Universidade Federal do Oeste da Bahia
Centro das Ciências Exatas e da Tecnologia

Construção dos Conjuntos Numéricos e Aplicações

por

Lucas Brandão Oliveira

Barreiras
2022

Lucas Brandão Oliveira

Construção dos Conjuntos Numéricos e Aplicações

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Nível de Mestrado Profissional em Matemática- PROFMAT da Universidade Federal do Oeste da Bahia, como requisito parcial para a obtenção do título de mestre.
Orientador: Prof. Dr. Gilson do Nascimento Silva

Barreiras
2022

FICHA CATALOGRÁFICA

O48 Oliveira, Lucas Brandão.

Construção dos conjuntos numéricos e aplicações. / Lucas Brandão Oliveira. – 2022

73f.
Orientador: Dr. Gilson do Nascimento Silva.

Dissertação (Mestrado) – Programa de Mestrado Profissional em Matemática - ProfMat. Universidade Federal do Oeste da Bahia – Centro das Ciências Exatas e das Tecnologias. Barreiras, BA, 2022.

1. Matemática. 2. Conjuntos Numéricos. 3. Relações de Equivalência. I. Silva, Gilson do Nascimento. II. Universidade Federal do Oeste da Bahia Centro das Humanidades. III. Título.

CDD 510

Biblioteca Universitária de Barreiras - UFOB

Lucas Brandão Oliveira

Construção dos Conjuntos Numéricos e Aplicações

Dissertação como requisito para a obtenção do grau de Mestre Profissional em Matemática da Universidade Federal do Oeste da Bahia.

Aprovado em 30 de março de 2022.

Banca Examinadora

Documento assinado digitalmente
GILSON DO NASCIMENTO SILVA
Data: 21/06/2022 08:44:26-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Prof. Dr. Gilson do Nascimento Silva (UFOB)

Documento assinado digitalmente
Samara Costa Lima
Data: 20/06/2022 14:35:29-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Prof. Dr. Samara Costa Lima (UFOB)

Documento assinado digitalmente
VITALIANO DE SOUSA AMARAL
Data: 20/06/2022 18:23:56-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Prof. Dr. Vitaliano de Sousa Amaral (UFPI)

Agradecimentos

A Deus, tanto por ter proporcionado diversas alegrias nos bons momentos como também pela motivação para enfrentar os desafios encontrados ao longo desta caminhada.

À minha família, em especial meu pai e minha mãe, por sempre ter apoiado minhas decisões e pelo grande incentivo aos meus estudos.

Ao meu orientador, prof. Dr. Gilson do Nascimento Silva, pelas valiosas contribuições dadas a este trabalho e por acreditar, apesar de todos os desafios, em sua viabilidade.

Aos demais componentes da banca examinadora, pela disponibilidade em avaliar o trabalho.

Aos colegas e professores do ProfMat-UFOB.

Resumo

Os números estão presentes nas mais variadas situações das nossas vidas, e por normalmente ser algo essencial os utilizamos de modo natural. De maneira natural e intuitiva também os utilizam diversos estudantes de diferentes níveis e áreas em suas rotinas, as vezes sem ainda terem se deparado com uma formalização destes numéros. Como alternativa de consulta e exclarecimento para variados públicos, em especial estudantes de ensino médio, visamos aqui apresentar uma construção dos conjuntos numéricos e algumas aplicações destes. Para isso consideraremos conhecido o conjunto dos números naturais e suas propriedades, utilizaremos relações de equivalência para construir os números inteiros e os números racionais, apresentaremos suas operações, definiremos uma ordem e demonstraremos suas principais propriedades. Em seguida, construiremos, por meio das sequências de Cauchy, o corpo ordenado completo dos números reais. Para finalizar, apresentaremos algumas desigualdades clássicas, onde abordaremos diversas aplicações dos conjuntos numéricos construídos.

Palavras-chave: Conjuntos numéricos, relações de equivalência, sequências de Cauchy, desigualdades.

Abstract

Numbers are present in many situations of our lives, and as they are usually essential, we use them naturally. In a natural and intuitive way, several students of different levels and areas also use them in their routines, sometimes without having yet come across a formalization of these numbers. As an alternative for consultation and clarification for different audiences, especially high school students, we aim here to present a construction of numerical sets and some applications of these. For this, we will consider the set of natural numbers and their properties known, we will use equivalence relations to construct the integers and rational numbers, we will present their operations, we will define an order and we will demonstrate their main properties. Next, we will construct, through the Cauchy sequences, the complete ordered field of real numbers. Finally, we will present some classic inequalities, where we will approach several applications of the constructed numerical sets.

Keywords: Numerical sets, equivalence relations, Cauchy sequences, inequalities.

Conteúdo

Introdução

A utilização dos números em nossa rotina é algo tão natural que o conhecimento acerca destes aparenta ser uma característica inata do ser humano. No entanto, como nos mostra a história, o desenvolvimento do sistema de numeração que conhecemos foi lento e bastante complexo.

Acredita-se que o conceito de número e o processo de contagem teve início bem antes dos primeiros registros históricos. De acordo com [8], é possível que a forma mais remota de contar se baseasse em algum método de registro simples, empregando o pricípio da correspôndencia biunívoca. Um exemplo bem conhecido desta noção de contagem é a correspondência entre animais de um rebanho e os dedos, ou pedrinhas, ou marcas em pedaço de madeira, ou mesmo nós numa corda.

Com o passar do tempo, foi se desenvolvendo conhecimentos teóricos a respeito destes números, destaca-se inicialmente os sons vocais e os símbolos para representar as quantidades de elementos de um determinado conjunto. Diversas civilizações desenvolveram seu proprio sistema de numeração, como exemplo podemos citar os babilônios, os egípcios, os romanos, os gregos e os maias. Mais detalhes podem ser encontrados em [8, 11], por exemplo.

É destacado em [9] que apesar da variedade de maneiras utilizadas nas representações numéricas, os cientistas da antiguidade foram capazes de desenvolverem fatos de extrema importância para a matemática. Podemos citar como exemplo de pensamentos consideravelmente relevantes na história dos números, a descoberta dos incomensuráveis pela Escola Pitágorica no século VI a.C. e a criação da Teoria das Proporções por Eudoxo de Cnidos no século IV a.C, que tratava das grandezas incomensuráveis através da geometria. Em [8, 11, 2] o leitor poderá encontrar maiores detalhes.

Hoje, utilizamos o sistema de numeração posicional decimal que é conhecido como sistema de numeração indo-arábico em referência aos hindus, que os inventaram, e aos arábes, que os transmitiram para a Europa Ocidental. Os mais antigos registros históricos dos símbolos que originaram este sistema foram encontrados na Índia, em colunas de pedra de um templo construído por volta do ano 250 a.C. No entanto, não há nenhum símbolo para o zero, sendo este criado pelos hindus nos primeiros séculos da era cristã. Nos anos seguintes o sistema de numeração indo-arábico se espalhou e seus símbolos foram sendo modificados, até se estabilizarem da maneira que os utilizamos atualmente.

Com o avanço dos conhecimentos matemáticos surgiu a necessidade de uma organização rigoroza do conceito de número. Como pode ser visto em [8], no século XIX Richard Dedekind, Georg Cantor e Giuseppe Peano mostraram como o conjunto dos números reais pode ser deduzido a partir do conjunto dos números naturais e este por sua vez deduzido através de alguns postulados.

Em termos mais claros, Peano indicou que toda a teoria dos números naturais podia ser deduzida por um conjunto de postulados, denominados axiomas de Peano. Veja mais detalhes em [15, 14, 12, 9]. Já Dedekind desenvolveu uma teoria que possibilita obter o conjunto dos números reais a partir do conjunto dos números racionais, este método ganhou o nome de cortes de Dedeking. Consulte [1, 9] para ver mais detalhes. Cantor também construiu os reais a partir dos racioanais, mas por um caminho diferente, este se baseou nas seqências racioanis de Cauchy. Nesse texto, veremos o método apresentado por Cantor.

O objetivo deste trabalho será fazer a construção dos conjuntos numéricos, partindo dos números naturais até chegar nos números reais e apresentar algumas aplicações envolvendo os conjuntos construídos, para isso tomaremos [1] como base principal, seguindo os passos da construção apresentada pelos seus autores.

Iniciamos o primeiro capítulo apresentando os conjuntos numéricos. Em seguida, assumimos como conhecido o conjunto dos números naturais e suas propriedades. Depois, abordamos sobre relações de equivalência e suas características. Por fim, é visto um pouco sobre corpos, com destaque aos corpos arquimedianos e ordenados. Para mais detalhes o leitor pode consultar [9, 12, 23, 15, 16, 7, 1, 10] por exemplo.

No segundo capítulo, por meio de uma relação de equivalência sobre o conjunto dos números naturais, construímos o conjunto dos números inteiros, definimos suas operações, uma relação de ordem e apresentamos suas principais propriedades. Mais informações podem ser encontradas em [1, 4, 9, 13].

O terceiro capítulo é dedicado ao conjunto dos números racionais, sendo este criado a partir de uma relação de equivalência sobre os inteiros. Assim como nos inteiros, também é definido as operações entre racionais e apresentada suas propriedades. Por fim, ao definirmos uma ordem, mostramos que este conjunto é um corpo ordenado. Veja [1, 9, 19, 21].

O quarto capítulo inicia com uma abordagem acerca das sequências racionais de Cauchy, seguindo com a definição de uma relação de equivalência no conjunto destas sequências. O conjunto das classes de equivalência destas sequências é definido como o conjunto dos números reais e neste é difinido duas operações e uma relação de ordem, o que nos possibilita concluir que tal conjunto é um corpo ordenado completo. O leitor pode encontrar mais detalhes em [1, 2, 14, 15].

No quinto capítulo, apresentamos três famosas desigualdades de números reais (a saber: a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, a desigualdade de Cauchy-

Schwarz e a desigualdade de Bernoulli) e como podem ser utilizadas para resolver diversos problemas matemáticos. Mais detalhes e diversos outros exemplos podem ser encontrados em [3, 5, 6, 17, 18, 20, 22].

No sexto capítulo, finalizamos o trabalho com as considerações finais.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, trataremos de assuntos que servirão de base na construção dos Capítulos $2, 3$ e 4. Primeiramente, apresentaremos os conjuntos numéricos. Em seguida traremos de forma breve e superficial o conjunto dos números naturais. Na sequência faleremos sobre relações de equivalência. Por fim, é visto um pouco sobre corpos.

1.1 Conjuntos Numéricos

Nesta seção nosso principal interesse é na definição/apresentação dos principais conjuntos numéricos que serão trabalhado ao longo deste trabalho.

Números Naturais

O conjunto dos números naturais, representado por $\mathbb{N}$ é formalmente conhecido como sendo o seguinte conjunto:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}.$$

O conjunto $\mathbb{N}$ está ligeiramente ligado ao processo de contar. Com relação a $\mathbb{N}$, são válidas as seguintes propriedades:

1. cada $n \in \mathbb{N}$ possui um sucessor. Diremos que o sucessor de n é $n + 1$, i.e, é obtido a partir de n somando uma unidade;

2. O número de elementos de $\mathbb{N}$ é infinito, pois para cada número natural sempre é possível encontrar o seu sucessor, que ainda é natural.

No conjunto dos números naturais estão definidas as operações de adição e multiplicação, ou seja, para cada par de números naturais m e n sua soma $m+n$ e seu produto $m \cdot n$ também pertencem aos naturais.

Observação. *A soma de dois números m e n, que como dissemos anteriormente é representada por $m+n$, é obtido a partir de um processo de contagem como sendo a reunião de todos os objetos representados por m e n. A grosso modo, a multiplicação em $\mathbb{N}$ consiste* *na repetição da operação de adição. Por exemplo, a multiplicação de* 2 *por* 3 *é equivalente a* $2+2+2$ *ou a* $3+3$.

Números Inteiros

O conjunto dos números inteiros, representado por $\mathbb{Z}$, é a união entre o conjunto dos naturais $\mathbb{N}$ com o zero 0 e o conjunto formado por todos os simétricos de $\mathbb{N}$, i.e.,

$$\mathbb{Z} = \{-1, -2, -3, \cdots\} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}.$$

Dito isto, o conjunto dos números inteiros é formalmente apresentado como

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Além das operações de adição e multiplicação, apresentadas em $\mathbb{N}$, aqui será possível efetuar a operação de subtração, ou seja, para cada par de números inteiros x e y, a subtração de x por y, expressada por $x - y$, é também um número inteiro, obtido como sendo a soma de x com $-y$.

Números Racionais No Capítulo 3 desta dissertação abordaremos com mais detalhes o conjunto dos números racionais. Adiantando algumas formalidades, o conjunto dos números racionais, representado por $\mathbb{Q}$, é definido como sendo o seguinto conunto numérico:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b}; a, b \in \mathbb{Z},\ \text{com } b \neq 0\right\}$$

ou

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b}; a, b \in \mathbb{Z},\ \text{com } b \in \mathbb{N}\right\}.$$

Propriedades e operações em $\mathbb{Q}$ serão estabelecidas no Capítulo 3. Portanto, podemos então definir o seguinte conjunto numérico: **Números Reais**

$$\mathbb{R} = \{a; a = \lim_{n\to\infty} x_n,\ \text{onde } x_n \in \mathbb{Q}\}$$

1.2 Números Naturais

Como mencionado anteriormente, o conjunto dos números naturais é denotado por $\mathbb{N}$ e descrito como

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Além disso, em $\mathbb{N}$ está bem definida duas operações:

1. adição, $m, n \in \mathbb{N} \mapsto m + n$;

2. multiplicação, $m, n \in \mathbb{N} \mapsto m \cdot n$.

Com essas operações, $\mathbb{N}$ possui as seguintes propriedades para quaisquer $m, n, p \in \mathbb{N}$:

i) Associatividade:

$$m + (n + p) = (m + n) + p \ \text{ e } \ m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p.$$

ii) Comutatividade:

$$m + n = n + m \ \text{ e } \ m \cdot n = n \cdot m.$$

iii) Lei do corte:

$$m + p = n + p \Rightarrow m = n \ \text{ e } \ m \cdot p = n \cdot p \Rightarrow m = n.$$

iv) Distributividade: Para $m, n, p \in \mathbb{N}$, tem-se que

$$m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p.$$

Feito isso, podemos agora falar em ordem no conjunto $\mathbb{N}$. Isto é, dados $m, n \in \mathbb{N}$, dizemos que m é menor do que n, e representaremos por

$$m < n,$$

se, e somente se, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$.

A relação de ordem possui as seguintes propriedades:

i) Transitividade: Dados $m, n, p \in \mathbb{N}$, segue que

$$m < n \ \text{ e } n < p \Rightarrow m < p.$$

ii) Tricotomia: Para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$ uma e somente uma das seguintes alternativas é verdadeira:

a) ou $m = n$;

b) ou $m < n$;

c) ou $n < m$.

Outras duas propriedades bastante úteis em conjuntos numéricos, válida também em $\mathbb{N}$, diz respeito à monotonicidade das operações canônicas de $\mathbb{N}$:

i) Monotonicidade da adição: se $m, n \in \mathbb{N}$, então

$$m < n \Rightarrow m + p < n + p, \ \forall \, p \in \mathbb{N}.$$

ii) Monotonicidade da multiplicação: se $m, n \in \mathbb{N}$, então

$$m < n \Rightarrow m \cdot p < n \cdot p, \forall\, p \in \mathbb{N}.$$

No que segue, faremos a resolução do seguinte exercício:

Exemplo 1.1. *Para quaisquer* $m, n, p \in \mathbb{N}$

$$m + p < n + p \Rightarrow m < n.$$

Demonstração. Como, por hipótese, $m + p < n + p$, então podemos usar a definição de ordem em $\mathbb{N}$ para garantir a existência de um número natural q tal que

$$n + p = (m + p) + q.$$

A partir daí, usamos as propriedades de associatividade e comutatividade para concluir que

$$\begin{aligned} n + p &= m + (p + q) \\ &= m + (q + p) \\ &= (m + q) + p. \end{aligned}$$

Aplicando a lei do corte obtemos que

$$n = m + q.$$

Assim, concluímos que $n < m$, pela definição de ordem em $\mathbb{N}$. □

Mais propriedades e interessantes exercícios relacionados ao conjunto $\mathbb{N}$ podem ser encontrados em [2, 5, 9, 12, 13, 14, 15, 16], por exemplo.

Na sequência, trataremos sobre relações de equivalência, tema que terá fundamental importância nas construções abordadas nos Capítulos $2, 3$ e 4. Para isso, faremos uso dos conjuntos numéricos e suas propriedades. No entanto, nos três capítulos seguintes, onde os formalizaremos a partir dos naturais, não levaremos em conta o conhecimento acerca destes conjuntos.

1.3 Relações de Equivalência

Sejam a e b dois elementos de um conjunto não vazio A. O par ordenado

$$(a, b)$$

é formado ao se escolher um elemento (no caso a) para ser a primeira coordenada do par e o outro elemento (a saber b) para ser a segunda coordenada do par.

Dados dois pares ordenados (a,b) e (c,d), diremos que estes são iguais se, e somente se, suas primeiras coordenadas forem iguais e suas segundas coordenadas também. Ou seja,

$$(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d.$$

Definição 1.1. *O produto cartesiano dos conjuntos A e B é o conjunto $A \times B$ cujos elementos são todos os pares ordenados (a,b). Assim,*

$$A \times B = \{(a,b); a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Fica definido que $A \times \emptyset = \emptyset$ e $\emptyset \times A = \emptyset$.

No caso em que $A = B$, temos o produto cartesiano $A^2 = A \times A$.

Observação. *Nem sempre vale a igualdade $A \times B = B \times A$.*

Exemplo 1.2. *Sejam a, b elementos quaisquer, tal que $A = \{a\}$ e $B = \{b\}$. Note que, $A \times B = \{(a,b)\}$ e $B \times A = \{(b,a)\}$. Assim, $A \times B = B \times A$ se, e somente se, $(a,b) = (b,a)$, isto é, $a = b$, mas a e b são quaisquer. Logo, não necessariamente tem-se $A \times B = B \times A$.*

Exemplo 1.3. *Sendo $A = \{1,2\}$, então*

$$A^2 = A \times A = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}.$$

No que segue, apresentaremos o conceito de relação binário que será essencial para o estudo de classes de equivalência.

