



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL**

FRANCISCO BRUNO GOMES

**FUNÇÃO AFIM, QUADRÁTICA, EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA NOS LIVROS
DIDÁTICOS: UMA ANÁLISE À LUZ DA TEORIA DE REPRESENTAÇÕES
SEMIÓTICAS**

FORTALEZA

2022

FRANCISCO BRUNO GOMES

FUNÇÃO AFIM, QUADRÁTICA, EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA NOS LIVROS
DIDÁTICOS: UMA ANÁLISE À LUZ DA TEORIA DE REPRESENTAÇÕES
SEMIÓTICAS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo

FORTALEZA

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

G614f Gomes, Francisco Bruno.

Função afim, quadrática, exponencial e logarítmica nos livros didáticos : uma análise à luz da teoria de representações semióticas / Francisco Bruno Gomes. – 2021.

60 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2021.

Orientação: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

1. Funções (Matemática) - Estudo e ensino. 2. Matemática - Semiótica. I. Título.

CDD 510

FRANCISCO BRUNO GOMES

FUNÇÃO AFIM, QUADRÁTICA, EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA NOS LIVROS
DIDÁTICOS: UMA ANÁLISE À LUZ DA TEORIA DE REPRESENTAÇÕES
SEMIÓTICAS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Educação Matemática.

Aprovada em 12/08/2022

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Carlos Augusto David Ribeiro
Universidade Federal do Delta do Parnaíba (UFDPAr)

A **Deus**, por sempre colocar as pessoas certas em minha vida e dentre essas, minha esposa (Laiara Figueiredo Araruna) e minha mãe (Eulina Gomes Barroso).

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, criador dos céus e da terra, pelo seu amor e cuidado para comigo, mesmo eu sendo um pobre pecador e indigno de tamanha graça.

A minha esposa (**LAIARA FIGUEIREDO ARARUNA**) por sempre apoiar-me e por compartilhar seus momentos comigo.

A minha mãe (**EULINA GOMES BARROSO**) por incentivar-me a ingressar no mestrado e por sempre proferir bênçãos sobre mim.

Ao Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo, meu orientador, pela paciência, sugestões e disponibilidade.

Aos professores da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Ceará (PROFMAT), por “abrir” minha mente para mostrar a imensidão que a matemática é.

À toda a minha turma do “profmat” por mostrar-se unida e sempre torcer pelo sucesso de cada um. Com certeza pessoas incríveis que carregarei em minhas reminiscências.

RESUMO

Sabemos que a matemática muitas vezes é temida por nossos alunos por motivos diversos, dentre eles a não compreensão dos objetos matemáticos e o não entendimento das variadas formas de representar tais objetos. No presente trabalho, apresentamos a teoria de registros de representações semióticas de Raymond Duval que pode auxiliar no processo de ensino-aprendizagem da matemática. De posse dessa teoria, iremos analisar funções nos livros didáticos, do primeiro ano do ensino médio, das escolas estaduais da cidade de Itapajé do estado do Ceará. Iniciaremos fazendo uma explanação das dificuldades enfrentadas por nossos discentes e do rendimento do Brasil em provas como: Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA, sigla em inglês). Na segunda seção, apresentamos a teoria bem como as suas particularidades. Na terceira seção, analisamos os conteúdos de função afim, quadrática, exponencial e logarítmica nos livros à luz da referida teoria. Durante a quarta seção, veremos como as funções analisadas aparecem nos descritores das matrizes de referência do SPAECE e Saeb, e como os registros semióticos estão presentes nas questões das avaliações externas. Sobre o ENEM, veremos algumas questões sobre função e identificaremos as representações dos objetos matemáticos analisados nesse trabalho. A quinta seção teremos as considerações finais.

Palavras-chave: ensino da Matemática; registros de representação semiótica; função; livro didático.

ABSTRACT

We know that mathematics is often feared by our students for different reasons, including the lack of understanding of mathematical objects and the lack of understanding of the various ways of representing such objects. In the present work, we present Raymond Duval's register theory of semiotic representations that can help in the teaching-learning process of mathematics. In possession of this theory, we will analyze functions in textbooks, from the first year of high school, of state schools in the city of Itapajé in the state of Ceará. We will start by explaining the difficulties faced by our students and the performance of Brazil in tests such as: International Student Assessment Program (PISA). In the second section, we present the theory as well as its particularities. In the third section, we analyze the contents of affine, quadratic, exponential and logarithmic functions in books in the light of this theory. During the fourth section, we will see how the analyzed functions appear in the descriptors of the SPAECE and Saeb reference matrices, and how the semiotic registers are present in the questions of external evaluations. About ENEM, we will see some questions about function and identify the representations of the mathematical objects analyzed in this work. The fifth section will have the final considerations.

Keywords: mathematics teaching; semiotic representation records; function; textbook.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	8
2	TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA.....	11
2.1	Semiótica	11
2.2	Registros de representação semiótica	11
2.3	Tipos de transformação de representações semióticas	14
2.4	Heterogeneidade da conversão	20
3	FUNÇÕES E OS REGISTROS SEMIÓTICOS NOS LIVROS DIDÁTICOS .	22
3.1	Por que analisar o livro didático	22
3.2	Primeira análise.....	22
3.2.1	<i>Função afim</i>	23
3.2.2	<i>Função quadrática</i>	26
3.2.3	<i>Função exponencial</i>	29
3.2.4	<i>Função Logarítmica</i>	31
3.3	Segunda análise.....	32
3.3.1	<i>Função afim</i>	32
3.3.2	<i>Função quadrática</i>	35
3.3.3	<i>Função exponencial</i>	38
3.3.4	<i>Função Logarítmica</i>	39
3.4	Terceira análise	40
3.4.1	<i>Função afim</i>	41
3.4.2	<i>Função quadrática</i>	42
3.4.3	<i>Função exponencial</i>	45
3.4.4	<i>Função Logarítmica</i>	46
4	FUNÇÕES NAS AVALIAÇÕES EXTERNAS.....	48
4.1	Funções no Enem	48
4.2	Funções no spaece	55
4.3	Funções no saeb	58
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	59
	REFERÊNCIAS	60

1 INTRODUÇÃO

É notório que os estudantes brasileiros apresentam dificuldade na aprendizagem dos conteúdos, principalmente na matemática, que é temida por muitos. E não são raras as vezes em que os discentes se impõem um auto boicote ao dizer que não conseguem aprender a disciplina, por não conseguirem assimilar os objetos matemáticos. Podemos perceber que um dos motivos para o baixo rendimento dos alunos está na sua falta de motivação para os estudos ou condições alheias a sala de aula. Outro ponto que podemos destacar é, com certeza, a má qualificação do profissional que está lecionando matemática ou a falta dela. Saber a didática correta a ser aplicada para determinada turma pode fazer com que o prazer em estudar matemática apareça e se desenvolva.

As dificuldades que os alunos apresentam para reconhecer os objetos matemáticos em suas variadas representações, acarretam uma aprendizagem deficitária de conceitos que por sua vez acabam por influenciar na aprendizagem dos demais conteúdos, pois pode acontecer que o conteúdo não seja assimilado pelos alunos e mesmo assim o professor siga adiante com o conteúdo programado para aquela determinada turma.

O baixo rendimento do Brasil em matemática foi revelado pelo Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA, sigla em inglês), prova que foi aplicada em 2018 pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE). O exame mostrou que 68,1% dos estudantes do Brasil que têm entre 15 e 16 anos, estão no pior nível de proficiência em matemática e que mais de 40% que estão no nível básico de conhecimento são incapazes de resolver questões simples e rotineiras. O score médio do Brasil em matemática foi de 384 e o da OCDE foi 489. Em comparação com os países da América do Sul analisados pelo PISA, o Brasil está na frente apenas da Argentina com 384 a 379 respectivamente, na matemática, estatisticamente empatados.

A aprendizagem matemática é objeto de estudo de muitos educadores no tocante a como se ensina e se aprende tal ciência. Um ramo desses estudos refere-se à representação algébrica e gráfica que se pode fazer de uma determinada

função polinomial. Há estudantes que não conseguem ver relação entre essas representações, pois para eles tratam-se de duas coisas bem diferentes e que não se comunicam. Quando, após a explicação da representação algébrica de uma função polinomial, abordarmos a representação gráfica da função estudada, alguns alunos ficam a pensar que o conteúdo é outro.

É preciso deixar claro para nossos alunos, que no estudo da matemática, podemos utilizar várias representações de um mesmo assunto. Como nos alerta ALENCAR (2017, p.14) “deixamos passar despercebido o fato de nossa língua materna não ser a única forma de comunicação e expressão que utilizamos”. Por exemplo, podemos falar de função quadrática por meio de gráficos, tabelas e/ou leis de formação que recaiam em uma função quadrática.

Esse mesmo fenômeno acontece quando estudamos as funções, que aparecem nos livros do 1º ano do ensino médio, no que se refere à sua forma algébrica e gráfica, bem como na interpretação de situações problemas. E isso para citar apenas uma parte da matemática.

Muitos dos nossos discentes chegam ao ensino médio sem ter uma base sólida de conceitos matemáticos como conjuntos numéricos, operações aritméticas e algébricas. Assim é fácil perceber que eles não conseguiram significar os objetos matemáticos e não poderão progredir perfeitamente sem preencher essa lacuna.

Nesse trabalho mostraremos a teoria de representações semióticas de Raymond Duval que auxilia no processo de ensino-aprendizagem dos objetos matemáticos. Essa teoria não é limitada a matemática, pois como sabemos, o estudo de funções se aplica também a física e a outros contextos como nos orientam os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCN's) que nos diz que:

O **estudo das funções** permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática (BRASIL, 2006, pg 121).

Veremos também, uma análise à luz da teoria de representações semióticas, as abordagens das funções: afim, quadrática, exponencial e logarítmica nos livros do primeiro ano do ensino médio da rede estadual de ensino na cidade de Itapajé. Apresentaremos como é feita a explanação dos conteúdos bem como os registros semióticos utilizados pelos autores. Em seguida, teremos algumas questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), sobre funções onde identificamos os registros semióticos. E por fim, uma análise dos descritores do o Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará (SPAECE) e Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (Saeb) que cobram funções.

Ainda no Ensino Fundamental (EF), temos a presença de função afim e quadrática, porém, é no Ensino Médio (EM) em que há um aprofundamento mais detalhado do conteúdo e o estudo de outras funções como a exponencial e a logarítmica. É nessa passagem de nível do EF para o EM que os alunos demonstram que não dominam o conteúdo, não sabem articular as representações escrita, gráfica, tabular e algébrica. O que pode ser um problema para as avaliações externas como o ENEM, o SPAECE e o Saeb, que contém questões que articulam diferentes representações de funções quadráticas.

A teoria de Representações Semióticas irá orientar professores a como explicar os conteúdos de matemática, de maneira a não fazer com que os alunos pensem estar estudando conteúdos diferentes, quando estão dando continuidade no mesmo conteúdo, e auxiliará os alunos a realizarem as mudanças de representações dos objetos matemáticos de forma assertiva dando um maior significado ao processo.

2 TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

Neste capítulo iremos falar sobre semiótica e também sobre a teoria de representações semióticas de Raymond Duval, na qual esse trabalho está fundamentado.

2.1 Semiótica

Semiótica vem do grego “*semeion*” e quer dizer signo, assim, semiótica é a ciência dos signos. Como nos diz SANTAELLA (2002), “pensando em esclarecer, confundimos mais as coisas, pois nosso interlocutor, com olhar de surpresa, compreende que se está querendo apenas dar um novo nome para astrologia”, pois quando falamos de signos, logo remetemos a “signos do zodíaco”, porém aqui estamos nos referindo a linguagem, não necessariamente a falada, mas a linguagem representativa. Podemos representar determinado objeto com mais de uma maneira.

A autora define semiótica como,

[...] a ciência que tem por objetivo de investigação todas as linguagens possíveis, ou seja, que tem por objetivo o exame dos modos de constituição de todo e qualquer fenômeno como fenômeno de produção de significação e sentido (SANTAELLA, 2002, p. 13).

Para a matemática, a semiótica é o meio pelo qual conhecemos seus objetos. Assim, é de fundamental importância distinguir o objeto de sua representação.

2.2 Teoria dos registros de representações semióticas

Raymond Duval é psicólogo de formação e filósofo. O principal escopo de sua obra é o funcionamento do cognitivo e principalmente no campo da aprendizagem matemática. É o responsável por desenvolver a Teoria dos Registros

de Representação Semiótica (TRRS) que foi apresentada na obra “*Sémiosis et pensée humaine: Registres Sémiotiques et Apprentissages Intellectuels*”, (1995).

A matemática é uma ciência na qual não podemos tê-la como algo físico ou palpável, pois seus objetos de estudo não o são, diferente das demais ciências que permitem tal visualização e/ou manuseio, como na Biologia (plantas, células, animais...), Astronomia (estrelas, sol...), Química (ácidos, metais...) e Física (luz, raios, ...). Assim a matemática necessita de uma representação para seus objetos, e esta por sua vez pode ser feita de mais de uma maneira possível.

Na formulação de sua teoria Duval (2005) procurou responder às seguintes indagações:

- Como compreender as dificuldades muitas vezes insuperáveis que muitos alunos têm na compreensão da matemática?
- Qual a natureza dessas dificuldades?
- Onde elas se encontram?

Para responder às suas indagações, Duval não se ateve apenas à matemática ou à história dela, pois

O objetivo do ensino de matemática, em formação inicial, não é nem formar futuros matemáticos, nem dar aos alunos instrumentos que só lhes serão eventualmente úteis muito mais tarde, e sim contribuir para o desenvolvimento geral de suas capacidades de raciocínio, de análise e de visualização (DUVAL, 2005, p. 11)

A abordagem usada por Duval é cognitiva, desta maneira ele busca de maneira primordial descrever o funcionamento cognitivo do discente de maneira que possibilite ao aluno compreender, efetuar e controlar por si próprio os multifacetados processos matemáticos que lhe são propostos em situações de ensino, assim ele não parte dos erros do aluno para só então perceber onde se encontram as dificuldades apresentadas.

A compreensão do ponto de vista cognitivo, da atividade matemática, caracteriza-se segundo Duval (2005) primeiramente em, reconhecer a importância das representações semióticas verificando que o desenvolvimento de tais representações foi essencial para que o pensamento matemático evoluísse. Em

segundo lugar, a existência de várias representações semióticas das quais a matemática faz uso.

Existem quatro tipos de representações semióticas, são elas:

Figura 1 – Tipos de representação semiótica

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO-DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritmizáveis.	Língua natural Associações verbais (conceituais). Forma de raciocinar: <ul style="list-style-type: none"> • argumentação a partir de observações, de crenças...; • dedução válida a partir de definição ou de teoremas. 	Figuras geométricas planas ou em perspectiva (configurações em dimensão 0,1,2 ou 3) <ul style="list-style-type: none"> • apreensão operativa e não somente perceptiva; • construção com instrumentos.
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: Os tratamentos são principalmente algoritmos.	Sistemas de escritas: <ul style="list-style-type: none"> • numéricas (binária, decimal, fracionária...); • algébricas; • simbólica (línguas formais). Cálculo	Gráficos cartesianos. <ul style="list-style-type: none"> • mudança de sistemas de coordenadas; • interpolação, extrapolação.

Fonte: Duval (2005, p.14).

Duval divide os registros em registros multifuncionais, onde o processo de tratamento não é algoritmizável incluindo uma representação discursiva (linguagem natural) e uma representação não-discursiva (figuras geométricas); e os registros monofuncionais que também incluem uma representação discursiva (sistemas de escrita, cálculos) e representação não discursiva (gráficos cartesianos).

