



Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional

Geometria Esférica: Uma abordagem matricial para os teoremas do cosseno e do seno nos triângulos esféricos

Walter Hugo Virgili



PROFMAT

Rio Claro - SP
2022



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Geometria Esférica: Uma abordagem matricial para os teoremas do cosseno e do seno nos triângulos esféricos

Walter Hugo Virgili

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de Rio Claro.

Orientador
Prof. Dr. Thiago de Melo

Rio Claro - SP
2022

V816g Virgili, Walter Hugo
Geometria Esférica: Uma abordagem matricial para os teoremas do cosseno e do seno nos triângulos esféricos / Walter Hugo Virgili. -- Rio Claro, 2022
51 p. : il.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro

Orientador: Thiago de Melo

1. Geometria elíptica. 2. Matriz. 3. Triângulo esférico. 4. Lei dos cossenos. 5. Lei dos senos. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

TERMO DE APROVAÇÃO

Walter Hugo Virgili

GEOMETRIA ESFÉRICA: UMA ABORDAGEM MATRICIAL PARA OS TEOREMAS DO COSSENO E DO SENO NOS TRIÂNGULOS ESFÉRICOS

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Thiago de Melo
Orientador

Prof. Dr. Jamil Viana Pereira
IGCE/UNESP/Rio Claro (SP)

Prof. Dra. Tatiana Miguel Rodrigues de Souza
FC/UNESP/Bauru (SP)

Rio Claro, 28 de setembro de 2022

*Dedico este trabalho a todas as pessoas que, assim como eu, nunca pensaram em atingir
vôos tão altos.*

Agradecimentos

Agradeço aos Professores Dr. Thiago de Melo e Dr. Jamil Viana Pereira pelo apoio e ideia para a elaboração dessa dissertação, bem como a todos os professores que, além de lecionarem as matérias do núcleo básico, foram sempre muito solícitas com todos os alunos na elaboração de suas dissertações.

Agradeço também a minha esposa Milena, que sempre me incentivou com relação ao meu trabalho e meus estudos.

*Não é o conhecimento, mas o ato de aprender,
não a posse mas o ato de chegar lá,
que concede a maior satisfação.*

Carl Friedrich Gauss

Resumo

Este trabalho tem por objetivo introduzir uma forma alternativa de se demonstrar o teorema dos cossenos (Lei dos cossenos) e o teorema dos senos (Lei dos senos) para triângulos esféricos através de um modelo de matriz de rotação. Inicialmente, fizemos uma retomada histórica sobre as geometrias não Euclidianas e também sobre coordenadas esféricas. Na sequência, definimos conceitos básicos de geometria esférica e os principais teoremas que a envolvem, culminando no modelo matricial para a demonstração dos dois principais teoremas citados. Além disso, mostramos alguns exemplos de aplicação para professores do ensino básico baseados na teoria e aplicações.

Palavras-chave: Geometria elíptica, Matriz, Triângulo esférico, Lei dos cossenos, Lei dos senos.

Abstract

The aim of this work is to introduce an alternative way to prove the cosine theorem (law of cosines) and the law of sines for spherical triangles making use of a rotation matrix model. Initially, we make a historical review of non-Euclidean geometries and of spherical coordinates. Then we define basic concepts of spherical geometry and state the main theorems involving them, culminating in the matrix model to prove the two main theorems just mentioned. In addition, we propose some activities for elementary school teachers based on examples and applications of the theory.

Keywords: Spherical geometry, Matrix, Spherical triangle, Law of cosines, Law of sines.

Lista de Figuras

2.1	Quinto postulado de Euclides	22
2.2	Quinto postulado de Euclides segundo Playfair	23
2.3	Superfície hiperbólica, Euclidiana e elíptica (esférica)	23
2.4	Sistema de coordenadas esféricas	25
2.5	Sistema de coordenadas esféricas para o uso na matriz rotacional	25
3.1	Ângulo esférico α	28
3.2	Fusos esférico e fuso completo	29
3.3	Triângulo esférico	29
3.4	Exemplo de fuso esférico contendo o triângulo esférico ABC	31
3.5	Triângulo esférico ABC	32
3.6	Triângulo esférico ABC e suas tangentes	33
3.7	Triângulo esférico ABC	35
4.1	Localizando o ponto C no referencial \mathcal{A}	37
4.2	Localizando o ponto C no referencial \mathcal{B}	38
4.3	Conversão do referencial \mathcal{B} para o referencial \mathcal{A} usando a matriz de rotação no sentido horário	39
4.4	Conversão do referencial \mathcal{A} para o referencial \mathcal{B} usando a matriz de rotação no sentido anti-horário	40
4.5	Mudança da escolha do referencial	41
5.1	Linha do Equador e um arco paralelo	43
5.2	Posicionamento dos navios	44
5.3	Milha marítima	45
5.4	Localização dos objetos na superfície terrestre	46
5.5	Ataque de um míssil	47

Sumário

1	Introdução	19
2	Pré-requisitos	21
2.1	Geometrias não Euclidianas	21
2.2	Coordenadas esféricas	24
3	Geometria esférica	27
3.1	Definições	27
3.2	Teoremas	29
3.3	A Trigonometria nos triângulos esféricos	33
4	Matriz de rotação	37
4.1	Definição das coordenadas cartesianas para dois referenciais	37
4.2	Utilizando a matriz de rotação	38
4.3	Mudando o referencial	41
5	Atividades	43
5.1	Distâncias percorridas por dois navios	43
5.2	Distância entre dois navios	44
5.3	Resgate de um pescador	46
5.4	Ataque de um míssil	47
6	Conclusão	49
	Referências	51

1 Introdução

‘Os Elementos’ de Euclides marcou a história da Matemática por ser a primeira coleção de livros, onde fora organizado e sintetizado grande parte do conhecimento geométrico adquirido pelo homem. Tal publicação se deu por volta de 300 a.C..

Segundo [1], o pioneirismo de Euclides se deu principalmente na estrutura axiomática com que construiu seu livro, ou seja, ele estabeleceu um conjunto inicial de ideias admitidas como verdadeiras (noções comuns e postulados) e, através destas, todo um conjunto de proposições/teoremas.

‘Os Elementos’ é constituído por treze livros. No livro I, estão os nove axiomas e os cinco postulados iniciais que dão base a toda estrutura geométrica construída por ele.

O quinto postulado, por ter uma elaboração mais complexa que os outros quatro, chamou a atenção de vários matemáticos que, ao longo da história, tentaram o transformar em uma proposição. Nessas inúmeras tentativas, surgiu a concepção de que a geometria Euclidiana não era única e, através das contribuições de Bolyai, Lobachevsky, Riemann entre outros precursores a eles, foram criadas as bases para as geometrias ditas não Euclidianas.

Destacamos duas dessas geometrias: a geometria hiperbólica ou Lobachevskiana e a geometria elíptica (esférica) ou Riemanniana, tendo essa última, o objeto de interesse deste trabalho.

Objetivamos aqui, mostrar uma maneira alternativa para se executar a demonstração dos teoremas do cosseno e do seno nos triângulos esféricos da geometria elíptica (esférica); para isso, não usaremos um processo geométrico de demonstração, mas sim um processo que envolve matrizes de rotação em coordenadas esféricas. Tal método tende a tornar mais simples o entendimento dos teoremas acima citados.

Os teoremas do cosseno e do seno são considerados fundamentais para o desenvolvimento de toda a trigonometria nos triângulos esféricos, sendo chamados até de códigos genéticos das fórmulas do triângulo esférico, cuja aplicabilidade mais notória se dá nos conceitos básicos da navegação marítima.

A demonstração geométrica desses teoremas pode ser um processo complicado e difícil de entender; logo, uma abordagem de ordem mais algébrica para os teoremas tende a torná-los mais facilmente compreensíveis.

Em uma primeira etapa, traremos alguns pré-requisitos históricos a respeito das geometrias ditas não Euclidianas e também faremos uma revisão de coordenadas esféricas, com o intuito de ajudar o leitor na compreensão dos conceitos utilizados nas matrizes de rotação.

Em uma segunda etapa, definiremos alguns aspectos teóricos da geometria elíptica (esférica) e também enunciaremos e demonstraremos alguns teoremas para finalmente também enunciar e demonstrar os teoremas do cosseno e do seno nos triângulos esféricos.

Na terceira etapa, mostraremos como a matriz de rotação torna a demonstração dos teoremas do cosseno e do seno mais rápidas e compreensíveis.

Finalmente, na quarta e última etapa desse trabalho, mostraremos alguns exemplos de aplicação da geometria elíptica (esférica) para o ensino médio, resolvendo e comentando cada um deles.

2 Pré-requisitos

2.1 Geometrias não Euclidianas

As geometrias não Euclidianas tiveram sua origem há dois séculos e, segundo [2], iniciaram uma revolução na Matemática que, pelo alcance filosófico e científico, pode ser comparada com as ideias de Copérnico na Astronomia e também com as inovadoras e irreverentes ideias de Darwin na sua obra *Origens das Espécies*.

A comunidade científica dos anos de 1820 deve ter ficado perplexa quando soube da possibilidade de uma geometria diferente daquela escrita por Euclides em seu livro *Os Elementos* que, até então, era tida como a única e verdadeira interpretação do espaço em que estamos.

Devemos lembrar que na época de sua publicação, *Os Elementos* era de tal importância para a Ciência de uma maneira geral, como a *Bíblia* é para o mundo cristão.

Atualmente, conceitos como a teoria da relatividade de Einstein não nos causam tanto pavor, mas tente pensar nos intelectuais do passado tendo pela primeira vez observado as teorias das geometrias não Euclidianas.

Hoje em dia, tal geometria é indispensável para o estudo da cosmologia relativista, navegação entre outros.

A teoria axiomática desenvolvida por Euclides em sua obra foi o grande marco para a construção de sua geometria. Uma teoria é dita axiomatizada quando é construída a partir de axiomas, ou seja, afirmações aceitas sem qualquer comprovação. Podemos entender então que uma obra tem como ponto de partida alguns princípios básicos (axiomas ou postulados) que são escolhidos arbitrariamente e, a partir deles, toda a teoria é desenvolvida.

Ainda segundo [2], uma teoria axiomática é tanto mais elegante quanto menor for o número de axiomas, e esses devem ser *consistentes*, *suficientes* e *independentes* um dos outros. A *consistência* de um axioma se dá no fato de ele não levar a teoremas contraditórios, isto é, a um teorema e à sua negação.

Podemos tomar como exemplo uma geometria que demonstre as relações métricas em um triângulo retângulo e por outro lado conduza à sua negação.