Definição 1.2. *Uma relação binária R num conjunto A é qualquer subconjunto do produto cartesiano $A \times A$, ou seja, é um subconjunto R tal que $R \subset A \times A$.*

Tomando A como definido no Exemplo 1.3, temos que $R = \{(1,1),(2,1)\}$ é um exemplo de relação binária em A.

Observação. *Caso R seja uma relação binária em A e se $(a,b) \in R$, escreve-se aRb, para dizer que a está relacionado com b. Portanto, $(a,b) \in R$ se, e somente se, aRb.*

Definição 1.3. *Uma relação binária $\sim$ em A diz-se relação de equivalência se satisfaz as seguintes propriedades:*

i) Reflexividade: $a \sim a$, para todo $a \in A$;

ii) Simetria: Se $a, b \in A$ e $a \sim b$, então $b \sim a$;

iii) Transitividade: Para $a, b, c \in A$, se $a \sim b$ e $b \sim c$, então $a \sim c$.

Exemplo 1.4. *Em* $\mathbb{R}^2$ *consideremos a seguinte relação:*

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow b - 2a = d - 2c.$$

Afirmamos que a relação acima é de equivalência. De fato, como $b - 2a = b - 2a$, *então* $(a, b) \sim (a, b)$ *para todo* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. *Isto é, vale a propriedade de reflexividade. Além disso, se* $(a, b) \sim (c, d)$, *segue que* $b - 2a = d - 2c$. *Assim* $d - 2c = b - 2a$, *ou seja,* $(c, d) \sim (a, b)$, *que é a propriedade de simetria. Finalmente, se* $(a, b) \sim (c, d)$ *e* $(c, d) \sim (e, f)$, *então* $b-2a = d-2c$ *e* $d-2c = f-2e$. *Assim obtemos que* $b-2a = f-2e$. *isto é,* $(a, b) \sim (e, f)$, *e portanto vale também a propriedade de transitividade. Portanto, podemos concluir que* $\sim$ *é uma relação de equivalência.*

A definição que segue, mostra que é possível agrupar elementos de um determinado conjunto em subconjuntos contendo elementos equivalentes.

Definição 1.4. *Seja* $a \in A$ *um elemento qualquer e* $\sim$ *uma relação de equivalência em* A. *O conjunto*

$$[a] := \{x \in A; x \sim a\}$$

chama-se classe de equivalência de a *pela relação* $\sim$. *Isto é,* $[a]$ *é o conjunto formado por todos os elementos de* A *que são equivalentes* a a.

A fim de melhorar o entendimento sobre classe de equivalência, em sequência faremos um exemplo.

Exemplo 1.5. *Sejam* $a, b \in \mathbb{Z}$. *Considere a seguinte relação* $\sim$*:*

$$a \sim b \Leftrightarrow a - b = 3n,$$

para algum $n \in \mathbb{Z}$.

Verificaremos a partir de agora as três propriedades que aparecem na Definição 1.3.

(Reflexividade) Para todo $a \in \mathbb{Z}$, *temos* $a - a = 0 = 3 \cdot 0$. *Logo,* $a \sim a$.

(Simetria) Sendo $a \sim b$, *então* $a - b = 3n$ *para algum* $n \in \mathbb{Z}$. *Temos que,* $b - a = -(a - b) = -3n = 3 \cdot (-n)$. *Assim,* $b \sim a$.

(Transitividade) Sejam $a \sim b$ *e* $b \sim c$, *então* $a - b = 3m$ *e* $b - c = 3n$, *onde* $m, n \in \mathbb{Z}$. *Logo,* $a - c = a - b + b - c = 3m + 3n = 3(m + n) \Rightarrow a \sim c$.

Portanto, $\sim$ *é uma relação de equivalência.*

Note que,

$$\begin{aligned} [a] &= \{x \in \mathbb{Z}; x \sim a\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z}; x - a = 3n, \text{ onde } n \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z}; x = 3n + a, \text{ onde } n \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Dessa maneira, obtemos as seguintes classes de equivalência:

$$\begin{aligned}
[0] &= \{x \in \mathbb{Z}; x = 3n + 0, \text{ onde } n \in \mathbb{Z}\} \\
&= \{x \in \mathbb{Z}; x = 3n, \text{ onde } n \in \mathbb{Z}\} \\
&= \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[1] &= \{x \in \mathbb{Z}; x = 3n + 1, \text{ onde } n \in \mathbb{Z}\} \\
&= \{\ldots, -7, -4, -1, 1, 4, 7, \ldots\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[2] &= \{x \in \mathbb{Z}; x = 3n + 2, \text{ onde } n \in \mathbb{Z}\} \\
&= \{\ldots, -8, -5, -2, 2, 5, 8, \ldots\}.
\end{aligned}$$

Ou seja, esta relação de equivalênvia $\sim$ determina exatamente três classes de equivalência em $\mathbb{Z}$: que deixam resto 0, que deixam resto 1 e que deixam resto 2 na divisão por 3. Observe que o conjunto $\mathbb{Z}$ é decomposto em conjuntos disjuntos, por meio das classes de equivalência.

Definição 1.5. *Seja $\sim$ uma relação de equivalência num conjunto A. O conjunto quociente é o conjunto formado pelas classes de equivalência determinadas em A pela relação $\sim$. Tal conjunto será representado por $A/\sim$.*

Vejamos um exemplo de conjunto quociente.

Exemplo 1.6. *No Exemplo 1.5 foi definido, em $\mathbb{Z}$, a relação de equivalência*

$$a \sim b \Leftrightarrow a - b = 3n, \text{ onde } n \in \mathbb{Z}.$$

O conjunto quociente neste caso é

$$\mathbb{Z}/\sim = \{[0], [1], [2]\}.$$

É comum, na literatura, denotar esse conjunto por $\mathbb{Z}_3$. Veja [7, 9]

Seguinte esta sequência, definiremos agora o conceito de partição de conjuntos.

Definição 1.6. *Seja X um conjunto arbitrário. Uma família P de subconjuntos de X é uma partição de X se*

i) $\emptyset \not\subset P$;

ii) $\displaystyle\bigcup_{A \in P} A = X$;

iii) Se $A, B \in P$ e $A \neq B$ então $A \cap B = \emptyset$.

Vejamos alguns exemplos de partição de conjuntos:

Exemplo 1.7. *Dado o conjunto $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Então, são exemplos de partição de X os seguintes conjuntos:*
$P_1 = \{\{1\}, \{2, 3\}, \{4\}\}$;
$P_2 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$;
$P_3 = \{X\}$.

Objetivamos a seguir, provar que por meio de uma relação de equivalência sobre um conjunto X determina-se uma partição de X. Também que vale a recíproca, isto é, que a cada partição de um conjunto X é possível ser associada uma relação de equivalência sobre X.

Teorema 1.1. *Sendo $\sim$ uma relação de equivalência em um conjunto não vazio X, então $X/\sim$ é uma partição de X. Reciprocamente, para qualquer partição P do conjunto X, existe uma relação de equivalência $\sim$ sobre X tal que $X/\sim = P$.*

Demonstração. Primeiramente, temos que:

i) Por $\sim$ ser reflexiva e $X \neq \emptyset$,tomando $a \in X$ temos $a \sim a$ e, assim, $a \in [a]$. Logo, $[a] \neq \emptyset$ e $[a] \in X/\sim$.

ii) Sejam $[a] \in X/\sim$ e $[b] \in X/\sim$, tais que $[a] \cap [b] \neq \emptyset$. Se $y \in [a] \cap [b]$, então $y \in [a]$ e $y \in [b]$. Logo, $y \sim a$ e $y \sim b$. Assim, por transitividade, $a \sim b$. Portanto, a e b pertencem a mesma classe de equivalência, ou seja, $[a] = [b]$.

iii) Para qualquer $a \in X$, temos $[a] \subset X$. Assim, $\bigcup_{a \in X} [a] \subset X$.

Seja b um elemento arbitrário de X, então $b \sim b$. Assim, $b \in [b]$, logo, $b \in \bigcup_{a \in X} [a]$. Dessa forma, $X \subset \bigcup_{a \in X} [a]$. Logo, temos $\bigcup_{a \in X} [a] = X$.

Portanto, $X/\sim$ é uma partição do conjunto X.

Para a recíproca, seja $\sim$ a relação sobre o conjunto X definida como: $a \sim b$ se, e somente se, existe $A \in P$ tal que $a \in A$ e $b \in A$.

Temos:

i) Para qualquer $a \in X$ existe $A \in P$ tal que $a \in A$. Assim, $a \sim a$.

ii) Sendo a e b elementos quaisquer do conjunto X tais que $a \sim b$, segue que $a, b \in A$, para algum $A \in P$. É evidente que $b, a \in A$, daí $b \sim a$.

iii) Sejam $a, b, c \in X$ tais que $a \sim b$ e $b \sim c$. Decorre que, $a, b \in A$ e $b, c \in B$, onde $A, B \in P$. Dessa maneira, $b \in A$ e $b \in B$. Sabendo que quaisquer dois conjuntos de P que não sejam disjuntos são necessariamente iguais, segue que $A = B$. Assim, $a \sim c$.

O que mostra que $\sim$ é uma relação de equivalência. $\square$

Mais detalhes e outros exercícios sobre relações de equivalência podem ser encontrados em [7, 9, 10, 12, 23], por exemplo.

1.4 Corpos

Definição 1.7. *Um corpo, denotado por $(K, +, \cdot)$, é um conjunto $K \neq \emptyset$ munido de duas operações binárias, a saber: adição, $+$, e multiplicação, $\cdot$, satisfazendo os seguintes axiomas:*

- *Axiomas da adição*

  i) Associatividade: Para todo $x, y, z \in K$, vale que

$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

  ii) Comutatividade: Para quaisquer $x, y \in K$, segue que

$$x + y = y + x.$$

  iii) Existe elemento neutro aditivo: Existe $0 \in K$ tal que, para todo $x \in K$

$$x + 0 = x.$$

  iv) Existe inverso aditivo (ou simétrico): Para qualquer $x \in K$, existe $-x \in K$ tal que

$$x + (-x) = 0.$$

- *Axiomas da multiplicação*

  i) Associatividade: Para quaisquer $x, y, z \in K$, segue que

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

  ii) Comutatividade: Para todo $x, y \in K$, vale que

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

iii) Existe elemento neutro multiplicativo: Existe $1 \in K$*, com* $1 \neq 0$*, tal que, para todo* $x \in K$

$$x \cdot 1 = x.$$

iv) Existe inverso multiplicativo: Para qualquer $x \in K$*, sendo* $x \neq 0$*, existe* $x^{-1} \in K$ *tal que*

$$x \cdot x^{-1} = 1.$$

v) Distributividade: Para quaisquer $x, y, z \in K$*, seque que*

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

Exemplo 1.8. *O conjunto dos números racionais,* $\mathbb{Q}$*, com as operações de adição e multiplicação definidas, respectivamente, por*

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \quad e \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

é um corpo.

Essa afirmação será confirmada no Capítulo 3, onde será construído o conjunto dos números racionais.

Por simplicidade, quando falarmos de um corpo $(K, +, \cdot)$, utilizaremos, apenas, a notação K ficando suas operações claras de acordo o contexto.

Definição 1.8. *A soma* $x+(-y)$ *será indicada pela notação* $x-y$ *e chamada de subtração. Analogamente, para* $y \neq 0$*, o produto* $x \cdot y^{-1}$ *será representado por* x/y *ou* $\dfrac{x}{y}$ *e chamado de divisão.*

Teorema 1.2. *Em um corpo* K*,* $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$*.*

Demonstração. Note primeiramente que,

$$0 \cdot x + x = x \cdot 0 + x \cdot 1 = x \cdot (0 + 1) = x \cdot 1 = x,$$

logo, segue que $0 \cdot x = 0$.

Agora, perceba que

$$(-x) \cdot y + x \cdot y = (-x + x) \cdot y = 0 \cdot y = 0.$$

Assim, $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$. □

Definição 1.9. *Um corpo* K*, chama-se corpo ordenado se existe um subconjunto* $P \subset K$ *com as seguintes propriedades:*

i) Fechamento da adição e da multiplicação: Para quaisquer $x, y \in P$, segue que

$$x + y \in P \ \ e \ \ x \cdot y \in P.$$

ii) Tricotomia: Para todo $x \in K$ ocorre somente um dos seguintes casos:

$$ou \ \ x \in P, \ \ ou \ \ x = 0, \ \ ou \ \ -x \in P.$$

Diremos que o conjunto P é o conjunto dos elementos positivos de K.

Sendo $-P = \{-x; x \in P\}$, resulta da definição acima

$$K = -P \cup \{0\} \cup P,$$

onde $-P \cap P = \emptyset$. Assim, $-P$ é dito o conjunto dos números negativos de K.

Definição 1.10. *Definimos em um corpo ordenado K, a relação*

$$x > y \Leftrightarrow x - y \in P,$$

para indicar que x é maior do que y.

Tendo definido a relação $>$, podemos considerar, para $x, y \in K$, que: x é menor do que y, denotado por $x < y$, se, e somente se, $y > x$; x é maior do que ou igual a y, denotado por $x \geq y$, se, e somente se, $x > y$ ou $x = y$; x é menor do que ou igual a y, denotado por $x \leq y$, se, e somente se, $y > x$ ou $x = y$.

Teorema 1.3. *A relação de ordem $<$ possui as seguintes propriedades:*

i) Transitividade: Sejam $x, y, z \in K$, segue que

$$x < y \ \ e \ \ y < z \Rightarrow x < z.$$

ii) Tricotomia: Para $x, y \in K$, somente uma das seguintes alternativas ocorre

$$ou \ x < y, \ \ ou \ x = y, \ \ ou \ x > y.$$

iii) Monotonicidade da adição: Dados $x, y \in K$, vale que

$$x < y \Rightarrow x + z < y + z, \ \forall z \in K.$$

iv) Monotonicidade da multiplicação: Sendo $x, y, z \in K$, temos que

$$x < y \text{ e } z > 0 \;\Rightarrow\; x \cdot z < y \cdot z.$$
$$x < y \text{ e } z < 0 \;\Rightarrow\; x \cdot z > y \cdot z.$$

Demonstração. Façamos cada um dos casos:

i) Sabendo que $x < y$ e $y < z$, segue que $y - x \in P$ e $z - y \in P$. Como a soma é fechada em P, temos que $(z - y) + (y - x) \in P$, ou seja, $z - x \in P$. Logo, $x < z$.

ii) Sendo $x, y \in K$, temos, pela tricotomia do corpo ordenado K, que apenas uma das seguintes alternativas ocorre

$$\text{ou } y - x \in P, \text{ ou } y - x = 0, \text{ ou } x - y \in P,$$

o que equivale a afirmar que

$$\text{ou } x < y, \text{ ou } x = y, \text{ ou } x > y.$$

iii) Se $x < y$ segue que $y - x \in P$. Note que, $(y + z) - (x + z) = y - x$. Portanto $x + z < y + z$.

iv) Primeiramente, seja $x < y$ e $z > 0$. Daí, $y - x \in P$ e $z \in P$, assim, $(y - x) \cdot z \in P$, ou seja, $y \cdot z - x \cdot z \in P$, o que equivale a $x \cdot z < y \cdot z$.

Agora, sendo $x < y$ e $z < 0$, implica que $y - x \in P$ e $-z \in P$, logo $(y - x) \cdot (-z) \in P$, o que resulta em $x \cdot z - y \cdot z \in P$. Portanto, $y \cdot z < x \cdot z$.

□

Definição 1.11. *Um subconjunto X contido em um corpo ordenado K é limitado superiormente se, existe $b \in K$ tal que $x \leq b$ para todo $x \in X$. O elemento b chama-se cota superior de X. Da mesma forma, X é limitado inferiormente se existe $a \in K$ tal que $a \leq x$. Assim, o elemento a será uma cota inferior de X. O conjunto X será limitado se for limitado superior e inferiormente. Um conjunto que não seja limitado, é dito ilimitado.*

Para que possamos enunciar o próximo teorema precisamos justificar que o conjunto dos números naturais está contido nos corpos ordenados. Assim, dado um corpo ordenado K e sendo P seu conjunto de números positivos, temos que $1 \in P$.

Do fato de $1 - 0 = 1 \in P$, segue por definição que $1 > 0$. Em posse da monotonicidade da adição, é possivel constatar que

$$0 < 1 < 1 + 1 < 1 + 1 + 1 < 1 + 1 + 1 + 1 < \ldots$$

Logo, temos o conjunto infinito

$$\mathcal{N} = \{1, 1+1, 1+1+1, 1+1+1+1, \ldots\}.$$

Do fato de $\mathcal{N} \subset K$ dizemos que K é infinito. Também é possível verificar que a aplicação $\varphi : \mathbb{N} \to \mathcal{N}$ dado por $\varphi(n) = 1 + \ldots + 1$ (n vezes) é uma bijeção e que as operações de adição e multiplicação de $\mathbb{N}$ são preservadas por φ, ou seja,

$$\varphi(m+n) = \varphi(m) + \varphi(n) \text{ e } \varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n).$$

Logo, assumiremos que $\varphi(\mathbb{N}) = \mathcal{N}$, identificado por $\mathbb{N}$, está contido em todo corpo ordenado.

Para mais detalhes a respeioto da justificativa anterior veja [1].

Teorema 1.4. *Em um corpo ordenado K, as afirmações a seguir são equivalentes:*

i) $\mathbb{N} \subset K$ *é ilimitado superiormente;*

ii) dados $a, b \in K$, com $a > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \cdot a > b$;

iii) para qualquer $a > 0$ em K, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \dfrac{1}{n} < a$.

Demonstração. $i) \Rightarrow ii)$: Sendo $\mathbb{N}$ ilimitado, dados $a, b \in K$, com $a > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \dfrac{b}{a}$. Ou seja, $n \cdot a > b$.

$ii) \Rightarrow iii)$: Tomando $a > 0$ e $b = 1$, por $ii)$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \cdot a > 1$, isto é, $\dfrac{1}{n} < a$. Logo, $0 < \dfrac{1}{n} < a$.

$iii) \Rightarrow i)$: Para todo $a > 0$ em K, por $iii)$, exite $n \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{a}$, ou seja, $n > a$. Logo, nenhum $x > 0$ em K pode ser cota superior de $\mathbb{N}$. Claramente, um $y \leq 0$ em K também não pode. Portanto, $\mathbb{N}$ é ilimitado. $\square$

Diremos que um corpo ordenado K é arquimediano quando neste valer qualquer das três condições equivalentes apresentadas no teorema anterior.