Segundo Duval (2005) “a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois dos registros de representação ao mesmo tempo ou na possibilidade de trocar a todo momento de registro de representação.”

Na resolução de um problema, podemos estar usando majoritariamente um determinado registro, mas sempre há a possibilidade de passarmos de uma representação para outra. Duval (2005) conjectura que “a compreensão em matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representação semiótica”.

Para exemplificar os tipos de representação semiótica temos:

Figura 2 – Exemplos de representações semióticas

REGISTRO EM LINGUAGEM NATURAL	REGISTRO EM REPRESENTAÇÃO TABULAR	REGISTRO DE REPRESENTAÇÃO GRÁFICO	REGISTRO DE REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICO																		
Um estacionamento retangular tem 23m de comprimento por 12m de largura. O proprietário deseja aumentar a área desse estacionamento acrescentando duas faixas laterais da mesma largura. Determine a área A, desse estacionamento em função da largura x, que foi acrescentada.	<table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>A</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>276</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>312</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>350</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>390</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>432</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>476</td> </tr> <tr> <td>6</td> <td>522</td> </tr> <tr> <td>...</td> <td>...</td> </tr> </tbody> </table>	x	A	0	276	1	312	2	350	3	390	4	432	5	476	6	522		$A(x) = x^2 + 35x + 276$
x	A																				
0	276																				
1	312																				
2	350																				
3	390																				
4	432																				
5	476																				
6	522																				
...	...																				

Fonte: elaborada pelo autor.

Na figura 2, vemos quatro maneiras de representar uma situação que envolva função quadrática. Para apresentar a situação-problema aos alunos, podemos usar todas elas ou não, a depender do que se espera dos discentes. O registro que aparecerá com mais frequências a depender do objetivo da avaliação será o registro em linguagem natural, pois a língua materna é parte fundamental no estudo de qualquer disciplina.

2.3 Tipos de transformação de representações semióticas

Na atividade matemática, muitas vezes precisamos abordar a resolução de uma determinada situação, usando representações do objeto da matemática, diferentes dos apresentados no comando da questão. Como podemos perceber nos exemplos a seguir:

Exemplo 1: Determine os números cuja soma é 11 e o produto é 28.

Solução 1: Inicialmente deve-se escrever a equação que representa o enunciado do problema e em seguida resolver a equação.

$$x^2 - 11x + 28 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-11) \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 28}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 112}}{2}$$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$x = \frac{11 \pm 3}{2}$$

$$x' = \frac{11 + 3}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

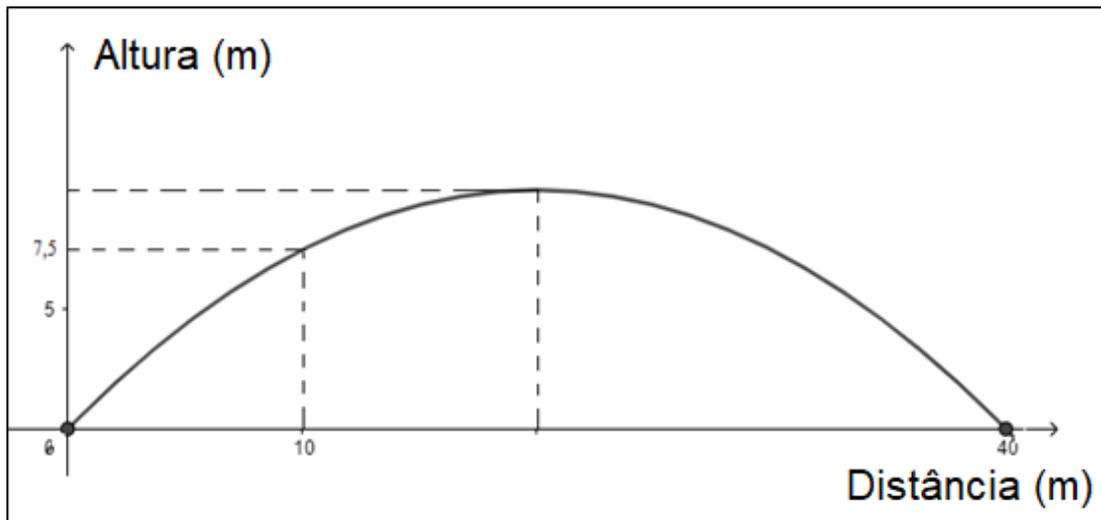
$$x'' = \frac{11 - 3}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Os números procurados são 4 e 7.

No exemplo acima, perceba que no enunciado a representação usada foi a linguagem natural e na solução apresentada usamos a representação algébrica, assim, tivemos uma mudança no registro de representação usado inicialmente. O aluno também poderia resolver por meio de teste para descobrir quais números iriam satisfazer os critérios que a questão exige. Do mesmo modo seria preciso mudar o registro, ele sairia da língua natural para um sistema decimal de escrita, indo de um registro multifuncional para um registro monofuncional.

Exemplo 2: Um futebolista chutou uma bola que se encontrava parada no chão e ela descreveu uma trajetória parabólica, indo tocar o solo 40 m adiante, como mostra a figura. Se, a 10 m do ponto de partida, a bola atingiu a altura de 7,5 m, determine então a altura máxima, em metros, atingida por ela.

Figura 3 – Gráfico de uma função quadrática



Fonte: elaborada pelo autor.

Solução 2: Devemos encontrar a ordenada do vértice da parábola. Sabendo que a abscissa do vértice pode ser encontrada pela média aritmética das raízes (0 e 40), temos que $x_v = (0+40)/2 = 20$.

$$x_v = -b/2a$$

$$20 = -b/2a \Rightarrow b = -40a \quad (1)$$

Sabendo que uma das raízes é zero, temos que a representação algébrica da função será do tipo $f(x) = ax^2 + bx$, ou seja, incompleta em c.

$$f(x) = ax^2 - 40ax \quad (2)$$

Do gráfico temos o um ponto cujas coordenadas são (10;7,5). Substituindo em (2) temos:

$$7,5 = a \cdot 100 - 400a$$

$$7,5 = -300a$$

$$a = -1/40 \quad (3)$$

Substituindo (3) em (1).

$$b = -40 \cdot (-1/40) = 1 \quad (4)$$

Substituindo (3) e (4) na forma algébrica incompleta em c.

$$f(x) = -x^2/40 + x$$

Como já temos o valor de x_v , basta substituir seu valor na função acima.

$$f(x) = -20^2/40 + 20$$

$$f(x) = -400/40 + 20$$

$$f(x) = -10 + 20$$

$$f(x) = 10$$

Portanto, a altura máxima atingida pela bola é de 10 metros.

No exemplo 2, temos a presença no enunciado do registro em linguagem natural junto com o registro algébrico. Para a resolução, o aluno deveria transformar esses registros no registro algébrico, mudando assim a forma de representar o objeto matemático.

Os tipos de transformações que acontecem nas representações semióticas são chamados de Tratamento e Conversão. Duval (2009) nos diz que “um tratamento é uma transformação que se efetua no interior de um mesmo registro, aquele onde as regras de funcionamento são utilizadas”, portanto no tratamento utilizamos apenas um tipo de representação. Por outro lado, a Conversão nas palavras de Duval (2009) é “uma transformação que faz passar de um registro a um outro”.

No exemplo 1 e 2 temos uma conversão, uma vez que foi preciso mudar o registro de representação para a resolução do problema. Adiante teremos um exemplo de tratamento.

Exemplo 3: Determine as coordenadas do vértice da parábola $x^2 - 8x = 0$

Solução 3:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{8}{2} = 4$$

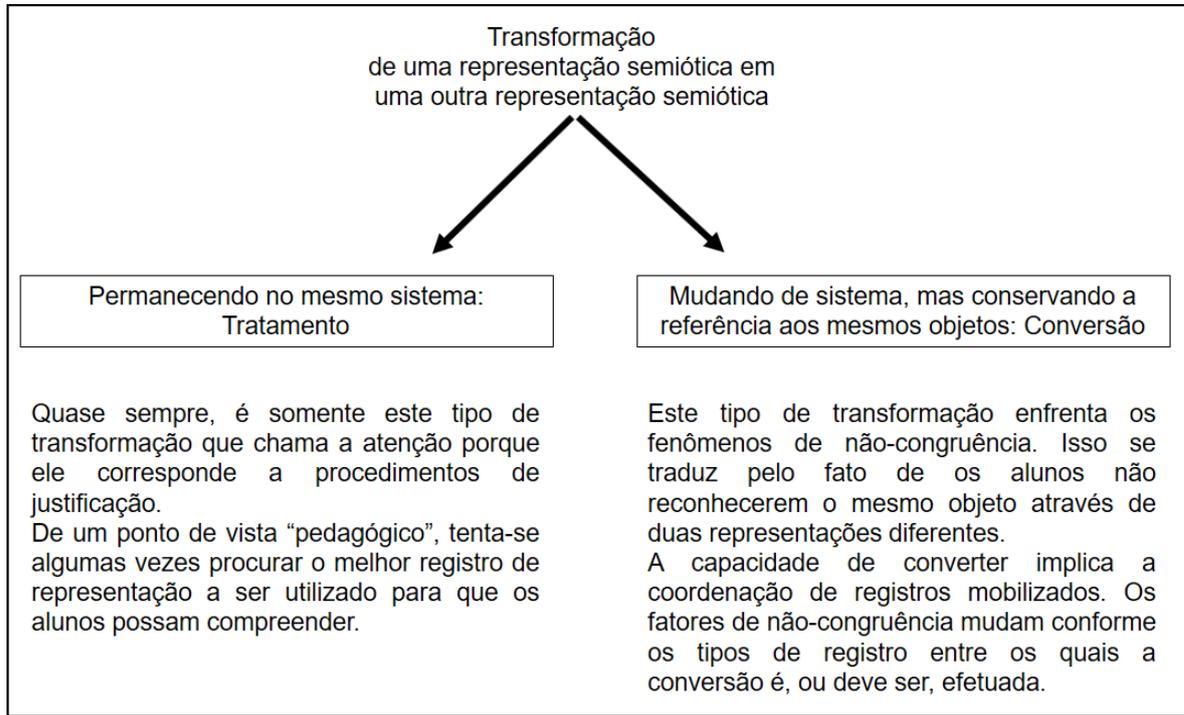
$$y_v = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{-(64 - 0)}{4} = \frac{-64}{4} = -16$$

$$V = (4, -16)$$

No exemplo acima, tanto a resolução como o enunciado fazem uso da representação algébrica, portanto sujeito às mesmas regras de funcionamento intrínsecas à álgebra.

Na figura 4 temos um resumo das transformações de uma representação semiótica.

Figura 4 – Tipos de transformações.



Fonte: Duval (2005, p.15).

Do ponto de vista matemático, a conversão tem um papel fundamental na escolha do melhor registro semiótico cujos tratamentos são efetuados de modo rápidos e concisos ou para a escolha de um registro que sirva de guia ou dê suporte aos tratamentos a serem efetuados. Porém, do ponto de vista cognitivo, a conversão é uma transformação de representação que demonstra uma perfeita compreensão do objeto matemático estudado, pois é onde podemos transitar nas mais diversas representações semióticas.

Sabemos que os objetos matemáticos só são acessíveis, a partir de suas representações. E transitar nessas representações é onde se evidencia a compreensão da matemática.

A conversão tem uma natureza cognitiva própria e podemos observá-la em dois tipos de fenômenos, são eles:

- As variações de congruência e de não-congruência;
- A heterogeneidade dos dois sentidos de conversão.

Para analisarmos uma conversão, devemos observar o registro de partida e o de chegada. Se uma correspondência termo a termo das unidades significantes é suficiente para fazermos a conversão, então a conversão inversa permite reencontrar a expressão do registro de partida, desse modo temos uma congruência de representações. Quando a conversão inversa não permite reencontrar o registro de partida temos uma não-congruência. Em caso de não-congruência,

[...] não apenas o tempo de tratamento aumenta, mas a conversão pode se revelar impossível de efetuar, ou mesmo de compreender, se não houver uma aprendizagem prévia concernente às especificidades semióticas de formação e de tratamento de representação que são próprias a cada um dos registros em presença. (DUVAL, 2009, p.66)

Figura 5 – Exemplo de variação de congruência e não-congruência de uma conversão

	Correspondência semântica das unidades de significado	A unidade semântica terminal	Conservação da ordem das unidades
O conjunto dos pontos cuja ordenada é superior a abscissa $y > x$	Sim	Sim	Sim
O conjunto dos pontos que tem uma abscissa positiva $x > 0$	Não "maior que zero" é uma perífrase (um só significado para várias palavras)	Sim	Sim
O conjunto dos pontos cuja abscissa e cuja ordenada têm o mesmo sinal $x \cdot y > 0$ O produto da abscissa e da ordenada é maior que zero	Sim	Sim	Não Globalização descritiva (dois casos)

Fonte: Duval (2005, p.19).

Na tabela acima, o exemplo dado na primeira linha é possível fazer a conversão bem como a conversão inversa. Na segunda linha, na escrita algébrica não há uma unidade significativa que permita a conversão inversa. Na terceira linha, não é possível fazer uma correspondência termo a termo. Enquanto no exemplo da primeira linha temos uma congruência, nas outras duas temos uma não congruência.

2.4 Heterogeneidade da conversão

O fenômeno da heterogeneidade da conversão se dá na ordem dos registros, nem sempre a conversão é feita quando a ordem deles é alterada. Duval (2005) nos diz que esse fenômeno “pode mesmo conduzir a contrastes muito fortes de acerto quando se inverte o sentido de conversão”. KARRER (2011), percebeu em suas pesquisas uma alteração no percentual de acertos das questões quando alterava-se o sentido das conversões. Sua pesquisa consistiu em aplicar as tarefas em duas fases distintas. Obtendo os resultados abaixo.

Figura 6 – Percentual de acertos na pesquisa sobre o sentido da conversão

FASE 1	Conversão requerida	% de acertos	FASE 2	Conversão requerida	% de acertos
<i>Tarefa a</i>	RSN → RSA	84%	<i>Tarefa a</i>	RSA → RSN	81%
<i>Tarefa b</i>	RSN → RG	74%	<i>Tarefa b</i>	RG → RSN	61%
<i>Tarefa c</i>	RSA → RG	61%	<i>Tarefa c</i>	RG → RSA	58%
<i>Tarefa d</i>	RSA → RG	74%	<i>Tarefa d</i>	RG → RSA	73%
<i>Tarefa e</i>	RSA → RG	52%	<i>Tarefa e</i>	RG → RSA	45%

Fonte: Karrer (2011, p. 6).

Na primeira fase da atividade, a **Tarefa a** foi elaborada de forma a requerer uma conversão de uma representação do registro simbólico numérico (RSN) para uma do simbólico-algébrico (RSA), a **Tarefa b** uma conversão de uma representação do registro simbólico-numérico (RSN) para uma do registro gráfico (RG) e as **Tarefas c, d** e requisitaram conversões de representações do registro simbólico algébrico (RSA) para representações do registro gráfico (RG). Na segunda fase as tarefas envolveram situações semelhantes, porém propostas de forma a requerer os sentidos contrários das conversões propostas na primeira fase. (KARRER, 2011, p.5)

Percebemos que houve uma mudança no percentual de acertos quando houve mudança no sentido da conversão. Outros pesquisadores como Duval e K. Pavlopoulou também apresentaram essas diferenças de percentuais em seus estudos, e com uma diferença até maior tendo em vista que a quantidade de participantes eram maiores.

Percebemos que estudando um sentido de conversão, não está garantido o outro sentido. Assim, é preciso que as atividades contemplem o duplo sentido de conversão. Duval (2005) nos alerta que os “fracassos” ou “bloqueios dos alunos”

aumentam conforme há uma necessidade de realizar uma mudança de registro ou quando a mobilização de dois, é requerida, independentemente do nível de ensino.

