



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS - DCET
COLEGIADO DO MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

GENILSON ANDRADE DOS SANTOS

MODELAGEM MATEMÁTICA: UMA PROPOSTA PARA
ABORDAR FUNÇÕES POLINOMIAIS

Ilhéus-Bahia
2022

S237

Santos, Genilson Andrade dos.

Modelagem matemática: uma proposta para abordar funções polinomiais / Genilson Andrade dos Santos. – Ilhéus, BA: UESC, 2022.

91f. : il.

Orientador: Nestor Felipe Castañeda Centurión
Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT.
Inclui referências e apêndice.

1. Álgebra. 2. Funções polinomiais. 3. Modelagem matemática. 4. Contextualização. I. Título.

CDD 512

GENILSON ANDRADE DOS SANTOS

MODELAGEM MATEMÁTICA: UMA PROPOSTA PARA
ABORDAR FUNÇÕES POLINOMIAIS

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC), para obtenção do título de Mestre em Matemática, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Nestor Felipe Castañeda Centurión

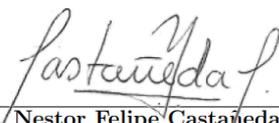
*Ilhéus-Bahia
2022*

GENILSON ANDRADE DOS SANTOS

MODELAGEM MATEMÁTICA: UMA PROPOSTA PARA
ABORDAR FUNÇÕES POLINOMIAIS

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Estadual de Santa Cruz.

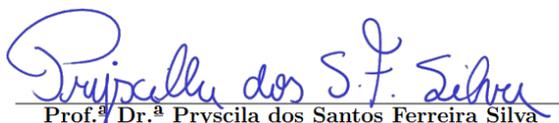
Trabalho aprovado. Ilhéus - BA, 05 de julho de 2022.



Prof. Dr. Nestor Felipe Castañeda Centurión

Orientador

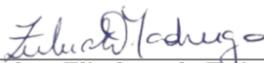
Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC)



Prof.^a Dr.^a Priscila dos Santos Ferreira Silva

Examinadora Interna

Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC)



Prof.^a Dr.^a Zulma Elizabete de Freitas Madruga

Examinadora Externa

Universidade Federal do Recôncavo da Bahia (UFRB)

Uma grande descoberta envolve a solução de um grande problema, há uma semente de descoberta na solução de qualquer problema. Seu problema pode ser modesto; porém, se ele desafiar sua curiosidade e fizer funcionar sua capacidade inventiva, e caso você o resolva sozinho, então poderá experimentar a tensão e o prazer do triunfo da descoberta.

George Polya

Agradecimentos

Agradeço a DEUS por ter me dado força, resiliência e apoio espiritual nos momentos difíceis durante os três anos. Os obstáculos foram gigantescos (Covid-19, princípio de depressão e o acidente automobilístico que quase tiraram minha vida), mas com fé e oração foram vencidos.

A meu pai e minha mãe que sempre estiveram presentes com seu exemplo de luta e dedicação.

A minha esposa Carol e filha Sofia que sempre estiveram ao meu lado a quem por tanto tempo sacrifiquei deixando em segundo plano para a execução deste trabalho. Amo vocês!

A minha filha Luna, um presente de Deus. Seja bem vinda a esse mundo. Papai está aqui te esperando!

As minhas irmãs pelo apoio e incentivo.

A Universidade Estadual de Santa Cruz -UESC- pela oportunidade de ter promovido este curso de mestrado.

Ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat) pelo excelente curso.

Ao Prof. Dr. Nestor Felipe Castañeda Centurión pelas belíssimas aulas dadas durante a elaboração desta pesquisa e em especial pela orientação, apoio, compreensão e confiança ao longo deste trabalho.

Aos belíssimos Professores do programa PROFMAT pelo grande número de informações e pelo amplo conhecimento repassado durante o curso.

A todos os meus queridos colegas e amigos desta turma. Para sempre estarão no meu coração e lembrança. Vocês são feras!

A todos os meus amados estudantes que me ajudaram na produção desta pesquisa. E foram os motivadores na produção deste trabalho.

A amiga Monique Dantas pela ajuda nas pesquisas.

A minha sobrinha Maria Luísa pela troca de ideia nos estudos.

A todos que, direta ou indiretamente, colaboraram na realização deste trabalho.

Resumo

A Modelagem Matemática vem avançando e sendo aperfeiçoada através de estudos que visam a implementação de um aprendizado que induza o aluno a buscar as relações existentes e constituídas entre seu dia-a-dia e o universo matemático, possibilitando que o mesmo construa o conhecimento com estímulo e espontaneidade, vencendo as complexidades que a Matemática apresenta. Este trabalho tem como objetivo geral apresentar uma proposta permeada pela Modelagem Matemática para o ensino-aprendizagem de funções polinomiais dentro da Álgebra, assim como, relatar a experiência da sua aplicação, tendo o professor como mediador e os alunos, protagonistas no processo de ensino e aprendizagem. A proposta didática é composta por 24 atividades contextualizadas com o tema Coleta Seletiva do Lixo e foi aplicada no decorrer de 8 aulas em uma turma de 21 estudantes do 2º ano do Ensino Médio. Cada aula foi planejada com a definição de objetivos de aprendizagem que explicitam as competências e habilidades da BNCC, além disso, as atividades foram elaboradas seguindo as orientações das competências e habilidades do ENEM. Com a percepção, apreensão e compreensão do tema Coleta Seletiva do Lixo foi possível contextualizar as definições e conceitos de funções polinomiais incluindo a construção e uso do chamado polinômio interpolador de Lagrange. O uso da realidade dos alunos na elaboração das atividades trouxe um alto grau de envolvimento da turma. Por fim, postulamos que a Matemática ensinada em sala de aula, de forma contextualizada, promove a compreensão do conhecimento por parte dos alunos, além de contribuir para formar pessoas mais críticas e, conseqüentemente, uma sociedade mais democrática.

Palavras-chave: Álgebra; Funções polinomiais; Modelagem matemática; Contextualização.

Abstract

Mathematical Modeling has been advancing and being improved through studies aimed at implementing a learning that induces the student to seek the existing and constituted relationships between his day-to-day and the mathematical universe, enabling him to build knowledge with stimulus and spontaneity, overcoming the complexities that Mathematics presents. This work has as general objective to present a proposal permeated by mathematical modeling for teaching-learning polynomials within algebra, as well as to report the experience of its application, with the teacher as mediator and students, protagonists in the teaching and learning process. The didactic proposal is composed of 24 activities contextualized with the theme Selective Garbage Collection and was applied during 8 classes in a class of 21 students of the 2nd year of high school. Each class was planned with the definition of learning objectives that explain the skills and abilities of the BNCC, in addition, the activities were elaborated following the guidelines of the competencies and skills of the ENEM. With the perception, apprehension and understanding of the theme Selective Garbage Collection it was possible to contextualize the definitions and concepts of polynomial functions including the construction and use of the so-called Lagrange interpolating polynomial. The use of the reality of the students in the elaboration of the activities brought a high degree of involvement of the class. Finally, we postulate that mathematics taught in the classroom, in a contextualized way, promotes students' understanding of knowledge, besides contributing to forming more critical people and, consequently, a more democratic society.

Keywords: Algebra; Polynomial functions; Mathematical modeling; Contextualization.

Lista de Tabelas

| | | |
|------|--|----|
| 3.1 | Competências indicadas pela BNCC para o ensino de Álgebra. | 34 |
| 3.2 | Habilidades indicadas pela BNCC para o ensino de Álgebra. | 35 |
| 3.3 | Competências indicadas pelo ENEM para o ensino de Álgebra. | 36 |
| 3.4 | Habilidades indicadas pelo ENEM para o ensino de Álgebra. | 36 |
| | | |
| 4.1 | Coleta diária do material reciclável | 41 |
| 4.2 | Cotação do produto reciclável. | 42 |
| 4.3 | Relação de dependência entre grandezas | 43 |
| 4.4 | Receita da venda do material de ferro | 44 |
| 4.5 | Papel reciclado | 45 |
| 4.6 | Papel não reciclado | 45 |
| 4.7 | Coleta de metal reciclável | 53 |
| 4.8 | Coleta de metal reciclável da 1 ^a semana | 53 |
| 4.9 | Coleta de metal reciclável da 2 ^a semana | 54 |
| 4.10 | Coleta de metal reciclável da 3 ^a semana | 54 |
| 4.11 | Coleta de metal reciclável da 4 ^a semana | 54 |
| 4.12 | Latinhas de cerveja | 55 |
| | | |
| 5.1 | Tempo de decomposição do lixo | 60 |
| 5.2 | Quantidade do material de aço. | 61 |
| 5.3 | Quantidade do material de alumínio. | 61 |
| 5.4 | Quantidade do material de cobre. | 61 |
| 5.5 | Quantidade do material de Embalagens PET | 61 |
| 5.6 | Quantidade do material de ferro. | 61 |
| 5.7 | Quantidade do material de garrafas de vidro. | 62 |
| 5.8 | Quantidade do material de latinhas. | 62 |
| 5.9 | Quantidade do material de papelão | 62 |
| 5.10 | Quantidade do material de plástico | 62 |
| 5.11 | Preços dos produtos recicláveis | 63 |
| 5.12 | Faturamento mensal | 63 |
| 5.13 | Coleta do alumínio por dia da semana | 64 |
| 5.14 | Faturamento diário | 70 |
| | | |
| 6.1 | Faturamento da venda do ferro. | 77 |
| 6.2 | Faturamento da venda de garrafas Pet. | 78 |
| 6.3 | Valor pago pela empresa. | 79 |

| | | |
|-----|--|----|
| 6.4 | Receita diária | 80 |
| 6.5 | Faturamento semanal com a venda dos produtos | 81 |

Lista de Figuras

| | | |
|-----|---|----|
| 4.1 | Coleta Seletiva | 40 |
| 4.2 | Galpão de triagem | 48 |
| 4.3 | Transportadora A | 50 |
| 5.1 | Lixão | 58 |
| 5.2 | Pesquisa sobre Coleta seletiva do lixo | 59 |
| 5.3 | Depósito do material | 66 |
| 5.4 | Planta do terreno | 67 |
| 5.5 | Parábola ($\Delta > 0$) | 69 |
| 5.6 | Parábola ($\Delta < 0$) | 69 |
| 5.7 | Parábola ($\Delta = 0$) | 70 |
| 5.8 | Função polinomial do 3º grau | 72 |
| 6.1 | Função Linear ($b = 0$) | 78 |
| 6.2 | Função Polinomial do 1º grau ($a > 0$) | 78 |
| 6.3 | Função Polinomial do 1º grau ($a < 0$) | 79 |
| 6.4 | Gráfico da Função Polinomial do 2º grau ($a < 0$) | 80 |
| 6.5 | Gráfico da Função Polinomial do 2º grau ($a > 0$) | 81 |
| 6.6 | Gráfico da Função Polinomial do 3º grau | 82 |
| A.1 | Você gosta de matemática? | 88 |
| A.2 | Qual dessas áreas da matemática tem mais dificuldade? | 88 |
| A.3 | Você consegue ver algum significado na expressão matemática: Construa o gráfico da função $f(x) = 3x + 3$? | 89 |
| A.4 | Você acredita que o ensino de matemática desperta sua consciência cidadã? | 90 |
| A.5 | Você acredita que o conteúdo de álgebra pode contribuir na intervenção social? | 90 |
| A.6 | Você acha importante estudar o conteúdo de Álgebra? | 91 |

Sumário

| | |
|---|-----------|
| Introdução | 14 |
| 0.1 Motivação Pessoal | 17 |
| 1 Matemática: Uma ferramenta necessária para a cidadania | 19 |
| 2 Metodologia de ensino | 24 |
| 2.1 Os Desafios da Sala de Aula e Modelagem | 26 |
| 2.2 Modelagem como método de ensino | 27 |
| 3 Perspectivas para aprendizagem de Álgebra no século XXI | 30 |
| 3.1 Ensino da álgebra no Ensino Médio | 32 |
| 3.2 O ensino de Álgebra segundo os documentos oficiais | 33 |
| 4 Uma Proposta para aproximar o conteúdo de Álgebra à realidade dos estudantes do Ensino Médio | 37 |
| 4.1 Aula 1: Diálogo sobre a Coleta Seletiva do Lixo. | 38 |
| 4.1.1 Duração | 38 |
| 4.1.2 Conteúdo | 38 |
| 4.1.3 Objetivos de aprendizagem | 38 |
| 4.1.4 Competências e habilidades da BNCC | 38 |
| 4.1.5 Materiais | 38 |
| 4.1.6 Desenvolvimento | 38 |
| 4.1.7 Avaliação | 39 |
| 4.2 Aula 2: Leitura e interpretação de tabelas e gráficos | 39 |
| 4.2.1 Duração | 39 |
| 4.2.2 Conteúdo | 39 |
| 4.2.3 Objetivos | 39 |
| 4.2.4 Competências e habilidades da BNCC | 39 |
| 4.2.5 Materiais | 39 |
| 4.2.6 Desenvolvimento | 39 |
| 4.2.7 Avaliação | 40 |
| 4.3 Aula 3: Coleta de dados | 41 |
| 4.3.1 Duração | 41 |
| 4.3.2 Conteúdos | 41 |
| 4.3.3 Objetivo | 41 |

| | | |
|-------|---|----|
| 4.3.4 | Competências e habilidades da BNCC | 41 |
| 4.3.5 | Materiais | 41 |
| 4.3.6 | Desenvolvimento | 41 |
| 4.3.7 | Avaliação | 42 |
| 4.4 | Aula 4: Noção intuitiva de Função Matemática. | 42 |
| 4.4.1 | Duração | 42 |
| 4.4.2 | Conteúdo | 42 |
| 4.4.3 | Objetivos | 42 |
| 4.4.4 | Competências e habilidades da BNCC | 42 |
| 4.4.5 | Materiais | 43 |
| 4.4.6 | Desenvolvimento | 43 |
| 4.4.7 | Avaliação | 43 |
| 4.5 | Aula 5: Estudo da Função Polinomial do 1 ^o Grau. | 43 |
| 4.5.1 | Duração | 43 |
| 4.5.2 | Conteúdos | 44 |
| 4.5.3 | Objetivos | 44 |
| 4.5.4 | Competências e habilidades na BNCC: | 44 |
| 4.5.5 | Material | 44 |
| 4.5.6 | Desenvolvimento | 44 |
| 4.5.7 | Avaliação | 47 |
| 4.6 | Aula 6: Estudo da Função Polinomial de 2 ^o Grau. | 47 |
| 4.6.1 | Duração | 47 |
| 4.6.2 | Conteúdos | 47 |
| 4.6.3 | Objetivos | 48 |
| 4.6.4 | Competências e habilidades na BNCC | 48 |
| 4.6.5 | Material | 48 |
| 4.6.6 | Desenvolvimento | 48 |
| 4.6.7 | Avaliação | 51 |
| 4.7 | Aula 7: Sistema linear | 52 |
| 4.7.1 | Duração | 52 |
| 4.7.2 | Conteúdos | 52 |
| 4.7.3 | Objetivos | 52 |
| 4.7.4 | Competências e habilidades da BNCC | 52 |
| 4.7.5 | Materiais | 52 |
| 4.7.6 | Desenvolvimento | 52 |
| 4.7.7 | Avaliação | 54 |
| 4.8 | Aula 8: Função Polinomial do 3 ^o grau | 55 |
| 4.8.1 | Duração | 55 |
| 4.8.2 | Conteúdos | 55 |
| 4.8.3 | Objetivos | 55 |
| 4.8.4 | Competências e habilidades da BNCC | 55 |
| 4.8.5 | Materiais | 55 |
| 4.8.6 | Desenvolvimento | 55 |
| 4.8.7 | Avaliação | 56 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 5 | Relato de Experiência | 57 |
| 5.1 | Motivação da Proposta | 57 |
| 5.2 | Relato sobre aplicação das Aulas | 58 |
| 5.2.1 | 1 ^a Etapa: Percepção e Apreensão | 58 |
| 5.2.2 | 2 ^a Etapa: Compreensão e Explicação | 61 |
| 5.2.3 | 3 ^a Etapa: Significação e Expressão | 63 |
| 6 | Elementos matemáticos da proposta | 74 |
| 6.1 | Funções polinomiais | 74 |
| 6.2 | Interpolação polinomial | 75 |
| 6.3 | Fórmula de Interpolação de Lagrange | 76 |
| 7 | Considerações finais | 83 |
| | Referências Bibliográficas | 85 |
| A | Pesquisas de opinião aplicadas antes e depois da aplicação da proposta | 87 |
| A.1 | Pré-aplicação da proposta | 87 |
| A.2 | Pós-aplicação da proposta | 89 |

Introdução

Em uma sociedade complexa e globalizada, com forte difusão de tecnologias em quase todos os campos da atividade humana, são necessários conhecimentos, habilidades e competências cada vez mais sofisticadas de seus cidadãos para sua integração nos campos laboral, político e cultural, e para o fortalecimento das suas relações sociais.

Nesse contexto, a escola torna-se um espaço fundamental na formação desses futuros cidadãos, pela intensa troca de conhecimentos, e por crianças e adolescentes passarem uma parte considerável do seu tempo nela. Assim, tem crescido a preocupação dos profissionais da Educação em desenvolver, na Educação Básica, competências e habilidades necessárias para este fim (GUIMARÃES; D'ANDREA; KING, 2018).

Conhecer os conceitos e se familiarizar com a Matemática Básica, favorece a compreensão dos diversos fatores do cotidiano, uma vez que de acordo com D'Ambrosio (2007), todo indivíduo, independente de qual sociedade ou contexto está inserido, desenvolve um tipo de pensamento matemático para resolver problemas em suas vidas.

Dessa forma, a Matemática trabalhada nas escolas, tem como desafio criar condições para que o aluno desenvolva suas capacidades e aprenda os conteúdos necessários para usá-la como instrumento de compreensão da sua realidade. Assim, o aluno deve estudar a matemática e olhar para essa disciplina como um meio para compreender o mundo à sua volta, a partir de um espírito de investigação para o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas de forma crítica.

É sabido que o Brasil apresenta baixos índices escolares relacionados à disciplina de Matemática. De acordo com Bicudo (2021), no Brasil, pesquisas em Educação Matemática feitas para avaliar o desempenho dos alunos indicam que as maiores dificuldades em avaliações, encontram-se nas questões relacionadas à aplicação de conceitos e à resolução de problemas. Essas dificuldades de aplicação se referem tanto aos conteúdos de Aritmética, quanto aos de Geometria e Álgebra.

Diante da constatação destas lacunas na aprendizagem dos estudantes brasileiros, optamos por focar na investigação no ensino e na aprendizagem de Álgebra, uma vez que de acordo com Panossian (2014), os docentes que lecionam matemática no Ensino Fundamental nos anos finais e no Ensino Médio consideram que esses são os conteúdos nos quais os alunos sentem mais dificuldade em estabelecer relações com o mundo real para resolver situações-problema.

Acredita-se que ensinar Álgebra é desenvolver o raciocínio lógico, a criatividade, despertar o pensamento independente e a capacidade de resolver problemas. Entretanto, Panossian (2014), indica que os professores dão maior importância ao ensino de um currículo pouco flexível, sem associação com a experiência pessoal e a investigação de problemas, dando assim, maior ênfase aos cálculos mecânicos, que se tornam enfadonhos e desprovidos de

significados para os estudantes.

A sequência lógica de apresentação dos conteúdos, feita sempre oralmente, partindo de definições, exemplos, seguidos de exercícios de aprendizagem e finalmente chegando aos exercícios de fixação, estimula os estudantes a reproduzirem até memorizar o modelo para então, realizar as provas escritas e testes e, conseqüentemente, não distinguindo onde e quando àqueles cálculos podem ser aplicados em suas vidas. Segundo Gómez-Granell (1996) esse é um dos motivos que levam os alunos a considerarem as aulas de Matemática como “chatas e difíceis” de serem assimiladas, e onde poucos sabem qual a utilidade de equações polinomiais, e o porquê memorizar regras, dicas e atalhos, tais como “mudar de membro, mudar de sinal”.

É certo afirmar que a Álgebra é uma poderosa ferramenta para resolver problemas e tem relação com diversas áreas do conhecimento, sendo que ela pode ser bem contextualizada tornando o ensino dessa área da Matemática mais fácil e compreensível (CEDRAZ et al., 2019).

Diante dessas questões em torno do ensino de Álgebra, surge o anseio de discutir possibilidades ou condições para que os alunos aprendam com a prática da investigação. Para tanto, a Modelagem Matemática, contempla o anseio de apresentar a matemática atrelada ao cotidiano dos mesmos.

A Modelagem Matemática, consiste em uma tendência de Educação Matemática que tem como intuito apresentar os conteúdos matemáticos de forma contextualizada em uma perspectiva investigativa. Sendo um método de ensino com a “habilidade de empregar a matemática em situações concretas e em outras áreas do conhecimento” (BASSAZENI, 2015, p.10).

Assim sendo, esse trabalho tem a seguinte questão norteadora: **“De que forma pode-se utilizar a Modelagem Matemática para ensinar Álgebra, desenvolvendo habilidades e competências a aproximar os conhecimentos matemáticos da realidade dos estudantes?”**

Dessa forma, tem-se como objetivo geral: **“Analisar as possibilidades do desenvolvimento de trabalhos com Modelagem Matemática, para o ensino-aprendizagem de Álgebra contextualizada com a realidade dos estudantes”**.

E como os objetivos específicos:

- Identificar a partir dos documentos oficiais para a Educação, quais as orientações, habilidades e competências para o ensino de Álgebra.
- Discutir as possibilidades do uso da Modelagem Matemática para auxiliar o professor no planejamento de aulas.
- Elaborar uma proposta de ensino para conteúdos de Álgebra, com base na Modelagem Matemática.

Portanto, com base em estudos sobre as competências de raciocínio matemáticos necessárias ao aprendizado da Álgebra, serão discutidas as possibilidades de exploração desta como método para ensinar o conteúdo de funções associado à investigação de problemas.

A presente dissertação é composta por sete capítulos e um anexo, conforme descrição a seguir.

No Capítulo 1 com a temática “Matemática uma ferramenta necessária para a cidadania”, apresenta-se uma discussão sobre a importância de trabalhar os conteúdos de matemática voltados para o cotidiano dos estudantes. Neste capítulo, foi feita uma relação entre o ensino tradicional de Matemática e um ensino de Matemática no qual os estudantes são protagonistas do processo de ensino e aprendizagem com a aplicação dos conteúdos pautados na realidade do seu meio social. Acreditamos que dessa maneira, o processo de aprendizagem contribui para o combate às injustiças sociais. O capítulo finaliza com a apresentação da tendência pedagógica da Educação Matemática Crítica que defende que o ensino ideal é formar estudantes para a indignação contra as injustiças, visando o exercício crítico da cidadania e não a memorização, a alienação nem a exclusão.

No Capítulo 2, são apresentados os pressupostos teóricos no que tange à Modelagem matemática como uma orientação metodológica que norteia a implantação da proposta para aproximar o conteúdo da Álgebra à realidade dos estudantes fundamentada no pensamento da pesquisadora Biembengut(2016).

O Capítulo 3, traz a importância da aprendizagem da Álgebra no século XXI. Este capítulo enfatiza a contribuição da Álgebra para despertar nos educandos a consciência cidadã. É apresentado um relato teórico sobre o raciocínio algébrico e quando devem começar a ser introduzidas as noções básicas aos estudantes, seguindo as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e da Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Em seguida são apresentadas as competências específicas da área de Matemática e as habilidades a serem desenvolvidas no ensino da Álgebra no ensino médio. O capítulo é encerrado com a defesa de que a Álgebra deve ser ensinada como instrumento para a interpretação do mundo em seus diversos contextos.

No Capítulo 4, é exibida uma proposta didática composta por 8 (oito) aulas e 24 atividades, para uma turma do 2º ano do Ensino Médio, nas quais são apresentadas orientações didáticas para a abordagem dos conteúdos sobre funções polinomiais relacionados com o tema Coleta Seletiva do Lixo.

O Capítulo 5 apresenta a motivação da proposta assim como o relato de experiência no desenvolvimento das aulas e quais foram os resultados alcançados.

No Capítulo 6, são apresentados os elementos matemáticos que permeiam a proposta, isto é, funções polinomiais, interpolação e o polinômio interpolador de Lagrange. Também são dados exemplos contextualizados com o projeto Coleta Seletiva do Lixo, utilizando como recurso para o esboço de gráfico de funções o *software* de geometria dinâmica GeoGebra.

