UNIVERSIDADE DO ESTADO DE MATO GROSSO
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE SINOP
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL PROFMAT

LUCAS FERNANDO SOARES DE OLIVEIRA

DERIVADA NO ENSINO MÉDIO – UMA PROPOSTA DE UTILIZAÇÃO NA MODELAGEM MATEMÁTICA

Sinop/MT

2022

LUCAS FERNANDO SOARES DE OLIVEIRA

DERIVADA NO ENSINO MÉDIO – UMA PROPOSTA DE UTILIZAÇÃO NA MODELAGEM MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas (FACET) da Universidade do Estado de Mato Grosso (UNEMAT), Campus Universitário de Sinop/MT, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Bruno Zanin.

Sinop/MT

2022

Walter Clayton de Oliveira CRB 1/2049

O48d

OLIVEIRA, Lucas Fernando Soares De.
Derivada no Ensino Médio-uma Proposta de Utilização da Modelagem Matemática / Lucas Fernando Soares de Oliveira – Sinop, 2022.
58 f.; 30 cm. (ilustrações) Il. color. (sim)

Trabalho de Conclusão de Curso (Dissertação/Mestrado) – Curso de Pós-graduação Stricto Sensu (Mestrado Profissional) Profmat, Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas, Câmpus de Sinop, Universidade do Estado de Mato Grosso, 2022.
Orientador: Rodrigo Bruno Zanin

1. Cálculo Diferencial. 2. Derivada. 3. Modelagem Matemática. 4. Otimização. 5. Sequência Didática. I. Lucas Fernando Soares de Oliveira. II. Derivada no Ensino Médio-uma Proposta de Utilização da Modelagem Matemática: .

CDU 510

ESTADO DE MATO GROSSO
SECRETARIA DE ESTADO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE MATO GROSSO
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE SINOP
FACET – FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL- PROFMAT
UNEMAT - SINOP

LUCAS FERNANDO SOARES DE OLIVEIRA

DERIVADA NO ENSINO MÉDIO - UMA PROPOSTA DE UTILIZAÇÃO NA MODELAGEM MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – ProfMat da Universidade do Estado de Mato Grosso/UNEMAT – Campus Universitário de Sinop, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Bruno Zanin
Aprovado em 24/06/2022

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Rodrigo Bruno Zanin
UNEMAT – SINOP - MT

Prof. Dr. Érico Fernando de Oliveira Martins
UNEMAT – SINOP - MT

Prof. Dr. Elizeu Martins de Oliveira Junior
SEDUC – SINOP - MT

Sinop/MT
2022

AGRADECIMENTOS

Agradeço a toda à equipe da UNEMAT, que torna possível o desenvolvimento acadêmico e profissional de tantos estudantes ao longo dos anos.

Agradeço aos professores e coordenadores do PROFMAT, por tamanha dedicação em nome da Matemática e do saber. Por meio destes nobres profissionais, aprendi lições que vão além da sala de aula, e levarei para a vida.

Um agradecimento especial ao meu orientador, Prof. Dr. Rodrigo Bruno Zanin, cujo suporte e motivação foram primordiais para que este trabalho fosse realizado. Sua orientação foi de valor inestimável, e sou muito grato por todo o apoio que recebi.

Obrigado aos meus colegas de mestrado. Foi uma grande honra fazer parte dessa turma, que andou sempre unida. Nossa união foi fundamental para que todos obtivessem sucesso nessa caminhada.

RESUMO

O objetivo deste estudo foi elaborar um material de apoio para professores de Matemática do Ensino Médio utilizarem alguns conceitos do Cálculo Diferencial em sala de aula. Tal atitude por parte do docente propicia ao aluno uma experiência inovadora, através da qual será estimulado a pensar matematicamente sobre situações reais e práticas. Mostraremos como o Cálculo Diferencial pode auxiliar na resolução de problemas no Ensino Médio, e de que modo professores podem trabalhar Modelagem Matemática com seus alunos. Vamos apresentar os conceitos e caracterizações das derivadas, e aplicaremos tais definições em situações-problema que envolvam Matemática, Física, Economia e Agronegócio. Os conceitos abordados nesta pesquisa visam preparar o professor a trabalhá-los em sala de aula, logo, possuem rigor e formalidade equivalentes ao estudo acadêmico. Já nas Sequências Didáticas, onde o professor aplicará esses conceitos em sala de aula, eles serão trabalhados de maneira mais intuitiva e menos rigorosa, adequado a estudantes do Ensino Médio.

Palavras-chave: Cálculo Diferencial, Derivada, Modelagem Matemática, Otimização, Sequência Didática.

ABSTRACT

The aim of this study was to develop a support material for High School Mathematics teachers to use some concepts of Differential Calculus in classes. Such an attitude on the part of the teacher provides the student with an innovative experience, through which he will be encouraged to think mathematically about real and practical situations. We will show how Differential Calculus can help solve problems in High School, and how teachers can work on Mathematical Modeling with their students. We will present the concepts and characterizations of derivatives, and we will apply such definitions in problems involving Mathematics, Physics, Economics and Agribusiness. The concepts addressed in this research aim to prepare the teacher to work with them in the classroom, therefore, they have rigor and formality equivalent to academic study. In the Didactic Sequences, where the teacher will apply these concepts in the classroom, they will be worked in a more intuitive and less rigorous way, suitable for high school students.

Keywords: Differential Calculus, Derivative, Mathematical Modeling, Optimization, Didactic Sequence.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 – INTRODUÇÃO

A Matemática surgiu para auxiliar a humanidade em problemas cotidianos, como contagem de mercadorias, cálculos financeiros, dentre outras situações práticas. Com o desenvolvimento das civilizações e das tecnologias, a complexidade e abstração dessa ciência aumentaram consideravelmente, de modo que, atualmente, é comumente vista com estranheza, por parecer distante da realidade, e até mesmo impraticável. Porém, essa é uma ideia equivocada, pois, apesar de conter abstrações e linguagem muito particular, a Matemática, em grande parte, continua servindo ao propósito original, de auxiliar a humanidade na forma de lidar ou solucionar os problemas práticos.

Uma forma de aplicar a Matemática no cotidiano é por meio da Modelagem, que, segundo Bassanezi (2002, p. 16), "[...] consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real." Assim, um problema matemático pode ser resolvido com técnicas conhecidas para se obter uma solução, a qual é interpretada e traduzida para a realidade.

A Modelagem se desenvolveu graças aos avanços na Matemática ao longo do tempo. Um recurso muito importante nesse contexto foi o Cálculo Diferencial e Integral, que teve início na Grécia Antiga, mas foi melhor estruturado no final do século XVII. Atualmente, os conceitos de Cálculo podem ser aplicados na modelagem dos mais variados problemas, e em diversas áreas do conhecimento, como Física, Química, Biologia, Geografia, Economia, Engenharia, dentre outras.

Considerando que muitos estudantes apresentam dificuldades no aprendizado de Matemática, entre outros motivos, pela falta de motivação causada por não compreenderem plenamente suas aplicações no cotidiano, este trabalho tem o objetivo de apresentar uma forma de minimizar esse problema. O trabalho visa desenvolver um material para que os professores do Ensino Médio possam propor situações a seus alunos que os façam pensar de forma prática, analítica e se sintam motivados a resolverem problemas reais.

Como justificativa para o uso da Modelagem, Bassanezi (2002, p.16) afirma que "no setor educacional, a aprendizagem realizada por meio da Modelagem facilita a combinação dos aspectos lúdicos da Matemática com seu potencial de aplicações. [...] com este material, o estudante vislumbra alternativas no direcionamento de suas aptidões ou formação acadêmica". Neste trabalho, o foco não será a criação de modelos, mas sim, a aplicação de modelos matemáticos já existentes para que sirvam de ferramenta na abordagem e/ou na resolução de problemas utilizados para ensino de conteúdos matemáticos.

Procurou-se demonstrar como o Cálculo Diferencial pode auxiliar na resolução de problemas no Ensino Médio e de que modo os professores de Matemática podem trabalhar Modelagem com seus alunos, mostrando, assim, aplicações práticas dessa disciplina. Desta forma, o objetivo deste trabalho foi criar um material de apoio para que os professores possam aplicar, em sala de aula, estratégias e métodos de resoluções de problemas cotidianos com base na Modelagem Matemática e, inevitavelmente, utilizando noções do Cálculo Diferencial. Para atingir tal objetivo, buscou-se apresentar os conceitos e caracterizações de derivadas, limitadas ao contexto em que serão aplicadas neste trabalho; aplicar as derivadas em situações-problema que envolvam Matemática, Economia e Aplicações na Agricultura e oportunizar ao aluno um estudo interdisciplinar.

Quanto à divisão do trabalho, o Capítulo 1 aborda uma introdução ao assunto e faz uma breve explanação quanto aos objetivos. O Capítulo 2 traz um breve resumo histórico do desenvolvimento do Cálculo, enquanto o Capítulo 3 apresenta alguns conceitos fundamentais de Cálculo Diferencial. O Capítulo 4 explica alguns elementos que compõe a aplicação de métodos como Resolução de Problemas e Modelagem Matemática. No Capítulo 5, há resolução de problemas vinculados a Agricultura. O Capítulo 6 apresenta os fundamentos para elaboração de uma Sequência Didática, com aplicação em um dos problemas do Capítulo 5, e por fim, o Capítulo 7 engloba as considerações finais e conclusões do trabalho.

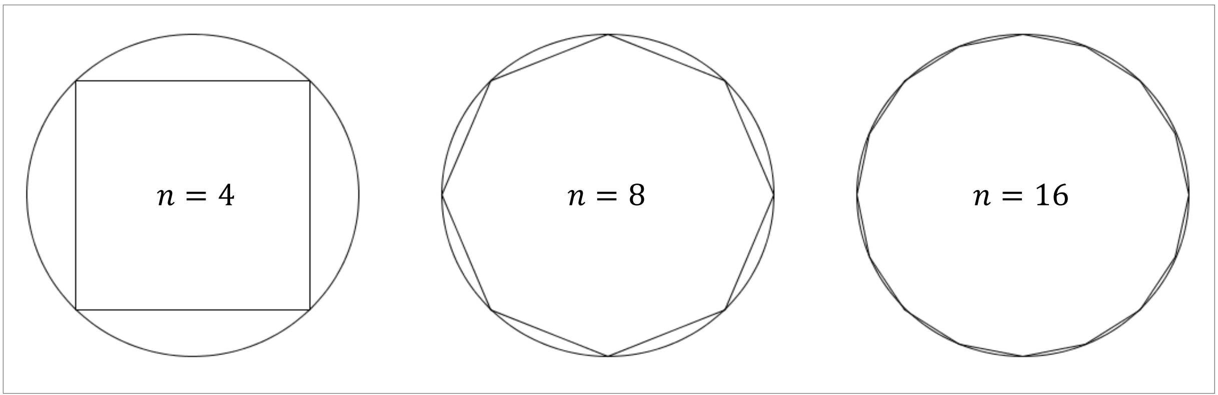
O trabalho baseou-se em Machado (1988) para desenvolver alguns conceitos fundamentais de Cálculo Diferencial, pois o mesmo dispensa a necessidade de abordar o conceito de limite para definir a derivada. Com isso, pretende-se reduzir a dificuldade que muitos alunos teriam ao se depararem com a definição formal de limite.

2 – CONSIDERAÇÕES HISTÓRICAS

Segundo Machado (1988), o *Cálculo Integral* surgiu antes do *Cálculo Diferencial*, e eles são processos inversos, tal como a divisão pode ser entendida como a operação inversa à multiplicação, por exemplo. Mas essa correlação entre ambos demorou séculos a acontecer, e se deu graças ao desenvolvimento dos estudos nessa área, por diversos pensadores de diferentes épocas.

A ideia de integral surgiu com o estudo da soma de pequenas parcelas para o cálculo da área de regiões curvas (MACHADO, 1988). Conforme Roque (2012), Eudoxo (408 - 355 a.C.) utilizava um processo denominado "método da exaustão" para o cálculo da área de figuras curvilíneas. Para calcular a área de um círculo, por exemplo, conforme demonstrado na Figura 1, o processo consistia em inscrever a esse círculo um polígono regular, visto que, naquela época, sabia-se calcular a área deste tipo de figura. Após isso, bastava dobrar o número de lados do polígono repetidamente até que a diferença entre a área do polígono final e a área do círculo fosse insignificante. Assim, obtinham-se aproximações da área de figuras curvilíneas.

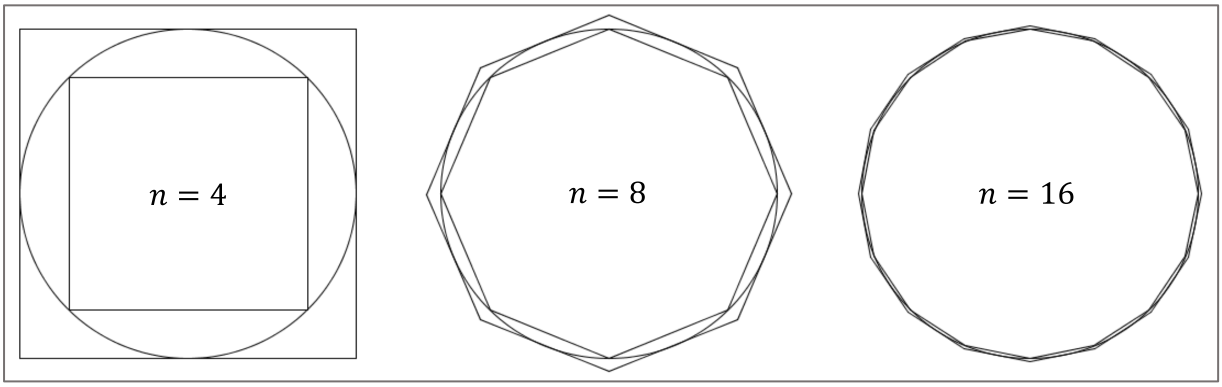
Figura 1 – Método da exaustão de Eudoxo, sendo n o número de lados dos polígonos inscritos.



Fonte: Própria.

Arquimedes (287 – 212 a.C.) aprimorou esse método e, além de inscrever um polígono regular à circunferência, também circunscrevia ao círculo outro polígono regular. Então, assim como procedia Eudoxo, o número de lados dos polígonos era duplicado sucessivamente até que as áreas desses ficassem praticamente iguais, conforme demonstrado na Figura 2. Logo, com a aproximação de algumas casas decimais, sabia-se que a área do círculo era aquela atingida pelos polígonos (ROQUE, 2012).

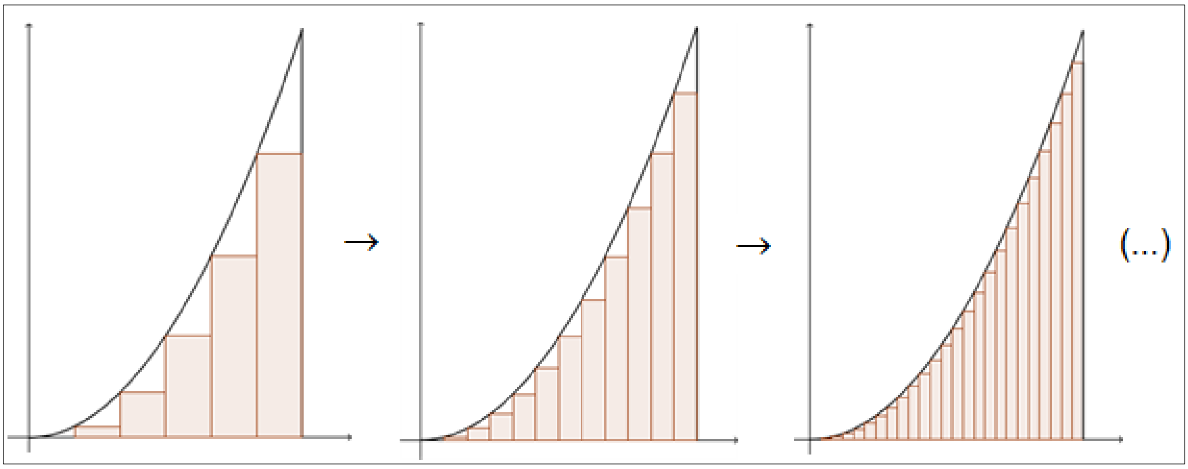
Figura 2 – Método da exaustão de Arquimedes, sendo n o número de lados dos polígonos inscritos e circunscritos.



Fonte: Própria.

Esse método, ainda que inexato e trabalhoso, abriu portas para descobertas importantes e para o desenvolvimento de processos mais refinados. Através dele, descobriu-se o número π, o qual está intrínseco ao cálculo da área de círculos e comprimento de circunferências. Também inspirado pela ideia do método da exaustão, Pierre de Fermat (1601 – 1665), juntamente com outros matemáticos, calculava a área sob regiões curvas considerando-a como a soma das áreas de retângulos infinitamente finos, método este conhecido como "decomposições infinitas" (Figura 3) (MACHADO, 1988; ROQUE, 2012).

Figura 3 – Cálculo de área por decomposições infinitas.



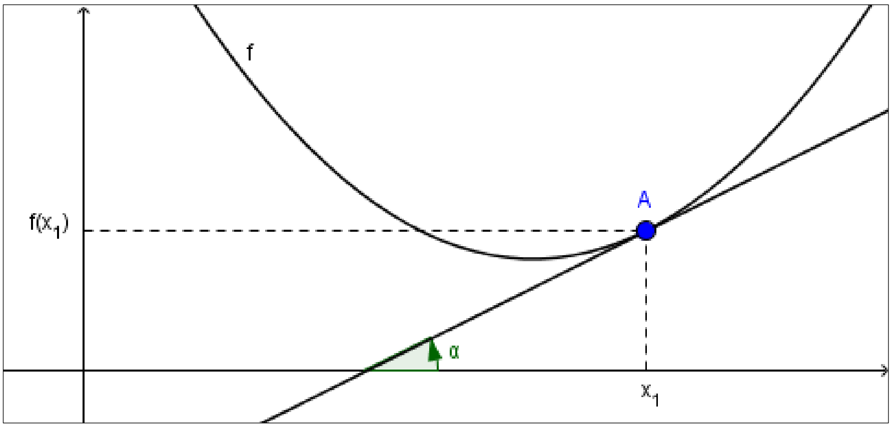
Fonte: Própria.

