Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Edilberto Antenor de Rezende Paiva Neto

Proposta de um GeoGebra Book para o Ensino de Probabilidade através do Problema de Monty Hall

Belo Horizonte
2022

Edilberto Antenor de Rezende Paiva Neto

PROPOSTA DE UM GEOGEBRA BOOK PARA O ENSINO DE PROBABILIDADE ATRAVÉS DO PROBLEMA DE MONTY HALL

Dissertação apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de Mestre.

Orientadora
Marcela Richele Ferreira

Coorientador
Dênis Emanuel da Costa Vargas

Banca Examinadora
Gilmer Jacinto Peres
Rodrigo Luiz Pereira Lara
Saulo Furletti

Belo Horizonte
2022

Paiva Neto, Edilberto Antenor de Rezende
P149p Proposta de um geogebra book para o ensino de probabilidade através do problema de Monty Hall / Edilberto Antenor de Rezende Paiva Neto. – 2022.
101 f.

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.
Orientadora: Marcela Richele Ferreira.
Coorientador: Dênis Emanuel da Costa Vargas.
Dissertação (mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais.

1. Probabilidades – Teses. 2. Jogos educativos – Teses. 3. Problema de Monty Hall – Teses. 4. Geogebra (Software) – Teses. I. Ferreira, Marcela Richele. II. Vargas, Dênis Emanuel da Costa. III. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. IV. Título.

CDD 519.2

Elaboração da ficha catalográfica pela bibliotecária Jane Marangon Duarte, CRB 6º 1592 / Cefet/MG

Edilberto Antenor de Rezende Paiva Neto

PROPOSTA DE UM GEOGEBRA BOOK PARA O ENSINO DE PROBABILIDADE ATRAVÉS DO PROBLEMA DE MONTY HALL

Dissertação apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de Mestre.

Edilberto Antenor de Rezende Paiva Neto

Edilberto Antenor de Rezende Paiva Neto
(Autor)

Marcela Richele Ferreira

Marcela Richele Ferreira
(Orientadora)

Belo Horizonte
2022

Agradecimentos

Aos notáveis, mas que se faça notar a diferença que fazemos, nós mesmos, à este mundo...

Por vezes pensei à quem e aos quais agradecer, porém peço licença para começar agradecendo à mim mesmo. Obrigado! Obrigado por não desistir, por se dedicar, por acreditar em si mesmo, pois esse é o maior dos incentivos que possa ter! Se chegou até aqui foi porque você quis e acreditou ser possível!

Na maior parte do tempo nos cobramos demasiadamente. Por vezes não nos damos o valor e o crédito por nossas ações e iniciativas. Sejamos instrumento! Instrumentos para um mundo melhor, reprodutores de sorrisos, colecionadores de momentos, inspirações e inspirados, nunca fracassados. Se não deu certo hoje, amanhã o será! Não há falhas nessa terra, mas sim oportunidades de aprendizagens e ressignificações. Ressignifiquemos o amor!

Amo a vida, meus pais, irmãos, minha família seja ela de sangue ou não. Aos anjos que tenho lá de cima me iluminando, minha eterna saudade! Aos colegas de percurso, a minha gratidão e cumplicidade! Aos professores e orientadores, obrigado pelos conselhos, ensinamentos e exemplos de profissionais e de pessoas. Aos meus alunos e colegas de profissão, agradeço pela aprendizagem e trocas de experiências diárias. À minha companheira de vida, pelo suporte e incentivo. Aos familiares, a base de tudo, razão da minha existência e perseverança, lhes devo a vida. Aos amigos, aqueles que nem preciso citar, o verdadeiro sentido do verbo amar! Amo vocês! Meu muito obrigado à todos!

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Resumo

A Probabilidade é parte integrante do dia a dia da sociedade, sejam em situações simples, como na ocorrência ou não de determinados eventos, ou mais complexas, como a tomada de decisões que necessitem de um raciocínio lógico envolvido. A sua compreensão e entendimento são, portanto, de suma importância dentro e fora do ambiente escolar. Assim sendo, foram pesquisadas formas interessantes e relevantes para abordagem deste conteúdo de maneira dinâmica e lúdica, optando-se por sua aplicação em jogos com viés educacional. Dessa maneira, o presente trabalho tem como objetivo abordar a utilização do Problema de Monty Hall (PMH), amplamente discutido no meio acadêmico, como plano de fundo para melhorar a compreensão e assimilação de conceituações e propriedades probabilísticas. Para tal finalidade, foi desenvolvido um GeoGebra Book, composto por materiais teóricos que apresentam diferentes níveis de complexidade com relação ao conteúdo de Probabilidade. O livro digital conta ainda com exemplos resolvidos da sua contextualização em jogos, tais como dados e baralhos, e com *applets* que permitem a sua aplicação, por meio de jogos com uma adaptação e expansões do PMH para mais portas. O produto final criado servirá como um material de apoio para alunos e professores do Ensino Médio, ou até mesmo entusiastas pela temática. O *e-book* desenvolvido alia os fundamentos probabilísticos aplicados com a utilização de jogos, buscando estimular nos usuários a formação e/ou consolidação de conceitos para resoluções de problemas do seu cotidiano.

Palavras-chave: Probabilidade. Jogos na educação. Problema de Monty Hall. Problema de Monty Hall estendido. GeoGebra Book.

Abstract

The concept of Probability is part of a society's day-to-day, whether it is in simple situations, for instance event occurrence; or more complex circumstances, like decision-making processes that require logical thinking. Therefore, understanding probability is fundamental both in and outside the academic environment. That way, we have explored interesting and relevant ways to deal with this subject in a dynamic and playful approach, choosing to apply it on educational-biased games. Thus, the present study uses the Monty Hall Problem (MHP), greatly discussed by scholars, as a background to improve assimilation and comprehension of probability conceptions and properties. In doing so, we have developed a GeoGebra Book, made of theoretical materials involving diverse complexity levels of probability content. In addition, the digital book includes solved exercises in games, such as dice and cards, as well as applets that allow its use through adapted games and PMH expansion into other doors. The final product will serve as support material for high school students and teachers, or anyone enthusiastic about the topic. The proposed e-book connects applied probability axioms to game playing; encouraging users to foster and enhance concepts that will help them solve problems on a daily basis.

Keywords: Probability. Games in education. Monty Hall Problem. Extended Monty Hall Problem. Geogebra book.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

1 Introdução

O desenvolvimento técnico e científico vem transformando o cotidiano de toda a população. Com o passar do tempo, a evolução das relações interpessoais, dos processos produtivos, da prestação de serviços e das tecnologias, vêm modelando as novas gerações. Porém, ainda se faz presente e necessário o domínio de habilidades e conceitos matemáticos fundamentais no dia a dia das pessoas, que vão desde a administração financeira individual e doméstica, até aspectos ocupacionais e profissionais. Assim sendo, se torna essencial que o processo de educação matemática acompanhe o avanço tecnológico, o desenvolvimento e a expansão das interações entre pessoas, principalmente, no contexto escolar.