No Capítulo 7, conclui-se esta dissertação explanando as Considerações Finais se a questão problematizadora da pesquisa é respondida através dos resultados encontrados, e, apontando caminhos a serem seguidos a partir da proposta.

Por fim, no Apêndice A são colocados os resultados de duas pesquisas de opinião que foram realizadas antes da aplicação da proposta, para decidir o tema, e depois, para coletar a opinião sobre as atividades.

0.1 Motivação Pessoal

Na minha experiência de mais de 23 anos como professor de Matemática da Educação Básica, na rede de ensino pública do estado da Bahia, com o passar dos anos notei que

as minhas práticas, métodos, metodologias e materiais didáticos utilizados deveriam ser repensado, aperfeiçoados e até mesmo reconstruídos. Uma vez que os interesses e o perfil dos alunos iam se modificando, e a medida que fui percebendo que apresentar a Matemática de forma contextualizada em consonância com a realidade dos mesmos é uma peça importante para a aprendizagem ativa.

Assim, ingressei no programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT/UESC), a fim de ter uma formação continuada que ajudasse a aprimorar minha prática em sala de aula, e conseqüentemente, visando melhorar os índices de desempenho em Matemática na escola que leciono. Para tanto, ao longo do curso das disciplinas e com base no meu interesse pessoal, foi desenvolvida uma proposta de ensino para os conteúdos de função polinomial, de forma contextualizada, na qual a Matemática pode ser estudada por meio da curiosidade e experiência.

Capítulo 1

Matemática: Uma ferramenta necessária para a cidadania

O desafio da escola brasileira no novo milênio não é simples, pois existe um consenso que ela tem que formar um cidadão consciente de sua responsabilidade política, social e econômica, e sobretudo, interagir no seu meio social como agente transformador das injustiças que tornam excluídas um grande número de pessoas que já sofrem com a estigmatização.

Vivemos em uma sociedade desigual, onde os interesses de uma classe dominante predominam e a busca incessante pelo lucro leva as pessoas ao individualismo, a competitividade e ao egoísmo exacerbado. Basta analisar o comportamento dos cidadãos para perceber que o que prevalece no atual momento são inúmeros episódios de uma política corrupta aumentando consideravelmente o índice de miséria populacional. Fato que é confirmado pelo Índice de Percepção da Corrupção (IPC), “que avalia 180 países e territórios e os atribui notas em uma escala entre 0 e 100. Quanto maior a nota, maior é a percepção de integridade do país”. O Brasil, em 2021, aparece com uma nota 38, ocupando o 96^o lugar . Isso interfere na vida das pessoas, pois, naquele ano,

[...] o IPC destaca a relação entre corrupção e abuso de direitos humanos. Como mostra o relatório deste ano, países percebidos como altamente corruptos têm maior probabilidade de reduzir seu espaço cívico e democrático e atacar direitos da população ¹.

Entretanto, urge a necessidade de romper esse comportamento pautando-se no exercício da cidadania, onde, segundo o PCN (BRASIL, 1998) a cidadania pode ser compreendida:

[...] como participação social e política, assim como o exercício de direitos e deveres políticos, cívicos e sociais, adotando, no dia a dia, atitudes de solidariedade, cooperação e repúdio às injustiças, respeitando o outro e exigindo para si o mesmo respeito (BRASIL, 1998, p.11).

Como a escola exerce forte influência na formação das pessoas, pode ajudar a organizar seus alunos para o exercício da cidadania, e desta forma, contribuir para formar uma sociedade democrática, com pessoas mais generosas, mais honestas e mais fraternas. Para isso, vem mudando seus currículos seguindo a orientação da BNCC (2018),

¹Fonte: Transparência Internacional (2021). Disponível em:<https://transparenciainternacional.org.br/ipc>. Acesso em: 21/05/2022

[...] que orienta os currículos e as propostas pedagógicas de todas as escolas públicas e privadas de Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio, em todo o Brasil está orientada pelos princípios éticos, políticos e estéticos que visam à formação humana integral e à construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva (BRASIL, 2018, p.1).

A este respeito, o estudioso Paulo Freire (1998) contribuiu com o aperfeiçoamento da noção de currículo, e que até nos dias atuais é muito incompreendida, pois as práticas de ensino não favorecem o pensar autônomo, emancipado. Em suas palavras,

Não temo dizer que inexistem validade no ensino em que não resulta um aprendizado em que o aprendiz não tornou capaz de recriar ou de refazer o ensinado. [...] nas condições de verdadeira aprendizagem os educandos vão se transformando em reais sujeitos da construção e da reconstrução do saber ensinado [...] percebe-se, assim, que faz parte da tarefa docente não apenas ensinar conteúdos, mas também ensinar a pensar certo (FREIRE, 1998, p.26-29).

Nessa mesma direção, de acordo com Cortela,

Uma nova qualidade social, por sua vez, exige uma reorientação curricular que preveja o levar em conta a realidade do aluno. Levar em conta não significa aceitar essa realidade mas dela partir; partir do universo do aluno para que ele consiga compreendê-lo e modificá-lo (CORTELLA, 2017, p.20).

No entanto, o modo como se instrui nas escolas brasileiras por muitas vezes, robustecem as desigualdades sociais, a exemplo do ensino de Matemática que é visto como uma área que poucos conseguem aplicar no seu contexto social. Segundo Skovsmose, citando Cotton:

[...] notou que a aula de matemática é dividida em duas partes: primeiro, o professor apresenta algumas ideias e técnicas matemáticas e, depois, os alunos trabalham com exercícios selecionados. Ele também observou que existem variações nesse mesmo padrão: há desde o tipo de aula em que o professor ocupa a maior parte do tempo com exposição até aquela em que o aluno fica a maior parte do tempo envolvido com resolução de exercícios. De acordo com essas e muitas outras observações, a educação matemática tradicional se enquadra no paradigma do exercício (SKOVSMOSE, 2001, p.1).

Conforme Skovsmose (2001), quando a Matemática é transmitida no método tradicional, se resumindo normalmente através de aulas expositivas, cabendo aos alunos memorizar e repetir os saberes, pouco contribuem na intervenção social. E, para que haja uma efetiva intervenção, é preciso um novo olhar para o ensino da Matemática e para isso é relevante mencionar que:

[...] os estudantes devem estar envolvidos no controle do processo educacional. Ambos, estudantes e professor, devem estabelecer uma distância crítica do conteúdo da educação: os princípios aparentemente objetivos e neutros para a estruturação do currículo devem ser investigados e avaliados. A educação deve ser orientada para problemas, quer dizer, orientada em direção a uma situação “fora” da sala de aula (SKOVSMOSE, 2001, p.38).

Assim, para Skovsmose (2001) o ensino de Matemática pode auxiliar na compreensão da realidade e na sua intervenção. Por isso, conhecer os conceitos e procedimentos matemáticos básicos contribui para formar o cidadão consciente de seu papel na sociedade, independente no seu julgamento para não tornar-se alienado às vontades de uma classe dominante. Seguindo esse pensamento para a BNCC (2018) o foco é:

[...] a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, em diferentes contextos. Conseqüentemente, quando a realidade é a referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio – impactados de diferentes maneiras pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pelos projetos de bem viver dos seus povos, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros. Nesse contexto, destaca-se ainda a importância do recurso a tecnologias digitais e aplicativos tanto para a investigação matemática como para dar continuidade ao desenvolvimento do pensamento computacional (BRASIL, 2018, p.528).

Skovsmose (2001) também apresenta a tese de que a Matemática formata a sociedade, isto é, o ensino da Matemática deve criar condições para que o estudante desenvolva suas capacidades e aprenda os conteúdos necessários para construir instrumento de percepção da realidade, para isso podem ser usadas metodologias diversificadas. O aluno tem que estudar a Matemática como meio para compreender o mundo à sua volta e vê-la como área do conhecimento que desperte o espírito de investigação, o desenvolvimento da capacidade para formular e resolver problemas, capacidades necessárias à integração e intervenção na sociedade.

Caso contrário, a Matemática será percebida como uma disciplina de resultados e procedimentos infalíveis, cujos elementos fundamentais seriam as operações aritméticas, os processos algébricos, as definições e os teoremas geométricos, o que provavelmente pode contribuir para o aumento da exclusão social.

Sem dúvida, é a matemática a disciplina mais chamada na hora de arbitrar para a cidadania. É ela quem mais reprova e portanto é uma das grandes responsáveis pela exclusão de grande parte da população. Todo processo seletivo, alguns necessários, outros não, que a sociedade se vê obrigada a empregar, quando se tem mais competidores do que se necessita ou baixa capacidade de absorção, é a matemática solicitada a colocar o demarcador. Podemos então dizer que quando se fala com vinculação entre cidadania e educação marcada pela exclusão, é a matemática a grande responsável².

Nessa linha de raciocínio, para Skovsmose (2001) um efeito visível da difusão dessa concepção é a ideia já incutida nos estudantes de que a matemática ensinada na escola é geralmente muito mecânica e exata. Mesmo inconscientemente, os professores podem estar reduzindo o estudo da matemática ao mero treinamento, através de resolução de exercícios de fixação e memorização de conteúdos, assim dificulta o aprendizado dos estudantes, pois ele não consegue aplicar o que aprendeu na resolução dos problemas do seu cotidiano.

A pouca autoestima dos estudantes a respeito de suas competências para aprender Matemática tem analogia com a maneira como os conteúdos são abordados em sala de aula. Sobre isso Cortella afirma:

²Fonte: USP-CO28- Josias Alves de Melo Filho Disponível em ://www2.fe.usp.br/ etnomat/site-antigo/anais/CO28.html.

Acesso: 21/05/2022.

Quando um educador (a) nega (com ou sem intenção) aos alunos a compreensão das condições culturais, históricas e sociais de produção do conhecimento, termina por reforçar a mitificação e a sensação de perplexidade, impotência e incapacidade cognitiva (CORTELLA, 2017, p.102).

É imperativo que os professores da área de Matemática se posicionem criticamente para um ensino que provoca tanta reprovação, selecionando e excluindo pessoas, o que acaba normalizando a ideia de que poucos desfrutem dos privilégios e das riquezas do país, enquanto muitos não têm o mínimo necessário à sua sobrevivência. No entanto, com diz o estudioso Paulo Freire (1998) se vive numa democracia e deveríamos educar cidadãos para que sejam cada vez mais autônomos e críticos, as práticas em sala de aula deveriam construir e perpetuar os princípios de que todos têm o direito à cidadania, e de que precisamos lutar contra as injustiças e não ter um olhar normalizador perante elas.

De acordo a D’ambrosio (2007), a Matemática é um produto da evolução humana e, portanto, pode ser estudada e aprendida por todas as pessoas e não apenas por aquelas que têm mais aptidão com cálculo abstrato. Ressalta-se que os conteúdos dessa matéria deveriam propiciar aos estudantes uma visão crítica da sociedade que os rodeia.

Assim sendo, a escola deve caminhar para que os alunos possam compreender as porcentagens nos acréscimos ou descontos de um preço de certo produto; nos juros cobrados pelas financeiras e pelos bancos; avaliar o melhor momento para comprar; compreender os gráficos na divulgação das pesquisas eleitorais etc. Enfim, possam utilizar a aritmética, a álgebra, a geometria, a probabilidade e a estatística na compreensão ou resolução dos problemas do seu cotidiano. Como sugerem os PCN, os estudantes devem “questionar a realidade formulando-se problemas e tratando de resolvê-los, utilizando para isso o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação” (BRASIL, 1998, p.8).

Defendemos então que a Matemática deve ser ensinada como instrumento para a compreensão do mundo em seus diversos contextos, adotando uma forma de ensino matemático voltado para a formação da cidadania. Ressaltando de destacar seu o papel social e suas interações multidisciplinares dentro do aspecto social, político, histórico, econômico e ético. É pertinente citar essa fala de Biembengut e Hein:

Desafio como esse tem tornado crescente o movimento em prol da matemática, em especial, nas últimas décadas. Têm gerado reestruturações no currículo e nos métodos de ensino que forneçam elementos que desenvolvam potencialidades, propiciando ao aluno a capacidade de pensar crítica e independentemente. Não é difícil perceber que o futuro da civilização e da própria sobrevivência depende da qualidade de imaginação criadora dos homens e das mulheres do nosso tempo e das futuras gerações (BIEMBENGUT; HEIN, 2000, p.9).

Isso posto, recorre-se ao pensamento teórico do movimento da Educação Matemática Crítica para despertar no educando sua consciência cidadã, pois,

Os pontos principais desse movimento na relação pedagógica são: ensino comprometido com as transformações sociais e a construção da cidadania; participação ativa do aluno no processo de ensino e aprendizagem em um contexto de trabalho em grupo e não individual; busca de uma Matemática significativa para o aluno, vinculando-a à realidade, utilizando, para isto, recursos específicos e um ambiente

que propicie o desenvolvimento de sequências metodológicas que levem o aluno a construir seu próprio conhecimento (SILVA; COUTO; JÚNIOR, 2015, p.38)

Dessa forma, fica notório que é necessário que a escola vise formar estudantes que se indignem contra as injustiças, e para isso os mesmos devem estar engajados para o exercício crítico da cidadania e não apenas para a memorização, para a alienação e tampouco para a exclusão. Assim, os estudantes estariam sendo preparados para o exercício pleno da sua cidadania.

Capítulo 2

Metodologia de ensino

Podemos iniciar esse tópico lançando um questionamento: A Matemática é para poucos? Quando se analisa os índices de reprovação nas escolas do Brasil, observa-se que poucos estudantes conseguem obter um rendimento satisfatório nessa disciplina, sendo a que mais reprova, e, também, é uma das grandes responsáveis pela evasão escolar. Tais fatos são confirmados pelo maior estudo sobre educação do mundo que é o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa), que em 2018 apontou:

68,1% dos estudantes brasileiros estão no pior nível de proficiência em matemática e não possuem nível básico de Matemática, considerado como o mínimo para o exercício pleno da cidadania. Mais de 40% dos jovens que se encontram no nível básico de conhecimento são incapazes de resolver questões simples e rotineiras. Apenas 0,1% dos 10.961 alunos participantes do Pisa apresentou nível máximo de proficiência na área ¹.

Dentre as muitas causas que provocam o fracasso no ensino, uma delas vem a ser o método de programação mal difundido que não se preocupa em desenvolver o raciocínio lógico dos alunos e onde os conteúdos não tem nenhuma utilidade prática para os mesmos. Ressalta-se que, além de desperdiçar muito tempo em guardar na memória regras e fórmulas, os alunos treinam mecanicamente exercícios exaustos, pois a metodologia não se preocupa em trabalhar ideias. Assim sendo, o aluno não aprende a pensar, só a memorizar conteúdos, e com o passar do tempo, inevitavelmente esquece tudo aquilo que foi estudado.

Os estudos e pesquisas como as feitas por Negromonte (2019), Coutinho (2019), Andreis (2018) e Pacheco (2018), nos garantem que essas são práticas pedagógicas costumeiras na maioria das escolas brasileiras. Dessa forma, o ensino de Matemática faz distinção entre aqueles que conseguem aprender os conceitos lógico/matemáticos, considerados os mais inteligentes, e a maioria que não consegue aprender a disciplina. Mas, segundo Gómez-Granel (1996), “a matemática aparece como algo denso e enigmático até mesmo para pessoas cultas e instruídas, e não é difícil encontrar na literatura comentários de diversos autores lembrando a sua insatisfatória experiência com a aprendizagem da matemática” (GÓMEZ-GRANEL, 1996, p.258).

¹Fonte: Portal MEC (2018). Disponível em: portal.mec.gov.br/ultimas-noticias/211-218175739/83191-pisa-2018-revela-baixo-desempenho-escolar-em-leitura-matematica-e-ciencias-no-brasil

Acesso em: 27/05/2022

Sendo assim, não podemos concordar com essa percepção que é responsável por tanta reprovação e, conseqüentemente, exclusão de grande parte dos estudantes por não adquirirem os conhecimentos matemáticos que são fundamentais para o convívio social. Concordamos, portanto, com o pensamento de Rocha (2001) quando assevera que “a matemática como todo conhecimento é uma construção da mente humana; os números, as operações entre eles, as equações, a trigonometria, o cálculo diferencial foram criados por alguma razão, num determinado tempo” (ROCHA, 2001, p.26). Corroborando, os parâmetros curriculares quando diz, “a matemática caracteriza-se como uma forma de compreender e atuar no mundo e o conhecimento gerado nessa área do saber como fruto da construção humana na sua iteração constante com o contexto, social e cultural” (BRASIL, 1998, p.24).

E, para abolir um ensino tão excludente, pesquisadores em Educação Matemática do Brasil e do mundo buscam soluções para essas dificuldades pois, sabem que o ensino só será bem sucedido quando o aluno compreender aquilo que aprende e essa compreensão só será garantida quando ela for o agente da construção do seu conhecimento.

Pensando assim, é inadiável o aprimoramento educacional, pois, como afirmam Fonseca e Magina (2017):

Os desafios de uma sociedade em frenéticas mudanças, em todas as áreas do conhecimento, exigem do sistema educacional respostas eficientes e rápidas que possam atender às demandas da informação e do conhecimento, embora saibamos que a informação e o conhecimento, foram, são e serão partes importantes em qualquer momento da história e de suas transformações. Para tanto, o professor, com a sua formação, é parte fundamental do atendimento aos desafios que as mudanças requerem (FONSECA; MAGINA, 2017, p.1).

Diante desse desafio, os educadores matemáticos buscam novas concepções de ensino e aprendizagem para introduzir na sala de aula a compreensão e construção do domínio matemático. Entre as principais tendências da educação matemática estão: História da Matemática; Resolução de problemas; Etnomatemática; Modelagem Matemática; Uso de jogos matemáticos; Ensino baseado em projetos; Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação no Ensino de Matemática; e Educação Matemática Crítica.

É relevante trazer para o centro de discussão a Modelagem Matemática como uma estratégia alternativa para o ensino de Matemática, pois como método de pesquisa ela analisa situações ou fenômenos existentes na vida real tendo como um de seus objetivos chegar a um modelo que represente uma situação estudada.

Conforme afirmam Biembengut e Hein a Modelagem matemática “tenta traduzir situações reais para uma linguagem Matemática, para que por meio dela se possa melhor compreender, prever e simular ou, ainda, mudar determinadas vias de acontecimentos, como estratégia de ação, nas mais variadas áreas de conhecimentos” (BIEMBENGUT; HEIN, 2000, p.8).

Nesta perspectiva, Bassanezi define,

Modelagem Matemática como um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos, sendo uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual (BASSANEZI, 2010, p.24).

Para D’Ambrosio (1989),

Através da modelagem matemática o aluno se torna mais consciente da utilidade da matemática pra resolver e analisar problemas do dia-a-dia. Esse é um momento de utilização de conceitos já aprendidos. É uma fase de fundamental importância para que os conceitos trabalhados tenham um maior significado pra os alunos, inclusive com o poder de torná-los mais críticos na análise e compreensão de fenômenos diários (D’AMBROSIO, 1989, p. 3).

Como o foco neste trabalho é o estudo em relação a Álgebra, trazemos o afirmado por Cedraz, Merlini, Santana e Madruga:

O trabalho com conteúdos algébricos, auxiliados pela Modelagem Matemática, está ganhando cada vez mais espaço nos últimos anos no ambiente de pesquisas científicas e, conseqüentemente, no ambiente escolar, algo que consideramos como favorável no que diz respeito à uma melhora na relação dos estudantes com a Matemática (CEDRAZ et al., 2019, p.128) .

Destarte, como a Modelagem Matemática tem o potencial de interpretar e compreender os mais diversos fenômenos da nossa realidade, a usaremos para trabalhar conteúdos algébricos, dentro da nossa proposta.

2.1 Os Desafios da Sala de Aula e Modelagem

Segundo Biembengut (2016) na Modelagem Matemática, os professores dão maior importância ao ensino respeitando a experiência pessoal do aluno e investigação de problemas. Dessa forma, esclarecem os objetivos e orientam as atividades que estão sendo estudadas. Outra questão interessante é o trabalho com a interdisciplinaridade no intuito de enriquecer a visão de mundo dos alunos, onde a partir dessa abordagem as pessoas conseguem compreender que um mesmo acontecimento pode ser analisado sob diversos pontos de vista.

Dessa forma, no ensino de Matemática, são evitados os cálculos enfadonhos e desprovidos de significado, não sendo mais apresentado todo o conteúdo de forma oral. Assim, são utilizados definições e exemplos por meio de objetos concretos e experiências da realidade do aluno, fornecendo as informações necessárias, que o mesmo não teria condições de obter sozinho.

Por isso, conforme Bimbengut (2016) as práticas de Modelagem permitem que o professor seja criativo, motivador e que acima de tudo assuma a postura de um mediador entre o saber comum e o saber matemático para que o aluno torne-se um agente ativo no processo de construção do saber. Para que os alunos se sintam constantemente motivados, o professor deve trabalhar com temas que dizem respeito ao seu cotidiano para que possam sentir-se mais estimulados para o estudo de matemática, já que vislumbram na sua vivencia a aplicabilidade do que estudam na escola.

Motivados, os alunos têm mais facilidade em compreender o conteúdo, já que podem conectá-lo a outras áreas do conhecimento. Portanto, visando garantir uma aprendizagem com significado, as ações do professor devem ser orientadas a estimular a relação mútua entre os colegas, o confronto de ideias entre o que o aluno pensa e o que pensam seus colegas, seu professor e as demais pessoas do seu convívio (BRASIL, 1998).

De acordo com o pensamento da pesquisadora Biembengut (2016), ao planejar as aulas com foco na Modelagem Matemática, os conteúdos são trabalhados em consonância com outras áreas do conhecimento, “afim de que os estudantes não desvinculem da realidade deles e ainda lhes facilite a compreensão sobre um fato não conhecido, assimilando-o ou incorporando-o aos fatos já familiares” (BIEMBENGUT, 2016, p.228). Como o aluno passa a ser um agente ativo no processo de construção do saber, o professor não tem mais previsibilidade do que vai ocorrer pois certamente surgirão diversos caminhos propostos pelos alunos na resolução de problemas e com isso resultarão as perguntas inesperadas.

Por isso, segundo a pesquisadora Biembengut (2016), ao preparar aulas em Modelagem matemática, o professor deverá:

- Incentivar a pesquisa;
- Lidar com tema de interesse do aluno;
- Conhecer o tema a ser modelado (escolhido pelo professor ou pelo aluno);
- Reconhecer a situação problema;
- Promover a habilidade em formular problemas e resolver;
- Familiarizar-se com o assunto a ser modelado – referencial teórico;
- Classificar as informações (relevantes e não relevantes);
- Identificar os fatos envolvidos;
- Decidir quais os fatores a serem perseguidos, levantando hipóteses;
- Selecionar variáveis relevantes e constantes envolvidas; descrever essas informações em termos matemáticos.

Diante do que está posto, surge o desafio do planejamento de aulas flexíveis, o que requer do professor conhecimento pedagógico próprio, já que haverá uma diversidade de perguntas e respostas, às vezes inesperadas, cabendo ao professor conectá-las com os conceitos matemáticos.

2.2 Modelagem como método de ensino

A didática consiste em construir uma proposta apropriada para que o aluno aprenda e compreenda o contexto estudado. No contexto da Modelagem, tal compreensão só acontecerá quando a mesma estiver pautada na vivência do educando, pois este já traz consigo sua cultura, um modelo do seu cotidiano. Essa vivência é uma bagagem muito rica que deve ser explorada para a construção do conhecimento matemático.

Assim, os pesquisadores Biembengut e Hein (2000) argumentam que, “genericamente, pode-se dizer que matemática e realidade são dois conjuntos disjuntos e a modelagem é um meio de fazê-los interagir” (BIEMBENGUT; HEIN, 2000, p. 13). Nessa mesma linha, Biembengut (2016) nos diz que “a arte da modelagem está em guiar os estudantes

para uma adequada compreensão do meio em que vivem, e o potencial, em pô-los em prática”(BIEMBENGUT, 2016, p. 210). Portanto, nas aulas de matemática o professor tem que proporcionar aos estudantes:

-fazer e não apenas ouvir e memorizar sem compreender o significado do que estão estudando; - reconhecer certo número de configurações e símbolos significantes a partir das informações e dos dados levantados que possam remeter às linguagens matemática e científica; - adquirir conhecimento, principalmente, na compreensão dos dados para a formulação de um modelo; - incitar seus sentidos críticos e criativos na validação do modelo; - interagir com as produções de modelagem dos demais colegas em um seminário, complementando o aprendizado; - elaborar uma exposição escrita e oral da produção, para também saber se comunicar (BIEMBENGUT, 2016, p. 210) .