Assim, iniciou-se o Cálculo Integral, uma vez que as técnicas envolviam a soma de parcelas que se tornavam cada vez menores e mais numerosas, como os lados dos polígonos inscritos e circunscritos, que aumentavam seu número e, consequentemente, diminuíam seu comprimento, e também como os retângulos sob as curvas, que quanto mais finos fossem, mais numerosos se tornavam. E nesses dois exemplos, as infinitas parcelas "integravam-se" até que a soma entre elas fosse muito próxima da área a qual se desejava calcular (IEZZI; MURAKAMI; MACHADO, 1983; MACHADO, 1988).

Já no século XVII, Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646 – 1716) e Isaac Newton (1643 – 1727) chegam, de forma independente, à invenção da outra vertente do Cálculo, que podemos chamar de *Cálculo Diferencial*. Isso ocorreu com o descobrimento da conexão entre o problema da determinação da reta tangente ao gráfico de uma função f e o problema de determinação da área sob o gráfico da mesma função f, definindo o Teorema Fundamental do Cálculo, que tem como ideia fundamental calcular a taxa de variação de determinada grandeza, ou seja, medir a rapidez com que algo varia (MACHADO, 1988; ROQUE, 2012).

Nesses termos, uma grandeza que varia a uma taxa constante, por exemplo, é representada graficamente como uma reta. Nesse caso, a derivada é a própria taxa de variação da função, visto que essa taxa é constante. Porém, caso a taxa de variação não seja constante, o gráfico dessa grandeza não será uma reta. Considerando que seja uma curva qualquer, a taxa de variação da função é diferente em cada ponto da curva. Logo, a derivada dessa função em determinado ponto da curva poderá ser visualizada, calculada, ou até mesmo interpretada como a inclinação da reta tangente a esse ponto em relação ao eixo x. Com base nisso, a Figura 4 mostra a inclinação α, em relação ao eixo x, da reta tangente à função f no ponto A. Ou seja, α é a derivada da função f no ponto A (MACHADO, 1988; STEWART, 2006).

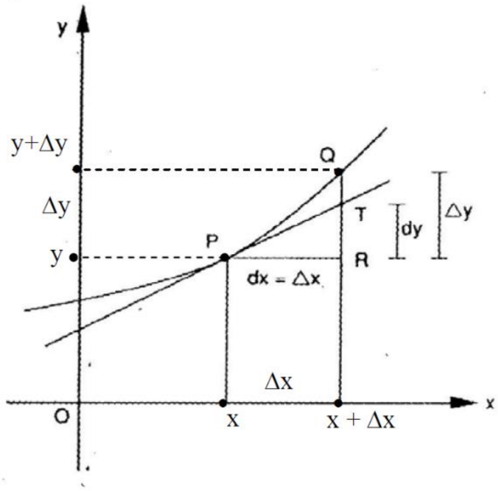
Figura 4 – Derivada da função f no ponto A.



Fonte: Própria.

A teoria de Newton é baseada nas taxas de variações da Física, tais como velocidade e temperatura. No entanto, os estudos baseados em taxas de variações são mais antigos, como por exemplo, os problemas propostos por Galileu (1564 – 1642), que estabeleceram as fundações das teorias da Mecânica. Por outro lado, Leibniz apresenta uma abordagem baseada nos diferenciais, que são pequenos acréscimos nos valores de x e y, denominados Δx e Δy, respectivamente, conforme demonstrado pela Figura 5 (ALVES, 2008; D'OTTAVIANO E BERTATO, 2015).

Figura 5 – Acréscimos Δx e Δy para cálculo da derivada.



Fonte: Alves (2008).

A Figura 5 mostra uma função $y = f(x)$ em um ponto $P(x, y)$. Nesse ponto pode ser vista uma reta tangente ao gráfico, e considera-se uma vizinhança a ele denominada T. Pelo triângulo PRT, que Leibniz denominou de "triângulo característico", seus lados PR e RT são os aumentos nas coordenadas x e y, respectivamente, quando se desloca de P para T. Na construção de Leibniz, os acréscimos foram chamados de dx e dy. Nessa construção, se dx e dy fossem suficientemente pequenos, a linha tangente ao gráfico em P seria muito próxima ao próprio gráfico na vizinhança de P. Verifica-se que o segmento de linha PT vai "quase" coincidir com o segmento curvo PQ, sendo possível definir a inclinação da linha tangente em P com base na proporção altura-largura do triângulo característico, ou seja, a taxa de variação, que pode ser definida por $\frac{dy}{dx}$. Nessa construção, surge a ideia do *limite*, em que os acréscimos propostos devem tender a zero, fazendo com que a inclinação da reta secante à curva (taxa de variação média) tenda para a inclinação de uma reta tangente, ou taxa de variação instantânea, em um ponto P (ÁVILA, 2001; ALVES, 2008).

Segundo Assis (2017), a sistematização lógica do Cálculo é embasada no conceito de limite, no entanto, por muitos séculos, a noção de limite sempre foi confundida com ideias filosóficas, relativas ao infinito, ou os "números infinitamente pequenos ou infinitamente grandes" (ASSIS, 2017). A sua definição moderna tem menos de 150 anos, mas a primeira vez que a ideia de limite apareceu, foi por volta de 450 a.C., na discussão dos quatro paradoxos de Zeno. Ainda segundo Assis (2017), é D'Alembert que utiliza o verbete

“Limite”, em 1765, afirmando que tal conceito está na base do Cálculo Diferencial. Nessa construção, o limite nunca coincide com a quantidade, ou nunca se torna igual à quantidade da qual é limite, ou seja, o limite sempre se aproxima, chegando cada vez mais perto da quantidade, podendo diferir dela tão pouco quanto de deseje. Esse fato foi muito importante na formalização do Cálculo, pois conectou o Cálculo Diferencial e o Cálculo Integral, que passaram a ser uma única área da Matemática, o Cálculo Diferencial e Integral.

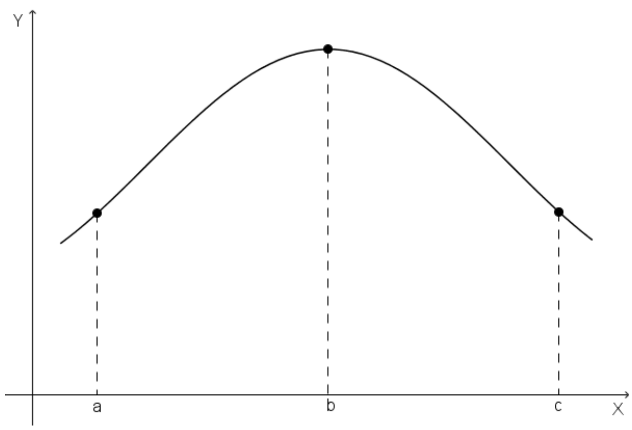
3 – CONCEITOS FUNDAMENTAIS DE CÁLCULO

Normalmente, o primeiro conceito a ser inserido em um capítulo desta natureza seria o de limite, e essa é a sequência didática na grande maioria dos livros de Cálculo Diferencial e Integral. No entanto, seguindo a lógica do desenvolvimento histórico do Cálculo, este capítulo apresentará seus conceitos fundamentais sem a definição formal de limite, abrindo espaço para a noção intuitiva que estará presente na maior parte do desenvolvimento do tema, sem necessariamente defini-lo formalmente para, só então, chegar à definição de derivada. Essa abordagem segue a proposta apresentada por Machado (1988). Desse modo, recomenda-se a leitura da citada obra, pois a mesma proporciona uma perspectiva inovadora em relação ao estudo do Cálculo, bem como sua aplicação. Em virtude do objetivo do trabalho, não serão abordados conceitos do Cálculo Integral, apenas do Cálculo Diferencial. Da mesma forma como Machado (1988), o trabalho abordará, nesta ordem, os conceitos de crescimento e decrescimento de funções, taxa de variação, concavidade, o cálculo da derivada em suas várias formas e a identificação e classificação de pontos críticos, com foco em máximos e mínimos e suas aplicações em problemas que podem ser reais.

3.1 – Crescimento e decrescimento de funções

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(x) = y$. Se um aumento no valor de $x \in \mathbb{R}$ em determinado intervalo leva a um aumento no valor de y, então f é *crescente* nesse intervalo. Já se um aumento no valor de x em determinado intervalo leva a uma diminuição no valor de y, então f é *decrescente* no intervalo considerado. Na figura abaixo, por exemplo, f é *crescente* no intervalo $[a, b]$ e *decrescente* no intervalo $[b, c]$.

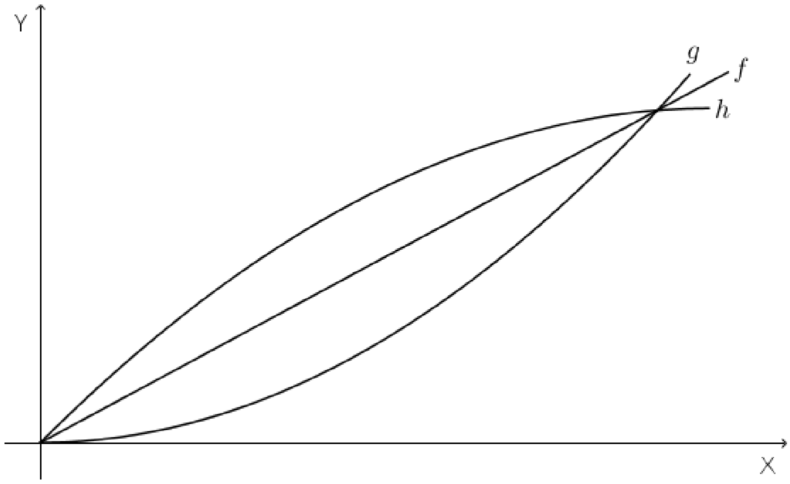
Figura 6 – Crescimento e decrescimento de uma função.



Fonte: Machado (1988), adaptado pelo autor.

Porém, existem diferentes formas de crescimento e decrescimento. No gráfico abaixo, por exemplo, a partir de um mesmo ponto (a, b), as funções f, g, e h são crescentes no intervalo representado.

Figura 7 – Tipos de crescimento.



Fonte: Machado (1988), adaptado pelo autor.

Quando os valores de x se tornam cada vez maiores, pode-se dizer que:

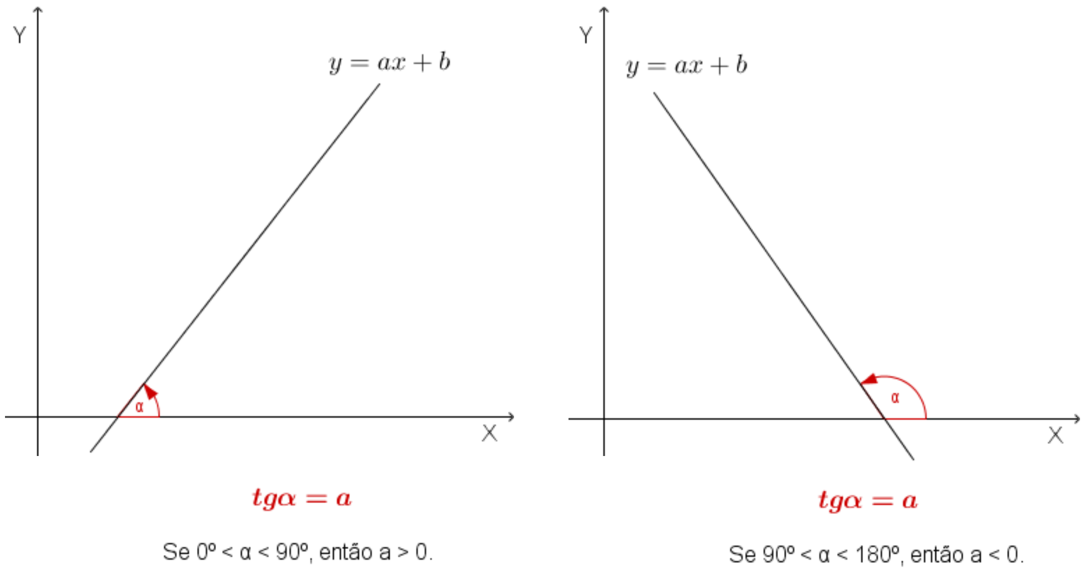
- g cresce cada vez mais rapidamente;
- h cresce cada vez mais lentamente;
- f cresce com uma rapidez constante;

Para caracterizar a rapidez com que uma função varia (cresce ou decresce), utiliza-se a noção de taxa de variação.

3.2 – Taxa de variação

Dada uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$, se para todo $x \in \mathbb{R}$, quando x varia de uma unidade, o valor correspondente de y varia de a unidades, pode-se dizer que y varia a uma taxa constante igual a a. Assim, tem-se $y = ax + b$, com a e b constantes, e essa é a representação de uma função afim qualquer. Logo, o gráfico correspondente a essas variações constantes é uma reta. E por se tratar de uma função afim, quando a é positivo, y é uma função crescente, e quando a é negativo, y é decrescente. Além disso, a representa o *coeficiente angular* da reta, podendo ser calculado pela tangente do ângulo de inclinação da reta em relação ao eixo x (Figura 8) (MACHADO, 1988; STEWART, 2006).

Figura 8 – Coeficiente angular.

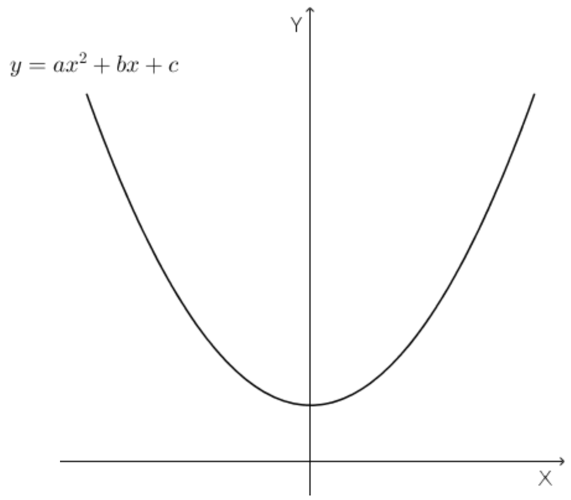


Fonte: Machado (1988), adaptado pelo autor.

Por outro lado, quando a variação de y em relação a x não é constante, a função não é caracterizada por $f(x) = ax + b$, e consequentemente, o gráfico não corresponde a uma reta. Ou seja, a variação de y em relação a x será sempre diferente, a depender do ponto considerado.

Por exemplo, considerando uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c constantes e $a > 0$ (Figura 9). A função decresce cada vez mais lentamente quando x tende a zero pelo sentido negativo, assim como, cresce cada vez mais rapidamente a partir de zero e tendendo a $+\infty$.

Figura 9 – Decrescimento e crescimento de uma função quadrática.



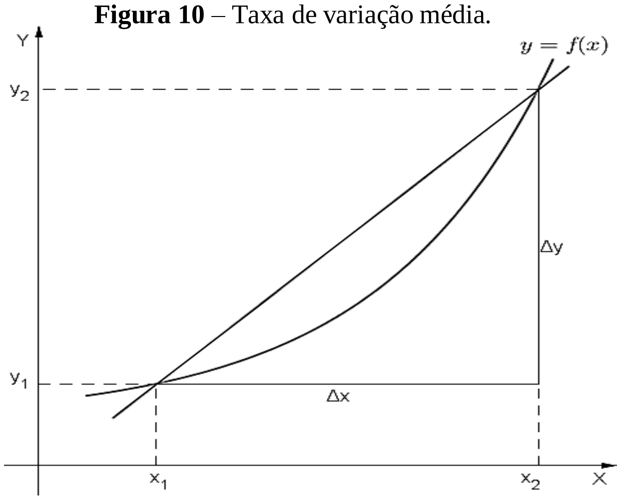
Fonte: Machado (1988), adaptado pelo autor.

3.3 – Taxa de variação média

Para uma função qualquer $y = f(x)$, chamamos de *taxa de variação média* (Figura 10) entre dois pontos x_1 e x_2, com $x_2 > x_1$, a taxa de variação da função $y = ax + b$ determinada pela reta que passa pelos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2), em que $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$. Fazendo $x_2 - x_1 = \Delta x$, $y_2 - y_1 = \Delta y$ e representando a taxa de variação média de $y = f(x)$ entre x_1 e x_2 por T_m, tem-se:

$$T_m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \textbf{(1)}$$

Figura 10 – Taxa de variação média.

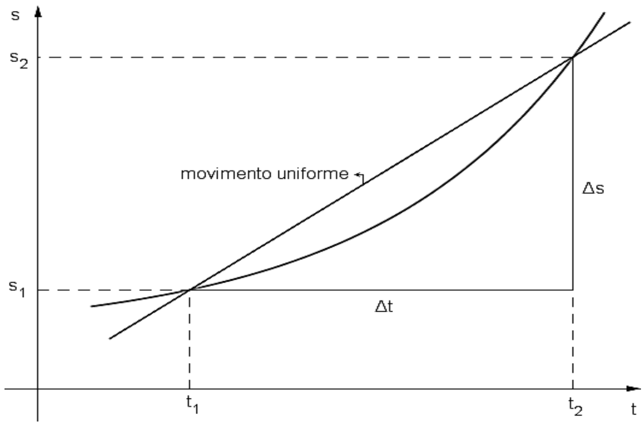


Fonte: Machado (1988), adaptado pelo autor.

Ou seja, T_m corresponde à variação média de y por unidade de x, entre x_1 e x_2.

Com isso, pode-se perceber a relação entre taxa de variação média e velocidade média. A velocidade média $\left(v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}\right)$ é caracterizada pela taxa de variação média da posição em relação ao tempo, sendo entendida também como a velocidade que determinado móvel deveria ter em movimento uniforme para realizar o percurso no mesmo tempo (Figura 11).

Figura 11 – Velocidade média.