A teoria de Duval está intrinsecamente ligada ao estudo da matemática. Em como se aprende e de que maneira o cognitivo processa informações. Para termos acesso aos objetos matemáticos, precisamos fazer uso de representações semióticas, que por sua vez se apresentam como plural. Um mesmo objeto pode ser representado de várias maneiras. Duval (2005) então nos interpela, como não confundir o objeto matemático com a sua representação?

Conforme mudamos a representação de um objeto matemático, estamos mudando também o modo como os tratamentos acontecem. Inserimos novos conhecimentos, novas operacionalizações e vemos as comunicações que as variadas representações fazem em todo de um mesmo objeto. Assim, a aprendizagem matemática para Duval (2005), será efetivada quando ocorrer a mobilização de pelo menos dois registros de representação, fazendo com que os alunos percebam que podemos estudar um mesmo objeto matemático com mais de uma representação semiótica.

3 FUNÇÕES E OS REGISTROS SEMIÓTICOS NOS LIVROS DIDÁTICOS

Nesse capítulo, abordaremos como as funções são abordadas nos livros didáticos, à luz da teoria de representações semióticas. Livros esses que são adotados nas escolas da rede estadual de ensino, no município de Itapajé, cidade localizada no estado do Ceará.

3.1 Por quê analisar o livro didático

Segundo FRISON (2009, p.3) “o livro didático tem sido praticamente o único instrumento de apoio do professor e que se constitui numa importante fonte de estudo e pesquisa para os estudantes”. Assim, é de fundamental importância que os livros didáticos possam apresentar os conteúdos de forma estruturada para que apenas com uma leitura por parte dos alunos, já haja uma compreensão do objeto matemático.

O livro precisa ser visto pelos alunos como um canal de repasse de conteúdo, por meio de uma linguagem simples, sem deixar de lado o rigor da linguagem matemática, pois como nos diz MIRANDA (2018, p.34) “o livro é o principal recurso que intermedeia o conteúdo matemático e os estudantes”. Ele serve para dar suporte, com explicações e atividades contextualizadas. E em alguns casos, é a única referência bibliográfica do professor, determinando às vezes, a ordem dos conteúdos a serem repassadas. Muitas vezes é também a primeira fonte de consulta dos estudantes.

3.2 Primeira análise

O primeiro livro a ser analisado será “Conexões com a Matemática” (CM), uma obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna, em três volumes, cujo editor responsável é Fábio Martins de Leonardo. A referida obra é

adotada pela Escola de Ensino Médio em Tempo Integral Professora Estefânia Matos, uma EEMTI.

3.2.1 Função afim

O conteúdo de função afim está presente no quarto capítulo do livro, e é introduzido com uma situação-problema expressa na linguagem natural que logo em seguida é convertida na representação algébrica, conforme percebemos na figura 7.

Figura 7 – Introdução a função afim no livro Conexões com a Matemática



Capítulo 4 **Função afim**

Baiana vendendo comida típica no Pátio de Eventos Luiz Gonzaga, Caruaru, PE, 2015.

Objetivos do capítulo

- Identificar uma função afim.
- Resolver situações-problema que envolvam funções afins.
- Analisar o gráfico de uma função afim.
- Resolver inequações que envolvam funções afins.

1 Função afim

Todos os anos, Bruna participa de uma feira de comidas nordestinas. Para isso, ela separa os valores referentes aos ingredientes e à mão de obra, o que representa R\$ 1.200,00. Por dia, o aluguel do espaço é de R\$ 80,00. Considerando apenas os valores citados, quanto Bruna gastará se oferecer seus produtos durante 5 dias, período de duração da feira?

Nessa situação, temos um gasto fixo, correspondente aos ingredientes e à mão de obra, que independe da quantidade de dias em que ela estará na feira, e um gasto variável, correspondente ao número de dias. Assim, o gasto total de Bruna será composto dessas duas parcelas:

$$\text{Valor gasto} = \text{gasto fixo} + \text{valor total dos dias}$$

O valor a ser gasto na feira por 5 dias pode ser calculado da seguinte maneira:

$$1.200 + 5 \cdot 80 = 1.200 + 400 = 1.600$$

Portanto, Bruna gastará R\$ 1.600,00 em cinco dias.

Percebemos que o valor $g(x)$ gasto na feira é função da quantidade x de dias. Assim:

$$g(x) = 1.200 + 80 \cdot x$$

Essa sentença é um exemplo de lei de formação de uma função afim.

84

Fonte: Leonardo (2016, p. 57).

Dando continuidade, somos apresentados a uma definição formal de função afim conforme observamos na figura 8 O autor também apresenta alguns casos particulares de função afim seguido de exercícios onde há uma

predominância de tratamento no registro algébrico e também a presença de uma questão que já introduz o registro tabular de função afim.

Figura 8 – Definição de função afim no livro Conexões com a Matemática

Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se **função afim** quando existem números reais a e b tal que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

◆ **Observação**

Os números reais a e b são os coeficientes da função afim.

Exemplos

a) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = -\frac{1}{2}x + 5$, em que $a = -\frac{1}{2}$ e $b = 5$.

b) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(x) = -7x$, em que $a = -7$ e $b = 0$.

c) $m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $m(x) = -\sqrt{2} + \sqrt{3}x$, em que $a = \sqrt{3}$ e $b = -\sqrt{2}$.

d) $n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $n(x) = -5$, em que $a = 0$ e $b = -5$.

Fonte: Leonardo (2016, p. 85).

Aprofundando no assunto, somos apresentados a taxa de variação e apenas na página 87 é que somos apresentados ao gráfico da função afim, conhecendo assim o registro gráfico dessa função, conforme vemos na figura 9.

Figura 9 – Exercício Resolvido

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R3. Verificar que a taxa de variação da função afim dada por $f(x) = -3x + 1$ é igual ao coeficiente de x , ou seja, -3 .

► **Resolução**

Consideremos x e $x + h$ (com $h \in \mathbb{R}^*$) dois elementos do domínio.

• $f(x) = -3x + 1$ • $f(x + h) = -3(x + h) + 1 = -3x - 3h + 1$

Assim:
$$\frac{f(x + h) - f(x)}{(x + h) - x} = \frac{-3x - 3h + 1 - (-3x + 1)}{h} =$$

$$= \frac{-3x - 3h + 1 + 3x - 1}{h} = \frac{-3h}{h} = -3$$

Portanto, a taxa de variação da função de lei $f(x) = -3x + 1$ é -3 . Observe novamente que a taxa de variação encontrada (-3) é igual ao coeficiente a da função.

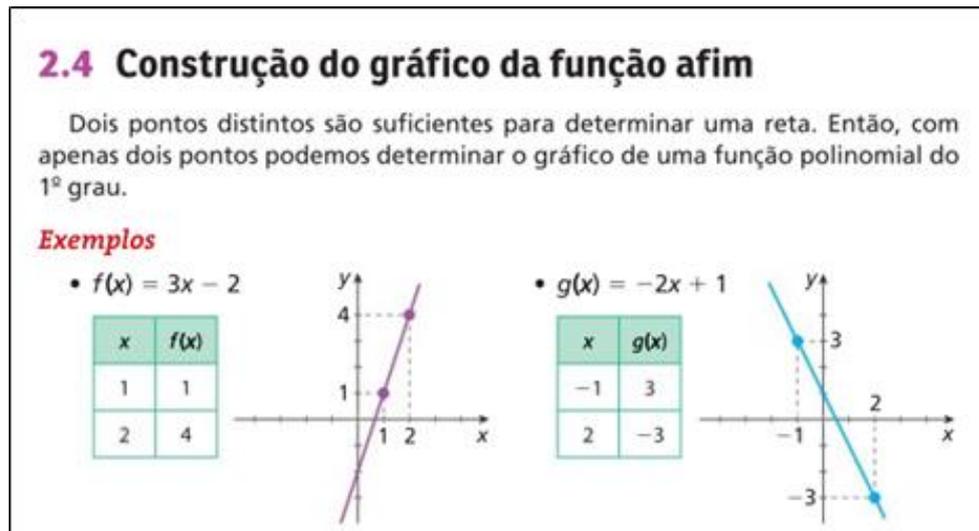
$f(x) = -3x + 1$	
x	$f(x)$
-2	7
-1	4
0	1
1	-2
2	-5

Quando o valor de x aumenta 1 unidade, o valor de $f(x)$ decresce 3 unidades; quando o valor de x aumenta 2 unidades, o valor de $f(x)$ decresce 6 unidades; e assim por diante.

Fonte: Leonardo (2016, p. 88).

Perceba que na figura 9, o gráfico ainda não foi apresentado de forma contínua, pois apenas aparecerá na página 90, conforme vemos na figura 10.

Figura 10 – Gráfico da função afim no livro Conexões com a Matemática



Fonte: Leonardo (2016, p. 89).

Apesar de o gráfico aparecer de forma contínua, a tabela que serve de auxílio para a construção, apresenta apenas valores inteiros. Aqui temos a coordenação de três registros de representação semiótica, registros algébrico, tabular e gráfico.

Os exercícios que seguem, requerem majoritariamente a coordenação de dois registros. O gráfico e o algébrico ou vice-versa.

3.2.2 Função quadrática

O conteúdo de função quadrática aparece no capítulo cinco onde muito do que foi visto no capítulo anterior servirá de base na compreensão de função quadrática.

Figura 11 – Introdução a função quadrática no livro Conexões com a Matemática



Um paraquedista pode chegar até 240 km/h em uma queda livre, se durante a queda ele abrir os braços e as pernas para estabilizar o salto.

1 Função quadrática

É chamado de *queda livre* o movimento na vertical que os corpos, soltos a partir do repouso, sofrem pela ação da gravidade, desprezando-se a resistência do ar. Um paraquedista, conhecendo seu tempo de queda livre—isto é, do momento em que salta da aeronave até o momento em que abre o paraquedas—, pode determinar a distância que percorreu por meio de uma função. A distância percorrida Δs (em metro) pelo paraquedista em queda livre, depois de um intervalo de tempo t (medido em segundo a partir do zero), pode ser modelada pela função $\Delta s(t) = \frac{1}{2}gt^2$. A constante g corresponde à aceleração da gravidade, que, nas proximidades da superfície da Terra, vale aproximadamente $9,8 \text{ m/s}^2$. Assim, $\Delta s(t) = 4,9t^2$. Essa sentença é um exemplo de lei de formação de uma função quadrática.

Objetivos do capítulo

- ◆ Identificar uma função quadrática.
- ◆ Resolver situações-problema que envolvam funções quadráticas.
- ◆ Analisar o gráfico de uma função quadrática.
- ◆ Resolver inequações que envolvam funções quadráticas.

107 ◆

Fonte: Leonardo (2016, p. 107).

Na página 107, a introdução é feita com uma situação-problema que recai em uma função quadrática. Porém, não é demonstrado como se chegou em tal função, apenas foi dito uma parte do procedimento para se chegar nela. Na página

108 é dada uma definição formal – conforme observamos na figura 12 – de função polinomial do 2º grau, seguido de alguns exemplos.

Figura 12 – Definição de função quadrática no livro Conexões com a Matemática

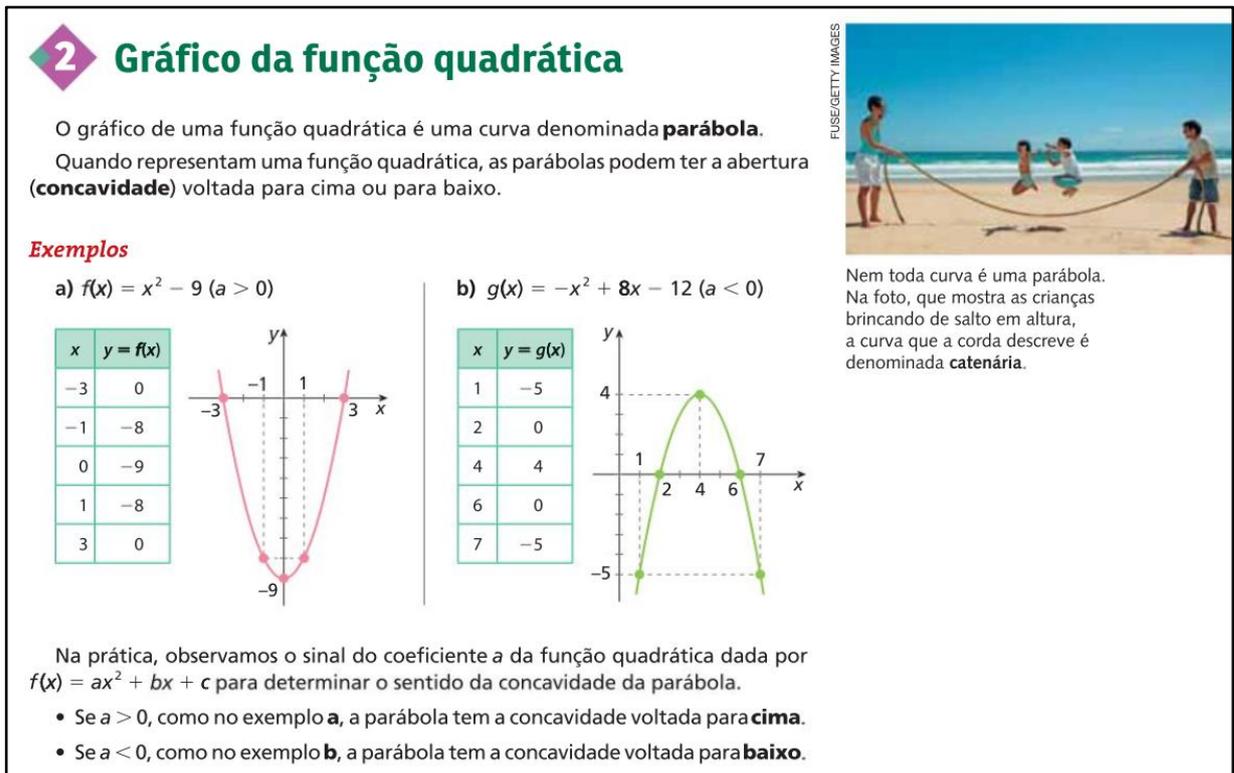
<p>◆ Observação</p> <p>Os números reais a, b e c são os coeficientes da função quadrática.</p>	<p>Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se função quadrática ou função polinomial do 2º grau quando existem números reais a, b e c, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$, para todo $x \in \mathbb{R}$.</p>
<p>Exemplos</p> <p>a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com $f(x) = 2x^2 + 3x - 15$, em que $a = 2$, $b = 3$ e $c = -15$.</p> <p>b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de lei $g(x) = -\frac{x^2}{4} + 5$, em que $a = -\frac{1}{4}$, $b = 0$ e $c = 5$.</p> <p>c) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com $h(x) = -x + \sqrt{2}x^2$, em que $a = \sqrt{2}$, $b = -1$ e $c = 0$.</p> <p>d) $i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de lei $i(x) = -\frac{3}{2}x^2$, em que $a = -\frac{3}{2}$, $b = 0$ e $c = 0$.</p>	

Fonte: Leonardo (2016, p.108).

Até este momento do livro o autor usou apenas um registro de representação, a algébrica. Seguindo com a explanação do conteúdo vemos exercícios resolvidos, e todos usando o mesmo registro da abordagem inicial, cujas resoluções requerem transformações. Apenas nos exercícios propostos vemos o uso do registro em linguagem natural cujas resoluções exigem conversão, ou seja, é necessária a mudança de registro semiótico.

