e CG_1 são paralelas.

Seja $A_2 = \text{Bar}\{(B, \frac{1}{\beta}), (C, \frac{1}{\gamma})\}$ - Figura 4.14.

Figura 4.14 – Triângulo ABC , as cevianas isotômicas AA_1 e AA_2 , BB_1 e BB_2 e CC_1 e CC_2 e o ponto G_1



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Por consequência, $(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma})A\vec{A}_2 = \frac{1}{\beta}A\vec{B} + \frac{1}{\gamma}A\vec{C}$. Como $\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = -\frac{1}{\alpha}$, temos que:

$$-\frac{1}{\alpha}A\vec{A}_2 = \frac{1}{\beta}A\vec{B} + \frac{1}{\gamma}A\vec{C}. \quad (4.15)$$

Analogamente, obtemos que:

$$-\frac{1}{\beta}B\vec{B}_2 = \frac{1}{\alpha}B\vec{A} + \frac{1}{\gamma}B\vec{C}. \quad (4.16)$$

A diferença entre as relações (4.15) e (4.16) resulta em:

$$-\frac{1}{\alpha}A\vec{A}_2 + \frac{1}{\beta}B\vec{B}_2 = \left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha}\right)A\vec{B} + \frac{1}{\gamma}(A\vec{C} + C\vec{B}). \quad (4.17)$$

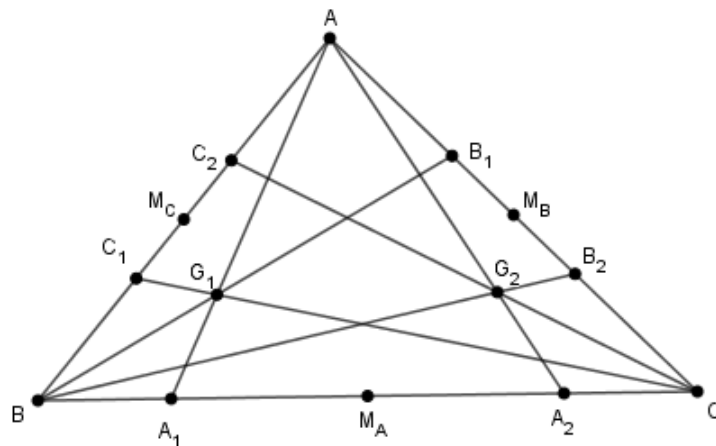
De (4.17), temos que $-\frac{1}{\alpha}A\vec{A}_2 + \frac{1}{\beta}B\vec{B}_2 = \vec{0}$, pois $\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha} = -\frac{1}{\gamma}$. Como os vetores $A\vec{A}_2$ e $B\vec{B}_2$ são colineares, então $A\vec{A}_2 \parallel B\vec{B}_2$. Analogamente, temos que $A\vec{A}_2 \parallel C\vec{C}_2$.

- v) Se $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \neq 0$, mostremos que as cevianas isotômicas de AG_1 , BG_1 e CG_1 são concorrentes e seu ponto de interseção é o baricentro de $\{(A, \frac{1}{\alpha}), (B, \frac{1}{\beta}), (C, \frac{1}{\gamma})\}$.

Como $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \neq 0$, então $G_2 = \text{Bar}\{(A, \frac{1}{\alpha}), (B, \frac{1}{\beta}), (C, \frac{1}{\gamma})\}$ existe, pois pelo teorema da associatividade baricêntrica, associando os pontos B e C , temos $G_2 = \text{Bar}\{(A, \frac{1}{\alpha}), (A_2, \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma})\}$. Assim, $G_2 \in AA_2$ e $AG_2 \equiv AA_2$.

Portanto, as retas AG_2 , BG_2 e CG_2 são as cevianas isotômicas de AG_1 , BG_1 e CG_1 , respectivamente. Dessa forma, as cevianas isotômicas de AG_1 , BG_1 e CG_1 são concorrentes em G_2 - Figura 4.15.

Figura 4.15 – Triângulo ABC , as cevianas isotômicas AA_1 e AA_2 , BB_1 e BB_2 e CC_1 e CC_2 e os pontos recíprocos G_1 e G_2



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

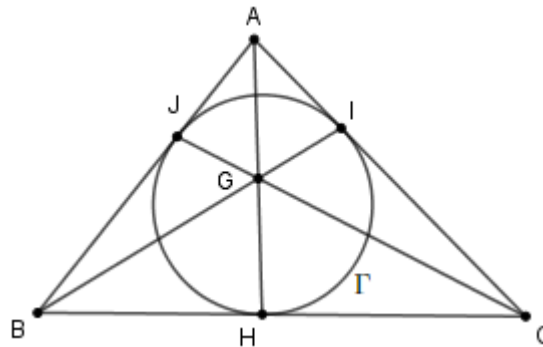
4.7 PONTO DE GERGONNE

O ponto de Gergonne, assim denominado em homenagem ao matemático francês Joseph Diez Gergonne (1771-1859), é o lugar geométrico em um triângulo estabelecido pela Definição 4.2 (SORTAIS; SORTAIS, 1997).

Definição 4.2 (Ponto de Gergonne). *Sejam a circunferência Γ , inscrita em um triângulo ABC , e os pontos H , I e J de interseção de Γ com os lados BC , AC e AB de ABC , respectivamente. O ponto G , interseção dos segmentos AH , BI e CJ , é o ponto de Gergonne.*

A Figura 4.16 ilustra o ponto de Gergonne. A existência deste ponto é determinada pelo Teorema 4.5.

Figura 4.16 – Ponto G de Gergonne



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Teorema 4.5. *O ponto de Gergonne existe e é único.*

Demonstração. Sejam o triângulo ABC , circunscrito à circunferência Γ , e os pontos H , I e J , pontos nos quais Γ tangencia os lados BC , AC e AB de ABC , respectivamente - Figura 4.16.

Provaremos inicialmente que os segmentos AH e BI não são paralelos.

Suponhamos que $AH \parallel BI$. Pelo teorema de Tales, temos que:

$$\frac{HB}{HC} = \frac{AI}{AC}. \quad (4.18)$$

Mas, $H \in (BC - \{B, C\})$ e $I \in (AC - \{A, C\})$. Logo:

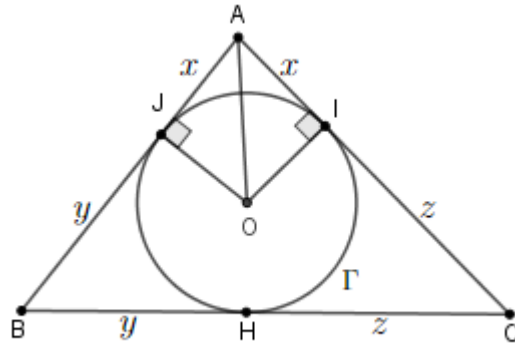
$$\frac{HB}{HC} < 0 \text{ e } \frac{AI}{AC} > 0. \quad (4.19)$$

Porém, as desigualdades em (4.19) contradizem a igualdade (4.18). Portanto, os segmentos AH e BI são concorrentes.