O ensino e a aprendizagem devem permanecer em contínua transformação, assim como acontece com vários aspectos da sociedade contemporânea. Professores e alunos, principais personagens deste cenário, também estão em constante autoconhecimento e amadurecimento. Entretanto, segundo Neto *et al.* [1, p.22-23], a Educação em si não vem seguindo "uma tendência de mudança que ocorreu em praticamente todos os serviços e processos de produção de bens que incorporaram os recursos das tecnologias digitais". De acordo com Serafim e Sousa [2], a vida atual, configurada mediante toda esta mudança, demanda que o aluno seja preparado para confrontar novas situações a cada dia que passa. Dessa maneira, a Educação deve deixar de ser apenas sinônimo da transferência passiva de informações e conhecimentos, adquirindo um caráter inovador e expansivo. Contudo, Neto *et al.* ressaltam que

> todas essas transformações fizeram com que o foco das atividades, que anteriormente estavam nos agentes que proviam esses serviços, passasse para os usuários. [...] um dos poucos, se não o único serviço que ainda não passou por essas inovações, é a Educação. O foco ainda está no professor, que detém a informação e "serve" seu aluno. A aprendizagem do aluno ainda está centrada na sala de aula. E a responsabilidade pela sua aprendizagem ainda é do professor. [1, p.22-23]

Serafim e Sousa [2] creditam esta situação de estagnação do sistema educacional, ao fato do modelo da escola contemporânea ainda ser derivado das premissas educativas vigentes na Era Industrial, ou seja, ela foi estruturada para preparar os alunos para viverem e trabalharem em uma sociedade bem diferente da moderna. No entanto, a população atual está sendo pressionada a se adaptar às novas demandas de formação individual, profissional e cidadã, muito distintas daquelas que eram exigidas no período industrial.

Corroborando, Alves [3] salienta que é necessário compreender que as pessoas atualmente aprendem determinadas habilidades e competências de maneira particular e específica. Destaca ainda a importância de observar que algumas metodologias de ensino passadas, não são mais funcionais nos dias de hoje. O processo de ensino e aprendizagem demanda um envolvimento interdisciplinar e uma harmoniosa interação entre professores e alunos, num ambiente favorável para troca de informações, opiniões e conhecimentos. No que diz respeito a educação matemática, observa-se uma situação particular.

A Matemática, como é comum nas Ciências Exatas, é considerada difícil por grande parte dos alunos. Para Baumgartel [4], o motivo de tal percepção decorre de uma questão cultural, que deve estar atrelada ao histórico de altos índices de reprovação da disciplina. Os estudantes apresentam uma aversão à matéria mesmo antes de entrarem em contato direto com ela ou passarem por dificuldades em seu estudo. Além disso, a realidade em muitas escolas ainda é de um ensino dos conteúdos matemáticos feito de maneira fragmentada e descontextualizada, priorizando a memorização e a mecanização da aprendizagem. Ao se distanciar e abstrair conceitos, a Matemática fica cada vez mais difícil de se compreender, o que exacerba a visão negativa por parte dos discentes. Sobre essa perspectiva, Stoica afirma que

> aprender matemática é considerado difícil pela maioria dos alunos. Uma das razões é que na aula de Matemática clássica os estudantes aprendem primeiro a teoria e depois são solicitados a resolver certos exercícios e problemas que têm soluções mais ou menos algorítmicas, usam mais ou menos raciocínio próprio e raramente estão conectados com atividades do mundo real. [5, p.702][1]

Nesse sentido, várias adaptações e novas abordagens estão sendo amplamente discutidas e difundidas. Uma ferramenta didática que vem despertando cada vez mais a atenção dos educadores e tem sido cada vez mais objeto de estudos na literatura, são os jogos, em especial, os digitais.

[1]Tradução obtida em https://translate.google.com.br/.

Alves [6] em sua pesquisa, tinha como objetivo apontar o estado da arte na área de jogos digitais, mapeando os trabalhos disponibilizados no repositório da CAPES entre 1994 e 2010. Foram encontrados 111 resultados, dentre dissertações e teses, sendo destes 28 voltados para a área da Educação. Segundo Martins (Martins[7], 2015 apud Gonçalves[8], 2021), no período de 2011 a 2015, seu trabalho abrangia ao menos 118 estudos que se baseiam em temáticas envolvendo jogos digitais e Educação, o que demonstra o crescimento com o passar do tempo, do interesse pela utilização dos jogos no contexto educacional.

O II Censo da Indústria Brasileira de Jogos Digitais [9, p.40] mostra que $22,7\%$ das 331 empresas que responderam à pesquisa, realizam serviços educacionais. Além disso, em 3% do total, representam a principal de fonte de receita das desenvolvedoras.

Grando [10] aponta que o trabalho com jogos possibilita a formação de conceitos matemáticos, a construção de relações quantitativas ou lógicas, que se caracterizam num contexto escolar pela aprendizagem de raciocínios, de demonstrações e em questionamentos das justificativas de erros e acertos.

A utilização de jogos no ensino de Matemática surge como uma estratégia didática e recreativa que induz os estudantes a utilizarem os conceitos aprendidos durante as aulas ditas teóricas, e aplicá-los em situações de demanda, fazendo com que tais conteúdos sejam assimilados de maneira prática e lúdica. Um dos objetos matemáticos, no qual os jogos podem ser extensivamente utilizados como recurso pedagógico, é a Probabilidade, que por vezes está ligada às mecânicas e estratégias de jogos.

Uma situação-problema que facilmente pode ser modelada e aplicada como um jogo e que contextualiza elementos e propriedades matemáticas, é o mundialmente conhecido Problema de Monty Hall (PMH). Tal jogo ficou notabilizado à partir da década de 60, em um programa televisivo de auditório nos Estados Unidos. Consiste na escolha de uma dentre três portas, no intuito de encontrar um prêmio atrás de uma delas. Após a escolha inicial, o apresentador chamado Monty Hall, abria uma das outras duas portas, mostrando que o prêmio não estava lá, e dava a oportunidade do jogador de trocar a porta selecionada no começo. Essa escolha, apesar de parecer trivial, traz consigo todo um raciocínio probabilístico por detrás e recebe a alcunha de PMH.

1.1 Motivações

As motivações para a escolha e realização deste trabalho se deram, entre outras razões, pela relevância do tema Probabilidade dentro da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o Ensino Médio (EM), pelo ambiente descontraído e lúdico que os jogos trazem para a sala de aula e pela grande aplicabilidade de conceitos probabilísticos no Problema de Monty Hall.

Em caráter pessoal, as experiências vividas em sala de aula desde a época de escola, perpassando pela graduação, pós e, até mesmo, como professor, incentivaram a escolha da tríade: Jogos, Probabilidade e PMH. Com relação aos jogos, sempre foi considerado um tema muito interessante e estimulante, no que diz respeito ao desenvolvimento de linhas de raciocínio, cálculo de possibilidades, determinação de estratégias, elaboração de planos, instigação da curiosidade e criatividade. Sobre Probabilidade, além de ser um aspecto bastante recorrente em jogos, dentre os objetos matemáticos é tido como um dos mais relevantes e atualizados com as demandas dos alunos que conseguem distinguir no assunto aplicações reais. Por fim, o Problema de Monty Hall, dentro de sua simplicidade e objetividade, gera várias discussões e debates acerca de sua resolução, o que é muito bem vindo para a prática docente.