Na página 111 somos apresentados ao gráfico da função quadrática, onde vemos o uso coordenado dos registros: algébrico, gráfico e tabular, conforme podemos observar na figura 13.

Figura 13 – Gráfico da função quadrática no livro Conexões com a matemática



Fonte: Leonardo (2016, p. 110).

Percebemos que nos exemplos dos itens a) e b) há o uso dos seguintes registros semióticos: algébrico, tabular e gráfico. A construção das tabelas pode ser feita substituindo o valor da variável x na função. Porém, para a construção do gráfico, a compreensão fica a desejar pois, não há valores intermediários para a variável x . Por exemplo, no item a) temos na tabela os valores 0 e 1. Para uma melhor compreensão, deveria ter 0,5 e mesmo que tivesse, faltaria o valor 0,51. Com isso, queremos mostrar que mesmo que haja uma abordagem que faça o uso de vários registros semióticos, é necessária uma abordagem completa em seus detalhes.

Na sequência, o livro apresenta exercícios propostos, onde precisam ser usadas conversões, principalmente do algébrico para o gráfico. Depois o livro apresenta alguns elementos da parábola como o zero da função, o vértice e o termo independente. Os problemas propostos requerem a articulação de pelo menos dois registros, sendo eles, em sua maioria, o algébrico e o gráfico, convertendo um no outro.

3.2.3 Função exponencial

No sétimo capítulo somos apresentados ao estudo de função exponencial. Diferente dos conteúdos anteriores, há uma introdução que irá nortear o andamento das explanações. Nesse início verificamos a presença de situações-problema que podem ser modeladas por meio de uma função exponencial, revisão de potência e suas propriedades, para só então adentrar no assunto.

Para explicar o assunto nos deparamos com um exemplo de divisão binária de bactéria, conforme a figura 14 a seguir:

Figura 14 – Função exponencial no livro Conexões com a matemática

2

Função exponencial

Acompanhe a situação a seguir.

A principal forma de multiplicação das bactérias é a divisão binária. Nesse tipo de divisão, o material genético é duplicado, e a bactéria se divide ao meio, originando duas novas bactérias idênticas a ela.



DR. TONY BRAIN/
SCIENCE PHOTO LIBRARY/LATINSTOCK



CULTURE CREATIVE/AFP

Bactéria *E.coli* em processo de divisão binária. Imagem ampliada 24.390×, colorizada artificialmente.

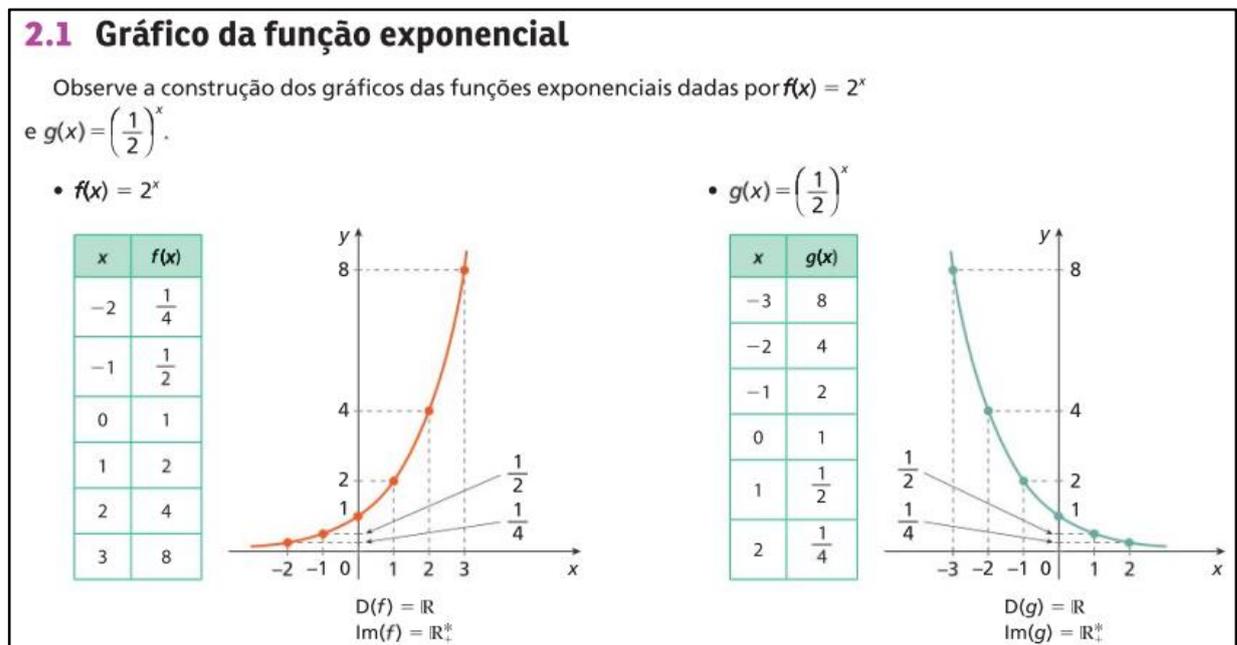
A Microbiologia é o estudo dos microrganismos, ou seja, de seres vivos que só podem ser vistos por meio de microscópios, como vírus, bactérias e alguns fungos.

Sabendo que determinada colônia, iniciada por uma única bactéria, duplica a cada 20 minutos, quantas bactérias existirão após 2 horas e 40 minutos?

Fonte: Leonardo (2016, p.154).

Nesse início há o uso de linguagem natural que já na página seguinte, com o auxílio de um esquema proposto pelo livro, o autor generaliza a situação inicial para chegar na representação algébrica ou lei de formação da função. Ainda nessa página há a presença do gráfico da função, onde com a mesma situação inicial converte-se o registro algébrico no registro gráfico, como observamos na figura 15.

Figura 15 – Gráfico da função exponencial no livro Conexões com a matemática



Fonte: Leonardo (2016, p.155)

O aluno pôde perceber nessa introdução que função exponencial pode ser trabalhada usando mais de um registro semiótico. A grande vantagem nessa abordagem de função exponencial, foram as conversões sendo feitas com a mesma situação-problema.

A partir desse ponto temos questões propostas onde para a resolução, há a necessidade de conversão do algébrico para o gráfico e vice-versa. Outras necessitam que sejam feitos tratamentos.

3.2.4 Função logarítmica

A função logarítmica, assim como a exponencial, requer uma abordagem inicial para só então adentrarmos nela. E no capítulo 8 do livro, temos uma abordagem que remete ao capítulo 7, mostrando que a função logarítmica é a inversa da exponencial, e para isso, o mesmo exemplo da divisão de bactéria é utilizado. Na sequência há a definição de logaritmo e suas propriedades operatórias.

Após essa introdução temos a função logarítmica conforme observamos na figura 16, usando linguagem natural com o mesmo exemplo inicial de função exponencial. Há ainda a conversão para o registro algébrico e a definição.

Figura 16 – Função logarítmica no livro Conexões com a matemática

3

Função Logarítmica

Como vimos no início deste capítulo, considerando bactérias que se multiplicam por divisões sucessivas, originando, a cada hora, duas bactérias, é possível determinar o número n de bactérias em função da quantidade t de horas por meio da equação $n = 2^t$.

Aplicando o que foi visto sobre logaritmo, é possível escrever uma igualdade para determinar a quantidade t de horas necessárias para que se obtenha n bactérias: $n = 2^t \Rightarrow t = \log_2 n$

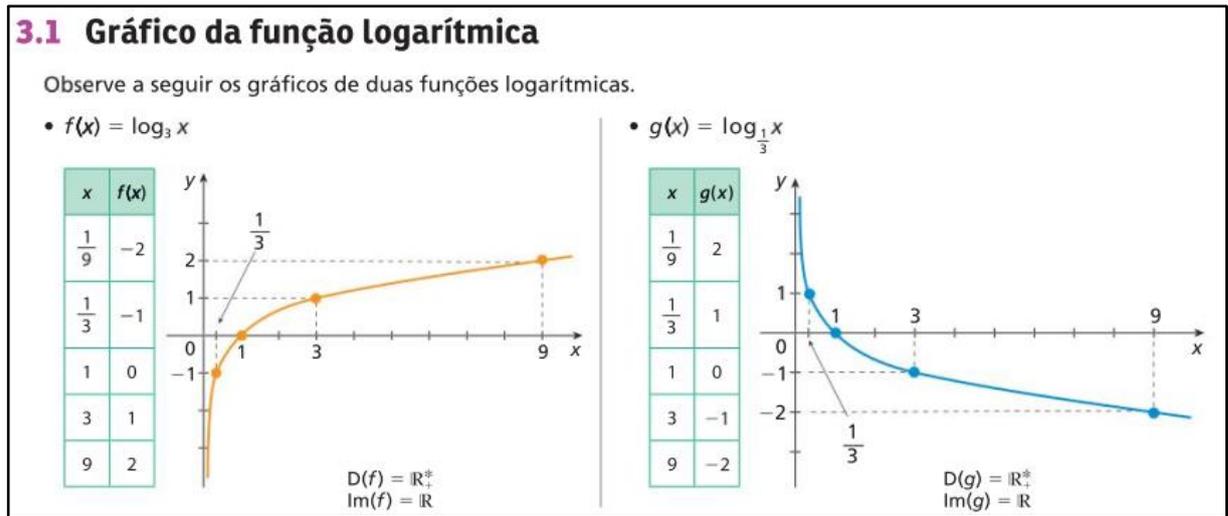
Nesse caso, a quantidade t de horas é determinada em função da quantidade n de bactérias. Observe que esse é um exemplo de função em que a variável está no logaritmando.

Uma função $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se **função logarítmica** quando existe um número real a , com $a > 0$ e $a \neq 1$, tal que $f(x) = \log_a x$ para todo $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Fonte: Leonardo (2016, p. 176).

Em seguida somos apresentados ao gráfico da função logarítmica com o uso de três registros semióticos, são eles: o registro algébrico, tabular e gráfico, todos coordenados. Porém, o gráfico é apresentado não da situação inicial como se observa na figura 17.

Figura 17 – Gráfico da função logarítmica no livro Conexões com a matemática



Fonte: Leonardo (2016, p.178)

Na apresentação do gráfico seria útil apresentá-lo usando a mesma situação inicial, a divisão da bactéria. As atividades propostas contemplam a conversão do registro algébrico para o gráfico e vice-versa. Há ainda questões cuja resolução requer tratamentos.

3.3 Segunda análise

Iremos analisar a obra adotada pela Escola de Ensino Médio Antônio Custódio de Mesquita, uma EEM. O livro adotado por ela foi “Matemática, Ciências e Aplicações” (CA), uma obra organizada em três volumes de autoria de Gelson Iezzi et al, publicada pela editora Saraiva.

3.3.1 Função afim

No capítulo 4 do livro o assunto é introduzido por meio de três problemas propostos, os quais usam a linguagem natural que é convertida na representação algébrica, conforme observamos na figura 18.

Figura 18 – Introdução a função afim no livro Matemática, Ciências e aplicações

70

CAPÍTULO

4

Função afim

▶ Introdução

Antes de apresentarmos o conceito de função afim, vejamos alguns exemplos envolvendo questões do dia a dia.

EXEMPLO 1

Antônio Carlos pegou um táxi para ir à casa de sua namorada, que fica a 15 km de distância. O valor cobrado engloba o preço da parcela fixa (bandeirada) de R\$ 4,00 mais R\$ 2,20 por quilômetro rodado (não estamos considerando aqui o tempo em que o táxi ficaria parado em um eventual congestionamento).

Ou seja, ele pagou $15 \cdot \text{R\$ } 2,20 = \text{R\$ } 33,00$ pela distância percorrida mais R\$ 4,00 pela bandeirada; isto é:

$$\text{R\$ } 33,00 + \text{R\$ } 4,00 = \text{R\$ } 37,00$$

Se a casa da namorada ficasse a 25 km de distância, Antônio Carlos pagaria, pela corrida:

$$25 \cdot \text{R\$ } 2,20 + \text{R\$ } 4,00 = \text{R\$ } 59,00.$$

Podemos notar que, para cada distância x percorrida pelo táxi, há certo preço p para a corrida. Nesse caso, a fórmula que expressa p (em reais) em função de x (em quilômetros) é:

$$p(x) = 2,20 \cdot x + 4,00$$

que é um exemplo de **função polinomial do 1º grau** ou **função afim**.

Fonte: lezzi (2016, p. 70).

Na introdução de função afim há três exemplos semelhantes no uso das representações semióticas. Após o terceiro há uma definição formal de função afim seguido de uma definição do gráfico da função, como podemos observar na figura 19.

Figura 19 – Introdução a função afim no livro Matemática, Ciências e aplicações

72 | CAPÍTULO 4

▶ **Gráfico**

O gráfico de uma função polinomial do 1º grau, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $y = ax + b$, com $a \neq 0$, é uma reta oblíqua aos eixos Ox e Oy (isto é, é uma reta não paralela a nenhum dos eixos coordenados).

Fonte: lezzi (2016, p. 72)

Até esse ponto não houve o uso de outro registro de representação, o que poderia facilitar no entendimento do conteúdo. Na sequência temos exercícios resolvidos sobre a construção do gráfico, observe a figura 20.

Figura 20 – Gráfico da função afim no livro Matemática, Ciências e aplicações

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

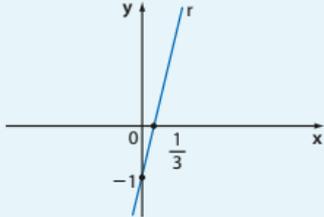
1 Construa o gráfico da função de \mathbb{R} em \mathbb{R} definida por $y = 3x - 1$.

Solução:
Basta obter dois de seus pontos e ligá-los com o auxílio de uma régua:

- Para $x = 0$, temos $y = 3 \cdot 0 - 1 = -1$; portanto, um ponto é $(0, -1)$.
- Para $y = 0$, temos $0 = 3x - 1$; portanto, $x = \frac{1}{3}$ e o outro ponto é $(\frac{1}{3}, 0)$.

Marcamos os pontos $(0, -1)$ e $(\frac{1}{3}, 0)$ no plano cartesiano e ligamos os dois com a reta r .

x	y
0	-1
$\frac{1}{3}$	0



A lei $y = 3x - 1$ é também chamada **equação da reta r**.

Fonte: lezzi (2016, p.73)

Na figura acima temos o uso do registro algébrico convertido no registro tabular que depois é convertido no registro gráfico. Para uma melhor compreensão, seria interessante expandir a tabela para que pontos além dos que estão sobre os eixos apareçam.

Em seguida os exercícios cobram a articulação do registro algébrico para o gráfico e vice-versa. Há ainda a presença de resoluções com tratamentos.

Somente quando o assunto é “Taxa média de variação da função afim” é que somos apresentados a um exemplo resolvido que envolve três representações, sendo elas: algébrica, tabular e gráfica com coordenadas além daquelas sobre os eixos.

3.3.2 Função quadrática

O conteúdo de Função Quadrática aparece no volume 1 em seu quinto capítulo, conforme podemos observar na imagem 21.

Figura 21 – Introdução a função quadrática no livro Matemática, Ciências e aplicações

94

CAPÍTULO

5

Função quadrática

▶ Introdução

Vejam duas situações que envolvem a função quadrática.

Situação 1

Um campeonato de futebol vai ser disputado por 10 clubes pelo sistema em que todos jogam contra todos em dois turnos. Quantos jogos serão realizados no campeonato?

Contamos o número de jogos que cada clube fará “em casa”, ou seja, no seu campo: 9 jogos. Como são 10 clubes, o total de jogos será $10 \cdot 9 = 90$.