Mostraremos agora que os segmentos AH , BI e CJ são concorrentes em um ponto.

Como a circunferência Γ está inscrita no triângulo ABC , temos que os lados de ABC são perpendiculares ao raio de Γ nos pontos de tangência - Figura 4.17.

Figura 4.17 – Triângulo ABC , a circunferência inscrita Γ e os pontos de interseção H, I e J



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Seja O o centro de Γ . Assim, $OI \equiv OJ$ e $\triangle AOI \equiv \triangle AOJ$ pelo caso CH (cateto-hipotenusa). Disto decorre que $AJ \equiv AI$. Analogamente: $BH \equiv BJ$; $CH \equiv CI$.

Considerando $AJ = x$, $BH = y$ e $CH = z$, temos que:

$$\frac{BH}{CH} \cdot \frac{CI}{AI} \cdot \frac{AJ}{BJ} = -\frac{y}{z} \cdot -\frac{z}{x} \cdot -\frac{x}{y} = -1. \quad (4.20)$$

De (4.20) decorre, pelo Teorema 3.2 (de Ceva), que as retas que contêm os segmentos AH , BI e CJ são concorrentes ou paralelas. Como já mostramos que não são paralelas, então as retas são concorrentes em um ponto, o ponto de Gergonne.

□

Construímos a visualização dinâmica do ponto de Gergonne no GeoGebra e a disponibilizamos no link

<https://www.geogebra.org/m/ratpv2kv>.

No GeoGebra App, os pontos A , B e C podem ser movimentados dinamicamente.

4.7.1 PROPRIEDADE

Sortais (1997) descreve a Propriedade 4.1 do ponto de Gergonne.

Propriedade 4.1. O ponto G de Gergonne do triângulo ABC é o baricentro de

$$\{(A, yz), (B, xz), (C, xy)\}.$$

Demonstração. Sejam: o triângulo ABC ; a circunferência γ inscrita em ABC ; os pontos H , I e J , pontos de interseção de γ com os lados BC , AC e AB , respectivamente, de ABC - Figura 4.17. Consideremos $AJ = x$, $BH = y$ e $CI = z$, todos estritamente positivos. Assim,

$CH \equiv CI = z$. Como $Bar\{(B, xz), (C, xy)\} = Bar\{(B, z), (C, y)\}$ e $H \in (BC - \{B, C\})$, temos que $Bar\{(B, CH), (C, BH)\} = H$. Usando a associatividade baricêntrica em B e C , obtemos que $G = Bar\{(A, yz), (B, xz), (C, xy)\}$. Logo, $G = Bar\{(A, yz), (H, xz + xy)\}$.

Portanto, $G \in (AH - \{A, H\})$, pois $yz > 0$ e $xz + xy > 0$. Da mesma forma, provamos que $G \in (BI - \{B, I\})$ e $G \in (CJ - \{C, J\})$, o que mostra que AH , BI e CJ são concorrentes e seu ponto de intersecção G , que é o ponto de Gergonne do triângulo ABC , é o baricentro de $\{(A, yz), (B, xz), (C, xy)\}$.

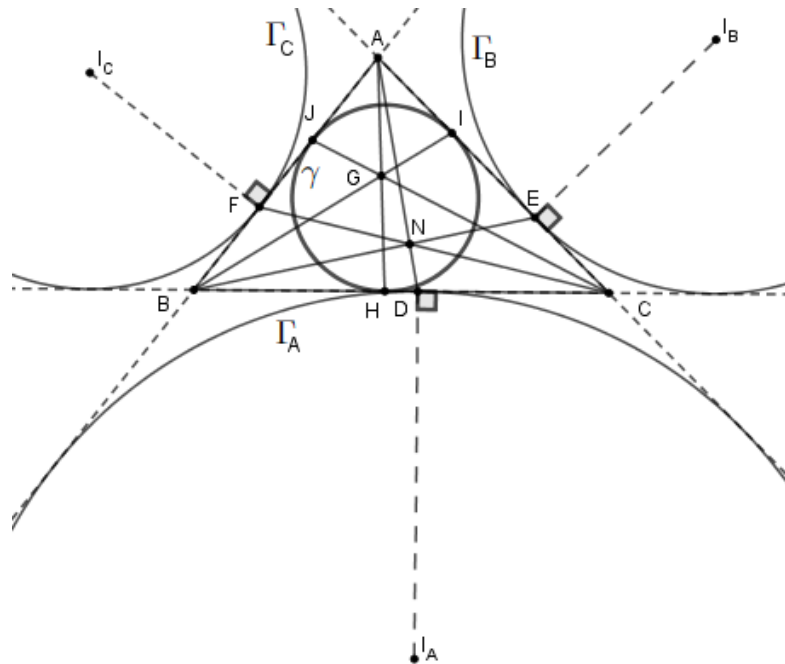
□

4.8 PONTO DE NAGEL

O ponto de Nagel, assim nomeado em homenagem ao geômetra alemão Christian Heinrich von Nagel (1803-1882), é o lugar geométrico em um triângulo estabelecido pela Definição 4.3 (SORTAIS; SORTAIS, 1997).

Definição 4.3 (Ponto de Nagel). *Sejam Γ_A , Γ_B e Γ_C as circunferências ex-inscritas⁴ ao triângulo ABC e D , E e F os pontos de tangência dessas circunferências aos lados BC , AC e AB de ABC , respectivamente. As cevianas AD , BE e CF se intersectam em um único ponto, denominado ponto de Nagel - Figura 4.18.*

Figura 4.18 – Pontos recíprocos: o ponto G de Gergonne e o ponto N de Nagel



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

⁴ Uma circunferência ex-inscrita de um triângulo é uma circunferência externa ao triângulo, tangente a um de seus lados e aos prolongamentos dos outros dois. Todo triângulo tem três circunferências ex-inscritas distintas, cada uma tangente a um dos lados do triângulo. O centro da circunferência ex-inscrita é denominado ex-incentro do triângulo (NETO, 2013).

Os pontos de Gergonne e de Nagel, ilustrados na Figura 4.18, são pontos recíprocos (SORTAIS; SORTAIS, 1997). A existência do ponto de Nagel é estabelecida pelo Teorema 4.6.