Exemplo 1.9. *O conjunto dos números racionais, $\mathbb{Q}$, é arquimediano, pois o conjunto dos naturais $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ é ilimitado superiormente.*

Definição 1.12. *Um corpo ordenado K será dito corpo ordenado completo, se possui a propriedade da menor cota superior, ou seja, se todo subconjunto não-vazio de K, que for limitado superiormente, possui uma menor cota superior em K.*

Capítulo 2

Números Inteiros

Construiremos, neste capítulo, o conjunto dos números inteiros a partir do conjunto dos números naturais. Mais detalhes podem ser encontrados em [1, 10, 9, 4, 13, 8], por exemplo.

2.1 Construção dos Números Inteiros

Existem várias maneiras de se apresentar o conjunto dos números inteiros, desde os livros didáticos do ensino fundamental aos mais avançados do ensino superior. Veja por exemplo [1, 9, 4, 13]. A apresentação que faremos para este conjunto nesta dissertação é também bastante conhecida na literatura e é baseada no conceito de classe de equivalência e conjunto quociente, definidos no capítulo anterior.

Teorema 2.1. *A relação $\sim$ em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definida por*

$$(a, b) \sim (c, d) \;\Leftrightarrow\; a + d = b + c$$

é uma relação de equivalência.

Demonstração. Vamos verificar as três propriedades que aparecem na Definição 1.3.

(Reflexividade) Para qualquer $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, (a, b) \sim (a, b) \Leftrightarrow a + b = b + a$.

(Simetria) Sendo $(a, b), (c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$,

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c \Leftrightarrow c + b = d + a \Leftrightarrow (c, d) \sim (a, b).$$

(Transitividade) Sejam $(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tais que $(a, b) \sim (c, d)$ e $(c, d) \sim (e, f)$. Logo,

$$a + d = b + c \text{ e } c + f = d + e \Rightarrow a + d + c + f = b + c + d + e.$$

Segue que $a + f = b + e$, ou seja, $(a, b) \sim (e, f)$. $\square$

Pelo Teorema 1.1 temos que a relação de equivalência $\sim$ induz uma partição em $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Dessa maneira, temos o conjunto quociente

$$(\mathbb{N}\times\mathbb{N})/\sim = \{[(a,b)]; (a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\}.$$

Definição 2.1. *O conjunto quociente* $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})/\sim$*, formado pelas classes de equivalência* $[(a,b)]$ *dos elementos* $(a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ *via relação* $\sim$*, será chamado de conjunto dos números inteiros e denotado por* $\mathbb{Z}$*, ou seja,*

$$\mathbb{Z} = (\mathbb{N}\times\mathbb{N})/\sim .$$

A seguir, definiremos no conjunto $\mathbb{Z}$ duas operações (a saber: adição e multiplicação).

2.2 Operações em $\mathbb{Z}$

Definição 2.2. *A adição,* $+$*, e a multiplicação,* $\cdot$*, são definidas em* $\mathbb{Z}$*, respectivamente, por*

$$[(a,b)]+[(c,d)] = [(a+c,b+d)] \text{ e } [(a,b)]\cdot[(c,d)] = [(ac+bd,ad+bc)].$$

Vamos mostrar que as operações de adição e multiplicação neste conjunto independem dos representantes das classes de equivalência escolhidos. Para mais detalhes veja [1].

Teorema 2.2. *A operação de adição,* $+$*, definida em* $\mathbb{Z}=(\mathbb{N}\times\mathbb{N})/\sim$ *como*

$$[(a,b)]+[(c,d)] := [(a+c,b+d)]$$

é bem definida.

Demonstração. Sendo $[(a,b)] = [(a',b')]$ e $[(c,d)] = [(c',d')]$, temos $(a,b)\sim(a',b')$ e $(c,d)\sim(c',d')$, daí $a+b'=b+a'$ e $c+d'=d+c'$. Somando e utilizando a associatividade, obtemos $(a+c)+(b'+d')=(b+d)+(a'+c')$. Isto é, $(a+c,b+d)\sim(a'+c',b'+d')$. Logo, $[(a+c,b+d)] = [(a'+c',b'+d')]$. □

O próximo resultado aparece com mais detalhes em [1].

Teorema 2.3. *Em* $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})/\sim$*, a operação* $\cdot$ *definida por*

$$[(a,b)]\cdot[(c,d)] := [(ac+bd,ad+bc)]$$

é bem definida.

Demonstração. Sejam $[(a,b)] = [(a',b')]$ e $[(c,d)] = [(c',d')]$. Dessa forma, $(a,b)\sim(a',b')$ e $(c,d)\sim(c',d')$, ou seja,

$$a+b' = b+a' \text{ e } c+d' = d+c'. \tag{2.1}$$

Objetivamos mostrar que

$$[(ac+bd, ad+bc)] = [(a'c'+b'd', a'd'+b'c')],$$

ou equivalentemente

$$ac+bd+a'd'+b'c' = a'c'+b'd'+ad+bc. \tag{2.2}$$

Utilizando (2.1) e fazendo algumas manipulações podemos mostrar que

$$ac+bd+a'd'+b'c'+b'c = a'c'+b'd'+ad+bc+b'c.$$

Concluímos assim que

$$ac+bd+a'd'+b'c' = a'c'+b'd'+ad+bc.$$

□

2.3 Propriedades da adição e multiplicação

As seguintes propriedades de adição são baseadas no trabalho de Aguilar e Dias [1]. O leitor também pode conferir as obras em [4, 7, 9, 10, 2], por exemplo.

Teorema 2.4. *Em $\mathbb{Z}$ a adição possui as seguites propriedades:*

i) Associatividade: $(x+y)+z = x+(y+z)$, *para quaisquer* $x, y, z \in \mathbb{Z}$;

ii) Comutatividade: $x+y = y+x$, *para todos* $x, y \in \mathbb{Z}$;

iii) $0 := [(1,1)]$ *é o elemento neutro;*

iv) Existe simétrico: Para cada $x = [(a,b)] \in \mathbb{Z}$, *o simétrico de* x *é a classe* $-x = [(b,a)]$, *isto é,* $x+(-x) = 0$.

Demonstração. Façamos cada um dos casos:

i) Sejam $x = [(a, b)], y = [(c, d)], z = [(e, f)]$ elementos de $\mathbb{Z}$. Assim,

$$\begin{aligned}
(x + y) + z &= ([(a, b)] + [(c, d)]) + [(e, f)] \\
&= [(a + c, b + d)] + [(e, f)] \\
&= [((a + c) + e, (b + d) + f)] \\
&= [(a + (c + e), b + (d + f))] \\
&= [(a, b)] + [(c + e, d + f)] \\
&= [(a, b)] + ([(c + e, d + f)]) \\
&= [(a, b)] + ([(c, d)] + [(e, f)]) \\
&= x + (y + z).
\end{aligned}$$

ii) Sendo $x = [(a, b)]$ e $y = [(c, d)]$, segue que

$$\begin{aligned}
x + y &= [(a, b)] + [(c, d)] \\
&= [(a + c, b + d)] \\
&= [(c + a, d + b)] \\
&= [(c, d)] + [(a, b)] \\
&= y + x.
\end{aligned}$$

iii) Se $x = [(a, b)] \in \mathbb{Z}$, $0 = [(1, 1)]$ é tal que $x + 0 = x$.

Perceba que $(a + 1, b + 1) \sim (a, b)$, pois $a + 1 + b = b + 1 + a$. Assim

$$\begin{aligned}
x + 0 &= [(a, b)] + [(1, 1)] \\
&= [(a + 1, b + 1)] \\
&= [(a, b)] \\
&= x.
\end{aligned}$$

iv) Dado $x = [(a, b)] \in \mathbb{Z}$, considere $-x = [(b, a)]$.

Note que, para qualquer $n \in \mathbb{N}, (n, n) \sim (1, 1)$, assim

$$\begin{aligned}
x + (-x) &= [(a, b)] + [(b, a)] \\
&= [(a + b, b + a)] \\
&= [(a + b, a + b)] \\
&= [(1, 1)] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$\square$

Apresentaremos, no teorema que segue, as propriedades da multiplicação. Para mais detalhes veja [1].

Teorema 2.5. *Em $\mathbb{Z}$ a multiplicação possui as seguintes propriedades:*

i) Associatividade: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, para todos $x, y, z \in \mathbb{Z}$;

ii) Comutatividade: $x \cdot y = y \cdot x$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{Z}$;

iii) $1 = [(2, 1)]$ é o elemento neutro;

iv) Distributividade: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$, para todos $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Vamos mostrar cada uma das propriedades anteriores:

i) Sejam $x = [(a, b)], y = [(c, d)]$ e $z = [(e, f)]$ elementos de $\mathbb{Z}$, temos

$$\begin{aligned}
(x \cdot y) \cdot z &= ([(a, b)] \cdot [(c, d)]) \cdot [(e, f)] \\
&= [(ac + bd, ad + bc)] \cdot [(e, f)] \\
&= [((ac + bd)e + (ad + bc)f, (ac + bd)f + (ad + bc)e)] \\
&= [(ace + bde + adf + bcf, acf + bdf + ade + bce)] \\
&= [(ace + adf + bcf + bde, acf + ade + bce + bdf)] \\
&= [(a(ce + df) + b(cf + de), a(cf + de) + b(ce + df))] \\
&= [(a, b)] \cdot [(ce + df, cf + de)] \\
&= [(a, b)] \cdot ([(c, d)] \cdot [(e, f)]) \\
&= x \cdot (y \cdot z).
\end{aligned}$$

ii) Dados $x = [(a, b)], y = [(c, d)] \in \mathbb{Z}$, segue que

$$\begin{aligned}
x \cdot y &= [(a, b)] \cdot [(c, d)] \\
&= [(ac + bd, ad + bc)] \\
&= [(ac + bd, bc + ad)] \\
&= [(ca + db, cb + da)] \\
&= [(c, d)] \cdot [(a, b)] \\
&= y \cdot x.
\end{aligned}$$

iii) Se $x = [(a, b)] \in \mathbb{Z}$ e $1 = [(2, 1)]$.

Note que, $(a+(a+b), b+(a+b)) \sim (a,b)$, pois, $a+(a+b)+b = b+(a+b)+a$. Assim

$$\begin{aligned} x \cdot 1 &= [(a,b)] \cdot [(2,1)] \\ &= [(a \cdot 2 + b \cdot 1, a \cdot 1 + b \cdot 2)] \\ &= [(2a+b, a+2b)] \\ &= [(a+(a+b), b+(a+b))] \\ &= [(a,b)] \\ &= x. \end{aligned}$$

iv) Sejam $x = [(a,b)], y = [(c,d)], z = [(e,f)]$ elementos de $\mathbb{Z}$. Assim

$$\begin{aligned} x \cdot (y+z) &= [(a,b)] \cdot ([(c,d)] \cdot [(e,f)]) \\ &= [(a,b)] \cdot [(c+e, d+f)] \\ &= [(a(c+e)+b(d+f), a(d+f)+b(c+e))] \\ &= [(ac+ae+bd+bf, ad+af+bc+be)] \\ &= [((ac+bd)+(ae+bf), (ad+bc)+(af+be))] \\ &= [(ac+bd, ad+bc)] + [(ae+bf, af+be)] \\ &= [(a,b)] \cdot [(c,d)] + [(a,b)] \cdot [(e,f)] \\ &= x \cdot y + x \cdot z. \end{aligned}$$

□

O próximo teorema, mostra que $\mathbb{Z}$ não possui divisores de zero.

Teorema 2.6. *Para $x = [(a,b)], y = [(c,d)] \in \mathbb{Z}$, segue que*

$$x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0 \ \ ou \ \ y = 0.$$

Demonstração. Supondo que $[(a,b)] \cdot [(c,d)] = 0$ e $[(c,d)] \neq 0$.

Ou mesmo,

$$[(a,b)] \cdot [(c,d)] = [(1,1)] \text{ e } [(c,d)] \neq [(1,1)].$$

Primeiramente, note que

$$\begin{aligned} [(a,b)] \cdot [(c,d)] = [(1,1)] &\Leftrightarrow [(ac+bd, ad+bc)] = [(1,1)] \\ &\Leftrightarrow ac+bd+1 = ad+bc+1 \\ &\Leftrightarrow ac+bd = ad+bc. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Por outro lado, de $[(c,d)] \neq 0$ resulta que $c \neq d$. Por tricotomia em $\mathbb{N}$ temos duas possibilidades

$$c >_{\mathbb{N}} d \text{ ou } c <_{\mathbb{N}} d,$$

onde $<_{\mathbb{N}}$ denonota a ordem definida em $\mathbb{N}$.

Supondo $c >_{\mathbb{N}} d$, então existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $c = d + p$. Substituindo o valor de c em (2.3),

$$\begin{aligned} ac + bd = ad + bc &\Rightarrow a(d+p) + bd = ad + b(d+p) \\ &\Rightarrow ad + ap + bd = ad + bd + bp \\ &\Rightarrow ap = bp \\ &\Rightarrow a = b. \end{aligned}$$

Logo, $[(a,b)] = 0$.

No caso em que $c <_{\mathbb{N}} d$ se resolve de modo análogo, ou seja, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $d = p + c$ e utilizando o valor de d em (2.3) obtemos $b = a$, isto é, $[(a,b)] = 0$. $\square$

Um conjunto munido de duas operações binárias que satisfaça as propriedades apresentadas nos Teoremas 2.4, 2.5 e 2.6 é denominado domínio de integridade. Logo, o conjunto dos números inteiros, $\mathbb{Z}$, é um domínio de integridade.

Após termos apresentado as propriedades das aperações em $\mathbb{Z}$, possuimos argumentos para introduzir a subtração entre números inteiros.

Definição 2.3. *Dados $x = [(a,b)]$, $y = [(c,d)] \in \mathbb{Z}$, a subtração, $-$, é definida por*

$$x - y := x + (-y).$$

Dessa forma,

$$[(a,b)] - [(c,d)] = [(a,b)] + [(d,c)] = [(a+d, b+c)].$$

Por ser introduzida como a soma de um número com o simétrico de outro, a subtração é uma operação bem definida em $\mathbb{Z}$, ou seja, é uma operação binária.

Exemplo 2.1. *Sejam $x = [(a,b)], y = [(c,d)] \in \mathbb{Z}$. Mostraremos que $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$.*

Sendo $x = [(a,b)]$, então $-x = [(b,a)]$. Assim,

$$(-x) \cdot y = [(bc + ad, bd + ac)].$$

Sabendo que $x \cdot y = [(ac + bd, ad + bc)]$, temos

$$\begin{aligned} -(x \cdot y) &= [(ad + bc, ac + bd)] \\ &= [(bc + ad, bd + ac)] \\ &= (-x) \cdot y. \end{aligned}$$

2.4 Relação de ordem em $\mathbb{Z}$

Definição 2.4. *Sejam $x = [(a,b)], y = [(c,d)] \in \mathbb{Z}$. Dizemos que x é menor do que y, o que denotamos por $x < y$, se, e somente se, $a + d <_{\mathbb{N}} b + c$. Ou seja,*

$$x < y \Leftrightarrow a + d <_{\mathbb{N}} b + c,$$

onde, o símbolo $<_{\mathbb{N}}$ referencia a relação de ordem definida em $\mathbb{N}$.

Teorema 2.7. *A relação de ordem entre $x = [(a,b)], y = [(c,d)] \in \mathbb{Z}$, apresentada por*

$$x < y \Leftrightarrow a + d <_{\mathbb{N}} b + c$$

é bem definida.

Demonstração. Realmente. Pois, sendo $[(a,b)] = [(a',b')]$ e $[(c,d)] = [(c',d')]$ segue que

$$a + b' = b + a' \text{ e } c + d' = d + c' \tag{2.4}$$

Em posse de (2.4), temos que

$$\begin{aligned}
[(a,b)] < [(c,d)] \quad &\Leftrightarrow \quad a + d <_{\mathbb{N}} b + c \\
&\Leftrightarrow \quad \exists\, p \in \mathbb{N} \text{ tal que } (a + d) + p = b + c \\
&\Leftrightarrow \quad (a' + b' + c' + d') + a + d + p = (a' + b' + c' + d') + b + c \\
&\Leftrightarrow \quad (a' + d') + p + (a + b') + (c' + d) = (b' + c') + (a' + b) + (c + d') \\
&\Leftrightarrow \quad (a' + d') + p + (a + b') + (c' + d) = (b' + c') + (a + b') + (c' + d) \\
&\Leftrightarrow \quad (a' + d') + p = b' + c' \\
&\Leftrightarrow \quad a' + d' <_{\mathbb{N}} b' + c' \\
&\Leftrightarrow \quad [(a',b')] < [(c',d')].
\end{aligned}$$

□

Observação. *De acordo com a Definição 2.4, dados $x = [(a,b)], 0 = [(1,1)] \in \mathbb{Z}$, temos que $x < 0 \Leftrightarrow a + 1 <_{\mathbb{N}} b + 1$. Pelo Exemplo 1.1 $a + 1 <_{\mathbb{N}} b + 1 \Rightarrow a <_{\mathbb{N}} b$. Logo, $x < 0 \Leftrightarrow a <_{\mathbb{N}} b$. Analogamente, $0 < x \Leftrightarrow b <_{\mathbb{N}} a$.*

Tendo definido a relação $<$, podemos considerar, para $x, y \in \mathbb{Z}$, que: x é maior do que y, denotado por $x > y$, se, e somente se, $y < x$; x é maior do que ou igual a y, denotado por $x \geq y$, se, e somente se, $y < x$ ou $x = y$; x é menor do que ou igual a y, denotado por $x \leq y$, se, e somente se, $x < y$ ou $x = y$.

O próximo teorema, mostra as propriedades decorrentes da ordem em $\mathbb{Z}$.