Nesse contexto, Fiorentini aponta que “a modelagem matemática é um método de ensino que contempla a pesquisa e o estudo e a discussão de problemas que dizem respeito a realidade dos alunos” (FIORENTINI,1995, p.26). A modelagem matemática é um método de ensino que relaciona as circunstâncias da vida cotidiana do aluno aos conteúdos matemáticos, onde o problema cotidiano debatido na sala de aula é exibido previamente para a classe para em seguida surgirem os conteúdos matemáticos.

De acordo com Biembengut (2016), a Modelagem organiza-se em três etapas não disjuntas: Percepção e Apreensão; Compreensão e Explicitação; e Significação e Expressão. Além disso, como em todo método de pesquisa, a pesquisadora indica os procedimentos que o professor deve seguir dentro de cada etapa:

Quadro 1

1ª Etapa: Percepção e Apreensão. Essa etapa visa estimular a percepção e apreensão dos estudantes sobre o tema/assunto do contexto deles ou que possa-lhes interessar.

- O tema/assunto deve permitir refazer um modelo ou fazer um modelo por analogia.
- Explicar sobre o tema/assunto. Iniciar a aula com breve explanação sobre o tema/assunto aos estudantes, envolvendo-os no contexto da origem do tema, quem está envolvido e para quem.
- Levantamento de questões e/ou sugestões. Instigar os estudantes a levantarem questões e/ou sugestões, pressupostos sobre o tema abordado.
- Selecionar questões para desenvolver o conteúdo. Dentre as questões ou sugestões levantadas pelos estudantes, selecionar uma (ou mais) que nos permita(m) desenvolver o conteúdo que se pretende ensinar.
- Levantar dados. Se for possível e/ou convenientes, solicitar aos estudantes levantar dados sobre o tema/assunto.

Fonte: Adaptado (BIEMBENGUT, 2016, p. 190 - 205)

Quadro 2

2ª Etapa: Compreensão e Explicação. O elo entre a percepção e o conhecimento.

- Levantar hipóteses ou pressupostos. Iniciar por selecionar questões ou pontuar os dados disponíveis. A partir do que apresentam, instigar os estudantes a levantar hipóteses ou pressupostos.
- Expressar os dados. Expressar, juntamente com os estudantes, os dados utilizados de diferentes linguagens matemáticas: formas geométricas, quadro de dados, gráfico, equação e/ou numa expressão matemática; de tal forma a suscitar o conteúdo curricular para solucionar a questão levantada e em acordo ao pressuposto ou hipótese considerada.
- Desenvolver o conteúdo. Apresentar o conteúdo do programa da disciplina (conceito, definição, propriedades etc.) e buscar fazer elo com a questão que gerou o processo. Tomar cuidado para não distanciar demais do tema-guia em questão e “fragilizar” o interesse dos estudantes. Um “ir e vir” entre questão e os conceitos precisa ser o foco.
- Exemplificar. Subetapa em que complementa o ensinar com exemplos análogos, ampliando o conjunto de aplicações. Utilizar das situações cotidianas e/ou do contexto dos estudantes.
- Formular. Retornar à questão que gerou o processo, levando os estudantes a compreender e explicitar o processo, e a formular um modelo.

Fonte: Adaptado (BIEMBENGUT, 2016, p. 190 - 205)

Quadro 3

3ª Etapa: Significação e Expressão. Avaliar a validade do modelo e, a partir deste processo de validação, verificar o que foi apreendido do processo e apreendido dos conteúdos curriculares e não curriculares.

- Resolver a(s) questão(ões). Aguçar o senso criativo dos estudantes para resolver questões levantadas, a partir do modelo formulado na etapa anterior.
- Interpretar e avaliar. Propor que cada grupo de estudantes discuta e interprete, a partir do modelo formulado, a(s) solução(ões) da(s) proposta(s) no início da 1ª etapa.
- Validar e expressar. Instigar que cada grupo de estudantes perceba o quanto seu modelo formulado, por mais simples que possa ser, pode ser útil para aprender mais sobre outras coisas de seu entorno fora do contexto escolar.

Fonte: Adaptado (BIEMBENGUT, 2016, p. 190 - 205)

Neste sentido pode-se dizer que a Modelagem Matemática é o processo que desenvolve um modelo que tenta descrever matematicamente um fenômeno da realidade do estudante ou de outras áreas do conhecimento para tentar compreender, criar hipóteses e reflexões sobre tais fenômenos.

Capítulo 3

Perspectivas para aprendizagem de Álgebra no século XXI

Tradicionalmente os estudos da Álgebra no ensino básico tem seu início no 6^o ano do Ensino fundamental, sendo nessa etapa que o professor constata que os estudantes já dominam os cálculos aritméticos. Diante dessa assertiva são relevantes as colocações de Gimenez e Lins (1997):

Essa visão parte da ideia piagetiana de que o desenvolvimento intelectual depende de um processo de maturação, de forma que há um limite objetivo para o quanto se pode apressar esse desenvolvimento, surgiu sugestão de que o ensino-aprendizagem da álgebra na escola deveria ser iniciado apenas de forma bastante tardia (GIMENEZ; LINS, 1997, p.94) .

Conforme os pesquisadores referidos acima, pode-se afirmar que a maioria dos professores como também dos autores dos livros didáticos acreditam nessa concepção citada. Tal ponto de vista pode ter sua crença na ideia de que “especialistas, professores, bem como os próprios estudantes reconhecem que o principal risco na aprendizagem da Matemática para muitos estudantes pode ser o momento em que as letras começam a substituir os números” (NEVES, 2003, p.185). Enfatiza-se que nesse período há uma ruptura entre as estimativas e os cálculos pois os alunos já conseguem fazer uma analogia com o seu dia-a-dia (usam nos cálculos objetos, coisas, números...) e os cálculos com letras a exemplo da resolução da equação $5x - 10 = 15$. Assim sendo, é revelado um novo cenário para os alunos, contudo sem nenhuma significação para o mesmo, pois o ensino de álgebra, presente nas escolas, tem a atenção mais voltada para os procedimentos e regras, numa álgebra meramente abstrata, e, dessa forma, perde a chance de desenvolver nos educandos a competência de compreensão dos conceitos tão importantes para uma aprendizagem com significado (KLÜSENER, 2003).

Segundo Joaquim Gimenez e Rômulo Campos Lins (1997, p.106), a “tendência letrista não se baseia em investigação ou reflexão de qualquer natureza ou profundidade, apenas em uma tradição, tradição essa que estudos e projetos de todos os tipos, e por todo o mundo, inclusive no Brasil, já mostraram ser ineficaz e mesmo perniciosos à aprendizagem”.

Entretanto, apesar de existir estudos adequados no que se refere ao ensino-aprendizagem de Álgebra, são raros aqueles que são inseridos efetivamente na prática das escolas brasileiras. A preferência predominante é a prática do ensino tradicional, onde, em geral, o

conteúdo é apresentado oralmente, partindo de definições e exemplos, seguidos de exercícios de aprendizagem e fixação, assim, os estudantes devem reproduzir até memorizar o modelo para só então, realizar uma prova escrita ou um teste que os submete ao critério de uma nota avaliativa. Dessa forma, os alunos aprenderam a reproduzir procedimentos mecânicos, mas não aprenderam o conteúdo e, tampouco sabem utilizá-lo em diferentes contextos.

No entanto, para mudar essa prática comum nas escolas brasileiras, segundo os pesquisadores Gimenez e Lins (1997), “é preciso começar cedo o trabalho com álgebra, e de modo que esta e a aritmética desenvolvam-se juntas, uma implicada no desenvolvimento da outra”. Sob o mesmo ponto de vista, os PCN assinalam:

Os adolescentes desenvolvem de forma bastante significativa a habilidade de pensar “abstratamente”, se lhes forem proporcionadas experiências variadas envolvendo noções algébricas, a partir dos ciclos iniciais, de modo informal, em um trabalho articulado com a Aritmética. Assim, os alunos adquirem base para uma aprendizagem de Álgebra mais sólida e rica em significados (BRASIL, 1998, p.117).

Para complementar a citação acima a BNCC nos orienta que:

[...] o trabalho com a álgebra estejam presentes nos processos de ensino e aprendizagem desde o Ensino Fundamental – Anos Iniciais, como as ideias de regularidade, generalização de padrões e propriedades da igualdade. No entanto, nessa fase, não se propõe o uso de letras para expressar regularidades, por mais simples que sejam. A relação dessa unidade temática com a de Números é bastante evidente no trabalho com seqüências (recursivas e repetitivas), seja na ação de completar uma seqüência com elementos ausentes, seja na construção de seqüências segundo uma determinada regra de formação (BRASIL, 2018, p.270).

Paralelamente com os estudos da aritmética, o professor pode trabalhar, por exemplo, com uma lista da cesta básica, contas de água, de luz, boletos bancários, entre outros recursos acessíveis para introduzir os primeiros conceitos da álgebra. Outra alternativa eficaz para a aprendizagem de Álgebra, vem a ser a apresentação dos cálculos de áreas de figuras planas com medidas específicas e em seguida apresentando as fórmulas. Denominado pré-álgebra, esse procedimento ajudará nos cálculos posteriores e o aluno irá construindo o conceito e o significado da Álgebra onde aos poucos vai adquirindo a maturidade e habilidade sobre essa área do conhecimento.

Para tanto, o professor deve ilustrar esses tipos de exemplos em diferentes situações para que o aluno possa perceber a operação e depois consiga fazer a generalização, através da observação de padrões, ou regularidades, a partir de casos particulares. Mas é bom ressaltar que, o que vale para casos particulares nem sempre prevalece para o geral, sendo necessário que justifique a generalização. Tal orientação se encontra especificada nos PCN sobre o estudo da Álgebra pois “constitui um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização, além de lhe possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas” (BRASIL, 1998, p.115). Também, para promover maior significado no estudo dessa área do conhecimento os PCN orientam que:

O ensino de Álgebra precisa continuar garantindo que os alunos trabalhem com problemas, que lhes permitam dar significados à linguagem e às ideias matemáticas. Ao se proporem situações-problema bastante diversificadas, o aluno poderá reconhecer diferentes funções de Álgebra (ao resolver problemas difíceis do ponto de vista aritmético, ao modelizar, generalizar e demonstrar propriedades e fórmulas e estabelecer relações entre grandezas) (BRASIL, 1998, p.84).

Nessa perspectiva, a BNCC determina que no Ensino Fundamental nos anos finais,

os alunos devem compreender os diferentes significados das variáveis numéricas em uma expressão, estabelecer uma generalização de uma propriedade, investigar a regularidade de uma sequência numérica, indicar um valor desconhecido em uma sentença algébrica e estabelecer a variação entre duas grandezas. É necessário, portanto, que os alunos estabeleçam conexões entre variável e função e entre incógnita e equação. As técnicas de resolução de equações e inequações, inclusive no plano cartesiano, devem ser desenvolvidas como uma maneira de representar e resolver determinados tipos de problema, e não como objetos de estudo em si mesmos (BRASIL, 2018, p.270).

Mediante o exposto, Lins e Gimenez (1997) defendem que a educação aritmética e algébrica devem ter uma nova característica no século XXI, visto que,

O grande objetivo deve ser o de encontrar um equilíbrio entre três frentes: i) o desenvolvimento da capacidade de pôr em jogo nossas habilidades de resolver problemas e de investigar e explorar situações; ii) o desenvolvimento de diferentes modos de produzir significado (pensar), o que podemos chamar de atividades de inserção e tematização; e, iii) o aprimoramento das habilidades técnicas, isto é, da capacidade de usar as ferramentas desenvolvidas com maior facilidade (GIMENEZ; LINS, 1997, p.165).

Com o escopo de trazer mais informações esclarecedoras, asseguram Gimenez e Lins (1997), “a aritmética e álgebra para o século XXI devem, a um só tempo, integrar-se com a rua - isto é, cumprir um papel de organizar o mundo fora da escola também - e tornar-se mais efetiva em seu papel de ajudar os alunos a aumentar seu repertório de modos de produzir significado” (GIMENEZ; LINS, 1997, p.162).

É inquestionável a viabilidade de estudar o conteúdo da Álgebra com significado real, baseando-se no conhecimento prévio do aluno tendo em vista o confronto daquilo que ele sabe com o que se almeja ensinar. Para tanto, a escola deve proporcionar um cenário apropriado para que o aluno tenha uma compreensão da Álgebra nos seus diversos contextos despertando-o para ser um cidadão autônomo e crítico.

3.1 Ensino da álgebra no Ensino Médio

Este trabalho se concentra nos estudos da Álgebra no Ensino Médio, pois estudos nos dizem que nessa etapa do ensino os estudantes chegam com muita dificuldade em Matemática. A Modelagem matemática é uma alternativa para amenizar essa dificuldade em relação ao ensino da Álgebra, por exemplo, de acordo com Cedraz et al. (2019):

A análise das pesquisas indica que o trabalho com a Modelagem Matemática, relacionado aos conteúdos de Álgebra, motiva os alunos uma vez que rompe com o “afastamento” da Matemática e o cotidiano, proporciona trabalho interdisciplinar e estimula o estudante a pesquisar e desenvolver conhecimento lógico-matemático (CEDRAZ et al., 2019, p.127) .

Portanto, o ensino de Álgebra deve ser visto pelo estudante como um conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas a outras áreas do conhecimento. Não se trata de os estudantes possuírem muitas e sofisticadas estratégias, mas sim de desenvolverem a iniciativa e a segurança para adaptá-las a diferentes contextos, usando-as adequadamente no momento oportuno.

3.2 O ensino de Álgebra segundo os documentos oficiais

O ensino formal, no que tange a Educação Infantil, o Ensino Fundamental e o Ensino Médio é direcionado por documentos desenvolvidos pela Secretaria de Educação Básica (SEB), tendo como intuito orientar como, quando e onde os conteúdos das diversas áreas do conhecimento devem ser abordados nas instituições de ensino. Esses documentos consistem na Lei nº 9.394, referente a Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018).

A Lei nº 9.394, foi estabelecida em 1996, passando por diversas modificações desde então, tem como função garantir que a educação formal estará associada ao mundo do trabalho e à prática social. Ela estabelece direitos e deveres no processo de ensino e aprendizagem vinculados a cultura, cidadania e inclusão.

Quanto aos PCN, este documento tem como função orientar os professores acerca dos conteúdos que devem ser trabalhados, tendo um Projeto Político Pedagógico. Com foco no processo de ensino e aprendizagem da Álgebra, os PCN indicam que na Álgebra devem ser explorados conteúdos qualitativos e quantitativos da realidade, identificando relações entre eles. Também, devem-se explorar situações reais que levem o estudante a interpretar as expressões, bem como o seu uso para resolver problemas reais que integrem equações, inequações etc, possibilitando a interpretação da matemática em situações distintas do cotidiano.

Quanto à BNCC, esse documento é oriundo do debate entre educadores e da sociedade civil para articular os direitos da aprendizagem por meio de competências e habilidades desde a educação infantil até o Ensino Médio. Na área da Matemática os conteúdos são divididos em: álgebra; números; geometria; grandezas e medidas e; probabilidade e estatística. No que se refere ao ensino de Álgebra, a BNCC afirma que esta disciplina se destina a cálculos nos quais números são representados por letras, envolvendo propriedades, expressões, equações e funções.

Na sequência, as Tabelas 3.1 e 3.2 apresentam as competências e habilidades, respectivamente, indicadas pela BNCC e as Tabelas 3.3 e 3.4 apresentam as competências e as

habilidades indicadas pelas referências do Exame Nacional do Ensino Médio(ENEM)¹ para o ensino de álgebra.

Portanto, a partir das indicações dos documentos oficiais para a educação, bem como dos conteúdos de Álgebra a serem trabalhados, será desenvolvida uma proposta de ensino para esses conteúdos de forma contextualizada, a partir do método Modelagem Matemática.

Tabela 3.1: Competências indicadas pela BNCC para o ensino de Álgebra.

| |
|---|
| Competência 1 Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, ou ainda questões econômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a consolidar uma formação científica geral. |
| Competência 2 Articular conhecimentos matemáticos ao propor e/ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas de urgência social, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, recorrendo a conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática. |
| Competência 3 Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística – para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. |
| Competência 4 Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático. |
| Competência 5 Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. |

Fonte: Adaptado Brasil (2018).

¹Disponível em: https://download.inep.gov.br/download/enem/matriz_referencia.pdf
Acesso: 25/05/2022

Tabela 3.2: Habilidades indicadas pela BNCC para o ensino de Álgebra.

| |
|---|
| <p>(EM13MAT101) Interpretar situações econômicas, sociais e das Ciências da Natureza que envolvem a variação de duas grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação com ou sem apoio de tecnologias digitais.</p> |
| <p>(EM13MAT202) Planejar e executar pesquisa amostral usando dados coletados ou de diferentes fontes sobre questões relevantes atuais, incluindo ou não, apoio de recursos tecnológicos, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das de dispersão.</p> |
| <p>(EM13MAT203) Planejar e executar ações envolvendo a criação e a utilização de aplicativos, jogos (digitais ou não), planilhas para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros compostos, dentre outros, para aplicar conceitos matemáticos e tomar decisões.</p> |
| <p>(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, incluindo ou não tecnologias digitais.</p> |
| <p>(EM13MAT302) Resolver e elaborar problemas cujos modelos são as funções polinomiais de 1^o e 2^o graus, em contextos diversos, incluindo ou não tecnologias digitais.</p> |
| <p>(EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1^o grau para representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.</p> |
| <p>(EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2^o grau para representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.</p> |
| <p>(EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1^o grau.</p> |
| <p>(EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2^o grau do tipo $y = ax^2$.</p> |
| <p>(EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos da Matemática Financeira ou da Cinemática, entre outros.</p> |

Fonte: Adaptado Brasil (2018).

Tabela 3.3: Competências indicadas pelo ENEM para o ensino de Álgebra.

| |
|---|
| <p>Competência de área 5 Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.</p> |
| <p>Competência de área 6: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsões de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.</p> |

Fonte: Adaptado INEP, p.6.

Tabela 3.4: Habilidades indicadas pelo ENEM para o ensino de Álgebra.

| |
|--|
| H19 - Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas. |
| H20 - Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas. |
| H21 - Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos. |
| H22 - Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação. |
| H23 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos. |
| H24 - Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências. |
| H25 - Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos. |
| H26 - Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos. |

Fonte: Adaptado INEP, p.6.

Capítulo 4

Uma Proposta para aproximar o conteúdo de Álgebra à realidade dos estudantes do Ensino Médio

Neste capítulo apresentamos a proposta didática do trabalho. Ela é desenvolvida em 8 (oito) aulas, de 100 minutos cada, as quais serão apresentadas nas oito seções do capítulo. A proposta consta com 24 atividades elaboradas com as competências e habilidades que serão exigidas no Enem, para uma turma do 2º ano do Ensino Médio, nas quais serão apresentadas orientações didáticas para a abordagem dos conteúdos sobre Álgebra relacionados com temas do cotidiano dos estudantes. Cada aula foi planejada com a seguinte estrutura:

- Definição dos conteúdos a serem desenvolvidos;
- Definição de objetivos de aprendizagem que explicitam as competências e habilidades da BNCC a serem desenvolvidas;
- Planejamento aula a aula que trata da organização dos estudantes, do espaço e do tempo por atividade proposta;
- Sugestão de diferentes maneiras de acompanhar o desenvolvimento da aprendizagem dos estudantes com apresentação de questões que os auxiliem na avaliação do desenvolvimento das habilidades relacionadas nas aulas;
- Definição do processo de avaliação. A função da avaliação é nortear as práticas de ensino que promovam tanto a evolução do estudante como a do professor para que ambos possam superar os desafios pedagógicos que enfrentam.

O objetivo é orientar o professor sobre seu papel enquanto mediador apto a despertar nos educandos através dos conteúdos de matemática uma compreensão da realidade onde encontram-se inseridos, instigando-os a agir como cidadãos conscientes do seu papel social, contribuindo assim para formar uma sociedade mais justa, fraterna e igualitária.

4.1 Aula 1: Diálogo sobre a Coleta Seletiva do Lixo.

4.1.1 Duração

Duas aulas de 50 minutos cada.

4.1.2 Conteúdo

1. Coleta seletiva do lixo.

4.1.3 Objetivos de aprendizagem

1. Reconhecer a importância da coleta seletiva do lixo.
2. Identificar os materiais recicláveis.

4.1.4 Competências e habilidades da BNCC

A atividade proposta permite o desenvolvimento da Competência Específica 1, da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, a saber: “Analisar processos políticos, econômicos, sociais, ambientais e culturais nos âmbitos local, regional, nacional e mundial em diferentes tempos, a partir da pluralidade de procedimentos epistemológicos, científicos e tecnológicos, de modo a compreender e posicionar-se criticamente em relação a eles, considerando diferentes pontos de vista e tomando decisões baseadas em argumentos e fontes de natureza científica”; e da habilidade EM13CHS103 da mesma área, que diz: “Elaborar hipóteses, selecionar evidências e compor argumentos relativos a processos políticos, econômicos, sociais, ambientais, culturais e epistemológicos, com base na sistematização de dados e informações de diversas naturezas (expressões artísticas, textos filosóficos e sociológicos, documentos históricos e geográficos, gráficos, mapas, tabelas, tradições orais, entre outros)”.

4.1.5 Materiais

Data show, computador, slides e internet.

4.1.6 Desenvolvimento

O(A) professor(a), inicialmente, organizará uma roda de conversa, informando aos alunos acerca da atividade, que a mesma será sobre o tema Coleta Seletiva do Lixo, onde serão feitas as seguintes perguntas:

Atividade 1:

- Qual estimativa do volume de lixo produzido e descartado pela população?
- O município tem coleta seletiva do Lixo?
- Os munícipes sabem, em média, quanto se perde por não reciclar o lixo produzido?

O(a) professor, após a roda de conversa, poderá fazer uma leitura dirigida sobre a importância da Coleta e Reciclagem do lixo.

Observação: Importante convidar professor(a) de Geografia para palestrar sobre o tema.

4.1.7 Avaliação

Serão adotados os seguintes critérios de avaliação: Participação na roda de conversas e auto avaliação.

4.2 Aula 2: Leitura e interpretação de tabelas e gráficos

4.2.1 Duração

Duas aulas de 50 minutos cada.

4.2.2 Conteúdo

1. Probabilidade e Estatística: leitura e interpretação de tabelas e gráficos.

4.2.3 Objetivos

1. Interpretar informações contidas em tabelas e gráficos como forma de comunicação, reconhecendo sua importância no cotidiano como instrumento de análise.
2. Resolver situações problemas a partir de dados contidos em tabelas ou gráficos.

4.2.4 Competências e habilidades da BNCC

Dentro da Área de Matemática, essa atividade permite o desenvolvimento das Competências Específicas 1 e 2, e das Habilidades EM13MAT101, EM13MAT102 e EM13MAT202.

4.2.5 Materiais

Computador, internet e *software* de construção de gráficos.

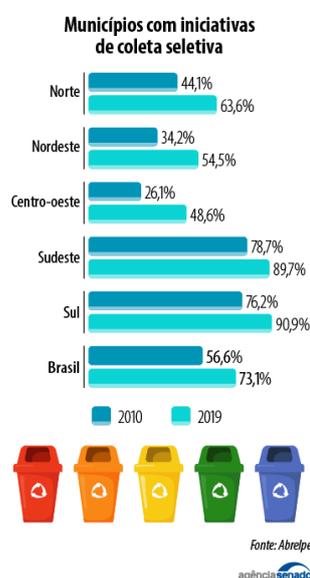
4.2.6 Desenvolvimento

O(A) professor(a) deverá orientar os estudantes para que eles identifiquem os diversos tipos de gráficos nas pesquisas sobre o tema Coleta Seletiva do Lixo no Brasil. Espera-se que encontrem na pesquisa representações gráficas, como histogramas, gráficos de linhas e setores, entre outros.

O(a) professor(a) poderá escolher um tipo de gráfico e debater sobre a importância da análise e interpretação de gráficos. Nesse momento é importante discutir sobre pesquisa amostral.