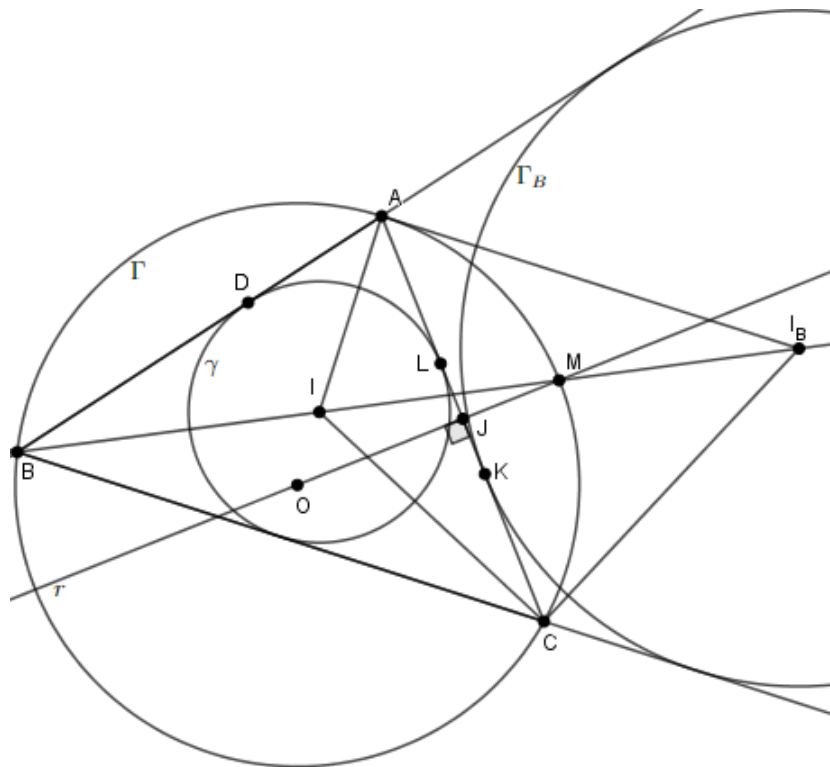
Teorema 4.6. *O ponto de Nagel existe e é único.*

Na demonstração do Teorema 4.6, empregamos o Teorema 4.7, cuja demonstração encontra-se em Neto (2013).

Teorema 4.7. *Se ABC é um triângulo qualquer, o ponto I é o incentro de ABC , o ponto I_B é o ex-incentro de ABC relativo ao lado AC e M é o ponto de interseção entre a circunferência que circunscreve ABC e o segmento II_B , então M é o ponto médio do arco AC que não contém B e $MA \equiv MC \equiv MI \equiv MI_B$.*

Demonstração do Teorema 4.6. Sejam: o triângulo ABC ; a circunferência inscrita γ , de centro I ; a circunferência circunscrita Γ , de centro O ; a circunferência ex-inscrita Γ_B ao lado AC de ABC , de centro I_B ; o ponto J , ponto médio de AC ; o ponto $L = \gamma \cap AC$; o ponto $K = \Gamma_B \cap AC$; o ponto $M = \Gamma \cap II_B$ e a mediatriz r de AC - Figura 4.19.

Figura 4.19 – Triângulo ABC e as circunferências inscrita γ , de centro I , circunscrita Γ , de centro O , e ex-inscrita Γ_B em relação a AC , de centro I_B

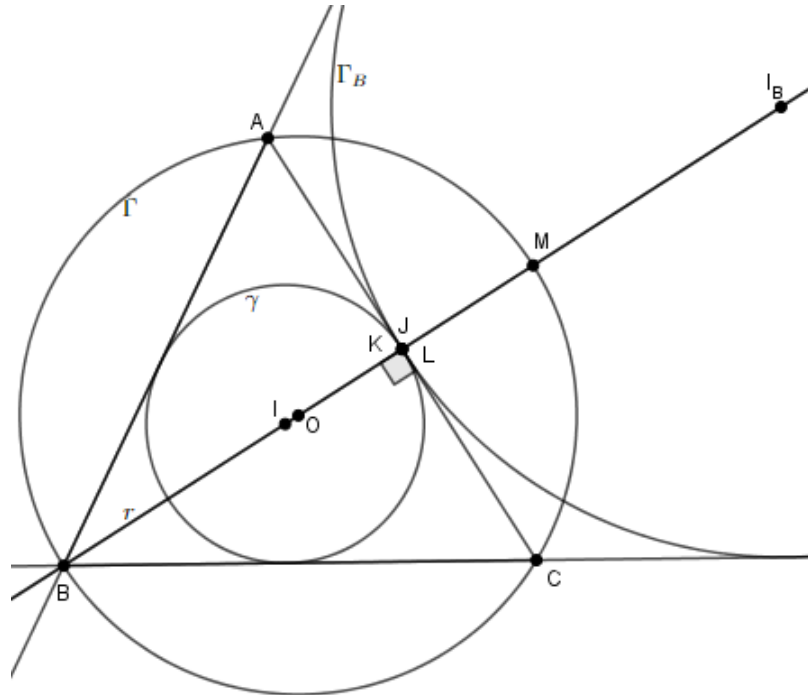


Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Pelo Teorema 4.7, temos que $MA \equiv MC \equiv MI \equiv MI_B$. Assim, os pontos I , A , I_B e C são vértices de um quadrilátero inscritível de diâmetro II_B , cujo ponto médio M é o centro

da circunferência circunscrita. Isto é válido se o triângulo ABC não é isósceles de base AC . Se o triângulo ABC é isósceles de base AC , como na Figura 4.20, os pontos I, I_B, J e O são colineares e a reta que passa por eles é coincidente à mediatriz de AC . Neste caso, o centro da circunferência circunscrita ao quadrilátero $AICI_B$ também é o ponto médio M do segmento II_B .

Figura 4.20 – Triângulo isósceles ABC , de base AC , e as circunferências inscrita γ , de centro I , circunscrita Γ , de centro O , e ex-inscrita Γ_B em relação a AC , de centro I_B



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Assim, temos que as projeções ortogonais dos pontos I, I_B e M sobre o segmento AC são, respectivamente, os pontos L, K e J . Como M é o ponto médio de II_B , então os pontos L e K são simétricos em relação ao ponto J . Isso vale para as três circunferências ex-inscritas e para os três lados do triângulo ABC .

Dessa forma, temos na Figura 4.18 que D e H, I e E e J e F são pontos recíprocos. Logo, AD, BE e CF são, respectivamente, as cevianas isotômicas de AH, BI e CJ , que concorrem no ponto N . Este ponto é interior ao triângulo ABC , pois $H \in BC$ e $I \in AC$. Portanto, o ponto N existe e é único.

□

Uma prova do Teorema 4.6 usando o Teorema 3.2 (de Ceva), similar à prova do Teorema 4.5, encontra-se em Bogomolny (2018f).

Construímos a visualização dinâmica do ponto de Nagel no GeoGebra e a disponibilizamos no link

<https://www.geogebra.org/m/hqfkjabd>.

No GeoGebra App, os pontos A , B e C podem ser movidos dinamicamente.

4.8.1 PROPRIEDADES

Sortais (1997) descreve as Propriedades 4.2 a 4.5, relativas ao ponto de Nagel. Para demonstrar a Propriedade 4.4 precisamos da Propriedade Auxiliar 4.1.