O conjunto de axiomas é *suficiente* quando toda a teoria pode ser desenvolvida sem a necessidade de novos axiomas; sua *independência* se dá no fato de nenhum axioma pode ser demonstrado a partir de outros. Caso isso ocorra, tal axioma se transforma em um teorema da teoria; com isso, o número de axiomas diminui tornando a teoria cada vez mais enxuta, mais elegante.

Vejamos aqui os 9 axiomas e os 5 postulados escritos por Euclides no Livro I dos *Os Elementos*, todos retirados de [3].

Axiomas

- i) As coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si.
- ii) E, caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais.
- iii) E, caso de iguais sejam subtraídas iguais, as restantes são iguais.
- iv) E, caso iguais sejam adicionadas a desiguais, os todos são desiguais.
- v) E os dobros da mesma coisa são iguais entre si.
- vi) E as metades da mesma coisa são iguais entre si.
- vii) E as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si.
- viii) E o todo é maior do que a parte.
- ix) E duas retas não contem uma área.

Postulados

- i) Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
- ii) Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.
- iii) E, com todo centro e distância, descrever um círculo.
- iv) E serem iguais entre si todos os ângulos retos.
- v) E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongada as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos.

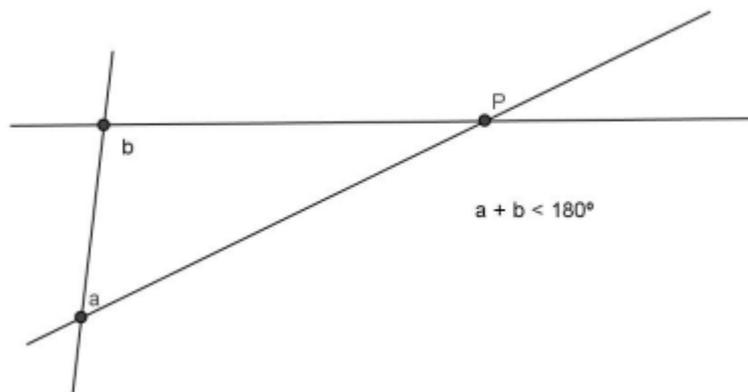


Figura 2.1: Quinto postulado de Euclides

Este último postulado é chamado de *Postulado das Paralelas* e possui uma versão mais conhecida, apresentada em 1795 por John Playfair: “Por um ponto P exterior a uma reta r , ambos em um mesmo plano, existe uma única reta paralela à reta r ”.

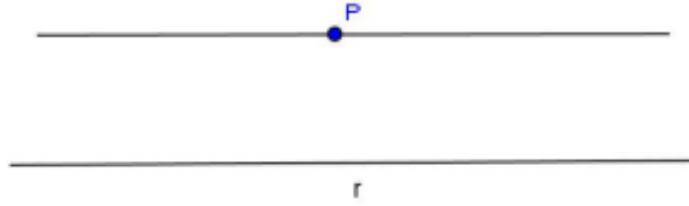


Figura 2.2: Quinto postulado de Euclides segundo Playfair

Apresentados os 9 axiomas e os 5 postulados, Euclides escreveu toda a sua geometria que, por anos, foi considerada a única possível, já que não contraria os nossos sentidos.

O postulado das paralelas, por ter uma elaboração mais complexa que os outros quatro, chamou a atenção de vários matemáticos que, ao longo da história, tentaram transformá-lo em uma proposição. Nessas inúmeras tentativas, surgiu a concepção de que a geometria Euclidiana não era única e, através das contribuições de Gauss, Bolyai, Lobachevsky, Riemann entre outros precursores a eles, foram criadas as bases para as geometrias ditas não Euclidianas.

Dependendo da maneira como se considera o postulado das paralelas, podem aparecer três situações distintas: (i) existe uma única reta paralela à reta r ; (ii) existem inúmeras retas paralelas à reta r ; (iii) não existe nenhuma reta paralela à reta r .

No primeiro caso, estamos falando da geometria Euclidiana; no segundo caso, estamos falando da geometria hiperbólica e finalmente, no terceiro caso, estamos falando da geometria elíptica (esférica).

Fica difícil imaginar tais situações acontecendo no plano dado por Euclides, visualiza-se melhor tais geometrias escolhendo outras superfícies nas quais podem se desenvolver modelos para expô-las. Segundo [4], um modelo de geometria é um ambiente no qual seus conceitos, postulados e teoremas são interpretados e suas afirmações aceitas como verdadeiras.

A pseudo-esfera e a esfera são as superfícies tridimensionais adequadas a essas teorias, respectivamente, da geometria hiperbólica e elíptica (esférica). A esfera e a pseudo-esfera têm curvaturas constantes positiva e negativa, respectivamente. O plano, superfície de curvatura nula, está ligado à geometria Euclidiana, que pode ser considerada como meio termo entre as duas geometrias não Euclidianas.



Figura 2.3: Superfície hiperbólica, Euclidiana e elíptica (esférica)

Segundo [2], a geometria hiperbólica foi desenvolvida independentemente por dois matemáticos contemporâneos, o russo Nicolai Lobachevsky e pelo húngaro Janos Bolyai.

Nicolai dedicou mais de 20 anos à sua descoberta. A primeira apresentação pública do seu trabalho ocorreu em 1826, na cidade de Kazan; porém, sem nenhuma aceitação, pois seu trabalho colocava em dúvidas a então inquestionável geometria Euclidiana.

Bolyai, em carta a seu pai, o também matemático Farkas Bolyai, datada de 1823 narrava a descoberta de Janos a respeito de uma nova geometria. Tal fato fez Farkas responder a seu filho para que desistisse de tal descoberta, logo abaixo, está um trecho da carta de Farkas a seu filho:

‘Você não deve tentar esta abordagem para as paralelas. Conheço este caminho até o fim. Cruzei essa noite sem fundo, que extinguiu toda a luz e alegria da minha vida. Eu imploro, deixe a ciência das paralelas em paz. [...] Pensei que me sacrificaria por causa da verdade. Eu estava pronto para me tornar um mártir que removeria o defeito da geometria e a devolveria purificada à humanidade. Realizei monstruosos e enormes trabalhos: minhas criações são muito melhores do que as dos outros e mesmo assim não consegui satisfação completa. [...] Voltei quando vi que nenhum homem pode chegar no final desta noite. Voltei inconsolado, compadecendo a mim e a toda a humanidade. Aprenda com o meu exemplo: eu queria saber sobre as paralelas. Eu permaneço ignorante, isso levou todas as flores da minha vida e todo o meu tempo. [...] Admito que não espero nada com o desvio de suas linhas. Parece-me que eu estive nestas regiões; que passei por todos os recifes deste Mar Morto infernal e sempre voltei com um mastro quebrado e uma vela rasgada. A ruína da minha disposição e a minha queda datam deste tempo. Arrisquei impensadamente minha vida e minha felicidade – aut Ceasar aut nihil (ou César ou Nada).’

Bolyai não mostrou nenhuma indecisão nas suas convicções; porém, não aprofundou as suas ideias, como fez Lobachevsky sendo o primeiro a expor publicamente as suas descobertas em um número de ‘papers’, culminando com sua *Pangeometria* de 1855.

A geometria elíptica foi desenvolvida pelo alemão Georg Bernhard Riemann que, contrariando o quinto postulado de Euclides, propõe que não existem paralelas a uma reta dada.

Na geometria de Riemann abandona-se a noção de ‘estar entre’ e a reta não é mais infinita, mas sim limitada.

Esta geometria foi considerada pela primeira vez na aula inaugural pronunciada em 1851 por Riemann para sua admissão como professor adjunto na universidade de Göttingen. Riemann apontou as possibilidades de outras geometrias e conseqüentemente outros espaços.

2.2 Coordenadas esféricas

Como auxílio para o entendimento do modelo matricial exposto no Capítulo 4, faremos aqui uma breve explicação sobre coordenadas esféricas. Tais conteúdos podem ser consultados a fundo em [5].

Coordenadas esféricas posicionam pontos no espaço com dois ângulos e uma distância, como mostra a figura 2.4. A primeira coordenada, $\rho = |\overline{OP}|$, é a distância do ponto P à origem O do sistema de coordenadas. Diferentemente de r (quando usado em coordenadas polares), a variável ρ nunca é negativa.

A segunda coordenada, ϕ , é o ângulo que \overline{OP} forma com o eixo- z positivo. É necessário que esteja no intervalo $[0, \pi]$.

A terceira coordenada, θ , é o ângulo como medido em coordenadas cilíndricas, ou seja, o ângulo entre o eixo- x (a partir do eixo- x positivo) e a projeção $\overline{OP'}$ de \overline{OP} no plano- xy .

Neste caso, $0 \leq \theta < 2\pi$.

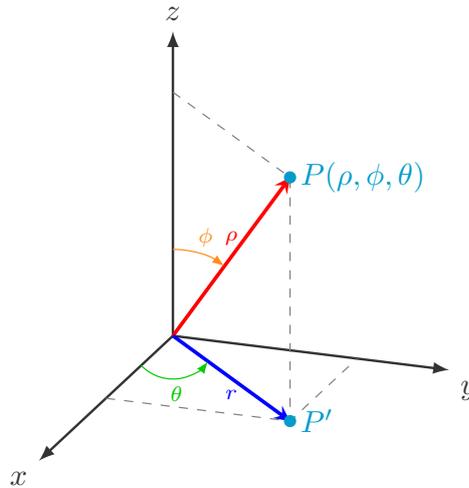


Figura 2.4: Sistema de coordenadas esféricas

As equações que relacionam as coordenadas esféricas, as coordenadas cartesianas e as coordenadas cilíndricas são:

$$r = \rho \cdot \text{sen } \phi, \quad x = r \cdot \cos \theta = \rho \cdot \text{sen } \phi \cdot \cos \theta, \quad (2.1)$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{r^2 + z^2} \quad y = r \cdot \text{sen } \theta = \rho \cdot \text{sen } \phi \cdot \text{sen } \theta, \quad (2.2)$$

$$z = \rho \cdot \cos \phi, \quad (2.3)$$

Com o modelo teórico exposto acima, faremos algumas modificações necessárias para o entendimento do modelo proposto no Capítulo 4.

Observemos a figura 2.5, onde $A \neq O$ e também $A \notin z$. Para facilitar, escreveremos apenas x, y, z ao invés de x_A, y_A, z_A .