Se o campeonato fosse disputado por 20 clubes (como é o Campeonato Brasileiro de Futebol), poderíamos calcular quantos jogos seriam realizados usando o mesmo raciocínio:

$$20 \cdot 19 = 380$$

Enfim, para cada número (**x**) de clubes, é possível calcular o número (**y**) de jogos do campeonato. O valor de **y** é função de **x**.

Nesse caso, a regra que permite calcular **y** a partir de **x** é a seguinte:

$$y = x \cdot (x - 1), \text{ ou seja, } y = x^2 - x$$

Esse é um exemplo de **função polinomial do 2º grau** ou **função quadrática**.



LEONORO MARTINS/ALAMYPHOTO

Estádio de futebol, São Paulo (SP), 2015.

Fonte: lezzi (2016, p. 94).

Na introdução ao conteúdo o autor usa uma situação bem presente no cotidiano dos brasileiros, o futebol. Nessa abordagem percebemos o uso da

linguagem natural quando a explicação do raciocínio é feita, passando para a forma algébrica quando há a “regra” que permite generalizar a problematização da situação. Assim, vê-se o uso de duas representações semióticas nessa explanação. Prosseguindo, o autor apresenta outra situação, mas agora com o uso da linguagem figural (geométrica) que é convertida na linguagem algébrica.

Só então há uma definição formal – conforme podemos observar na figura 22 – do que seja uma função quadrática. Diferente da abordagem anterior, vemos aqui o uso imediato de três representações semióticas, representado um melhor aproveitamento dos registros, para abordar o conteúdo.

Figura 22 – Definição de função quadrática no livro Matemática, Ciências e aplicações

Função quadrática | 95

Chama-se **função quadrática**, ou **função polinomial do 2º grau**, qualquer função f de \mathbb{R} em \mathbb{R} dada por uma lei da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que **a**, **b** e **c** são números reais e $a \neq 0$.

Veja os exemplos a seguir.

- $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$, sendo $a = 2$, $b = 3$ e $c = 5$.
- $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$, sendo $a = 3$, $b = -4$ e $c = 1$.
- $f(x) = x^2 - 1$, sendo $a = 1$, $b = 0$ e $c = -1$.
- $f(x) = -x^2 + 2x$, sendo $a = -1$, $b = 2$ e $c = 0$.
- $f(x) = -4x^2$, sendo $a = -4$, $b = 0$ e $c = 0$.

Porque, se $a = 0$, a lei se escreve como $f(x) = bx + c$, que não é de segundo grau.

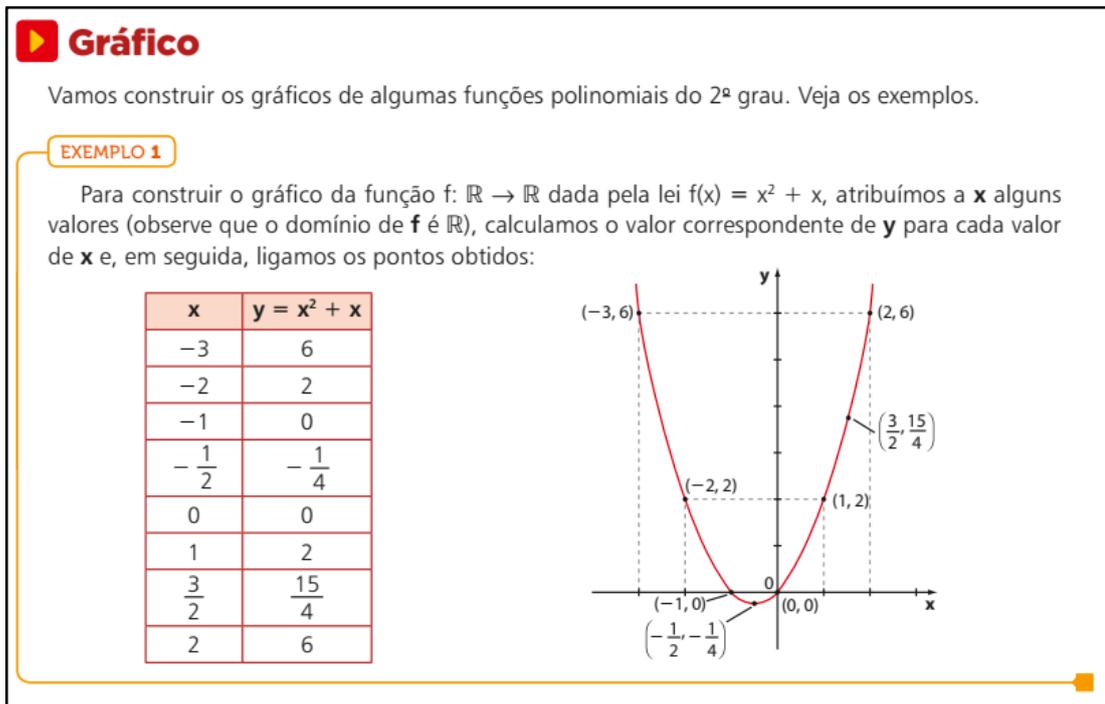
PENSE NISTO:

Por que é colocada a restrição $a \neq 0$?

Fonte: lezzi (2016, p. 95).

Nessa segunda abordagem não há exemplos após a introdução, o autor segue imediatamente para o gráfico da função quadrática como podemos verificar na figura 23.

Figura 23 – Gráfico da função quadrática no livro Matemática, Ciências e aplicações



Fonte: Iezzi (2016, p. 95).

Assim como na primeira abordagem, quando vemos a explicação sobre o gráfico da função quadrática, os autores fazem o uso de três representações semióticas, todas sobre a mesma situação, são elas: algébrica, tabular e gráfica.

Nota-se que na segunda abordagem, foram usados valores não inteiros, o que não ocorreu na primeira abordagem. O uso de números racionais para o domínio na tabela ajuda a perceber a curva que o gráfico da função fará mesmo que não sejam representados todos os racionais (o que seria impossível de fazer). A presença de alguns números racionais permite a compreensão do que acontece na representação gráfica.

Outros exemplos para o gráfico são apresentados seguindo o modelo do primeiro, e então há a presença da atividade proposta, onde todas usam a conversão no seguinte sentido: algébrico para o gráfico.

3.3.3 Função exponencial

No capítulo 7 temos a presença de função exponencial, onde uma introdução com crescimento populacional é feita seguida de potência e suas propriedades. Feita essa introdução temos em sequência: a definição de função exponencial, exemplos que contemplam o registro algébrico, tabular e gráfico, conforme a figura 24.

Figura 24 – Função exponencial no livro Matemática, Ciências e aplicações

▶ Função exponencial

Chama-se **função exponencial** qualquer função f de \mathbb{R} em \mathbb{R}_+^* dada por uma lei da forma $f(x) = a^x$, em que a é um número real dado, $a > 0$ e $a \neq 1$.

São exemplos de funções exponenciais: $y = 10^x$; $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$; $y = 2^x$; $y = \left(\frac{5}{6}\right)^x$ etc.

Observe que, na definição acima, há restrições em relação à base a .
De fato:

- Se $a < 0$, nem sempre o número a^x é real, como, por exemplo, $(-3)^{\frac{1}{2}} \notin \mathbb{R}$.
- Se $a = 0$, temos:

$$\begin{cases} \text{se } x > 0, y = 0^x = 0 \text{ (função constante)} \\ \text{se } x < 0, \text{ não se define } 0^x \text{ (por exemplo, } 0^{-3}) \\ \text{se } x = 0, \text{ não se define } 0^0 \end{cases}$$
- Se $a = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$, a função dada por $y = 1^x = 1$ é constante.

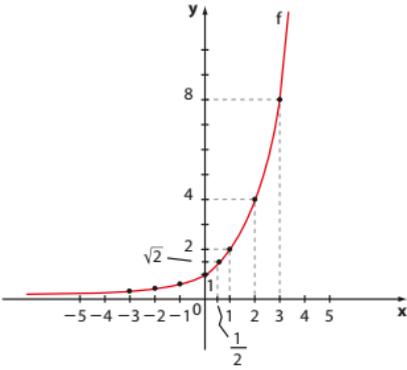
▶ Gráfico

Vamos construir os gráficos de algumas funções exponenciais e, em seguida, observar algumas propriedades.

EXEMPLO 2

Vejamos como construir o gráfico da função f , cuja lei é $y = 2^x$.
Vamos usar o método de localizar alguns pontos do gráfico e ligá-los por meio de uma curva.

x	y
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2} \approx 1,41$
1	2
2	4
3	8



Observe que $\forall x \in \mathbb{R}, 2^x > 0$ e, deste modo, $\text{Im} = \mathbb{R}_+^*$.

Fonte: Iezzi (2016, p. 136).

Nessa introdução sentimos falta do registro em linguagem natural e de uma contextualização. As atividades propostas cobram a articulação de dois registros, sendo eles, o algébrico para o gráfico e vice-versa, outras requerem tratamento para a resolução.

3.3.4 Função logarítmica

O capítulo 8 inicia com uma situação-problema que recai em uma função exponencial que não é possível igualar as bases. Para resolver a equação encontrada, é preciso o uso de logaritmo. Na sequência há uma explanação do que é logaritmo e suas propriedades.

Passada essa introdução somos apresentados a função logarítmica com uma definição formal. Temos a presença do registro algébrico e do registro figural, como observamos na figura 25.

Figura 25 – Função logarítmica no livro Matemática, Ciências e aplicações

▶ Função logarítmica

Dado um número real a ($0 < a$ e $a \neq 1$), chama-se **função logarítmica de base a** a função f de \mathbb{R}_+^* em \mathbb{R} dada pela lei $f(x) = \log_a x$.

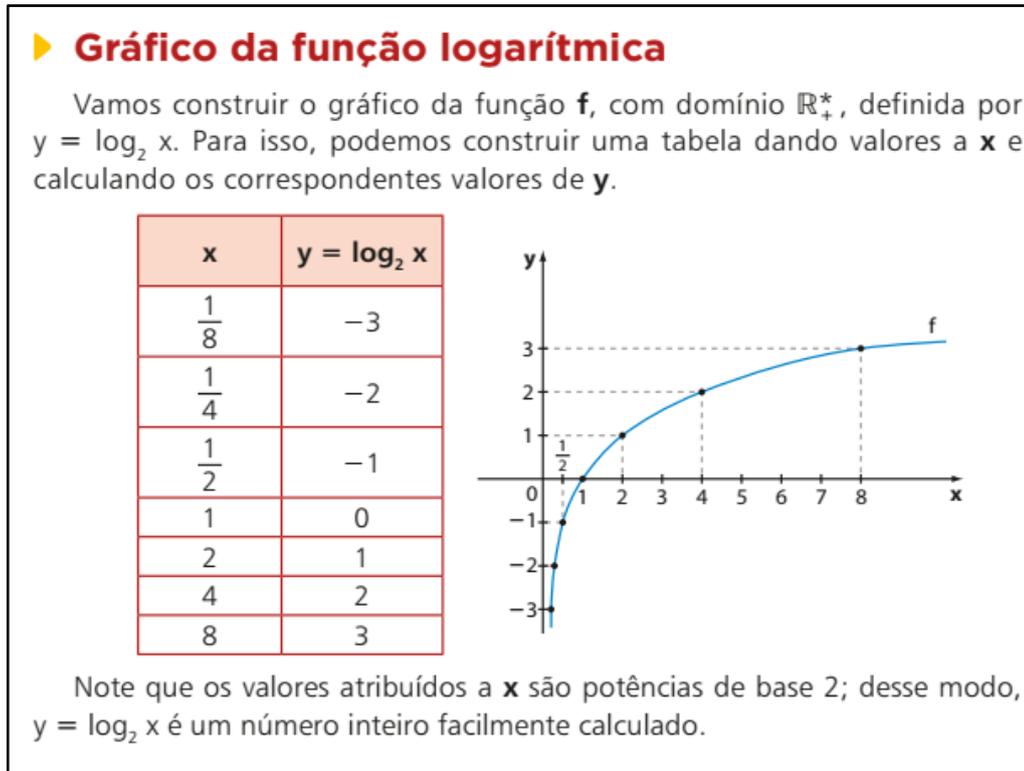
Essa função associa cada número real positivo ao seu logaritmo na base a . Um exemplo de função logarítmica é a função f definida por $f(x) = \log_2 x$.

São logarítmicas também as funções dadas pelas leis: $y = \log_3 x$; $y = \log_{10} x$; $y = \log_e x$ (ou $\ln x$); $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ etc.

Fonte: lezzi (2016, p. 160).

Ainda na mesma página temos a presença do gráfico da função logarítmica com o uso do registro algébrico, tabular e gráfico.

Figura 26 – Gráfico da função logarítmica no livro Matemática, Ciências e aplicações



Fonte: lezzi (2016, p. 160)

Adiante, teremos a relação entre função logarítmica e exponencial, com exemplos usando o registro tabular e gráfico para mostrar que uma é o inverso da outra. As atividades propostas cobram a articulação de dois registros; algébrico para o gráfico e vice-versa e também, tratamentos.

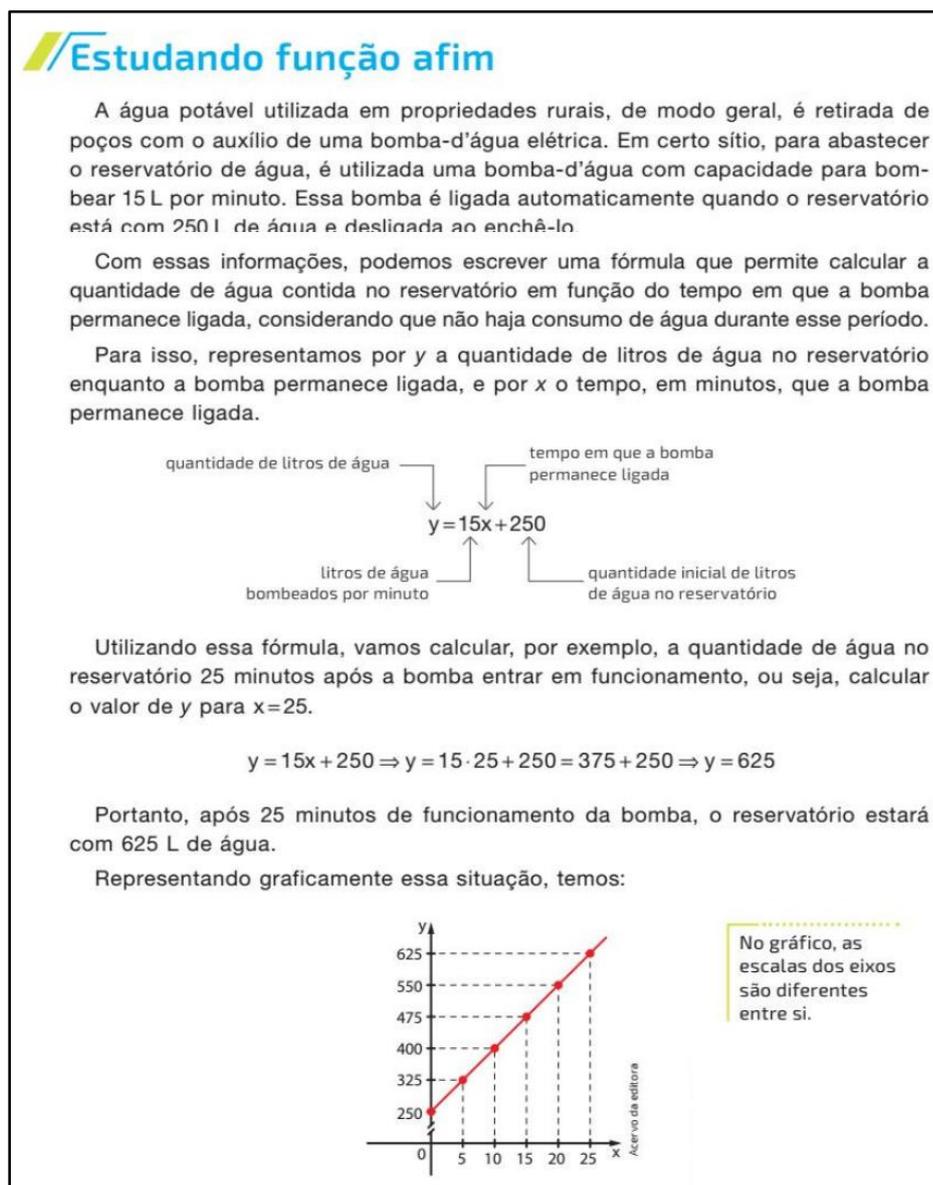
3.4 Terceira análise

Analisaremos agora o livro “Contato Matemática”, uma obra publicada pela editora FTD, em três volumes, de autoria de Joamir Souza e Jacqueline Garcia. Este livro é adotado pela Escola de Ensino Médio Monsenhor Catão Porfírio Sampaio, uma EEM e pela Escola Estadual de Educação Profissional Adriano Nobre, uma EEEP, ambas localizadas na cidade de Itapajé, Ceará.