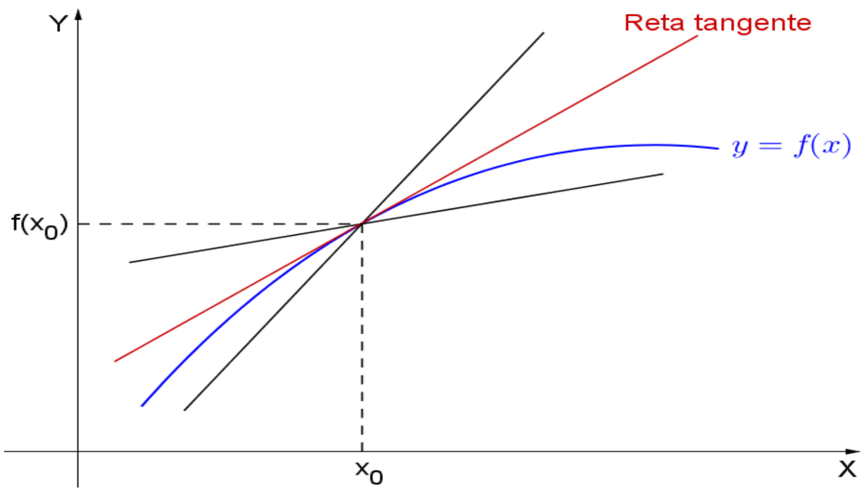


Fonte: Machado (1988), adaptado pelo autor.

3.4 – Derivada: a taxa de variação no ponto

Conforme Machado (1988, p. 24), para caracterizar a rapidez com que uma função $y = f(x)$ varia em um ponto x_0, utiliza-se a noção de taxa de variação no ponto, ou derivada. Essa noção se baseia no fato de que uma curva pode ser bem aproximada por uma reta nas proximidades de um ponto. Ou seja, a rapidez com que uma função varia em um ponto pode ser associada à taxa de variação da função $y = ax + b$ que melhor se aproxima da função dada no ponto x_0. E, conforme a Figura 12, de todas as retas que passam pelo ponto $(x_0, f(x_0))$, a que melhor se aproxima do gráfico da função $y = f(x)$ para valores de x próximos de x_0 é a reta tangente à curva nesse ponto.

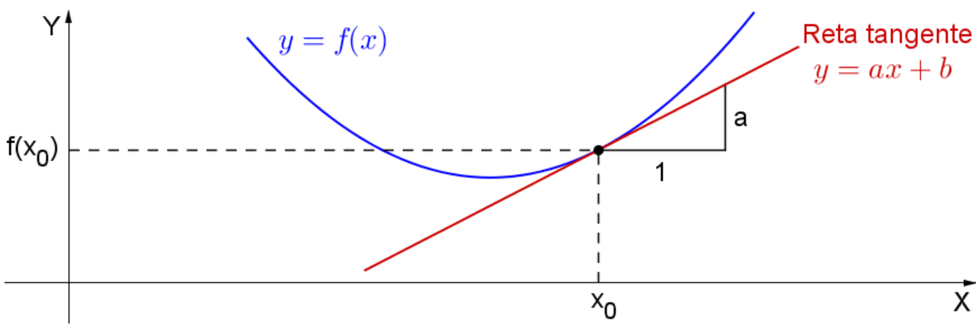
Figura 12 – Aproximação pela reta tangente.



Fonte: Machado (1988), adaptado pelo autor.

Portanto, sendo $y = f(x)$, chamamos de derivada de $y = f(x)$ no ponto de abscissa x_0, a taxa de variação da função $y = ax + b$ cujo gráfico é a reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto $(x_0, f(x_0))$. Por se tratar de taxa de variação, o valor da derivada no ponto x_0 indica a inclinação, em relação ao eixo x, da reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$. Esse valor é comumente representado por $f'(x_0)$, que é igual a a, como evidencia a figura abaixo:

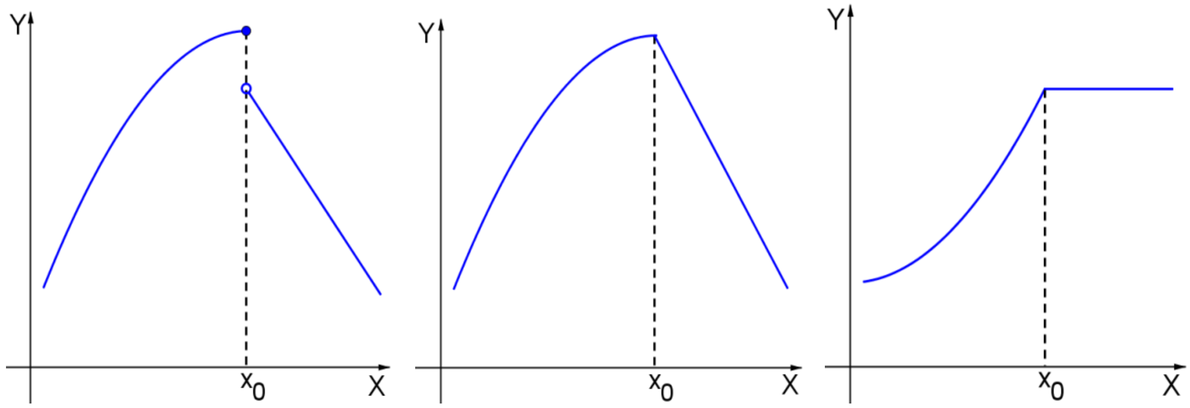
Figura 13 – Derivada no ponto x_0



Fonte: Machado (1988), adaptado pelo autor.

É importante destacar que algumas funções não admitem derivada em determinado ponto do seu gráfico. Isso ocorre nos pontos que possuem descontinuidade ou em pontos angulosos, conforme mostra a Figura 14, na qual, em cada caso, o ponto que não admite derivada é o de abscissa x_0.

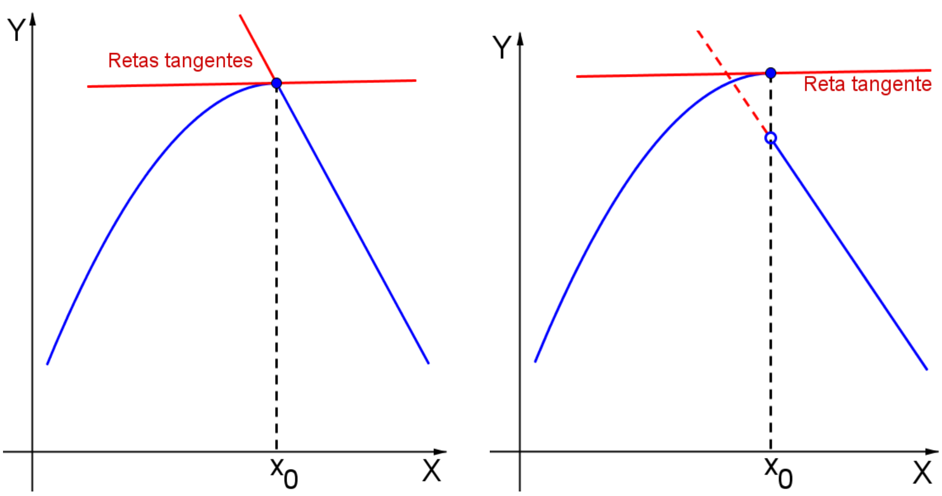
Figura 14 – Funções que não admitem derivada em x_0.



Fonte: Machado (1988), adaptado pelo autor.

Nesses pontos não existe derivada porque a taxa de variação quando se aproxima de x_0 pela esquerda é diferente da taxa de variação quando se aproxima de x_0 pela direita. Isso pode ser notado mais facilmente ao traçar uma reta tangente à curva passando por x_0 levando em conta, separadamente, as regiões à esquerda e à direita desse ponto. Conforme mostra a figura abaixo, as retas tangentes traçadas não são coincidentes, e no caso em que há descontinuidade, não é possível abranger o ponto x_0 em uma das tangentes (isso só é possível na região do gráfico à qual x_0 é pertencente). Portanto, não se pode definir a derivada em tais pontos.

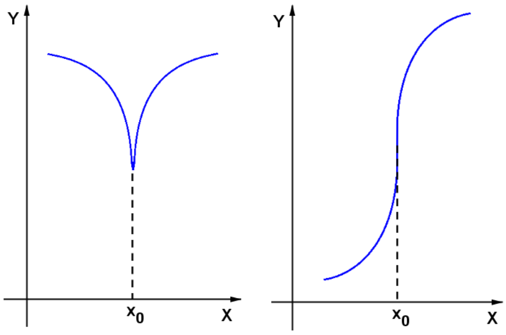
Figura 15 – Retas tangentes não coincidentes em x_0.



Fonte: Própria.

Outro caso em que não existe derivada é quando o gráfico de $y = f(x)$ admite, em algum ponto, uma reta tangente que seja paralela ao eixo y, já que tal reta não possui uma equação na forma $y = ax + b$. Assim, $f(x)$ não tem derivada nesse ponto (Figura 16).

Figura 16 – Exemplos de gráficos nos quais o ponto x_0 não admite derivada.



Fonte: Própria.

3.5 – Derivadas: crescimento e decrescimento

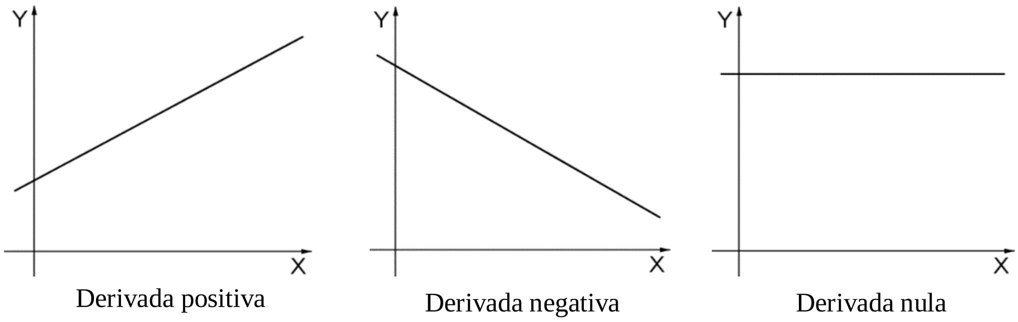
Machado (1988, p. 37) destaca a relação entre a derivada e o crescimento ou decrescimento de determinada função em um dado intervalo I.

Conforme exposto na seção anterior, a derivada de uma função qualquer em determinado ponto é a taxa de variação, ou rapidez com que a função varia (cresce ou decresce), nesse ponto. Logo, para funções do tipo $f(x) = ax + b$, que variam a uma mesma taxa a, a derivada é constante e igual a a para todos os valores de x. Assim, pode-se concluir que, para funções do tipo $f(x) = ax + b$:

- Se a derivada é positiva ($a > 0$), então f é crescente;
- Se a derivada é negativa ($a < 0$), então f é decrescente;
- Se a derivada é nula ($a = 0$), então f é constante;

Tais conclusões estão representadas na figura abaixo:

Figura 17 – Derivada e o crescimento da função afim.



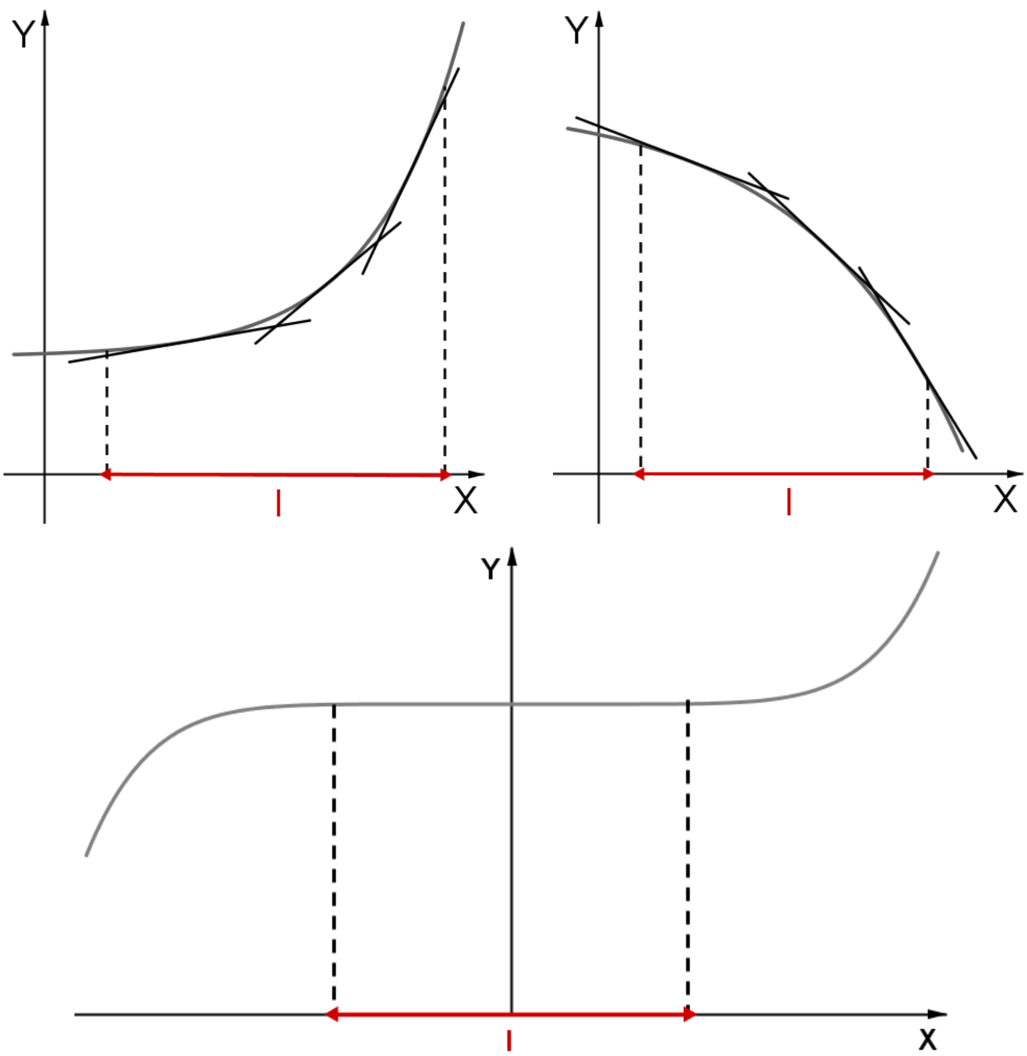
Fonte: Machado (1988), adaptado pelo autor.

Já para funções que não possuem a lei de formação $f(x) = ax + b$, a derivada (taxa de variação) não é constante, ou seja, depende do valor de x considerado. Desse modo, nesse tipo de função, as conclusões referentes ao crescimento ou decrescimento da função se referem a um intervalo, em que é possível analisar se as derivadas em todos os seus pontos são positivas, negativas ou nulas. Portanto, a partir do significado geométrico de derivada (reta tangente à curva em determinado ponto) pode-se concluir que, para uma função $y = f(x)$ qualquer:

- Se a derivada é positiva em todos os pontos de um intervalo I, então f é crescente em I;
- Se a derivada é negativa em todos os pontos de um intervalo I, então f é decrescente em I;
- Se a derivada é nula em todos os pontos de um intervalo I, então f é constante em I;

Essas conclusões estão representadas na Figura 18:

Figura 18 – Função crescente, função decrescente e função constante em I.

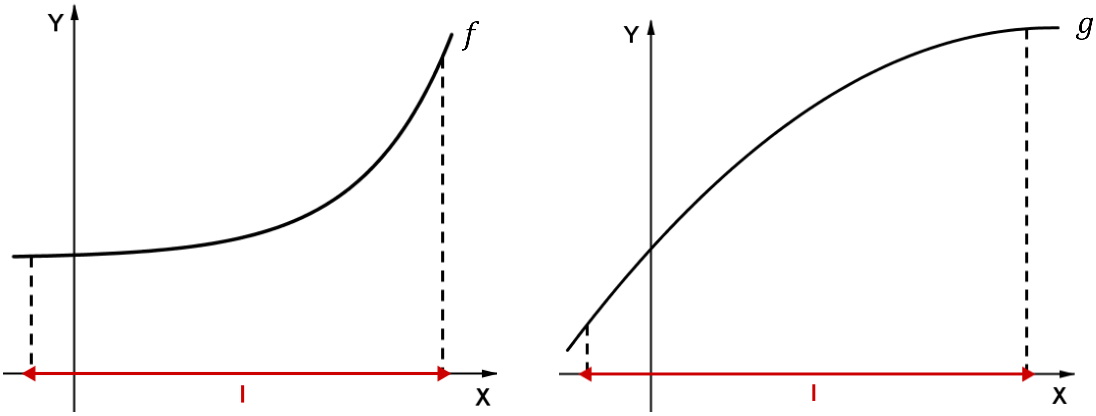


Fonte: Machado (1988), adaptado pelo autor.

3.6 – Derivadas e concavidade

Machado (1988, p. 44) afirma que duas funções podem ser crescentes no mesmo intervalo I, tendo derivadas positivas em todos os pontos de I, embora seu crescimento apresente características distintas em cada caso. Por exemplo, em relação às funções f e g na figura abaixo, nota-se que enquanto o crescimento de f é cada vez mais rápido, o de g é cada vez mais lento quando o valor de x aumenta ao longo do intervalo I:

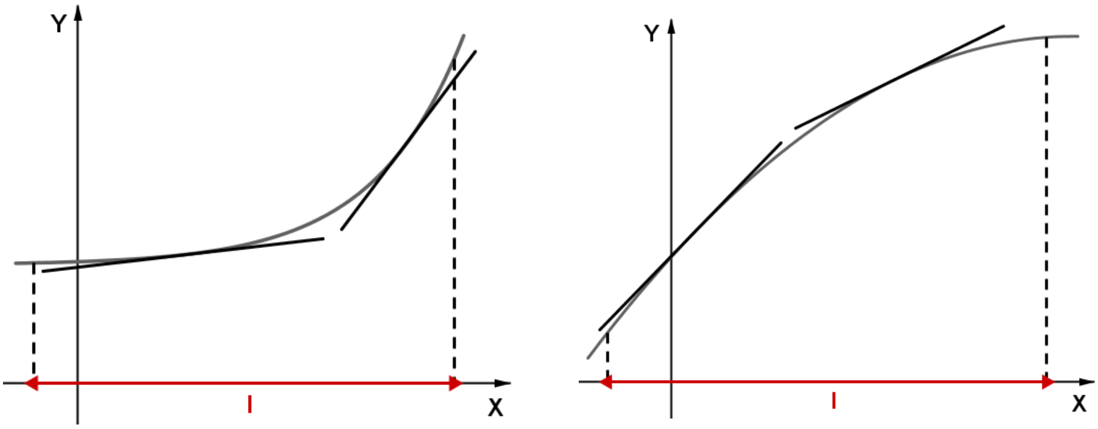
Figura 19 – Funções f e g crescentes em I.