Com relação aos documentos oficiais, a BNCC de Matemática do EM, definida por Brasil [11], divide-se em cinco unidades de conhecimento que são: Aritmética, Álgebra, Geometria, Probabilidade e Estatística, Grandezas e Medidas. Ainda segundo a BNCC:

> A incerteza e o tratamento de dados são estudados na unidade temática Probabilidade e Estatística. Ela propõe a abordagem de conceitos, fatos e procedimentos presentes em muitas situações-problema da vida cotidiana, das ciências e da tecnologia. Assim, todos os cidadãos precisam desenvolver habilidades para coletar, organizar, representar, interpretar e analisar dados em uma variedade de contextos, de maneira a fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões adequadas. Isso inclui raciocinar e utilizar conceitos, representações e índices estatísticos para descrever, explicar e predizer fenômenos. [11, p.274]

Nas competências específicas de Matemática e suas Tecnologias definidas por Brasil [11], destaca-se a investigação e o estabelecimento de conjecturas sobre conceitos e propriedades matemáticas por meio de recursos e estratégias, como por exemplo, a observação, a experimentação e o uso de tecnologias digitais, para a validação formal das conjecturas desenvolvidas. Ressalta-se na BNCC algumas habilidades específicas, como a resolução e elaboração de problemas envolvendo cálculo de probabilidade em eventos aleatórios sucessivos ou não, a identificação e descrição do espaço amostral e a contagem de possibilidades.

Além disso, a Probabilidade está muito presente na realidade da sociedade em que vivemos, sendo parte integrante do cotidiano dos alunos sejam em jogos, loterias, sorteios, entre outros. Apesar de toda a relevância desse conteúdo, as experiências dentro de sala de aula e a análise do desempenho dos alunos em provas, vestibulares e demais processos seletivos, indicam uma grande dificuldade com relação ao assunto em questão, principalmente nas escolas públicas. A incidência de questões sobre a temática no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) chega a ser aproximadamente 25%, segundo aponta Pontes [12, p.112-114] em seu trabalho que analisou as provas do período de 2013 a 2016. Ademais, o autor revela em sua pesquisa, que abrangia apenas estudantes aprovados, que no referido período, as menores taxas de acerto em uma questão sobre Probabilidade/Estatística do ENEM daqueles anos foram, $11,7\%$, $19,5\%$, $8,8\%$ e $23,5\%$, respectivamente.

A partir desta motivação, observamos que os jogos aliados ao conteúdo de Probabilidade, compõem uma estratégia didática para aplicação de habilidades e competências essenciais no processo de ensino e aprendizagem em Matemática. Tal fato se deve não apenas pelo conhecimento curricular envolvido, mas também pelos fatores sociais de interação e recreação. Colaborando com a aliança entre jogos e Probabilidade, o PMH foi escolhido como tema para se aplicar e discutir, de maneira mais dinâmica e prazerosa, os aspectos probabilísticos enfrentados durante a adaptação e expansão do problema, no formato de um jogo digital.

1.2 Objetivos

O presente trabalho parte inicialmente da seguinte questão de pesquisa: "seria possível elaborar um produto educacional baseado em jogos, principalmente o Problema de Monty Hall, que tenha potencial para contribuir no ensino e aprendizagem de Probabilidade?"

O objetivo geral então é complementar a temática de Probabilidade trabalhada no Ensino Médio, pretendendo criar novos caminhos para alunos e professores, buscando assim responder a questão de pesquisa mencionada anteriormente. Com este intuito foram elaboradas algumas estratégias, que culminaram em determinados objetivos específicos:

Objetivo Específico 1: Utilizar o PMH como base para se trabalhar conceitos probabilísticos.

Objetivo Específico 2: Para tal fim, foram criados jogos, com uma adaptação e expansões do PMH para mais portas, no *software* GeoGebra.

Objetivo Específico 3: Foi desenvolvido um GeoGebra Book (GGB), contendo um material de apoio para professores e alunos de Matemática do EM, ou até mesmo, entusiastas pelo conteúdo de Probabilidade.

A finalidade deste produto educacional, o GGB, é trabalhar a tríade Probabilidade, Problema de Monty Hall e Jogos. A proposta é aliar os fundamentos probabilísticos aplicados com a utilização de jogos, entre eles o PMH, buscando estimular a formação e consolidação de conceitos, para resoluções de problemas do dia a dia.

1.3 Estruturação

Esta dissertação está organizada em 6 capítulos, sendo este primeiro uma introdução do tema escolhido, indicando as motivações, os objetivos e a estruturação de todo o trabalho.

No Capítulo 2, destinado aos jogos com viés educacional, serão apresentados alguns conceitos importantes, um breve histórico e trabalhos relacionados à utilização de jogos na Educação em geral e na Educação Matemática em específico.

O terceiro capítulo, cujo assunto é Probabilidade, elenca, descreve e explica os principais elementos, conceitos, propriedades e teorias probabilísticas, necessárias para a compreensão do PMH, o qual será abordado no quarto capítulo.

O Problema de Monty Hall será exposto desde sua origem, propagação, resolução e discussão, apresentando os principais personagens que o tornaram popular, uma descrição completa do jogo, no qual o problema foi modelado, os conceitos matemáticos por detrás das escolhas envolvidas ao se jogar, e algumas propostas de soluções.

No quinto capítulo é descrito o processo de criação de todos os componentes do produto educacional, entre eles a parte teórica, os exemplos, exercícios, *applets* dos jogos e formulário do GGB.

Por fim, o sexto capítulo contempla as considerações finais, apontando os pontos positivos, negativos, diferenciais, destaques e próximas etapas deste trabalho.

2 Jogos na Educação

A sociedade contemporânea está, a cada dia que passa, mais tecnológica e globalizada. A Educação, como um de seus mais importantes pilares, necessita acompanhar essa dinâmica evolução. Entretanto, Grando [10] aponta que o currículo escolar de Matemática demanda uma atualização contínua de alguns conteúdos descontextualizados, metodologias improdutivas e objetivos incoerentes com a realidade e necessidade atual dos alunos. Segundo Buckinham, a escola no quesito modelo de ensino, ainda é muito próxima àquelas do século XIX, uma vez que

> as formas de ensino e aprendizagem são organizadas de modo similar, os tipos de habilidade e conhecimento levados em conta nas avaliações e até mesmo boa parte dos conteúdos curriculares atuais mudaram apenas de forma superficial desde aqueles tempos. [13, p.44]

Dessa maneira, a mudança sujeita-se às ações transformadoras dos professores que devem adaptar suas práticas docentes cotidianas. Surge, então, a necessidade da criação de estratégias e ferramentas pedagógicas modernas e da incorporação de novos instrumentos educativos. A BNCC [11] apresenta a recomendação de que os materiais didáticos não sejam exclusivamente restritos ao livro-texto referência, adotado como a principal, porém não única, fonte de informações, atividades e recursos.

Nesse sentido, a utilização de jogos com o viés educacional se apresenta como uma proposta de tendência crescente. No que diz respeito às aulas de Matemática, Smole *et al.* [14, p.9] apontam que "o uso de jogos implica uma mudança significativa nos processos de ensino e aprendizagem que permite alterar o modelo tradicional de ensino, que muitas vezes tem no livro e em exercícios padronizados seu principal recurso didático".

Em Grando [15, 10, 16], a autora defende a incorporação dos jogos na Educação, adaptada à interpretação e resolução de problemas. O objetivo é fomentar no estudante o interesse pelos conteúdos ensinados dentro da sala de aula, usando mecanismos similares aos quais ele tem contato em seu dia a dia.

Tais estratégias, visam também motivar os alunos a estudarem e desenvolverem, de maneira mais leve e prazerosa, suas habilidades e competências. Para tal finalidade é necessário inicialmente ressignificar e reconstruir o processo de ensino e aprendizagem de Matemática, que por vezes foi conduzido de maneira mecanizada e robotizada, constituído apenas por repetições na aplicação de fórmulas e contas. Além de tornar o processo de aprendizagem mais interessante, os jogos permitem aos praticantes desenvolver a autonomia e a criatividade, transformando os alunos, que muitas vezes eram passivos dentro deste processo, em sujeitos ativos na construção e consolidação de conceitos matemáticos.