Teorema 2.8. *Sejam $x = [(a,b)], y = [(c,d)], z = [(e,f)] \in \mathbb{Z}$. As seguintes propriedades são satisfeitas:*

i) Trasitividade: Se $x < y$ e $y < z$, então $x < z$.

ii) Monotonicidade da adição: Se $x < y$, então $x + z < y + z$.

iii) Monotonicidade da multiplicação: Sendo $x < y$ e $0 < z$, então $xz < yz$ e, se $x < y$ e $z < 0$, então $xz > yz$.

iv) Tricotomia: Para quaisquer $x, y \in \mathbb{Z}$ vale somente uma das relações

$$\textit{ou } x < y, \ \textit{ ou } x = y, \ \textit{ ou } x > y.$$

Demonstração. Façamos:

i) Como $x < y$ e $y < z$, temos

$$a + d <_{\mathbb{N}} b + c \text{ e } c + f <_{\mathbb{N}} d + e.$$

Assim,

$$a + d + c + f <_{\mathbb{N}} b + c + d + e.$$

Segue que

$$a + f <_{\mathbb{N}} b + e,$$

ou seja,

$$[(a,b)] < [(e,f)].$$

Logo, $x < z$.

ii) Temos que

$$\begin{aligned}
x < y \quad &\Rightarrow \quad [(a,b)] < [(c,d)] \\
&\Rightarrow \quad a + d <_{\mathbb{N}} b + c \\
&\Rightarrow \quad a + d + e + f <_{\mathbb{N}} b + c + e + f \\
&\Rightarrow \quad (a + e) + (d + f) <_{\mathbb{N}} (b + f) + (c + e) \\
&\Rightarrow \quad [(a + e, b + f)] < [(c + e, d + f)] \\
&\Rightarrow \quad [(a,b)] + [(e,f)] < [(c,d)] + [(e,f)] \\
&\Rightarrow \quad x + z < y + z.
\end{aligned}$$

iii) Sendo $x < y$ e $0 < z$, então

$$a + d <_{\mathbb{N}} b + c \text{ e } f <_{\mathbb{N}} e.$$

Assim, existem $p, q \in \mathbb{N}$, tais que

$$b + c = a + d + p \text{ e } e = f + q.$$

Logo,

$$((a + d) + p)e = (b + c)e \text{ e } ((a + d) + p)f = (b + c)f \tag{2.5}$$

e

$$pe = p(f + q) = pf + fq. \tag{2.6}$$

Em posse de (2.5), (2.6) e da lei do corte em $\mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned} ((a + d) + p)e + (b + c)f &= ((a + d) + p)f + (b + c)e \\ (a + d)e + pe + bf + cf &= (a + d)f + pf + be + ce \\ ae + de + pe + bf + cf &= af + df + pf + be + ce \\ ae + de + pf + pq + bf + cf &= af + df + pf + be + ce \\ ae + de + bf + cf + pq &= af + df + be + ce. \end{aligned}$$

Dessa maneira,

$$\begin{aligned} (ae + bf) + (cf + de) &<_{\mathbb{N}} (af + be) + (ce + df) \\ [(ae + bf, af + be)] &< [(ce + df, cf + de)] \\ [(a, b)] \cdot [(e, f)] &< [(c, d)] \cdot [(e, f)] \\ x \cdot z &< y \cdot z. \end{aligned}$$

O caso $x < y$ e $z < 0$ se faz de forma análoga.

iv) Pela tricotomia dos números naturais, um dos seguintes casos necessariamente ocorre

$$\text{ou } a + d <_{\mathbb{N}} b + c, \text{ ou } a + d = b + c, \text{ ou } b + c <_{\mathbb{N}} a + d,$$

ou seja,

$$\text{ou }, x < y, \text{ ou } x = y, \text{ ou } y < x.$$

$\square$

Exemplo 2.2. *Considere $x = [(a, b)] \in \mathbb{Z}$, com $x \neq 0$. Mostraremos que $x^2 = x \cdot x > 0$.*

Demonstração. Note, primeiramente, que

$$\begin{aligned} x \cdot 0 &= [(a,b)] \cdot [(1,1)] \\ &= [(a \cdot 1 + b \cdot 1, a \cdot 1 + b \cdot 1)] \\ &= [(a+b, a+b)] \\ &= [(1,1)] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim, sejam os dois seguintes casos:

a) Se $x < 0$, segue, da monotonicidade da multiplicação, que

$$\begin{aligned} x < 0 &\Rightarrow x \cdot x > x \cdot 0 \\ &\Rightarrow x^2 > 0. \end{aligned}$$

b) Se $x > 0$, por argumentos análogos, temos

$$\begin{aligned} x > 0 &\Rightarrow x \cdot x > x \cdot 0 \\ &\Rightarrow x^2 > 0. \end{aligned}$$

□

Observação. *Tendo construido o conjunto dos números inteiros, vejamos agora como cada classe de equivalência se identifica como um elemento de $\mathbb{Z}$.*

Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ com $[(a,b)], [(c,d)] \in \mathbb{Z}$ tal que $[(a,b)] = [(c,d)]$. Perceba que $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ naturalmente: para $a \in \mathbb{N}$, basta identificar a com a classe $[(a,0)]$. Assim, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Logo,

$$[(a,b)] = [(c,d)] \Leftrightarrow a + d = b + c \Leftrightarrow a - b = c - d.$$

Portanto, cada classse $[(a,b)]$ pode ser identificada como $a - b \in \mathbb{Z}$.

Capítulo 3

Números Racionais

Contruiremos o conjunto dos números racionais a partir do conjunto dos números inteiros. Denotaremos por $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ os números inteiros diferentes de zero. Esta construção é clássica e aqui nós vamos nos basear nos trabalhos de [1, 7, 9, 19, 21, 2].

3.1 Construção dos Números Racionais

Teorema 3.1. *Em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, a relação $\sim$, definida por*

$$(a,b) \sim (c,d) \;\Leftrightarrow\; ad = bc$$

é uma relação de equivalência.

Demonstração. Vamos verificar se a relação $\sim$ satisfaz as três propriedades:

(Reflexividade) Para qualquer $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ segue que $(a,b) \sim (a,b) \Leftrightarrow ab = ba$.

(Simetria) Se $(a,b), (c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, então

$$(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow ad = bc \Leftrightarrow cb = da \Leftrightarrow (c,d) \sim (a,b).$$

(Transitividade) Sejam $(a,b), (c,d), (e,f) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ tal que $(a,b) \sim (c,d)$ e $(c,d) \sim (e,f)$. Logo, $ad = bc$ e $cf = de$. Dessa maneira,

$$ad = bc \Rightarrow adf = bcf \Rightarrow (af)d = b(cf) \Rightarrow (af)d = b(de) \Rightarrow (af)d = (be)d.$$

Como a lei do corte é válida em $\mathbb{Z}$ e por termos $d \neq 0, (af)d = (be)d \Rightarrow af = be$. Ou seja, $(a,b) \sim (e,f)$.

Assim, fica provado que $\sim$ é uma relação de equivalência. □

Pelo Teorema 1.1, sabemos que a relação de equivalência $\sim$ induz uma partição em

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Dessa forma, obtemos o conjunto quociente

$$(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/\sim = \{[(a,b)]; (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*\}.$$

Definição 3.1. *O conjunto quociente $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/\sim$, formado pelas classes de equivalência $[(a,b)]$ dos elementos $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ via relação $\sim$, será chamado de conjunto dos números racionais e denotado por $\mathbb{Q}$. Isto é,*

$$\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/\sim .$$

Na sequência, definiremos duas operações neste conjunto.

3.2 Operações em $\mathbb{Q}$

Definição 3.2. *A adição, $+$, e a multiplicação, $\cdot$, são definidas em $\mathbb{Q}$, respectivamente, por*

$$[(a,b)] + [(c,d)] = [(ad+bc, bd)] \;\text{ e }\; [(a,b)] \cdot [(c,d)] = [(ac, bd)].$$

Nosso próximo objetivo é mostrar que os resultados dessas operações independem dos representantes das classes de equivalência escolhidos.

Teorema 3.2. *Em $\mathbb{Q}$, a adição dada por*

$$[(a,b)] + [(c,d)] = [(ad+bc, bd)]$$

é bem definida.

Demonstração. Sejam $[(a,b)] = [(a',b')]$ e $[(c,d)] = [(c',d')]$. Segue que $(a,b) \sim (a',b')$ e $(c,d) \sim (c',d')$ implicam em

$$ab' = ba' \text{ e } cd' = dc'. \tag{3.1}$$

Multiplicando os termos dd' e bb' em (3.1)

$$(ab')(dd') = (ba')(dd') \text{ e } (cd')(bb') = (dc')(bb'). \tag{3.2}$$

Em posse de (3.2), temos

$$\begin{aligned}
(ad+bc)(b'd') &= adb'd' + bcb'd' \\
&= (ab')(dd') + (cd')(bb') \\
&= (ba')(dd') + (dc')(bb') \\
&= bda'd' + bdc'b' \\
&= (bd)(a'd' + b'c').
\end{aligned}$$

Daí, $(ad+bc)(b'd') = (bd)(a'd'+b'c') \Leftrightarrow (ad+bc, bd) \sim (a'd'+b'c', b'd')$. Assim, $[(ad+bc, bd)] = [(a'd'+b'c', b'd')]$. Ou seja, $[(a,b)]+[(c,d)] = [(a',b')]+[(c',d')]$. $\square$

Teorema 3.3. *Em $\mathbb{Q}$, a multiplicação dada por*

$$[(a,b)] \cdot [(c,d)] = [(ac, bd)]$$

é bem definida.

Demonstração. Sendo $[(a,b)] = [(a',b')]$ e $[(c,d)] = [(c',d')]$, então $(a,b) \sim (a',b')$ e $(c,d) \sim (c',d')$ o que acarreta em

$$ab' = ba' \text{ e } cd' = dc'.$$

Dessas igualdades, obtemos $(ab')(cd') = (ba')(dc')$.

Dessa forma,

$$\begin{aligned} [(a,b)] \cdot [(c,d)] = [(a',b')] \cdot [(c',d')] &\Leftrightarrow [(ac,bd)] = [(a'c', b'd')] \\ &\Leftrightarrow (ac)(b'd') = (bd)(a'c') \\ &\Leftrightarrow (ab')(cd') = (ba')(dc'). \end{aligned}$$

O que comprova a veracidade do teorema. $\square$

3.3 Propriedades da adição e multiplicação

Primeiramente, apresentaremos as propriedades da adição.

Teorema 3.4. *Em $\mathbb{Q}$ a adição possui as seguintes propriedades:*

i) Associatividade: $(x+y)+z = x+(y+z)$, para todos $x, y, z \in \mathbb{Q}$;

ii) Comutatividade: $x+y = y+x$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{Q}$;

iii) Existência do elemento neutro da adição: $0 = [(0,1)]$;

iv) Existência do simétrico: Para cada $x = [(a,b)] \in \mathbb{Q}$, $-x = [(-a,b)]$ é tal que $x+(-x) = 0$. O elemento $-x$ é o simétrico de x.

Demonstração. Vamos mostrar a validade de cada item.

i) Sejam $x = [(a, b)], y = [(c, d)]$ e $z = [(e, f)]$ elementos de $\mathbb{Q}$. Temos,

$$\begin{aligned}
(x + y) + z &= \big([(a, b)] + [(c, d)]\big) + [(e, f)] \\
&= [(ad + bc, bd)] + [(e, f)] \\
&= [((ad + bc)f + (bd)e, (bd)f)] \\
&= [(adf + bcf + bde, bdf)] \\
&= [(a(df) + b(cf + de), b(df))] \\
&= [(a, b)] + [(cf + de, df)] \\
&= [(a, b)] + \big([(c, d)] + [(e, f)]\big) \\
&= x + (y + z).
\end{aligned}$$

ii) Dados $x = [(a, b)], y = [(c, d)] \in \mathbb{Q}$, segue

$$\begin{aligned}
x + y &= [(a, b)] + [(c, d)] \\
&= [(ad + bc, bd)] \\
&= [(cb + da, db)] \\
&= [(c, d)] + [(a, b)] \\
&= y + x.
\end{aligned}$$

iii) Para todo $x = [(a, b)] \in \mathbb{Q}$, existe $0 = [(0, 1)]$ tal que $x + 0 = x$. Realmente, pois

$$x + 0 = [(a, b)] + [(0, 1)] = [(a \cdot 1 + b \cdot 0, b \cdot 1)] = [(a, b)] = x.$$

iv) Dado $x = [(a, b)] \in \mathbb{Q}$ seja $-x = [(-a, b)]$.

Perceba que, $[(0, n)] = [(0, 1)]$, para todo $n \in \mathbb{Z}^*$. Assim,

$$x + (-x) = [(a, b)] + [(-a, b)] = [(ab + b(-a), bb)] = [(0, bb)] = [(0, 1)] = 0.$$

$\square$

O teorema que segue, mostra as propriedades da multiplicação.

Teorema 3.5. *Em $\mathbb{Q}$ a multiplicação possui as seguintes propriedades:*

i) Associatividade: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, para todos $x, y, z \in \mathbb{Q}$;

ii) Comutatividade: $x \cdot y = y \cdot x$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{Q}$;

iii) $1 = [(1, 1)]$ é elemento neutro da multiplicação;

iv) Inveso multiplicativo: Para cada $x = [(a,b)] \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $x^{-1} = [(b,a)] \in \mathbb{Q}$ *é tal que* $x \cdot x^{-1} = 1$*;*

v) Distributividade: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$, *para todos* $x, y, z \in \mathbb{Q}$.

Demonstração. Façamos cada um dos casos:

i) Dados $x = [(a,b)], y = [(c,d)], z = [(e,f)] \in \mathbb{Q}$, temos

$$\begin{aligned}
(x \cdot y) \cdot z &= \big([(a,b)] \cdot [(c,d)]\big) \cdot [(e,f)] \\
&= [(ac,bd)] \cdot [(e,f)] \\
&= [((ac)e,(bd)f)] \\
&= [(ace,bdf)] \\
&= [(a(ce),b(df))] \\
&= [(a,b)] \cdot [(ce,df)] \\
&= [(a,b)] \cdot \big([(c,d)] \cdot [(e,f)]\big) \\
&= x \cdot (y \cdot z).
\end{aligned}$$

ii) Sejam $x = [(a,b)]$ e $y = [(c,d)]$ elementos de $\mathbb{Q}$, segue que

$$\begin{aligned}
x \cdot y &= [(a,b)] \cdot [(c,d)] \\
&= [(ac,bd)] \\
&= [(ca,db)] \\
&= [(c,d)] \cdot [(a,b)] \\
&= y \cdot x.
\end{aligned}$$

iii) Sendo $x = [(a,b)] \in \mathbb{Q}$ e $1 = [(1,1)]$, obtemos

$$\begin{aligned}
x \cdot 1 &= [(a,b)] \cdot [(1,1)] \\
&= [(a \cdot 1, b \cdot 1)] \\
&= [(a,b)] \\
&= x.
\end{aligned}$$

iv) Dado $x = [(a,b)] \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, se $x^{-1} = [(b,a)] \quad (x^{-1} \in \mathbb{Q}, \text{ pois } a \neq 0)$

$$x \cdot x^{-1} = [(a,b)] \cdot [(b,a)] = [(ab,ba)] = [(ab,ab)] = [(1,1)] = 1.$$

Perceba que $ab \neq 0$ e $(ab,ab) \sim (1,1)$.

v) Sejam $x = [(a,b)], y = [(c,d)], z = [(e,f)] \in \mathbb{Q}$. Como $b \neq 0$, segue que $1 = [(b,b)]$, daí

$$\begin{aligned}
x \cdot (y+z) &= [(a,b)] \cdot \big([(c,d)] + [(e,f)]\big) \\
&= [(a,b)] \cdot [(cf+de, df)] \\
&= [(a(cf+de), b(df))] \\
&= [(acf+ade, bdf)] \\
&= [(acf+ade, bdf)] \cdot 1 \\
&= [(acf+ade, bdf)] \cdot [(b,b)] \\
&= [((acf+ade)b, (bdf)b)] \\
&= [(acfb+adeb, bdfb)] \\
&= [((ac)(bf)+(bd)(ae), (bd)(bf))] \\
&= [(ac,bd)] + [(ae,bf)] \\
&= [(a,b)] \cdot [(c,d)] + [(a,b)] \cdot [(e,f)] \\
&= x \cdot y + x \cdot z.
\end{aligned}$$

□

Os resultados dos Teoremas 3.4 e 3.5 fazem do conjunto $\mathbb{Q}$, munido das operações de adição e multiplicação, um corpo. Assim, $\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/\sim$ é chamado de corpo dos números racionais.

Em posse das propriedades da adição e da multiplicação, temos argumentos para definir em $\mathbb{Q}$ as operações de subtração e divisão.

Definição 3.3. *Dados $x = [(a,b)], y = [(c,d)] \in \mathbb{Q}$, a subtração é definida por*

$$x - y = x + (-y).$$

O elemento $x - y \in \mathbb{Q}$ é dito a diferença entre x e y. Assim,

$$[(a,b)] - [(c,d)] = [(a,b)] + [(-c,d)] = [(ad + d(-c), bd)].$$

Definição 3.4. *Sendo $x = [(a,b)], y = [(c,d)] \neq 0 \in \mathbb{Q}$, a divisão de x e y, x/y, é definida por*

$$x/y = x \cdot y^{-1}.$$

O elemento $x/y \in \mathbb{Q}$ é chamado o quociente de x e y. Dessa forma

$$[(a,b)]/[(c,d)] = [(a,b)] \cdot [(d,c)] = [(ad, bc)].$$

Logo, a subtração de x e y nada mais é do que a soma de x com o inverso aditivo de y, enquanto a divisão de x e $y \neq 0$, se trata da multiplicação entre x e o inverso multiplicativo de y. Assim, em $\mathbb{Q}$, a subtração e a divisão são operações binárias.

3.4 Relação de ordem: $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado

Teorema 3.6. *Seja o conjunto $P = \{[(a,b)] \in \mathbb{Q}; ab >_{\mathbb{Z}} 0\}$. O conjunto P faz com que $\mathbb{Q}$ seja um corpo ordenado.*

Demonstração. Dados $x = [(a,b)], y = [(c,d)] \in P$, temos

$$ab >_{\mathbb{Z}} 0 \text{ e } cd >_{\mathbb{Z}} 0 \tag{3.3}$$

Como $b \neq 0$ e $d \neq 0$, então $b^2 >_{\mathbb{Z}} 0$ e $d^2 >_{\mathbb{Z}} 0$. Assim, utilizando (3.3), e as propriedades da ordem em $\mathbb{Z}$, segue

$$\begin{aligned} x + y = [(ad+bc, bd)] \in P \quad &\Leftrightarrow \quad (ad+bc)bd = (ab)d^2 + (cd)b^2 >_{\mathbb{Z}} 0, \\ x \cdot y = [(ac, bd)] \in P \quad &\Leftrightarrow \quad (ac)(bd) = (ab)(cd) >_{\mathbb{Z}} 0. \end{aligned}$$

Logo, a adição e a multiplicação são fechadas em P.