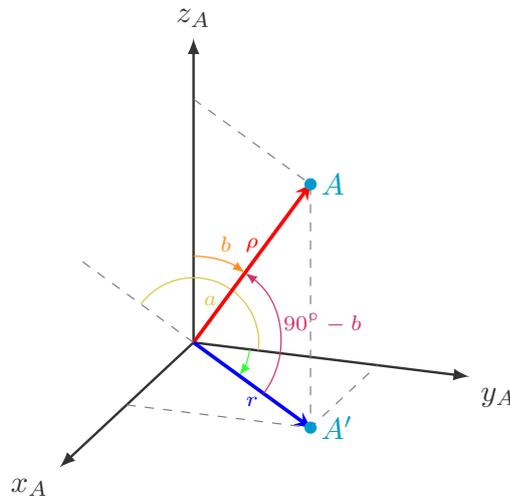


Figura 2.5: Sistema de coordenadas esféricas para o uso na matriz rotacional

Logo, temos:

$$\cos(b) = \frac{z}{\rho} \quad \therefore \quad z = \rho \cdot \cos(b) \quad (2.4)$$

$$\cos(180^\circ - a) = \frac{y}{r} \quad \therefore \quad y = r \cdot \cos(180^\circ - a) \quad (2.5)$$

$$\sin(180^\circ - a) = \frac{x}{r} \quad \therefore \quad x = r \cdot \sin(180^\circ - a) \quad (2.6)$$

$$\sin(b) = \frac{r}{\rho} \quad \therefore \quad r = \rho \cdot \sin(b) \quad (2.7)$$

Substituindo (2.7) em (2.5) e (2.6) e particularizando para $\rho = 1$ (raio unitário), temos:

$$x = \sin(180^\circ - a) \cdot \sin(b),$$

$$y = \cos(180^\circ - a) \cdot \sin(b),$$

$$z = \cos(b).$$

Ainda, como $\sin(b) = \cos(90^\circ - b)$ e $\cos(b) = \sin(90^\circ - b)$, temos:

$$x = \sin(180^\circ - a) \cdot \cos(90^\circ - b),$$

$$y = \cos(180^\circ - a) \cdot \cos(90^\circ - b),$$

$$z = \sin(90^\circ - b).$$

Usaremos no Capítulo 4 essas coordenadas para identificar um ponto no espaço esférico.

3 Geometria esférica

Apresentaremos nesse capítulo as principais definições da geometria esférica, bem como alguns teoremas que se farão necessários para a compreensão dos resultados que discutiremos no próximo capítulo. Tais definições/teoremas são encontrados em [4] e [6].

3.1 Definições

A seguir, eis algumas definições básicas para a geometria esférica.

ESFERA: Seja um ponto O no espaço e r um número real positivo. É chamado de esfera de centro O e raio r o lugar geométrico dos pontos P do espaço cuja distância até O é menor ou igual a r .

SUPERFÍCIE ESFÉRICA: O lugar geométrico dos pontos onde a distância entre O e P é igual a r é chamado de superfície esférica.

CORDA: O segmento de reta com extremos em dois pontos distintos de uma superfície esférica é chamado de corda da esfera.

DIÂMETRO: Toda corda que passa pelo centro O é chamada de diâmetro da esfera.

PONTOS ANTÍPODAS: Dados P e P' pontos pertencentes à superfície esférica e diametralmente opostos, ou seja, tais que PP' é um diâmetro da esfera, diremos que o ponto P' é o antípoda do ponto P ou que P e P' são pontos antipodais.

CIRCUNFERÊNCIA MÁXIMA: Dada uma superfície esférica S de centro O e raio r , denomina-se circunferência máxima toda circunferência oriunda da intersecção de S com um plano que contém o centro O .

ELEMENTOS NOTÁVEIS DA SUPERFÍCIE ESFÉRICA:

- i) **Eixo:** É qualquer reta que contém o centro O .
- ii) **Polos:** São os dois pontos de intersecção da superfície esférica com um eixo.
- iii) **Equador:** É uma circunferência máxima cujo plano que a contém é perpendicular a um eixo pré-fixado.
- iv) **Meridiano:** É uma semicircunferência máxima cujo plano que a contém também contém o eixo e liga os Polos.
- v) **Paralelo:** É uma circunferência contida em um plano que é perpendicular ao eixo e paralelo ao Equador.

HEMISFÉRIO: A divisão da superfície esférica S através de uma circunferência máxima gera duas regiões, chamadas de hemisfério (ou superfície semiesférica).

ARCO: Um arco de circunferência de extremos A e B (\widehat{AB}) é cada uma das partes em que fica dividida uma circunferência por dois de seus pontos.

QUADRANTE: É um arco de circunferência máxima que mede exatamente $\frac{\pi}{2}$ radianos.

DISTÂNCIA: É o mínimo comprimento entre as possíveis trajetórias sobre a superfície esférica partindo de um ponto e atingindo o segundo.

GEODÉSICA: É a curva que simboliza a menor distância entre dois pontos distintos na superfície esférica S , ou seja, o comprimento do menor arco de uma circunferência máxima que passa por esses dois pontos.

RETA TANGENTE A UMA ESFERA: Dada uma esfera de centro O e dado um ponto P desta esfera, considere o plano perpendicular ao segmento OP , que contém P . Qualquer reta contida neste plano que contenha o ponto P é dita ser tangente a esfera neste ponto.

ÂNGULO ESFÉRICO: É o ângulo formado pela interseção de duas circunferências máximas (ou por dois arcos de circunferências máximas). Sua medida coincide com o ângulo plano formado por duas retas tangentes a essas circunferências máximas em um dos pontos de interseção das mesmas.

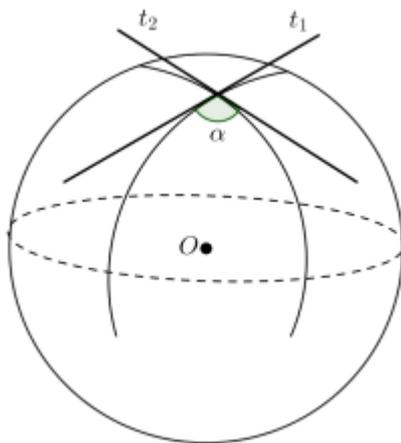


Figura 3.1: Ângulo esférico α

FUSO ESFÉRICO: É a região compreendida entre dois meridianos. Dado um fuso ϕ na superfície esférica, o conjunto formado por todos os antípodas dos pontos de ϕ é também um fuso ϕ' , chamado de fuso antípoda de ϕ . A união $\Phi = \phi \cup \phi'$ chama-se fuso completo.

TRIÂNGULO ESFÉRICO: Sejam três pontos distintos sobre uma superfície esférica e não pertencentes a uma mesma circunferência máxima. A superfície limitada pelos três arcos de circunferência máxima que unem esses pontos dois a dois, chama-se triângulo esférico.

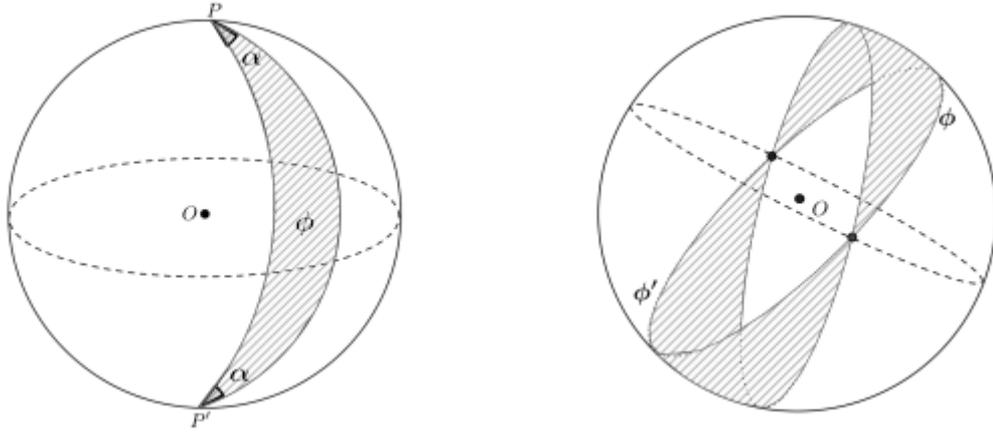


Figura 3.2: Fusos esférico e fuso completo

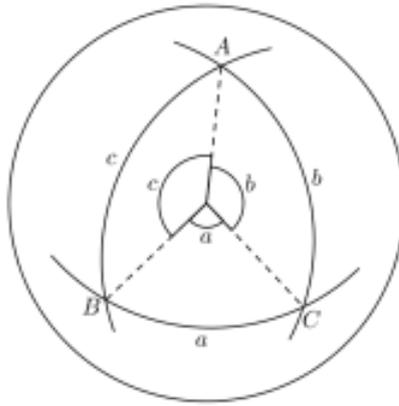


Figura 3.3: Triângulo esférico

Na figura 3.3 temos o triângulo esférico ABC . Seus lados são as geodésicas a, b, c . Seus ângulos internos são $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$.

Para a próxima seção, faremos uma transição do uso de elementos geométricos para o uso de um sistema de coordenadas. Por exemplo, geometricamente, uma circunferência foi descrita com um lugar geométrico, dependendo do centro O e de um raio r . Mas, com a introdução de um sistema de coordenadas, esta circunferência pode ser descrita pela equação $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, onde x_0 e y_0 são as coordenadas do centro O . Basta observar que a equação anterior provém do cálculo da distância entre dois pontos, no sistema de coordenadas fixado.

3.2 Teoremas

Teorema 3.1. *A área de uma superfície esférica de raio r é $4\pi r^2$.*

Demonstração. Se uma função $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ com $f(x) \geq 0$ é continuamente derivável em $[a, b]$, a área da superfície gerada pela rotação da curva $y = f(x)$ em torno do eixo- x é dada por

$$A = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Tomando $f: [-r, r] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, com derivada $f'(x) = \frac{1}{2}(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$, e rotacionando seu gráfico em torno do eixo- x , obtendo assim a superfície de uma esfera de centro $(0, 0, 0)$ e raio r , temos que:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-r}^r 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx \\ &= 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}} dx = 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx \\ &= 2\pi r \int_{-r}^r dx = 2\pi r^2 + 2\pi r^2 = 4\pi r^2. \quad \square \end{aligned}$$

Corolário 3.2. A área A_f de um fuso esférico é $2\alpha r^2$, onde r é o raio da superfície esférica e α é o ângulo do fuso.

Demonstração. Pensando que a esfera é um fuso de ângulo máximo 2π , existe uma proporção entre as grandezas, tais que

$$\frac{A_f}{4\pi r^2} = \frac{\alpha}{2\pi} \Rightarrow A_f = \frac{4\pi r^2 \alpha}{2\pi} = 2\alpha r^2. \quad \square$$

Corolário 3.3. Seja ϕ o fuso construído sobre uma superfície esférica de raio r e ϕ' o fuso antípoda de ϕ . Então, a área do fuso completo $\Phi = \phi \cup \phi'$ é igual a $4\alpha r^2$, onde α é o ângulo do fuso esférico.