Propriedade 4.2. *O ponto N de Nagel do triângulo ABC é o baricentro de*

$$\{(A, x), (B, y), (C, z)\}.$$

Demonstração. Sejam: o triângulo ABC ; a circunferência γ inscrita em ABC ; os pontos H , I e J , pontos de interseção de γ com os lados BC , AC e AB , respectivamente, de ABC - Figura 4.18. Consideremos $AJ = x$, $BH = y$ e $CI = z$, todos estritamente positivos. Como AH e AD são cevianas isotômicas, temos que $CD \equiv BH = y$ e $BD \equiv CH = z$. Isto implica que $\text{Bar}\{(B, y), (C, z)\} = \text{Bar}\{(B, CD), (C, BD)\}$. Como $D \in (BC - \{B, C\})$, temos que $\text{Bar}\{(B, CD), (C, BD)\} = D$. Utilizando a associatividade baricêntrica em B e C , obtemos que $N = \text{Bar}\{(A, x), (B, y), (C, z)\}$. Logo, $N = \text{Bar}\{(A, x), (D, y + z)\}$.

Portanto, $N \in (AD - \{A, D\})$, pois $x > 0$ e $y + z > 0$. Da mesma forma, provamos que $N \in (BE - \{B, E\})$ e $N \in (CF - \{C, F\})$, o que mostra que AD , BE e CF são concorrentes e seu ponto de interseção N , que é o ponto de Nagel do triângulo ABC , é o baricentro de $\{(A, x), (B, y), (C, z)\}$.

□

Propriedade 4.3. *Se N é o ponto de Nagel do triângulo ABC , P e O são, respectivamente, os centros das circunferências inscrita e circunscrita a ABC e G_1 e H_1 são, respectivamente, o isobaricentro⁵ e o ortocentro⁶ de ABC , então:*

$$G_1\vec{N} + 2G_1\vec{P} = \vec{O};$$

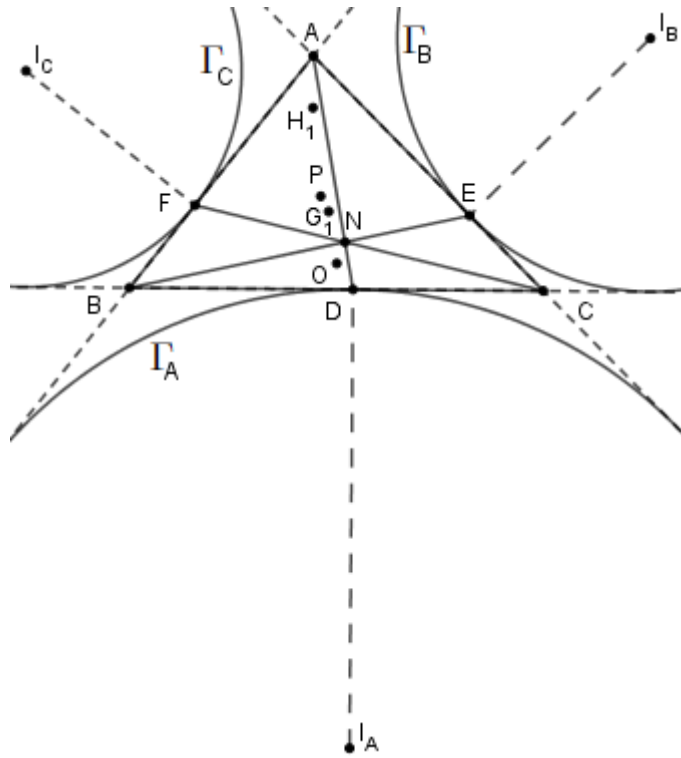
$$H_1\vec{N} + 2O\vec{P} = \vec{O}.$$

Demonstração. Sejam: o triângulo ABC ; o ponto N de Nagel de ABC ; o ponto H_1 , ortocentro de ABC ; o ponto G_1 , isobaricentro de ABC ; os pontos P e O , respectivamente os centros das circunferências inscrita e circunscrita a ABC - Figura 4.21.

⁵ Um isobaricentro é um baricentro com todas as massas nos vértices do *simplex* iguais entre si. Em um triângulo, o isobaricentro coincide com a interseção das três medianas, ou seja, as cevianas que têm por extremos um vértice e o ponto médio do lado oposto ao vértice.

⁶ O ortocentro é o ponto de interseção das alturas de um triângulo.

Figura 4.21 – Relações entre o ponto N de Nagel e os pontos notáveis do triângulo ABC



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Como $P = Bar\{(A, a), (B, b), (C, c)\}$, com $a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$ e $a + b + c = 2(x + y + z)$, temos que:

$$\begin{aligned} G_1 \vec{P} &= \frac{1}{a + b + c} (aG_1 \vec{A} + bG_1 \vec{B} + cG_1 \vec{C}); \\ G_1 \vec{P} &= \frac{1}{2(x + y + z)} [(y + z)G_1 \vec{A} + (x + z)G_1 \vec{B} + (x + y)G_1 \vec{C}]. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Além disso, $N = Bar\{(A, x), (B, y), (C, z)\}$ - Propriedade 4.2. Logo:

$$G_1 \vec{N} = \frac{1}{x + y + z} [xG_1 \vec{A} + yG_1 \vec{B} + zG_1 \vec{C}]. \quad (4.22)$$

Multiplicando (4.21) por dois e somando membro a membro a (4.22), obtemos que:

$$\begin{aligned} 2G_1 \vec{P} + G_1 \vec{N} &= \frac{x + y + z}{x + y + z} (G_1 \vec{A} + G_1 \vec{B} + G_1 \vec{C}); \\ G_1 \vec{N} + 2G_1 \vec{P} &= \vec{O}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

uma vez que G_1 é o isobaricentro do triângulo ABC e, portanto, $G_1 \vec{A} + G_1 \vec{B} + G_1 \vec{C} = \vec{O}$.

Desta forma, os pontos G_1 , P e N são colineares.

Os pontos O , G_1 e H_1 pertencem à reta de Euler⁷. Logo:

$$2G_1 \vec{O} + G_1 \vec{H}_1 = \vec{O}. \quad (4.24)$$

⁷ Reta que passa pelo circuncentro, pelo isobaricentro e pelo ortocentro de um triângulo (NETO, 2013).