Agora, resta mostrar a tricotomia.

Considere $[(a,b)] \in \mathbb{Q}$, daí, obtemos $ab \in \mathbb{Z}$. Em posse da tricotomia em $\mathbb{Z}$, temos que

$$\text{ou } ab >_{\mathbb{Z}} 0, \text{ ou } ab = 0, \text{ ou } ab <_{\mathbb{Z}} 0.$$

Sabendo que $b \neq 0$, segue

$$\text{ou } ab >_{\mathbb{Z}} 0, \text{ ou } a = 0, \text{ ou } (-a)b = -(ab) >_{\mathbb{Z}} 0.$$

Assim,

$$\text{ou } [(a,b)] \in P, \text{ ou } [(a,b)] = [(0,b)] = 0, \text{ ou } [(-a,b)] \in P.$$

Isto é,

$$\text{ou } [(a,b)] \in P, \text{ ou } [(a,b)] = [(0,b)] = 0, \text{ ou } -[(a,b)] \in P.$$

O que comprova que $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado. $\square$

O resultado deste teorema, nos permite definir em $\mathbb{Q}$ a seguinte relação de ordem:

Definição 3.5. *Sejam $x, y \in \mathbb{Q}$. Afirmaremos que x é maior do que y, o que será denotado por $x > y$, se, e somente se, $x - y \in P$.*

Observação. *Pela definição anterior, $x > 0$ se, e somente se, $x - 0 = x \in P$. Como P é o conjunto de positivos, diremos que x é positivo quando $x > 0$.*

Tendo definido a relação $>$, podemos considerar, para $x, y \in \mathbb{Q}$, que: x é menor do que y, denotado por $x < y$, se, e somente se, $y > x$; x é maior do que ou igual a y, denotado por $x \geq y$, se, e somente se, $x > y$ ou $x = y$; x é menor do que ou igual a y, denotado por $x \leq y$, se, e somente se, $y > x$ ou $x = y$.

Por $\mathbb{Q}$ ser um corpo ordenado, então, de maneira natural, são válidas as seguintes propriedades de ordem, visto que, estas dependem somente da existência do conjunto de positivos P:

i) Transitividade: $x < y$ e $y < z \Rightarrow x < z$.

ii) Tricotomia: Somente uma das seguintes alternativas ocorre

$$\text{ou } x < y, \text{ ou } x = y, \text{ ou } x > y.$$

iii) Monotonicidade da adição: $x < y \Rightarrow x + z < y + z$.

iv) Monotonicidade da multiplicação:

$$\begin{aligned} x < y \text{ e } z > 0 &\Rightarrow x \cdot z < y \cdot z. \\ x < y \text{ e } z < 0 &\Rightarrow x \cdot z > y \cdot z. \end{aligned}$$

Observação. *Tendo construido $\mathbb{Q}$, veja como cada classe de equivalência pode ser identificado como um elemento deste conjunto:*

Sejam $m, p \in \mathbb{Z}$ e $n, q \in \mathbb{Z}^*$, com $[(m,n)], [(p,q)] \in \mathbb{Q}$ tal que $[(m,n)] = [(p,q)]$. Como $a \in \mathbb{Z}$ é identificado pela classe $[(a,1)]$ logo, naturalmente podemos considerar $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$. Então, $m, n, p, q \in \mathbb{Q}$, daí

$$[(m,n)] = [(p,q)] \Leftrightarrow mq = np \Leftrightarrow \frac{m}{n} = \frac{p}{q}.$$

Portanto, cada classe $[(m,n)]$ representa o elemento $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$.

Capítulo 4

Números Reais

4.1 Construção dos Números Reais

Tendo formalizado, no capítulo anterior, os números racionais, utilizaremos tal conjunto para construir os números reais. Faremos isso por meio de sequências de Cauchy, onde cada número real será definido como sendo uma classe de equivalência destas sequências. Para isso, antes de procedermos com a construção, definiremos sequências de números racionais e sequências de Cauchy. Para um leitor mais interessado no conteúdo, nós recomendamos os textos em [1, 14, 15, 17, 2, 8, 11], por exemplo.

Definição 4.1. *Uma sequência de números racionais (ou, simplesmente, sequência racional) é uma função* $x : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$*. Ou seja, para cada* $n \in \mathbb{N}$ *é atribuído o valor* $x(n) \in \mathbb{Q}$*, que será representado por* x_n *e dito o termo de ordem* n *da sequência* x*.*

Observação. *A sequência racional* x *também é representada pelas notações:* $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ *ou* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *ou* (x_n)*.*

Exemplo 4.1. *Sendo a sequência racional* (x_n) *definida por* $x_n = \dfrac{n}{n+1}$*, então*

$$(x_n) = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots\right).$$

Definição 4.2. *Sendo* (x_n) *uma sequência de números racionais, chamaremos de subsequência de* (x_n)*, o que será denotado por* (x_{n_i}) *com* i *pertencente aos naturais, a restrição da função* (x_n) *a um subconjunto infinito* $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \ldots < n_i < \ldots\}$*.*

Exemplo 4.2. *Perceba que,* $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \ldots, \frac{2n}{2n+1}, \ldots\right)$ *é uma subsequência da sequência vista no Exemplo 4.1.*

Definição 4.3. *Diremos que uma sequência* (x_n) *converge para* $L \in \mathbb{Q}$ *se, para qualquer* $\omega > 0$ *em* $\mathbb{Q}$*, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$*, tal que*

$$|x_n - L| < \omega, \ \ \textit{para todo} \ \ n > n_0.$$

Quando o número L definido acima existir, este será chamado limite da sequência (x_n). Assim diremos que a sequência coverge para L, o que denotaremos por $x_n \to L$.

Exemplo 4.3. *A sequência racional do Exemplo 4.1 converge para* 1.

De fato, seja $\omega > 0$ em $\mathbb{Q}$. Tomando $n_0 \in \mathbb{N}$ com $n_0 > \dfrac{1}{\omega} - 1$, ou equivalentemente, $\dfrac{1}{n_0+1} < \omega$. Temos, para $n > n_0$, que

$$|x_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|-\frac{1}{n+1}\right| = \left|\frac{1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n_0+1} < \omega.$$

Exemplo 4.4. *A sequência racional (x_n) definida por $x_n = \dfrac{1}{n}$ converge para zero.*

Realmente, sendo $\omega > 0$ em $\mathbb{Q}$, ao tomar $n_0 \in \mathbb{N}$ com $n_0 > \dfrac{1}{\omega}$, o que nos dá $\dfrac{1}{n_0} < \omega$, temos, para $n > n_0$, que

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \omega.$$

Definição 4.4. *Dada uma sequência racional, (x_n), diremos que ela é uma sequência de Cauchy se, dado qualquer número racional $\omega > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$|x_m - x_n| < \omega, \text{ para todos } m, n > n_0.$$

Exemplo 4.5. *A sequência racional (x_n) tal que $x_n = \dfrac{1}{n}$ é de Cauchy.*

Seja $\omega > 0$ em $\mathbb{Q}$, tomando $n_0 \in \mathbb{N}$ com $n_0 > \dfrac{2}{\omega}$, o que equivale a $\dfrac{1}{n_0} < \dfrac{\omega}{2}$, temos, para $m, n > n_0$, que

$$|x_m - x_n| = |x_m + (-x_n)| \leq |x_m| + |-x_n| = |x_m| + |x_n| = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < \frac{\omega}{2} + \frac{\omega}{2} = \omega.$$

Portanto, (x_n) é de Cauchy.

Poderíamos também, mostrar que a sequência do Exemplo 4.1 é de Cauchy, mas por se tratar de uma sequência convergente o resultado apresentado no próximo teorema evidencia tal fato.

Teorema 4.1. *Toda sequência convergente de números racionais é uma sequência de Cauchy.*

Demonstração. Sabemos que existe um racional r tal que $x_n \to r$. Dado $\omega > 0$ em $\mathbb{Q}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de tal forma que, para $m, n > n_0$,

$$|x_m - r| < \frac{\omega}{2} \text{ e } |x_n - r| < \frac{\omega}{2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &= |x_m - x_n + (r - r)| = |(x_m - r) + (-x_n + r)| \\ &\leq |x_m - r| + |-(x_n - r)| = |x_m - r| + |x_n - r| \\ &< \frac{\omega}{2} + \frac{\omega}{2} = \omega. \end{aligned}$$

Portanto, toda sequência racional convergente é de Cauchy. □

Teorema 4.2. *Uma sequência de Cauchy, (x_n), que possui uma subsequência, (x_{n_i}), convergente para um número racional r, também converge para r.*

Demonstração. Sabendo que $x_{n_i} \to r$, tome $\omega > 0$ em $\mathbb{Q}$. Assim, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n_i > n_1 \Rightarrow |x_{n_i} - r| < \frac{\omega}{2}.$$

Note ainda que, por (x_n) ser de Cauchy, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ de maneira que

$$m, n > n_2 \Rightarrow |x_m - x_n| < \frac{\omega}{2}.$$

Considere $n_0 = max\{n_1, n_2\}$, para $n_i > n_0$, temos

$$\begin{aligned} |x_n - r| &= |x_n + (-x_{n_i} + x_{n_i}) - r| \\ &= |(x_n - x_{n_i}) + (x_{n_i} - r)| \\ &\leq |x_n - x_{n_i}| + |x_{n_i} - r| \\ &< \frac{\omega}{2} + \frac{\omega}{2} = \omega. \end{aligned}$$

Mostrando assim, que $x_n \to r$. □

De forma intuitiva, note que se para valores grandes de n, os termos da sequência (x_n) se aproximam de r, então esses termos necessariamente devem aproximar-se uns dos outros.

Porém, o fato dos termos de uma sequência de Cauchy estarem próximos uns dos outros não nos indica que a sequência irá convergir para um número racional.

Podemos constatar que qualquer número racional r será limite de alguma sequência, visto que a sequência constante $(r_n) = (r, r, r, \ldots)$ é de Cauchy e converge para r. Más existem sequências racionais de Cauchy que não convergem em $\mathbb{Q}$.

Mesmo não convegindo para número racional algum, os temos das sequências se aproximam uns dos outros conforme n vai aumentando, assim fica a impressão de que estão se aproximando de algum número, diremos que estes são os irracionais. Temos como exemplo: a sequência das aproximações decimais de π e a sequência que está se aproximando de $\sqrt{3}$, respectivamente,

$$(r_n) = (3; 3,1; 3,14; 3,141; 3,1415, \ldots) \text{ e } (s_n) = (1; 1,7; 1,73; 1,732; 1,7320, \ldots).$$

O teorema a seguir nos mostra que as sequências de Cauchy são limitadas.

Teorema 4.3. *Toda sequência de Cauchy é limitada, ou seja, existe algum $M > 0$ tal que $|x_n| \leq M \, \forall \, n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy. Tomando $\omega = 1$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_1$ implica que $|x_m - x_n| < 1$. Sendo $n_0 > n_1$ e, em particular, $n \geq n_0$ implica que $|x_{n_0} - x_n| < 1$, ou seja, $n \geq n_0$ implica que $x_n \in (x_{n_0} - 1, x_{n_0} + 1)$. Considerando α como o menor e β como o maior elemento do conjunto $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n_0} - 1, x_{n_0} + 1\}$. Então, $x_n \in [\alpha, \beta]$ para cada $n \in \mathbb{N}$, portanto a sequência (x_n) é limitada. □

Ocorre que sequências distintas podem definir o mesmo número, como no caso do π que também é definido pela sequência racional

$$(q_n) = \left(3, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}, \ldots\right).$$

Assim, vamos definir uma relação de equivalência no conjunto das sequência de Cauchy, dessa maneira, todas as sequências que tiverem o mesmo limite irão fazer parte da mesma classe.

Teorema 4.4. *Sejam $x = (x_n)$ e $y = (y_n)$ sequências de Cauchy. A relação $\sim$ definida no conjunto das sequências de Cauchy de números racionais por*

$$x \sim y \Leftrightarrow (x_n - y_n) \to 0$$

é uma relação de equivalência.

Demonstração. Vamos verificar as três propriedades:

(Reflexividade) Temos que, $x_n - x_n = 0$, e a sequência constante de termos 0 converge para 0. Assim, $x \sim x$.

(Simetria) Seja $x \sim y$, o que equivale a $(x_n - y_n) \to 0$, isto é, tomando $\omega > 0$ em $\mathbb{Q}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |x_n - y_n| < \omega$.

Porém,

$$|x_n - y_n| = |-(y_n - x_n)| = |y_n - x_n| < \omega.$$

Portanto, $(y_n - x_n) \to 0$, logo, $y \sim x$.

(Trasitividade) Sendo $x \sim y$ e $y \sim z$, segue que $(x_n - y_n) \to 0$ e $(y_n - z_n) \to 0$. Assim, dado $\omega > 0$ em $\mathbb{Q}$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_1 \Rightarrow |x_n - y_n| < \dfrac{\omega}{2}$. Existe, também, $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_2 \Rightarrow |y_n - z_n| < \dfrac{\omega}{2}$.

Considere $n_0 = max\{n_1, n_2\}$, daí, para todo $n > n_0$, temos

$$|x_n - z_n| = |(x_n - y_n) + (y_n - z_n)| \leq |x_n - y_n| + |y_n - z_n| < \frac{\omega}{2} + \frac{\omega}{2} = \omega.$$

O que mostra que $(x_n - z_n) \to 0$, ou seja, $x \sim z$. □

De acordo com o Teorema 1.1, temos que a relação de equivalência $\sim$ induz uma partição no conjunto das sequências de Cauchy, formando assim, um conjunto quociente composto pelas classes de equivalência destas sequências.

Definição 4.5. *O conjunto quociente formado pelas classes de equivalência* $[(x_n)]$ *das sequências de Cauchy de números racionais via relação* $\sim$ *será chamado de conjunto dos números reais e denotado por* $\mathbb{R}$.

4.2 Operações em $\mathbb{R}$

Definição 4.6. *Sejam* $s, t \in \mathbb{R}$ *tais que* $s = [(x_n)]$ *e* $t = [(y_n)]$. *A adição,* $+$, *e a multiplicação,* $\cdot$, *são definidas em* $\mathbb{R}$, *respectivamente, por*

$$s + t = [(x_n + y_n)] \ \text{ e } \ s \cdot t = [(x_n \cdot y_n)].$$

Teorema 4.5. *A operação de adição,* $+$, *definida em* $\mathbb{R}$ *como*

$$[(x_n)] + [(y_n)] = [(x_n + y_n)]$$

é bem definida.

Demonstração. Sejam $(x_n), (x'_n), (y_n), (y'_n)$ sequências de Cauchy tais que $[(x_n)] = [(x'_n)]$ e $[(y_n)] = [(y'_n)]$. Assim, $(x_n - x'_n) \to 0$ e $(y_n - y'_n) \to 0$. Dessa forma, tomando $\omega > 0$ em $\mathbb{Q}$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ de maneira que $n > n_1 \Rightarrow |x_n - x'_n| < \frac{\omega}{2}$ e $n > n_2 \Rightarrow |y_n - y'_n| < \frac{\omega}{2}$.

Seja $n_0 = max\{n_1, n_2\}$, então, para $n > n_0$, temos

$$|(x_n + y_n) - (x'_n + y'_n)| = |(x_n - x'_n) + (y_n - y'_n)| \leq |x_n - x'_n| + |y_n - y'_n| < \frac{\omega}{2} + \frac{\omega}{2} = \omega.$$

Logo, $(x_n + y_n) - (x'_n + y'_n) \to 0$, ou seja, $[(x_n + y_n)] = [(x'_n + y'_n)]$, mostrando assim, que a adição é bem definida. □

Teorema 4.6. *A multiplicação,* $\cdot$, *definida em* $\mathbb{R}$ *por*

$$[(x_n)] + [(y_n)] = [(x_n + y_n)]$$

é bem definida.

Demonstração. Considere as sequências de Cauchy $(x_n), (x'_n), (y_n), (y'_n)$ tais que $[(x_n)] = [(x'_n)]$ e $[(y_n)] = [(y'_n)]$. Dessa maneira, temos que $(x_n - x'_n) \to 0$ e $(y_n - y'_n) \to 0$.

Perceba que,

$$\begin{aligned} x_n \cdot y_n - x'_n \cdot y'_n &= x_n \cdot y_n + (y_n \cdot x'_n - y_n \cdot x'_n) - x'_n \cdot y'_n \\ &= (x_n \cdot y_n - y_n \cdot x'_n) + (y_n \cdot x'_n - x'_n \cdot y'_n \\ &= y_n \cdot (x_n - x'_n) + x'_n \cdot (y_n - y'_n). \end{aligned}$$

Assim,

$$|x_n \cdot y_n - x'_n \cdot y'_n| = |y_n \cdot (x_n - x'_n) + x'_n \cdot (y_n - y'_n)| \leq |y_n| \cdot |(x_n - x'_n)| + |x'_n| \cdot |(y_n - y'_n)|.$$

De acordo com o Teorema 4.3, existem M, L tais que $|y_n| \leq M$ e $|x'_n| \leq L, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Tomando $R = M + L$, segue que

$$|x_n \cdot y_n - x'_n \cdot y'_n| \leq |y_n| \cdot |(x_n - x'_n)| + |x'_n| \cdot |(y_n - y'_n)| \leq R \cdot (|x_n - x'_n| + |y_n - y'_n|).$$

Como $(x_n - x'_n) \to 0$ e $(y_n - y'_n) \to 0$, então $(x_n \cdot y_n - x'_n \cdot y'_n) \to 0$, logo $[(x_n \cdot y_n)] = [(x'_n \cdot y'_n)]$, o que mostra que a multiplicação em $\mathbb{R}$ independe de quais sequências de Cauchy sejam escolhidas como representantes das classes de equivalência. □

4.3 Propriedades da adição e da multiplicação

Primeiramente, apresentaremos as propriedades da adição.