Fonte: Machado (1988), adaptado pelo autor.

Observando ainda as derivadas, com foco na inclinação em relação ao eixo x, percebe-se que, em f, quando o valor de x aumenta, a derivada $f'(x)$ também aumenta (maior inclinação da reta tangente à curva em relação ao eixo x à medida que x aumenta). Ou seja, $f(x)$ cresce a taxas crescentes. Em g, quando o valor de x aumenta, a derivada $g'(x)$ diminui (menor inclinação da reta tangente à curva em relação ao eixo x à medida que x aumenta). Ou seja, $g(x)$ cresce a taxas decrescentes (Figura 20).

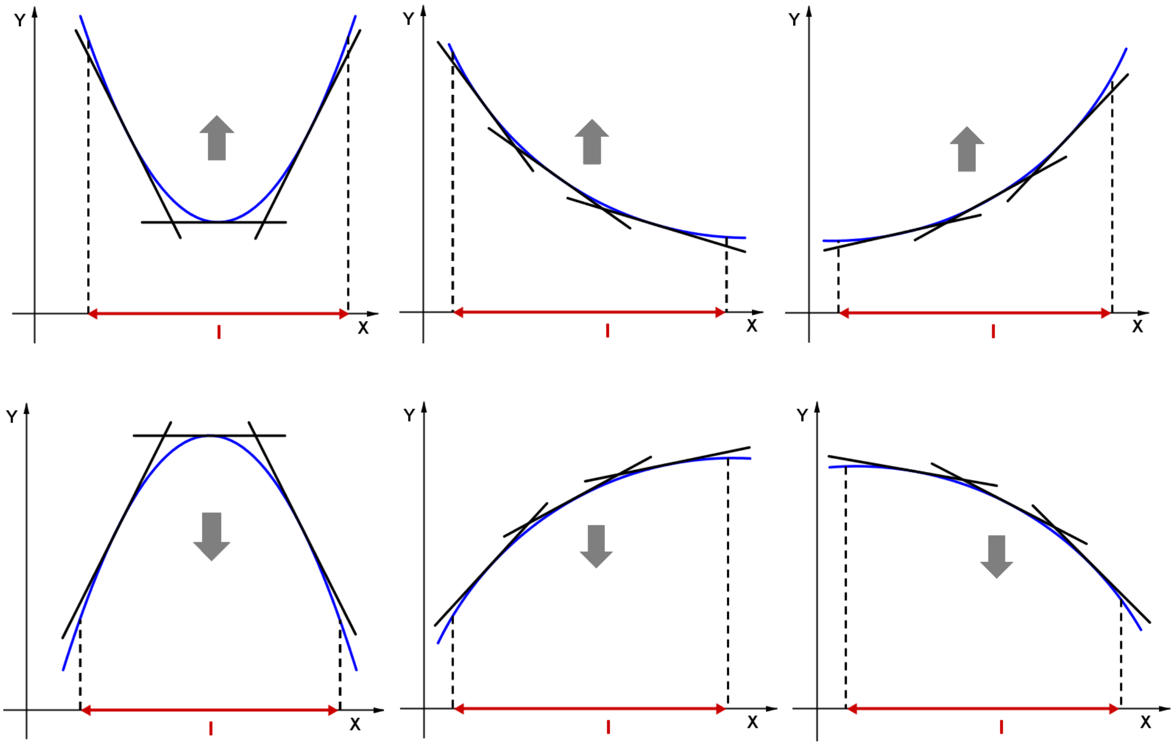
Figura 20 – $f'(x)$ aumenta e $g'(x)$ diminui.



Fonte: Machado (1988), adaptado pelo autor.

Portanto, considerando uma função $f(x)$, num dado intervalo I, quando $f'(x)$ cresce juntamente com o valor de x, o gráfico de $f(x)$ tem concavidade para cima em I. E quando $f'(x)$ decresce à medida que x aumenta, o gráfico tem concavidade para baixo em I:

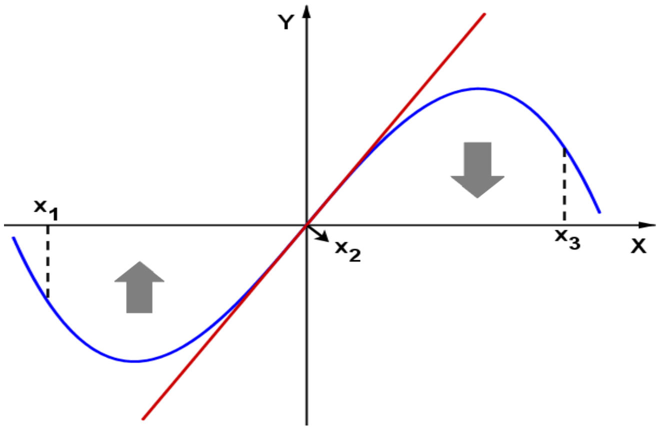
Figura 21 – Derivada e concavidade.



Fonte: Machado (1988), adaptado pelo autor.

É possível, ainda, haver uma mudança de concavidade em determinado ponto de uma função. Nesse caso, Machado (1988, p. 47) esclarece: “Pode ocorrer que o valor da derivada $f'(x)$ passe, por exemplo, de crescente em um intervalo $]x_1, x_2[$ a decrescente em um intervalo adjacente $]x_2, x_3[$”. Nesse caso, ocorre uma mudança de concavidade no ponto de abcissa x_2, e aquele ponto do gráfico é chamado *ponto de inflexão*, como mostra a Figura 22.

Figura 22 – Ponto de inflexão.

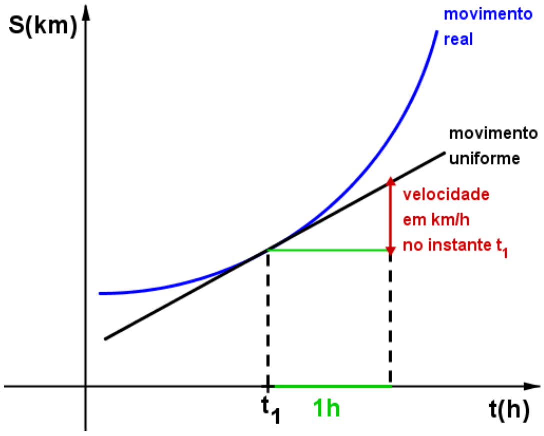


Fonte: Machado (1988), adaptado pelo autor.

3.7 – O cálculo da derivada

Considerando-se um carro em movimento não uniforme, cujo gráfico do seu deslocamento S, em quilômetros, está em função do tempo t, em horas (Figura 23), deve-se determinar a velocidade do carro, em km/h, no instante t_1, sendo esta a velocidade que ele teria se o movimento fosse considerado uniforme no intervalo em torno do instante t_1 (MACHADO, 1988, p. 50).

Figura 23 – Movimento não uniforme de um carro e sua velocidade no instante t_1.



Fonte: Machado (1988), adaptado pelo autor.

Após 1 hora, se fosse verificado que a distância percorrida a partir de t_1 foi de 90 km, esta informação não seria suficiente para afirmar que a velocidade no instante t_1 é de 90 km/h. Como o movimento não é uniforme, as velocidades instantâneas podem ter sido diferentes ao longo do percurso. Assim, pode-se apenas concluir que a velocidade média nesse período de 1 hora foi de 90 km/h.

> "Podemos obter uma melhor aproximação da velocidade do carro no instante t_1 deixando transcorrer não 1h, mas apenas 1 min, a partir de t_1.
> Verificando a distância percorrida e multiplicando-a por 60, teremos uma expectativa de seu percurso em 1h, caso ele continuasse a se deslocar com a mesma rapidez observada durante esse minuto. [...] Obteremos uma aproximação ainda melhor verificando o percurso em 1s, a partir do instante t_1, e multiplicando esse resultado por 3600." (MACHADO, 1988, p. 51).

Com isso, Machado (1988) sintetiza que quanto menor for o intervalo de tempo considerado para se fazer a projeção do percurso que seria realizado em 1h, melhor será a aproximação do valor obtido para a velocidade no instante t_1.

Esse exemplo favorece a generalização da ideia de que, no cálculo da derivada, o acréscimo em x deve ser o menor possível (tendendo a zero) para se ter uma boa aproximação do valor da derivada, e essa é justamente a noção de limite, que foi comentada no Capítulo 2.

Assim, considerando uma função qualquer $y = f(x)$, para calcular o valor aproximado da derivada de $f(x)$ no ponto x_1 (simbolizada por $f'(x_1)$), é mais eficaz fazer x variar não de uma unidade, mas de $\frac{1}{n}$, a partir de x_1, e calcular a variação correspondente $f\left(x_1 + \frac{1}{n}\right) - f(x_1)$. Para um intervalo $\frac{1}{n}$ suficientemente pequeno, o valor de $f\left(x_1 + \frac{1}{n}\right)$ se aproxima do valor correspondente calculado na equação da reta tangente.

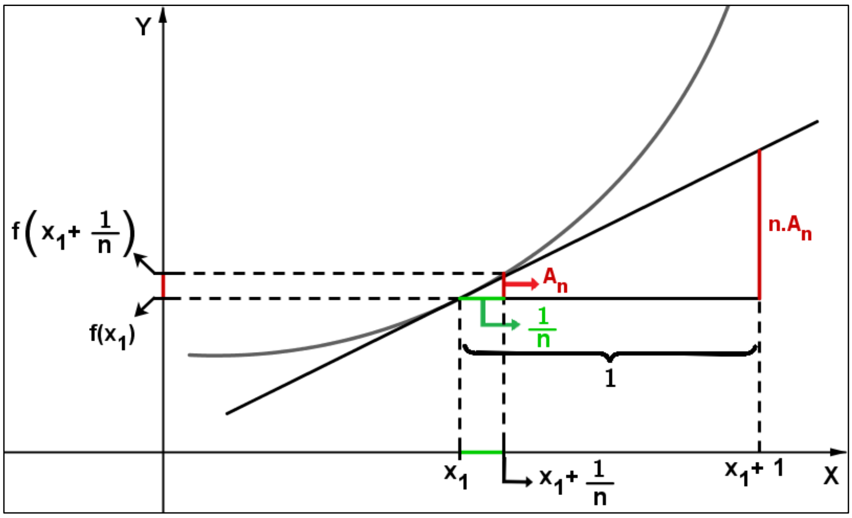
Chamando de A_n a diferença $f\left(x_1 + \frac{1}{n}\right) - f(x_1)$, pode-se estimar para $f'(x_1)$ o valor aproximado $n.A_n$, pois, considerando a variação constante da reta tangente, tem-se:

- Quando x varia de $\frac{1}{n}$, $f(x)$ varia de A_n;
- Quando x varia de n, $f(x)$ varia de $n.A_n$;

Ou seja:

$$n.\left[f\left(x_1 + \frac{1}{n}\right) - f(x_1)\right] = n.A_n \cong f'(x_1) \qquad \textbf{(2)}$$

Figura 24 – Acréscimo $\frac{1}{n}$ para cálculo da derivada.



Fonte: Machado (1988), adaptado pelo autor.

Quanto maior o valor de n, menor será o acréscimo $\frac{1}{n}$, e consequentemente, mais adequada será a aproximação obtida para o gráfico de $f'(x_1)$.

Para o efetivo cálculo do valor numérico da derivada $f'(x_1)$, será preciso analisar a expressão $n \cdot A_n$. Se, para valores de n cada vez maiores, os valores de $n \cdot A_n$ se aproximam cada vez mais de um valor fixo a, então $f'(x_1) = a$.

Este método para calcular a derivada não tem o refinamento matemático desejado, mas é suficiente, pois, conforme mencionado no início desta seção, serve apenas para fundamentar geométrica e intuitivamente o que significa esse cálculo. Até por isso, o resultado se dá de maneira aproximada. Posteriormente, será apresentado o modo sistemático e puramente algébrico para se calcular a derivada de alguns tipos de funções.

Portanto, com base em Machado (1988, p. 53), a seguir podem ser observados alguns exemplos do cálculo da derivada através do método exposto até o momento.

Exemplo 1:

Considerando a função $f(x) = 3x^2 + 7$ e o cálculo da sua derivada nos pontos de abscissas $x_1 = 2$, $x_2 = -3$ e $x_3 = 0$:

a) Cálculo de $f'(2)$:

1º) $$\begin{cases} f(2) = 3.2^2 + 7 = 19 \\ f\left(2 + \frac{1}{n}\right) = 3\left(2 + \frac{1}{n}\right)^2 + 7 = 19 + \frac{12}{n} + \frac{3}{n^2} \end{cases}$$

2º) $$A_n = f\left(2 + \frac{1}{n}\right) - f(2) = \frac{12}{n} + \frac{3}{n^2}$$

3º) $$f'(2) \cong n.A_n = n\left(\frac{12}{n} + \frac{3}{n^2}\right) = 12 + \frac{3}{n}$$

4º) Aumentando consideravelmente o valor de n, observa-se que $\frac{3}{n}$ se aproxima de zero, e consequentemente, o valor de $n \cdot A_n$ cada vez mais se aproxima de 12:

- Se $n = 1\ 000$, então $n.A_n = 12 + \frac{3}{1\ 000} = 12{,}003$.
- Se $n = 1\ 000\ 000$, então $n.A_n = 12 + \frac{3}{1\ 000\ 000} = 12{,}000003$.
- Se $n = 1\ 000\ 000\ 000$, então $n.A_n = 12 + \frac{3}{1\ 000\ 000\ 000} = 12{,}000000003$.

Assim, é possível concluir que: $\boxed{f'(2) = 12}$

b) Cálculo de $f'(-3)$:

1º) $$\begin{cases} f(-3) = 3.(-3)^2 + 7 = 34 \\ f\left(-3 + \frac{1}{n}\right) = 3\left(-3 + \frac{1}{n}\right)^2 + 7 = 34 - \frac{18}{n} + \frac{3}{n^2} \end{cases}$$

2º) $A_n = f\left(-3 + \frac{1}{n}\right) - f(-3) = -\frac{18}{n} + \frac{3}{n^2}$

3º) $f'(-3) \cong n. A_n = n\left(-\frac{18}{n} + \frac{3}{n^2}\right) = -18 + \frac{3}{n}$

4º) Analogamente ao cálculo de $f'(2)$, quanto maior for n, mais os valores de $n \cdot A_n$ se aproximam de -18.

Assim: $\boxed{f'(-3) = -18}$

c) Cálculo de $f'(0)$:

1º) $\begin{cases} f(0) = 7 \\ f\left(0 + \frac{1}{n}\right) = 3\left(\frac{1}{n}\right)^2 + 7 = 7 + \frac{3}{n^2} \end{cases}$

2º) $A_n = f\left(0 + \frac{1}{n}\right) - f(0) = \frac{3}{n^2}$

3º) $f'(0) \cong n \cdot A_n = n \, . \, \frac{3}{n^2} = \frac{3}{n}$

4º) Quanto mais cresce n, mais $n \cdot A_n$ se aproxima de zero.

Assim: $\boxed{f'(0) = 0}$

Exemplo 2:

Um corpo em queda livre, a partir do repouso, percorre uma distância d que varia com o tempo t de acordo com a fórmula: $d = f(t) = 4{,}9t^2$, com d sendo medido em metros, e t, em segundos. Para o cálculo da velocidade do corpo, ou seja, da derivada de $f(t)$, no instante $t_1 = 1$ e num instante genérico t, tem-se:

a) Cálculo de $v_1 = f'(1)$:

1º) $\begin{cases} f(1) = 4{,}9 \\ f\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 4{,}9\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = 4{,}9 + \frac{9{,}8}{n} + \frac{4{,}9}{n^2} \end{cases}$

2º) $A_n = f\left(1 + \frac{1}{n}\right) - f(1) = \frac{9{,}8}{n} + \frac{4{,}9}{n^2}$

3º) $v_1 = f'(1) \cong n \cdot A_n = n\left(\frac{9{,}8}{n} + \frac{4{,}9}{n^2}\right) = 9{,}8 + \frac{4{,}9}{n}$

4º) Quanto maior o valor de n, mais $n \cdot A_n$ se aproxima de 9,8.

Logo: $$\boxed{v_1 = f'(1) = 9{,}8\, m/s}$$

b) Cálculo de $v = f'(t)$:

1º) $\begin{cases} f(t) = 4{,}9t^2 \\ f\left(t + \frac{1}{n}\right) = 4{,}9\left(t + \frac{1}{n}\right)^2 = 4{,}9t^2 + \frac{9{,}8t}{n} + \frac{4{,}9}{n^2} \end{cases}$

2º) $A_n = f\left(t + \frac{1}{n}\right) - f(t) = \frac{9{,}8t}{n} + \frac{4{,}9}{n^2}$

3º) $v \cong n.A_n = n\left(\frac{9{,}8t}{n} + \frac{4{,}9}{n^2}\right) = 9{,}8t + \frac{4{,}9}{n}$

4º) Quanto maior o valor de n, mais o valor de $\frac{4{,}9}{n}$ se aproxima de zero.

Portanto: $$\boxed{v = f'(t) = 9{,}8t}$$

Exemplo 3:

Calculando-se a derivada de $f(x) = x^3$ em um ponto genérico de abscissa x:

1º) $\begin{cases} f(x) = x^3 \\ f\left(x + \frac{1}{n}\right) = \left(x + \frac{1}{n}\right)^3 = x^3 + \frac{3x^2}{n} + \frac{3x}{n^2} + \frac{1}{n^3} \end{cases}$

2º) $A_n = f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) = \frac{3x^2}{n} + \frac{3x}{n^2} + \frac{1}{n^3}$

3º) $f'(x) \cong n \cdot A_n = n\left(\frac{3x^2}{n} + \frac{3x}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right) = 3x^2 + \frac{3x}{n} + \frac{1}{n^2}$

4º) Quanto maior o valor de n, mais os valores de $\frac{3x}{n}$ e $\frac{1}{n^2}$ se aproximam de zero.