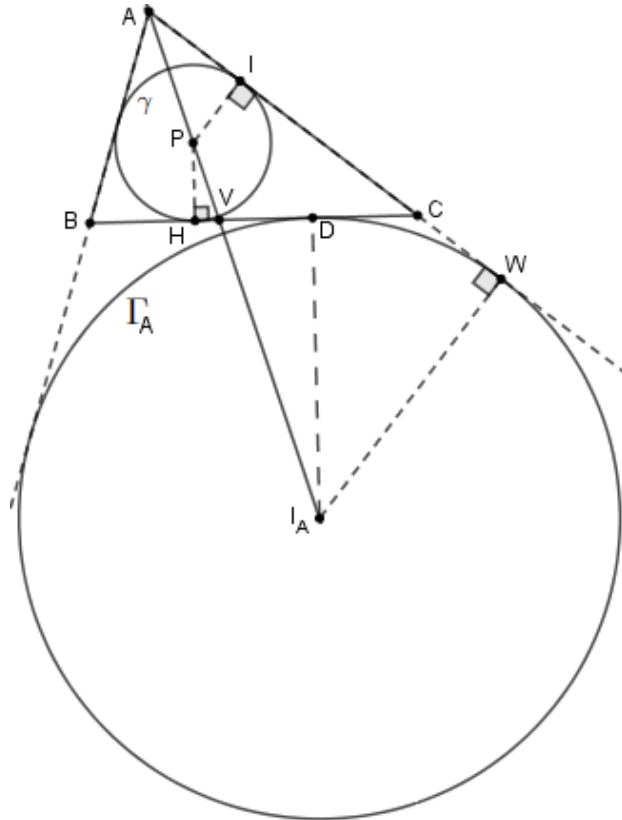
Subtraindo membro a membro (4.24) de (4.23), concluímos que:

$$\begin{aligned}(G_1\vec{N} - G_1\vec{H}_1) + 2(G_1\vec{P} - G_1\vec{O}) &= \vec{O}; \\ H_1\vec{N} + 2\vec{OP} &= \vec{O}.\end{aligned}$$

□

Propriedade Auxiliar 4.1. A circunferência γ de centro P , inscrita no triângulo ABC , é a imagem da circunferência ex-inscrita Γ_A , relativa ao lado BC e de centro I_A , por duas homotetias cujos centros são os pontos A e V , onde $V = AI_A \cap BC$ - Figura 4.22.

Figura 4.22 – Triângulo ABC , a circunferência inscrita γ e a circunferência ex-inscrita Γ_A



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Demonstração. Sejam: o triângulo ABC ; a circunferência γ de centro P , inscrita em ABC ; os pontos H e I , pontos de tangência de γ aos lados BC e AC , respectivamente, de ABC ; a circunferência ex-inscrita Γ_A , de centro I_A e tangente ao lado BC de ABC no ponto D ; o ponto W , ponto de tangência de Γ_A ao prolongamento do lado AC de ABC ; o ponto $V = AI_A \cap BC$, como ilustra a Figura 4.22.

i) Provemos inicialmente que o ponto A é centro da homotetia.

Como os pontos A , P e I_A são colineares (NETO, 2013), os triângulos retângulos AIP e AWI_A são semelhantes pelo caso AA (ângulo-ângulo). Assim, temos que:

$$\frac{AI}{AW} = \frac{AP}{AI_A}. \quad (4.25)$$

Em (4.25), seja $k = \frac{AP}{AI_A}$ a razão de semelhança. Assim, $\vec{AP} = k\vec{AI_A}$. A dilatação h , com centro em A e razão k , transforma I_A em P e W em I . Logo, também transforma Γ_A em γ .

Sejam ainda r e r_A os respectivos raios de γ e Γ_A . Temos que $\frac{AP}{AI_A} > 0$. Assim, $k > 0$ e, portanto, $r = |k|r_A$. Logo, $k = \frac{r}{r_A}$.

ii) Provemos agora que o ponto V também é centro da homotetia.

Como os pontos V , P e I_A são colineares, os triângulos retângulos PHV e $I_A DV$ são semelhantes pelo caso AA (ângulo-ângulo). Dessa forma, obtemos que:

$$\frac{VH}{VD} = \frac{VP}{VI_A}. \quad (4.26)$$

Em (4.26), seja $k' = \frac{VP}{VI_A}$ a razão de semelhança. Logo, $\vec{VP} = k'\vec{VI_A}$ e $\vec{VH} = k'\vec{VD}$. A dilatação h' , com centro em V e razão k' , transforma I_A em P e D em H . Desta forma, também transforma Γ_A em γ . Como $\frac{VP}{VI_A} < 0$, temos que $k' < 0$ e, portanto, $r = |k'|r_A$. Logo, $k' = -\frac{r}{r_A}$.

□

Propriedade 4.4. Se $Z \in AN$, onde Z é o ponto diametralmente oposto ao ponto H , interseção da circunferência inscrita γ de centro P com o lado BC do triângulo ABC , e N é o ponto de Nagel de ABC , então $AN \parallel PM_A$, sendo M_A o ponto médio do lado BC de ABC - Figura 4.23.

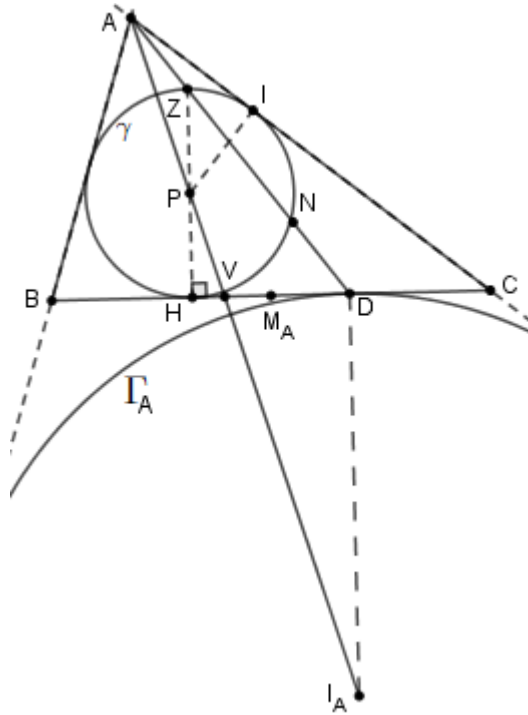
Demonstração. Sejam: o triângulo ABC ; a circunferência γ de centro P , inscrita em ABC ; o ponto H , interseção de γ com o lado BC de ABC ; a circunferência ex-inscrita Γ_A , de centro I_A e tangente ao lado BC de ABC no ponto D ; o ponto Z , diametralmente oposto ao ponto H em γ ; o ponto N de Nagel de ABC ; o ponto M_A , ponto médio do lado BC de ABC , como ilustra a Figura 4.23.

i) Provemos inicialmente que $Z \in AN$.

Como a dilatação h' (Propriedade Auxiliar 4.1) transforma I_A em P e D em H , temos que:

$$\vec{PH} = -\frac{r}{r_A} \vec{I_A D}. \quad (4.27)$$

Figura 4.23 – Triângulo ABC , a circunferência inscrita γ , a circunferência ex-inscrita Γ_A e o ponto N de Nagel de ABC



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Ainda, a dilatação h (Propriedade Auxiliar 4.1) transforma Γ_A em γ e torna o segmento AN globalmente invariante, pois contém A , o centro de h . Assim, $D \in AN \cap \Gamma_A$ e, portanto, $h(D) \in AN \cap \gamma$. Logo, $Z = h(D)$. Dessa forma, temos que:

$$\vec{PZ} = \frac{r}{r_A} I_A \vec{D}. \quad (4.28)$$

De (4.27) e (4.28), temos que $\vec{PZ} = -\vec{PH}$. Logo, o ponto Z é diametralmente oposto ao ponto H em γ e pertence ao segmento AN .

ii) Provemos agora que $AN \parallel PM_A$.