Demonstração. Note que α é o ângulo oposto pelo vértice das tangentes aos meridianos geradores do fuso ϕ , concluímos a partir daí que ele é também o ângulo do fuso ϕ' .

Segue que ϕ' tem a mesma área de ϕ que, pelo Corolário 3.2, é igual a $2\alpha r^2$. Logo, a área do fuso completo é igual a $4\alpha r^2$. \square

Teorema 3.4. Seja Φ um Fuso Completo, cujo ângulo mede α radianos. Qualquer plano que passe pelo centro da Superfície Esférica S , a decompõe em dois hemisférios H e H' . As partes R e R' do Fuso Completo Φ contidas em cada um desses hemisférios têm a mesma área $2\alpha r^2$.

Demonstração. Considere a função $f: S \rightarrow S$, que transforma cada ponto $x \in S$ em seu antípoda $f(x) = x'$. Esta função tem as seguintes propriedades:

- i) Se x é um ponto do hemisfério H , seu antípoda $x' = f(x)$ pertence ao hemisfério oposto H' ;
- ii) Se x é um ponto do fuso completo Φ , seu antípoda $x' = f(x)$ ainda pertence a Φ ;
- iii) Dada qualquer região R da superfície esférica, a região antípoda $R' = f(R)$, formada pelos pontos antípodas dos pontos de R , tem a mesma área que R .

Então, se chamarmos de R a parte do fuso completo Φ situada no hemisfério H , veremos que sua região antípoda R' é a parte de Φ situada no hemisfério H' e que

$$\text{área}(\Phi) = \text{área}(R) + \text{área}(R') = 2 \cdot \text{área}(R).$$

Logo, pelo Corolário 3.3, a área de R é igual a $2\alpha r^2$. \square

Teorema 3.5. *Se α, β, γ são os ângulos internos de um triângulo esférico, medidos em radianos, então $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{A}{r^2}$, onde A é a área do triângulo esférico e r é o raio da superfície esférica que o contém.*

Demonstração. Seja H um hemisfério que contenha o triângulo esférico gerado pelas intersecções das circunferências máximas C_1, C_2 e C_3 (Figura 3.4).

Prolongando-se nos dois sentidos os lados que formam o ângulo α até encontrarem o bordo do hemisfério H , obtém-se uma região R_α , cuja área mede $2\alpha r^2$ (Teorema 3.4).

De maneira análoga, agora para os ângulos β e γ , obtém-se as regiões R_β e R_γ , cujas áreas são $2\beta r^2$ e $2\gamma r^2$, respectivamente.

Note que a união das regiões R_α, R_β e R_γ formam o hemisfério H , no qual a área do triângulo esférico é contada três vezes. Sendo A a área do triângulo esférico, temos:

$$\text{Área}(R_\alpha) + \text{Área}(R_\beta) + \text{Área}(R_\gamma) - 2A = \text{Área}(H)$$

$$2\alpha r^2 + 2\beta r^2 + 2\gamma r^2 - 2A = 2\pi r^2$$

$$\alpha r^2 + \beta r^2 + \gamma r^2 - A = \pi r^2$$

$$\alpha + \beta + \gamma - \frac{A}{r^2} = \pi$$

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{A}{r^2}. \quad \square$$

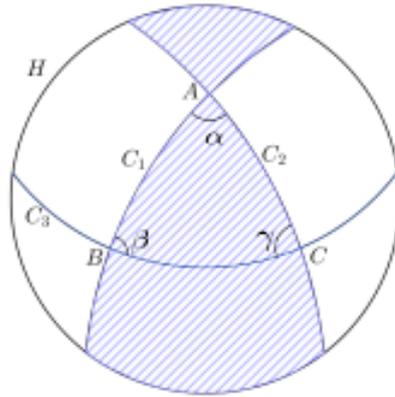


Figura 3.4: Exemplo de fuso esférico contendo o triângulo esférico ABC

Corolário 3.6. *A área de um triângulo esférico é dada por $A = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)r^2$, onde α, β, γ são os ângulos entre os lados do triângulo esférico e r é o raio da superfície esférica que o contém.*

Corolário 3.7. *Se as medidas dos ângulos internos de um triângulo esférico ABC são α, β, γ , então $\pi < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi$.*

Demonstração. Sendo A a área do triângulo esférico ABC , pelo Teorema 3.5, podemos concluir que se $A > 0$ então $\alpha + \beta + \gamma > \pi$. Mas, todo ângulo interno de um triângulo esférico é menor que π , então $\alpha + \beta + \gamma < \pi + \pi + \pi = 3\pi$. \square

Teorema 3.8. *Cada lado de um triângulo esférico é menor que a soma e maior que a diferença dos outros dois lados.*

Demonstração. Pela figura 3.5, podemos observar que:

- i) Lado AB do triângulo esférico (arco de comprimento c) é igual ao ângulo $A\hat{O}B$, em radianos.
- ii) Lado AC do triângulo esférico (arco de comprimento b) é igual ao ângulo $A\hat{O}C$, em radianos.
- iii) Lado BC do triângulo esférico (arco de comprimento a) é igual ao ângulo $C\hat{O}B$, em radianos.

Para o caso em que os lados a , b e c ($C\hat{O}B$, $A\hat{O}C$ e $A\hat{O}B$, respectivamente) são todos iguais, o teorema é verdadeiro.

Seja c ($A\hat{O}B$) o maior lado do triângulo esférico ABC , se $c < b + a$, o teorema será válido para as demais situações ($b < a + c$ e $a < b + c$).

Sobre OA tome um ponto X qualquer; sobre OB tome um ponto Y e sobre XY um ponto P de modo que $X\hat{O}P = A\hat{O}C$. Sobre OC tome um ponto Z de modo que $OZ = OP$. Unindo-se X e Y a Z obtemos o triângulo XPZ no qual $XP = XZ$, pois os triângulos XOZ e XOP são congruentes (critério lado-ângulo-lado).

Pela desigualdade triangular, temos que $XZ + ZY > XY$, então, $XZ + ZY > XP + PY$, como $XP = XZ$, temos que $ZY > PY$.

Como $ZY > PY$, temos que $Z\hat{O}Y > P\hat{O}Y$. Logo, $X\hat{O}Z + Z\hat{O}Y > X\hat{O}P + P\hat{O}Y = X\hat{O}Y$.

Com isso, temos $b + a > c$.

Agora, subtraindo b de ambos os lados da desigualdade anterior, temos $a > c - b$, fazendo o mesmo, mas agora subtraindo a , temos $b > c - a$.

De $c + b > a$, subtraindo b de ambos os lados, temos $c > a - b$. □

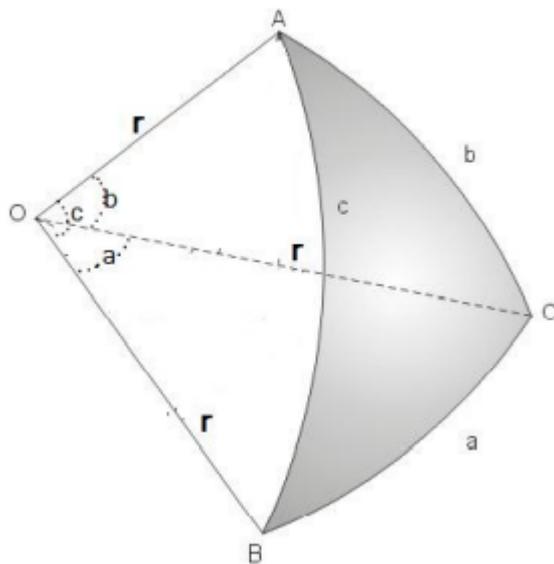


Figura 3.5: Triângulo esférico ABC

3.3 A Trigonometria nos triângulos esféricos

Agora já mais direcionados aos triângulos esféricos, enunciaremos os dois principais teoremas da trigonometria esférica, a saber, a *Lei dos Senos* e a *Lei dos Cossenos*. Junto com o Teorema 3.5, essas são as principais ferramentas para a manipulação dos triângulos esféricos.

Esses dois resultados serão novamente discutidos no Capítulo 4, onde traremos uma maneira mais algébrica para sua demonstração.

Teorema 3.9 (Lei dos cossenos). *Em qualquer triângulo esférico de lados a, b, c e ângulos internos opostos $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$, respectivamente, temos:*

$$\begin{aligned} \cos(a) &= \cos(b) \cdot \cos(c) + \operatorname{sen}(b) \cdot \operatorname{sen}(c) \cdot \cos(\hat{A}), \\ \cos(b) &= \cos(a) \cdot \cos(c) + \operatorname{sen}(a) \cdot \operatorname{sen}(c) \cdot \cos(\hat{B}), \\ \cos(c) &= \cos(a) \cdot \cos(b) + \operatorname{sen}(a) \cdot \operatorname{sen}(b) \cdot \cos(\hat{C}). \end{aligned}$$

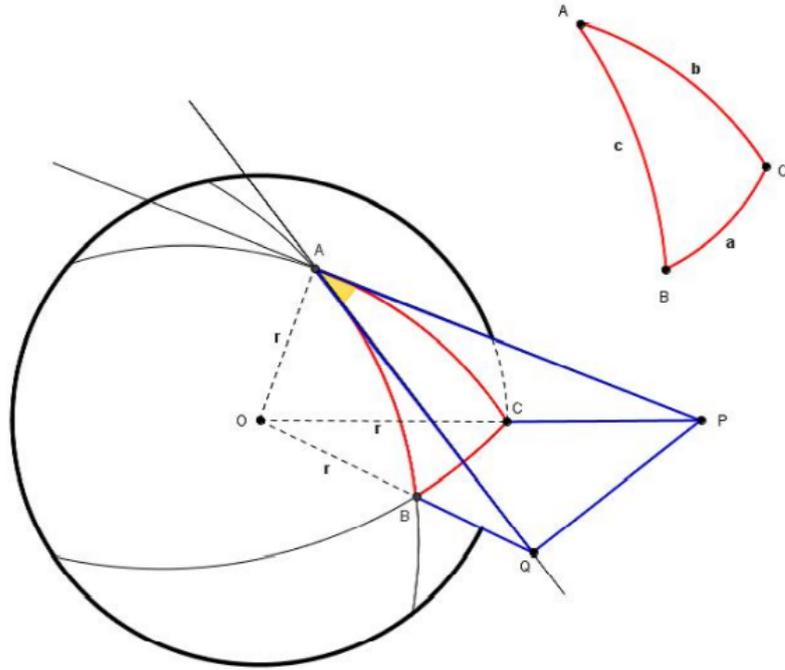


Figura 3.6: Triângulo esférico ABC e suas tangentes

Demonstração. Seja ABC um triângulo esférico sobre uma esfera de centro O e raio $r \equiv OA \equiv OB \equiv OC = 1$ (Figura 3.6).