Logo: $$\boxed{f'(x) = 3x^2}$$

Exemplo 4:

Para determinar a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = 4x^2$ no ponto $x = 1$, tem-se:

$$f(1) = 4.1^2 = 4$$

Ou seja, o ponto considerado é $(1,4)$. Então, sendo a equação da reta tangente no ponto $(1,4)$ igual a $y-4=a(x-1)$, calcula-se o valor de $a=f'(1)$:

1º) $\begin{cases} f(1)=4 \\ f\left(1+\frac{1}{n}\right)=4\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=4+\frac{8}{n}+\frac{4}{n^2} \end{cases}$

2º) $A_n=f\left(1+\frac{1}{n}\right)-f(1)=\frac{8}{n}+\frac{4}{n^2}$

3º) $f'(1)\cong n\cdot A_n=n\left(\frac{8}{n}+\frac{4}{n^2}\right)=8+\frac{4}{n}$

4º) Quanto maior o valor de n, mais $n\cdot A_n$ se aproxima de 8. Logo, $f'(1)=8$.

Com isso, a equação da reta tangente no ponto $(1,4)$ é $y-4=8(x-1)$. Ou seja:

$$\boxed{y=8x-4}$$

3.7.1 – Derivadas de funções polinomiais

Por fim, chega-se à etapa em que será apresentado o modo algébrico de calcular o valor da derivada. Esse cálculo será utilizado em funções polinomiais, por serem mais adequadas ao Ensino Médio.

Conforme Machado (1988), para identificar qual é a derivada de um polinômio $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots++a_2x^2+a_1x+a_0$, antes é preciso saber quais são as derivadas dos três tipos de funções que compõem esse polinômio, sendo eles:

- $f_1(x)=x^k,\ k\in\mathbb{N}$;
- $f_2(x)=c.g(x)$, com c constante e $g(x)$ uma função cuja derivada é $g'(x)$;
- $f_3(x)=u(x)+v(x)$, sendo $u(x)$ e $v(x)$ funções com derivadas $u'(x)$ e $v'(x)$.

Por isso, determinam-se as derivadas de funções nas formas de $f_1(x)$, $f_2(x)$ e $f_3(x)$ separadamente, para então concluir-se qual é a derivada de $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+$ $+a_2x^2+a_1x+a_0$.

Derivada de $f(x)=x^k$:

Para os cálculos efetuados a seguir, é necessário o desenvolvimento de potências do tipo $(x+a)^k$. Pelo *binômio de Newton*, tem-se que:

$$(x+a)^k=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}.x^{k-i}.a^i\,,$$

sendo $$\binom{k}{i} = \frac{k!}{(k-i)!\,i!} \quad , i = 0, 1, 2, \ldots, k-1, k. \qquad \textbf{(3)}$$

Uma forma simplificada de representar $(x+a)^k$ é:

$$(x+a)^k = x^k + \binom{k}{1} x^{k-1} \cdot a + \binom{k}{2} x^{k-2} \cdot a^2 + \cdots + \binom{k}{k-1} x \cdot a^{k-1} + a^k. \qquad \textbf{(4)}$$

Assim, para calcular a derivada de $f(x) = x^k$, tem-se:

1º) $$\begin{cases} f(x) = x^k \\ f\left(x + \frac{1}{n}\right) = \left(x + \frac{1}{n}\right)^k = x^k + k \cdot x^{k-1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{k(k-1)}{2!} \cdot x^{k-2} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \cdots + \end{cases}$$

$$+ k \cdot x \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{k-1} + \left(\frac{1}{n}\right)^k$$

2º) $$A_n = f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) = k \cdot x^{k-1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{k(k-1)}{2} \cdot x^{k-2} \cdot \frac{1}{n^2} + \cdots +$$

$$+ k \cdot x \cdot \frac{1}{n^{k-1}} + \frac{1}{n^k}$$

3º) $$f'(x) \cong n.A_n = n \cdot \left[k \cdot \frac{x^{k-1}}{n} + \frac{k(k-1)}{2} \cdot \frac{x^{k-2}}{n^2} + \cdots + k \cdot x \cdot \frac{1}{n^{k-1}} + \frac{1}{n^k}\right] =$$

$$= k \cdot x^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2} \cdot \frac{x^{k-2}}{n} + \cdots + k \cdot x \cdot \frac{1}{n^{k-2}} + \frac{1}{n^{k-1}}$$

4º) Assim, quanto maior o valor de n, menores são as parcelas em cujo denominador aparece n, as quais se aproximarão de zero.

Por isso, a derivada de $f(x) = x^k$, para todo $k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$, é:

$$\boxed{f'(x) = k \cdot x^{k-1}} \qquad \textbf{(5)}$$

Derivada de $f(x) = c \cdot g(x)$:

Seja $f(x) = c \cdot g(x)$, sendo c uma constante e $g(x)$ uma função cuja derivada é $g'(x)$. Para o cálculo da derivada de $f(x) = c \cdot g(x)$, tem-se:

1º) $$\begin{cases} f(x) = c \cdot g(x) \\ f\left(x + \frac{1}{n}\right) = c \cdot g\left(x + \frac{1}{n}\right) \end{cases}$$

2º) $A_n = f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) = c \cdot g\left(x + \frac{1}{n}\right) - c \cdot g(x) = c \cdot \left[g\left(x + \frac{1}{n}\right) - g(x)\right]$

3º) $f'(x) \cong n.A_n = n \cdot c \cdot \left[g\left(x + \frac{1}{n}\right) - g(x)\right] = c \cdot n \cdot \left[g\left(x + \frac{1}{n}\right) - g(x)\right]$

4º) Quando n aumenta, a expressão $n \cdot \left[g\left(x + \frac{1}{n}\right) - g(x)\right]$ se aproxima cada vez mais de $g'(x)$ (conforme a equação 2). Logo, $n.A_n$ se aproxima de $c \cdot g'(x)$.

Assim, para $f(x) = c \cdot g(x)$, com c constante, a derivada de $f(x)$ é:

$$\boxed{f'(x) = c \cdot g'(x)} \qquad \textbf{(6)}$$

Derivada de $f(x) = u(x) + v(x)$:

Seja $f(x) = u(x) + v(x)$, sendo $u(x)$ e $v(x)$ funções cujas derivadas são $u'(x)$ e $v'(x)$. Para o cálculo de $f'(x)$, tem-se:

1º) $\begin{cases} f(x) = u(x) + v(x) \\ f\left(x + \frac{1}{n}\right) = u\left(x + \frac{1}{n}\right) + v\left(x + \frac{1}{n}\right) \end{cases}$

2º) $A_n = f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) = \left[u\left(x + \frac{1}{n}\right) + v\left(x + \frac{1}{n}\right)\right] - [u(x) + v(x)] =$

$$= \left[u\left(x + \frac{1}{n}\right) - u(x)\right] + \left[v\left(x + \frac{1}{n}\right) - v(x)\right]$$

3º) $f'(x) \cong n.A_n = n \cdot \left\{\left[u\left(x + \frac{1}{n}\right) - u(x)\right] + \left[v\left(x + \frac{1}{n}\right) - v(x)\right]\right\} =$

$$= n \cdot \left[u\left(x + \frac{1}{n}\right) - u(x)\right] + n \cdot \left[v\left(x + \frac{1}{n}\right) - v(x)\right]$$

4º) Quando n aumenta, $n \cdot \left[u\left(x + \frac{1}{n}\right) - u(x)\right]$ se aproxima de $u'(x)$, enquanto $n \cdot \left[v\left(x + \frac{1}{n}\right) - v(x)\right]$ se aproxima de $v'(x)$, conforme equação 2. Logo, $n.A_n$ se aproxima de $u'(x) + v'(x)$.

Assim, para $f(x) = u(x) + v(x)$, a derivada de $f(x)$ é:

$$\boxed{f'(x) = u'(x) + v'(x)} \qquad \textbf{(7)}$$

Derivada de uma função polinomial

A partir das demonstrações realizadas para derivação de funções nas formas de f_1x, f_2x e f_3x, pode-se concluir que a derivada do polinômio

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

é:

$$\boxed{f'(x) = n \cdot a_nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + (n-2)a_{n-2}x^{n-3} + \cdots + 2a_2x + a_1 + 0} \quad \textbf{(8)}$$

3.7.2 – Derivada do produto, do quociente e de funções compostas

As derivadas do produto e do quociente possuem demonstração análoga ao método utilizado para demonstrar a derivada de funções polinomiais. Já a derivada de funções compostas, também conhecida como Regra da Cadeia, se vale de outro método de demonstração. Em ambos os casos, a explicitação dessas demonstrações foge ao objetivo deste trabalho, mas podem ser consultadas em Machado (1988, p. 93, 95 e 99).

Regra do Produto: Se $f(x) = u(x).v(x)$, então $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$.

Regra do Quociente: Se $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, então $f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{\left(v(x)\right)^2}$.

Regra da Cadeia: Seja $F(x) = f(g(x))$, então $F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Exemplo 1:

Para o cálculo da primeira e da segunda derivadas da função $F(x) = \sqrt{x^2 + 5}$, utilizando-se a Regra da Cadeia, com $y = g(x) = x^2 + 5$ e $f(y) = \sqrt{y}$, tem-se:

$g'(x) = 2x$ e $f'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+5}}$. Portanto:

$$F'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x) = f'(y) \cdot g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+5}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}.$$

Calculando a segunda derivada por meio da Regra do Quociente e considerando $u(x) = x$ e $v(x) = \sqrt{x^2 + 5}$, tem-se:

$$F''(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{\left(v(x)\right)^2} = \frac{1 \cdot \sqrt{x^2+5} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}}{\left(\sqrt{x^2+5}\right)^2} = \frac{\sqrt{x^2+5} - \frac{x^2\sqrt{x^2+5}}{x^2+5}}{x^2+5}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+5}}{x^2+5} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{x^2+5}\right).$$

Exemplo 2:

Calculando a derivada da função $F(x) = (x^3 + 1)^{35}$ e fazendo $y = g(x) = x^3 + 1$ e $f(y) = y^{35}$, tem-se:

$g'(x) = 3x^2$ e $f'(y) = 35y^{34} = 35(x^3 + 1)^{34}$. Portanto:

$$F'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x) = f'(y) \cdot g'(x) = 35(x^3 + 1)^{34} \cdot 3x^2 = 105x^2(x^3 + 1)^{34}.$$

Calculando a segunda derivada por meio da Regra do Produto e considerando $u(x) = 105x^2$ e $v(x) = (x^3 + 1)^{34}$, tem-se:

$$F''(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = 210x \cdot (x^3 + 1)^{34} + 105x^2 \cdot 102x^2(x^3 + 1)^{33}$$
$$= 210x \cdot (x^3 + 1)^{34} + 10710x^4 \cdot (x^3 + 1)^{33}.$$

3.7.3 – Derivações sucessivas

Visto que a derivada da função $f(x)$ é também função de x, a derivada pode continuar a ser calculada quantas vezes for necessário, gerando assim derivadas segunda ($f''(x)$), terceira ($f'''(x)$), quarta ($f^{(4)}(x)$), e assim por diante. Nesta seção, será abordado o significado da derivada segunda e, em seções seguintes, ela será aplicada a problemas práticos de Modelagem Matemática.

De acordo com a seção 3.5, considerando uma função $f(x)$ e um intervalo I em seu domínio, tem-se:

- $f'(x) > 0 \; \forall \, x \in I \; \Rightarrow f$ é crescente em I;
- $f'(x) < 0 \; \forall \, x \in I \Rightarrow f$ é decrescente em I.

Porém, assim como o sinal de $f'(x)$ fornece informações sobre o crescimento ou decrescimento de f, $f''(x)$ indica se $f'(x)$ cresce ou decresce:

- $f''(x) > 0 \; \forall \, x \in I \; \Rightarrow f'(x)$ é crescente em I;
- $f''(x) < 0 \; \forall \, x \in I \Rightarrow f'(x)$ é decrescente em I.

Na seção 3.6, observou-se que, considerando uma função $f(x)$ e um intervalo I em seu domínio, quando $f'(x)$ cresce com o valor de x, o gráfico de $f(x)$ tem concavidade para cima em I. E quando $f'(x)$ decresce à medida que x aumenta, o gráfico tem concavidade para baixo em I. Portanto, sabendo do significado da derivada segunda no crescimento e decrescimento de $f'(x)$, conclui-se que:

- $f''(x) > 0 \; \forall \, x \in I \; \Rightarrow$ o gráfico de f tem concavidade para cima;
- $f''(x) < 0 \; \forall \, x \in I \Rightarrow$ o gráfico de f tem concavidade para baixo.

Saber se o gráfico de uma função tem concavidade para cima ou para baixo em dado intervalo é útil na identificação de pontos críticos, os quais são fundamentais em Modelagem Matemática, conforme será fundamentado adiante.

Machado (1988, p. 72, p. 74) apresenta dois exemplos de cálculo da derivada segunda:

Exemplo 1:

Considerando a função $f(x) = 3x^2 - 12x + 17$, para calcular sua derivada segunda e determinar a concavidade do gráfico de $f(x)$, tem-se que $f'(x) = 6x - 12$ e $f''(x) = 6$. Como $f''(x) > 0$ para todo x, o gráfico de $f(x)$ tem concavidade para cima.

Exemplo 2:

A fim de analisar a concavidade do gráfico de $f(x) = x^3 + 15$, tem-se:

$f'(x) = 3x^2$ e $f''(x) = 6x$.

Ao fazer o estudo do sinal de $f''(x)$, obtém-se:

- $f''(x) \geq 0$ para $x \geq 0$;
- $f''(x) \leq 0$ para $x \leq 0$.

Logo, o gráfico de $f(x)$ tem concavidade voltada para cima quando $x \geq 0$ e para baixo quando $x \leq 0$.

3.8 – Pontos críticos

Pontos críticos são aqueles em que $f'(x)$, se existe, é igual a zero, e podem ser de três tipos: pontos de máximo, pontos de mínimo ou pontos de inflexão horizontal. Porém, neste trabalho serão explorados apenas pontos de máximo e mínimo. Nos três casos, a derivada é igual a zero, pois a reta tangente ao gráfico nesses pontos é horizontal (MACHADO, 1988).

A obtenção e classificação de pontos críticos pode ocorrer através do Teste da Primeira Derivada ou do Teste da Segunda Derivada, que se relacionam diretamente com o assunto da seção 3.7.3, e estão apresentados a seguir, com base em Flemming e Gonçalves (2006).

Teste da Primeira Derivada

Seja f uma função contínua num intervalo fechado $[a, b]$ que possui derivada em todos os pontos desse intervalo, exceto possivelmente num ponto c.

- $f'(x) > 0 \; \forall \; x < c$ e $f'(x) < 0 \; \forall \; x > c \; \Rightarrow f$ tem um máximo local em c;
- $f'(x) < 0 \; \forall \; x < c$ e $f'(x) > 0 \; \forall \; x > c \; \Rightarrow f$ tem um mínimo local em c.

Flemming e Gonçalves (2006, p. 202) apresentam um exemplo de como encontrar intervalos de crescimento, decrescimento e máximos e mínimos locais através do Teste da Primeira Derivada:

Exemplo 1:

Para encontrar os intervalos de crescimento, decrescimento e os máximos e mínimos locais da função $f(x) = x^3 - 7x + 6$, tem-se:

$f'(x) = 3x^2 - 7$.

Para identificar pontos críticos, nos quais a derivada é igual a zero, obtém-se:

$f'(x) = 3x^2 - 7 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{7}{3}}$.

Portanto, os pontos críticos da função são aqueles de abcissa $-\sqrt{\frac{7}{3}}$ e $\sqrt{\frac{7}{3}}$.

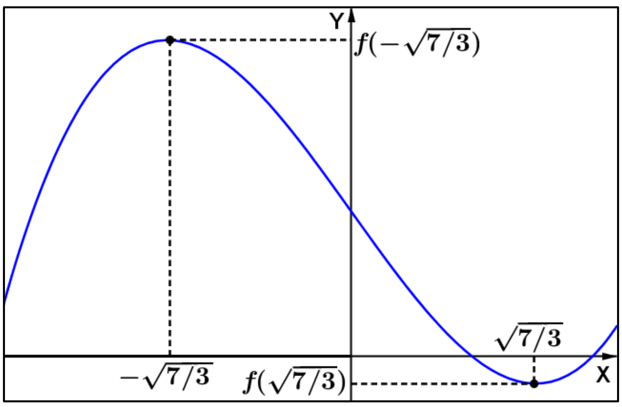
Para $x < -\sqrt{\frac{7}{3}}$, $f'(x)$ é positiva. Logo, f é crescente em $\left]-\infty, -\sqrt{\frac{7}{3}}\right]$, conforme fundamentado na seção 3.7.3.

Para $-\sqrt{\frac{7}{3}} < x < \sqrt{\frac{7}{3}}$, $f'(x)$ é negativa. Então f é decrescente em $\left[-\sqrt{\frac{7}{3}}, \sqrt{\frac{7}{3}}\right]$.

Para $x > \sqrt{\frac{7}{3}}$, $f'(x)$ é positiva. Então f é crescente em $\left[\sqrt{\frac{7}{3}}, +\infty\right[$.

Pelo Teste da Primeira Derivada, resulta que f tem um máximo local em $x = -\sqrt{\frac{7}{3}}$ e um mínimo local em $x = \sqrt{\frac{7}{3}}$. Assim, o gráfico da função $f(x) = x^3 - 7x + 6$ está representado na abaixo:

Figura 25 – Gráfico de $f(x) = x^3 - 7x + 6$.



Fonte: Flemming e Gonçalves (2006), adaptado pelo autor.

Machado (1988, p. 80) apresenta um exemplo de classificação de pontos críticos por meio do Teste da Primeira Derivada:

Exemplo 2:

Para encontrar os pontos críticos da função $f(x) = -x^3 + 12x + 15$ e classifica-los em máximo local ou mínimo local, tem-se:

$f'(x) = -3x^2 + 12.$

Fazendo $f'(x) = 0$, obtém-se:

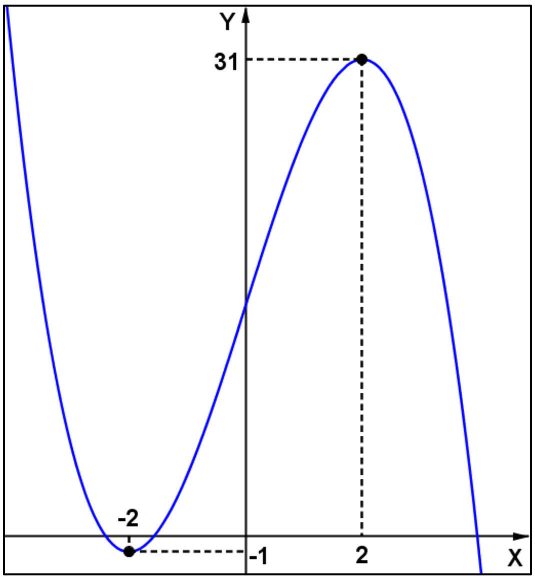
$-3x^2 + 12 = 0 \Rightarrow x = \pm 2.$

Assim, $x = -2$ e $x = 2$ são pontos críticos da função.