3.4.1 Função afim

No terceiro capítulo do livro temos a introdução do conteúdo de função afim com uma situação-problema utilizando o registro em linguagem natural, convertido em seguida na representação algébrica do problema. Dando continuidade outra representação da mesma situação é apresentada, o registro gráfico, como podemos observar na figura 27.

Figura 27 – Introdução a função afim no livro Contato Matemática

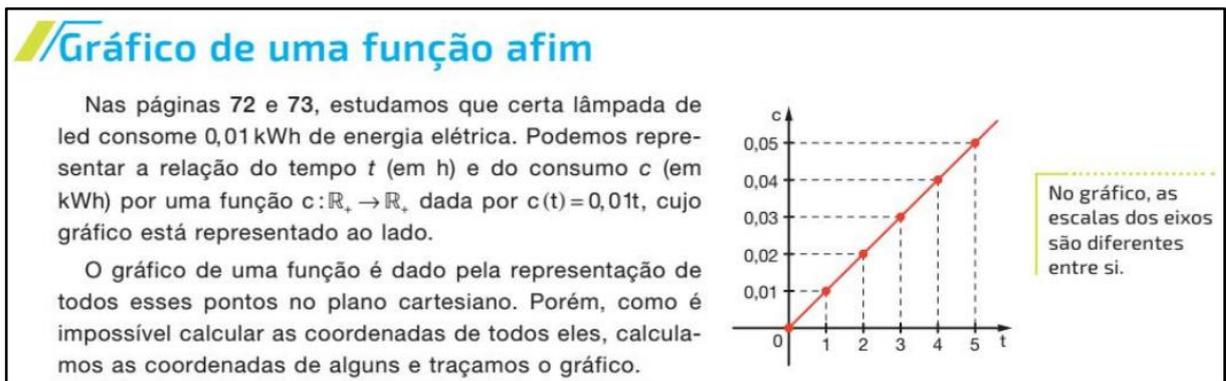


Fonte: Souza (2016, p.74).

Já introduzidos esses registros de representação semiótica, o autor segue explorando exemplos que contemplam a conversão do registro algébrico para o gráfico e do gráfico para o tabular. A atividade proposta em seguida também vai ao encontro dos exemplos com o acréscimo de questões que contemplem o tratamento.

Na explanação do gráfico da função, algo já iniciado antes, há exemplo que contempla os mesmos registros de representação semiótica da introdução do conteúdo, como observamos na figura 28.

Figura 28 – Gráfico da função afim no livro Contato Matemática



Fonte: Souza (2016, p.79).

Outros exemplos são dados usando também o registro tabular e sempre articulando dois ou três dos registros já apresentados até este ponto do livro. Nas atividades seguintes há a presença de questões que irão requerer dos alunos a conversão da representação algébrica para a representação gráfica e vice-versa, tratamentos, e uma questão que contempla o registro tabular, algébrico e gráfico.

3.4.2 Função quadrática

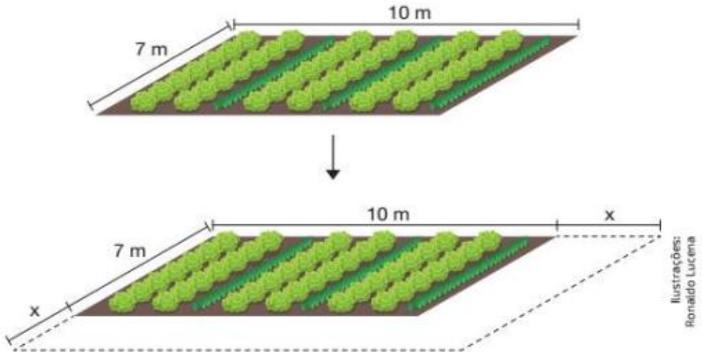
No quarto capítulo temos o conteúdo de função quadrática sendo explanado com o uso de uma situação que envolve área de um terreno, conforme podemos observar na figura 29.

Figura 29 – Introdução a função quadrática no livro Contato Matemática

Estudando função quadrática

As hortas comunitárias são ótimas alternativas de ocupação para terrenos baldios, espaços muitas vezes utilizados como depósitos de entulhos. Essas hortas oferecem alimentos frescos e saudáveis aos moradores locais, além de, em alguns casos, servirem como fonte de renda.

Em certa horta comunitária, um canteiro de verduras retangular será ampliado em uma mesma medida, tanto no comprimento quanto na largura, como mostra a figura.



Podemos representar a área (f) desse canteiro após a ampliação em função da medida x indicada.

$$f(x) = (7+x)(10+x)$$

$$f(x) = 70 + 7x + 10x + x^2$$

$$f(x) = x^2 + 17x + 70$$

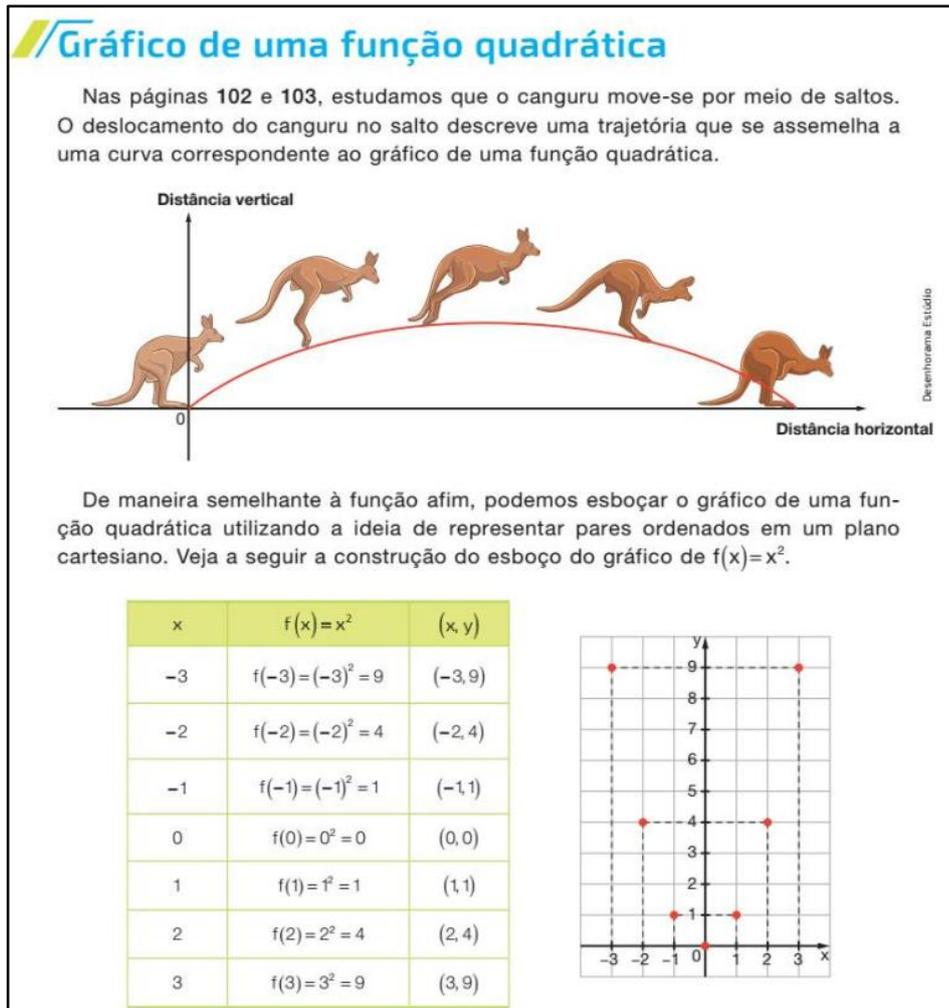
Ilustrações: Ronaldo Lucena

Fonte: Souza (2016, p. 104).

Nessa introdução o autor usa a representação geométrica e em seguida faz a conversão para a representação algébrica, fazendo o uso de dois registros de representação semiótica e prossegue explorando a função encontrada para determinar a área do terreno conforme a medida acrescida. Só então há uma definição formal de função quadrática a partir do que foi construído anteriormente. Nos exercícios que seguem, há majoritariamente o uso da representação algébrica com tratamentos. Há ainda exercícios que usam dois registros semióticos, um para explicar a questão e outro na resolução, ou seja, há a necessidade de conversões.

Assim como nas outras análises, o gráfico da função afim nesse livro é apresentada usando três representações semióticas; algébrica, tabular e gráfica, conforme observamos na figura 30.

Figura 30 – Gráfico da função quadrática no livro Contato Matemática



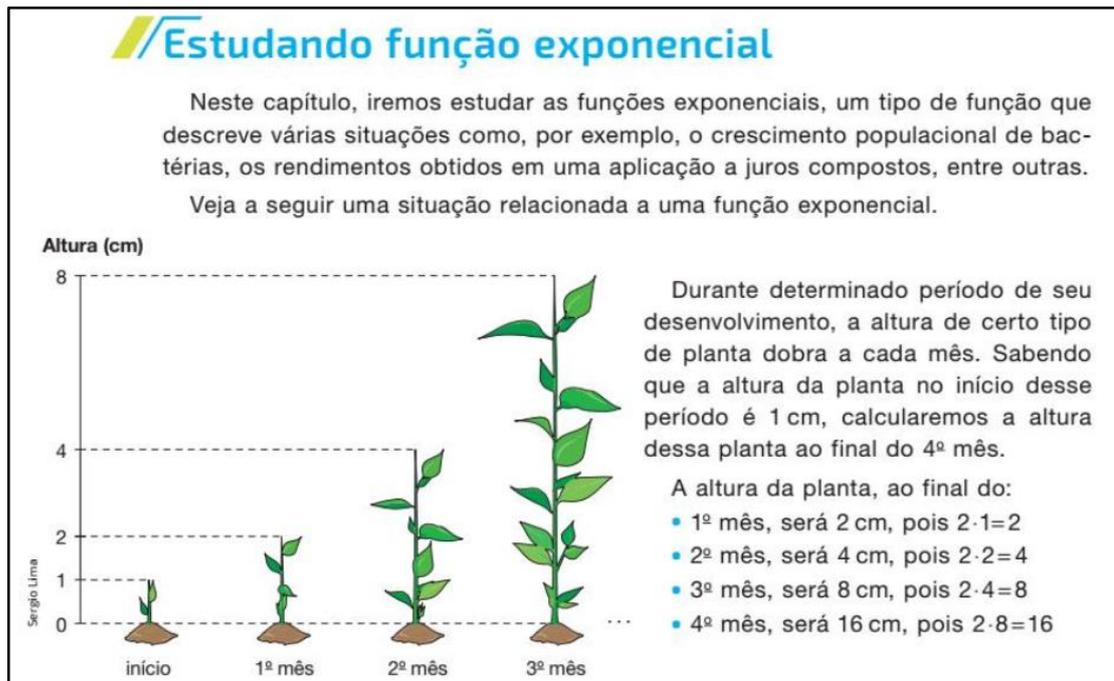
Fonte: Souza (2016, p.107).

O raciocínio na figura 30 é construído a partir do salto do canguru cuja trajetória é assemelhada a função $f(x) = x^2$. A construção de uma tabela é feita a partir dessa função demonstrada e em seguida é construído o gráfico. Na tabela temos uma lacuna, pois não é explicado o que acontece entre os valores inteiros, o que pode acarretar uma confusão com a curvatura da parábola. Os exercícios referentes à explanação usam os registros: gráfico e algébrico com conversão nos dois sentidos.

3.4.3 Função exponencial

O estudo de função exponencial tem início no capítulo 5 com um exemplo do crescimento de uma planta, usando o registro em linguagem natural, como observamos na figura 31.

Figura 31 – Função exponencial no livro Contato Matemática



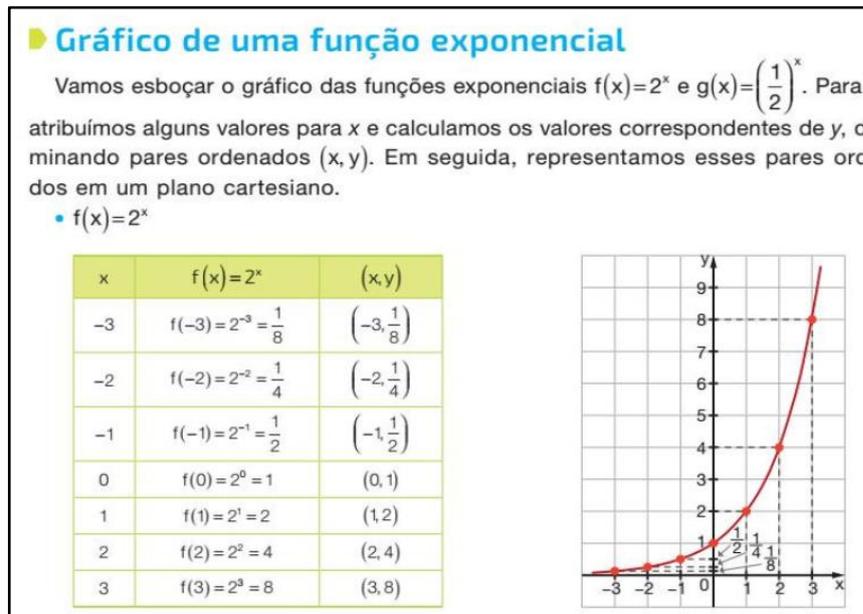
Fonte: Souza (2016, p. 135).

O autor segue convertendo o registro inicial para o registro algébrico seguindo para o registro gráfico. Mostrando desde a introdução algumas representações semióticas de função exponencial.

Sem mais exemplos o livro segue com uma revisão de potência e suas propriedades dando continuidades com exercícios sobre essa revisão. Adiante teremos a definição de função exponencial e questões que contemplam apenas dois registros: algébrico e linguagem natural com a articulação entre os dois nos dois sentidos.

O gráfico da função exponencial é abordado com o uso do registro algébrico convertido no tabular e depois no gráfico, observe a figura 32.