Com relação ao trabalho com jogos nas aulas de Matemática, Smole *et al.* destacam que

> quando bem planejado e orientado, auxilia o desenvolvimento de habilidades como observação, análise, levantamento de hipóteses, busca de suposições, reflexão, tomada de decisão, argumentação e organização, as quais são estreitamente relacionadas ao assim chamado raciocínio lógico. [14, p.9]

Dando sequência, será apresentado o referencial teórico sobre jogos, adotado neste trabalho.

2.1 Referencial Teórico

A utilização de jogos educacionais é um tema muito debatido e vem sendo extensivamente estudado. Prado [17] ressalta que muito se tem discutido sobre as alterações dos modelos educacionais. A procura pela inovação, por um ensino dinâmico, lúdico e contextualizado vem sendo foco habitual de fóruns de congressos e especializações na área da Educação.

Compreender o real papel dos jogos no processo educacional, então, se faz necessário. Para isso é importante conhecer um pouco mais sobre: o histórico do seu surgimento, até a sua utilização como ferramenta pedagógica e as discussões acerca da temática nos dias atuais; algumas definições sobre o seu conceito; as principais terminologias referentes aos diferentes tipos de jogos; os apontamentos encontrados sobre a temática nos documentos oficiais; e trabalhos relacionados ao uso de jogos na Educação em geral e na Educação Matemática.

2.1.1 Breve Histórico

Os jogos estão presentes na humanidade desde os primórdios sendo utilizados com os mais diversos objetivos, tais como diversão, competição, ou até mesmo, para o ensino. Na Idade Antiga, segundo Miranda [18], Platão (427-348 a.C) já discutia sobre a relevância do "aprender brincando" e seu pupilo Aristóteles (384-322 a.C) acreditava na educação infantil baseada na aplicação de jogos como simulação de atividades da vida adulta.

Com o passar do tempo, já na Idade Média, a maioria dos jogos, considerados contravenção, foram proibidos pela Igreja. Desta maneira, Araújo [19, p.14] aponta que, como o desenvolvimento da ciência e cultura eram controlados diretamente pelas escolas religiosas, a educação disciplinadora dessas instituições não abriram espaço para a utilização pedagógica dos jogos e para a expansão de suas aplicações, pois eram "considerados transgressores à ordem e à disciplina".

Com o Renascimento Cultural, Brougère [20] destaca que os jogos de azar assumiram um papel de destaque, modificando sua representatividade. Miranda [18] ressalta que a associação com apostas, visto como algo fútil, leviano, pôde explicar o fato de ainda não se pensar no jogo como recurso educativo na Idade Moderna. Essa mudança de perspectiva foi possibilitada pela ideologia liberal e pelo Romantismo.

O pensamento iluminista gerou princípios liberais, contrários às políticas absolutistas. Assim sendo, Miranda [18] indica que o Romantismo, no início da Idade Contemporânea, permitiu o desenvolvimento tecnológico, do processo criativo no campo das ideias, incentivando assim o uso das atividades lúdicas no processo de ensino e aprendizagem.

No entanto, Araújo [19] salienta que é a partir do século XX que se estabelece a difusão do uso de jogos e o interesse acerca das influências deles no processo de aprendizagem e desenvolvimento, baseado em pesquisas e formulações de teorias.

A metodologia de trabalho com jogos dentro de sala de aula passou a ser discutida devido aos avanços no campo da Psicologia, conforme Grando [21], principalmente do ponto de vista construtivista, no qual o sujeito é o responsável predominante do seu processo de aprendizagem e não apenas um passivo assimilador de conteúdos. As principais contribuições surgiram de teóricos, tais como, Piaget, Vygotsky e Brougère.

Piaget [22] atribui às atividades lúdicas o surgimento das funções intelectuais da criança, sendo, portanto essencial para o processo educativo. Vygotsky [23] enfatiza a relevância de brincadeiras e jogos na aprendizagem infantil; no desenvolvimento da linguagem, pensamento crítico e concentração; no estímulo da criatividade, curiosidade, iniciativa e autoconfiança. Brougère [24] aponta ainda que o jogo possibilita a oportunidade de se evoluir as competências inerentes à ele, possibilitando aplicar as habilidades assimiladas em outros aspectos não lúdicos da vida.

Com relação ao ensino tanto de crianças quanto jovens, Smole *et al.*[25, 14] apontam a função de socialização como um dos pressupostos do trabalho com jogos em Matemática. Os autores acreditam que

> na discussão com seus pares, o aluno pode desenvolver seu potencial de participação, cooperação, respeito mútuo e crítica. [...] É por meio da troca de pontos de vista com outras pessoas que o aluno vai descentrando-se, isto é, ele passa a pensar sob outra perspectiva e, gradualmente, a coordenar seu próprio modo de ver com outras opiniões. [...] Em nossa opinião, o jogo é uma das formas mais adequadas para que a socialização ocorra e permita aprendizagens. [25, 14, p.10-11]

O nível de ensino em que os jogos serão utilizados determinará o grau de complexidade, os objetivos e os tipos de atividades a serem empregadas. Como o trabalho visa a abordagem com temáticas voltadas para o Ensino Médio, serão apresentados a partir de agora conceitos voltados a jogos para este público majoritariamente.

2.1.2 Conceituação

A associação do conceito de jogo a um material físico, palpável, manipulável é muito comum. Contudo, muitas das vezes, pode ser utilizado no ambiente escolar como ferramenta puramente motivacional. Dessa forma, Grando [21], confere uma concepção mais simples, correspondendo a chamada atividade lúdica. A ludicidade, definida por Huizinga [26], se constitui na própria realização da atividade, ou seja, tem por objetivo a satisfação na mera prática da mesma. Tendo em vista estas conceituações, para o estudo dos jogos educacionais é necessário então partir da discussão prévia sobre o que é um jogo.

Etimologicamente, a palavra "jogo" é derivada da palavra *ludus*, que significa brincadeira, divertimento. Segundo o dicionário Michaelis:

> Jogo, SM. 1 Qualquer atividade recreativa que tem por finalidade entreter, divertir ou distrair; brincadeira, entretenimento, folguedo. 2 Divertimento ou exercício de crianças em que elas demonstram sua habilidade, destreza ou astúcia. 3 Essa atividade, quando diferentes indivíduos ou grupos de indivíduos se submetem a competições em que um conjunto de regras determina quem ganha ou perde. [...] [27]

A palavra jogo apresenta no contexto escolar, segundo Smole *et al.* [25, 14], vários sentidos, podendo ser caracterizada de diferentes maneiras. Dessa forma, baseado em Kamii e DeVries [28], entende-se que o jogo deve:

- ser uma atividade coletiva, isto é, para dois ou mais jogadores;
- ter um objetivo final, de maneira que ao término haja um vencedor ou vencedores;
- ter regras estabelecidas, permanentes durante as partidas. O descumprimento das mesmas representa uma violação passível de desqualificação ou sujeita a sanções previamente acordadas. Quaisquer alterações podem ser feitas, desde que sejam discutidas e decididas por todos os participantes, e claro, não impossibilitem o desenvolvimento do jogo;
- propiciar aos alunos a possibilidade de assumir papéis interdependentes, opostos e/ou cooperativos. Os jogadores devem compreender as suas características individuais, sua relevância, seus objetivos, bem como obedecer às regras estipuladas.
- possibilitar o cálculo de possibilidades de ações, elaboração de estratégias, a idealização de planos, otimização de jogadas permitindo avaliar o seu desempenho aliado às decisões tomadas.
- ter um significado específico, uma meta a ser alcançada dado um objetivo inicial, não sendo apenas algo puramente mecânico.