Teorema 4.7. *Em $\mathbb{R}$, a adição possui as seguintes propriedades:*

i) Associatividade: Dados $r = [(x_n)], s = [(y_n)], t = [(z_n)] \in \mathbb{R}$, vale que

$$(r + s) + t = r + (s + t).$$

ii) Comutatividade: Para quisquer $r = [(x_n)], s = [(y_n)] \in \mathbb{R}$, temos

$$r + s = s + r.$$

iii) Existência do elemento neutro aditivo: Dado $r = [(x_n)] \in \mathbb{R}$, existe $0 \in \mathbb{R}$ com $0 = [(0_n)]$, onde $(0_n) = (0, 0, 0, \ldots)$, tal que

$$r + 0 = r, \forall\, r \in \mathbb{R}.$$

iv) Existência do simétrico aditivo: Para cada $r = [(x_n)] \in \mathbb{R}$, existe $-r \in \mathbb{R}$ tal que

$$r + (-r) = 0.$$

Demonstração. Em posse da definição de adição em $\mathbb{R}$ e das propriedades do corpo dos números racionais, façamos cada um dos itens:

i) Temos que

$$\begin{aligned} (r+s)+t &= [(x_n+y_n)] + [(z_n)] \\ &= [((x_n+y_n)+z_n)] \\ &= [(x_n+(y_n+z_n))] \\ &= [(x_n)] + [(y_n+z_n)] \\ &= r+(s+t). \end{aligned}$$

O que mostra a validade da associatividade aditiva.

ii) Segue que

$$\begin{aligned} r+s &= [(x_n+y_n)] \\ &= [(y_n+x_n)] \\ &= s+r. \end{aligned}$$

Logo, vale a comutatividade aditiva.

iii) Sabemos que a sequência constante (0_n), cujos termos são 0, é de Cauchy. Sendo $r = [(x_n)] \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} r+0 &= [(x_n+0_n)] \\ &= [(x_1+0, x_2+0, x_3+0, \ldots)] \\ &= [(x_1, x_2, x_3, \ldots)] \\ &= r. \end{aligned}$$

Portanto, $0 = [(0_n)]$ é o elemento neutro da adição em $\mathbb{R}$.

iv) Perceba que $-r = [(-x_n)]$ é uma sequência de Cauchy, pois, de $r = [(x_n)] \in \mathbb{R}$, segue

$$|x_m - x_n| < \omega \Rightarrow |(-x_n) - (-x_m)| < \omega \Rightarrow |(-x_m) - (-x_n)| < \omega.$$

Logo, $-r = [(-x_n)] \in \mathbb{R}$.

Daí, temos

$$r + (-r) = [(x_n + (-x_n)] = [(0, 0, 0, \ldots)] = [(0_n)] = 0.$$

Mostrando assim, a existência do simétrico aditivo em $\mathbb{R}$.

$\square$

O lema que segue, possibilitará a demonstração da existência do inverso multiplicativo em $\mathbb{R}$.

Lema 4.1. *Se uma sequência de Cauchy, (x_n), não tende a 0, então, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que, para $n > n_0$, se tenha $x_n \neq 0$.*

Demonstração. Tomando $\omega_1 = \dfrac{1}{k}$ em $\mathbb{Q}$, caso se tenha $x_k \in \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ tal que $|x_k - 0| < \dfrac{1}{k}$, afirmamos que não pode ocorrer para nenhum subconjunto infinito de $\mathbb{N}$. Pois, caso ocorra, seria possível construir uma subsequência a partir da sequência (x_n) de modo que esta subsequência iria covergir para 0. Porém, pelo Teorema 4.2, a sequência (x_n) também iria convergir para 0, o que é absurdo. Logo, tomando $\omega = \dfrac{1}{n}$ em $\mathbb{Q}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |x_n - 0| \geq \frac{1}{n}.$$

Comprovando assim, que a partir de n_0 todos os termos da sequência (x_n) são diferentes de zero. $\square$

Agora, traremos as propriedades da multiplicação no conjunto dos números reais.

Teorema 4.8. *A multiplicação em $\mathbb{R}$ possui as seguintes propriedades:*

i) Associatividade: Dados $r = [(x_n)], s = [(y_n)], t = [(z_n)] \in \mathbb{R}$, vale que

$$(r \cdot s) \cdot t = r \cdot (s \cdot t).$$

ii) Comutatividade: Sejam $r = [(x_n)], s = [(y_n)] \in \mathbb{R}$, temos que

$$r \cdot s = s \cdot r.$$

iii) Existência do elemento neutro da multiplicação: Existe $1 = [(1_n)] \in \mathbb{R}$, onde $(1_n) = (1, 1, 1, \cdots)$, tal que

$$r \cdot 1 = r, \ \ \textit{para todo} \ \ r = [(x_n)] \in \mathbb{R}.$$

iv) Existência do elemento inverso multiplicativo: Para todo $r = [(x_n)] \in \mathbb{R}$ com $r \neq 0$, existe $r^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que

$$r \cdot r^{-1} = 1.$$

v) Distributividade da multiplicação em relação a adição: Para quisquer $r = [(x_n)], s = [(y_n)], t = [(z_n)] \in \mathbb{R}$ vale que

$$r \cdot (s + t) = r \cdot s + r \cdot t.$$

Demonstração. Em posse da definição de multiplicação em $\mathbb{R}$ e das propriedades do corpo dos números racionais, façamos cada um dos itens:

i) Note que

$$\begin{aligned} (r \cdot s) \cdot t &= [(x_n \cdot y_n)] \cdot [(z_n)] \\ &= [((x_n \cdot y_n) \cdot z_n)] \\ &= [(x_n \cdot (y_n \cdot z_n))] \\ &= [(x_n)] \cdot [(y_n \cdot z_n)] \\ &= r \cdot (s \cdot t). \end{aligned}$$

Logo, vale a associatividade multiplicativa em $\mathbb{R}$.

ii) Segue que

$$r \cdot s = [(x_n \cdot y_n)] = [(y_n \cdot x_n)] = s \cdot r.$$

O que mostra a validade da comutatividade.

iii) Sabemos que a sequência constante (1_n), cujos termos são iguais a 1, é de Cauchy. Assim, sendo $r = [(x_n)] \in \mathbb{R}$, temos

$$r \cdot 1 = [(x_n \cdot 1, x_2 \cdot 1, x_3 \cdot 1, \ldots)] = [(x_1, x_2, x_3, \ldots)] = [(x_n)] = r.$$

Logo, $1 = [(1_n)]$ é o elemento neutro multiplicativo.

iv) Sendo $r = [(x_n)] \in \mathbb{R}$ com $r \neq 0$, então (x_n) não converge para zero. Pelo Lema 4.1, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \neq 0$.

Seja a sequência racional (y_n), onde $y_n = 0$ para $n < n_0$ e $y_n = \dfrac{1}{x_n}$ para $n > n_0$, ou seja,

$$(y_n) = (0, 0, 0, \ldots, 0, \frac{1}{x_{n_0+1}}, \frac{1}{x_{n_0+2}}, \ldots).$$

Logo, $x_n \cdot y_n = 0$ para $n \leq n_0$ e $x_n \cdot y_n = 1$ se $n > n_0$.

Assim,

$$(1_n - (x_n \cdot y_n)) = (1, 1, 1, \ldots, 1, 0, 0, 0, \ldots).$$

Como a partir do termo $n_0 + 1$ os demais serão iguais a 0, a sequência converge para 0. Então,

$$x_n \cdot y_n \sim 1.$$

Logo, $r^{-1} = [(y_n)]$ é o inverso multiplicativo de $r = [(x_n)]$.

v) Temos que

$$\begin{aligned} r \cdot (s + t) &= [(x_n)] \cdot [(y_n + z_n)] \\ &= [(x_n \cdot (y_n + z_n)] \\ &= [(x_n \cdot y_n + x_n \cdot z_n)] \\ &= [(x_n \cdot y_n)] + [(x_n \cdot z_n)] \\ &= r \cdot s + r \cdot t. \end{aligned}$$

Logo, vale a distributividade em $\mathbb{R}$.

□

Os resultados dos Teoremas 4.7 e 4.8 mostram que o conjunto $\mathbb{R}$, munido das operações de adição e multiplicação, é um corpo. Assim, $\mathbb{R}$ é chamado de corpo dos números reais.

Em posse das propriedades da adição e da multiplicação, possuímos argumentos para definir em $\mathbb{R}$ as operações de subtração e divisão.

Definição 4.7. *Dados $r = [(x_n)], s = [(y_n)] \in \mathbb{R}$, a subtração, $-$, é definida por*

$$r - s = [(x_n)] + [(-y_n)] = [(x_n + (-y_n)]$$

.

O elemento $r - s \in \mathbb{R}$ é dito a diferença entre r e s.

Definição 4.8. *Sendo $r = [(x_n)], s = [(y_n)] \in \mathbb{R}$, com $s \neq 0$, existe $s^{-1} = [(z_n)] \in \mathbb{R}$ tal que $s \cdot s^{-1} = 1$. A divisão entre r e s é definida por*

$$r/s = r \cdot s^{-1} = [(x_n)] \cdot [(z_n)] = [(x_n \cdot z_n)].$$

O elemento $r/s \in \mathbb{R}$ é dito o quociente de r e s.

Logo, a subtração entre r e s se trata da soma de r com o inverso aditivo de s, enquanto a divisão entre r e $s \neq 0$, se trata da multiplicação de r com o inverso multiplicativo de s. Assim, em $\mathbb{R}$, a subtração e a divisão são operações binárias.

4.4 Relação de ordem: $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo

Definição 4.9. *Seja (x_n) uma sequência racional de Cauchy, diremos que (x_n) é positiva se existirem $M, n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $n > n_0 \Rightarrow x_n > \dfrac{1}{M}$.*

Definição 4.10. *Diremos que um número $s \in \mathbb{R}$ é positivo, se existir uma sequência de Cauchy positiva, (x_n), tal que $s = [(x_n)]$.*

O próximo teorema mostra que o conceito de número real positivo é bem definido.

Teorema 4.9. *Sejam $s = [(x_n)], s' = [(x'_n)] \in \mathbb{R}$. Se (x_n) é uma sequência de Cauchy positiva tal que $[(x_n)] = [(x'_n)]$, então (x'_n) é positiva.*

Demonstração. Como (x_n) é positiva, existem $M, n_1 \in \mathbb{N}$ tais que $n > n_1 \Rightarrow x_n > \dfrac{1}{M}$.

Sendo $[(x_n)] = [(x'_n)]$, então $(x_n - x'_n) \to 0$. Daí, tomando $\omega = \dfrac{1}{2M} > 0$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_2 \Rightarrow |x_n - x'_n| < \omega$.

Considerando $n_0 = max\{n_1, n_2\}$, então, para $n > n_0$, temos

$$|x_n - x'_n| < \omega \Rightarrow |x'_n - x_n| < \omega \Rightarrow x_n - \omega < x'_n < x_n + \omega.$$

Sabendo que, $x_n > \dfrac{1}{M}$, $\omega = \dfrac{1}{2M}$ e utilizando $x_n - \omega < x'_n$, segue, para $n > n_0$, que

$$\frac{1}{M} - \frac{1}{2M} = \frac{1}{2M} < x'_n.$$

Comprovando, assim, que existem $k = 2M, n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $n > n_0 \Rightarrow x'_n > \dfrac{1}{K}$, ou seja, (x'_n) é uma sequência de Cauchy positiva. □

Teorema 4.10. *Considere o conjunto $P \subset \mathbb{R}$, onde para qualquer $s \in \mathbb{R}$, caso s seja positivo, então $s \in P$. O conjunto P faz de $\mathbb{R}$ um corpo ordenado.*

Demonstração. Dados $r = [(x_n)], s = [(y_n)] \in P$, então, existem $M, N, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ de forma que

$$n > n_1 \Rightarrow x_n > \frac{1}{M} \text{ e } n > n_2 \Rightarrow y_n > \frac{1}{N}.$$

Considerando $n_0 = max\{n_1, n_2\}$, segue, para $n > n_0$, que

$$x_n + y_n > \frac{1}{M} + \frac{1}{N} = \frac{N + M}{MN} > \frac{1}{MN},$$

e

$$x_n \cdot y_n > \frac{1}{M} \cdot \frac{1}{N} = \frac{1}{MN}.$$

Mostrando, assim, que existem $k = MN, n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $n > n_0$ implica em $(x_n + y_n) > \frac{1}{k}$ e $(x_n \cdot y_n) > \frac{1}{k}$. Dessa forma, $[(x_n + y_n)]$ e $[(x_n \cdot y_n)]$ são positivos.

Logo, a adição e a multiplicação são fechadas em P.

Agora, provaremos a tricotomia.

Seja (x_n) uma sequência de Cauchy, assim (x_n) pode convergir o não. Vejamos esses dois casos:

i) (x_n) converge para $r \in \mathbb{Q}$.

Pela tricotomia em $\mathbb{Q}$, temos que

$$\text{ou } r \text{ é positovo },\ \text{ ou } r \text{ é nulo },\ \text{ ou } -r \text{ é positivo.}$$

Como $r = [(x_n)] \in \mathbb{R}$, segue que

$$\text{ou } r = [(x_n)] \in P,\ \text{ ou } r = [(x_n)] = 0,\ \text{ ou } -r = [(-x_n)] \in P.$$

ii) (x_n) não converge.

Em particular, $[(x_n)] \neq 0$. Assim, pelo lema 4.1, existe $x_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_1 \Rightarrow x_n \neq 0$. Logo, pela tricotomia em $\mathbb{Q}$, para $n > n_1$, ou x_n é positivo, ou $-x_n$ é positivo.

Por outro lado, sabemos que (x_n) é de Cauchy, então, tomando $\omega > 0$ em $\mathbb{Q}$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_2 \Rightarrow |x_m - x_n| < \omega$.

Considerando $n_0 = max\{n_1, n_2\}$, para $m, n > n_0$, temos

$$|x_m - x_n| < \omega \Rightarrow |x_n - x_m| < \omega \Rightarrow x_n \in (x_m - \omega,\ x_m + \omega),$$

ou seja, estarão tão próximos quanto se queira. Como $x_n \neq 0$ é sempre possivel toma ω de forma que $0 \notin (x_m - \omega,\ x_m + \omega)$, logo,os termos x_n serão todos positivos, ou todos negativos. Portanto, ocorre que

$$\text{ou } [(x_n)] \in P \ \text{ ou } [(-x_n)] \in P.$$

Mostrando, para $s \in \mathbb{R}$, que

$$\text{ou } s \in P,\ \text{ ou } s = 0,\ \text{ ou } -s \in P.$$

□

O resultado deste teorema, nos permite definir em $\mathbb{R}$ a seguinte relação de ordem:

Definição 4.11. *Sejam $r, s \in \mathbb{R}$. Afirmaremos que r é maior do que s, o que será denotado por $r > s$, se, e somente se, $r - s \in P$.*

Tendo definido a relação $>$, podemos considerar, para $r, s \in \mathbb{R}$, que: r é menor do que s, denotado por $r < s$, se, e somente se, $s > r$; r é maior do que ou igual a s, denotado por $r \geq s$, se, e somente se, $r > s$ ou $r = s$; r é menor do que ou igual a s, denotado por $r \leq s$, se, e somente se, $s > r$ ou $r = s$.

Como $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado, então, de maneira natural, são válidas as seguintes propriedades de ordem, visto que, estas dependem somente da existência do conjunto de positivos P:

i) Transitividade: $r < s$ e $s < t \Rightarrow r < t$.

ii) Tricotomia: Somente uma das seguintes alternativas ocorre

$$\text{ou } r < s, \text{ ou } r = s, \text{ ou } r > s.$$

iii) Monotonicidade da adição: $r < s \Rightarrow r + t < s + t$.

iv) Monotonicidade da multiplicação:

$$\begin{aligned} r < s \text{ e } t > 0 \quad &\Rightarrow \quad r \cdot t < s \cdot t. \\ r < s \text{ e } t < 0 \quad &\Rightarrow \quad r \cdot t > s \cdot t. \end{aligned}$$

No próximo teorema, mostraremos que $\mathbb{R}$ é um corpo arquimediano.

Teorema 4.11. $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ *é ilimitado superiormente.*

Demonstração. Seja $r = [(x_n)] \in \mathbb{R}$, logo, (x_n) é uma sequência racional de Cauchy. Assim, (x_n) é limitada, ou seja, existe $M > 0$ em $\mathbb{Q}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$|x_n| \leq M.$$

Daí, segue que $-M \leq x_n \leq M$.

Considere $(y_n) = (M, M, M, \ldots)$. Da forma que foi tomada, a sequência constante (y_n) é de Cauchy. Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$y_n - x_n \geq 0,$$

o que indica $M - r \geq 0$. Dessa forma, $M \geq r$. Como $M > 0$ em $\mathbb{Q}$, existem $a, b \in \mathbb{N}$ tal que $M = \dfrac{a}{b} \leq a \leq a + 1$. Tomando $n = a + 1$, concluímos que $n > r$. Portanto, $\mathbb{N}$ é ilimitado superiormente em $\mathbb{R}$.

□

Observação. *Cada elemento $x \in \mathbb{Q}$ identifica-se em $\mathbb{R}$ como a classe $[(x_n)]$, onde $(x_n) = (x, x, x, \ldots)$ é a sequência constante de termos iguais a x. Assim, de modo natural temos $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.*

O teorema a seguir, mostra que $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$.

Teorema 4.12. *Sendo $r = [(x_n)] \in \mathbb{R}$ e $\omega > 0$ em $\mathbb{Q}$, existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $|r - q| < \omega$.*

Demonstração. Sabendo que (x_n) é de Cauchy, para $\omega > 0$ em $\mathbb{Q}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0$ implica que $|x_m - x_n| < \omega$. Considerando um natural $l > n_0$ fixo, é possivel tomar $q \in \mathbb{Q}$ de forma que $q = [(x_l, x_l, x_l, \ldots)]$. Daí, temos $r - q = [(x_n - x_l)]$ e $q - r = [(x_l - x_n)]$. Sendo $l > n_0$, para todo $n > n_0$, temos $x_n - x_l < \omega$ e $x_l - x_n < \omega$, logo, $r - q < \omega$ e $q - r < \omega$. Portanto, $|r - q| < \omega$. $\square$

Considere um subconjunto $S \subset \mathbb{R}$, com $S \neq \emptyset$. Seja M uma cota superior para S. Como $S \neq \emptyset$, existe algum elemento $s_1 \in S$.

Vamos contruir duas sequências de números reais (a saber: (u_n) e (l_n)).