O lado a equivale ao ângulo central $C\hat{O}B$, o lado b equivale ao ângulo central $A\hat{O}C$ e o lado c equivale ao ângulo central $A\hat{O}B$.

O ângulo interno \hat{A} é o ângulo formado pelas retas tangentes aos arcos \widehat{AB} e \widehat{AC} que passam por \hat{A} . O ângulo interno \hat{B} é o ângulo formado pelas retas tangentes aos arcos \widehat{BA} e \widehat{BC} passando por \hat{B} e o ângulo interno \hat{C} é o ângulo formado pelas retas tangentes aos arcos \widehat{CA} e \widehat{CB} passando por \hat{C} .

Os lados a, b e c são opostos, respectivamente, aos ângulos \hat{A}, \hat{B} e \hat{C} .

Prolongando as tangentes que passam por \hat{A} e as semirretas \overrightarrow{OB} e \overrightarrow{OC} , temos que estas se encontram nos pontos P e Q (Figura 3.6).

As retas \overrightarrow{PA} e \overrightarrow{QA} são tangentes à superfície da esfera e, portanto, as semirretas \overrightarrow{AO} e \overrightarrow{AP} são perpendiculares, pois uma reta tangente a uma esfera é perpendicular ao raio. O mesmo acontece com as semirretas \overrightarrow{AO} e \overrightarrow{AQ} .

Pela geometria plana, os triângulos retângulos OAP e OAQ (retângulos em \hat{A}) possuem as seguintes relações trigonométricas:

$$\cos(b) = \frac{\overline{AO}}{\overline{PO}}, \quad \text{sen}(b) = \frac{\overline{AP}}{\overline{PO}}, \quad \cos(c) = \frac{\overline{AO}}{\overline{QO}}, \quad \text{sen}(c) = \frac{\overline{AQ}}{\overline{QO}}.$$

Utilizando o teorema de Pitágoras nos triângulos OAP e OAQ , temos:

$$\overline{PO}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{AP}^2, \quad (3.1)$$

$$\overline{QO}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{AQ}^2. \quad (3.2)$$

Somando as equações (3.1) e (3.2) temos:

$$\begin{aligned} \overline{PO}^2 + \overline{QO}^2 &= 2\overline{AO}^2 + \overline{AP}^2 + \overline{AQ}^2 \Rightarrow \\ 2\overline{AO}^2 &= (\overline{PO}^2 - \overline{AP}^2) + (\overline{QO}^2 - \overline{AQ}^2). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Aplicando a lei dos cossenos nos triângulos planos PQO e PQA , temos:

$$\overline{PQ}^2 = \overline{PO}^2 + \overline{QO}^2 - 2\overline{PO} \cdot \overline{QO} \cdot \cos a, \quad (3.4)$$

$$\overline{PQ}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{AQ}^2 - 2\overline{AP} \cdot \overline{AQ} \cdot \cos \hat{A}. \quad (3.5)$$

Igualando (3.4) a (3.5) e depois utilizando (3.3) temos:

$$\begin{aligned} \overline{PO}^2 + \overline{QO}^2 - 2\overline{PO} \cdot \overline{QO} \cdot \cos a &= \overline{AP}^2 + \overline{AQ}^2 - 2\overline{AP} \cdot \overline{AQ} \cdot \cos \hat{A} \Rightarrow \\ 2\overline{PO} \cdot \overline{QO} \cdot \cos a &= 2\overline{AO}^2 + 2\overline{AP} \cdot \overline{AQ} \cdot \cos \hat{A} \Rightarrow \\ \cos(a) &= \frac{\overline{AO}^2}{\overline{PO} \cdot \overline{QO}} + \frac{\overline{AP} \cdot \overline{AQ}}{\overline{PO} \cdot \overline{QO}} \cdot \cos \hat{A}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Substituindo $\cos(b) = \frac{\overline{AO}}{\overline{PO}}$, $\text{sen}(b) = \frac{\overline{AP}}{\overline{PO}}$, $\cos(c) = \frac{\overline{AO}}{\overline{QO}}$, $\text{sen}(c) = \frac{\overline{AQ}}{\overline{QO}}$, em (3.6), temos:

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \text{sen}(b) \cdot \text{sen}(c) \cdot \cos(\hat{A}). \quad (\text{Teorema 3.9})$$

De maneira análoga, chega-se também nas outras duas variações do Teorema 3.9. \square

Teorema 3.10 (Lei dos senos). *Em qualquer triângulo esférico de lados a, b, c e ângulos internos $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$, opostos aos lados a, b, c , respectivamente, teremos:*

$$\frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(\hat{A})} = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(\hat{B})} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(\hat{C})}.$$

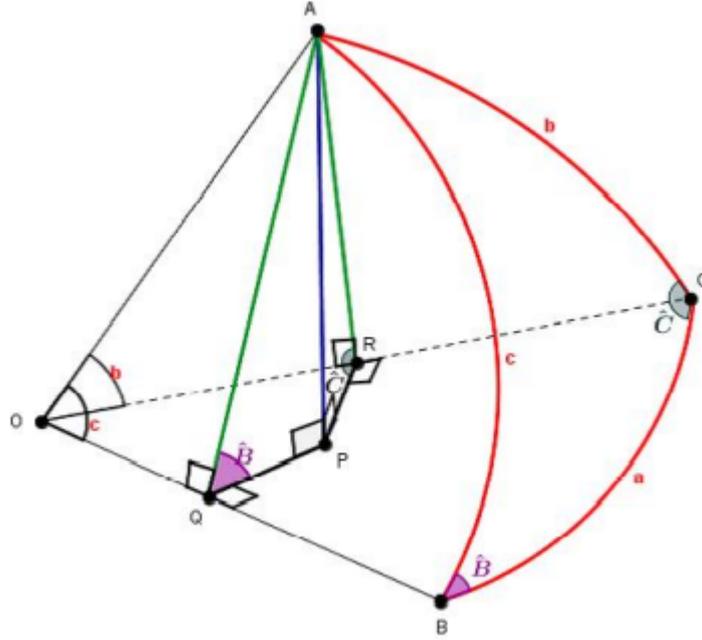


Figura 3.7: Triângulo esférico ABC

Demonstração. Seja ABC um triângulo esférico sobre uma esfera de centro O e raio $r \equiv OA \equiv OB \equiv OC = 1$ (Figura 3.7).

Considere a reta perpendicular ao plano BOC cuja intersecção determina o ponto P e que tal reta passa pelo vértice A . Por P traçamos as retas perpendiculares aos segmentos \overline{OB} e \overline{OC} que resultam nos pontos Q e R , respectivamente.

Tracemos agora duas perpendiculares aos segmentos \overline{OB} e \overline{OC} , ambas passando pelo ponto A . Tais perpendiculares intersectam os segmentos \overline{OB} e \overline{OC} nos pontos Q e R , pois o plano formado pelos pontos P, Q e A é perpendicular ao plano formado pelos pontos O, B e C e também o plano formado pelos pontos A, P e R é perpendicular ao plano formado pelos pontos O, B e C .

Note que o ângulo \hat{B} é formado pela intersecção dos planos que passam por BOA e COB e também que as retas \overleftrightarrow{AQ} e \overleftrightarrow{QP} são perpendiculares no ponto Q , logo, o ângulo \hat{AQP} é congruente ao ângulo \hat{B} .

De maneira semelhante, o ângulo \hat{C} é formado pela intersecção dos planos que passam por COA e BOC e também que as retas \overleftrightarrow{AR} e \overleftrightarrow{RP} são perpendiculares no ponto R , logo, o ângulo \hat{ARP} é congruente ao ângulo \hat{C} .

Como os triângulos planos AQP, AQP, APR e ARO são todos retângulos, podemos escrever:

$$\text{sen}(\hat{B}) = \frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}}, \quad \text{sen}(\hat{C}) = \frac{\overline{AP}}{\overline{AR}}, \quad \text{sen}(c) = \frac{\overline{AQ}}{\overline{AO}}, \quad \text{sen}(b) = \frac{\overline{AR}}{\overline{AO}}.$$

Manipulando as igualdades acima, temos:

$$\overline{AP} = \overline{AQ} \cdot \text{sen} \hat{B} = \overline{AR} \cdot \text{sen} \hat{C}, \quad (3.7)$$

$$\overline{AR} = \overline{AO} \cdot \text{sen} b, \quad (3.8)$$

$$\overline{AQ} = \overline{AO} \cdot \text{sen} c. \quad (3.9)$$

Substituindo (3.8) e (3.9) em (3.7), temos:

$$\overline{AP} = \overline{AO} \cdot \text{sen } b \cdot \text{sen } \hat{C}, \quad (3.10)$$

$$\overline{AP} = \overline{AO} \cdot \text{sen } c \cdot \text{sen } \hat{B}. \quad (3.11)$$

Igualando (3.10) com (3.11), temos:

$$\overline{AO} \cdot \text{sen } b \cdot \text{sen } \hat{C} = \overline{AO} \cdot \text{sen } c \cdot \text{sen } \hat{B} \Rightarrow \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(\hat{B})} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(\hat{C})}.$$

De forma análoga, também podemos afirmar que:

$$\frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(\hat{A})} = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(\hat{B})}.$$

Logo, temos as igualdades desejadas:

$$\frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(\hat{A})} = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(\hat{B})} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(\hat{C})}.$$

□

4 Matriz de rotação

Nesse capítulo, faremos a proposta algébrica para a obtenção das fórmulas descritas nos Teoremas 3.9 e 3.10, cujas demonstrações geométricas foram feitas no capítulo anterior.

Essa proposta foi inicialmente feita em [7] e a tomaremos como referência para nossos cálculos.

As fórmulas propostas nos Teoremas 3.9 e 3.10 para os triângulos esféricos são conhecimentos básicos e importantes para a matemática náutica. Elas são amplamente aplicados para resolver vários problemas de navegação. Sua importância é tanta que ambos os teoremas são chamados de códigos genéticos das fórmulas do triângulo esférico.

No entanto, no processo de ensino, quando o professor usa o método geométrico para derivar e provar tais teoremas, os alunos geralmente sentem que o processo é complicado e difícil de entender, por isso, faremos a proposta da utilização do método de rotação tridimensional através de uma matriz de rotação. Este método pode derivar facilmente e simultaneamente os Teoremas 3.9 e 3.10.