O jogo em si não se resume a um trivial entretenimento, segundo Avanço [29]. O autor apresenta uma distinção entre as terminologias referentes aos jogos. Baseado nos apontamentos de Lima [30], busca descrever e diferenciar o jogo como: recreação, o espontâneo, o educativo, o recurso educacional, e também a ideia do porquê da exclusão do jogo por parte de algumas instituições de ensino.

I **Jogo como recreação.** Visto como uma oportunidade de complementar as aulas. Teria caráter relaxante e de dispêndio de energia acumulada durante as aulas ditas teóricas, passivas. Seriam atividades de "folga" que permitiriam uma recuperação psicológica e física, em preparo para as atividades seguintes. Apresenta duas variantes, o dirigido e o livre. A diferença entre ambas é que na recreação dirigida existe a intervenção do professor, enquanto que na livre ele apenas garante um contexto adequado a elas.

II **Jogo espontâneo.** Se apresenta como uma realização de experiências sem consequências diretas, ou seja, não está vinculado a nenhum processo educacional formal. Teriam iniciativas espontâneas, com resultados totalmente imprecisos.

III **Jogo educativo.** Reconhecido por conduzir ao desenvolvimento de comportamentos e habilidades não somente acadêmicas, intelectuais, mas também sociais e, principalmente, humanas que são de grande interesse das instituições de ensino. Tende a ser impreterivelmente planejado e direcionado pelo professor. Alia a função lúdica ao papel educativo, desde que em total equilíbrio de ambas.

IV **Jogo como recurso educacional.** Utilizado como recurso didático para a formação ou consolidação de conceitos, habilidades e competências. Além disso, aborda a gamificação dos estudos por assim dizer, ou seja, utiliza a mecânica, as estratégias, o pensamento e dinâmicas dos jogos em contextos ditos não *game*, com o intuito de estimular o engajamento dos estudantes.

V **Exclusão do Jogo.** Abrange a ideia da ausência e proibição do jogo baseada em diversos fatores, entre eles, tratá-lo como entrave, no sentido de desconcentrar e dispersar os alunos. Existe também o receio de que comprometa a aprendizagem e estimule a omissão, ociosidade e displicência. Vale ressaltar que a tendência de proibição do jogo de certa maneira está bastante difundida em vários níveis de educação. De acordo com Smole *et al.* [14, p.10], "uma das fases escolares que menos utiliza jogos nas aulas de matemática é, sem dúvida, o Ensino Médio".

Assim sendo, observa-se que essa ferramenta pedagógica possui uma abrangência muito grande, podendo ser utilizada com um viés recreacional, com demanda espontânea ou não, direcionada ou livre, porém sempre de maneira a ser gerenciada pelo professor.

O processo de aprendizagem ocorre com a aquisição de conhecimentos, valores, competências e habilidades por meio de estudos, observações, experimentações, raciocínios e formações de conceitos, como apontado em Alves [31]. Experiências dentro da vivência no ambiente escolar e em relatos encontrados na literatura, comprovam que o uso de elementos do jogo indicam a promoção de aprendizagem por parte dos alunos, como serão expostos no decorrer deste capítulo. Aos professores cabe o papel de ser o intermediador neste processo e auxiliar na consolidação e fixação do conhecimento como mencionado por Avanço [29] e Lima [30].

Algumas situações e oportunidades de intervenção pedagógica com a utilização de jogos em sala de aula, foram definidas em Grando [10, 16]. Cada um destes momentos tem uma finalidade específica e podem ser caracterizados como sendo uma das seguintes etapas:

1. **Familiarização com o material do jogo.**

   Os alunos têm um primeiro contato com os componentes, identificando suas peças como dados, cartas, etc. Em termos de jogos digitais, os jogadores irão experimentar os controles e dinâmicas de jogo. Neste momento, analogias já são criadas baseadas neste primeiro contato e em experiências passadas.

2. **Reconhecimento das regras.**

   As regras podem ser explicadas pelo professor como mediador, podem ser lidas e interpretadas nos manuais pelos próprios alunos, ou ainda identificadas pelos jogadores ao analisarem partidas de exemplo.

3. **Jogo pelo jogo.**

   Os jogadores experimentam o jogo pelo simples fato de jogar e se familiarizar com as regras, mecânicas, desafios e objetivos.

4. **Intervenção pedagógica verbal.**

   Nesta etapa o professor como orientador faz observações e indagações a fim de motivar os alunos a analisarem suas estratégias, observando a relação entre suas tomadas de decisões e consequente acertos e erros.

5. **Registro do jogo.**

   Neste momento, que depende muito da natureza e do tipo de jogo explorado, pode ser realizado o registro. Tais documentações podem ser a pontuação atingida, os caminhos ou estratégias utilizadas e até mesmo os cálculos ou lógicas aplicadas. Essa sistematização e formalização dos dados através da linguagem matemática será relevante para a incorporação da experiência como aprendizagem.

6. **Intervenção escrita.**

   O professor nesta situação problematiza situações do jogo propostas por ele, ou até mesmo contextos encontrados durante as etapas anteriores. A resolução de problemas permite abordar diferentes aspectos do jogo e direcionar aos conceitos matemáticos de interesse.