Como M_A é o ponto médio do segmento BC e também é o ponto médio de HD , pois AH e AD são cevianas isotômicas, e P é o ponto médio do segmento HZ , concluímos, pela base média do triângulo ZHD (DOLCE; POMPEO, 1993; NETO, 2013), que:

$$PM_A = \frac{1}{2} ZD; \quad (4.29)$$

$$PM_A \parallel ZD \parallel AN.$$

□

Propriedade 4.5. Se G_1 e H_1 são, respectivamente, o isobaricentro e o ortocentro do triângulo ABC , os pontos P e O são, respectivamente, os centros das circunferências inscrita e circunscrita a ABC , o ponto Z é diametralmente oposto ao ponto H , interseção da circunferência

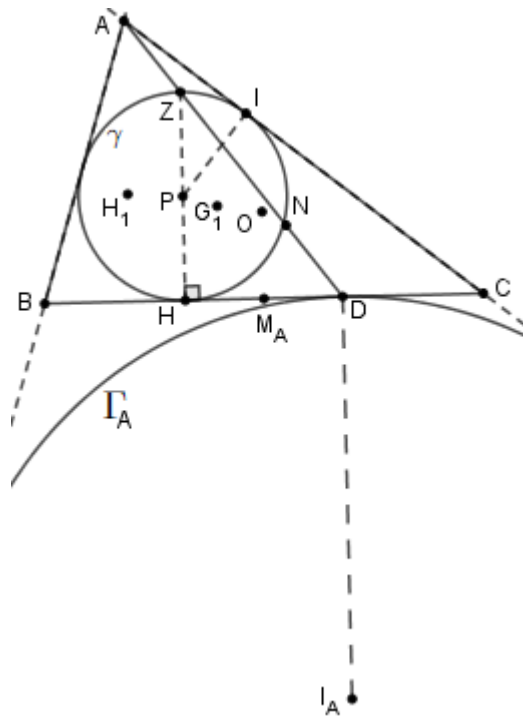
inscrita com o lado BC de ABC , e N é o ponto de Nagel de ABC - Figura 4.24, então:

$$G_1\vec{N} = -2G_1\vec{P};$$

$$H_1\vec{N} = -2\vec{OP};$$

$$A\vec{N} = \vec{ZD}.$$

Figura 4.24 – Triângulo ABC , a circunferência inscrita γ , a circunferência ex-inscrita Γ_A , o ponto N de Nagel, o ortocentro H_1 e o isobaricentro G_1 de ABC



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Demonstração. Sejam: o triângulo ABC ; a circunferência γ de centro P , inscrita em ABC ; o ponto H , interseção de γ com o lado BC de ABC ; a circunferência ex-inscrita Γ_A , de centro I_A e tangente ao lado BC de ABC no ponto D ; o ponto O , centro da circunferência circunscrita a ABC ; o ponto Z , diametralmente oposto ao ponto H em γ ; o ponto N de Nagel de ABC ; o ponto M_A , ponto médio do lado BC de ABC ; o ponto H_1 , ortocentro de ABC ; o ponto G_1 , isobaricentro de ABC , como ilustra a Figura 4.24.

Como G_1 é o isobaricentro do triângulo ABC , temos, pela propriedade das medianas de ABC (DOLCE; POMPEO, 1993; NETO, 2013), que $G_1\vec{A} = -2G_1\vec{M}_A$.

Seja t a dilatação de centro G_1 e razão -2 . Assim, $t(M_A) = A$. Por t , a imagem de M_AP é o segmento contendo A e paralelo a M_AP .

Sendo $AN \parallel M_AP$, temos que $t(M_AP) = AN$. Da mesma forma, estabelecemos que $t(M_BP) = BN$, onde M_B é o ponto médio de AC . Como $P \in (M_AP \cap M_BP)$, temos que $t(P) \in (AN \cap BN)$, de onde $t(P) = N$. Disto, podemos deduzir que $G_1\vec{N} = -2G_1\vec{P}$.

Assim, temos que:

$$\begin{aligned}t(G_1, -2) : O &\mapsto H_1; \\ P &\mapsto N; \\ M_A &\mapsto A.\end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}H_1\vec{N} &= -2\vec{OP}; \\ A\vec{N} &= -2M_A\vec{P}.\end{aligned}\tag{4.30}$$

De (4.29) e (4.30), concluímos que $A\vec{N} = Z\vec{D}$.

□

5 CONCLUSÃO

Apresentamos neste trabalho demonstrações formais e visualizações dinâmicas do teorema de Pitágoras, com foco voltado ao ensino na Educação Básica, assim como de teoremas clássicos da geometria plana, abordados nos cursos de Licenciatura em Matemática e no PROFMAT. Nas investigações dinâmicas, empregamos o aplicativo gratuito GeoGebra.

A maior dificuldade enfrentada na realização deste trabalho foi a tradução, do Francês para o Português, de uma das referências (SORTAIS; SORTAIS, 1997) usadas na redação do Capítulo 4. Isto denota a escassa bibliografia existente em Língua Portuguesa para algumas áreas da matemática, como a geometria, fato este também constatado pela autora durante a realização do trabalho de conclusão do curso de Licenciatura em Matemática (SILVA, 2018).

Acreditamos que o presente trabalho pode ser aperfeiçoado com a inclusão de roteiros descritivos nas abordagens dinâmicas, assim como um apêndice apresentando a teoria pertinente a coordenadas baricêntricas e suas propriedades.