Como sugestão, os estudantes podem analisar o gráfico da Figura 4.1¹.

Figura 4.1: Coleta Seletiva



Fonte: Senado Federal (2021)

Após o levantamento de dados e a análise dos gráficos, os estudantes poderão elaborar um texto dissertativo com os seguintes questionamentos.

Atividade 2:

- A importância da coleta seletiva do lixo.
- O que é feito com o lixo na sua cidade?
- Quais prejuízos o lixo traz para a população?
- A coleta é uma importante forma de promover a prática da reciclagem.
- A política é a que envolve repensar, reduzir, recusar, reutilizar e reciclar.

4.2.7 Avaliação

Serão adotados os seguintes critérios de avaliação: Demonstrar interesse no assunto estudado, participação oral, participação e cooperação nas atividades desenvolvidas.

¹Disponível em: <https://www12.senado.leg.br/noticias/infomaterias/2021/06/aumento-da-producao-de-lixo-no-brasil-requer-ção-coordenada-entre-governos-e-cooperativas-de-catadores>. Acesso: 21/05/2022.

4.3 Aula 3: Coleta de dados

4.3.1 Duração

Duas aulas de 50 minutos cada.

4.3.2 Conteúdos

1. Coletas de dados.
2. Construção de tabelas.
3. Construção de gráficos.

4.3.3 Objetivo

1. Trabalhar a construção de tabelas e gráficos.
2. Refletir criticamente sobre o lixo que cada cidadão ou família produz diariamente.

4.3.4 Competências e habilidades da BNCC

Dentro da Área de Matemática, essa atividade permite o desenvolvimento da Competência Específica 2, e das Habilidades EM13MAT202 e EM13MAT203.

4.3.5 Materiais

Computador, planilha do Excel, *software* GeoGebra e calculadora.

4.3.6 Desenvolvimento

O(A) professor(a) nesse momento deverá solicitar aos estudantes que façam a coleta seletiva do lixo durante uma semana para ter uma amostragem de quanto se perde por não fazer a coleta dos produtos recicláveis. De posse dos dados coletados, os estudantes organizarão as informações coletadas por tabelas e gráficos. Segue como sugestão a seguinte atividade,

Atividade 3: Preencha as Tabelas 4.1 e 4.2.

Tabela 4.1: Coleta diária do material reciclável

| | Segunda | Terça | Quarta | Quinta | Sexta | Sábado | Domingo |
|-------------------|---------|-------|--------|--------|-------|--------|---------|
| Aço | | | | | | | |
| Alumínio | | | | | | | |
| Garrafas Pet | | | | | | | |
| Garrafas de vidro | | | | | | | |
| Plástico | | | | | | | |

Fonte: O autor (2022)

Tabela 4.2: Cotação do produto reciclável.

| Produto | Preço por quilograma (R\$) | Preço por unidade (R\$) |
|-----------------|----------------------------|-------------------------|
| Aço | | |
| Alumínio | | |
| Garrafas Pet | | |
| Garrafas vidros | | |
| Plástico | | |

Fonte: O autor(2022)

Após o preenchimento das tabelas, cada grupo apresentará seus dados através de gráficos usando o *software* Geogebra. Com os dados da turma o(a) professor(a) deverá montar um único gráfico que ficará exposto no mural da escola.

4.3.7 Avaliação

Serão adotados os seguintes critérios de avaliação: Demonstrar interesse no assunto estudado, participação oral, criatividade na resolução das atividades, participação e cooperação nas atividades desenvolvidas. Auto avaliação.

4.4 Aula 4: Noção intuitiva de Função Matemática.

4.4.1 Duração

Duas aulas de 50 minutos cada.

4.4.2 Conteúdo

1. Resolução de problemas do cotidiano envolvendo funções matemáticas.

4.4.3 Objetivos

1. Identificar funções matemáticas.
2. Associar o conhecimento da Matemática com o projeto de Coleta Seletiva do Lixo, através da compreensão do uso de funções como modelo matemático de situações do mundo real.

4.4.4 Competências e habilidades da BNCC

Dentro da Área de Matemática, essa atividade permite o desenvolvimento das Competências Específicas 3, 4 e 5, e das Habilidades EM13MAT302, EM13MAT401, EM13MAT404 e EM13MAT501.

4.4.5 Materiais

Computador, Excel, *software* GeoGebra e calculadora.

4.4.6 Desenvolvimento

O(A) professor(a) deverá trabalhar as ideias sobre função matemática através de problemas da realidade dos educandos. Recomenda-se que isto seja feito trabalhando os conceitos matemáticos intuitivamente, antes da simbologia ou da introdução da linguagem matemática formal. Segue, como sugestão, uma atividade.

Atividade 4: Para transportar os materiais coletados, a transportadora *A* cobra *R\$* 100,00 pelo aluguel do caminhão mais *R\$* 7,50 por quilômetro rodado, como mostra a Tabela 4.3.

Tabela 4.3: Relação de dependência entre grandezas

| Quilometro (km) rodado | Expressão matemática | Valor (R\$) |
|------------------------|--------------------------|-------------|
| 1 | $100,00 + 7,50 \cdot 1$ | 107,50 |
| 2 | $100,00 + 7,50 \cdot 2$ | 115,00 |
| 3 | $100,00 + 7,50 \cdot 3$ | 122,50 |
| 60 | $100,00 + 7,50 \cdot 60$ | 550,00 |

Fonte: O autor (2022).

- Pode-se estabelecer uma relação de dependência entre duas grandezas? Em caso positivo, indique quais seriam as variáveis (dependente e independente).
- Calcule o valor a ser pago para uma viagem de 6 km. E para x km?
- Os estudantes gastaram *R\$* 175,00 para transportar uma certa quantidade de material reciclável. Calcule o número inteiro de quilômetros dessa viagem.

Logo após as respostas da Atividade 4, o(a) professor(a) deverá solicitar aos estudantes a elaboração de problemas sobre uma situação cotidiana que envolvam uma função matemática.

4.4.7 Avaliação

A avaliação poderá ocorrer durante as atividades desenvolvidas na aula, observando a participação e cooperação dos alunos nas discussões e na atividade de consolidação dos conhecimentos. Auto avaliação.

4.5 Aula 5: Estudo da Função Polinomial do 1º Grau.

4.5.1 Duração

Duas aulas de 50 minutos cada

4.5.2 Conteúdos

1. Função Polinomial do 1º grau.
2. Resolução de problemas do cotidiano envolvendo Função Polinomial do 1º grau.
3. Função linear e proporcionalidade.
4. Gráfico de uma função polinomial do 1º grau.
5. Função crescente e decrescente.

4.5.3 Objetivos

1. Identificar uma função polinomial do 1º grau como modelo matemático de situações do mundo real.
2. Analisar gráfico de uma função polinomial do 1º grau.
3. Resolver situações problemas que envolva função polinomial do 1º grau.
4. Reconhecer, através do coeficiente angular, funções crescentes e decrescentes.

4.5.4 Competências e habilidades na BNCC:

Dentro da Área de Matemática, essas atividades permitem o desenvolvimento das Competências Específicas 1, 3, 4 e 5, e das Habilidades EM13MAT101, EM13MAT302, EM13MAT401, EM13MAT404, EM13MAT501 e EM13MAT510.

4.5.5 Material

Computador, Excel, programa Winplot, *software* Geogebra e calculadora.

4.5.6 Desenvolvimento

O(A) professor(a) definirá formalmente o conceito de Função Polinomial do 1º grau. Em seguida, deverá apresentar aos estudantes exemplos de funções lineares. Como sugestão propomos a seguinte atividade.

Atividade 5: Os estudantes coletaram uma boa quantidade de ferro durante a semana. Sabendo que uma empresa especializada paga R\$ 2,55 por cada quilograma. Complete a Tabela 4.4 com o valor, V , obtido pela venda do produto coletado.

Tabela 4.4: Receita da venda do material de ferro

| | | | | | | | |
|--------------------------|---|----|----|----|----|----|-----|
| Quantidade coletada (kg) | 1 | 14 | 13 | 20 | 60 | 35 | x |
| Valor (R\$) | | | | | | | |

Fonte: O autor (2022).

Logo após a resolução e discussão sobre a Atividade 5, os estudantes, em dupla, deverão criar funções lineares contextualizadas com o projeto.

No segundo momento, deverá apresentar exemplos onde os estudantes possam construir a ideia intuitivamente sobre Função Polinomial do 1º grau.

Atividade 6: Veja as informações das Tabelas 4.5 e 4.6

Tabela 4.5: Papel reciclado

| |
|---|
| Para produção de 1 tonelada de papel reciclado, são consumidos: |
| • 1,2 tonelada de papel usado; |
| • 2000 litros de água; |
| • 1000 a 2500 kWh de energia. |

Fonte: Adaptado do livro de Manuel Paiva-2010.

Tabela 4.6: Papel não reciclado

| |
|---|
| 44 m ³ de madeira por hectare é a produtividade média por ano |
| 100.000 litros de água e 5000 kWh de energia são consumidos na produção de 1 tonelada de papel. |

Fonte: Adaptado do livro de Manuel Paiva-2010.

Faça o que se pede:

1. Para área de 1 hectare, quantos metros cúbicos de madeira, em média, são produzidos em 1 ano? E em 5 anos? Escreva a função que representa a quantidade média y de madeira produzida, em metros cúbicos, em relação ao tempo x , medido em anos.
2. Construa o gráfico da função obtida no item anterior.
3. Construa em um mesmo plano cartesiano os gráficos das relações f e g tais que:
 - a) f expresse a quantidade de água consumida, em milhares de litros, em função da quantidade x de toneladas de papel reciclado.
 - b) g expresse a quantidade de água consumida, em milhares de litros, em função da quantidade x de toneladas de papel não reciclado.

Discutir sobre outros exemplos gráficos de funções polinomiais do 1º grau. Com essas atividades os estudantes perceberão que o gráfico de uma função polinomial do 1º grau é uma reta. Chamar a atenção para o gráfico de uma função polinomial do 1º grau ser determinado por dois pontos distintos.

As Atividades 7 e 8 visam trabalhar os conceitos de função crescente e decrescente.

Atividade 7: Os estudantes do Colégio Estadual Luiz Viana Filho verificaram que, quando se produziam 600 kg de material reciclável por mês, o custo total com transporte e armazenamento era de R\$ 1.400,00 e, quando se produziam 900,00 kg, o custo era de R\$ 1.580,00.

- a) Construa o gráfico que representa a relação entre o custo mensal, C , e o número de produção, x , em quilogramas, do material reciclável coletado.
- b) Obtenha C em função de x .

Atividade 8: Em razão do desgaste, o valor, V , de uma mercadoria decresce com o tempo t . A desvalorização que o preço dessa mercadoria sofre em razão do tempo de uso é chamada depreciação. A função de depreciação pode ser uma função polinomial de 1º grau. Nessa situação, sabe-se que o valor de um celular é hoje de R\$ 800,00, e estima-se que daqui a 5 anos será de R\$ 150,00.

- a Qual será o valor desse celular em 2 anos? E em 4 anos? E em 8 anos?
- b Qual será valor desse aparelho em t anos?
- c Construa o gráfico da função apresentada no item anterior.

Nesse momento, recomendamos gerar uma discussão a partir dos seguintes questionamentos

1. Diga quais funções obtidas nas atividades anteriores são crescentes e quais decrescentes?
2. Como reconhecer se uma função linear é crescente ou decrescente a partir do esboço do seu gráfico?

Solicitar aos estudantes que pesquisem e tragam diversos gráficos de retas com inclinações diferentes para estudo dos coeficientes da função polinomial do 1º grau.

O(a) professor(a), nesse momento, deverá dividir a sala em pequenos grupos e, inspirando-se nas atividades anteriores, propor a elaboração de problemas sobre Função Polinomial do 1º grau contextualizada com o projeto da Coleta Seletiva do Lixo.

Atividade 9: Para transportar o material coletado até a empresa especializada, a Transportadora B cobra um valor fixo de R\$ 150,00 e mais R\$ 3,00 por quilo de material transportado. Sendo x , o número de quilos transportados, responda:

- a Qual é a expressão que determina o transporte dos produtos em função de x ?
- b Qual é a proposta mais vantajosa, a da Transportadora B ou a da Transportadora A , citada na Atividade 4?

Atividade 10: (ENEM - 2012- Adaptada) O 3º Ano do Ensino Médio do Colégio Estadual Senador Luiz Viana Filho (CESLVF) criou um fundo para arrecadação anual prevista da ordem de R\$ 6.360,00 provenientes da venda de materiais recicláveis coletados, tal fundo se destina à compra de cestas básicas. Com isso, de cada vendagem seria destinado ao fundo R\$ 0,28 por tonelada de alumínio e R\$ 0,22 por tonelada de ferro comercializados. Para este ano, espera-se que as quantidades de toneladas produzidas, de alumínio e de ferro,

juntas, seja 150. Foi pedido aos estudantes André, Bruno, Carlos, Carol e Sofia, que apresentassem um sistema que modelasse os dados apresentados. Cada estudante apresentou um sistema diferente, considerando x e y como as quantidades de toneladas comercializadas, respectivamente, de alumínio e de ferro. O resultado foi o seguinte:

$$\begin{array}{ll} \text{Carol} & \begin{cases} x + y = 1,50 \\ 0,28x + 0,22y = 6360 \end{cases} & \text{Sofia} & \begin{cases} x + y = 150\,000 \\ 0,28x + 0,22y = 63,60 \end{cases} \\ \text{André} & \begin{cases} x + y = 150 \\ 0,28x + 0,22y = 6360 \end{cases} & \text{Bruno} & \begin{cases} 10x + 10y = 1,50 \\ 0,28x + 0,22y = 6360 \end{cases} \\ \text{Carlos} & \begin{cases} x + y = 150\,000 \\ 0,28x + 0,22y = 63,60 \end{cases} & & \end{array}$$

Qual estudante fez a modelagem correta?

4.5.7 Avaliação

A avaliação poderá ocorrer durante as atividades desenvolvidas na aula, observando a participação e cooperação dos alunos nas discussões e na atividade de consolidação dos conhecimentos. Resolução de problemas para avaliar a aprendizagem dos estudantes sobre os conteúdos estudados. Auto avaliação.

4.6 Aula 6: Estudo da Função Polinomial de 2º Grau.

4.6.1 Duração

Duas aulas de 50 minutos cada

4.6.2 Conteúdos

1. Definição da Função Polinomial de 2º grau.
2. Situações em que aparecem Funções Polinomiais de 2º grau.
3. Zeros de uma Função Polinomial de 2º grau.
4. Gráfico de uma Função Polinomial de 2º grau.
5. Vértice da parábola, valor máximo ou mínimo de uma Função Polinomial de 2º grau.
6. Resolução de problemas envolvendo Funções Polinomiais de 2º grau.

4.6.3 Objetivos

1. Estabelecer relações entre uma situação problema do cotidiano e competências e habilidades para resolução de atividades envolvendo Função Polinomial de 2^o grau.
2. Analisar o gráfico de uma Função Polinomial de 2^o grau.

4.6.4 Competências e habilidades na BNCC

Dentro da Área de Matemática, essas atividades permitem o desenvolvimento das Competências Específicas 1, 3, 4 e 5, e das habilidades EM13MAT101, EM13MAT302, EM13MAT402, EM13MAT404, EM13MAT502 e EM13MAT503.

4.6.5 Material

Máquina fotográfica, computador, Data show, programa Winplot, *software* GeoGebra, régua e papel milimetrado.

4.6.6 Desenvolvimento

O(A) professor(a) deverá utilizar diferentes registros de representação e estratégias, conceitos, definições ou procedimentos matemáticos para interpretar, modelar ou resolver problemas em diversos contextos envolvendo Função Polinomial do 2^o grau.

Atividade 11: A associação de Catadores de Lixo possui 150 metros de um rolo de tela para cercar o terreno onde vai ser o galpão de triagem para coleta seletiva aproveitando, como um dos lados, parte da parede de outro galpão, conforme indica a Figura 4.2.

Figura 4.2: Galpão de triagem



Fonte: O autor (2022).

- a) Qual a lei que determina a área do terreno em função do lado x do terreno.
- b) Para cercar com a tela a maior área possível, quais devem ser os valores de x e y ?

Nessa atividade o aluno deverá identificar as informações relevantes a resolução do problema no enunciado e aplicar conhecimentos prévios na obtenção da lei de formação da função polinomial do 2º grau, a fim de obter seus coeficientes.

Atividade 12: (ENEM - Adaptada) Os estudantes decidiram fazer uma propaganda para divulgar o projeto de coleta e reciclagem do lixo no município de Almadina-BA com uma população de 5336 habitantes (IBGE-2020). Dependendo do modelo da propaganda, a notícia se alastra com uma certa rapidez. Em geral, essa rapidez é diretamente proporcional ao número de pessoas desse público que conhecem o projeto e diretamente proporcional também ao número de pessoas que não o conhecem. Em outras palavras, sendo R a rapidez de propagação p o público alvo e x o número de pessoas que conhecem o projeto, tem-se:

$$R(X) = Kx(p - x),$$

onde K uma constante positiva característica da notícia. Considerando o modelo acima descrito, então a máxima rapidez de propagação ocorrerá quando a notícia sobre o projeto for conhecida por um número de quantas pessoas?

Atividade 13: Para transportar x toneladas dos produtos coletados ao galpão de triagem o custo é dado por $C(x) = x^2 - 30x + 400$. Nessas condições, calculem:

- a) A quantidade de toneladas coletadas para que o custo seja mínimo;
- b) O valor mínimo do custo.

As Atividades 12 e 13, favorecem o desenvolvimento de investigação de ponto máximo ou mínimo de funções polinomiais do 2º em contextos diversos.

Nas atividades seguintes, aplicar questões adaptadas do Enem para avaliar o quanto os estudantes aprenderam os conteúdos matemáticos expostos durante as aulas. Nesse momento, é importante sugerir aos estudantes fazer as adaptações contextualizando com o projeto Coleta Seletiva do Lixo, com o que estarão sendo estimuladas a criatividade e a cooperação entre eles.

Atividade 14: (ENEM-2013 - Adaptada) Os estudantes resolveram promover uma festa para angariar fundos para a construção do galpão, colocando o valor da entrada a R\$ 10,00, sempre contavam com 1000 pessoas a cada apresentação, faturando R\$ 10 000,00 com a venda dos ingressos. Entretanto, perceberam também que, a cada R\$ 2,00 de aumento no valor da entrada, recebiam 40 pessoas a menos. Nessas condições, sendo P o número de pessoas presentes em um determinado dia e F o faturamento com a venda dos ingressos, apresente a expressão que relaciona o faturamento em função do número de pessoas.

Atividade 15: (ENEM-2013) Um catador de latinhas de alumínio vende seus produtos em pacotes com quantidades de unidades variáveis. O lucro obtido é dado pela expressão $L(x) = -x^2 + 12x - 20$, onde x representa a quantidade de latinhas de alumínio contidas no pacote. O catador pretende fazer um único tipo de empacotamento, obtendo um lucro máximo. Para obter o lucro máximo nas vendas, os pacotes devem conter uma quantidade de latinhas igual a:

- a) 4 b) 6 c) 9 d) 10 e) 14

Atividade 16: (ENEM-2015 - Adaptada) O dono de uma carreta adaptada para o transporte de produtos recicláveis, cuja capacidade máxima é de 15 toneladas, cobra para transportar os produtos até o galpão de triagem, R\$ 600,00 por tonelada. Se não atingir a capacidade máxima da carreta, cobrará mais R\$ 20,00 por toneladas não transportadas. Sendo x o número de toneladas não transportadas, determine a expressão que representa o valor cobrado $V(x)$, em reais, pelo dono da carreta (Figura 4.3), para uma viagem até o galpão.

- a) $V(x) = 9020x$ b) $V(x) = 9300x$ c) $V(x) = 9000 + 300x$
d) $V(x) = 600x + 20x^2$ e) $V(x) = 9000 - 300x - 20x^2$

Figura 4.3: Transportadora A



Fonte: O autor (2022).

Atividade 17: (ENEM-2010 - Adaptada) A reciclagem de resíduos e sucatas de ferro e aço está fundamentada basicamente na rota Pirometalúrgica. As principais etapas nesta reciclagem são:

- Primeiramente os resíduos/sucatas de ferro e aço devem ser separadas do lixo, por processo manual, ou através de separadores eletromagnéticos. Em alguns casos as sucatas passam por processo de limpeza para a retirada de contaminantes.
- Em seguida, são prensadas em fardos para facilitar o transporte até as usinas. Quando a sucata possui tamanho elevado ela deve ser cortada ou cominuída antes da prensagem. Ao chegar na usina a sucata vai para equipamentos chamados de fornos elétricos a arco (FEA), onde é aquecida e fundida a aproximadamente 1550°C.

- Após atingir o ponto de fusão e chegar ao estado líquido, o material é lingotado e moldado na forma de tarugos e placas metálicas, que serão posteriormente cortados/conformados na forma de chapas, perfis ou barras de aço.
- A sucata demora somente um dia para ser reprocessada e transformada novamente em lâminas de aço usadas por vários setores industriais - das montadoras de automóveis às fábricas de latinhas em conserva.
- O material pode ser reciclado infinitas vezes, sem causar grandes perdas ou prejudicar a qualidade.

Fonte: UFRGS (2005). Disponível em: www.ufrgs.br/napead/projetos/reciclagem-materiais-metalicos/pag7. Acesso: 20/05/2022

Nos processos industriais, como na indústria de reciclagem de ferro, é necessário o uso de fornos capazes de produzir elevadas temperaturas e, em muitas situações, o tempo de elevação dessa temperatura deve ser controlado, para garantir a qualidade do produto final e a economia no processo.

Em uma indústria de reciclagem de ferro, o forno é programado para elevar a temperatura ao longo do tempo de acordo com a função

$$T(t) = \begin{cases} \frac{7}{5}t + 20, & \text{para } 0 \leq t < 100 \\ \frac{2}{125}t^2 - \frac{16}{5}t + 320, & \text{para } t \geq 100 \end{cases}$$

em que T é o valor da temperatura atingida pelo forno, em graus Celsius, e t é o tempo, em minutos, decorrido desde o instante em que o forno é ligado. Uma peça deve ser colocada nesse forno quando a temperatura for 48°C e retirada quando a temperatura for 200° . O tempo de permanência dessa peça no forno é, em minutos, igual a:

- a) 100 b) 108 c) 128 d) 130 e) 150

Atividade 18: (ENEM 2010 - Adaptada) Uma fábrica de reciclagem produz barras de ferro no formato de paralelepípedos e de cubos, com o mesmo volume. As arestas da barra de ferro no formato de paralelepípedo medem 3 cm de largura, 18 cm de comprimento e 4 cm de espessura. Analisando as características das figuras geométricas descritas, qual é a medida das arestas da barra de ferro que tem o formato de cubo?

4.6.7 Avaliação

A avaliação poderá ocorrer durante as atividades desenvolvidas na aula, observando a participação e cooperação dos alunos nas discussões e na atividade de consolidação dos conhecimentos. Resolução de problemas para avaliar a aprendizagem dos estudantes sobre os conteúdos estudados. Auto avaliação.

4.7 Aula 7: Sistema linear

4.7.1 Duração

Duas aulas de 50 minutos cada.

4.7.2 Conteúdos

1. Equações lineares;
2. Sistemas lineares.

4.7.3 Objetivos

1. Representar situações-problemas do cotidiano usando sistema lineares.
2. Aplicar o método do escalonamento na resolução de sistemas lineares.

4.7.4 Competências e habilidades da BNCC

Dentro da Área de Matemática, essas atividades permitem o desenvolvimento da Competência Específica 3, e da Habilidade EM13MAT301.

4.7.5 Materiais

Computador, Data show, *software* GeoGebra, régua e papel milimetrado.

4.7.6 Desenvolvimento

1º Momento Equações lineares.

O(A) professor(a) apresentará aos estudantes a Atividade 19. Explique todo processo de construção da equação linear.

Atividade 19: Especialistas dizem que são quatro os principais metais que podem ser reciclados: alumínio, ferro, aço e cobre. Os estudantes do CESLUVF durante uma semana fizeram a coleta desses materiais nas ruas da cidade de Almadina-BA. Os dados estão apresentados na Tabela 4.7. Após a coleta, venderam o material arrecadando R\$ 739,00. Expresse através de uma equação linear a relação entre os preços por quilograma de cada metal e o valor arrecadado.