Figura 32 – Gráfico da função exponencial no livro Contato Matemática



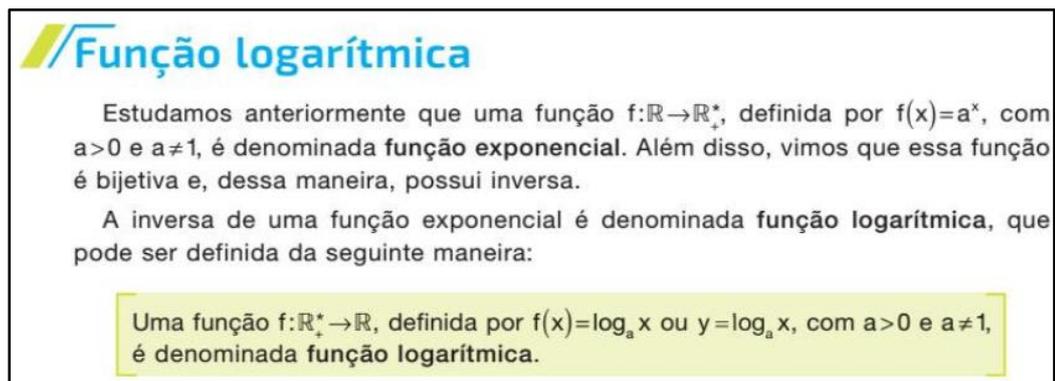
Fonte: Souza (2016, p. 146).

As atividades propostas seguem com a articulação entre dois registros, sendo do algébrico para o gráfico e vice-versa, linguagem natural para o algébrico, além de tratamentos.

3.4.4 Função logarítmica

O capítulo 6 tem início com o estudo de logaritmo e suas propriedades. Na sequência a função logarítmica é apresentada como sendo a inversa da exponencial, e com uma definição formal, conforme observamos na figura 33.

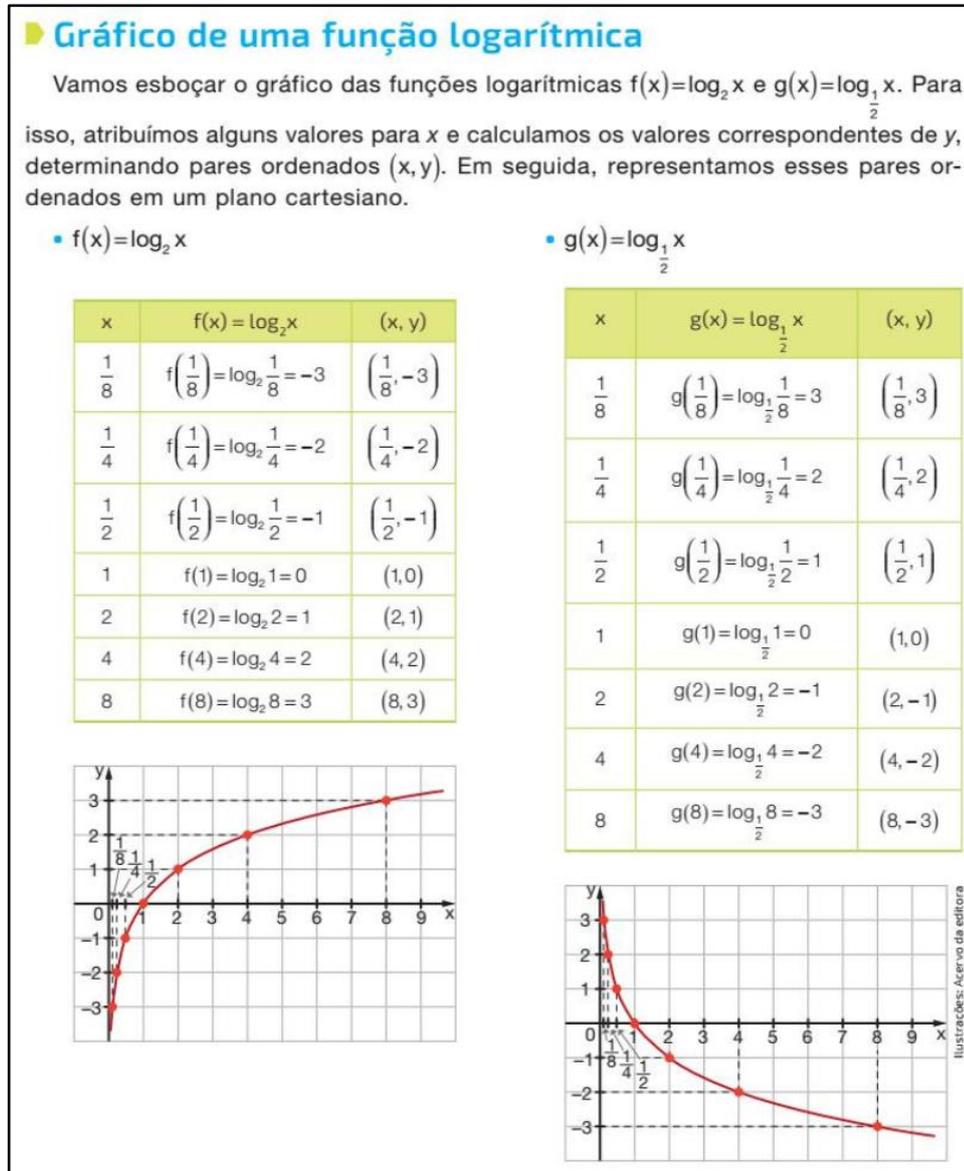
Figura 33 – Função logarítmica no livro Contato Matemática



Fonte: Souza (2016, p. 168).

Após essa definição segue um exemplo usando a linguagem algébrica cuja resolução requer tratamento. Na sequência temos a atividade proposta que irá requerer tratamentos do registro algébrico. Para explicar o gráfico, vemos pela primeira vez no capítulo o uso do registro tabular convertido no gráfico, conforme a figura 34.

Figura 34 – Gráfico da logarítmica no livro Contato Matemática



Fonte: Souza (2016, p.169).

Em seguida temos atividade com a articulação de dois registros sendo eles o algébrico convertido no gráfico e vice-versa.

4 FUNÇÕES NAS AVALIAÇÕES EXTERNAS

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) do ensino médio na área de matemática e suas tecnologias traz cinco competências específicas, sobre as quais nossos discentes devem desenvolver-se, dentre elas, a quarta diz:

Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático. (BNCC, pg 523)

Depreendemos do acima exposto que nossos alunos devem transitar em algumas representações semióticas da matemática para assim alcançar a solução de um problema favorecendo o aprimoramento de seu raciocínio matemático.

Para o estudo de funções alguns registros de representação serão fundamentais para haver uma interpretação correta, são eles, representação algébrica, gráfica e tabular. Saber converter um no outro demonstrará um domínio do conteúdo. O registro em linguagem natural estará presente na maioria dos problemas matemáticos.

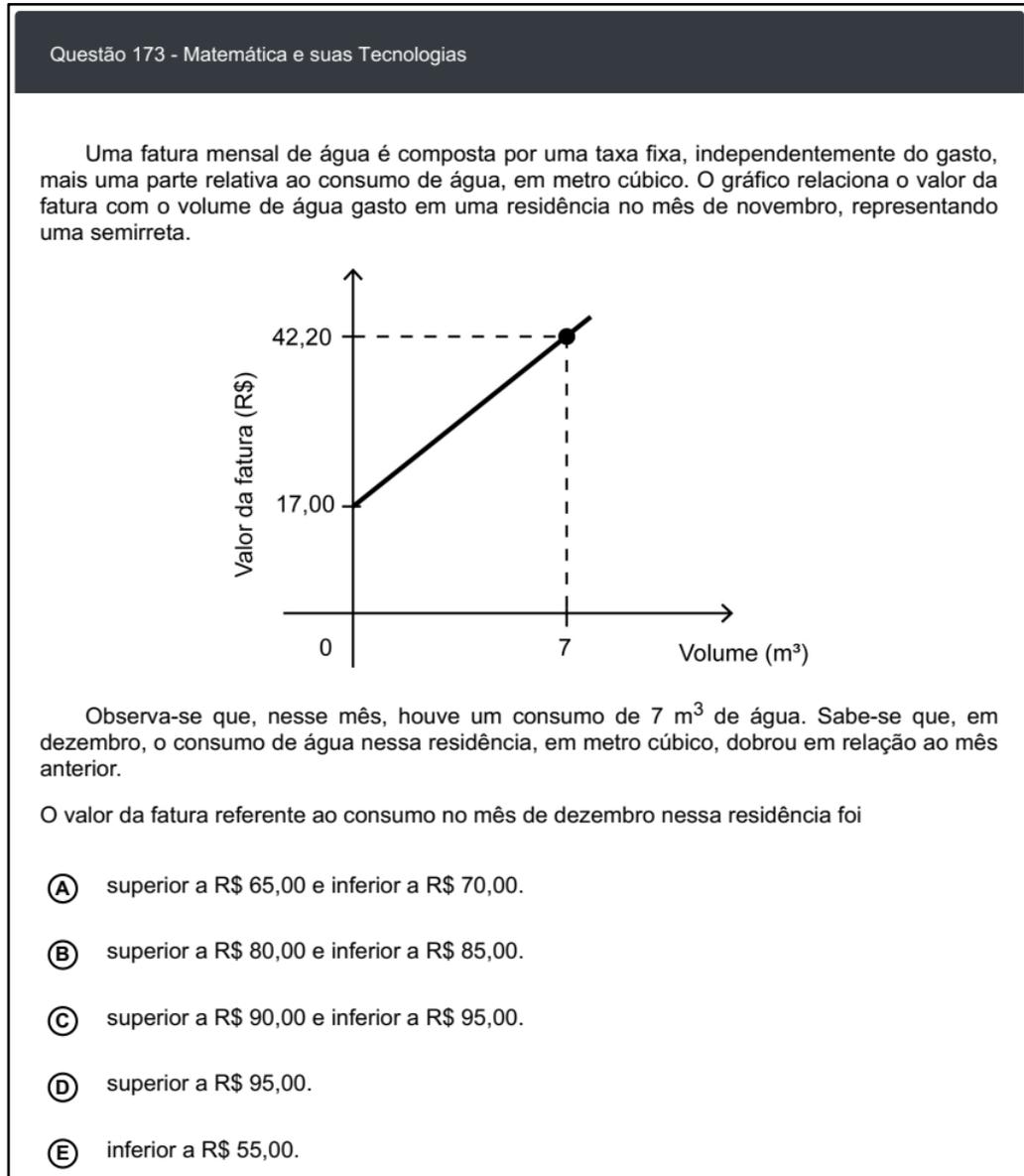
Dentre as avaliações externas, avaliações muitas vezes diferenciadas das atividades cotidianas do ambiente escolar, temos o ENEM, SPAECE e o Saeb. Essas avaliações contam com suas próprias matrizes de referência que contemplam as funções analisadas nesse trabalho.

4.1 Funções no Enem

Na figura 35, temos uma questão sobre função afim. Os registros semióticos usados são: linguagem natural, no início e no comando da questão, e gráfico. Em uma possível resolução da questão, o aluno pode converter o registro gráfico para o algébrico determinando a lei de formação da função. Em seguida

poderá fazer um tratamento no registro algébrico para então encontrar o gabarito da questão, item A.

Figura 35 – Questão 173 da prova amarela do ENEM digital 2020



Fonte: Inep (2020, p.89).

Na figura 36 temos outro exemplo de função afim onde são utilizados o registro em linguagem natural (RLN) e o registro tabular (RT). Na resolução da questão o aluno pode converter o RT no registro algébrico e com o tratamento desse registro ele chegará no gabarito, item D.

Figura 36 – Questão 164 da prova amarela do ENEM 2020

Questão 164

No Brasil, o tempo necessário para um estudante realizar sua formação até a diplomação em um curso superior, considerando os 9 anos de ensino fundamental, os 3 anos do ensino médio e os 4 anos de graduação (tempo médio), é de 16 anos. No entanto, a realidade dos brasileiros mostra que o tempo médio de estudo de pessoas acima de 14 anos é ainda muito pequeno, conforme apresentado na tabela.

Tempo médio de estudo de pessoas acima de 14 anos

Ano da Pesquisa	1995	1999	2003	2007
Tempo de estudo (em ano)	5,2	5,8	6,4	7,0

Disponível em: www.ibge.gov.br. Acesso em: 19 dez. 2012 (adaptado).

Considere que o incremento no tempo de estudo, a cada período, para essas pessoas, se mantenha constante até o ano 2050, e que se pretenda chegar ao patamar de 70% do tempo necessário à obtenção do curso superior dado anteriormente.

O ano em que o tempo médio de estudo de pessoas acima de 14 anos atingirá o percentual pretendido será

A 2018.

B 2023.

C 2031.

D 2035.

E 2043.

Fonte: Inep (202, p. 26).

Na questão da figura 37, sobre função quadrática, observamos que há a presença do registro em linguagem natural (RLN) onde deve haver a interpretação do exposto e durante o texto há ainda a presença do registro algébrico (RA) onde percebemos a relação entre eles na expressão “isto é”. Percebemos que no texto da questão já houve a conversão entre os registros no sentido RLN para RA. Seguindo a leitura ainda no registro em linguagem natural, temos aquilo que o problema pede que façamos para enfim apresentar os itens.

Na resolução devemos encontrar a forma completa da função quadrática com os coeficientes a , b e c . Em seguida calculamos a abscissa do vértice e este é o

procedimento que chamamos de tratamento, pois permaneceremos no registro algébrico para enfim encontrarmos o gabarito que é o item A.

Figura 37 – Questão 162 da prova amarela do ENEM 2021, 2ª aplicação

Questão 162 enem2021

Considere que o modelo matemático utilizado no estudo da velocidade V , de uma partícula de um fluido escoando em um tubo, seja diretamente proporcional à diferença dos quadrados do raio R da seção transversal do tubo e da distância x da partícula ao centro da seção que a contém. Isto é, $V(x) = K^2(R^2 - x^2)$, em que K é uma constante positiva.

O valor de x , em função de R , para que a velocidade de escoamento de uma partícula seja máxima é de

- A** 0.
- B** R .
- C** $2R$.
- D** KR .
- E** K^2R^2 .

Fonte: Inep (2021, p. 53).

Na questão da figura 38 sobre função quadrática temos novamente a presença do registro em linguagem natural na introdução do problema. Os itens são apresentados no registro algébrico dando a entender que para resolvê-la é preciso uma conversão do RLN para o RA.

Aqui nos deparamos com duas situações de resolução onde em ambas haverá a conversão citada acima. A primeira é quando analisamos cada item verificando os dados apresentados com as expressões dadas, e a segunda é encontrar a expressão algébrica, convertendo o RLN para RA usando apenas os dados que a questão forneceu.

Realizada a conversão continuaremos no RA onde o tratamento será realizado da seguinte maneira: depreendemos do texto três pontos pertencentes a parábola e como um deles é a abscissa do vértice, encontramos uma relação que junto dos demais pontos e da lei de formação de uma função quadrática, chegamos

a um sistema de equação linear cuja resolução nos dará os valores dos coeficientes a , b e c , para enfim chegarmos no gabarito, item A.

Figura 38 – Questão 152 da prova amarela do ENEM digital 2020

Questão 152 - Matemática e suas Tecnologias

Em um ano, uma prefeitura apresentou o relatório de gastos públicos realizados pelo município. O documento mostra que foram gastos 72 mil reais no mês de janeiro (mês 1), que o maior gasto mensal ocorreu no mês de agosto (mês 8) e que a prefeitura gastou 105 mil reais no mês de dezembro (mês 12). A curva que modela esses gastos é a parábola $y = T(x)$, com x sendo o número correspondente ao mês e $T(x)$, em milhar de real.

A expressão da função cujo gráfico é o da parábola descrita é

(A) $T(x) = -x^2 + 16x + 57$

(B) $T(x) = -\frac{11}{16}x^2 + 11x + 72$

(C) $T(x) = \frac{3}{5}x^2 - \frac{24}{5}x + \frac{381}{5}$

(D) $T(x) = -x^2 - 16x + 87$

(E) $T(x) = \frac{11}{16}x^2 - \frac{11}{2}x + 72$

Fonte: Inep (2020, p. 67).