Para $x < -2$, $f'(x)$ é negativa, e para $-2 < x < 2$, $f'(x)$ é positiva. Além disso, para $x > 2$, $f'(x)$ é negativa. Logo, pelo Teste da Primeira Derivada, f tem um mínimo local em $x = -2$ e um máximo local em $x = 2$.

Como $f(-2) = -1$ e $f(2) = 31$, o gráfico da função $f(x) = -x^3 + 12x + 15$ é:

Figura 26 – Gráfico de $f(x) = -x^3 + 12x + 15$.



Fonte: Machado (1988), adaptado pelo autor.

Teste da Segunda Derivada

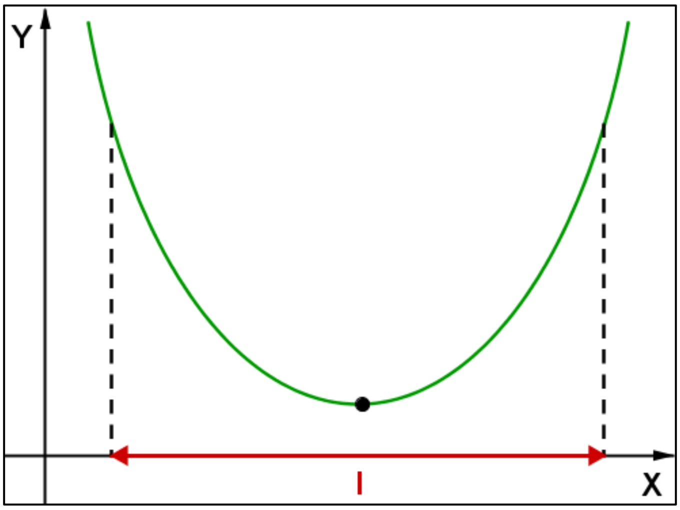
O Teste da Segunda Derivada visa simplificar o processo de classificação de pontos críticos em ponto de máximo ou ponto de mínimo local, uma vez que, por meio dele, não é preciso analisar o crescimento ou decrescimento de f em torno desses pontos, como ocorre no Teste da Primeira Derivada (FLEMMING E GONÇALVES, 2006).

Na seção 3.7.3, concluiu-se que, num dado intervalo I:

- $f''(x) > 0 \ \forall \ x \in I \ \Rightarrow$ o gráfico de f tem concavidade para cima;
- $f''(x) < 0 \ \forall \ x \in I \Rightarrow$ o gráfico de f tem concavidade para baixo.

Com base nisso, através de um esboço gráfico é possível perceber que se o gráfico de f tem concavidade para cima em I, então essa região terá um ponto de mínimo (Figura 27).

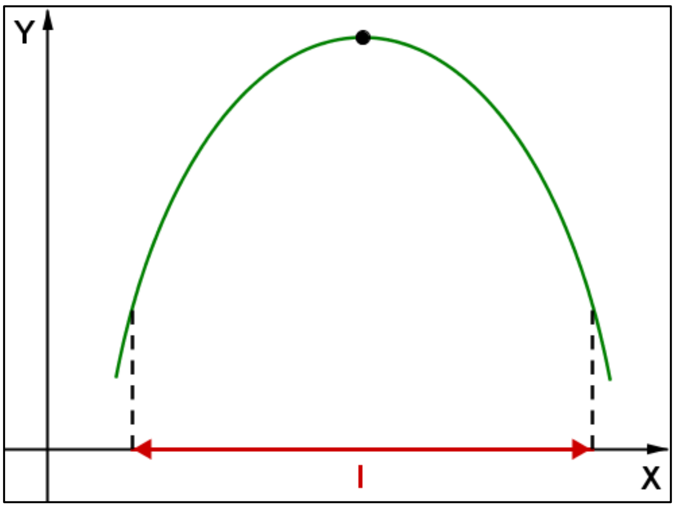
Figura 27 – f com concavidade para cima e ponto de mínimo em I.



Fonte: Própria.

Já se o gráfico de f tem concavidade para baixo em I, então essa região tem um ponto de máximo (Figura 28).

Figura 28 – f comconcavidade para baixo e ponto de máximo em I.



Fonte: Própria.

Desse modo, o Teste da Segunda Derivada enuncia:

Sejam f uma função derivável num intervalo (a, b) e c um ponto crítico de f nesse intervalo, isto é, $f'(c) = 0$, com $a < c < b$. Se f admite $f''(x)$ em (a, b), temos:

- $f''(c) > 0 \Rightarrow f$ tem um mínimo local em c;
- $f''(c) < 0 \Rightarrow f$ tem um máximo local em c.

Nos exemplos 1 e 2 a seguir, Flemming e Gonçalves (2006, p. 204) calculam os máximos e mínimos locais das funções utilizando o Teste da Segunda Derivada:

Exemplo 1:

A fim de encontrar os máximos e mínimos locais de $f(x) = 18x + 3x^2 - 4x^3$, tem-se $f'(x) = 18 + 6x - 12x^2$ e $f''(x) = 6 - 24x$.

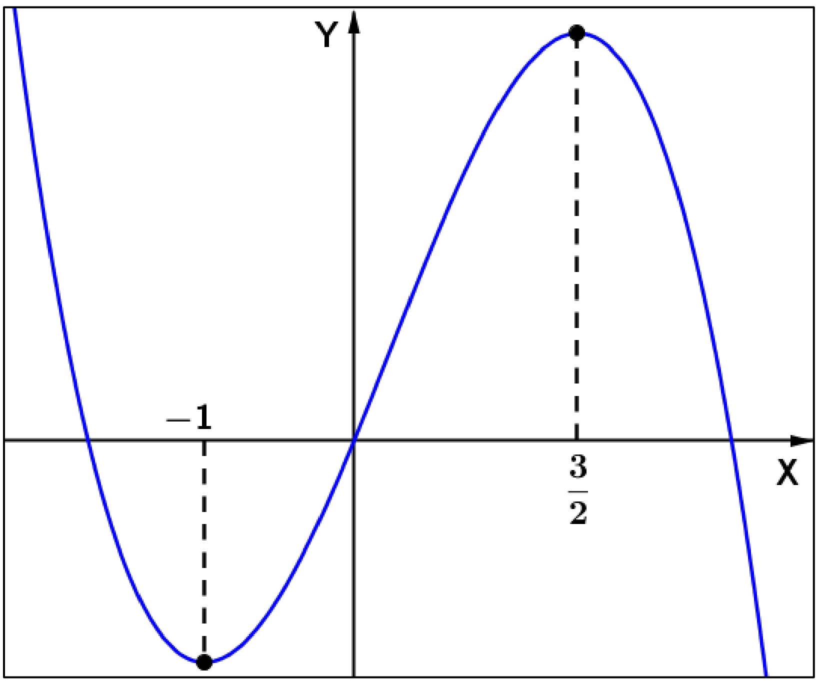
Fazendo $f'(x) = 0$, obtém-se $18 + 6x - 12x^2 = 0$ e resolvendo essa equação, os pontos críticos de f são: $\frac{3}{2}$ e -1.

Como $f''\left(\frac{3}{2}\right) = -30 < 0$, f tem um máximo local em $x = \frac{3}{2}$.

Como $f''(-1) = 30 > 0$, f tem um mínimo local em $x = -1$.

A Figura 29 representa o gráfico da função:

Figura 29 – Gráfico de $f(x) = 18x + 3x^2 - 4x^3$.



Fonte: Própria.

Exemplo 2:

Para encontrar os máximos e mínimos locais de $f(x) = x(x-1)^2$, tem-se:

$f(x) = x(x-1)^2 \;\Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = x(x^2 - 2x + 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = x^3 - 2x^2 + x.$

Assim:

$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$ e $f''(x) = 6x - 4.$

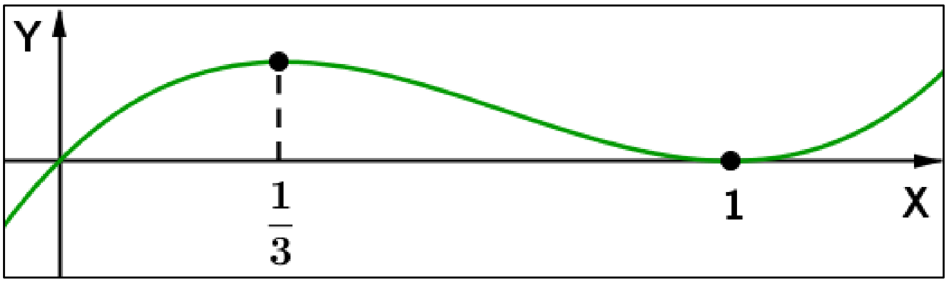
Fazendo $f'(x) = 0$, obtém-se $3x^2 - 4x + 1 = 0$, e resolvendo essa equação, os pontos críticos de f são: $\frac{1}{3}$ e 1.

Como $f''\left(\frac{1}{3}\right) = -2 < 0$, f tem um máximo local em $x = \frac{1}{3}$.

Como $f''(1) = 2 > 0$, f tem um mínimo local em $x = 1$.

A Figura 30 representa o gráfico da função:

Figura 30 – Gráfico de $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$.



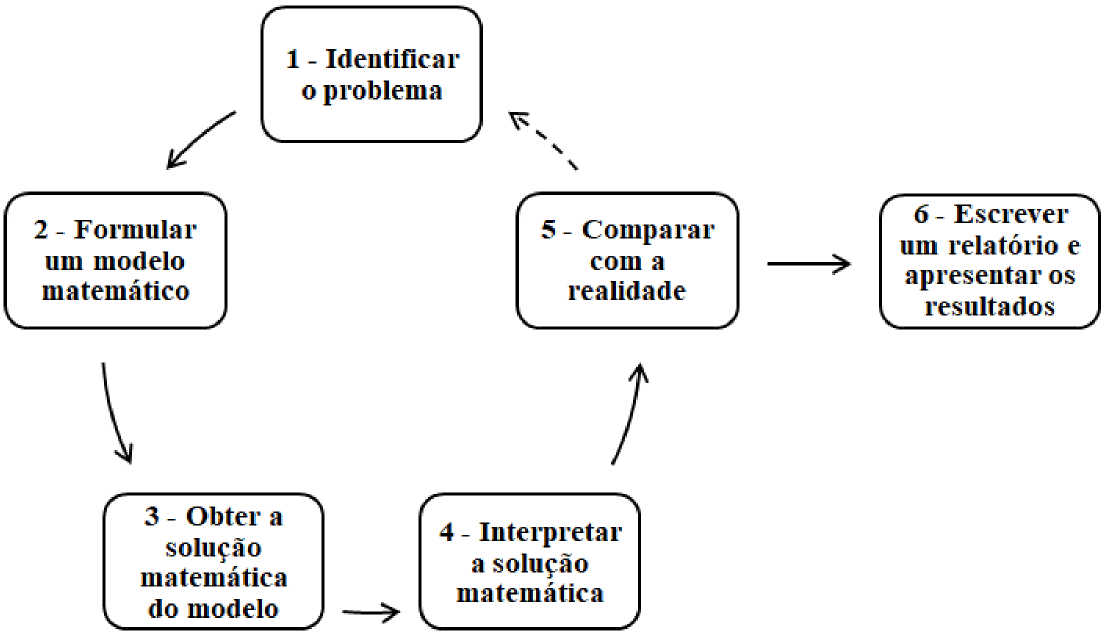
Fonte: Própria.

4 – RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO

Segundo Bassanezi (2002), a Modelagem pode ser entendida tanto como um método científico quanto como uma estratégia de ensino e aprendizagem. Esta última interpretação ocorre porque, por ser uma ferramenta de transposição de dados da realidade em termos matemáticos, a Modelagem possui caráter interdisciplinar. De acordo com Paviani (2008), a interdisciplinaridade consiste em uma modalidade de aplicação de conhecimentos de uma disciplina em outra, e também, como a colaboração entre professores e pesquisadores de áreas distintas. Ou seja, a interdisciplinaridade é capaz de unir duas ou mais áreas do conhecimento em prol do estudo de um conteúdo em comum. Desse modo, pode motivar mais os alunos em comparação com um estudo excessivamente técnico e com pouca clareza nas aplicações práticas do que é ensinado. Com isso, pretende-se mostrar que a Modelagem é uma excelente ferramenta de ensino, pois favorece o uso da interdisciplinaridade.

Segundo Edwards e Hamson (1989), a Modelagem segue as seguintes etapas:

Figura 31 – Etapas da Modelagem Matemática.



Fonte: Própria.

A seta pontilhada entre as etapas 5 e 1 indica que, se a solução obtida não for satisfatória, após a quinta etapa é preciso retornar para a etapa 1, refazendo o processo até que se atinja uma boa aproximação do problema real, e só então, seguir para a etapa 6.

Em relação à segunda etapa, para se formular um Modelo Matemático, é importante considerar a definição de Bertone et al. (2014, p. 22), que afirma que Modelo Matemático é "um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado." Mais especificamente, ainda de acordo com os autores, um modelo pode ser um desenho, um mapa, um gráfico, uma fórmula matemática, dentre outras possibilidades. Essa variedade de opções possibilita um entendimento do problema real de diferentes maneiras, e sob diferentes perspectivas. Nesse sentido, é comum que haja mais de um tipo de modelo para um mesmo problema. Neste trabalho, serão utilizados os seguintes tipos de modelo nas propostas metodológicas: gráfico e fórmula matemática.

O uso de Modelagem Matemática na resolução de problemas pode ocorrer por meio da criação de modelos, mas também, através da aplicação de modelos já conhecidos para inserir um determinado conteúdo matemático. Como este trabalho visa criar um material que apresente possibilidades de aplicação de conteúdos do Cálculo Diferencial no Ensino Médio, a estratégia foi abordar a resolução de problemas, no entanto o foco não será a criação de modelos, mas sim a de utilizar os modelos para apresentar conteúdos. As técnicas abordadas no Capítulo 3 para o cálculo de máximos e mínimos constituem, em grande parte, a etapa 2 do processo de Modelagem, que é formular o modelo matemático. Assim, o presente estudo prioriza a aplicação de modelos matemáticos já existentes para resolução dos problemas propostos.

A argumentação a favor do uso de Modelagem em sala de aula não é recente, e já houve avanço nesse sentido. Os livros didáticos vêm apresentando não apenas exercícios de pura repetição mecânica das técnicas matemáticas, mas também certa variedade de aplicações. Atualmente é comum encontrarmos, em livros didáticos, problemas que requerem o uso de Modelagem. Como exemplo disso, apresentamos os problemas abaixo, sendo os exemplos 1 e 2 baseados em Dante (2011), e o exemplo 3, com base em Souza (2011):

EXEMPLO 1: *Um representante comercial recebe mensalmente um salário composto de duas partes: uma fixa, no valor de R$ 1.500,00, e uma parte variável, que corresponde a uma comissão de 6% sobre o total das vendas que ele faz durante o mês. Qual é a função que representa o salário mensal desse representante comercial?*

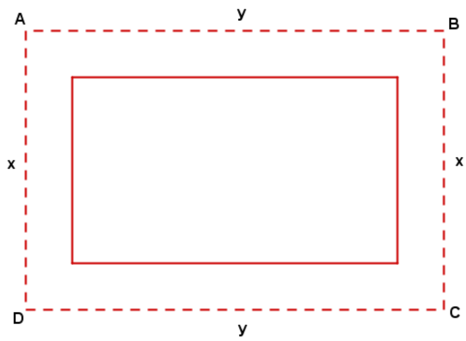
Pode-se observar que esse é um problema simples, pois apresenta apenas uma constante (1500), um coeficiente (0,06) e um valor variável (total de vendas no mês).

O salário mensal desse vendedor é dado em função do total de vendas que ele faz durante o mês, juntamente com o valor fixo de R$ 1.500,00. Assim, nomeando o salário mensal como s e o total de vendas no mês com x, temos que a função desejada é $s(x) = 0{,}06x + 1500$, e esse é o modelo matemático da situação apresentada.

EXEMPLO 2: *Os diretores de um centro esportivo desejam cercar com tela de alambrado o espaço em volta de uma quadra de basquete retangular. Tendo recebido 200 metros de tela, quais devem ser as dimensões do terreno a cercar com tela para que a área seja a maior possível?*

Já esse problema é um pouco mais complexo na etapa 2 (formular o modelo matemático), necessitando de alguns cálculos para que se compreenda qual função representa o problema. E antes disso, é recomendado fazer um desenho da situação, sendo este o primeiro modelo matemático utilizado no problema. Como a quadra é um retângulo, pode-se imaginar que seus lados medem x metros e y metros. Assim, tem-se:

Figura 32 – Modelo com cerca de medidas x e y.



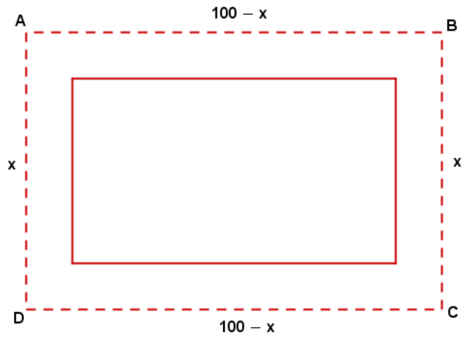
Fonte: Dante (2011), adaptado pelo autor.

O perímetro da quadra é $2x + 2y = 200$. Em seguida, efetuam-se os cálculos a fim de encontrar um valor de y em função de x:

$$2(x + y) = 200 \Rightarrow x + y = 100 \Rightarrow y = 100 - x.$$

Assim, substituindo y por $100 - x$ na Figura 32, obtém-se:

Figura 33 – Modelo com cerca de medidas x e $100 - x$.



Fonte: Dante (2011), adaptado pelo autor.