Tabela 4.7: Coleta de metal reciclável

| Metais | Quantidade (kg) |
|----------|-----------------|
| Aço | 62 |
| Alumínio | 20 |
| Cobre | 75 |
| Ferro | 45 |

Fonte: O Autor (2022).

2º Momento: O(A) professor(a) deverá organizar a turma em grupos de três ou quatro estudantes.

Os estudantes deverão elaborar problemas com o material coletado do projeto “Coleta Seletiva do Lixo” que envolvam equações lineares usando técnicas algébricas. Depois, poderá escolher uma das equações lineares e pedir que cada grupo determine três soluções. Em seguida, cada grupo socializará sua resposta com os demais. Com essa dinâmica, espera-se que os estudantes percebam as infinitas quádruplas ordenadas que são solução da equação linear.

3º Momento: Sistema de equações lineares.

O(A) professor(a) deverá explicar o processo de construção de um sistema de equações lineares. Logo após, solicitar a execução das seguintes atividades:

Atividade 20: Construa um sistema linear com duas equações e duas incógnitas que tenha solução. Depois, escreva uma situação problema do cotidiano que se adapte ao sistema elaborado.

Atividade 21: Os estudantes do 2º ano do CESLVF percebendo a rentabilidade da coleta dos metais decidiram continuar a coleta por mais três semanas. As quantidades de cada metal e a arrecadação, por semana, estão apresentadas nas Tabelas 4.8, 4.9, 4.10 e 4.11.

- Na 1ª semana arrecadaram R\$739,00

Tabela 4.8: Coleta de metal reciclável da 1ª semana

| Metais | Quantidade (kg) |
|----------|-----------------|
| Aço | 62 |
| Alumínio | 20 |
| Cobre | 75 |
| Ferro | 45 |

Fonte: O Autor (2022).

- Na 2ª semana arrecadaram R\$530,00

Tabela 4.9: Coleta de metal reciclável da 2ª semana

| Metais | Quantidade (kg) |
|----------|-----------------|
| Aço | 30 |
| Alumínio | 10 |
| Cobre | 15 |
| Ferro | 52 |

Fonte: O Autor (2022).

● Na 3ª semana arrecadaram R\$110,00

Tabela 4.10: Coleta de metal reciclável da 3ª semana

| Metais | Quantidade (kg) |
|----------|-----------------|
| Aço | 56 |
| Alumínio | 30 |
| Cobre | 25 |
| Ferro | 85 |

Fonte: O Autor(2022).

● Na 4ª semana arrecadaram R\$243,00

Tabela 4.11: Coleta de metal reciclável da 4ª semana

| Metais | Quantidade (kg) |
|----------|-----------------|
| Aço | 37 |
| Alumínio | 15 |
| Cobre | 18 |
| Ferro | 37 |

Fonte: O Autor (2022).

Com os dados das tabelas, monte o sistema de equações lineares que representa a situação descrita.

O(A) professor(a) deverá desafiar os estudantes a encontrarem uma solução para o sistema, ou seja, determinar o preço de cada metal por kg . Espera-se que os estudantes busquem soluções através de métodos diversos, por exemplo pela técnica de escalonamento de sistema linear.

Atividade 22: Apresentar um problema sobre uma situação cotidiana (Coleta Seletiva do Lixo) que envolva Sistema Linear para mostrar a aplicabilidade da técnica de escalonamento de um sistema.

4.7.7 Avaliação

A avaliação poderá ocorrer durante as atividades desenvolvidas na aula, observando a participação e cooperação dos alunos nas discussões e na atividade de consolidação dos conhecimentos. Resolução de problemas para avaliar o aprendizagem dos estudantes sobre os conteúdos estudados. Auto avaliação.

4.8 Aula 8: Função Polinomial do 3º grau

4.8.1 Duração

Duas aulas de 50 minutos cada.

4.8.2 Conteúdos

1. Função Polinomial do 3º grau.
2. Gráfico da função polinomial do 3º grau.

4.8.3 Objetivos

1. Aplicar o conceito de função polinomial de 3º grau na resolução de problemas a partir de situações propostas usando a Interpolação de Lagrange.
2. Analisar gráficos de uma função polinomial do 3º grau.

4.8.4 Competências e habilidades da BNCC

Dentro da área de Matemática, essas atividades permitem o desenvolvimento da Competência Específica 4 e a Habilidade EM13MAT404.

4.8.5 Materiais

Computador, Data show, *software* GeoGebra, régua e papel milimetrado.

4.8.6 Desenvolvimento

Após a aprendizagem sobre resolução de sistema lineares, os estudantes adquiriram conhecimentos para solucionar as atividades previstas nesta aula. Proponha para os estudantes a seguinte situação/problema.

Atividade 23: Sabendo que nos finais de semana, as pessoas consomem bastante bebidas alcoólicas, os estudantes coletaram o material de latinhas de cervejas nos bares da cidade, conforme dados apresentados na Tabela 4.12. De acordo com essa informação, construa o gráfico, no plano cartesiano, de uma função polinomial de 3º grau passa por esses pontos.

Coleta de latinhas de alumínio no final de semana.

Tabela 4.12: Latinhas de cerveja

| Dias da semana | Sexta(1) | Sábado (2) | Domingo(3) | Segunda (4) |
|----------------|----------|------------|------------|-------------|
| Venda (R\$) | 1,00 | 3,00 | 6,00 | 2,00 |
| Par ordenado | (1;1) | (2;3) | (3;6) | (4;2) |

Fonte:O autor (2022).

O(A) professor(a) deverá desafiar os estudantes a encontrar a solução do Atividade 23. Temos como sugestão, trabalhar a solução através dos métodos.

1. Escalonamento de Sistema.
2. Polinômio interpolador de Lagrange.

Esses conteúdos devem ser apresentados como ferramenta de resolução, não é necessário aprofundar.

Atividade 24: Apresente um problema sobre uma situação cotidiana (Coleta Seletiva do Lixo) que envolva uma função Polinomial de 3º grau e construa o gráfico.

Cada atividade foi elaborada contextualizada com o projeto Coleta Seletiva do lixo de Almadina-BA.

4.8.7 Avaliação

A avaliação poderá ocorrer durante as atividades desenvolvidas na aula, observando a participação e cooperação dos alunos nas discussões e na atividade de consolidação dos conhecimentos. Auto avaliação.

Capítulo 5

Relato de Experiência

Este capítulo traz a motivação da proposta didática e o relato sobre a aplicação das aulas que aproximaram os conteúdos de funções polinomiais à realidade dos estudantes na turma do 2º ano do Ensino Médio de uma escola do interior da Bahia.

5.1 Motivação da Proposta

No início do ano de 2020, a escola fechou as portas devido à pandemia da Covid-19. Naquele ano, os estudantes ficaram sem aulas, sem interação social e sem atividades pedagógicas, e isso era uma nova realidade, que trazia consigo, novos desafios para todos os profissionais da educação, e principalmente para os educadores.

No entanto, no início do ano seguinte, em 2021, a comunidade escolar, como um todo, buscava uma alternativa para que os estudantes não ficassem novamente sem os conteúdos básicos para seu desenvolvimento intelectual. Nas reuniões pedagógicas, foram debatidas várias estratégias, várias concepções pedagógicas, vários recursos para o retorno às aulas. E sendo assim, entre esses recursos, as aulas remotas foram uma das alternativas propostas, porém vários fatores contribuíram para a falta de sucesso da mesma. Seja pela escassez dos recursos tecnológicos para o acesso dos estudantes (muitos não tinham computadores, notebooks, ou até mesmo celulares), falta de qualificação dos professores, falta de uma proposta pedagógica, ou até mesmo falta de uma estrutura familiar para auxiliar nas atividades de casa (muitos pais são analfabetos), tudo isso contribuía para que a aprendizagem não fosse completa e satisfatória.

Posteriormente, com a proposta do ensino híbrido, com turmas mais reduzidas e respeitando as orientações da Secretaria de Saúde do município, surge então o pensamento de oferecer um ensino de matemática que proporcionasse aos estudantes aulas mais dinâmicas, motivadoras, em que o aluno passasse a ser um agente ativo no processo de construção do saber, que ele fosse protagonista do seu processo de ensino e aprendizagem.

O planejamento foi estruturado e baseado na percepção inicial do retorno às aulas, onde os estudantes estavam desmotivados, ansiosos e, principalmente, com lacunas na aprendizagem devido ao período sem aulas. Por isso, buscou-se nas tendências da Educação Matemática um suporte pedagógico que sustentasse a implantação de metodologias que aproximem os conteúdos de funções polinomiais com à realidade dos estudantes, ou seja, buscar uma situação problema com os estudantes para engajá-los nas aulas de Matemática.

Dentre as concepções estudadas, a Modelagem Matemática foi a selecionada para tal, pois despertou o interesse para trabalhar os conteúdos de funções polinomiais e aproximá-los à realidade do educando, pois as aulas não mais seriam trabalhadas dentro do ambiente do ensino tradicional. Como método de pesquisa, ela analisa situações ou fenômenos existentes na vida real.

Com base nas indicações da BNCC, as atividades propostas tem como intuito: “Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários” (BRASIL, 2018, p.12). Assim, deve-se “resolver e elaborar problemas cujos modelos são as funções polinomiais de 1^o, 2^o e 3^o graus, em contextos diversos, incluindo ou não tecnologias digitais” (BRASIL, 2018).

5.2 Relato sobre aplicação das Aulas

5.2.1 1^a Etapa: Percepção e Apreensão

Na **Aula 1**, o professor iniciou o projeto explicando o que era interdisciplinaridade e o papel que um cidadão crítico exerce na sociedade. Percebeu que os estudantes estranharam e fizeram alguns questionamentos sobre a nova metodologia, pois tratava-se de uma aula de Matemática. Mas, o professor tratou logo de acalmá-los, dizendo que no desenvolvimento das aulas eles iriam se familiarizando com a nova abordagem dos conteúdos.

Quanto ao desenvolvimento da Aula 1, o professor formou uma roda de conversa para discutir com os estudantes sobre temas sociais, políticos, econômicos, entre outros. Dentre todos os temas debatidos, o tema geração de renda e emprego predominou nas conversas. Então, surge, por parte de um estudante (morador do bairro carente do município, onde fica um lixão) o questionamento: “O que poderia ser feito com aquela montanha de lixo que é jogado todos os dias no lixão perto da minha casa?”

Figura 5.1: Lixão



Fonte: O autor (2022).

A partir do questionamento e diante da sensibilização provocada nos outros colegas surge a ideia do projeto **Coleta Seletiva do lixo de Almadina-BA**. Com a seguinte questão de

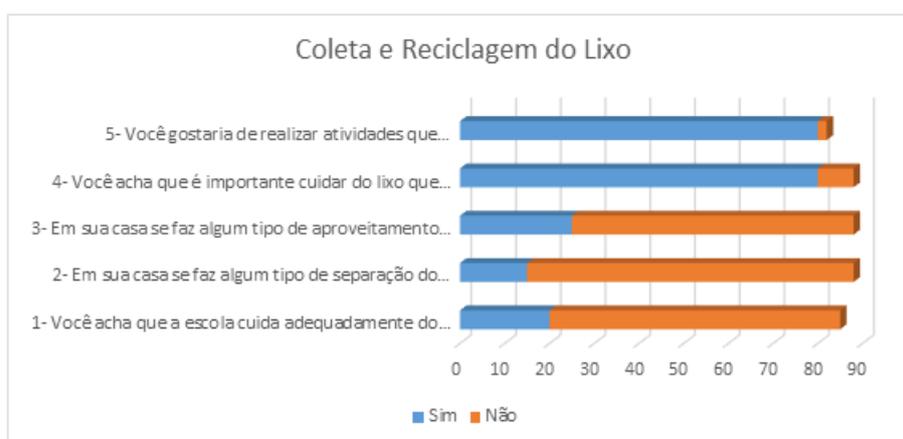
pesquisa: **Quanto o município de Almadina perde por não fazer a coleta seletiva do lixo?**

Após intenso debate sobre o projeto, os estudantes decidiram convidar o professor de Geografia, um representante da Câmara Municipal, o Secretário de Agricultura do município e um representante dos moradores do Bairro do Lixão para participarem da mesa redonda sobre o tema do projeto.

Na Aula 2, ouve a realização da mesa redonda e apresentação do projeto elaborado. Da mesma, saiu a proposta de confeccionar folhetos e fazer a pesquisa para saber o quanto os moradores da cidade tinha consciência da importância da coleta seletiva do lixo. Logo após, os estudantes elaboraram o questionário (como mostra a Figura 5.2) para a pesquisa. Nesse momento ouve a mediação do professor para explicar sobre pesquisa qualitativa, quantitativa e sobre método de amostragem.

Na Aula 3, com os questionários respondidos por 88 moradores da cidade, os estudantes organizaram a tabulação dos dados, de maneira a facilitar a visualização e interpretação. Os resultados indicaram os hábitos e a importância que cada um concebe ou não a questão da coleta seletiva do lixo em sua vida. Conforme Figura 5.2.

Figura 5.2: Pesquisa sobre Coleta seletiva do lixo



Fonte: O autor (2022).

Os estudantes fizeram uma pesquisa na internet sobre os materiais que podem ser reciclados, e elaboraram uma lista para servir de referência para a coleta seletiva do lixo. Com a lista, o professor e estudantes discutiram as consequências que esses materiais podem causar se despejados na natureza. Depois da discussão, os mesmos despertaram o interesse para falar do quanto se ganha com a coleta seletiva do lixo. O professor argumentou que reciclar lixo ultrapassa a questão financeira e o que importa realmente é a preservação da Natureza. Portanto, o que está em jogo é a própria sobrevivência humana.

Nesse momento, os estudantes realizaram a relação do material coletado por tempo de

decomposição¹ de acordo com os dados da Tabela 5.1.

Tabela 5.1: Tempo de decomposição do lixo

| Material | Tempo de decomposição |
|-----------------|-----------------------|
| Papel | De 3 a 6 meses |
| Tecido | De 6 meses a 1 ano |
| Madeira pintada | Mais de 13 anos |
| Náilon | Mais de 20 anos |
| Metal | Mais de 100 anos |
| Alumínio | Mais de 200 anos |
| Plástico | Mais de 400 anos |
| Vidro | Mais de 1000 anos |
| Borracha | Tempo indeterminado |

Fonte: Ecycle (2022)¹

Os estudantes perceberam a importância da coleta seletiva para a preservação do meio ambiente. Alguns dos benefícios são:

- Diminuição do lixo no aterro;
- Diminuição da extração de recursos naturais;
- Melhoria da limpeza e higiene da cidade;
- Economia de energia;
- Redução da poluição;
- Geração de emprego e renda.

No final da aula, os estudantes decidiram sobre como seria o processo de coleta do lixo nas ruas da cidade. E durante quatro semanas, seriam realizadas coletas de dados para ter uma amostragem de **quanto Almadina-BA perde por não fazer a coleta seletiva do lixo**.

Os estudantes (em grupos de quatro) organizaram as seguintes tarefas:

- Escolher dez famílias por grupo para fazer a coleta;
- Pesquisar quanto custa o quilograma de cada material reciclável;
- Transportar o lixo previamente selecionado para o galpão de triagem de lixo;
- Pesquisar quanto custa a locação de um caminhão para transporte dos materiais coletados.

¹Disponível em: <https://www.ecycle.com.br/decomposicao/>. Acesso em: 19/05/2022.

5.2.2 2ª Etapa: Compreensão e Explicação

Na Aula 4, de posse dos dados coletados pelos grupos, os estudantes reuniram as informações e organizaram a tabela de coleta e a tabela dos preços de cada produto. Conforme as tabelas abaixo.

Material de aço (kg)

Tabela 5.2: Quantidade do material de aço.

| Data | 07/09 | 14/09 | 21/09 | 28/09 |
|------------|-------|-------|-------|-------|
| Semana | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Quantidade | 62 | 30 | 56 | 85 |

Fonte: O autor (2022).

Material de alumínio (kg)

Tabela 5.3: Quantidade do material de alumínio.

| Data | 07/09 | 14/09 | 21/09 | 28/09 |
|------------|-------|-------|-------|-------|
| Semana | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Quantidade | 20 | 10 | 30 | 14 |

Fonte: O autor (2022).

Material de cobre (kg)

Tabela 5.4: Quantidade do material de cobre.

| Data | 07/09 | 14/09 | 21/09 | 28/09 |
|------------|-------|-------|-------|-------|
| Semana | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Quantidade | 75 | 15 | 25 | 00 |

Fonte: O autor (2022).

Material de Embalagens PET (unidade)

Tabela 5.5: Quantidade do material de Embalagens PET

| Data | 07/09 | 14/09 | 21/09 | 28/09 |
|------------|-------|-------|-------|-------|
| Semana | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Quantidade | 18 | 278 | 75 | 225 |

Fonte: O autor (2022).

Material de ferro (kg)

Tabela 5.6: Quantidade do material de ferro.

| Data | 07/09 | 14/09 | 21/09 | 28/09 |
|------------|-------|-------|-------|-------|
| Semana | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Quantidade | 83 | 89 | 75 | 62 |

Fonte: O autor (2022).

Material de garrafas de vidro (unidade)

Tabela 5.7: Quantidade do material de garrafas de vidro.

| | | | | |
|------------|-------|-------|-------|-------|
| Data | 07/09 | 14/09 | 21/09 | 28/09 |
| Semana | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Quantidade | 16 | 123 | 383 | 397 |

Fonte: O autor (2022).

Material de latinhas (unidade)

Tabela 5.8: Quantidade do material de latinhas.

| | | | | |
|------------|-------|-------|-------|-------|
| Data | 07/09 | 14/09 | 21/09 | 28/09 |
| Semana | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Quantidade | 407 | 389 | 599 | 298 |

Fonte: O autor (2022).

Material de papelão (kg)

Tabela 5.9: Quantidade do material de papelão

| | | | | |
|------------|-------|-------|-------|-------|
| Data | 07/09 | 14/09 | 21/09 | 28/09 |
| Semana | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Quantidade | 12 | 8 | 16 | 14 |

Fonte: O autor (2022).

Material de plástico (kg)

Tabela 5.10: Quantidade do material de plástico

| | | | | |
|------------|-------|-------|-------|-------|
| Data | 07/09 | 14/09 | 21/09 | 28/09 |
| Semana | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Quantidade | 15 | 21 | 27 | 16 |

Fonte: O autor (2022).

Tabela 5.11: Preços dos produtos recicláveis

| Material | Preço (R\$) |
|--------------------------|-------------|
| Aço(kg) | 3,40 |
| Alumínio (kg) | 25,00 |
| Cobre (kg) | 38,00 |
| Ferro (kg) | 0,55 |
| Garrafa de Vidro (unid.) | 0,45 |
| Embalagens Pet (unid.) | 0,55 |
| Papelão (kg) | 0,55 |
| Latinhas (unid.) | 0,35 |
| Plástico(kg) | 0,60 |

Fonte: O autor (2022).

Após a montagem das tabelas, os estudantes fizeram a correspondência entre quantidade de produtos coletados e o preço de venda de cada um deles. Nesse momento, o objetivo era criar a ideia de dependência e independência de duas grandezas.

Tabela 5.12: Faturamento mensal

| Material | Quantidade (kg) | Quantidade (Unid.) | Preço unitário | Valor (R\$) |
|------------------|-----------------|--------------------|----------------|-------------|
| Aço | 233 | | 3,40 | 792,20 |
| Alumínio | 74 | | 25,00 | 1.850,00 |
| Cobre | 115 | | 38,00 | 4.370,00 |
| Embalagens Pet | | 596 | 0,55 | 327,8 |
| Ferro | 309 | | 0,55 | 169,95 |
| Garrafa de Vidro | | 919 | 0,45 | 413,55 |
| Latinhas | | 1693 | 0,35 | 592,55 |
| Papelão | 50 | | 0,55 | 27,50 |
| Plástico (kg) | 79 | | 0,60 | 47,40 |

Fonte: O autor (2022).

Percebe-se que, ao preencher a Tabela 5.12, os estudantes aos poucos foram construindo estratégias ou procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos ou resolver problemas em diversos contextos. Nesse caso, os estudantes perceberam que o valor (V) a receber está em função da quantidade de cada produto coletado.

5.2.3 3ª Etapa: Significação e Expressão

Com dados da Tabela 5.12 os estudantes apresentaram os seguintes cálculos:

- Quantidade dos materiais coletados pelo seu peso: 860 kg.
- Valor arrecadado pela venda do material coletado pelo seu peso: R\$ 7.257,05 (sete mil, duzentos e cinquenta e sete reais e cinco centavos)

- Quantidade dos materiais coletados em unidades: 3.208
- Valor arrecadado pela venda do material coletado em unidades: R\$ 1.333,90 (mil, trezentos e trinta e três reais e noventa centavos)
- Valor total arrecadado: R\$ 7.257,05 + R\$ 1.333,90 = R\$ 8.590,90 (oito mil, quinhentos e noventa reais e noventa centavos).
- Despesas com transportes R\$ 350,00 (frete para transportar o material).

Os estudantes chegaram à conclusão que para calcular o valor que **Almadina perde por não fazer a coleta desses materiais** era necessário multiplicar as quantidades coletadas pelo preço unitário de cada uma delas, para logo somar os valores obtidos, porém tinha que ser descontado o valor gasto no transporte do material: R\$ 8.590,90 - R\$ 350,00 = R\$ 8.240,90 (oito mil, duzentos e quarenta reais e noventa centavos).

Denotando por q_i e p_i a quantidade e preço unitário, respectivamente, de cada um dos nove materiais arrecadados (i varia de 1 até 9) e por T o frete para o transporte dos materiais, então o valor, V , obtido pela coleta dos materiais é dado pela fórmula:

$$V = q_1 \cdot p_1 + q_2 \cdot p_2 + q_3 \cdot p_3 + q_4 \cdot p_4 + q_5 \cdot p_5 + q_6 \cdot p_6 + q_7 \cdot p_7 + q_8 \cdot p_8 + q_9 \cdot p_9 - T$$

ou, resumidamente,

$$V = \sum_{i=1}^9 q_i \cdot p_i - T$$

Na Aula 5, através de trabalho com tabelas, o professor explicou os conceitos matemáticos intuitivamente, antes do uso da linguagem formal da matemática.

A dinâmica era assim, cada grupo elaborava uma tabela com quantidades fictícias coletadas de algum produto e seu preço unitário, calculando o valor arrecadado. Logo após, respondia as questões elaboradas pelo professor. Veja um exemplo na Tabela 5.13.

Tabela 5.13: Coleta do alumínio por dia da semana

| Dia | Preço (R\$) | Quantidade (kg) | Expressão | Valor total(R\$) |
|---------|-------------|-----------------|-----------|------------------|
| Segunda | 25,00 | 2 | 25·2 | 50,00 |
| Terça | 25,00 | 4 | 25·4 | 100,00 |
| Quarta | 25,00 | 15 | 25·15 | 375,00 |
| Quinta | 25,00 | 11 | 25·11 | 275,00 |
| Sexta | 25,00 | 3 | 25·3 | 75,00 |
| Sábado | 25,00 | 5 | 25·5 | 125,00 |
| Domingo | 25,00 | | | |

Fonte: O autor (2022).

Observa-se que o valor, V , a receber é dado em função da quantidade x de Alumínio (em quilogramas) coletada por dia da semana.

Com os dados da tabela, os estudantes responderam as seguintes questões:

1. A cada quantidade (em quilogramas) de alumínio corresponde um único valor em reais?
2. O que é dado em função de quê?
3. Qual o valor de 8 kg de alumínio? E de 17 kg? E de 38 kg?
4. O valor de R\$ 625,00, corresponde à venda de quantos quilogramas de alumínio?
5. Qual é a fórmula matemática que dá o valor, V , em função da quantidade, x , de alumínio em quilogramas?
6. Para transportar o alumínio até a empresa de reciclagem, uma empresa cobra R\$ 100,00 e mais R\$3,00 por kg do alumínio. Qual é a fórmula matemática que dá o custo, C , em função da quantidade, x (em quilogramas), de alumínio transportado?

Após as respostas das questões, o professor explicou para os alunos:

- $V(x) = 25x \rightarrow$ lei de formação ou fórmula matemática da função linear.
- $C(x) = 3x + 100 \rightarrow$ lei de formação ou fórmula matemática da função polinomial do 1º grau.