4.1 Definição das coordenadas cartesianas para dois referenciais

Um triângulo esférico ABC em uma esfera unitária possui seis elementos básicos, que incluem os três lados (a, b, c) e os três ângulos internos (α, β, γ) . Vamos configurar o referencial \mathcal{A} (x_A, y_A, z_A) de modo que o vértice A do triângulo esférico ABC possua coordenadas $(0, 0, 1)$, como mostrado na figura 4.1.

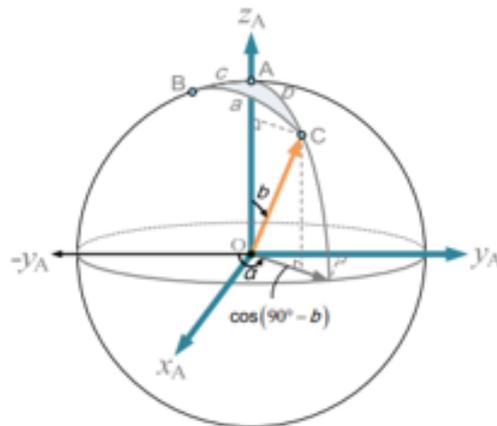


Figura 4.1: Localizando o ponto C no referencial \mathcal{A}

As coordenadas esféricas do ponto C na esfera unitária em relação ao referencial \mathcal{A} ($C_{\mathcal{A}}$) são as seguintes:

$$C_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \cos(90^\circ - b) \cdot \text{sen}(180^\circ - \alpha) \\ \cos(90^\circ - b) \cdot \cos(180^\circ - \alpha) \\ \text{sen}(90^\circ - b) \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

Em seguida, vamos configurar o referencial \mathcal{B} (x_B, y_B, z_B) de modo que o vértice B do triângulo esférico ABC possua coordenadas $(0, 0, 1)$, como mostrado na figura 4.2.

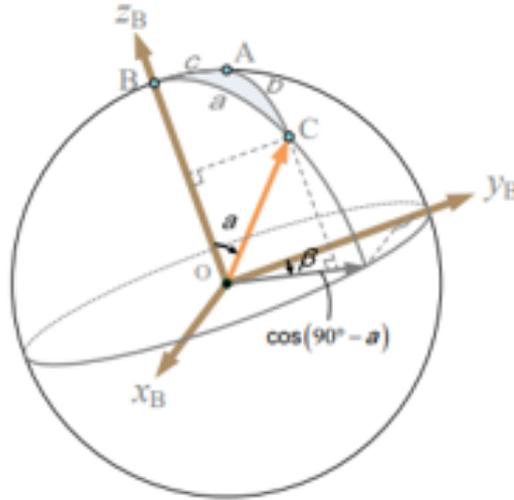


Figura 4.2: Localizando o ponto C no referencial \mathcal{B}

As coordenadas esféricas do ponto C na esfera unitária em relação ao referencial \mathcal{B} ($C_{\mathcal{B}}$) são as seguintes:

$$C_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \cos(90^\circ - a) \cdot \text{sen}(\beta) \\ \cos(90^\circ - a) \cdot \cos(\beta) \\ \text{sen}(90^\circ - a) \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

4.2 Utilizando a matriz de rotação

Observando a figura 4.3, quando os referenciais \mathcal{A} e \mathcal{B} são exibidos na mesma figura e também com a mesma origem, as coordenadas do ponto C em ambos os referenciais ($C_{\mathcal{A}}$ e $C_{\mathcal{B}}$, respectivamente) representam a mesma posição (ponto C).

Quando o referencial \mathcal{B} é rotacionado no sentido horário ao redor do eixo x_B , fazendo com que o ponto B se desloque em direção ao ponto A , a coordenada $C_{\mathcal{B}}$ pode também ser convertida para a coordenada $C_{\mathcal{A}}$, como mostra a equação (4.3).

$$C_{\mathcal{A}} = R_{x_B}(c)C_{\mathcal{B}}, \quad (4.3)$$

onde a matriz de rotação de ângulo c no sentido horário ao redor do eixo x_B é

$$R_{x_B}(c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(c) & -\text{sen}(c) \\ 0 & \text{sen}(c) & \cos(c) \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

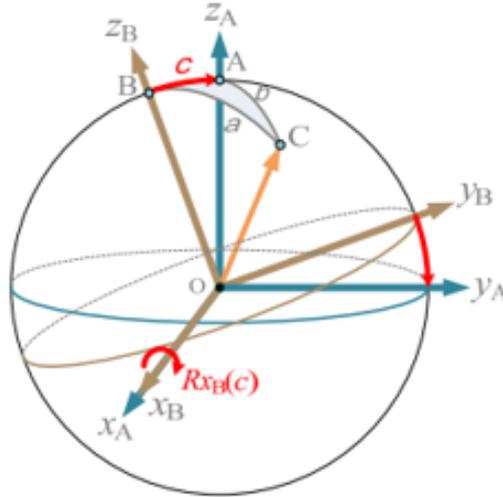


Figura 4.3: Conversão do referencial \mathcal{B} para o referencial \mathcal{A} usando a matriz de rotação no sentido horário

Substituindo as equações (4.1), (4.2) e (4.4) em (4.3), temos:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \cos(90^\circ - b) \cdot \sin(180^\circ - \alpha) \\ \cos(90^\circ - b) \cdot \cos(180^\circ - \alpha) \\ \sin(90^\circ - b) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(c) & -\sin(c) \\ 0 & \sin(c) & \cos(c) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(90^\circ - a) \cdot \sin(\beta) \\ \cos(90^\circ - a) \cdot \cos(\beta) \\ \sin(90^\circ - a) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(90^\circ - a) \cdot \sin(\beta) \\ \cos(c) \cdot \cos(90^\circ - a) \cdot \cos(\beta) - \sin(c) \cdot \sin(90^\circ - a) \\ \sin(c) \cdot \cos(90^\circ - a) \cdot \cos(\beta) + \cos(c) \cdot \sin(90^\circ - a) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Como $\cos(90^\circ - \theta) = \sin(\theta)$, logo:

$$\begin{bmatrix} \sin(b) \cdot \sin(180^\circ - \alpha) \\ \sin(b) \cdot \cos(180^\circ - \alpha) \\ \cos(b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(a) \cdot \sin(\beta) \\ \cos(c) \cdot \sin(a) \cdot \cos(\beta) - \sin(c) \cdot \cos(a) \\ \sin(c) \cdot \sin(a) \cdot \cos(\beta) + \cos(c) \cdot \cos(a) \end{bmatrix}.$$

Observe também que $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin(\alpha)$ e $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos(\alpha)$, então:

$$\begin{bmatrix} \sin(b) \cdot \sin(\alpha) \\ -\sin(b) \cdot \cos(\alpha) \\ \cos(b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(a) \cdot \sin(\beta) \\ \cos(c) \cdot \sin(a) \cdot \cos(\beta) - \sin(c) \cdot \cos(a) \\ \sin(c) \cdot \sin(a) \cdot \cos(\beta) + \cos(c) \cdot \cos(a) \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Assim, temos em (4.5) os resultados dos Teoremas 3.9 e 3.10, obtidos por meio de matriz de rotação.

$$\text{Lei dos senos (3.10): } \sin(b) \cdot \sin(\alpha) = \sin(a) \cdot \sin(\beta) \quad (4.6)$$

$$\text{Lei dos cossenos (3.9): } \cos(b) = \sin(c) \cdot \sin(a) \cdot \cos(\beta) + \cos(c) \cdot \cos(a) \quad (4.7)$$

Observando a figura 4.4, quando o referencial \mathcal{A} é rotacionado no sentido anti-horário ao redor do eixo x_B , fazendo com que o ponto A se desloque em direção ao ponto B , a coordenada C_A pode também ser convertida para a coordenada C_B , usando para isso a equação (4.8):

$$C_B = R'_{x_B}(c)C_A \quad (4.8)$$

onde a matriz de rotação de ângulo c no sentido anti-horário ao redor do eixo X_B é expressa por

$$R'_{x_B}(c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(c) & \text{sen}(c) \\ 0 & -\text{sen}(c) & \cos(c) \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

Observe que a matriz (4.9) é a matriz inversa da matriz (4.4).

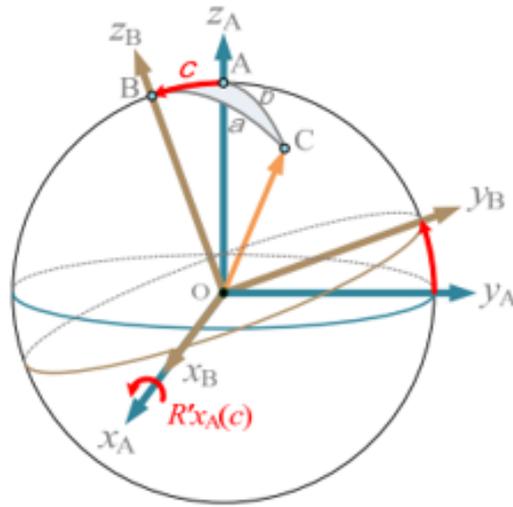


Figura 4.4: Conversão do referencial \mathcal{A} para o referencial \mathcal{B} usando a matriz de rotação no sentido anti-horário

Substituindo as equações (4.1), (4.2) e (4.9) em (4.8), temos:

$$\begin{bmatrix} \cos(90^\circ - a) \cdot \text{sen}(\beta) \\ \cos(90^\circ - a) \cdot \cos(\beta) \\ \text{sen}(90^\circ - a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(c) & \text{sen}(c) \\ 0 & -\text{sen}(c) & \cos(c) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(90^\circ - b) \cdot \text{sen}(180^\circ - \alpha) \\ \cos(90^\circ - b) \cdot \cos(180^\circ - \alpha) \\ \text{sen}(90^\circ - b) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(90^\circ - b) \cdot \text{sen}(180^\circ - \alpha) \\ \cos(c) \cdot \cos(90^\circ - b) \cdot \cos(180^\circ - \alpha) + \text{sen}(c) \cdot \text{sen}(90^\circ - b) \\ -\text{sen}(c) \cdot \cos(90^\circ - b) \cdot \cos(180^\circ - \alpha) + \cos(c) \cdot \text{sen}(90^\circ - b) \end{bmatrix}.$$

Como $\cos(90^\circ - b) = \text{sen}(b)$, $\text{sen}(90^\circ - b) = \cos(b)$, $\cos(90^\circ - a) = \text{sen}(a)$ e $\text{sen}(180^\circ - \alpha) = \text{sen}(\alpha)$ e $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos(\alpha)$, então:

$$\begin{bmatrix} \text{sen}(a) \cdot \text{sen}(\beta) \\ \text{sen}(a) \cdot \cos(\beta) \\ \cos(a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sen}(b) \cdot \text{sen}(\alpha) \\ \text{sen}(c) \cdot \cos(b) - \cos(c) \cdot \text{sen}(b) \cdot \cos(\alpha) \\ \text{sen}(c) \cdot \text{sen}(b) \cdot \cos(\alpha) + \cos(c) \cdot \cos(b) \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

Logo, temos em (4.10), também os resultados dos Teoremas 3.10 e 3.9, obtidos por meio de matriz de rotação.

$$\text{Lei dos senos (3.10): } \text{sen}(b) \cdot \text{sen}(\alpha) = \text{sen}(a) \cdot \text{sen}(\beta) \quad (4.11)$$

$$\text{Lei dos cossenos (3.9): } \cos(a) = \text{sen}(c) \cdot \text{sen}(b) \cdot \cos(\alpha) + \cos(c) \cdot \cos(b) \quad (4.12)$$

4.3 Mudando o referencial

Podemos encontrar todas as variações dos Teoremas 3.9 e 3.10 mudando para isso o referencial adotado anteriormente.