- Seja $u_1 = M$ e $l_1 = s_1$;
- Supondo já definidos u_n e l_n. Considere $m_n = \dfrac{u_n + l_n}{2}$;
- Caso m_n seja uma cota superior para S, difina $u_{n+1} = m_n$ e $l_{n+1} = l_n$;
- Caso m_n não seja uma cota superior para S, defina $u_{n+1} = u_n$ e $l_{n+1} = m_n$;

Como $s_0 \leq M$, então, da maneira que foi definido $l_n \leq u_n$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$u_{n+1} = u_n,$$

ou

$$u_{n+1} = m_n = \frac{u_n + l_n}{2} \leq \frac{u_n + u_n}{2} = \frac{2u_n}{2} = u_n.$$

Logo, u_n é uma sequência não-crescente, ou seja, $u_{n+1} \leq u_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Temos, também, que

$$l_{n+1} = l_n,$$

ou

$$l_{n+1} = m_n = \frac{u_n + l_n}{2} \geq \frac{l_n + l_n}{2} = \frac{2l_n}{2} = l_n.$$

Portanto, (l_n) é uma sequência não-decrescente, isto é, $l_{n+1} \geq l_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Mostraremos agora, alguns resultados que serão utilizados para provar que $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo.

Lema 4.2. *(u_n) e (l_n), da forma que foram definidas anteriormente, são sequências de Cauchy de números reais.*

Demonstração. Perceba que $l_n \leq M \; \forall n \in \mathbb{N}$. E, do fato de (l_n) ser não-decrescente, segue que

$$l_1 \leq l_2 \leq l_3 \leq \ldots \leq l_n \leq \ldots \leq M.$$

Logo, l_1 é uma cota inferior e M é uma cota superior para (l_n). Assim, trata-se de uma sequência de Cauchy.

Agora, note que $u_n \geq s_1 \; \forall n \in \mathbb{N}$. Por (u_n) ser não-crecente, temos que

$$M = u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \ldots \geq u_n \geq \ldots \geq s_1.$$

Assim, para todo $n \in \mathbb{N}$ temos $u_n \in [s_1, M]$. Logo, (u_n) é limitada, portanto é de Cauchy. □

Lema 4.3. *Seja a sequência u_n definida anteriormente, existe $u \in \mathbb{R}$ tal que $u_n \to u$.*

Demonstração. Considere um termo u_n da sequência (u_n), de acordo com o Teorema 4.12, existe $q_n \in \mathbb{Q}$ tal que $|u_n - q_n| < \dfrac{\omega}{3}$.

Seja a sequência $(q_1, q_2, q_3, \ldots)$ de números racionais, vamos mostrar que esta é uma sequência de Cauchy. Tomando $\omega > o$, pela propriedade arquimediana, existe $n \in \mathbb{N}$ de forma que $\dfrac{1}{N} < \dfrac{\omega}{3}$. Por (u_n) ser de Cauchy, então, existem $n, m \in \mathbb{N}$ tal que $n, m > M \Rightarrow |u_n - u_m| < \dfrac{\omega}{3}$. Assim, desde que $m, n > max\{M, N\}$, segue que

$$\begin{aligned}
|q_n - q_m| &= |(q_n - u_n) + (u_n - u_m) + (u_m - q_m)| \\
&\leq |q_n - u_n| + |u_n - u_m| + |u_m - q_n| \\
&< \frac{\omega}{3} + \frac{\omega}{3} + \frac{\omega}{3} = \omega.
\end{aligned}$$

Mostrando assim, que (q_n) é uma sequência racional de Cauchy, logo, temos $u = [(q_n)] \in \mathbb{R}$.

Para mostrar que $(u_n - u) \to 0$, considere um número real $q'_n = [(q_n, q_n, q_n, \ldots)]$, assim $q'_n - u \to 0$. Mas, $u_n - q'_n < \dfrac{1}{n}$ por construção. Logo, se $q'_n \to u$ e $u_n - q'_n \to 0$, então $u_n \to u$. □

Lema 4.4. *Seja a sequência (l_n) definida anteriormente, temos que $l_n \to u$.*

Demonstração. Da forma que (u_n) e (l_n) foram construidas temos:

- Se m_n é uma cota superior para S

$$u_{n+1} - l_{n+1} = m_n - l_n = \frac{u_n + l_n}{2} - l_n = \frac{u_n - l_n}{2}.$$

- Se m_n não é uma cota superior para S

$$u_{n+1} - l_{n+1} = u_n - m_n = u_n - \frac{u_n + l_n}{2} = \frac{u_n - l_n}{2}.$$

O que significa que $u_1 - l_1 = \dfrac{1}{2}(M-s)$, e então $u_2 - l_2 = \dfrac{1}{2}(u_1 - l_1) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2(M-s)$, e, é possível provar por indução que $u_n - l_n = 2^{-n}(M-s)$. Desde que $M > s$, temos $M - s > 0$ e, desde que $2^{-n} < \dfrac{1}{n}$, pela propriedade arquimediana para $\mathbb{R}$, teremos, para $\omega > 0$, que $2^{-n}(M-s) < \omega$. Logo, $u_n - l_n < 2^{-n}(M-s) < \omega$, então, $u_n - l_n \to 0$. Portanto, desde que $u_n \to u$, teremos também $l_n \to u$. □

Teorema 4.13. *Todo subconjunto não vazio S de $\mathbb{R}$ que seja limitado superiormente possui a propriedade da menor cota superior.*

Demonstração. Inicialmente, vamos mostrar que u é uma cota superior. Por absurdo, suponha que u não seja uma cota superior. Logo, $u < s$, para algum $s \in S$. Daí, $s - u = \omega > 0$ e, desde que $u_n \to u$, e sendo (u_n) não-decrescente, deve existir um $n \in \mathbb{N}$ tal que $u_n - u < \omega$, o que implica que $u_n < u + \omega = u + (s-u) = s$. Porém, u_n é uma cota superior para S, gerando uma cotradição. Portanto, u é uma cota superior para S.

Temos que, para todo $n \in \mathbb{N}, l_n$ não é cota superior, implicando que para todo n existe $s_n \in S$ tal que $l_n \leq s_n$. Pelo lema 4.4, $l_n \to u$, do fato de (l_n) ser não-decrescente, temos que, tomando $\omega > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ se tenha $l_n > u - \omega$. Assim, para $n > n_0$ tem $s_n \geq l_n > u - \omega$, em particular, tomando $\omega > 0$, existe $s \in S$ tal que $s > u - \omega$. O que comprova que nenhum número menor do que u pode ser uma cota superior para o conjunto S. Portanto, u é a menor cota superior para S. □

Concluímos assim, que o conjunto $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo.

Capítulo 5

Desigualdades em $\mathbb{R}$

Este capítulo será dedicado a apresentação de algumas desigualdades entre números reais. Para isso, esperamos que o leitor esteja familiarizado com operações e propriedades dos conjuntos numéricos construídos nos capítulos anteriores, visto que aqui as utilizaremos de modo natural. Para mais detalhes veja [3, 5, 6, 14, 15, 17, 20, 22].

5.1 Desigualdade entre as médias Aritmética e Geométrica

Proposição 5.1. *Sendo $a \in \mathbb{R}$, segue que $a^2 \geq 0$, com igualdade ocorrendo apenas quando $a = 0$. De forma mais ampla, sendo $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, temos que $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geq 0$, ocorrendo a igualdade se, e somente se, $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$.*

Demonstração. Dado $a \in \mathbb{R}$, segue da tricotomia que somente um dos seguintes casos acontece: ou $a < 0$, ou $a = 0$, ou $a > 0$. No primeiro caso, como $a < 0$ segue, da monotonicidade da multiplicação de números reais, que $a \cdot a = a^2 > 0 \cdot a = 0$. No segundo caso, temos de imediato que $a = 0 \Rightarrow a^2 = 0$. Por fim, no último caso, sendo $a > 0$ segue, novamente da monotonicidade, que $a \cdot a = a^2 > 0 \cdot a = 0$. Logo, para todo $a \in \mathbb{R}$, temos que $a^2 \geq 0$, ocorrendo a igualdade se, e somente se, $a = 0$.

Vamos utilizar indução em n para mostrar o caso geral. Vimos anteriormente que a propriedade é verdadeira para $n = 1$.

Suponha que a propriedade seja válida para certo n, ou seja,

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geq 0,$$

ocorrendo a igualdade se, e somente se, $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$.

Vejamos que a propriedade também é verdadeira para $n + 1$. De fato, pois $a_{n+1}^2 \geq 0$

para todo $a_{n+1} \in \mathbb{R}$, ocorrendo a igualdade se, e somente se, $a_{n+1} = 0$. Assim,

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 + a_{n+1}^2 \geq 0,$$

com igualdade ocorrendo se, e somente se, $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a_{n+1} = 0$.

Portanto, pelo princípio de indução, a propriedade é válida para qualquer $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Observação. *Sendo $a, b \in \mathbb{R}$, temos que $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Pela Proposição 5.1, segue que $(a-b)^2 \geq 0$, ou seja, $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$. Assim,*

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab,$$

com a igualdade ocorrendo quando $a = b$.

Em particular, sendo a, b, x, y reais positivos tais que $a = \sqrt{x}$ e $b = \sqrt{y}$, segue que

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy},$$

ocorrendo a igualdade se, e somente se, $x = y$.

Exemplo 5.1. *Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, vamos mostrar que $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$, de forma que a igualdade ocorre se, e somente se, $a = b = c$.*

Demonstração. Sabendo que $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, podemos reescrever a desigualdade da seguinte forma

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0.$$

Perceba que a desigualdade é sempre verdadeira. Por outro lado, temos que a igualdade ocorre se, e somente se, $a - b = b - c = c - a = 0$, ou seja, quando tivermos $a = b = c$. $\square$

O próximo exemplo pode ser visto com maiores detalhes em [3].

Exemplo 5.2. *(Olimpíada Nórdica) Vamos determinar todos os x, y, z reais maiores que 1 tais que*

$$x + y + z + \frac{3}{x-1} + \frac{3}{y-1} + \frac{3}{z-1} = 2(\sqrt{x+2} + \sqrt{y+2} + \sqrt{z+2}).$$

Solução:

Podemos escrever

$$x + \frac{3}{x-1} = (x-1) + (1 + \frac{3}{x-1}) \geq 2\sqrt{(x-1) \cdot \left(\frac{x+2}{x-1}\right)} = 2\sqrt{x+2} \tag{5.1}$$

ou, de forma simplificada,

$$x + \frac{3}{x-1} \geq 2\sqrt{x+2} \tag{5.2}$$

De modo análogo, temos que

$$y + \frac{3}{y-1} \geq 2\sqrt{y+2} \tag{5.3}$$

e que

$$z + \frac{3}{z-1} \geq 2\sqrt{z+2} \tag{5.4}$$

Somando as desigualdades 5.2, 5.3 e 5.4, temos que

$$x + y + z + \frac{3}{x-1} + \frac{3}{y-1} + \frac{3}{z-1} \geq 2(\sqrt{x+2} + \sqrt{y+2} + \sqrt{z+2}) \tag{5.5}$$

Sabendo que a igualdade ocorre em 5.5, então deve ocorrer também em 5.2, 5.3 e 5.4. Perceba que, para a igualdade ocorrer em 5.2 também deve ocorre em 5.1, ou seja, teremos

$$(x-1) + \frac{x+2}{x-1} = 2\sqrt{(x-1) \cdot \left(\frac{x+2}{x-1}\right)}$$

o que implica em

$$x - 1 = \frac{x+2}{x-1}.$$

Assim, temos que $x^2 - 3x - 1 = 0$. Do fato de $x > 1$, segue que $x = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$. De forma análoga, resulta que $y = z = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$.

Definição 5.1. *Dados os números reais positivios $a_1, a_2, \ldots a_n$, a Média Aritmética (MA) e a Média Geométrica (MG) destes números são definidas, respectivamente, por*

$$MA = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \;\; e \;\; MG = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

Lema 5.1. *Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reais positivos tais que $M = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$, então*

$$M = \sqrt[n+r]{a_1 a_2 \ldots a_n \underbrace{MM \ldots M}_{r\ vezes}} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \overbrace{M + M + \ldots + M}^{r\ vezes}}{n+r}.$$

Demonstração. Sendo $M = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$, segue que

$$M^n = a_1 a_2 \ldots a_n \;\text{ e }\; n \cdot M = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}
\sqrt[n+r]{a_1a_2\ldots a_nM^r} &= \sqrt[n+r]{M^nM^r} = \sqrt[n+r]{M^{n+r}} = M = \frac{(n+r)}{n+r}M \\
&= \frac{nM+rM}{n+r} = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n+rM}{n+r}
\end{aligned}$$

O que mostra a validade do lema. □

No teorema a seguir, vamos mostrar a desigualdade entre as Médias Aritmética e Geométrica. O leitor que desejar encontrar mais detalhes sobre a demonstração que segue ou ver outras formas de se fazer pode consultar [3, 17, 20], por exemplo.

Teorema 5.1. *Sendo $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reais positivos, com $n \geq 2$, segue que $MA \geq MG$, ou seja,*

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n},$$

ocorrendo a igualdade se, e somente se, $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Demonstração. Utilizaremos indução sobre n para demonstrar o teorema. Assim, visando percorrer todos os números naturais e completar a indução, procederemos da seguinte forma: iniciaremos mostrando que se o teorema é valido para quaisquer n reais positivos, isso implica que também é válido para $2n$ reais positivos. Em seguida, mostraremos que sendo válido para quaisquer n reais positivos, implica que também é válido para $n-1$ rais positivos. Por fim, mostraremos que a igualdade ocorre se, e somente se, todos os termos forem iguais.

Já provamos anteriormente que $\frac{a_1+a_2}{2} \geq \sqrt{a_1a_2}$, ocorrendo igualdade se, e somente se, $a_1 = a_2$. Assim, o teorema é válido para $n = 2$.

Supondo que seja verdadeiro para certo n, ou seja,

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$$

vamos mostrar que também é válido para $2n$.

Perceba que,

$$\begin{aligned}
\frac{(a_1+\ldots+a_n)+(a_{n+1}+\ldots+2_n)}{2n} &= \frac{\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}+\frac{a_{n+1}+\ldots+a_{2n}}{n}}{2} \\
&\geq \frac{\sqrt[n]{a_1\ldots a_n}+\sqrt[n]{a_{n+1}\ldots a_{2n}}}{2} \\
&\geq \sqrt{\sqrt[n]{a_1\ldots a_n}\sqrt[n]{a_{n+1}\ldots a_{2n}}}
\end{aligned}$$

Como $\sqrt{\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}\sqrt[n]{a_{n+1} \ldots a_{2n}}} = \sqrt[2n]{a_1 \ldots a_n a_{n+1} \ldots a_{2n}}$, temos que

$$\frac{(a_1 \ldots + a_n) + (a_{n+1} + \ldots + 2_n)}{2n} \geq \sqrt[2n]{a_1 \ldots a_n a_{n+1} \ldots a_{2n}}.$$

Mostraremos agora, que se o teorema vale para certo natural n também será válido para $n-1$. Para isso, vamos considerar os $n-1$ reais positivos $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ e definiremos $a_n = \dfrac{a_1 + \ldots + a_{n-1}}{n-1}$. Assim,

$$a_n = \frac{a_1 + \ldots + a_{n-1}}{n-1} = \frac{a_1 + \ldots + a_{n-1} + a_n}{n}.$$

Como, por hipótese, o teorema é válido para certo n, segue que

$$a_n = \frac{a_1 + \ldots + a_{n-1} + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}.$$

Simplificando, temos $a_n \geq \sqrt[n-1]{a_1 \ldots a_{n-1}}$. Dessa forma, pela definição de a_n, resulta que

$$\frac{a_1 + \ldots + a_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n-1]{a_1 \ldots a_{n-1}},$$

ou seja, o teorema também vale para $n-1$.

Agora, suponhamos que se $MA = MG$ para certa quantidade n de termos, ou seja,

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

então $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Vejamos que também ocorrerá para $2n$. De fato, seja

$$a_1 + \ldots + a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{2n} = \frac{1}{2}\left(\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} + \frac{a_{n+1} + \ldots + a_{2n}}{n}\right)$$

Sabemos que

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \text{ e } \frac{a_{n+1} + \ldots + a_{2n}}{n} \geq \sqrt[n]{a_{n+1} \ldots a_{2n}}$$

Segue da hipótese de indução, que se a igualdade ocorre, ou seja,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} + \frac{a_{n+1} + \ldots + a_{2n}}{n}\right) = \frac{\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} + \sqrt[n]{a_{n+1} \ldots a_{2n}}}{2}$$

então,

$$a_1 = \ldots = a_n \text{ e } a_{n+1} = \ldots = a_{2_n} \tag{5.6}$$

Da validade de $n = 2$, temos que

$$\frac{\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} + \sqrt[n]{a_{n+1} \ldots a_{2n}}}{2} = \sqrt[2n]{a_1 \ldots a_n a_{n+1} \ldots a_{2n}}$$

de forma que

$$\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} = \sqrt[n]{a_{n+1} \ldots a_{2n}} \tag{5.7}$$

Assim, segue de (5.6) e (5.7) que

$$a_1 = \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} = \sqrt[n]{a_{n+1} \ldots a_{2n}} = a_{2n},$$

isto é, $a_1 = \ldots = a_n = a_{n+1} = \ldots = a_{2n}$.

Seja agora, uma lista de n reais positivos, de forma que $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. Assim,

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \frac{na_1}{n} = a_1 = \sqrt[n]{a_1^n} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

Provando assim, a validade do teorema. □

No exemplo que segue, veremos como podemos utilizar a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica. Mais detalhes e outros interessantes problemas podem ser vistos em [3, 5, 6].

Exemplo 5.3. *Sendo a, b, c reais positivos tais que $a + b + c = 1$, vamos mostrar que*

$$P = \left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right) \geq 64.$$

Solução:

Ao desenvolver o lado esquerdo da desigualdade, temos que

$$P = 1 + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) + \frac{1}{abc} \tag{5.8}$$

Do fato de termos $MA \geq MG$, resulta que

$$\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{1}{abc}}$$

Considerando $\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} = q$, segue que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3q$. Dessa forma, teremos também

$$\frac{\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{1}{a^2b^2c^2}} \Rightarrow \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq 3q^2,$$

e que $\dfrac{1}{abc} = q^3$. Assim, podemos escrever 5.8 como

$$P \geq 1 + 3q + 3q^2 + q^3 = (1+q)^3.$$

Sabendo que $a+b+c=1$, segue que

$$\frac{1}{3} = \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} = \frac{1}{q}.$$

Logo, concluímos que $q \geq 3$, ou seja, $P \geq (1+3)^3 = 64$.

Outro exemplo do uso da desigualdade entre as médias aritmética e geométrica é visto a seguir. Mais detalhes podem ser encontrados em [18].