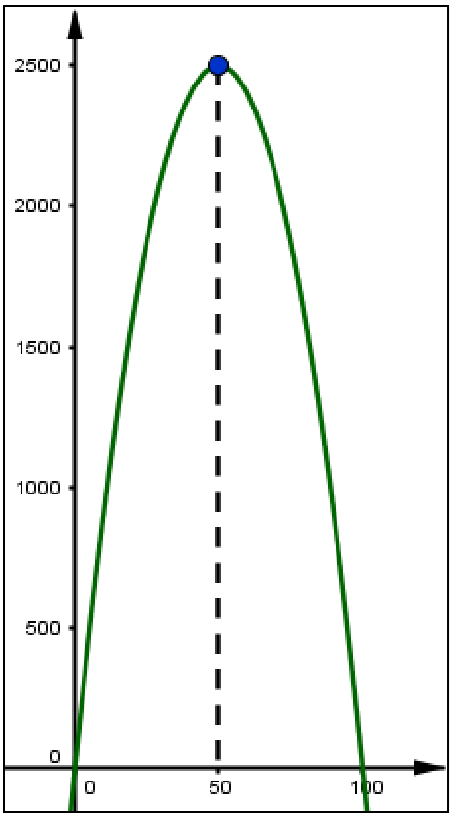
Como a área está em função de x, nomeando-a como f, e sendo ela resultado da multiplicação da largura (x) pelo comprimento $(100 - x)$, a função que modela o problema é:

$$f(x) = (100 - x)x = 100x - x^2 = -x^2 + 100x.$$

Para responder quais devem ser as dimensões do terreno a cercar com tela para que a área seja a maior possível, inicialmente deve-se observar que o gráfico de $f(x) = -x^2 + 100x$ é uma parábola com concavidade voltada para baixo. Logo, a função terá um ponto de máximo em seu vértice. Sendo assim, para calcular a coordenada x do vértice, tem-se:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-100}{2 \cdot (-1)} = 50.$$

Figura 34 – Ponto de máximo da função $f(x) = -x^2 + 100x$.



Fonte: Própria.

Substituindo esse valor de x em $y = 100 - x$, obtém-se $y = 100 - 50 = 50$. Ou seja, para cercar a maior área possível com $200m$ de tela, deve-se formar um quadrado de lado $50m$, sendo a área resultante igual a $2500m^2$.

Com o uso de ferramentas do Cálculo, como derivada da função $f(x) = -x^2 + 100x$, tem-se $f'(x) = -2x + 100$. Como o ponto de máximo de uma parábola possui uma reta tangente ao gráfico paralela ao eixo x, então o ângulo dessa reta tangente terá o valor zero. Isso implica que $f'(x) = 0$, para o ponto em que x determine o máximo da função. Logo, chega-se $f'(x) = -2x + 100 = 0$. Resolvendo a equação $-2x + 100 = 0$, obtém-se o valor de $x = 50$.

Com isso, é possível perceber como a utilização de ferramentas de Cálculo, em especial a derivada e sua aplicação na obtenção de máximos e mínimos, pode ocorrer no Ensino Médio de maneira contextualizada.

EXEMPLO 3: *Um posto de combustível vende 10000 litros de álcool por dia a R$ 1,50 cada litro. Seu proprietário percebeu que, para cada centavo de desconto que concedia por litro, eram vendidos 100 litros a mais por dia. Desse modo, qual é o preço do litro que gera o maior lucro ao proprietário?*

Para determinar a função que representa esse problema, é interessante fazer simulações com diferentes preços do combustível, a fim de encontrar a função que modela o problema.

Tabela 1 – Simulações de valores.

Centavos de desconto	Valor arrecadado no dia
0	$10000 \cdot R\$1{,}50 = R\$15.000{,}00$
1	$(10000 + 100) \cdot (R\$1{,}50 - R\$0{,}01) = 10100 \cdot R\$\ 1{,}49 = R\$15.049{,}00$
2	$(10000 + 200) \cdot (R\$1{,}50 - R\$0{,}02) = 10200 \cdot R\$\ 1{,}48 = R\$15.096{,}00$
3	$(10000 + 300) \cdot (R\$1{,}50 - R\$0{,}03) = 10300 \cdot R\$\ 1{,}47 = R\$15.141{,}00$

Fonte: Própria.

Assim, tomando x como a quantidade de centavos de desconto e $V(x)$ como a função que representa o valor arrecadado no dia, pode-se escrever:

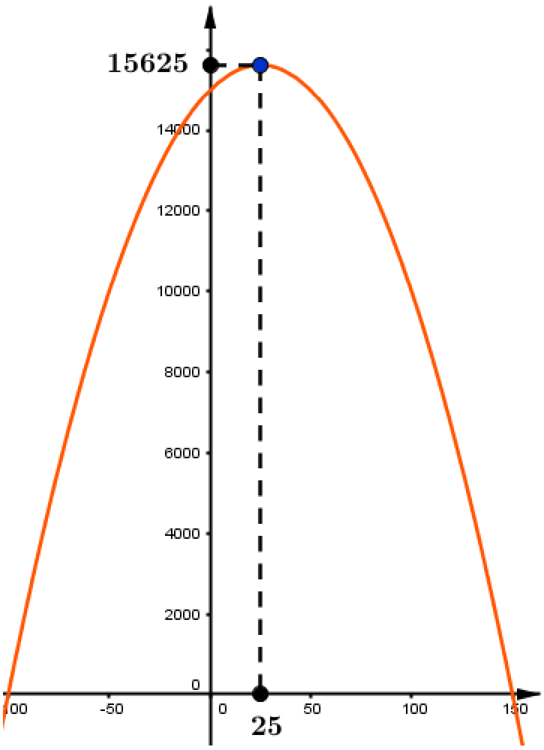
$$V(x) = (10000 + 100x) \cdot (1{,}50 - 0{,}01x) = 15000 + 50x - x^2.$$

Portanto, a função que modela o problema é $V(x) = 15000 + 50x - x^2$.

Assim como no exemplo anterior, o gráfico dessa função é uma parábola com concavidade voltada para baixo, e portanto, o vértice da parábola é o ponto de máximo da função. Por isso, calcula-se a coordenada x do vértice:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-50}{2 \cdot (-1)} = 25.$$

Figura 35 – Ponto de máximo da função $V(x) = -x^2 + 50x + 15000$.



Fonte: Própria.

Substituindo $x = 25$ em $V(x) = -x^2 + 50x + 15000$, tem-se:

$V(25) = -25^2 + 50 \cdot 25 + 15000 = 15625$.

Ou seja, é preciso conceder desconto de 25 centavos. Portanto, o preço do litro que gera maior lucro ao proprietário é $R\$1{,}25$, sendo o valor arrecadado no dia igual a $R\$15.625{,}00$, como mostra o gráfico na Figura 35.

Com uso do Cálculo Diferencial, a derivada da função $f(x) = -x^2 + 50x + 15000$, é $f'(x) = -2x + 50$. Fazendo $f'(x) = 0$, chega-se $f'(x) = -2x + 50 = 0$. Resolvendo a equação $-2x + 50 = 0$, obtém-se o valor de $x = 25$.

Os três exemplos apresentados são amostras de que a Modelagem já está inserida nos livros didáticos atualmente. Este trabalho, além de defender essa abordagem, visa acrescentar o uso do Cálculo Diferencial no Ensino Médio. Para que isso ocorra, o conceito de Modelagem Matemática deve estar bem consolidado, de modo a possibilitar que o Cálculo seja trabalhado de maneira clara e contextualizado.

5 – APLICAÇÕES DO CÁLCULO EM PROBLEMAS DA ÁREA AGRÍCOLA

Conforme exposto nos Capítulos 3 e 4, uma importante aplicação do Cálculo é na identificação de pontos de máximo e pontos de mínimo de funções a fim de otimizar determinada situação.

Por uma questão de conveniência em utilizar modelos matemáticos nos quais a otimização seja utilizada na resolução de problemas reais, este capítulo apresenta problemas da área agrícola, tendo como base os exercícios apresentados por Machado (2019), os quais envolvem otimização de área, maximização da produção, otimização da receita e minimização da distância.

5.1 – Otimização de área

PROBLEMA 1: *Pesquisadores e especialistas criadores de bovinos consideram que o sistema de pastejo rotacionado é um bom procedimento para minimização de custo na forragem de pastos, ou seja, é uma alternativa considerável e racional para aproveitamento de regiões de pastagens. O sistema de pastejo rotacionado consiste na divisão do pasto em dois ou mais piquetes com objetivo de alternar a utilização de regiões menores do pasto, isto é, enquanto uma parte do pasto é utilizada para criação dos bovinos, a outra parte passa por um período de descanso para reestabelecimento da forragem, proporcionando, assim, um melhor aproveitamento do pasto ou da região de criação dos animais. Pensando nisto, um criador de gado tem em sua propriedade uma região retangular que utiliza para criação de seus animais. Ele dispõe de 1200 m de cerca e deseja limitar uma região retangular para criação de um novo piquete aproveitando um dos lados de um piquete já existente para limitar a região nova a ser cercada. Quais as dimensões do novo piquete para que a região cercada tenha a maior área possível?*

Solução: Primeiramente, deve-se definir a função a ser otimizada. Em seguida, encontrar os pontos críticos através da primeira derivada, e por último, classifica-los por meio da segunda derivada.

Considerando as dimensões do novo piquete como x e y, sendo y o lado do piquete já existente, a função que representa a quantidade total de cerca a ser utilizada é $2x + y = 1200$. Mas como se trata de um problema de otimização de área, sendo esta representada por xy, tem-se então que a função a ser otimizada é $f(x) = xy$. Assim, a partir da equação

$2x + y = 1200$, chega-se em $y = 1200 - 2x$. Substituindo esse valor de y em $f(x) = xy$, obtém-se:

$$f(x) = x(1200 - 2x) \Rightarrow$$
$$f(x) = 1200x - 2x^2.$$

A primeira e a segunda derivadas de $f(x)$ são:

$f'(x) = 1200 - 4x$ e $f''(x) = -4$.

Resolvendo $f'(x) = 0$, a fim de encontrar os pontos críticos da função:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow$$
$$1200 - 4x = 0 \Rightarrow$$
$$x = 300.$$

Então, $x = 300$ é um ponto crítico de f.

Como $f''(x) = -4 < 0$, f tem um ponto de máximo em $x = 300$.

Substituindo $x = 300$ em $y = 1200 - 2x$, obtém-se $y = 600$.

Portanto, as dimensões do novo piquete para que a região cercada tenha a maior área possível são $300\ m$ e $600\ m$, totalizando uma área de $180\ 000\ m^2$.

PROBLEMA 2: *Um fazendeiro deseja cercar dois pastos retangulares, de dimensões x e y, com um lado comum cuja dimensão é x. Quais as dimensões dos pastos para que o comprimento de cerca utilizado para limitar as regiões seja mínimo, sabendo que cada pasto deve ter área igual a 400 m^2.*

Solução: Por se tratar de dois pastos de dimensões x e y, sendo x o lado comum, a função que representa a quantidade de cerca é $f(x) = 3x + 4y$, e esta é a função a ser otimizada. Porém, como $xy = 400$, então $y = \frac{400}{x}$. Substituindo esse valor de y em $f(x) = 3x + 4y$, obtém-se:

$$f(x) = 3x + \frac{1600}{x}.$$

A partir disso, tem-se:

$f'(x) = 3 - \frac{1600}{x^2}$ e $f''(x) = \frac{3200}{x^3}$.

Resolvendo $f'(x) = 0$, a fim de encontrar os pontos críticos da função, segue que:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow$$
$$3 - \frac{1600}{x^2} = 0 \Rightarrow$$
$$x_1 = \frac{40\sqrt{3}}{3} \quad \text{e} \quad x_2 = -\frac{40\sqrt{3}}{3}.$$

Então, $x_1 = \frac{40\sqrt{3}}{3}$ e $x_2 = -\frac{40\sqrt{3}}{3}$ são os pontos críticos da função. Como o problema trata de medidas de comprimento, considera-se apenas o valor positivo (x_1) para fazer o teste da segunda derivada e confirmar que este é um ponto de mínimo. Assim, segue:

$$f''\left(\frac{40\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{3200}{\left(\frac{40\sqrt{3}}{3}\right)^3} = \frac{3200}{\frac{64000 \cdot 3\sqrt{3}}{27}} = \frac{86400}{192000\sqrt{3}} = \frac{864\sqrt{3}}{5760}.$$

Como $f''\left(\frac{40\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{864\sqrt{3}}{5760} > 0$, f tem um ponto de mínimo em $x = \frac{40\sqrt{3}}{3}$.

Substituindo $x = \frac{40\sqrt{3}}{3}$ em $y = \frac{400}{x}$, temos:

$$y = \frac{400}{x} = \frac{400}{\frac{40\sqrt{3}}{3}} = \frac{30}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{3}.$$

Portanto, as dimensões dos pastos para que o comprimento de cerca utilizado seja mínimo, são $x = \frac{40\sqrt{3}}{3} m$ e $y = 10\sqrt{3}\, m$.

5.2 – Maximização da produção

PROBLEMA 3: *Um agricultor do Estado de Goiás, especialista em produção de laranjas, deseja aumentar a produção para obtenção de um lucro maior na venda do fruto. Observando os fatores climáticos e de qualidade do solo, que são características da região e influenciam na produtividade da planta, ele estima que, se 60 laranjeiras forem plantadas, a produtividade média por árvore será de 400 laranjas. Mas, a produtividade média decrescerá de 4 laranjas por árvore para cada árvore adicional plantada na mesma área. Quantas árvores o agricultor deve adicionar à plantação para maximizar sua produtividade total?*

Solução: Sendo x a quantidade de laranjeiras a ser adicionada, como para cada árvore a mais a produção decai em 4 laranjas, a função que modela o problema é:

$$f(x) = (60 + x)(400 - 4x) = -4x^2 + 160x + 24000, 0 \leq x \leq 100.$$

Calculando a primeira e a segunda derivadas, segue que:

$f'(x) = -8x + 160$ e $f''(x) = -8$.

Resolvendo $f'(x) = 0$, a fim de encontrar os pontos críticos da função, tem-se:

$$-8x + 160 = 0 \Rightarrow$$

$$x = 20.$$

Então, $x = 20$ é um ponto crítico de f.

Como $f''(x) = -8 < 0$, f tem um ponto de máximo em $x = 20$.

Portanto, o agricultor deve adicionar 20 árvores à plantação para maximizar sua produtividade, totalizando 80 árvores. Para encontrar a produção máxima, basta fazer:

$$f(20) = -4(20)^2 + 160(20) + 24000 = -1600 + 3200 + 24000 = 25600.$$

5.3 – Otimização da receita

PROBLEMA 4: *Produtores da região centro-oeste do Brasil, especialistas em produção de batatas, estimam que no primeiro dia do mês de julho a saca da batata pode ser vendida a R$ 2,00. Após esta data, o preço de venda por saca de batata cai a uma taxa de 2 centavos por dia. Sabendo disto, no primeiro dia do mês de julho, um fazendeiro tem 80 sacas de batatas no campo e estima que a plantação está aumentando à taxa de 1 saca por dia. Quando o fazendeiro deve realizar a colheita da produção de batatas para maximizar sua receita?*

Solução: Sendo x o número de dias após o dia 01 para realizar a colheita, e y a quantidade de sacas que serão colhidas após x dias, a função que modela a receita é:

$$f(x, y) = (2 - 0{,}02x)(80 + y).$$

Porém, como a taxa de aumento da quantidade de batatas é de 1 saca por dia, então $x = y$. Assim:

$$f(x) = (2 - 0{,}02x)(80 + x) = 160 + 0{,}4x - 0{,}02x^2 = -\frac{x^2}{50} + \frac{2x}{5} + 160.$$

Calculando a primeira e a segunda derivadas, chegamos em:

$f'(x) = \frac{-x}{25} + \frac{2}{5}$ e $f''(x) = -\frac{1}{25}$.

Fazendo $f'(x) = 0$, temos:

$$\frac{-x}{25} + \frac{2}{5} = 0 \Rightarrow$$
$$x = 10.$$

Então, $x = 10$ é um ponto crítico de f.

Como $f''(x) = -\frac{1}{25} < 0$, f tem um ponto de máximo em $x = 10$.

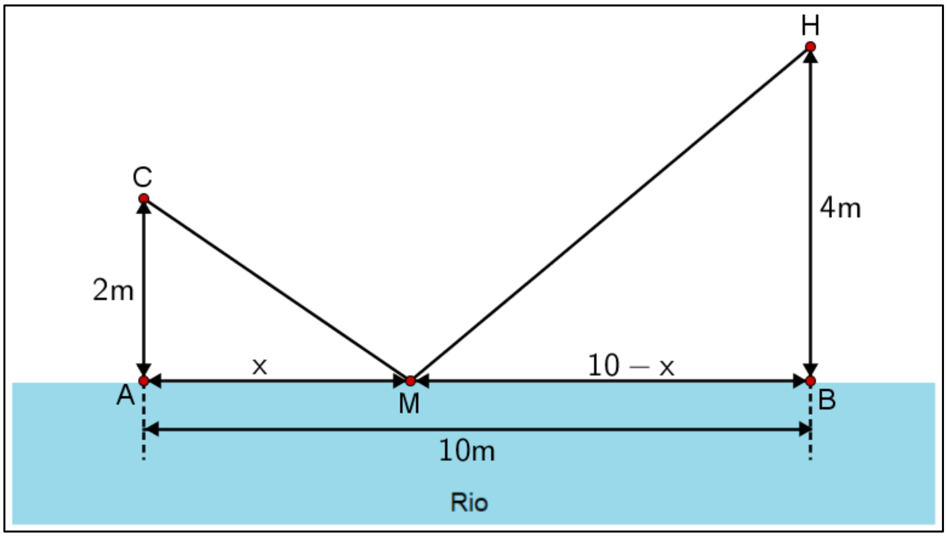
Portanto, o fazendeiro deve realizar a colheita 10 dias após o dia 01/07, ou seja, em 11/07 para atingir a maior receita pela venda das sacas.