Vamos recordar que a lei dos cossenos (Teorema 3.9) pode ser escrita como:

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \text{sen}(b) \cdot \text{sen}(c) \cdot \cos(\alpha), \quad (4.13)$$

$$\cos(b) = \cos(a) \cdot \cos(c) + \text{sen}(a) \cdot \text{sen}(c) \cdot \cos(\beta), \quad (4.14)$$

$$\cos(c) = \cos(a) \cdot \cos(b) + \text{sen}(a) \cdot \text{sen}(b) \cdot \cos(\gamma). \quad (4.15)$$

E a lei dos senos (Teorema 3.10) como:

$$\frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(\alpha)} = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(\beta)} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(\gamma)}.$$

Com o referencial adotado anteriormente, conseguimos desenvolver apenas a primeira variação da lei dos cossenos (4.13) e a primeira igualdade da lei dos senos.

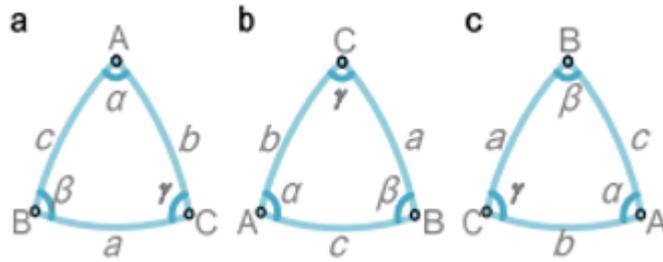


Figura 4.5: Mudança da escolha do referencial

Pela figura 4.5, podemos observar que a referência adotada na seção anterior, corresponde ao item (a), configurando os referenciais \mathcal{B} e \mathcal{C} , de modo que os vértices B e C do triângulo ABC possuam coordenadas $(0, 0, 1)$ respectivamente, em cada referencial (item (c) da figura 4.5), adotando o modelo matricial acima exposto, tanto no sentido horário, como no sentido anti-horário, teremos:

$$\begin{aligned} \text{sen}(c) \cdot \text{sen}(\beta) &= \text{sen}(b) \cdot \text{sen}(\gamma), \\ \cos(c) &= \text{sen}(b) \cdot \text{sen}(a) \cdot \cos(\gamma) + \cos(b) \cdot \cos(a), \\ \cos(b) &= \text{sen}(a) \cdot \text{sen}(c) \cdot \cos(\beta) + \cos(a) \cdot \cos(c). \end{aligned}$$

Através do modelo rotacional, obtivemos a segunda e a terceira variações da lei dos cossenos (4.14) e (4.15), além da segunda igualdade da lei dos senos.

Agora, configurando os referenciais \mathcal{A} e \mathcal{C} , de modo que os vértices A e C do triângulo ABC possuam coordenadas $(0, 0, 1)$ respectivamente, em cada referencial (item (b) da figura 4.5), adotando o modelo matricial acima exposto, tanto no sentido horário, como no sentido anti-horário, teremos:

$$\begin{aligned} \text{sen}(a) \cdot \text{sen}(\gamma) &= \text{sen}(c) \cdot \text{sen}(\alpha), \\ \cos(a) &= \text{sen}(c) \cdot \text{sen}(b) \cdot \cos(\alpha) + \cos(c) \cdot \cos(b), \\ \cos(c) &= \text{sen}(b) \cdot \text{sen}(a) \cdot \cos(\gamma) + \cos(b) \cdot \cos(a). \end{aligned}$$

Através do modelo rotacional, obtivemos a primeira e a terceira variação da lei dos cossenos (4.13) e (4.15), além da igualdade que faltava na lei dos senos.

Com isso, mostramos que o modelo rotacional garante todas as variações da lei dos cossenos e senos.

5 Atividades

Nesse capítulo, faremos algumas propostas de atividades envolvendo geometria elíptica (esférica) com aplicação para o Ensino Médio.

Essas atividades foram retiradas de [2].

5.1 Distâncias percorridas por dois navios

Um navio X percorre 2700 milhas¹ sobre o Equador, enquanto um outro navio Y cobre o correspondente arco no paralelo de 60°. Qual dos navios percorreu a maior distância?

Solução. Existe uma relação matemática entre um arco de paralelo e o correspondente arco do Equador. Observe a figura 5.1.

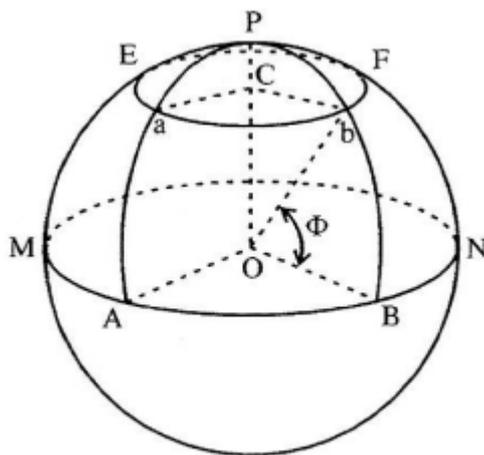


Figura 5.1: Linha do Equador e um arco paralelo

Note que \widehat{ab} é um arco de paralelo de centro C , \widehat{AB} o correspondente arco do Equador e Φ a latitude do paralelo.

Como \overline{OP} , que pode ser considerado o raio da Terra é perpendicular ao raio Cb do paralelo, tem-se o triângulo COb retângulo em C , e pode-se escrever:

$$Cb = Ob \cdot \text{sen}(90^\circ - \Phi) \iff Cb = Ob \cdot \cos \Phi. \quad (5.1)$$

¹1 milha corresponde a 1,60934 quilômetros

Temos também que:

$$\frac{\text{arco de paralelo } ab}{\text{arco do Equador } AB} = \frac{\text{raio de paralelo } Cb}{\text{raio da Terra } OB} \iff \frac{\widehat{ab}}{AB} = \frac{Cb}{OB}. \quad (5.2)$$

Como $OB = Ob$, de (5.1) e (5.2), temos:

$$ab = AB \cdot \cos \Phi. \quad (5.3)$$

Sendo ab a distância percorrida pelo navio Y , utilizando (5.3), temos:

$$ab = 2700 \cdot \cos 60^\circ = 1350 \text{ milhas.}$$

Logo, o navio X andou a maior distância.

Objetivos. O objetivo desse exercício é de desenvolver no aluno a sua capacidade de observar/imaginar dois objetos em uma superfície esférica deslocando-se em arcos paralelos. Como consequência, seus deslocamentos nunca serão iguais (distância percorrida).

5.2 Distância entre dois navios

Dois navios, ambos na latitude 23°N , estão afastados um do outro 420 milhas marítimas. Se os dois navios, com a mesma velocidade, navegam 1927 milhas rumo ao norte, qual a nova distância entre eles depois do percurso?

Solução. Para entender melhor a situação, observe a figura 5.2.

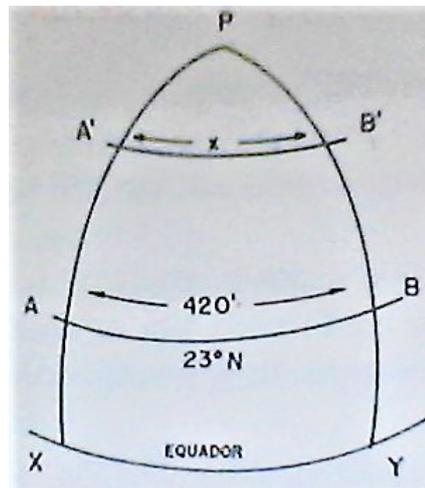


Figura 5.2: Posicionamento dos navios

Segundo [2], a milha marítima é a principal unidade de distância usada pelo marítimo, e ela corresponde ao comprimento do arco de meridiano de um minuto. Assim, quando um navio se desloca ao longo de um meridiano (círculo máximo), por uma distância de 1° (um grau), cobre um percurso de 60 milhas marítimas.

Acontece que a Terra, não tendo a forma perfeita de uma esfera, faz com que os seus meridianos se assemelhem a elipses, com curvatura variável em cada um de seus pontos.

Há pontos do meridiano em que ele é mais ou menos curvo do que em outros, e sendo a milha marítima uma unidade de medida linear, o comprimento de um arco de um minuto de meridiano (assemelhado a uma elipse) vai variar com o local em que é medido. Se for medido próximo de um dos polos, onde o meridiano é menos curvo, o seu comprimento não é o mesmo do que quando medido nas proximidades do Equador terrestre.

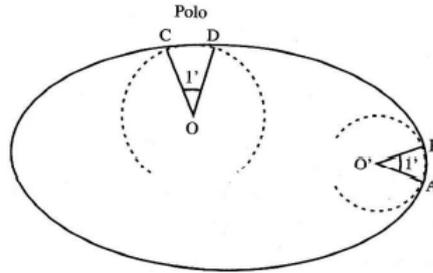


Figura 5.3: Milha marítima

Pela figura 5.3, vê-se que a milha marítima, se definida pura e simplesmente como o comprimento de um arco de um minuto, não tem o mesmo comprimento e, como tal, não poderia servir de unidade padrão de medida. Para vencer essa dificuldade, estabeleceu-se a milha marítima internacional de 1852 metros, que vem a ser a média das milhas medidas no polo e no Equador.