Esperamos que este trabalho seja útil aos professores de matemática da Educação Básica, por descrever formas dinâmicas de abordar o teorema de Pitágoras, e aos estudantes e professores dos cursos de Licenciatura em Matemática e do PROFMAT, por introduzir abordagens dinâmicas de teoremas que constam nas ementas das disciplinas de geometria desses cursos.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, M. A. F. de. **Particularidades do teorema de Poncelet**. 63 f. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, Paraíba, 2014. Disponível em: <<https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/tede/7650/2/arquivototal.pdf>>. Acesso em: 24 jun. 2022. 20, 39
- BIANCATTO, V. B. **Livro Dinâmico - Estudo de geometria plana através de demonstrações dinâmicas com o auxílio do software GeoGebra**. 132 f. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Estadual de Maringá, Maringá, Paraná, 2021. Disponível em: <https://sca.proformat-sbm.org.br/proformat_tcc.php?id1=6225&id2=171055556>. Acesso em: 14 jul. 2022. 20
- BICUDO, I. Demonstração em matemática. *Bolema*, v. 15, n. 18, p. 79–90, 2002. 16
- BOGOMOLNY, A. **Newton's and Léon Anne's theorems**. 2018a. Disponível em: <<https://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/NewtonTheorem.shtml#explanation>>. Acesso em: 10 maio 2022. 20, 48
- BOGOMOLNY, A. **A property of circumscribed quadrilaterals**. 2018b. Disponível em: <<https://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/CircumQuadri.shtml#explanation>>. Acesso em: 12 maio 2022. 20, 48
- BOGOMOLNY, A. **Morley's miracle**. 2018c. Disponível em: <<https://www.cut-the-knot.org/triangle/Morley/index.shtml>>. Acesso em: 16 maio 2022. 20, 62
- BOGOMOLNY, A. **Lighthouse at Fermat points**. 2018d. Disponível em: <<https://www.cut-the-knot.org/m/Geometry/2x60.shtml>>. Acesso em: 06 maio 2022. 20, 70, 75
- BOGOMOLNY, A. **The Fermat point and generalizations**. 2018e. Disponível em: <http://www.cut-the-knot.org/Generalization/fermat_point.shtml>. Acesso em: 22 junho 2022. 20, 74
- BOGOMOLNY, A. **Nagel point: what is it about? A mathematical droidle**. 2018f. Disponível em: <<http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/NagelPoint.shtml#explanation>>. Acesso em: 11 jul. 2022. 88
- BORTOLOSSI, H. J.; FIGUEIREDO, J. O. de. **Coordenadas baricênticas: uma introdução com ênfase na geometria moderna do triângulo**. 2017. Disponível em: <<http://www.professores.im-uff.mat.br/hjbortol/arquivo/2017.1/cms/cms-coordenadas-baricentricas.pdf>>. Acesso em: 20 jul. 2022. 81
- CARMO, M. P. do; MORGADO, A. C.; WAGNER, E. **Trigonometria e números complexos**. 3. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005. 62, 63
- COXETER, H. S. M.; GREITZER, S. L. **Geometry revisited**. Washington, DC: The Mathematical Association of America, 1967. 21, 39
- COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. **As ideias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1994. 27

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de matemática elementar: geometria plana**. 7. ed. São Paulo: Atual, 1993. v. 9. 46, 77, 93, 94

DOMINGUES, H. H. A demonstração ao longo dos séculos. **Bolema**, v. 15, n. 18, p. 55–67, 2002. 16

EUCLIDES. **Os elementos**. São Paulo: Unesp, 2009. 16, 25

FERNANDES, F. M. **Polígonos e poliedros equidecomponíveis**. 116 f. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, Paraná, 2018. Disponível em: <http://repositorio.roca.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/2972/1/CT_PROFMAT_M_Fernandes%2c%20Flavia%20Mescko_2018.pdf>. Acesso em: 21 jun. 2022. 31

FOSSA, J. A. **Introdução às técnicas de demonstração na matemática**. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009. 26, 28

GEOGEBRA. **GeoGebra: aplicativos matemáticos**. 2022. Disponível em: <https://www.geogebra.org/?lang=pt_BR>. Acesso em: 10 out. 2021. 18, 21, 22, 23, 27, 29, 30, 32, 33, 34, 35, 39, 40, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 67, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 78, 80, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 90, 91, 93, 94

GRAVINA, M. A. Geometria dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da geometria. **Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação**, p. 1–13, 1996. 16

HANDWIKI. **Miquel's theorem**. 2021. Disponível em: <https://handwiki.org/wiki/Miquel%27s_theorem>. Acesso em: 06 jul. 2022. 73

HELLMEISTER, A. C. P. **Geometria em sala de aula**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. 46

IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar: trigonometria**. 7. ed. São Paulo: Atual, 1993. v. 3. 62

LAGO, R. C. **Quadriláteros inscritíveis e os teoremas de Simson-Wallace e de Steiner-Lehmus**. 143 f. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, Paraná, 2018. Disponível em: <http://repositorio.roca.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/3827/1/CT_PROFMAT_M_Lago%2c%20Rodrigo%20Cesar_2018.pdf>. Acesso em: 09 maio 2022. 39, 41, 73

LAGO, R. C.; NÓS, R. L. Investigando teoremas de geometria plana com o GeoGebra. **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo**, v. 9, n. 3, p. 15–29, 2020. 17

LAMOEN, F. van; WEISSTEIN, E. W. **Petr-Neumann-Douglas theorem**. 2022. Disponível em: <<https://mathworld.wolfram.com/Petr-Neumann-DouglasTheorem.html>>. Acesso em: 14 maio 2022. 58

LI, K. Y. Famous geometry theorems. **Mathematical Excalibur**, v. 10, n. 3, p. 1–4, 2005. 39

LIPSCHUTZ, S. **Álgebra linear**. 2. ed. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1978. 34

LOOMIS, E. S. **The pythagorean proposition**. Washington: National Council of Teachers of Mathematics, 1968. 8, 21, 23, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35

MARTINS, A.; FERNANDES, A.; SACCHETTI, M. **Pontos recíprocos**. 2008. Disponível em: <<https://geometrias.blogspot.com/2008/08/pontos-recprocos.html>>. Acesso em: 02 jul. 2022. 78

- MEC. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC/SEB/CNE, 2018. 19
- MUNKRES, J. R. **Elements of algebraic topology**. New York: Addison-Wesley Publishing Company, 1930. 81
- NETO, A. C. M. **Geometria**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. 21, 27, 39, 41, 46, 59, 66, 67, 68, 70, 72, 73, 77, 86, 87, 90, 92, 93, 94
- NÓBRIGA, J. C. C. Demonstrações matemáticas dinâmicas. **REVEMAT**, v. 15, n. 1, p. 1–21, 2019. 16, 17
- NÓS, R. L.; FERNANDES, F. M. Ensinando áreas e volumes por equicomposição. **Educação Matemática em Revista**, v. 24, n. 63, p. 121–137, 2019. 30
- NÓS, R. L.; SANO, M.; LAGO, R. C. Using GeoGebra in generalization processes of geometrical challenging problems. **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo**, v. 10, n. 1, p. 49–64, 2021. 17
- NÓS, R. L.; SILVA, V. M. R. da. Radicais duplos no cálculo do volume de poliedros convexos. **Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 16, p. 53–70, 2019. 17
- NÓS, R. L.; SILVA, V. M. R. da. Compondo/decompondo poliedros convexos com o GeoGebra 3D. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**, v. 7, n. 1, p. 1–7, 2020. 17
- PAMFILOS, P. **Barycentric coordinates or barycentrics**. 2021. Disponível em: <<http://users.math.uoc.gr/~pamfilos/eGallery/problems/Barycentrics.pdf>>. Acesso em: 14 jul. 2022. 81
- PARANÁ, G. do Estado do. **Currículo da Rede Estadual Paranaense - Matemática**. Curitiba: SEED, 2021. 19
- ROSA, E. Mania de Pitágoras. **Revista do Professor de Matemática**, SBM, v. 1, n. 2, p. 14–17, 1983. 26
- SETTE, P. F. **A aula de matemática no projeto UCA: o GeoGebra e o teorema de Pitágoras**. 213 f. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2013. Disponível em: <https://www.repositorio.ufop.br/jspui/bitstream/123456789/3475/1/DISSERTA%c3%87%c3%83O_AulaMatem%c3%a1ticaProjeto.pdf>. Acesso em: 26 ago. 2022. 31
- SILVA, J. C. da. **Os teoremas de Menelaus e Ceva**. 130 f. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2015. Disponível em: <<http://www.tede2.ufrpe.br:8080/tede2/bitstream/tede2/7911/2/Jose%20Constantino%20da%20Silva.pdf>>. Acesso em: 20 jul. 2022. 81
- SILVA, J. J. da. A demonstração matemática da perspectiva da lógica matemática. **Bolema**, v. 15, n. 18, p. 68–78, 2002. 16
- SILVA, M. S. **Visualizações dinâmicas na geometria plana do PROFMAT**. 76 f. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade de Brasília, Brasília, Distrito Federal, 2020. Disponível em: <https://sca.proformat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=5544&id2=171052869>. Acesso em: 16 jul. 2022. 20