5.4 – Minimização da distância

PROBLEMA 5: *Um agricultor está em sua casa C situada a 2 metros da margem retilínea de um rio. Ele quer encher o seu regador de água em um ponto M na margem deste rio e, depois, se dirigir para sua horta H, situada a 4 metros da margem do mesmo rio. A distância entre os pés A e B das perpendiculares traçadas de C e H sobre a margem do rio é igual a 10 metros. Qual deve ser a posição do ponto de coleta de água M, para que o trajeto casa-rio-horta seja o menor possível?*

Solução: Primeiramente, apresentamos a figura que representa o problema:

Figura 36 – Trajeto Casa-Rio-Horta.



Fonte: Machado (2019), adaptado pelo autor.

Seja $\overline{CM}$ a distância da casa ao rio, e $\overline{MH}$ a distância do rio à horta, temos que a distância a ser minimizada é $\overline{CM} + \overline{MH}$. Pelo Teorema de Pitágoras, temos que $\overline{CM} = \sqrt{x^2 + 4}$ e $\overline{MH} = \sqrt{(10 - x)^2 + 16}$. Assim, a função que modela o problema é:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{(10 - x)^2 + 16}.$$

Com base nas seções 3.7.1 e 3.7.2, calculamos a primeira e segunda derivadas de $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} - \frac{10 - x}{\sqrt{(10 - x)^2 + 16}}$$

e

$$f''(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} - \frac{x^2}{\sqrt{(x^2 + 4)^3}} + \frac{1}{\sqrt{(10 - x)^2 + 16}} + \frac{(10 - x)^2}{\sqrt{((10 - x)^2 + 16)^3}}.$$

Fazendo $f'(x) = 0$, para obter os pontos críticos, temos:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{10-x}{\sqrt{(10-x)^2+16}} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{10-x}{\sqrt{(10-x)^2+16}} \Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{x^2+4} = \frac{(10-x)^2}{(10-x)^2+16} \Rightarrow$$

$$x^2(10-x)^2+16 = (x^2+4)(10-x)^2 \Rightarrow$$

$$x^2(10-x)^2+16 = x^2(10-x)^2+4(10-x)^2 \Rightarrow$$

$$12x^2+80x-400 = 0 \Rightarrow$$

$$3x^2+20x-100 = 0 \Rightarrow$$

$$x_1 = \tfrac{10}{3} \text{ e } x_2 = -10.$$

Como o problema é sobre medida de comprimento, considera-se apenas o valor positivo (x_1) para fazer o teste da segunda derivada. Assim, segue:

$$f''\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{100}{9}+4}} - \frac{\frac{100}{9}}{\sqrt{\left(\frac{100}{9}+4\right)^3}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{400}{9}+16}} + \frac{\frac{400}{9}}{\sqrt{\left(\frac{400}{9}+16\right)^3}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{136}{9}}} - \frac{\frac{100}{9}}{\sqrt{\left(\frac{136}{9}\right)^3}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{544}{9}}} + \frac{\frac{400}{9}}{\sqrt{\left(\frac{544}{9}\right)^3}} \cong 0{,}292.$$

Como $f''\left(\frac{10}{3}\right) > 0$, é ponto de mínimo da função. Logo, o ponto M deve estar a aproximadamente $3{,}33m$ de distância de A para que o trajeto a ser percorrido pelo agricultor seja mínimo.

6 – SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS

Sequência Didática consiste em uma forma de sistematizar a intervenção e/ou relação entre o professor e os alunos, para que se alcance um objetivo de ensino aprendizagem (CABRAL, 2017). Esse conceito tem várias características, desenvolvidas com estudos sistemáticos que importam das mais diversas áreas o formato de realizar a intervenção. Nesse capítulo, serão apresentadas algumas características do conceito de Sequência Didática, bem como, um exemplo de problema que pode ser abordado com uma aplicação interdisciplinar.

De acordo com Cabral (2017), uma Sequência Didática é uma sistematização que possibilita ao professor organizar as atividades de ensino em função dos conteúdos, denominados núcleos temáticos, de forma a abranger a dimensão conceitual dos objetos em estudo, os procedimentos estruturais e dimensões técnicas e estéticas.

Segundo Araújo (2013) apud Cabral (2017), o uso do termo “Sequência Didática” tem ampla utilização no contexto de trabalhos de aprendizagem de língua escrita com trabalhos desenvolvidos por Dolz, Noverraz, e Schneuwly (2004). Nesses trabalhos as investigações tinham como foco a relação entre linguagem, interação e sociedade. Dessa forma, a Sequência Didática foi entendida como um conjunto de atividades escolares organizadas, de maneira sistemática, em torno de determinado conteúdo (ARAUJO, 2014 apud DOLZ; NOVERRAZ; SCHNEUWLY, 2004).

Segundo Zabala (1998), o termo “Sequência Didática” pode ser compreendido como um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecido tanto para os professores, bem como, para os alunos. Nesse sentido, Zabala (1998) deixa claro que as Sequências Didáticas devem ser criadas em uma perspectiva para sistematizar e planejar de forma meticulosa os objetos de ensino, ou seja, os conteúdos a serem ensinados.

No procedimento para aplicação da Sequência Didática, estão presentes as três fases de uma intervenção, que são: o planejamento, a aplicação e a avaliação (ZABALA, 1998). Essa tríade, segundo o autor, permite ao professor um aperfeiçoamento de sua prática pedagógica, uma vez que o planejamento racionaliza a inevitável articulação entre os conceitos e as metodologias alternativas, a aplicação é responsável por materializar a viabilidade do conteúdo sequenciado e apresentado aos alunos, e a avaliação permite a reelaboração do processo a partir de uma análise criteriosa dos dados.

Segundo Kobashigawa et al. (2008), uma Sequência Didática consiste em um conjunto de atividades, no formato de intervenções planejadas, que objetivam o entendimento de certo conteúdo. As atividades são um encadeamento de indagações, atitudes, procedimentos e ações realizadas pelo aluno realizar sob mediação do professor, seguindo um aprofundamento crescente do tema discutido. Nesse sentido, podem ser necessários vários dias para que toda a atividade seja cumprida.

Segundo Cabral (2017), o procedimento metodológico de Sequência Didática é concebido por quatro fases distintas: apresentação da situação de ensino, a produção inicial, os módulos e a produção final. Na primeira fase, os alunos recebem do professor uma descrição minuciosa da relevância do projeto de ensino bem como dos objetivos, estrutura e condições coletivas de produção dos saberes envolvidos. Já a segunda fase (produção inicial) guarda as intervenções que visam diagnosticar as capacidades já adquiridas pelos alunos em relação ao objeto de ensino e, além disso, procura adequar as ações de ensino posteriores a partir das quais se pretende atingir os objetos de aprendizagem. Após essa fase diagnóstica vem a terceira fase (desenvolvimento dos módulos) na qual são ministradas as oficinas que se constituem em diversas atividades, relativas ao desenvolvimento das capacidades relacionadas aos objetos de aprendizagem. Após os módulos, segue-se a quarta fase (produção final) na qual o aluno coloca em prática os conhecimentos adquiridos e, juntamente com o professor, avaliam os progressos alcançados.

Assim, segundo Dolz e Schneuwly (1997) apud Cabral (1997) uma Sequência Didática deve ser precedida de um estudo sobre o assunto a ser ensinado e dessa forma, o modelo apontará os elementos que poderão ser objetos do ensino-aprendizagem. De forma resumida, o professor faz: em primeiro lugar – uma investigação interna das relações conceituais do objeto em termos de conteúdos disciplinares, sempre identificando quais textos e/ou abordagens são adequados ao grupo de alunos em questão. Em segundo lugar o professor deve se apropriar dos conteúdos, ou seja, além do olhar disciplinar também é importante uma abordagem interdisciplinar. Em terceiro lugar o professor precisa sistematizar uma caracterização do objeto de ensino, e também, criar uma organização de forma que o aluno perceba esse objeto como algo a ser investigado. Por fim, o professor é o responsável por materializar as ações de ensino a partir de um percurso metodológico definido no formato da Sequência Didática (CABRAL, 2017).

6.1 – Exemplo de aplicação de uma Sequência Didática com Cálculo Diferencial

Esta seção apresenta uma proposta de utilização de ferramentas do Cálculo Diferencial para solucionar problemas de máximos e mínimos, tendo como base o Problema 1 do

Capítulo 5. Com o referido problema, foi construída uma Sequência Didática para discutir vários assuntos, ou seja, conteúdos de forma interdisciplinar. A questão foi dividida em três partes, originando três intervenções possíveis, sendo as duas primeiras voltadas a questões interdisciplinares, e a terceira, com foco nos aspectos matemáticos do problema. Essa Sequência Didática é uma abordagem que o autor coloca como possível, sabendo que existem outras maneiras de abordar o assunto em questão.

6.1.1 – Intervenção 1

“*Pesquisadores e especialistas criadores de bovinos consideram que o sistema de pastejo rotacionado é um bom procedimento para minimização de custo na forragem de pastos, ou seja, é uma alternativa considerável e racional para aproveitamento de regiões de pastagens. [...]”*

Discussões que os professores podem realizar:

- Qual o impacto que a criação de gado tem para o Brasil e para o Mato Grosso?
- Como é o histórico desse processo, com base na economia, e qual é sua importância no país como produção primária?
- Quais os formatos de criação de gado? Criação extensiva ou intensiva?
- Discutir estatísticas sobre produção primária e seus impactos.
- Quais as implicações ambientais para criação extensiva de gado?
- Como é o modelo indicado no problema, ou seja, modelo de “rotacionar” a pastagem?

6.1.2 – Intervenção 2

“[...] O sistema de pastejo rotacionado consiste na divisão do pasto em dois ou mais piquetes com objetivo de alternar a utilização de regiões menores do pasto, isto é, enquanto uma parte do pasto é utilizada para criação dos bovinos, a outra parte passa por um período de descanso para reestabelecimento da forragem, proporcionando, assim, um melhor aproveitamento do pasto ou da região de criação dos animais. [...]”

Discussões que os professores podem realizar:

- Quais os modelos utilizados nas fazendas? (executar uma pesquisa com criadores ou associação de criadores de gado).

- Como funciona o chamado “período de descanso para o reestabelecimento da forragem”?
- O que é e como funciona a “forragem” que está proposta no problema?
- Discutir com os alunos um esquema (baseado em desenhos, ou imagens do software Google Earth) para exemplificar como o esquema de rotacionar pastagem é realizado na prática.
- Fazer uma pesquisa para discutir com os alunos, junto a profissionais, para entender por que o rotacionar gera um melhor aproveitamento da pastagem.

6.1.3 – Intervenção 3

“*[...] Pensando nisto, um criador de gado tem em sua propriedade uma região retangular que utiliza para criação de seus animais. Ele dispõe de 1200 m de cerca e deseja limitar uma região retangular para criação de um novo piquete aproveitando um dos lados de um piquete já existente para limitar a região nova a ser cercada. Quais as dimensões do novo piquete para que a região cercada tenha a maior área possível?”*

Discussões que os professores podem realizar:

- Primeiro, para entender o problema do ponto de vista matemático, o professor precisa ajudar os alunos, preferencialmente, no trabalho em grupo a criar um esquema (desenhos) do problema.
- Auxiliar os alunos a formalizar em uma linguagem matemática o problema. Para isso os alunos precisam definir quais são as variáveis, quais as equações e, por fim, quais são as funções que modelam o problema.
- Estudar as características da função criada, que nesse caso é uma função quadrática. O estudo das características implica nos elementos da função, tais como domínio, imagem, gráfico, existência de máximos e/ou mínimos, como se calcula os pontos em que esses casos ocorrem (valores de x) e quais são os resultados (valores de y).
- Quais as formas de calcular, no modelo tradicional, por exemplo, as coordenadas x e y do vértice da função quadrática?
- Por fim, o professor deve proporcionar aos alunos a forma de calcular os valores de máximos e mínimos com base em ferramentas de Cálculo Diferencial, para mostrar aos alunos que a discussão de máximos e mínimos não precisa de fórmulas prontas e sim do conceito proposto.

6.2 – Observações sobre a abordagem

Nesse capítulo, uma abordagem na forma de exemplo foi proposta para provocar uma discussão que envolva todos os itens indicados na proposta do referido trabalho.

Dessa forma, uma proposta didática sintetiza a aplicação de metodologias de resolução de problemas, que tem uma organização sistematizada de como deve ser aplicada na construção do conhecimento dos alunos que terão, nessa metodologia, a abordagem do conteúdo a ser ensinado.

A utilização de ferramentas de Cálculo Diferencial com alunos da educação básica, em especial dos últimos anos do Ensino Médio, mostra que a forma de ensinar e/ou abordar Matemática, esperada na educação superior, podem ajudar os alunos a construir o conhecimento sem a necessidade da “dita formalização” que o assunto requer na formação do professor que vai aplicá-las e para os alunos que vão utilizá-las em situações problemas.

Utilizar assuntos que façam parte de uma realidade do aluno, proporcionando uma discussão interdisciplinar, mostra-se ser uma abordagem bastante interessante, para que o conteúdo em questão tenha sentido para o educando. A abordagem interdisciplinar do assunto passa a ser um momento da aplicação de problemas que envolvam assuntos que possam fazer parte dos alunos, dentro de um conjunto de conteúdos e professores que proporiam o projeto de ensino.

Por fim, lançar mão da sistematização, com base em uma abordagem de Sequência Didática, é uma forma de utilizar conhecimento já desenvolvido para realizar a intervenção com objetivo bem específico no ensino a ser promovido para o acadêmico.

7 – CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho procurou apresentar algumas aplicações práticas da Matemática, através de resolução de problemas de maneira contextualizada. A abordagem utilizada por Machado (1988) para apresentar as noções de Cálculo foi de grande valia para a construção do trabalho, pois proporcionou um estudo mais acessível dessa área da Matemática, que é considerada complexa.

Como exposto no Capítulo 4, atualmente é comum encontrarmos, em livros didáticos, problemas que utilizam a Modelagem. Sendo assim, sua resolução pode ser ainda mais enriquecida com as ferramentas do Cálculo Diferencial. Uma importante ferramenta é a identificação de pontos de máximo e pontos de mínimo de funções, a fim de otimizar determinado problema, o que possui larga aplicação em diversos setores.

Os problemas apresentados no Capítulo 5 são exemplos de aplicação do Cálculo Diferencial e da Modelagem Matemática, os quais podem agregar o ensino e aprendizagem. O Capítulo 6 aprofunda as possibilidades de aplicação, com base no conceito de Sequência Didática, aliado à interdisciplinaridade, para que os problemas matemáticos estejam conectados com a realidade dos estudantes. Isso responde às perguntas que deram origem ao trabalho: "Como o Cálculo Diferencial podem auxiliar na resolução de problemas no Ensino Médio?" e "De que modo professores de Matemática do Ensino Médio podem trabalhar Modelagem Matemática com seus alunos mostrando, assim, aplicações práticas dessa disciplina?"

Desse modo, este trabalho pode servir de base para professores do Ensino Médio que veem a oportunidade de inserir tópicos de Modelagem com uso de Cálculo Diferencial em suas aulas. Fica também como sugestão, para outros trabalhos acadêmicos, a defesa de que esse tipo de abordagem não se limite ao Ensino Médio, mas que também possa ser utilizado no Ensino Superior, considerando que a linguagem e construção de ideias utilizada por Machado (1988) é muito intuitiva. Portanto, pode ser vantajoso, do ponto de vista didático, ter como alternativa Machado (1988), ao menos nos cursos de Cálculo I, os quais apresentam grande índice de reprovação.

8 – REFERENCIAL BIBLIOGRÁFICO

ALVES, Murilo Barros. **Equações Diferenciais Ordinárias em cursos de Licenciatura de Matemática** – Formulação, Resolução de Problemas, e Introdução à Modelagem Matemática. 2008. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2008.

ASSIS, Eliane Maria do Nascimento. **Limites:** história e aplicações. 2017. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Viçosa, Florestal, 2017.

ÁVILA, Geraldo Severo de Souza. **Análise Matemática:** para licenciatura. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 2001.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**. São Paulo: Contexto, 2002.

BERTONE, Ana Maria Amarillo; BASSANEZI, Rodney Carlos; JAFELICE, Rosana Sueli da Motta. **Modelagem Matemática**. Minas Gerais: CEAD-UFU, 2014.

CABRAL, Natanael Freitas. **Sequências Didáticas:** estrutura e elaboração. Pará: SBEM, 2017.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática:** contexto e aplicações. São Paulo: Ática, 2011.

DOLZ, J.; NOVERRAZ, M.; SCHNEUWLY, B. Sequências didáticas para o oral e a escrita: apresentação de um procedimento. In: **Gêneros orais e escritos na escola**. Campinas: Mercado das Letras, 2004.

D'OTTAVIANO, Itala Maria Loffredo; BERTATO, Fábio Maia. George Berkeley e os Fundamentos do Cálculo Diferencial e Integral. **Cad. Hist. Fil. Ci.**, Campinas, Série 4, v. 1, n.1, p. 33-73, jan.-jun. 2015.

EDWARDS, Dilwyn; HAMSON, Mike. **Guide to Mathematical Modelling**. Macmillan Education: London, 1989. *E-book.*

FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. **Cálculo A:** Funções, limite, derivação e integração. 6. ed. Florianópolis: Pearson, 2006.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos; MACHADO, Nílson José. **Fundamentos de matemática elementar:** limites, derivadas e noções de integral. 5. ed. São Paulo: Atual, 1983.

KOBASHIGAWA, Alexandre Hiroshi; ATHAYDE, Beatriz A. C. de Castro; MATOS, Kédima Ferreira de Oliveira; CAMELO, Midori Hijioka; FALCONI, Simone. Estação ciência: formação de educadores para o ensino de ciências nas séries iniciais do ensino fundamental. In: **IV Seminário Nacional ABC na Educação Científica**. São Paulo, 2008. p. 212- 217.

MACHADO, Jaqueline Carvalho. **Um estudo sobre Máximos e Mínimos aplicados a problemas de produção agrícola e otimização de áreas**. 2019. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal Goiano, Urutaí, 2019.

MACHADO, Nílson José. **Noções de Cálculo**. Coleção Matemática por Assunto, vol. 9. São Paulo: Scipione, 1988.

PAVIANI, Jayme. **Interdisciplinaridade**: conceitos e distinções. 2. Ed. Rio Grande do Sul: EDUCS, 2008.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática**: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. 1. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Novo olhar Matemática:** versão com progressões, vol. 2. São Paulo: FTD, 2011.

STEWART, James. **Cálculo**, vol. 1. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa:** como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998.