7. **Jogar com competência.**

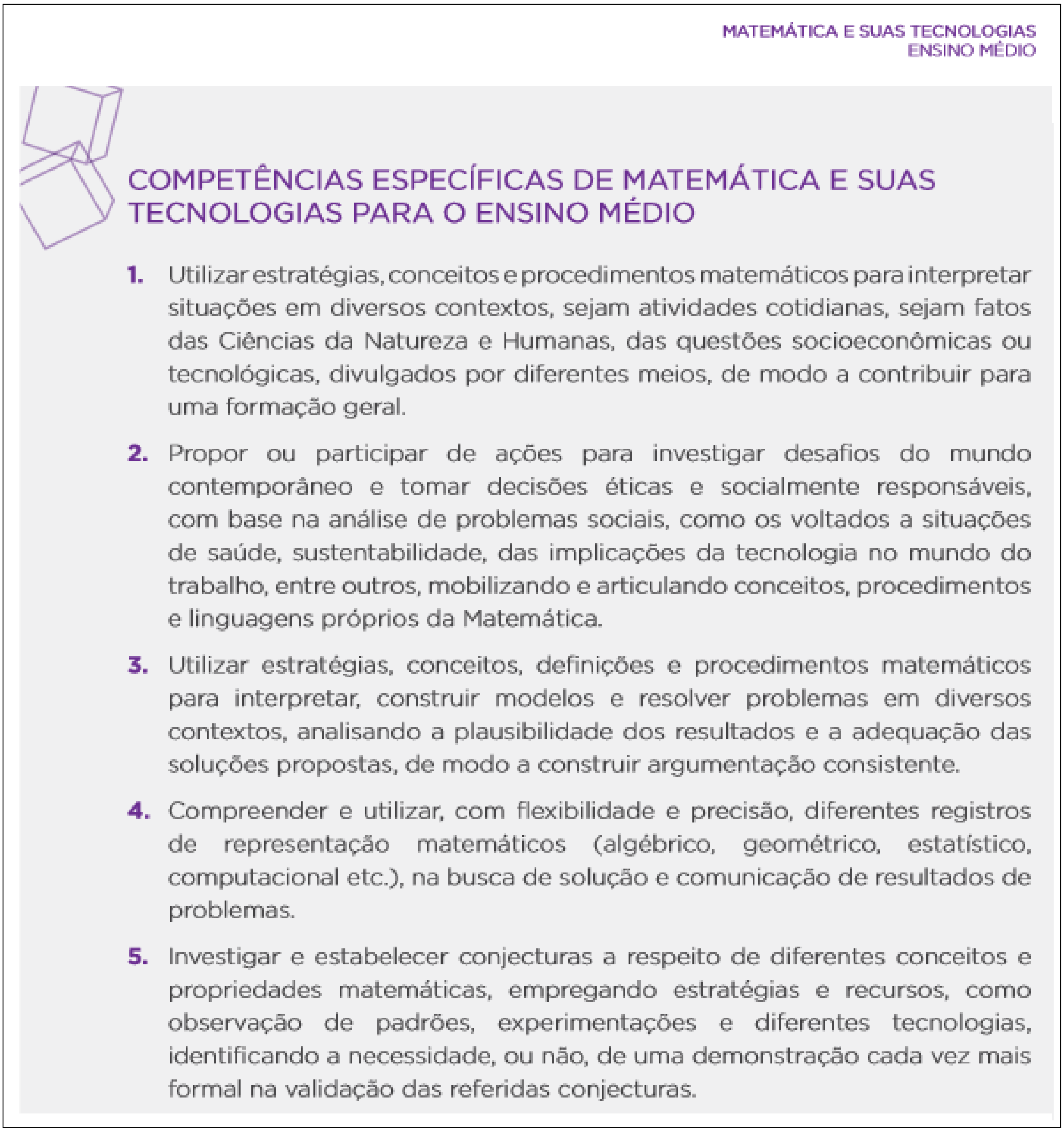
   Como última ação, o retorno à situação real de jogo permite que os alunos aliem todos os aspectos trabalhados anteriormente para elaborar uma estratégia vencedora baseada não só na sua experimentação, mas também fundamentado no conhecimento matemático demandado.

Tendo em vista os diferentes momentos de jogo descritos, observa-se que os alunos constroem conceitos matemáticos diversos, dependendo da intervenção a que são submetidos. De acordo com Macedo *et al.* (Macedo, Petty e Passos[32], 2000 apud Grando[21], 2007), "a discussão desencadeada a partir de uma situação de jogo, mediada por um profissional vai além da experiência e possibilita a transposição das aquisições para outros contextos". Com isso o autor considera que as experiências e estratégias vivenciadas no âmbito do jogo são apropriadas pelos jogadores que podem aplicá-las dentro de diversos contextos, até mesmo em sala de aula ou em outros momentos de suas vidas.

2.1.3 Jogos na Educação segundo os Documentos Oficiais

A Base Nacional Comum Curricular do Ensino Médio, de acordo com Brasil [11, p.531], aponta algumas competências específicas (CE) de Matemática e suas tecnologias para o Ensino Médio, como mostra a Figura 2.1. Uma das estratégias para interpretar situações cotidianas, citadas na CE1, podem ser os jogos. Assim sendo, ao se modelar situações-problema, os estudantes ao jogarem são capazes de analisar, adequar, argumentar e concluir resultados, como apontado na CE3. Algumas etapas da intervenção pedagógica apontadas por Grando [10, 16], principalmente a 5 e 6, contemplam a CE4, pois se referem à representação de registros matemáticos. Por fim, na CE5 a experimentação com o intuito de se observar padrões e validar conjecturas é inerente ao propósito da existência do jogo em si, tornando a experiencia de se jogar, num ato não só de atividade social, integradora, dinâmica, mas intelectual e promovedora de aprendizagem.

Figura 2.1: Competências específicas de Matemática e suas tecnologias



MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS
ENSINO MÉDIO

COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS DE MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS PARA O ENSINO MÉDIO

1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Fonte: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) tanto do Ensino Fundamental (PCNEF) quanto do Ensino Médio (PNCEM) trazem referências importantes aos jogos e alguns deles serão apresentados aqui.

Os PCNEF, definidos por Brasil [33, p.47], realçam que "os jogos podem contribuir para um trabalho de formação de atitudes, enfrentar desafios, lançar-se à busca de soluções, desenvolvimento da crítica, da intuição, da criação de estratégias e da possibilidade de alterá-las quando o resultado não é satisfatório". Já os PCNEM salientam que:

> A aula expositiva é só um dos muitos meios e deve ser o momento do diálogo, do exercício da criatividade e do trabalho coletivo de elaboração do conhecimento. Através dessa técnica podemos, por exemplo, fornecer informações preparatórias para um debate, jogo ou outra atividade em classe, análise e interpretação dos dados coletados nos estudo do meio e laboratório. [34, p.53]

Por meio desta análise documental é observada a importância dada pelo Ministério da Educação (MEC) para a utilização de jogos dentro do sistema educacional brasileiro. Nota-se que a preocupação em se adequar a evolução no campo da educação, concomitante aos avanços nas demais áreas, vem de um longo período, observando que os PCN's datam de mais de 20 anos atrás, por exemplo.

Serão apresentados a seguir, uma série de trabalhos recentes que discutem a aplicação de jogos na Educação, com intuito de ilustrar essa relevância.

2.2 Trabalhos Relacionados

Vários são os estudos e pesquisas que investigam, analisam e avaliam o uso de jogos no processo educacional, principalmente no ensino de Matemática. Nesta seção serão apresentados alguns destes trabalhos e suas principais abordagens.

2.2.1 Jogos na Educação em Geral

No acervo da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD)[1] é possível encontrar uma variedade muito grande de trabalhos que debatem a temática. Inicialmente serão destacadas aqueles que tem como seu objeto de estudo a Educação em geral, não necessariamente em Matemática.

Em sua pesquisa, Almeida [35] faz uma abordagem à respeito da implementação de jogos computacionais sem características e objetivos explicitamente educativos. O

[1]Disponível em https://bdtd.ibict.br/.

autor desenvolveu um plano de aula que foi aplicado com turmas de alunos do sétimo ao nono ano do Ensino Fundamental. Por se tratar de jogos, a princípio, sem propósitos notoriamente voltados ao âmbito escolar, tais como SimCity, Minecraft, The Sims, entre outros, a preocupação maior do pesquisador foi equilibrar o entretenimento com os conteúdos educacionais que cada jogo pode proporcionar aos estudantes, devido às suas características intrínsecas particulares. Por fim destaca que o sucesso da experiência está relacionado à aplicação dos jogos digitais de forma geral, e não à utilização de um dos jogos em específico.

No trabalho de Amaral [36], o enfoque dado aos jogos eletrônicos didáticos para o ensino de Ciências, se deve pela garantia de lazer por parte desta ferramenta. Por este motivo, o autor apresentou uma modelagem contendo pré-requisitos para um dito bom jogo digital no contexto da Física. Foi criado um protótipo por meio da avaliação de um grupo de peritos: em educação; *game design*, isto é, especialistas em *games*; e estudantes da Educação Básica. Ao final, salienta-se a importância do desenvolvimento deste *software* que apresenta um modelo de jogo do tipo aventura, aprovado por educandos, educadores e profissionais do ramo de entretenimento.