Na questão da figura 39 temos a presença do registro em linguagem natural (RLN) no início e no comando da questão e também o registro tabular (RT). Na resolução desse problema, o aluno deverá usar outro registro, o algébrico (RA), executando a conversão do RT no RA.

Para realizar a conversão acima citada o aluno usará os três pontos dados na tabela e com a lei de formação da função quadrática descobrirá os valores dos coeficientes a , b e c . Usando o primeiro ponto da primeira coluna da tabela, descobrimos o valor de c . Em seguida ficaremos com um sistema de equações, onde a partir de sua solução descobrimos os valores de a e b . De posse dos coeficientes escrevemos a lei de formação, e obedecendo ao comando da questão chegaremos no gabarito, item B.

Figura 39 – Questão 152 da prova amarela do ENEM 2019, 2ª aplicação

Questão 152

No desenvolvimento de um novo remédio, pesquisadores monitoram a quantidade Q de uma substância circulando na corrente sanguínea de um paciente, ao longo do tempo t . Esses pesquisadores controlam o processo, observando que Q é uma função quadrática de t . Os dados coletados nas duas primeiras horas foram:

t (hora)	0	1	2
Q (miligrama)	1	4	6

Para decidir se devem interromper o processo, evitando riscos ao paciente, os pesquisadores querem saber, antecipadamente, a quantidade da substância que estará circulando na corrente sanguínea desse paciente após uma hora do último dado coletado.

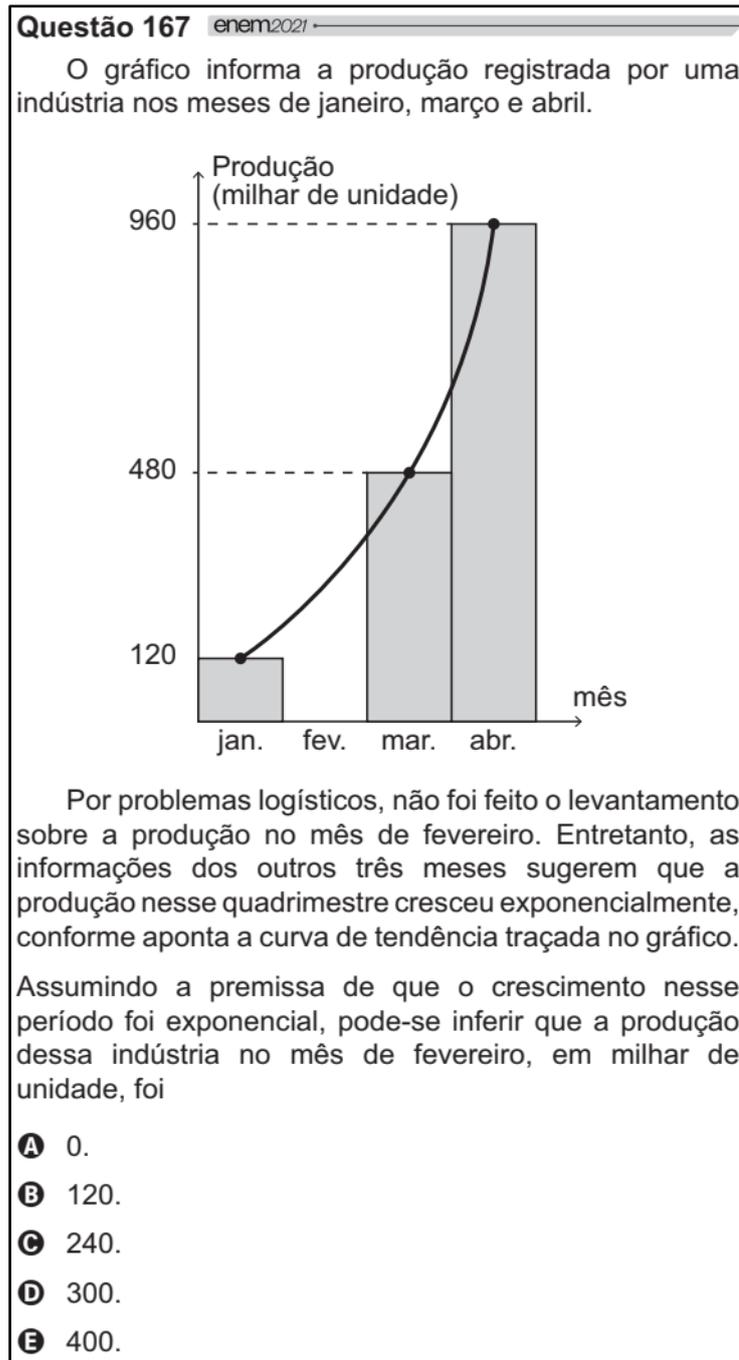
Nas condições expostas, essa quantidade (em miligrama) será igual a

A 4.
 B 7.
 C 8.
 D 9.
 E 10.

Fonte: Inep (2019, p. 22).

Na figura 40 a questão é apresentada em linguagem natural e há ainda o registro gráfico no auxílio da interpretação. Uma possível solução seria converter o registro gráfico no algébrico. Feito isso, basta um tratamento no registro para determinarmos o gabarito, item C.

Figura 40 – Questão 167 da prova amarela do ENEM 2021, 2ª aplicação



Fonte: Inep (2021, p. 56).

Na figura 41 temos uma questão sobre função logarítmica. Percebemos a presença do registro em linguagem natural, registro tabular e ainda o registro algébrico. Apesar de apresentar três representações semióticas, uma possível solução poderá ser feita apenas fazendo um tratamento no registro algébrico, onde usando as propriedades do logaritmo chegamos no gabarito, item C.

Figura 41 – Questão 158 da prova amarela do ENEM 2019

Questão 158

Charles Richter e Beno Gutenberg desenvolveram a escala Richter, que mede a magnitude de um terremoto. Essa escala pode variar de 0 a 10, com possibilidades de valores maiores. O quadro mostra a escala de magnitude local (M_s) de um terremoto que é utilizada para descrevê-lo.

Descrição	Magnitude local (M_s) ($\mu\text{m} \cdot \text{Hz}$)
Pequeno	$0 \leq M_s \leq 3,9$
Ligeiro	$4,0 \leq M_s \leq 4,9$
Moderado	$5,0 \leq M_s \leq 5,9$
Grande	$6,0 \leq M_s \leq 9,9$
Extremo	$M_s \geq 10,0$

Para se calcular a magnitude local, usa-se a fórmula $M_s = 3,30 + \log(A \cdot f)$, em que A representa a amplitude máxima da onda registrada por um sismógrafo em micrômetro (μm) e f representa a frequência da onda, em hertz (Hz). Ocorreu um terremoto com amplitude máxima de 2 000 μm e frequência de 0,2 Hz.

Disponível em: <http://cejarj.cecierj.edu.br>. Acesso em: 1 fev. 2015 (adaptado).

Utilize 0,3 como aproximação para $\log 2$.

De acordo com os dados fornecidos, o terremoto ocorrido pode ser descrito como

A Pequeno.
B Ligeiro.
C Moderado.
D Grande.
E Extremo.

Fonte: Inep (2019, p. 23)

4.2 Funções no space

O Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará (SPAECE) foi implementado no ano de 1992 pela secretaria de educação do estado (SEDUC) tendo como escopo a promoção de um ensino de qualidade e equânime para os alunos da rede pública estadual.

Anualmente o SPAECE avalia os alunos do 5º e do 9º ano do ensino fundamental bem como a 3ª série do ensino médio nas disciplinas de português e matemática. Sobre a matemática, para cada ano/série, inclusive 1ª e 2ª série do ensino médio, há uma matriz de referência onde constam os conteúdos que serão cobrados na referida avaliação. Tal matriz de referência é um grupo de descritores que apresenta “o conteúdo programático a ser avaliado em cada período de escolarização e o nível de operação mental necessário para a realização de determinadas tarefas”. (CAED UFJF, 2022).

Os descritores que tratam de função afim são:

- Descritor 28: Reconhecer a representação algébrica ou gráfica da função polinomial do 1º grau;
- Descritor 29: Resolver situação problema envolvendo função polinomial do 1º grau.

O descritor 28 está presente nas matrizes de cada ano do ensino médio. As questões sobre esse descritor irão pedir para que os alunos articulem dois registros semióticos, o algébrico e o gráfico em ambos os sentidos.

O descritor 29 está presente na matriz do 1º ano. Nele serão usados os registros em linguagem natural, algébrico, tabular e/ou gráfico. E suas resoluções terão conversões e/ou tratamentos.

Os descritores que tratam de funções quadráticas são:

- Descritor 30: Reconhecer a representação algébrica ou gráfica da função polinomial de 2º grau;
- Descritor 31: Resolver situação problema envolvendo função quadrática;
- Descritor 32: Resolver situação-problema que envolva os pontos de máximo ou de mínimo no gráfico de uma função Polinomial do 2º grau.

Os três descritores pertencem à matriz curricular da 1ª série do ensino médio. Havendo uma concordância com o conteúdo programático do livro didático.

No descritor 30 as questões irão pedir para que os alunos saibam reconhecer alguns registros semióticos da função quadrática, são eles: registro em linguagem natural (RLN), registro algébrico (RA) e o registro gráfico (RG). Esses problemas requerem dos discentes a habilidade de converter um registro no outro, seja no sentido do RA para o RG ou vice-versa.

No descritor 31 as questões poderão apresentar RLN, RA, RG e o registro tabular. As soluções serão conversões de um desses registros no outro.

O descritor 32 apresentará os mesmos registros semióticos do descritor 30. Porém, as resoluções poderão apresentar:

- Um tratamento: quando será dado o RA para o cálculo da abscissa e/ou ordenada do vértice;
- Conversão: quando é dado o gráfico de uma função quadrática, apresentando assim o RG para ser transformado em um RA, ou quando a situação problema é dada apenas no RLN para ser transformado no RA.

Os descritores que tratam de função exponencial são:

- Descritor 33: Reconhecer a representação algébrica ou gráfica da função exponencial;
- Descritor 34: Resolver situação-problema envolvendo função exponencial.

Os dois descritores são da matriz do 1º ano. As questões do descritor 33 pedem a articulação de dois registros, são eles: o algébrico e o gráfico. A conversão poderá ocorrer em qualquer ordem.

O descritor 34 usará o registro em linguagem natural, algébrico, gráfico e/ou tabular. Para a resolução das questões, haverá a necessidade de conversão de um registro no outro seguido de tratamento.

Temos um descritor que trata sobre função logarítmica:

- Descritor 35: Reconhecer a representação algébrica ou gráfica da função logarítmica.

Esse descritor pertence à matriz do 1º ano e requer a articulação de dois registros semióticos, o algébrico e o gráfico em qualquer ordem.

4.3 Funções no saeb

O Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb) é uma avaliação em larga escala que abrange todo o Brasil. Aplicada nos anos ímpares. O Saeb (INEP) “reflete os níveis de aprendizagem demonstrados pelos estudantes avaliados, explicando esses resultados a partir de uma série de informações contextuais”.

Assim como no SPAECE, há uma matriz de referência para a matemática, e no ensino médio ela existe apenas para a 3ª série. Há uma relação entre os descritores do SPAECE e Saeb, mudando apenas o número do descritor. Porém, os registros semióticos usados em suas questões são os mesmos.

Sobre função afim, temos; o descritor 19 (Resolver problema envolvendo uma função de primeiro grau) que está relacionado com o descritor 29 do SPAECE. O descritor 23 (Reconhecer o gráfico de uma função polinomial de primeiro grau por meio de seus coeficientes) e o descritor 24 (Reconhecer a representação algébrica de uma função de primeiro grau, dado o seu gráfico) estão relacionados com o descritor 28 do SPAECE.

Sobre função quadrática, o descritor 25 (Resolver problemas que envolvam o ponto de máximo ou de mínimo no gráfico de uma função polinomial do 2º grau) está relacionado com o descritor 32 do SPAECE.

Sobre função exponencial, o descritor 27 (Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função exponencial) está relacionado com o descritor 33 do SPAECE. O descritor 29 (Resolver problema que envolva função exponencial) está relacionado com o descritor 34 do SPAECE.

Sobre função logarítmica, o descritor 28 (Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função logarítmica reconhecendo-a como inversa da função exponencial) está relacionado com o descritor 35 do SPAECE.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No presente trabalho, debatemos um pouco sobre as dificuldades que os alunos apresentam para assimilar os conteúdos da matemática, bem como reconhecer suas mais variadas representações.

Apresentamos a teoria de Raymond Duval, seus conceitos, suas ideias e como tal teoria pode auxiliar na aprendizagem matemática.

Analisamos as funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica nos livros didáticos, usados em escolas estaduais da cidade de Itapajé, à luz da referida teoria de representações semióticas. E percebemos que durante a explanação do conteúdo, é mais proveitoso utilizar na introdução, apenas uma situação inicial que abrangesse todas as representações do objeto matemático estudado, fazendo com que o aluno perceba facilmente as conversões dos registros.

Vimos como os registros semióticos estão presentes nas questões do ENEM e como é importante saber transitar entre esses registros para a resolução das questões.

Verificamos os descritores do SPAECE e Saeb que cobram as funções acima citadas, mostrando como os registros semióticos aparecem e o que é exigido dos alunos.

Este trabalho teve como motivador, uma necessidade que tive para melhorar minhas aulas. E, estudando sobre educação matemática, conheci essa teoria que me auxiliou na minha didática e na compreensão de como melhorar como profissional. Assim, espero ajudar os meus alunos a aprender matemática e aos professores que necessitam aprimorar o processo de ensino-aprendizagem.

Percebemos que o livro didático não pode ser o único material do professor, pois o mesmo pode não apresentar o conteúdo matemático com suas devidas representações concatenadas.

REFERÊNCIAS

- ALENCAR, Alberto Candido Sousa. **A teoria dos registros de representações semióticas e o estudo de funções**. 2017. 46 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2017.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+): Ciências da Natureza, Matemática e Suas Tecnologias**. Brasília: MEC, 2006.
- DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento da compreensão em matemática. *In*: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (org). **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica**. 2. ed. São Paulo: Papirus, 2005. p. 11-33.
- DUVAL, Raymond. **Semiósis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais**. Tradução de Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009. 114 p.
- FRISON, Marli Dallagnol *et al.* **Livro didático como instrumento de apoio para a construção de propostas de ensino de ciências naturais**. 2009. Disponível em: <http://www.fep.if.usp.br/~profis/arquivos/viienpec/VII%20ENPEC%20-%202009/www.foco.fae.ufmg.br/cd/pdfs/425.pdf>. Acesso em: 20 maio 2022.
- IEZZI, Gelson *et al.* **Matemática ciências e aplicações**. 9.ed. São Paulo: Saraiva, 2016.
- INEP. **Provas e gabaritos**. 2021. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>. Acesso em 12 julho 2022.
- KARRER, Mônica. Análise de uma atividade sobre regiões do plano segundo os registros das representações semióticas. *In*: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2011, Recife. [Anais]. [S. l.]: Ciaem, 2011.
- LEONARDO, Fabio Martins de (ed.). **Conexões com a matemática**. 3. Ed. São Paulo: Moderna, 2016.
- MIRANDA, Josias Barbosa de. **Registros de representação semiótica de funções quadráticas: análise de um livro didático**. 2018. 102 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP), São Paulo, 2018.
- SANTAELLA, Lúcia. **O que é semiótica**. São Paulo: Brasiliense, 2002.
- SOUZA, Joamir; GARCIA, Jacqueline. **Contato Matemática**. 1.ed. São Paulo: FTD, 2016.