O professor aproveitou para formalizar as ideias de domínio e Conjunto Imagem de uma função, e para isso usou a função V acima.

- Supondo que as quantidades coletadas de alumínio pertençam ao conjunto

$$Q = \{1, 2, 3, 5, 7, 15, 20\},$$

esse seria o domínio da função V , o conjunto ao qual pertence a variável independente x .

- A imagem $Im(C)$ é o conjunto determinado por todos os valores da variável dependente, $V(x)$, onde x percorre todos os valores do domínio. Neste caso, $C : Q \rightarrow Im(C)$ onde $C(x) = 25x$, assim

$$Im(C) = \{C(1), C(2), C(3), C(4), C(7), C(15), C(20)\} = \{25, 50, 75, 125, 175, 375, 500\}.$$

Na sequência, o professor sugeriu aos estudantes a seguinte dinâmica: Um grupo elaborava uma questão contextualizada com o projeto e outro grupo respondia. A seguir colocamos um exemplo de exercício proposto e sua resolução.

Para transportar as garrafas Pet até a empresa de reciclagem, os estudantes precisam fretar um caminhão no valor de R\$ 100,00.

a) Sabendo que foram coletadas 400 garrafas Pet, qual a expressão matemática que define o lucro da venda, sabendo que cada garrafa o arrecadado por cada garrafa é R\$ 0,50?

Resposta: Expressão matemática: $400 \cdot 0,50 - 100 = 200 - 100 = 100$. Logo, o lucro da venda foi de R\$ 100.

b) E se forem coletadas x garrafas, qual o lucro da venda?

Resposta: $L(x) = 0,50x - 100$.

c) Quantas garrafas precisam coletar para que não tenha lucro ou prejuízo no transporte do material?

Resposta: $L(x) = 0 \iff 0,50x - 100 = 0 \iff x = 200$. Logo, devem ser vendidas 200 garrafas.

Ao formular e responder questões como a do exemplo anterior, os estudantes trabalharam com uma função polinomial do 1º grau e o cálculo da sua raiz. Além disso, com as funções modeladas os estudantes construíram os gráficos das respectivas funções. Primeiramente os gráficos foram feitos com os recursos de papel, lápis e régua. Logo após, o professor apresentou o software GeoGebra. Cabe mencionar que a partir das tabelas os estudantes trabalhassem com domínios discretos (um número finito de pontos) ficou claro que, uma vez conhecida a regra de correspondência da função, eles não hesitavam em atribuir outros valores (fora da tabela) para a variável independente.

Na Aula 6, professor e estudantes estudaram os conteúdos sobre função Polinomial de 2º grau. As definições e conceitos foram apresentados através de problemas contextualizados com o projeto Coleta Seletiva do Lixo. O professor apresentou várias situações do cotidiano para as quais é possível criar modelos matemáticos representadas por funções polinomiais do 2º grau. Observe uma situação de geometria.

Exemplo 5.1. Na pesquisa de campo os estudantes perceberam que os catadores de lixo não têm uma cooperativa, tampouco um local organizado para a coleta de lixo. Por esse motivo, os estudantes solicitaram a secretaria de obras do município que disponibilizasse um terreno ocioso para servir de armazenamento do material coletado. Observe na Figura 5.3 onde foram colocados os materiais coletados pelos estudantes.

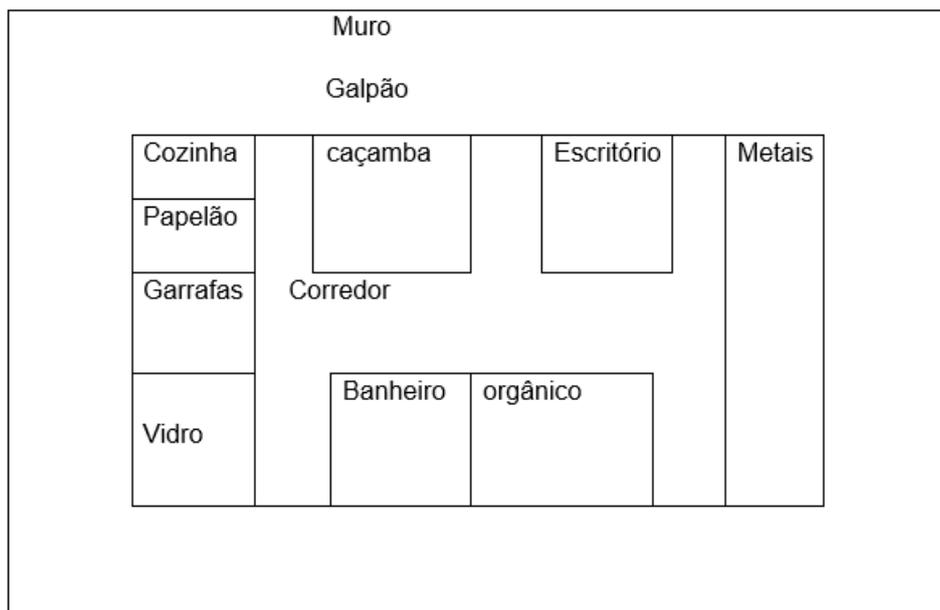
Figura 5.3: Depósito do material



Fonte: O autor (2022).

O local não tem subdivisões para separar os tipos de materiais. Portanto, de posse do terreno (10m de largura por 30m de comprimento) os estudantes desenharam uma planta baixa para separar os materiais coletados por categoria, conforme Figura 5.4.

Figura 5.4: Planta do terreno



Fonte: O autor (2022).

Aproveitando os conhecimentos prévios sobre de Geometria Plana (área e perímetro), os estudantes calcularam:

- A área, A , do terreno retangular

$$A = (\text{comprimento}) \cdot (\text{largura}) = 30\text{m} \cdot 10\text{m} = 300\text{m}^2$$

- O perímetro (soma dos comprimentos de todos os lados de uma figura) do terreno. Portanto, 80m .
- A área do banheiro. Sabendo que o banheiro será retangular com 3m de comprimento por $1,5\text{m}$ largura.

$$A = 3\text{m} \cdot 1,5\text{m} = 4,5\text{m}^2.$$

Com essas informações o professor questionou:

1. Sabendo que o escritório terá o formato de um quadrado cujo lado mede x metros. Qual a expressão que representa a área do escritório mais a do banheiro?
Resposta: $A = x^2 + 4,5$.
2. Sabendo que o setor dos metais é um retângulo e terá o comprimento maior do que a largura em 3m . Qual é a expressão matemática que representa a área do setor destinado aos metais?
Resposta: Sendo x a medida da largura, então, a medida do comprimento é $x + 3$. Logo, $A(x) = (x + 3)x = x^2 + 3x$.

3. Agora, qual a expressão matemática que representa a soma das áreas do setor dos Metais e do banheiro?

Resposta: $A(x) = x^2 + 3x + 4,5$.

4. A área do terreno retangular de 10m de largura por 30m de comprimento. A medida entre cada lado do muro e as paredes do galpão será de x metros, conforme a Figura 5.4 . Determinem a expressão que indica a área do galpão em função de x .

Resposta: A área do galpão é dada por $A(x) = (30 - x)(10 - x) = x^2 - 40x + 300$.

Nesse momento, o professor apresentou a definição de função polinomial do 2º grau apresentada nos livros didáticos. Os estudantes concluíram que as funções encontradas no exemplo anterior eram casos particulares da forma geral $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. Em seguida, o professor conversou sobre o que representam os valores dos coeficientes. Os estudantes pesquisaram vários exemplos de situações-problema que são modelados por uma função polinomial do 2º grau e, a partir deles, criaram outros contextualizados com o projeto Coleta Seletiva do Lixo. Todas as funções polinomiais encontradas foram representadas no sistema cartesiano, com as construções de gráficos através do recurso *software* GeoGebra, os estudantes puderam visualizar a curva que representa a função polinomial do 2º grau, isto é, uma parábola.

O professor percebeu que os estudantes já possuíam maturidade sobre o conteúdo para estudar os efeitos dos parâmetros a , b e c na parábola. A dinâmica era assim, os estudantes manipulavam os valores desses parâmetros no *software* GeoGebra e concordaram com:

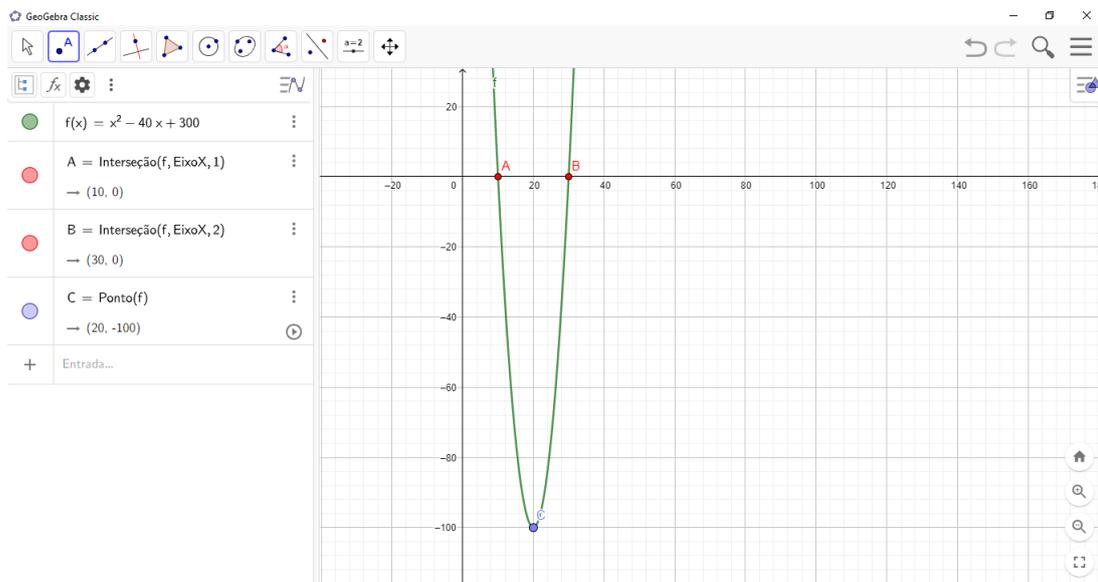
- **Parâmetro a.** Responsável pela concavidade e abertura da parábola. Se $a > 0$, a concavidade é voltada para cima. Se $a < 0$, a concavidade é voltada para baixo. Quanto maior o valor absoluto de a , menor será a abertura da parábola, independentemente da concavidade.
- **Parâmetro b.** Responsável por indicar se a parábola intercepta o eixo das ordenadas no ramo crescente ou decrescente da parábola. Se $b > 0$, a parábola intercepta o eixo das ordenadas no ramo crescente. Se $b < 0$, a parábola intercepta o eixo das ordenadas no ramo decrescente. Se $b = 0$, a parábola intercepta o eixo das ordenadas no vértice.
- **Parâmetro c.** Responsável por indicar a ordenada do ponto de intersecção da parábola com o eixo das ordenadas.

Através dos exemplos propostos pelos estudantes, o professor trabalhou os zeros de uma função polinomial do 2º grau e o valor do discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

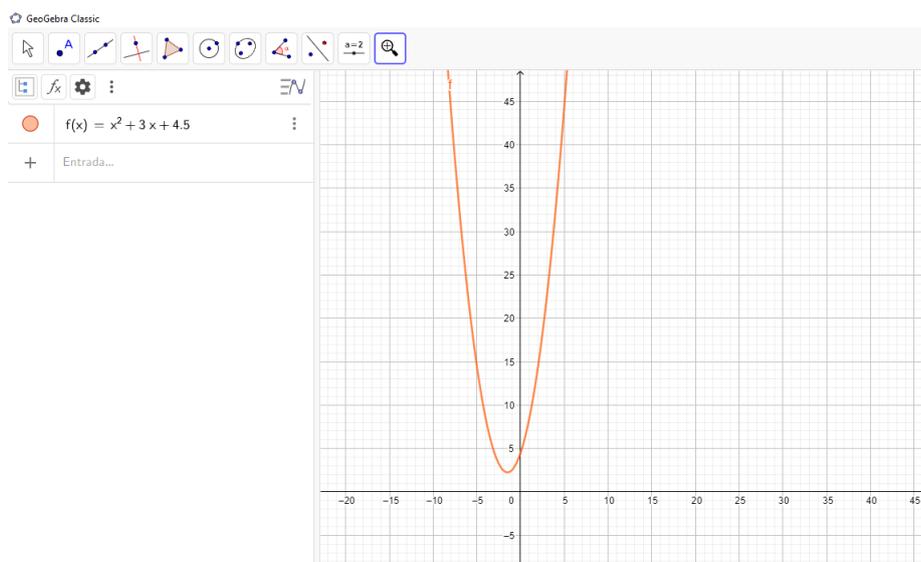
- **Valor de $\Delta > 0$.** Dada a função $f(x) = x^2 - 40x + 300$, construíram o gráfico conforme a Figura 5.5 e observaram que, nesse caso, o gráfico corta o eixo das abscissas nos zeros da função, portanto, a função possui duas raízes reais distintas.
- **Valor de $\Delta < 0$.** Dada a função $f(x) = x^2 + 3x + 4,5$, construíram o gráfico conforme a Figura 5.6. Os estudantes observaram que nesse caso o gráfico não corta o eixo das abscissas, portanto, a função não possui raiz real.

Figura 5.5: Parábola ($\Delta > 0$)



Fonte: O autor (2022).

Figura 5.6: Parábola ($\Delta < 0$)



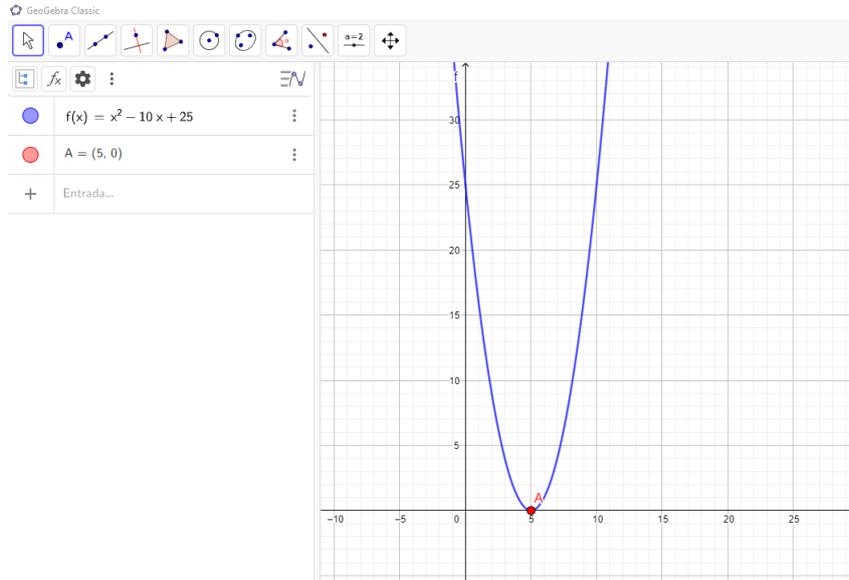
Fonte: O autor (2022).

- **Valor de $\Delta = 0$.** A função $V(x) = x^2 - 10x + 25$ representa o valor cobrado pelo transporte dos produtos coletados, em reais, em função da quantidade x de quilômetros rodados, como mostrado na Figura 5.7.

Aproveitando o nível de empolgação da turma, também foi possível trabalhar sobre os conceitos de vértice de uma parábola e valor máximo ou mínimo de uma função, contextualizados com o projeto Coleta Seletiva do Lixo.

Nas **Aulas 7 e 8**, o desenvolvimento surgiu da inquietação dos estudantes em saber qual

Figura 5.7: Parábola ($\Delta = 0$)



Fonte: O autor (2022).

a curva passa pelos pontos da Tabela 5.14?

Nesse momento o professor se deparou com a imprevisibilidade das aulas quando os estudantes são os protagonistas, pois estava planejado trabalhar com função exponencial e logarítmica, mas, o despertar da curiosidade dos estudantes levou às aulas de sistemas lineares escalonados e interpolação de Lagrange.

Determine o polinômio que representa a venda diária dos produtos coletados na semana pelos estudantes, sabendo que eles coletam por dia x kg de produtos, gerando um faturamento $f(x)$ diário. Na segunda-feira, coletaram 4kg, teve um faturamento de 17 reais. Na terça feira coletaram 2kg, faturaram 27 reais. Na quarta, coletaram 1kg, faturaram 25 reais. Na quinta, coletaram 3kg, faturaram 12 reais. Construa o gráfico da função polinomial que assume os pontos representados na Tabela 5.14.

Tabela 5.14: Faturamento diário

| | | | | |
|-------------------|--------|--------|--------|--------|
| Quantidade (kg) | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Faturamento (R\$) | 25 | 27 | 12 | 17 |
| Par ordenado | (1,25) | (2,27) | (3,12) | (4,17) |

Fonte: O autor (2022).

Para solucionar a questão o professor apresentou os conteúdos de escalonamento de um sistema linear e interpolação de Lagrange. O professor dividiu a turma em quatro grupos. A dinâmica foi assim:

- O 1º grupo explicou a montagem do sistema linear. Como a tabela conta com 4 pontos, consideraram um polinômio de terceiro grau, pois ele terá 4 coeficientes a determinar.

Assim,

$$P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

e substituindo os quatro pontos foi obtido o seguinte sistema

$$\begin{cases} a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 25 \\ 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 = 27 \\ 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + a_0 = 12 \\ 64a_3 + 16a_2 + 4a_1 + a_0 = 17 \end{cases}$$

- O 2º grupo explicou como encontrar o polinômio pelo método de escalonamento. Da primeira equação obtemos $a_0 = 25 - a_3 - a_2 - a_1$ e substituindo nas outras 3 obtemos

$$\begin{cases} 7a_3 + 3a_2 + a_1 = 2 \\ 26a_3 + 8a_2 + 2a_1 = -13 \\ 63a_3 + 15a_2 + 3a_1 = -8 \end{cases}$$

Da primeira equação deste novo sistema obtemos $a_1 = 2 - 7a_3 - 3a_2$, e substituindo nas outras duas equações do mesmo sistema obtemos

$$\begin{cases} 12a_3 + 2a_2 = -17 \\ 21a_3 + 3a_2 = -7 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação deste novo sistema por -3 e a segunda por 2, obtemos

$$\begin{cases} -36a_3 - 6a_2 = 51 \\ 42a_3 + 6a_2 = -14 \end{cases}$$

Agora, somando estas equações obtemos $a_3 = 37/6$. Como $12a_3 + 2a_2 = -17$ segue que $a_2 = -273/6$. Substituindo os valores de a_3 e a_2 em $a_1 = 2 - 7a_3 - 3a_2$ temos $a_1 = 573/6$. Por fim, substituindo os valores de a_3 , a_2 e a_1 em $a_0 = 25 - a_3 - a_2 - a_1$ e fazendo os cálculos necessários, temos $a_0 = -186/6$. Assim, fazendo as substituições dos coeficientes pelos seus respectivos valores temos o polinômio procurado

$$P(x) = \frac{37x^3 - 273x^2 + 573x - 186}{6}.$$

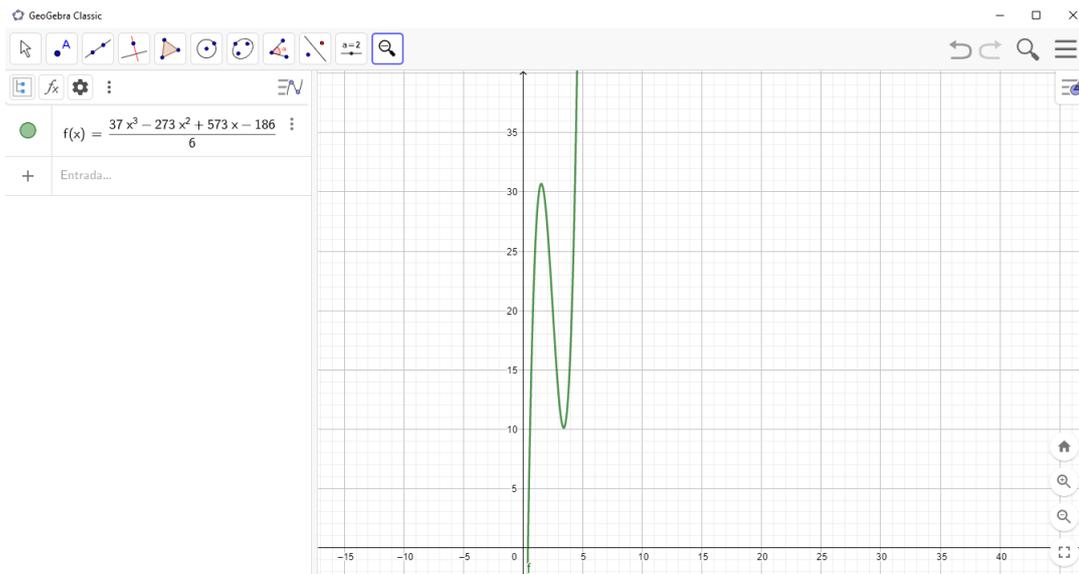
- O 3º grupo utilizou a fórmula de interpolação de Lagrange fornecida pelo professor. Para encontrar o polinômio interpolador dos pontos da Tabela 5.14, foi considerado $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, $f(x_0) = 25$, $f(x_1) = 27$, $f(x_2) = 12$ e $f(x_3) = 17$, assim, os alunos substituíram estes dados na fórmula do Polinômio Interpolador de Lagrange de terceiro grau.

$$\begin{aligned}
P(x) &= \sum_{k=0}^3 f(x_k) \prod_{k \neq i} \frac{x - x_k}{x_i - x_k} \\
&= 25 \cdot \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} + 27 \cdot \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)} \\
&\quad + 12 \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)} + 17 \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)} \\
&= 25 \cdot \frac{x^3 - 9x^2 + 26x - 24}{-6} + 27 \cdot \frac{x^3 - 8x^2 + 19x - 12}{2} \\
&\quad + 12 \cdot \frac{x^3 - 7x^2 + 14x - 8}{-2} + 17 \cdot \frac{x^3 - 7x^2 + 14x - 6}{6} \\
&= -25 \cdot \frac{x^3 - 9x^2 + 26x - 24}{6} + 81 \cdot \frac{x^3 - 8x^2 + 19x - 12}{6} \\
&\quad - 36 \cdot \frac{x^3 - 7x^2 + 14x - 8}{6} + 17 \cdot \frac{x^3 - 7x^2 + 14x - 6}{6} \\
&= \frac{37x^3 - 273x^2 + 573x - 186}{6}.
\end{aligned}$$

Este resultado coincidiu com o polinômio calculado pelo grupo anterior.

- O 4º grupo utilizou o *software* GeoGebra para desenhar o gráfico da função polinomial de 3º grau obtida acima como mostra a Figura 5.8 .

Figura 5.8: Função polinomial do 3º grau



Fonte: O autor (2022).

Nesse momento os estudantes ficaram encantados com o desenho do gráfico do polinômio interpolador passando pelos pontos da Tabela 5.14 .

O professor e estudantes debateram sobre os métodos de resolução de um sistema linear, e concluíram que a técnica de escalonamento facilita a resolução e discussão de um sistema com três ou mais equações. Debateram, também, sobre a importância da fórmula de Interpolação de Lagrange para encontrar uma função polinomial a partir de pontos coordenados conhecidos.

No final das aulas, foram realizadas rodas de conversa para dialogar sobre

1. O projeto despertou consciência social, política, econômica e ambiental?
2. Quais intervenções foram feitas para conscientizar as pessoas sobre a importância da Coleta Seletiva do Lixo?
3. Quais as conclusões chegaram no desenvolvimento das aulas?

O professor e estudantes concluíram que é possível contextualizar conteúdos de função polinomial através da investigação de problemas do cotidiano.

Capítulo 6

Elementos matemáticos da proposta

Neste capítulo apresentaremos as definições de funções polinomiais, focando em alguns resultados de funções lineares, afins e quadráticas. Além disso, discutiremos o conceito de interpolação para introduzir a fórmula do polinômio interpolador de Lagrange. Serão dados exemplos contextualizados com o projeto Coleta Seletiva do Lixo. Utilizamos o software GeoGebra como recurso para a construção de gráficos. A principal referência para este capítulo é Lima et al. (2006).