Uma outra proposta ao uso de jogos digitais, é feita por Paula [37]. O autor enaltece a utilização de jogos comerciais, assim como Almeida [35], e também jogos educativos, bem como Amaral [36], porém propõe uma nova perspectiva, que os alunos criem seus próprios jogos. O intuito é ser uma contrapartida a abordagens simplistas da educação tradicional que propiciem aos estudantes oportunidades de explorar aspectos técnicos dos jogos, como tecnologias digitais e mecânicas de jogo; fatores culturais, como o papel destes artefatos na sociedade contemporânea; e os conteúdos curriculares específicos.

O trabalho de Miranda [18] também traz o próprio aluno como o responsável pela construção de conhecimentos, por meio da elaboração de jogos. Em sua pesquisa, feita com estudantes da Educação de Jovens e Adultos (EJA), os participantes deveriam criar propostas pedagógicas com jogos aliados à conteúdos de Química, que ainda não haviam sido ministrados. Esse posicionamento ativo dos discentes propiciou várias discussões, não somente sobre o estabelecimento das regras, mas também das temáticas químicas em questão. A autora enfatiza que a competição, a aprendizagem colaborativa e particularidades do EJA contribuíram e muito para o aumento do interesse pela disciplina e da assimilação dos conceitos trabalhados.

Em seu projeto, Pfiffer [38] se remete à importância do ensino mais dinâmico propiciado pela utilização dos jogos. A pesquisadora elaborou oito atividades nas formas de tabuleiro, trilha e cartas. A autora destaca como pontos positivos, uma melhora da ansiedade por parte dos alunos, desenvolvimento da autonomia e da autoestima. Além disso, em termos práticos, aponta melhora na concentração, na organização e no cálculo mental. O exercício do cumprimento de regras propiciou um prazer funcional, uma maior socialização dentro de sala de aula e uma maior interação entre professor e alunos.

Mais uma autora que também trabalhou com jogos de tabuleiro foi Azevedo [39], que analisou as contribuições do *Role-playing game* (RPG)[2] associado à problemas matemáticos. Ressalta-se que a vivência trazida pela experimentação do jogo contribuiu com reflexões mais profundas realizadas pelos jogadores, antes das suas tomadas de decisões. A imersão no contexto do jogo de RPG traz à tona um posicionamento muito importante no campo da Matemática que é a atitude ativa, ou seja, se colocar no lugar de quem precisa resolver determinado problema. Ações comparativas para a resolução das situações propostas se tornaram estratégias recorrentes.

Morais [40] apresenta a *gamification*[3] aplicada num curso profissionalizante. A experiência foi projetada e elaborada contextualizando a educação fiscal visando aproximar os alunos, no seu papel de cidadãos, do Poder Público. Mecânicas, componentes e dinâmicas de jogos foram utilizadas, provocando nas turmas estudadas um aumento da retenção de conteúdos e redução da evasão.

No que diz respeito a Educação à Distância, Anastácio [41] investigou as contribuições e elencou os maiores desafios da utilização de jogos eletrônicos. Em seu trabalho desenvolvido com uma turma de adultos em um curso de Extensão de Formação Continuada em Conselhos Escolares, a autora pôde perceber que os cursistas reafirmam a necessidade da criação e utilização de situações lúdicas para a aprendizagem. Por se tratar de um curso à distância e de formação continuada a experiência foi apontada como altamente contextualizada para o meio escolar e de suma importância para o cumprimento do curso, revisando de maneira recreativa e divertida os conteúdos.

[2] Tipo de jogo no qual os jogadores possuem papéis imaginários de personagens de um mundo fictício.

[3] Termo utilizado para caracterizar a utilização de elementos, técnicas, estratégias ou design dos jogos em atividades não lúdicas, como no contexto empresarial, por exemplo.

2.2.2 Jogos na Educação Matemática

Pesquisando por fim no repositório do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) percebe-se a relevância do assunto. O PROFMAT, segundo o site[4] do próprio programa, visa atender prioritariamente professores de Matemática em exercício na Educação Básica, especialmente de escolas públicas, que busquem aprimoramento em sua formação profissional, com ênfase no domínio aprofundado de conteúdo matemático relevante para sua docência. Tendo isso em vista é de suma importância que um mestrado de cunho profissional aborde extensivamente meios de tornar a educação matemática mais interessante e eficiente.

Pegando um recorte de 5 anos serão destacados algumas dissertações dentro do período de 2016 à 2020.

Em sua pesquisa, Moura [42] desenvolveu sequências didáticas que envolvem jogos digitais com o uso do *software* GeoGebra. A proposta de trabalho compreende a construção de dados na plataforma permeando questões probabilísticas. O autor acredita que tanto nas resoluções das atividades propostas quanto nas reflexões geradas na manipulação do aplicativo foi notável que as dinâmicas favoreceram a aprendizagem e possibilitaram aos alunos aplicar na prática os conteúdos trabalhados em sala de aula.

Uma abordagem interessante é encontrada no trabalho de Peres [43]. O autor acredita que os *softwares* educacionais dificilmente causam tanto entusiasmo pois a maioria dos alunos já nasceram na era digital, ou seja, já estão familiarizados com uma gama enorme de dispositivos tecnológicos e por isso não se interessariam por estes recursos no ambiente escolar. Neste sentido, o autor trabalha com o resgate de jogos de tabuleiro como ferramentas auxiliares no processo educacional. Foram utilizados o Mancala e o Quoridor que exploram métodos de contagem e combinações de movimentos. O autor relata que os estudantes da rede pública preferem jogos eletrônicos, enquanto que os alunos da rede particular se fascinaram com os jogos de tabuleiro. Tal situação foi creditada ao fato dos estudantes de escolas privadas terem acesso facilitado a aparelhos eletrônicos, pois possuem maior poder aquisitivo.

Rezende [44] traz uma temática bem conhecida que são os jogos de azar. Em seu trabalho, o autor aborda os conceitos de probabilidade e análise combinatória aliadas às características dos jogos de cartas, moedas, dados, loterias, par ou ímpar e até apostas

[4] Disponível em https://profmat-sbm.org.br/apresentacao/.

em jogos *online*. Através da análise das simulações e dos resultados obtidos, os alunos compreenderam a avaliação das diferentes possibilidades, sendo capazes de ponderar sobre os riscos relacionados aos jogos de apostas.

Por outro lado, Lima [45] utilizou jogos como o Xadrez e o *PlanCarter* para trabalhar o conteúdo de Análise Combinatória. Vale ressaltar que ambos possuem grande utilidade também no ensino de coordenadas cartesianas, razão na qual este último jogo foi concebido, sendo este trabalho uma atividade continuada utilizando este recurso. É interessante notar que uma ferramenta pode e deve ser utilizada em diversos conteúdos no ensino de Matemática.

A partir da apresentação de todos os trabalhos relacionados com jogos na educação, foi possível perceber alguns aspectos. Primeiramente, a utilização de jogos dos mais variados tipos possíveis: tabuleiro, cartas, RPG, eletrônicos comerciais, digitais autorais, entre outros. Além disso, a sua aplicação foi desde o Ensino Fundamental anos iniciais, até mesmo a Pós-Graduação e cursos profissionalizantes, demonstrando a abrangência dessa ferramenta dentro da educação, não só de crianças, mas também de jovens e adultos. Como pontos positivos de sua aplicação em sala de aula, foram apontados: o aumento do interesse e concentração por parte dos alunos, melhoria na compreensão do assunto trabalhado na disciplina em questão, desenvolvimento da socialização, trocas de experiências e pontos de vistas.