SILVA, V. M. R. da. **Calculando o volume de poliedros convexos**. 129 f. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) — UTFPR, Curitiba, Curitiba, Paraná, 2018. 17, 96

SILVA, V. M. R. da; NOS, R. L. **Calculando o volume de poliedros convexos**. 1. ed. Curitiba: CRV, 2018. 17

SILVA, V. M. R. da; NÓS, R. L. Empregando o GeoGebra 3D na de(composição) de poliedros convexos para o cálculo do volume. In: **Educação e ensino de ciências exatas e naturais**. Curitiba: Editora Artemis, 2021. 17

SINGH, S. **O último teorema de Fermat**. 17. ed. Rio de Janeiro: Record, 2010. 21, 25, 36, 37, 38

SKLYARENKO, E. G. **Barycentric coordinates**. 2011. Disponível em: <https://encyclopediaofmath.org/wiki/Barycentric_coordinates>. Acesso em: 13 jul. 2022. 81

SKUTIN, A. **Some new theorems in plane geometry**. 2017. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/316184403_Some_new_theorems_in_plane_geometry>. Acesso em: 27 ago. 2021. 70

SORTAIS, R.; SORTAIS, I. **La géométrie du triangle: exercices résolus**. Paris: Hermann, 1997. 21, 70, 77, 78, 81, 84, 85, 86, 87, 89, 96

WEISSTEIN, E. W. **Modular equation**. 2022a. Disponível em: <<https://mathworld.wolfram.com/ModularEquation.html>>. Acesso em: 25 ago. 2022. 37

WEISSTEIN, E. W. **Brianchon's theorem**. 2022b. Disponível em: <<https://mathworld.wolfram.com/BrianchonsTheorem.html>>. Acesso em: 13 maio 2022. 54

WEISSTEIN, E. W. **Napoleon's theorem**. 2022c. Disponível em: <<https://mathworld.wolfram.com/NapoleonsTheorem.html>>. Acesso em: 13 maio 2022. 58

WEISSTEIN, E. W. **Morley's theorem**. 2022d. Disponível em: <<https://mathworld.wolfram.com/MorleysTheorem.html>>. Acesso em: 16 maio 2022. 62

WEISSTEIN, E. W. **Euler triangle formula**. 2022e. Disponível em: <<https://mathworld.wolfram.com/EulerTriangleFormula.html>>. Acesso em: 23 maio 2022. 66

WEISSTEIN, E. W. **Poncelet's porism**. 2022f. Disponível em: <<https://mathworld.wolfram.com/PonceletsPorism.html>>. Acesso em: 24 maio 2022. 68

WEISSTEIN, E. W. **Miquel's theorem**. 2022g. Disponível em: <<https://mathworld.wolfram.com/MiquelsTheorem.html>>. Acesso em: 06 jul. 2022. 73

WEISSTEIN, E. W. **Barycentric coordinates**. 2022h. Disponível em: <<https://mathworld.wolfram.com/BarycentricCoordinates.html>>. Acesso em: 14 jul. 2022. 81

ÍNDICE

- Bissetriz, 72
- Coordenadas baricêntricas, 81
- Demonstração formal
- cevianas isotômicas, 79
 - coordenadas baricêntricas, 81
 - farol em pontos de Fermat, 76
 - ponto de Fermat, 74
 - ponto de Gergonne, 84
 - ponto de Miquel, 73
 - ponto de Nagel, 87
 - teorema de Brianchon, 55
 - teorema de Ceva, 41
 - teorema de Desargues, 52
 - teorema de Euler, 66
 - teorema de Menelaus, 39
 - teorema de Morley, 62
 - teorema de Napoleão, 58
 - teorema de Newton, 49
 - teorema de Pascal, 44
 - teorema de Pitágoras, 26
 - teorema de Poncelet, 69
- Geometria projetiva, 51, 54
- Homotetia, 76
- Isobaricentro, 89
- Lei
- da tricotomia, 28
- Lugar geométrico, 70
- a circunferência, 70
 - bissetriz de um ângulo, 72
 - mediatriz de um segmento, 71
 - ponto de Fermat, 74
 - ponto de Gergonne, 84
 - ponto de Miquel, 72
- ponto de Nagel, 86
- retas paralelas, 71
- Matemáticos
- Anne, 48
 - Bogomolny, 20
 - Brianchon, 54
 - Ceva, 41
 - Coates, 37
 - Desargues, 51
 - Euler, 37, 66
 - Fermat, 35, 74
 - Frey, 37
 - Gergonne, 84
 - Hecke, 38
 - Lamé, 37
 - Legendre, 37
 - Loomis, 26
 - Menelaus, 39
 - Miquel, 72
 - Morley, 61
 - Möbius, 54, 81
 - Nagel, 86
 - Newton, 48
 - Pascal, 44
 - Pitágoras, 25
 - Poncelet, 68
 - Richard Taylor, 38
 - Tales de Mileto, 41
 - Torricelli, 74
 - Wiles, 35
- Matemáticos amadores
- Napoleão, 58
 - Perigal, 30
- Mediatriz, 71
- Números perfeitos, 25

Propriedades

- ponto de Gergonne, 85
- ponto de Nagel, 89, 92, 93

Teorema

- de Pitágoras, 25
- de Tales, 41
- último de Fermat, 37

Triângulo

- ceviana, 77
- cevianas isotômicas, 77
- circuncentro, 66
- ex-incentro, 86
- incentro, 66
- mediana, 89
- ortocentro, 89
- pontos recíprocos, 78
- retângulo, 25
- trissetrizes, 61

Técnicas de demonstração

- direta, 26
- redução ao absurdo, 28

Visualização dinâmica

- cevianas isotômicas, 81
- farol em pontos de Fermat, 77
- ponto de Fermat, 75
- ponto de Gergonne, 85
- ponto de Miquel, 73
- ponto de Nagel, 88
- teorema de Brianchon, 58
- teorema de Ceva, 44
- teorema de Desargues, 54
- teorema de Euler, 68
- teorema de Menelaus, 41
- teorema de Morley, 66
- teorema de Napoleão, 61
- teorema de Newton, 51
- teorema de Pascal, 48
- teorema de Pitágoras, 29, 31, 32, 34, 35

teorema de Poncelet, 69