6.1 Funções polinomiais

Adotaremos a seguinte definição de função

Definição 6.1 (Função). *Dados os conjuntos X e Y , uma função $f : X \rightarrow Y$ é uma regra que diz como associar a cada elemento $x \in X$ um (único) elemento $y = f(x) \in Y$. O conjunto X chama-se domínio, também denotado por $\text{Dom}(f)$, e Y é o contradomínio da função f . Para cada $x \in X$, o elemento $f(x) \in Y$, chama-se imagem de x pela função f , ou valor assumido pela função f no ponto $x \in X$. Escreve-se $x \mapsto f(x)$ para indicar que f transforma (ou leva) x em $f(x)$. O subconjunto de Y formado pelas imagens de todos os elementos do seu domínio é chamado de imagem de f , é denotado por $\text{Im}(f)$.*

Para os propósitos desta dissertação, focaremos em funções reais de variável real, isto é, funções com domínio contido em \mathbb{R} e contradomínio igual a \mathbb{R} . Na notação da definição anterior, funções $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Neste caso, o gráfico da função f , denotado por $\text{graf}(f)$, é o subconjunto do plano formado pelos pares $(x, f(x))$, onde x percorre o domínio da função. Este subconjunto pode ser desenhado no plano, o que permite ter uma ideia do comportamento da função.

A seguir definiremos função polinomial

Definição 6.2 (Função polinomial). *Diz-se que $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função polinomial quando existem números a_0, a_1, \dots, a_n , tais que para todo $x \in \mathbb{R}$ tem-se*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Se $a_n \neq 0$, dizemos que p tem grau n .

Observação 6.1. Para os fins deste trabalho, também chamaremos a função polinomial de polinômio, deixando claro que existe uma diferença sutil entre ambos conceitos, mas que eles podem ser identificados. Ver LIMA (2006, p.162).

A função polinomial de grau menor ou igual a 1 é chamada de função afim, isto é, uma função $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ para a qual existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $p(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Exemplos destacados de funções afins são: as translações, $p(x) = x + b$; as funções lineares, $p(x) = ax$, que modelam problemas de proporcionalidade; e as funções constantes, $p(x) = b$. O desenho do gráfico de uma função afim é uma reta, que passa pela origem, no caso da função linear, e é horizontal, no caso da função constante. A função afim é crescente quando $a > 0$ e decrescente quando $a < 0$.

A função polinomial de grau 2, é chamada de função quadrática, isto é, uma função $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ para a qual existem constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, tais que $p(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Completando quadrados, é conhecida a seguinte forma canônica:

$$p(x) = ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right]. \quad (6.1)$$

Essa expressão nos leva à conclusão que se $a > 0$ (resp. $a < 0$), o menor (resp. maior) valor da função é assumido quando $(x + b/(2a))^2 = 0$, ou seja, quando $x = -b/(2a)$. Assim, o esboço do gráfico de uma função quadrática, que sabemos que é uma parábola, tem seu vértice no ponto $(b/(2a), p(b/(2a)))$. Esta parábola abre para cima se $a > 0$ e abre para baixo se $a < 0$. O valor

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

é chamado de discriminante. Segue da forma canônica (6.1) que a equação $p(x) = 0$ possui duas soluções (reais) diferentes quando $\Delta > 0$, uma raiz quando $\Delta = 0$ e não possui raízes (reais) quando $\Delta < 0$. Estes casos indicam que a parábola intersecta o eixo X em dois pontos distintos, é tangente ao eixo X e não intersecta o eixo X , respectivamente.

6.2 Interpolação polinomial

Suponhamos conhecidos os valores de uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ em $n + 1$ números distintos x_0, x_1, \dots, x_n do seu domínio, como mostra a seguinte tabela

| | | | | |
|--------|----------|----------|---------|----------|
| x | x_0 | x_1 | \dots | x_n |
| $f(x)$ | $f(x_0)$ | $f(x_1)$ | \dots | $f(x_n)$ |

e seja x um número distinto dos números reais x_i , para o qual existem índices k, j , $0 \leq k \neq j \leq n$ tais que $x_k < x < x_j$. Interpolarmos o número x na tabela acima significa calcular o valor de $f(x)$, isto é, incluir o ponto $(x, f(x))$ na tabela.

Em problemas reais, como alguns propostos no projeto Coleta Seletiva do Lixo, precisamos fazer a interpolação de um número x em uma tabela sem conhecer a regra de correspondência

da função f , pois a tabela é obtida a partir de dados experimentais. Neste caso, uma alternativa é fazer uma *interpolação polinomial* de x , isto é, determinamos a função polinomial, $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de grau menor ou igual a n cujo gráfico “passa” pelos pontos da tabela e calculamos o valor de $p(x)$. Este função polinomial é chamada de *polinômio interpolador* de f relativamente aos números reais x_0, x_1, \dots, x_n .

Em termos matemáticos mais precisos, dados $n + 1$ números reais distintos x_0, x_1, \dots, x_n e fixados os valores reais $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$, queremos determinar um polinômio de grau menor ou igual a n , $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, tal que

$$p(x_0) = f(x_0), p(x_1) = f(x_1), \dots, p(x_n) = f(x_n).$$

Garantir a existência deste polinômio equivale a demonstrar que o seguinte sistema de $n + 1$ equações nas $n + 1$ incógnitas a_0, a_1, \dots, a_n possui solução única:

$$\begin{cases} a_n x_0^n + \dots + a_1 x_0 + a_0 = f(x_0) \\ a_n x_1^n + \dots + a_1 x_1 + a_0 = f(x_1) \\ \vdots \\ a_n x_n^n + \dots + a_1 x_n + a_0 = f(x_n), \end{cases}$$

o que é verdade, pois o determinante da matriz de coeficientes do sistema é o determinante de Vandermonde, igual a $\prod_{i < j} (x_i - x_j)$, que não se anula por estarmos assumindo todos os x_i distintos. A unicidade do polinômio interpolador decorre do fato que se dois polinômios p e q , de grau menor ou igual a n , possuem os mesmos valores em $n + 1$ pontos distintos então a diferença $p - q$ é um polinômio de grau menor ou igual a n que tem $n + 1$ raízes distintas, o que só poderá ocorrer se $p - q$ for o polinômio nulo, isto é, $p = q$.

6.3 Fórmula de Interpolação de Lagrange

Na seção anterior garantimos a existência e unicidade do polinômio interpolador, mas para calcular sua expressão devemos resolver um sistema de equações que nem sempre pode ser uma tarefa fácil. Felizmente existe uma forma engenhosa de calculá-lo.

Dados $n + 1$ números reais distintos x_0, x_1, \dots, x_n considere os polinômios de grau n

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)} = \prod_{k \neq i} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}. \quad (6.2)$$

Esses polinômios são conhecidos como *polinômios de Lagrange* e possuem a seguinte propriedade notável

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Logo, o polinômio

$$p(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + \dots + L_n(x)f(x_n) = \sum_{i=0}^n L_i(x)f(x_i) \quad (6.3)$$

tem grau menor ou igual a n e satisfaz $p(x_i) = f(x_i)$ para todo $i = 0, 1, \dots, n + 1$, assim, pelo resultado exposto no final da seção anterior, ele é o polinômio interpolador procurado. O polinômio (6.3) é chamado de *polinômio interpolador na forma de Lagrange*.

Resumindo, podemos enunciar o seguinte

Teorema 6.1. *Se x_0, x_1, \dots, x_n são $n + 1$ números reais distintos e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função cujos valores nestes números são dados, então existe um único polinômio $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de grau menor ou igual a n tal que $p(x_i) = f(x_i)$, para $i = 0, 1, \dots, n$. A expressão desse polinômio é dada em (6.3) considerando (6.2).*

Exemplo 6.1. *Uma empresa de Reciclagem paga R\$ 0,55 por cada kg de ferro. Na primeira semana a turma coletou 83 kg de ferro totalizando R\$ 45,65. Na terceira semana coletou 89 kg de ferro totalizando R\$ 48,95. De acordo com essas informações, esboce o gráfico do polinômio interpolador de grau menor ou igual a 1 para esses pontos da tabela e utilize-o para estimar o dinheiro arrecadado pela venda de 87 kg de ferro.*

Tabela 6.1: Faturamento da venda do ferro.

| | | |
|------|-------|-------|
| x | 83 | 89 |
| f(x) | 45,65 | 48,95 |

Fonte: O autor (2022).

Vamos encontrar o polinômio interpolador dos pontos (83; 45,65) e (89; 48,95). De acordo a fórmula de Interpolação de Lagrange, temos:

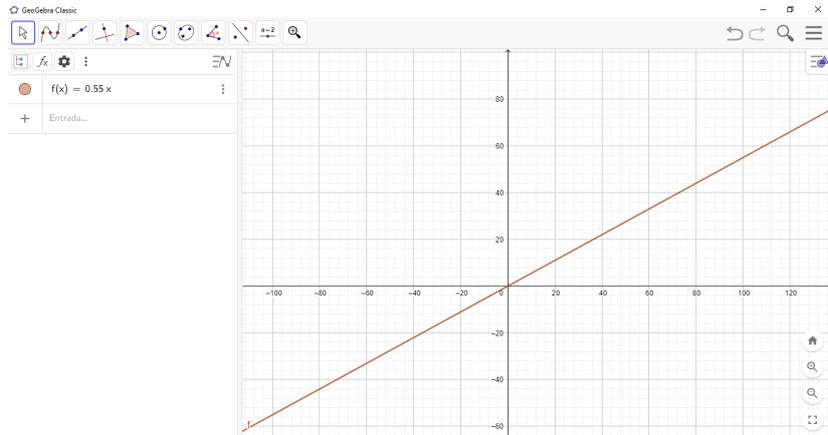
$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{i=0}^1 f(x_i) \prod_{k \neq i} \left(\frac{x - x_k}{x_i - x_k} \right) = 45,65 \frac{x - 89}{83 - 89} + 48,95 \frac{x - 83}{89 - 83} \\ &= \frac{45,65x - 4062,85}{-6} + \frac{48,95x - 4062,85}{+6} = \frac{3,3x}{6} = 0,55x. \end{aligned}$$

Utilizando o polinômio obtemos $p(87) = 0,55 \cdot 87 = 47,85$.

Exemplo 6.2. *Considere a situação descrita no exemplo anterior e acrescente o dado que o custo pelo transporte do material é de R\$ 100,00. Logo, a função polinomial $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de grau menor igual a 1 que pode ser usada para representar o lucro (ou perda) pela venda tem a expressão $f(x) = 0,55x - 100$.*

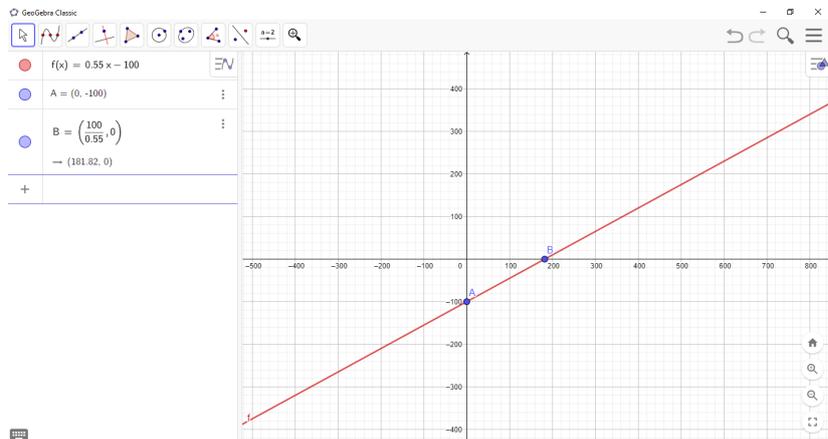
Exemplo 6.3. *A cada semana uma empresa de reciclagem paga por cada garrafa Pet um preço que pode variar. Por exemplo, numa semana a turma coletou 75 unidades de garrafas Pet obtendo R\$ 37,50 da empresa, já na semana seguinte coletou 72 garrafas Pet obtendo,*

Figura 6.1: Função Linear ($b = 0$)



Fonte: O autor (2022).

Figura 6.2: Função Polinomial do 1º grau ($a > 0$)



Fonte: O autor (2022).

dessa vez, R\$ 39,50. De acordo com essas informações, esboce o gráfico do polinômio interpolador de grau menor ou igual a 1 para os pontos da tabela

Tabela 6.2: Faturamento da venda de garrafas Pet.

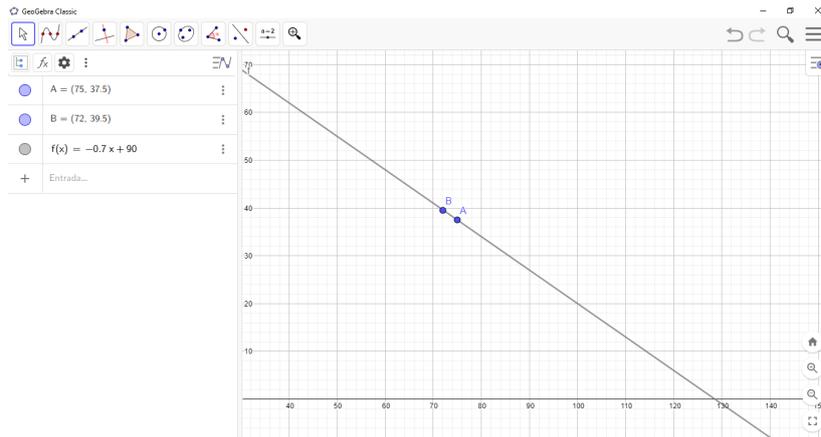
| | | |
|------|-------|-------|
| x | 75 | 72 |
| f(x) | 37,50 | 39,60 |

Fonte: O autor (2022).

Vamos encontrar a função polinomial que representa os pontos $(75; 37,50)$ e $(72; 39,60)$. De acordo a fórmula de Interpolação de Lagrange, temos

$$\begin{aligned}
 p(x) &= \sum_{i=0}^1 f(x_i) \prod_{k \neq i} \left(\frac{x - x_k}{x_i - x_k} \right) = 37,5 \frac{x - 72}{75 - 72} + 39,6 \frac{x - 75}{72 - 75} \\
 &= \frac{37,5x - 2700}{3} + \frac{39,6x - 2970}{-3} = \frac{-2,1x + 270}{3} = -0,7x + 90
 \end{aligned}$$

Figura 6.3: Função Polinomial do 1º grau ($a < 0$)



Fonte: O autor (2022).

Exemplo 6.4. Dependendo da oferta e da procura, uma empresa de reciclagem pode mudar semanalmente o preço de compra de cada quilograma de papelão. Em três semanas consecutivas uma turma coletou 12kg, 8kg e 16kg de papelão, obtendo da empresa R\$ 6,00, R\$ 4,00 e R\$ 7,00, respectivamente. De acordo com essas informações, esboce o gráfico do polinômio interpolador de grau menor ou igual a 2 para os pontos da tabela

Tabela 6.3: Valor pago pela empresa.

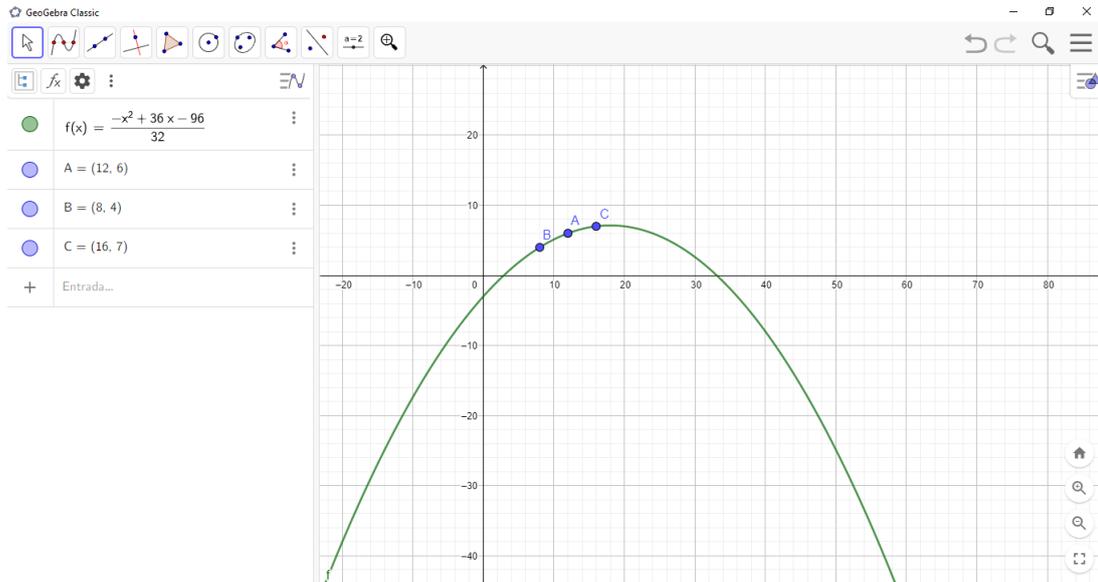
| | | | |
|------|------|------|------|
| n | 0 | 1 | 2 |
| x | 12 | 08 | 16 |
| f(x) | 6,00 | 4,00 | 7,00 |

Fonte: O autor (2022).

Vamos encontrar a função polinomial que interpola os pontos (12,6), (8,4) e (16,7). De acordo a fórmula de Interpolação de Lagrange, temos

$$\begin{aligned}
 p(x) &= \sum_{i=0}^2 f(x_i) \prod_{k \neq i} \left(\frac{x - x_k}{x_i - x_k} \right) \\
 &= 6 \frac{(x - 8)(x - 16)}{(12 - 8)(12 - 16)} + 4 \frac{(x - 12)(x - 16)}{(8 - 12)(8 - 16)} + 7 \frac{(x - 12)(x - 8)}{(16 - 12)(16 - 8)} \\
 &= 6 \frac{x^2 - 24x + 128}{-16} + 4 \frac{x^2 - 28x + 192}{32} + 7 \frac{x^2 - 20x + 96}{32} = \frac{-x^2 + 36x - 96}{32}
 \end{aligned}$$

Figura 6.4: Gráfico da Função Polinomial do 2º grau ($a < 0$)



Fonte: O autor (2022).

Exemplo 6.5.

Denotamos por $V(x)$ o valor arrecadado pela venda de x kg de produtos coletados em um dia pelos estudantes. Supondo que no primeiro dia coletaram 1 kg de produtos obtendo R\$ 8,00 pela sua venda, no segundo dia, ao vender 3kg coletados, conseguiram R\$ 5,00, e no terceiro dia, pela venda de 6 kg, levantaram R\$ 7,00. Esboce o gráfico do polinômio interpolador de grau menor ou igual a 2 para os pontos da tabela

Tabela 6.4: Receita diária

| | | | |
|-----------------|--------|--------|--------|
| Venda (R\$) | 8,00 | 5,00 | 7,00 |
| Quantidade (kg) | 1 | 3 | 6 |
| Par ordenado | (1; 8) | (3; 5) | (6; 7) |

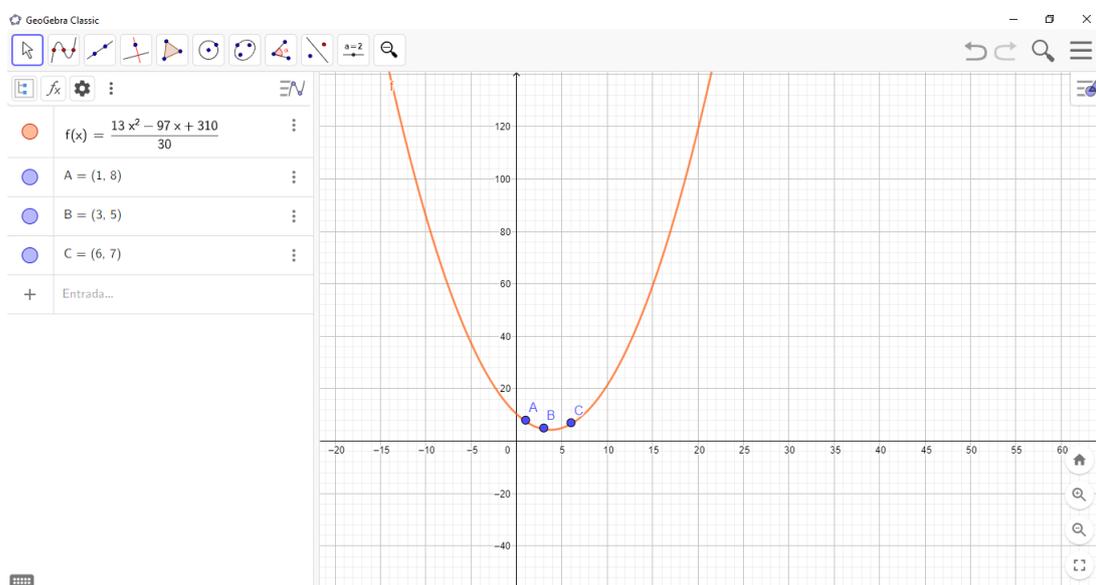
Fonte: O autor (2022).

Vamos encontrar o polinômio interpolador dos pontos (1; 8) , (3; 5) e (6; 7). De acordo

a fórmula de Interpolação de Lagrange, temos:

$$\begin{aligned}
 p(x) &= \sum_{i=0}^2 f(x_i) \prod_{k \neq i} \left(\frac{x - x_k}{x_i - x_k} \right) \\
 &= p(x) = 8 \times \frac{(x - 3)(x - 6)}{(1 - 3)(1 - 6)} + 5 \times \frac{(x - 1)(x - 6)}{(3 - 1)(3 - 6)} + 7 \times \frac{(x - 1)(x - 3)}{(6 - 1)(6 - 3)} \\
 &= 8 \frac{x^2 - 9x + 18}{10} + 5 \frac{x^2 - 7x + 6}{(-6)} + 7 \frac{x^2 - 4x + 3}{15} \\
 &= \frac{13x^2 - 97x + 324}{30}
 \end{aligned}$$

Figura 6.5: Gráfico da Função Polinomial do 2º grau ($a > 0$)



Fonte: O autor (2022).

Exemplo 6.1. O faturamento, $F(x)$, semanal pela venda de x kg de produtos (papelão, garrafas Pet, plástico e garrafas de vidro) coletados, está representado na Tabela 6.5. Construa o gráfico da função polinomial de grau menor ou igual a 3 que interpola os pontos da tabela

Tabela 6.5: Faturamento semanal com a venda dos produtos

| | | | | |
|------------------------|-----|----|----|-----|
| Semana | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Quantidade x (em kg) | 12 | 18 | 15 | 16 |
| Faturamento $F(x)$ | 6,6 | 9 | 6 | 7,2 |

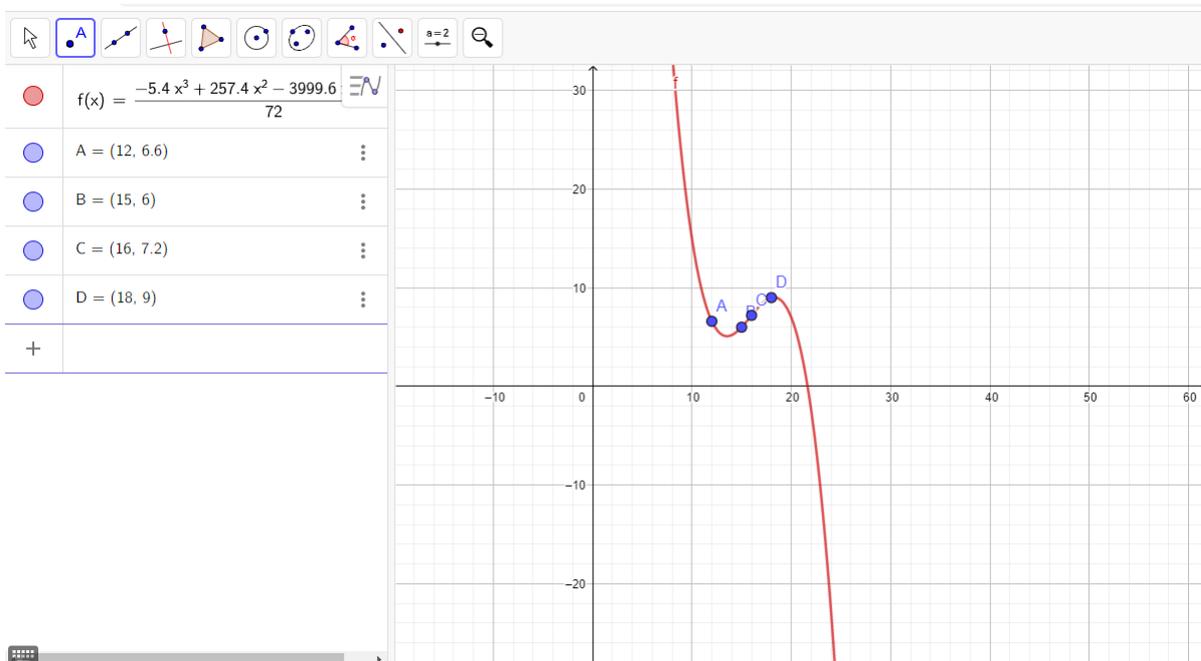
Fonte: O autor (2022).