Para os cálculos de navegação, no entanto, faz-se sempre a correspondente, de 60 milhas, para um arco de 1° (um grau) de círculo máximo. O erro que se comete em razão do local em que se navega, se perto dos polos ou do Equador, é desprezível diante de outras incertezas da navegação marítima.

Logo, a distância de 1927 milhas percorridas pelos navios equivalem a um arco de meridiano de $32^\circ 7'$, o que nos permite dizer:

- i) Latitude de saída: $23^\circ 0'N$
- ii) Arco navegado: $32^\circ 7'N$
- iii) Latitude final: $55^\circ 7'$

Devemos agora encontrar o arco correspondente \widehat{XY} (Figura 5.2) em milhas, para isso, utilizaremos (5.3):

$$\widehat{AB} = \widehat{XY} \cdot \cos \Phi \Rightarrow \widehat{XY} = \widehat{AB} \cdot \sec \Phi$$

O que nos leva a:

$$\widehat{XY} = 420 \cdot \sec 23^\circ = 456,27 \text{ milhas.}$$

Logo, para o cálculo da nova distância x entre eles, novamente utilizaremos (5.3), então:

$$x = 456,27 \cdot \cos 55^\circ 7' \approx 261 \text{ milhas.}$$

Objetivos. Nesse exercício, o aluno é levado a refletir as situações propostas no exercício anterior e adaptá-las para a resolução da questão. Como reflexão geométrica, o aluno conjectura que os navios se aproximam um do outro quanto mais se aproximam do polo, tornando o exercício uma ‘escada’ para outras reflexões como o problema clássico do urso que faz três deslocamentos e chega ao mesmo lugar (percorreu um triângulo esférico com três ângulos de 90°).

5.3 Resgate de um pescador

Um pescador pouco experiente estava em alto mar quando aconteceu uma tempestade e conseqüentemente o fez perder-se. Minutos depois, um avião o avistou e passou a seguinte mensagem para um navio de resgate que estava localizado na posição $37^\circ 10'N$ e $5^\circ 10'W$:

— S.O.S. Embarcação precisando de ajuda. Localização $39^\circ 15'N$ e $2^\circ 20'E$.

Qual será a distância que o navio deverá percorrer para resgatar o pescador?

Solução. Observando a figura 5.4, considere o triângulo esférico ABC , onde o ponto A representa o polo Norte, o ponto B representa o navio e o ponto C representa o pescador.

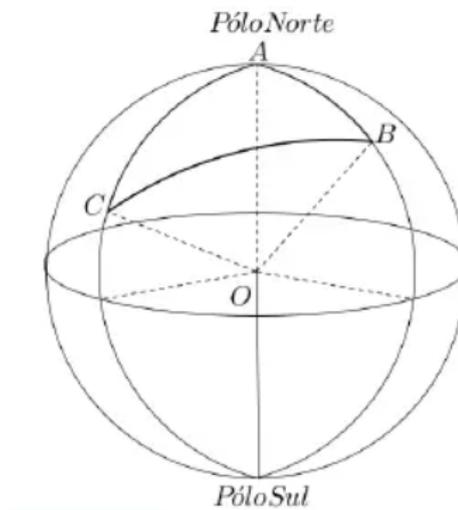


Figura 5.4: Localização dos objetos na superfície terrestre

Para a resolução do problema, utilizaremos a Lei dos cossenos (3.9), mas antes, devemos encontrar algumas medidas:

- i) O lado $\widehat{AB} = c = 90^\circ - 37^\circ 10' = 52^\circ 50'$
- ii) O lado $\widehat{AC} = b = 90^\circ - 39^\circ 15' = 50^\circ 45'$
- iii) O ângulo $\hat{A} = 5^\circ 10' + 2^\circ 20' = 7^\circ 30'$

Agora, efetivamente utilizando (3.9), temos:

$$\begin{aligned} \cos(a) &= \cos(b) \cdot \cos(c) + \operatorname{sen}(b) \cdot \operatorname{sen}(c) \cdot \cos(\hat{A}) \\ \cos(a) &= \cos(50^\circ 45') \cdot \cos(52^\circ 50') + \operatorname{sen}(50^\circ 45') \cdot \operatorname{sen}(52^\circ 50') \cdot \cos(7^\circ 30') \\ \cos(a) &= 0,632705328 \cdot 0,60413561 + 0,774392644 \cdot 0,796881524 \cdot 0,991444861 \\ \cos(a) &= 0,382239819 + 0,611819821 \\ \cos(a) &= 0,99405964 \end{aligned}$$

Com isso, temos que $a = 6,248261206^\circ$, ou $6^\circ 15'$, que equivale a 375 milhas.

Objetivos. Agora, esse exercício tem por objetivo mostrar ao aluno como ocorre um deslocamento qualquer de um objeto na superfície de uma esfera, utilizando para tal o triângulo esférico e o seu principal teorema, a lei dos cossenos.

5.4 Ataque de um míssil

O comandante de um submarino armado com mísseis de ogivas nucleares, posicionado a $42^\circ 10'N$ e $51^\circ 20'W$, recebe ordem para disparar um míssil de longo alcance contra uma instalação inimiga de coordenadas $68^\circ 40'N$ e $13^\circ 40'E$. Com que direção θ deve ser lançado o míssil e qual a distância geodésica d a ser vencida por este?

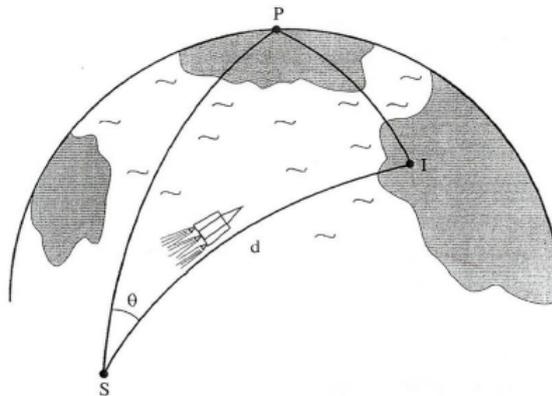


Figura 5.5: Ataque de um míssil

Solução. Para a resolução desse problema (figura 5.5), também utilizaremos a Lei dos Cossenos (3.9), mas antes, também devemos encontrar algumas medidas:

- i) O lado $\widehat{SP} = c = 90^\circ - 42^\circ 10' = 47^\circ 50'$
- ii) O lado $\widehat{IP} = b = 90^\circ - 68^\circ 40' = 21^\circ 20'$
- iii) O ângulo $\hat{P} = 51^\circ 20' + 13^\circ 40' = 65^\circ$

Agora, efetivamente utilizando (3.9), temos:

$$\begin{aligned}\cos(d) &= \cos(SP) \cdot \cos(IP) + \sin(SP) \cdot \sin(IP) \cdot \cos(\hat{P}) \\ \cos(d) &= \cos(47^\circ 50') \cdot \cos(21^\circ 20') + \sin(47^\circ 50') \cdot \sin(21^\circ 20') \cdot \cos(65^\circ) \\ \cos(d) &= 0,67129 \cdot 0,93148 + 0,74120 \cdot 0,36379 \cdot 0,42262 \\ \cos(d) &= 0,73925 \\ d &= 42^\circ 20' \\ d &= 2540 \text{ milhas marítimas}\end{aligned}$$

Para o cálculo da direção de lançamento, vamos usar a Lei dos senos (3.10):

$$\frac{\sin 21^\circ 20'}{\sin \theta} = \frac{\sin 42^\circ 20'}{\sin 65^\circ} \Rightarrow \sin \theta = 0,36379 \cdot 0,90631 \cdot 1,48491 = 0,48958 \Rightarrow \theta = 29^\circ 18'$$

O míssil deve ser lançado com direção inicial de $29^\circ 18'$ em relação à direção norte-sul.

Objetivos. O objetivo desse exercício é novamente aplicar o triângulo esférico para solucionar um problema de deslocamento na superfície de uma esfera, mas além da lei dos cossenos para se calcular o deslocamento, é necessário também se aplicar a lei dos senos para se calcular o ângulo de lançamento.

6 Conclusão

Mostramos nesse trabalho uma maneira alternativa de se provar o Teorema dos cossenos (Lei dos cossenos) e o Teorema dos senos (Lei dos senos) para triângulos esféricos (geometria elíptica) através de um modelo de matriz de rotação.

Para tal, antes, fizemos uma retomada histórica sobre as geometrias não Euclidianas, com o intuito de contextualizar o leitor sobre tais geometrias. Também retomamos o conceito de coordenadas esféricas, para que o entendimento sobre o modelo matricial rotacional proposto na dissertação fosse melhor compreendido.

Definimos, ainda, conceitos básicos da geometria elíptica (esférica) e os principais teoremas que a envolvem, para que o leitor tenha possibilidade de fazer uma pequena imersão sobre as principais características dessa geometria para que, no final, culmine no modelo matricial proposto para a demonstração dos dois principais teoremas citados, a Lei dos cossenos e a Lei dos senos.

A utilização do modelo matricial para a demonstração dos dois teoremas facilita a compreensão de como se chega a tais teoremas que, no modelo puramente geométrico, envolvem muitos outros pré-requisitos, tornando sua demonstração bastante complicada.

Finalizamos essa dissertação propondo alguns exemplos de aplicação dessa geometria para os professor do ensino básico, mostrando a viabilidade do ensino dessa ‘nova’ geometria a seus alunos.

Logo, esperamos que tal dissertação seja uma fonte de pesquisa para todos os professores que têm a pretensão de, cada vez mais, encorajar seus alunos a pensarem além dos conteúdos propostos regularmente no ensino básico.

Referências

- [1] DUELI, L. de J. *Geometria Esférica: Propostas de Sequências Didáticas Interdisciplinares*.
- [2] COUTINHO, L. *Convite às geometrias não-euclidianas*. [S.l.]: Interciência, 2001.
- [3] BICUDO, I. *Os elementos*. [S.l.]: Unesp, 2009.
- [4] ABREU, S. M. de; OTTONI, J. E. *Geometria esférica e trigonometria esférica aplicadas a astronomia de posição*. Dissertação (Mestrado) — PROFMAT, 2015.
- [5] THOMAS, G. B. *Cálculo, volume II*. [S.l.]: Pearson, 2009.
- [6] SANTOS, R. da S.; OLIVEIRA, J. de. Trigonometria triangular esférica. *RCT-Revista de Ciência e Tecnologia*, v. 4, n. 6, 2018.
- [7] HSIEH, T. et al. Derivation of formulas in spherical trigonometry based on rotation matrix. *TransNav: International Journal on Marine Navigation and Safety of Sea Transportation*, v. 13, n. 3, 2019.