Exemplo 5.4. *(Olimpíada Internacional de Matemática - 2012) Seja $n \geq 3$ um inteiro e sejam $a_2, a_3, \ldots, a_n$ números reais positivos tais que $a_2 a_3 \ldots a_n = 1$. Prove que*

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3 \ldots (1+a_n)^n > n^n.$$

Demonstração. Primeiramente, considere a lista de números reais positivos $\{1, a_2\}$. Aplicando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, temos

$$\frac{1+a_2}{2} \geq \sqrt{1 \cdot a_2}.$$

Elevando ao quadrado ambos os membros da desigualdade, segue que

$$(1+a_2)^2 \geq 2^2 \cdot a_2,$$

ocorrendo a igualdade se, e somente se, $a_2 = 1$.

Agora, seja a lista de números reais positivos $\left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, a_3\right\}$. Aplicando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, temos

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+a_3}{3} = \frac{2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)+a_3}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot a_3} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot a_3}.$$

Elevando os dois lados da desigualdade ao cubo, temos

$$(1+a_3)^3 = \left(2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)+a_3\right)^3 \geq 3^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot a_3,$$

com igualdade ocorrendo se, e somente se, $a_3 = \dfrac{1}{2}$.

De modo geral, considere a lista de k números reais positivos, sendo estes $(k-1)$

números iguais a $\dfrac{1}{k-1}$ e a_k, isto é,

$$\left\{\underbrace{\frac{1}{k-1}, \frac{1}{k-1} \cdots \frac{1}{k-1}}_{\text{(k - 1) vezes}}, a_k\right\}.$$

Utilizando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, temos

$$\frac{\dfrac{1}{k-1} + \dfrac{1}{k-1} + \ldots + \dfrac{1}{k-1} + a_k}{k} = \frac{(k-1) \cdot \left(\dfrac{1}{k-1}\right) + a_k}{k} \geq \sqrt[k]{\left(\frac{1}{k-1}\right)^{(k-1)} \cdot a_k}.$$

Elevando a k-ésima potência ambos os lados da desigualdade, resulta que

$$(1 + a_k)^k \geq k^k \cdot \left(\frac{1}{k-1}\right)^{(k-1)} \cdot a_k,$$

ocorrendo a igualdade se, e somente se, $a_k = \dfrac{1}{k-1}$.

Sabendo que k está variando de 2 até n, multiplicando os termos da desigualdade anterior, temos

$$\prod_{2}^{n} (1 + a_k)^k \geq \prod_{2}^{n} k^k \cdot \left(\frac{1}{k-1}\right)^{(k-1)} \cdot a_k$$

Tomando parte do produto do lado direirto da desigualdade, perceba que quase todos os termos se cancelam, ou seja,

$$\prod_{2}^{n} k^k \cdot \left(\frac{1}{k-1}\right)^{(k-1)} = 2^2 \cdot 3^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \ldots (n-1)^{(n-1)} \cdot \left(\frac{1}{n-2}\right)^{(n-2)} \cdot n^n \cdot \left(\frac{1}{n-1}\right)^{(n-1)} = n^n$$

Assim, segue que

$$\prod_{2}^{n} (1 + a_k)^k \geq n^n \cdot a_2 \cdot a_3 \ldots a_n.$$

Como, de acordo o enunciado, $a_2 \cdot a_3 \ldots a_n = 1$, temos que

$$\prod_{2}^{n} (1 + a_k)^k \geq n^n.$$

Para que ocorra a igualdade, devemos ter $a_k = \dfrac{1}{k-1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que $2 \leq k \leq n$. Mas, como $n \geq 3$, então

$$a_2 \cdot a_3 \ldots a_n = 1 \cdot \frac{1}{2} \ldots \frac{1}{n} \neq 1.$$

Portanto, a igualdade nunca vai ocorrer, o que comprova que a desigualdade é extrita, ou seja,

$$\prod_{2}^{n}(1+a_k)^k = (1+a_2)^2(1+a_3)^3\dots(1+a_n)^n > n^n.$$

□

5.2 Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Proposição 5.2. *Seja a função do segundo grau $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a > 0$. Sendo $\Delta = b^2 - 4ac$, então $f(x) \geq 0$, para qualquer real x se, e somente se, $\Delta \leq 0$. Caso se tenha $\Delta = 0$, então irá existir um único real λ tal que $f(\lambda) = 0$.*

Demonstração. Sendo a função do segundo grau $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a > 0$, temos

$$\begin{aligned}
f(x) &= ax^2 + bx + c \\
&= a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2}\right) - a\left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}
\end{aligned}$$

Note que, teremos $f(x) \geq 0$, para qualquer real x se, e somente se, $-\dfrac{\Delta}{4a} \geq 0$, ou seja, $\Delta \leq 0$.

Quando ocorrer $\Delta = 0$, teremos $f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$. Assim, irá existir um único real λ tal que $f(\lambda) = 0$, pois

$$a\left(\lambda + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda + \frac{b}{2a} = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda = -\frac{b}{2a}$$

□

Teorema 5.2. *Sejam $n > 1$ natural e $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ números reais dados. Então*

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}$$

ocorrendo a igualdade se, e somente se, os a_i e os b_i forem proporcionais, isto é, se, e somente se, existir um real não nulo λ tal que $b_i = \lambda a_i$, para todo i.

Demonstração. Seja a função do segundo grau

$$f(x) = (a_1x - b_1)^2 + (a_2x - b_2)^2 + \ldots + (a_nx - b_n)^2$$

que também pode ser escrita como

$$f(x) = (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)x^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)x + (b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)$$

Perceba que para todo real x teremos $f(x) \geq 0$, pois f se escreve como a soma de quadrados. Assim, temos que $\Delta \leq 0$, ou seja,

$$4(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 - 4(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) \leq 0$$

o que equivale a

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2).$$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os membros da desigualdade, obtemos

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}$$

A igualdade irá ocorrer quando se tiver $\Delta = 0$, o que indica que existe um único real λ tal que

$$(a_1\lambda - b_1)^2 + (a_2\lambda - b_2)^2 + \ldots + (a_n\lambda - b_n)^2 = 0$$

Logo, teremos que $b_i = \lambda a_i$, para todo i. Por outro lado, é evidente que caso os a_i e os b_i sejam proporcionais a igualdade ocorre. $\square$

Exemplo 5.5. *Sejam a, b, c reais positivos, vamos mostrar que*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{a}{b+c} + 1 + \frac{b}{c+a} + 1 + \frac{c}{a+b} + 1 \geq \frac{3}{2} + 3 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{c+a} + \frac{a+b+c}{a+b} \geq \frac{9}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad (a+b+c)\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) \geq \frac{9}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad ((a+b) + (b+c) + (c+a))\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) \geq 9
\end{aligned}$$

Fazendo $x = \sqrt{a+b}, y = \sqrt{b+c}$ e $z = \sqrt{c+a}$, segue que

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad (x^2+y^2+z^2)\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right) \geq 9$$

Para garantir a veracidade da desigualdade, vamos aplicar aos números reais positivos $x, y, z, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ a desigualdade de Cauchy. Assim, temos que

$$\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}\sqrt{\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right)} \geq \left| x \cdot \left(\frac{1}{x}\right) + y \cdot \left(\frac{1}{y}\right) + z \cdot \left(\frac{1}{z}\right) \right|$$

Elevando ambos os lados da desigualdade ao quadrado, resulta que

$$(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right) \geq (1+1+1)^2 = 9$$

$\square$

5.3 Desigualdade de Bernoulli

Teorema 5.3. *Dados n natural e $x > -1$ real, temos*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx,$$

com igualdade para $n > 1$ ocorrendo se, e somente se, $x = 0$.

Demonstração. Utilizaremos indução sobre n. Perceba que $(1+x)^1$ e $1 + 1 \cdot x$ são ambos iguais a $1 + x$, logo a desigualdade é verdadeira para $n = 1$.

Supondo que a desigualdade seja válida para certo natural n, ou seja, que tenhamos

$$(1+x)^n \geq 1 + nx,$$

vamos verificar que também é válida para $n + 1$. De fato, pois como $1 + x > 0$, temos

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = 1 + (n+1)x + nx^2,$$

como $nx^2 \geq 0$, segue que $1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$. Assim, concluímos, pela transitividade dos números reais, que

$$(1+x)^n \geq 1 + nx,$$

ocorrendo a igualdade para $n > 1$ se, e somente se, $(1+x)^n = 1 + nx$ e $nx^2 = 0$, isto é, se, e somente se, $x = 0$. $\square$

No exemplo a seguir, mostramos como a desigualdade de Bernoulli pode ser utilizada. Para mais detalhes veja [20].

Exemplo 5.6. *Sejam n natural e a e b reais positivos, vamos mostrar que*

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^n+\left(1+\frac{b}{a}\right)^n \geq 2^{n+1},$$

com igualdade ocorrendo se, e somente se, $a=b$.

Demonstração. Ao dividir os dois membros da desigualdade do enunciado por 2^n, obtemos

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{a}{2b}\right)^n+\left(\frac{1}{2}+\frac{b}{2a}\right)^n \geq 2.$$

Dessa forma, nosso objetivo se resume em mostrar que

$$\left(1-\frac{1}{2}+\frac{a}{2b}\right)^n+\left(1-\frac{1}{2}+\frac{b}{2a}\right)^n \geq 2.$$

Perceba que, $-\frac{1}{2}+\frac{a}{2b}>-1$ e $1-\frac{1}{2}+\frac{b}{2a}>-1$. Assim, aplicando a desigualdade de Bernoulli as expressões $\left(1-\frac{1}{2}+\frac{a}{2b}\right)^n$ e $\left(1-\frac{1}{2}+\frac{b}{2a}\right)^n$, temos que

$$\left(1-\frac{1}{2}+\frac{a}{2b}\right)^n \geq 1+n\left(-\frac{1}{2}+\frac{a}{2b}\right) \quad \text{e} \quad \left(1-\frac{1}{2}+\frac{b}{2a}\right)^n \geq 1+n\left(-\frac{1}{2}+\frac{b}{2a}\right).$$

Somando as duas desigualdades, temos

$$\left(1-\frac{1}{2}+\frac{a}{2b}\right)^n+\left(1-\frac{1}{2}+\frac{b}{2a}\right)^n \geq 2+n\left(\frac{a}{2b}+\frac{b}{2a}-1\right).$$

Utilizando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, temos que $n\left(\frac{a}{2b}+\frac{b}{2a}-1\right) \geq 0$, pois

$$\frac{a}{2b}+\frac{b}{2a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{2b}\cdot\frac{b}{2a}}-1=0,$$

ocorrendo se, e somente se, $\frac{a}{2b}=\frac{b}{2a}$, isto é, se, e somente se, $a=b$. □

Exemplo 5.7. *Seja $a_1, a_2, a_3, \ldots$ uma sequência infinita e arbitrária de números positivos. Mostre que a desigualdade*

$$1+a_n>a_{(n-1)}\cdot\sqrt[n]{2}$$

é válida para um número infinito de inteiros positivos n.

Demonstração. Seja a desigualdade de Bernoulli

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \text{ com } x>-1 \text{ e } n \in \mathbb{N}.$$

Se tomarmos $x = \dfrac{1}{n}$, resulta que

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2.$$

Sabendo que os dois membros da desigualdade são positivos, temos

$$1 + \frac{1}{n} \geq \sqrt[n]{2}.$$

Sendo $a(n-1) > 0$ para todo $(n-1) \in \mathbb{N}$, segue que

$$a_{(n-1)}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq a_{(n-1)} \cdot \sqrt[n]{2}.$$

Agora, vamos verificar se

$$1 + a_n > a_{(n-1)} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

para um número infinito de inteiros positivos n.

Supondo, por absurdo, que o número de termos que satisfaz a desigualdade anterior seja finito, ou seja, que exista $k \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq k$, vale

$$1 + a_n \leq a_{(n-1)} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Dividindo ambos as membros da desigualdade por $n+1$, segue que

$$\frac{1}{n+1} + \frac{a_n}{n+1} \leq a_{(n-1)} \cdot \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n+1} = \frac{a_{(n-1)}}{n}.$$

Somando as desigualdades quando n varia de k até certo $m \in \mathbb{N}$, com $m > k$, temos

$$\sum_{n=k}^{m} \frac{1}{n+1} + \sum_{n=k}^{m} \frac{a_n}{n+1} \leq \sum_{n=k}^{m} \frac{a_{n-1}}{n}.$$

Perceba que ao desenvolver os somatórios muitos termos irão se cancelar

$$\sum_{n=k}^{m} \frac{1}{n+1} + \frac{a_k}{k+1} + \ldots + \frac{a_{m-1}}{a_m} + \frac{a_m}{a_{m+1}} \leq \frac{a_{k-1}}{k} + \frac{a_k}{a_{k+1}} + \ldots + \frac{a_{m-1}}{m}.$$

Restando somente que

$$\sum_{n=k}^{m} \frac{1}{n+1} + \frac{a_m}{a_{m+1}} \leq \frac{a_{k-1}}{k},$$

isto é,

$$\frac{a_m}{a_{m+1}} \leq \frac{a_{k-1}}{k} - \sum_{n=k}^{m} \frac{1}{n+1}.$$

Note que, $\dfrac{1}{n+1}$ gera uma sequência de termos positivos. Assim, sua soma deverá crescer ilimitadamente. Dessa forma, deve existir um valor de m a partir do qual $\dfrac{a_m}{m+1} < 0$. E isto gera um absurdo, pois $a_m > 0$ e $m > 0$.

Portanto, concluímos que

$$1 + a_n > a_{(n-1)} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq a_{(n-1)} \cdot \sqrt[n]{2},$$

é válido para um número infinito de inteiros positivos. Ou simplesmente, por transitividade, que

$$1 + a_n > a_{(n-1)} \cdot \sqrt[n]{2}.$$

$\square$

Capítulo 6

Considerações Finais

Este trabalho tem o objetivo de apresentar uma formalização dos conjuntos numéricos e algumas aplicações destes conjuntos na resolução de problemas matemáticos. Assim, partindo dos números naturais e utilizando uma relação de equivalência foi construído o conjunto dos números inteiros. Também por meio de uma relação de equivalência, a partir dos inteiros foi construído o conjunto dos números racionais. Ao definir nos racionais o conceito de sequências de Cauchy foi possível construir o conjunto dos números reais. Em seguida, foram apresentadas três desigualdades entre números reais, e diversos problemas cuja solução abrange os conceitos anteriormente vistos.

Um conhecimento formalizado em bases sólidas permite ao leitor maior propriedade sobre o conteúdo em questão. Assim, acreditamos que este trabalho servirá como material de consulta e aprofundamento para estudantes da educação básica, em especial do ensino médio, que desejarem aprimorar o conhecimento a respeito dos números reais vistos em sua rotina escolar, muitas vezes de forma superficial e intuitiva.

Bibliografia

[1] AGUILAR, I.; DIAS, M. S. **A Construção dos Números Reais e suas Extensões**, apresentado no 4º Colóquio da Região Centro-Oeste em Novembro de 2015.

[2] ÁVILA, G. **Análise Matemática para Licenciatura**, 3ª edição. São Paulo: Blucher, 2011.

[3] Campos, O. **Desigualdades**. Salvador, 2001. Disponível em: https://www.obm.org.br/content/uploads/2018/01/desigualdades.pdf. Acesso em: 18/12/2021.

[4] COUTINHO, S. C. **Números Inteiros e Criptogradia RSA**, 2ª edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

[5] DESIGUALDADES. **POTI (Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo)**. Disponível em: https://poti.impa.br/index.php/site/material?MaterialTeorico. Acesso em: 20/12/2021.

[6] DJUKIC, D. et al.; **The IMO Compendium** - A Collection of Problems Suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959-2004. Springer, 2006. Disponível em: https://nagyzoli.web.elte.hu/compendium.pdf. Acesso em: 10/01/2022.

[7] DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. **Álgebra Moderna**, 5ª edição. São Paulo: Saraiva, 2018.

[8] EVES, H. **Introdução à História da Matemática**, tradução Hygino H. Domingues, 5ª edição. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

[9] FERREIRA, J. **A construção dos números**, 3ª edição. Coleção Textos Universitários, Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

[10] GONÇALVES, A. **Introdução à Álgebra**, 6ª edição. Projeto Euclides, Rio de Janeiro: SBM, 2017.

[11] GUNDLACH, B. H. **História dos Números e Numerais**, tradução Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.

[12] HALMOS, P. R. **Teoria Ingênua dos Conjuntos**, tradução Irineu Bicudo. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo e Editora Polígono, 1970.

[13] HEFEZ, A. **Aritmética**. Coleção PROFMAT, Rio de Janeiro: SBM, 2016.

[14] LIMA, E. L. **Análise Real**, vol. 1, 12ª edição. Coleção Matemática Universitária, Rio de Janeiro: IMPA, 2017.

[15] LIMA, E. L. **Curso de Análise**, vol. 1, 15ª edição. Projeto Euclides, Rio de Janeiro: IMPA, 2019.

[16] LIMA, E. L. **Números e Funções Reais**, 1ª edição. Coleção PROFMAT, Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[17] LIMA, E. L. **Meu Professor de Matemática e outras histórias**, 6ª edição. Coleção Professor de Matemática, Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[18] LINARES, J. L.; ALFONSO, A. B.; BARBOSA, G. F. **Três problemas sobre desigualdades na Olimpíada Internacional de Matemática**. Revista Eletronica Paulista de Matemática, 2020. Disponível em: https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd2228/v18a07-tres-problemas-sobre-desigualdades-na-olimpiada.pdf. Acesso em: 10/01/2022.

[19] MILIES, F. C. P.; COELHO, S. P. **Números: uma Introdução à Matemática**, 3ª edição. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2001.

[20] MUNIZ NETO, A. C. **Tópicos de Matemática Elementar: números reais**, 2ª edição. Coleção Professor de Matemática, Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[21] NIVEN, I. **Números: racionais e irracionais**, tradução de Renate Watanabe. Coleção Iniciação Científica, Rio de Janeiro: SBM, 1990.

[22] PROBLEMAS. **Olímpiada Internacional de Matemática**. Disponível em: http://www.imo-official.org/problems.aspx. Acesso em: 10/01/2022.

[23] SILVA, J. C.; Gomes, O. R. **Estruturas Algébricas para Licenciatura: Elementos de Álgebra Moderna**, volume 3. São Paulo: Blucher, 2020.