Vamos encontrar o polinômio interpolador dos pontos (12; 6,6) , (15; 6), (16; 7,2) e (18;

9). De acordo a fórmula de Interpolação de Lagrange, temos

$$\begin{aligned}
 p(x) &= \sum_{i=0}^3 f(x_i) \prod_{k \neq i} \left(\frac{x - x_k}{x_i - x_k} \right) \\
 &= 6,6 \frac{(x - 15)(x - 16)(x - 18)}{(12 - 15)(12 - 16)(12 - 18)} + 6 \frac{(x - 12)(x - 16)(x - 18)}{(15 - 12)(15 - 16)(15 - 18)} \\
 &\quad + 7,2 \frac{(x - 12)(x - 15)(x - 18)}{(16 - 12)(16 - 15)(16 - 18)} + 9 \frac{(x - 12)(x - 15)(x - 16)}{(18 - 12)(18 - 15)(18 - 16)} \\
 &= \frac{-5,4x^3 + 257,4x^2 - 3999,6x + 20736}{72}
 \end{aligned}$$

Figura 6.6: Gráfico da Função Polinomial do 3º grau



Fonte: O autor (2022).

Capítulo 7

Considerações finais

A partir do relato da aplicação da proposta didática percebemos que o ensino de matemática de forma contextualizada promoveu a compreensão do conhecimento por parte dos alunos de uma turma de 2^o ano do Ensino Médio. Ressalta-se que a turma era constituída por estudantes que apresentavam lacunas de aprendizagem decorrentes dos quase dois anos sem aulas presenciais, devido aos protocolos estabelecidos pela Organização Mundial de Saúde (OMS) no contexto da pandemia da Covid-19.

A experiência positiva com a aplicação da proposta nos faz acreditar firmemente no potencial do desenvolvimento de aulas de Matemática a partir de temas de interesse dos alunos como alternativa ou complementação ao chamado Ensino Tradicional. Para a promoção deste tipo de atividades é imprescindível uma inovação na práxis metodológica do professor haja vista a riqueza de formas de raciocínio, habilidades e competências que o estudo de Matemática demanda ou permite desenvolver.

Dessa forma, constatamos a pertinência do uso da Modelagem Matemática para o ensino de um conteúdo de Álgebra, a saber, funções polinomiais. Ressaltamos que a abordagem contextualizada e crítica propiciou um ambiente no qual os alunos puderam refletir e questionar o meio em que se encontravam inseridos e, sobretudo, eles utilizaram a Matemática para solucionar as dificuldades surgidas no seu cotidiano. Além disso, testemunhamos um cenário de investigação dinâmico e interativo entre estudantes e professor.

Considerando que a Modelagem Matemática foi utilizada de maneira a possibilitar que os alunos entendam e elucidem problemas de natureza diversa dentro do seu contexto social, as atividades propostas sobre o tema “Coleta Seletiva do Lixo” evidenciaram o papel social da Matemática e suas interações multidisciplinares com aspectos sociais, históricos, econômicos e éticos. O desenvolvimento das atividades buscou integrar aprendizagens matemáticas com outros conteúdos que favorecessem a formação para exercício da cidadania, sempre levando em consideração os conhecimentos prévios do educando.

Por fim, destaco a importância de trabalhar em momento oportuno a proposta apresentada no Capítulo 4 desta dissertação para um maior número de alunos, haja vista resultados positivos obtidos na turma de 21 alunos do 2^o ano do Ensino Médio. De tal modo, fica registrado como sugestão para um próximo estudo, o desenvolvimento das aulas e aplicações das atividades para aproximar o conteúdo de Álgebra à realidade dos estudantes do Ensino Médio, onde o procedimento metodológico deve fornecer subsídios sobre a importância da contextualização dos conteúdos matemáticos com temas de interesses dos estudantes para a

promoção da aprendizagem e dessa forma, comprovar a necessidade de utilizar a Modelagem Matemática no ensino de funções polinomiais a fim de cooperar para o contato acessível e dinâmico do aluno.

Referências Bibliográficas

- BASSANEZI, R. C. Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: Uma nova estratégia. 3ª reimpressão. *São Paulo: Contexto*, p. 32, 2010.
- BICUDO, M. A. V. *Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas*. [S.l.]: Editora Unesp, 2021.
- BIEMBENGUT, M. S. *Modelagem na Educação Matemática e na Ciência*. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2016, p. 190 – 205.
- BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, M. S. N. *Modelagem Matemática no Ensino*. [S.l.]: Editora Contexto, 2000.
- BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília. Ministério da Educação, 2018.
- BRASIL, P. Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Fundamental Matemática. *Brasília: SEF/MEC*, 1998.
- CEDRAZ, C.; MERLINI, V.; SANTANA, E.; MADRUGA, Z. Álgebra e modelagem matemática: um panorama das pesquisas brasileiras nos últimos anos. *Educação Matemática Debate*, v. 3, n. 8, p. 119–130, 2019.
- CORTELLA, M. S. *A escola e o conhecimento: Fundamentos epistemológicos e políticos*. [S.l.]: Cortez Editora, 2017.
- D'AMBROSIO, U. *Educação Matemática: da teoria à prática*. [S.l.]: Papyrus Editora, 2007.
- D'AMBRÓSIO, B. S. Como ensinar matemática hoje. *Temas e debates*, v. 2, n. 2, p. 15–19, 1989.
- FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. *Zetetiké*, v. 3, n. 1, 1995.
- FONSECA, S.; MAGINA, S. Estratégias de ensino pela ótica dos estudantes: Reflexões sobre a aprendizagem. *Revista e-Curriculum*, v. 15, n. 3, p. 664–692, 2017, p.1.
- FREIRE, P. *Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa*. [S.l.]: Editora Paz e terra, 1998.
- GÓMEZ-GRANELL, C. A aquisição da linguagem matemática: símbolo e significado. *Além da alfabetização: a aprendizagem fonológica, ortográfica, textual e matemática*, v. 4, p. 257–282, 1996.

- GUIMARÃES, I. M. A. C.; D'ANDREA, A. F.; KING, J. R. O. Formação docente para as escolas cidadãs da Paraíba: contribuições do programa gira mundo Finlândia. *REVES-Revista Relações Sociais*, v. 1, n. 2, p. 0182–0193, 2018.
- KLÜSENER, R. Ler e compreender a Matemática ao invés de tropeçar nos símbolos. *NEVES, I.; Souza, J.; SCHÄFFER, N*, p. 175–189, 2003.
- LINS, R. C.; GIMENEZ, J. *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Séc. XXI*. [S.l.]: Papirus Editora, 1997.
- NEGROMONTE¹, M. A. O.; COUTINHO, D. J. G. Causas do fracasso no saber matemático em uma escola do ensino médio no município de João Alfredo/PE.
- PACHECO, M. B.; ANDREIS, G. d. S. L. Causas das dificuldades de aprendizagem em matemática: percepção de professores e estudantes do 3º ano do ensino médio. *Revista Principia, João Pessoa*, v. 38, p. 105–119, 2018.
- PANOSSIAN, M. L. *O movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos como princípio para constituição do objeto de ensino da álgebra*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2014.
- ROCHA, I. C. B. d. Ensino de Matemática: Formação para a Exclusão ou para a Cidadania. *Educação Matemática em Revista*, v. 8, n. 9, p. 22–31, 2001.
- SILVA, N. L. da; COUTO, M. E. S.; JÚNIOR, A. S. C. Educação matemática crítica: a crítica no ensino da matemática. *Revista Binacional Brasil-Argentina: Diálogo entre as ciências*, v. 4, n. 2, p. 23–40, 2015, p.38.
- SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. *Bolema-Boletim de Educação Matemática*, v. 13, n. 14, p. 66–91, 2000.
- SKOVSMOSE, O. *Educação Matemática Crítica: a questão da democracia*. [S.l.]: Papirus editora, 2001.

Apêndice A

Pesquisas de opinião aplicadas antes e depois da aplicação da proposta

Neste apêndice, apresenta-se a pesquisa de opinião realizada com os 21 estudantes do 2º ano de uma escola do interior do estado da Bahia. A turma era caracterizada como conservadora, apática e alheia a tudo que se passava nas aulas de Matemática.

A pesquisa foi elaborada com dois questionários de 11 perguntas objetivas, através do Google Forms, que versavam sobre o ensino de Matemática do conteúdo de funções polinomiais do 1º e 2º grau associado ao contexto social do estudante. Nesse contexto, os estudantes responderam o primeiro questionário em período de pré-aplicação da proposta e o 2º questionário pós-aplicação da proposta para aproximar os conteúdos de funções polinomiais à realidade dos estudantes. O objetivo foi ter elementos de análise sobre a aprendizagem dos estudantes, a partir do momento que os conteúdos sobre funções polinomiais são contextualizados com a realidade dos educandos.

Dos 21 estudantes que responderam à pesquisa, 66% eram do sexo feminino, e 34% eram do sexo masculino. Após a análise dos dados, com as respostas obtidas foram elaborados gráficos para apresentar os resultados.

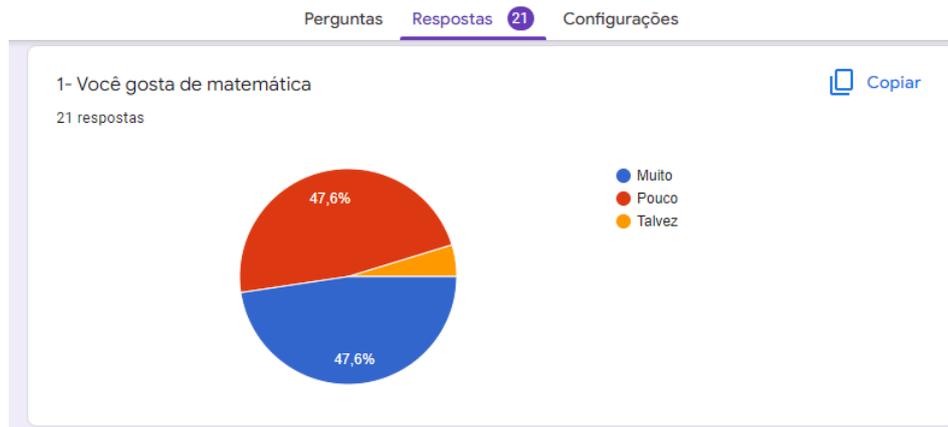
A.1 Pré-aplicação da proposta

A prática nas aulas de Matemática era a do ensino tradicional, ou seja, o professor apresentava os conteúdos oralmente e os estudantes fixavam esses conteúdos através de resolução de exercícios. Uma prática comum de contextualização nas aulas era o que Skovsmose (2001) chama de "semi-realidade - não se trata de uma realidade que "de fato" observamos, mas uma realidade construída, por exemplo, por um autor de um livro didático de matemática" (SKOVSMOSE, 2000).

Em suma, o professor ocupava a maior parte do tempo com exposição oral até aquela em que o aluno ficava a maior parte do tempo envolvido com resolução de exercícios. Nesse contexto, o primeiro questionário foi respondido.

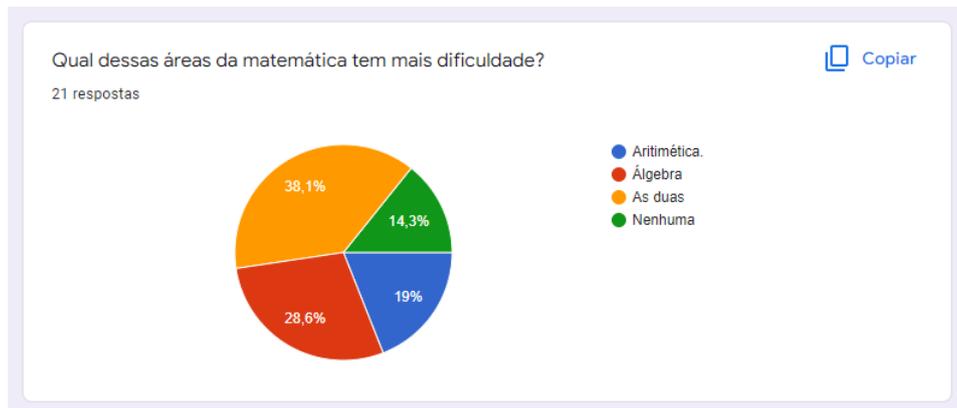
Os dados da Figura A.1 revelam que, 47,6% da turma gosta de Matemática, 47,6% gosta pouco e que 4,8% talvez goste. Isso mostra que a turma estava dividida quanto ao apreço pela disciplina de Matemática.

Figura A.1: Você gosta de matemática?



Fonte: O autor (2022).

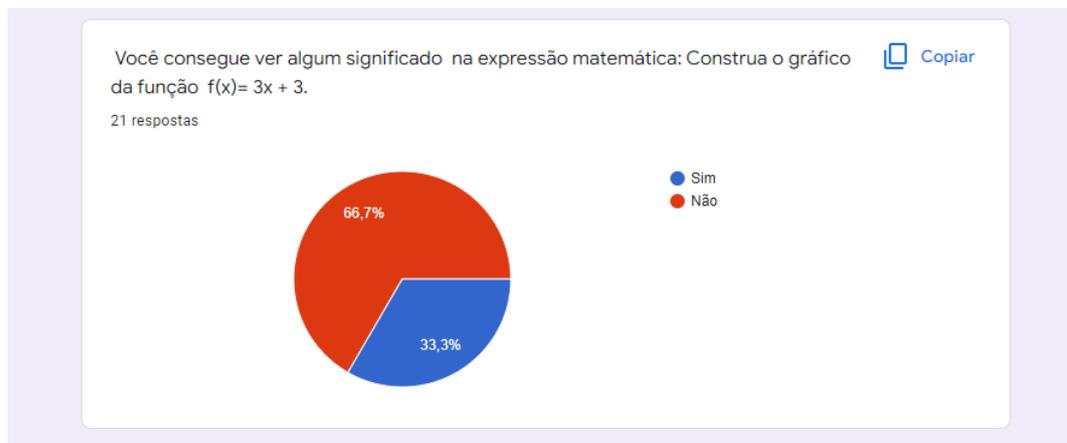
Figura A.2: Qual dessas áreas da matemática tem mais dificuldade?



Fonte: O autor (2022).

Como mostra a Figura A.2, 38,1% dos estudantes relatou ter dificuldades com os conteúdos de Álgebra e Aritmética, simultaneamente, e 28,6% deles com os conteúdos relacionado a Álgebra. Somando os dois resultados, ao redor de 67% deles têm dificuldades na aprendizagem da Álgebra.

Figura A.3: Você consegue ver algum significado na expressão matemática: Construa o gráfico da função $f(x) = 3x + 3$?



Fonte: O autor (2022).

O gráfico mostra o resultado 67,7% dos estudantes não veem significados quando o conteúdo é descontextualizado da vida cotidiana, ou quando, não é apresentada alguma relação com o mundo real.

A.2 Pós-aplicação da proposta

Durante o desenvolvimento das atividades, os rótulos negativos da turma foram dando lugar a uma turma motivada, participativa, empenhada e atenta para adquirir os conhecimentos e, o principal, os questionamentos foram constantes.

O desafio na resolução dos problemas, muitos destes criados pelos próprios estudantes, e o manuseio com os recursos tecnológicos foram os principais motivos que despertaram a curiosidade e o interesse da turma. Era notório o encanto quando algum estudante criava uma função polinomial e a representava graficamente através de recursos como *Geogebra* e *Winplot*.

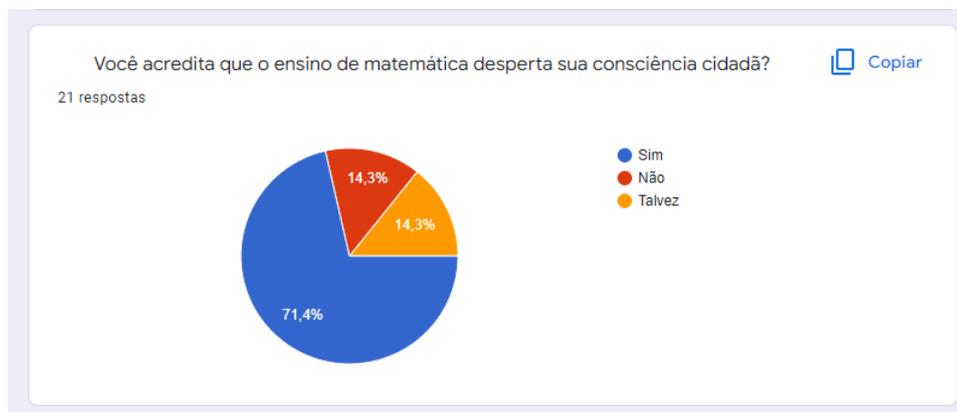
Outro fato que contribuiu para a motivação foi a questão social. Os estudantes solicitaram aos órgãos competentes as soluções de distribuição de lixeiras seletivas nas escolas do municípios e nas ruas; um terreno ocioso para a construção do galpão de triagem e a criação de um associação do catadores de lixo. Além disso, com os recursos advindos da venda dos produtos coletados compraram cestas básicas e distribuíram a população carente do município.

Os estudos sobre função polinomial, nesse período, mostraram aos alunos sua aplicabilidade em outras áreas para além da escola. Os casos de indisciplina que eram comuns nas aulas, não foram mais registrados. Houve uma notória relação de respeito mútuo e troca de informações de aluno para aluno, e de professor para aluno.

Outro importante resultado foi a mudança na prática pedagógica do professor, pois, a partir deste trabalho, o principal objetivo na prática pedagógica foi despertar no educando a curiosidade, a criatividade, buscando estratégias para motivar os estudantes a se envolverem nas atividades de aprendizagem. O professor percebeu a importância de contextualizar

os conteúdos matemáticos com a realidade dos estudantes, pois, eles se envolveram mais facilmente nas atividades em que acreditavam ter capacidade de realizar.

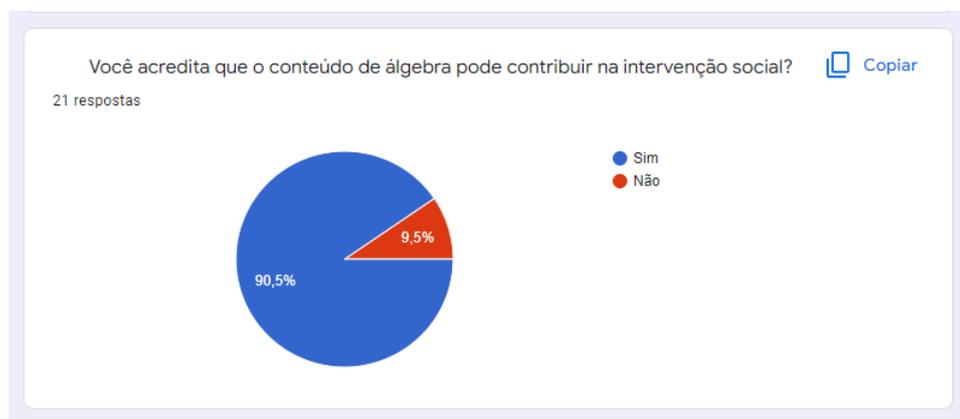
Figura A.4: Você acredita que o ensino de matemática desperta sua consciência cidadã?



Fonte: O autor (2022).

Após os debates sobre o tema Coleta Seletiva do Lixo, coleta dos materiais e a resposta de quanto o município perde por não coletar os produtos recicláveis, 71,4% dos estudantes que responderam o questionário acreditam que o ensino de matemática desperta a consciência cidadã ao trabalhar os conteúdos contextualizados com a realidade socio-cultural dos envolvidos no processo ensino-aprendizagem. Por sua vez, 14,3% acreditam que talvez, ou seja, depende do tema e conteúdo estudado. Finalmente, 13,3% não acreditam.

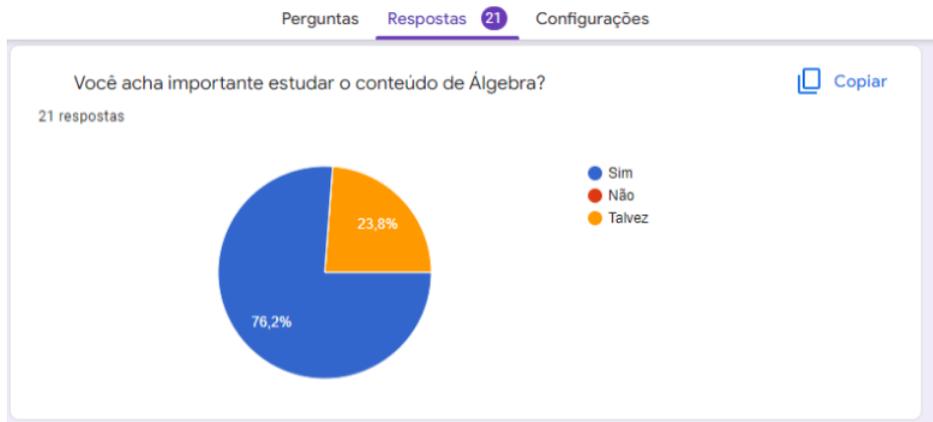
Figura A.5: Você acredita que o conteúdo de álgebra pode contribuir na intervenção social?



Fonte: O autor (2022).

Os estudantes sugeriram aos moradores do Bairro Lixão a criação de uma associação para coletar os materiais que são jogados todos os dias no lixão. Sugeriram também à Secretaria de Educação do município a implantação de lixeira seletiva. Apresentaram os valores arrecadados durante um mês de coleta. Ações como essas levaram os 90,5% dos estudantes a acreditarem que o ensino de álgebra se contextualizada com problemas sociais pode contribuir na intervenção.

Figura A.6: Você acha importante estudar o conteúdo de Álgebra?



Fonte: O autor (2022).

Observa-se que 76,2% dos entrevistados responderam sobre a importância do estudo sobre Álgebra e 23,8% responderam que talvez.

Os 21 estudantes estudaram os conteúdos de Álgebra (expressões, equações e funções) no cenário de matemática pura (Skovsmose, 2000), onde os alunos não percebiam significado e a importância dessa área do conhecimento como nos mostra as Figura A.2 e A.3.

No 2º ano do Ensino Médio, os mesmos estudantes estudaram os conteúdos de Álgebra contextualizada com sua realidade. As aulas foram desenvolvidas com a metodologia da Modelagem Matemática. Seguindo as etapas: 1ª Etapa: Percepção e Apreensão, 2ª Etapa: Compreensão e Explicação e 3ª Etapa: Significação e Expressão. As atividades de aprendizagem foram desenvolvidas no cenários de matemática com referência à realidade, no ambiente 5 e 6 (Skovsmose, 2000). Durante o desenvolvimento das oito aulas os estudantes foram os construtores do seu próprio conhecimento, cabendo ao professor a orientação desse processo de construção.

Mediante o exposto, temos que concordar em que “referências à vida real parecem ser necessárias para estabelecer uma reflexão detalhada sobre a maneira como a matemática pode estar operando enquanto parte de nossa sociedade. Um sujeito crítico é também um sujeito reflexivo” (SKOVSMOSE, 2000, p.20).

(CORTELLA, 2017), (SKOVSMOSE, 2001), (SILVA; COUTO; JÚNIOR, 2015, p.38), (KLÜSENER, 2003), (CEDRAZ; MERLINI; SANTANA, E.; MADRUGA, 2019), (NEGROMONTE¹; COUTINHO,), (PACHECO; ANDREIS, 2018), (GÓMEZ-GRANELL, 1996), (ROCHA, 2001), (BICUDO, 2021), (FIORENTINI, 1995), (FREIRE, 1998), (BIEMBENGUT; HEIN, 2000), (BASSANEZI, 2010), (D'AMBROSIO, 2007), (PANOSSIAN, 2014), (D'AMBRÓSIO, 1989), (LINS; GIMENEZ, 1997)