3 Teoria da Probabilidade

O cotidiano das pessoas está cercado de incertezas e aleatoriedades. Várias são as situações do dia a dia em que o acaso está presente. Frequentemente, escuta-se sobre a probabilidade de chover ou não em determinado local, dia e horário. Também é muito comum, dúvidas com relação aos possíveis sexos de uma ninhada de um cachorro, tendo em vista a maior valia de fêmeas. Normalmente podem surgir momentos nos quais tomadas de decisões, ocorrem em contextos de indeterminação. Tais situações podem ser simples, como escolher virar à direita ou à esquerda em um caminho desconhecido, ou até mesmo mais complexas, como selecionar a resposta numa questão de múltipla escolha com cinco alternativas, sem examiná-las, ou ainda, escolher os números de um jogo da Mega-Sena, por exemplo. O ramo da Matemática que formaliza e analisa esses eventos aleatórios é conhecido como Teoria da Probabilidade (TP).

Na TP são examinadas, discutidas e estudadas situações que envolvem a incerteza, com intuito de modelar estes tipos de eventos. Um exemplo seriam os jogos de azar que se utilizam de cartas e/ou dados. Segundo o famoso matemático e astrônomo francês Laplace (Laplace[46], 1902 apud Ross[47], 2010), "a teoria da probabilidade é no fundo somente o senso comum reduzido ao cálculo. (...) É extraordinário que esta ciência, que surgiu da análise dos jogos de azar, tenha se tornado, o mais importante objeto do conhecimento humano."

A Teoria da Probabilidade consiste em

> reduzir todos os eventos do mesmo tipo a um certo número de casos igualmente possíveis, isto é, aqueles sobre os quais podemos estar igualmente indecisos quanto à sua existência e em determinar o número de casos favoráveis ao evento cuja probabilidade é buscada. A razão desse número para o de todos os casos possíveis é a medida dessa probabilidade, que é simplesmente uma fração, cujo numerador é o número de casos favoráveis e o denominador é o número de todos os casos possíveis. [46, p.6-7][1].

[1] Tradução obtida em https://translate.google.com.br/.

A seguir, serão apresentados os seguintes aspectos da Teoria da Probabilidade, objeto matemático a ser estudado neste trabalho: um breve histórico sobre o surgimento da TP; seus principais elementos, conceitos e propriedades; além de alguns exemplos matemáticos formais e do cotidiano, que servirão de base para a interpretação e resolução do Problema de Monty Hall.

3.1 Breve Histórico

A história da Matemática vem sendo cada vez mais estudada e explorada. Contudo, com relação ao campo da Teoria da Probabilidade, os trabalhos desenvolvidos não se comparam aos realizados em outras áreas, segundo Viali [48]. De acordo com o autor, são dois os fatores complicadores para se traçar uma perspectiva do desenvolvimento e evolução da Probabilidade: a escassez de materiais encontrados acerca da temática e o fato de que, quando existem, atrelam a Probabilidade junto à Estatística. Assim sendo, será apresentado o cenário da evolução do cálculo de probabilidades até o estabelecimento da TP propriamente dita.

O surgimento da TP, como qualquer outra teoria, não ocorreu por acidente. Para Viali [48], o seu desenvolvimento está associado ao esforço contínuo de se eliminar o acaso como justificativa da origem de tudo o que acontece. A origem da Teoria da Probabilidade não é exatamente precisa, mas como ciência empírica surgiu há muito tempo, como apresentada a seguir.

Conceitos rudimentares de probabilidade, acaso e aleatoriedade apareceram desde a Antiguidade perpassando a Idade Média, de acordo com Hald [49]. Tais conceitos estavam relacionados com "jogos de azar, sortilégio, leitura da sorte, filosofia, leis, seguros, inspeção de amostragem e erros de previsão em várias ciências, como por exemplo, astronomia e medicina" ([49, p.29], tradução nossa).

Corroborando, Vialli [48] acredita que as primeiras aplicações probabilísticas tiveram origem nas tentativas de se quantificar as possibilidades de se vencer em jogos de azar e de se calcular os riscos referentes a acidentes, mortes, entre outros sinistros. O termo "azar" neste caso, se remete a "acaso" e não a "má sorte", como usualmente é utilizado.

Como sugerido por Hald [49] e Viali [48], o aparecimento das primeiras manifestações probabilísticas aconteceram por meio dos jogos de um tipo de dado. Conhecido como Tali, o jogo do osso era praticado desde a Antiguidade com astrágalos, um precursor do dado atual, vide Figura 3.1. O astrágalo era formado por um osso animal, possivelmente de carneiro que era similar a um tetraedro de faces não regulares. Devido a irregularidade das faces, ou seja, não eram idênticas, as frequências de ocorrência de cada uma delas era diferente. As faces recebiam numerações de tal modo que as duas menores recebiam os números 1 e 6, e as duas maiores eram numeradas com 3 e 4. Além de apostas, o Tali era usado em previsões, decisões de disputas e divisão de heranças.

Figura 3.1: Astragálos de origem animal, usados como dados primitivos

Fonte: https://brasildelonge.com/tag/astragalo/

Outra prática, apontada por Hald [49] e Viali [48], que utilizava princípios da probabilidade eram os seguros, iniciados provavelmente pelos fenícios e mesopotâmios. Seguido por gregos e romanos, a prática de comércio segurado chegou ao mundo moderno. Os autores especulam que as antigas seguradoras utilizavam técnicas empíricas para estimar possibilidades de naufrágios, acidentes e roubos. Após a Idade Média, com o crescimento dos centros urbanos, foi popularizado os seguros de vida. Em torno deste modelo de negócio, surgiram os primeiros estudos matemáticos.

Segundo Silva [50], não existe prova da criação de modelos matemáticos e nem da formalização dos conceitos de probabilidade, até por volta do fim do século XV e início do século XVI. Alguns estudiosos italianos se destacaram nos cálculos probabilísticos, indo além da mera enumeração e comparação de possibilidades na resolução de problemas. Em seguida, os franceses trouxeram grande contribuição difundindo e formalizando as descobertas até chegar aos estudiosos contemporâneos de maneira global. Os principais estudiosos e suas contribuições fundamentais no surgimento e desenvolvimento da TP estão listados a seguir, segundo referências em Hald [49], Viali [48], Paulo [51] e Silva [50].

- **Luca Pacioli (1455-1517)**: Resumiu toda a Matemática conhecida até a época em sua obra *Summa*, incorporando o trabalho *Liber Abaci* de Fibonacci. Propôs uma solução para o problema da divisão de apostas, conhecido como Problema dos Pontos[2], porém incorreta.

- **Niccolo Fontana (1500-1557)**: Tartaglia como era mais conhecido, aparece associado ao "Triângulo de Pascal" e seu trabalho mais famoso, *General Trattato*, discutia amplamente operações numéricas e unidades de medida. Também chegou à uma solução para o Problema dos Pontos, argumentando que a divisão deveria ser 5 : 3, dando um enfoque de proporcionalidade à questão, que também não é correta.

- **Girolamo Cardano (1501-1576)**: Estudou as probabilidades associadas ao lançamento de 2 dados, concluindo que a distribuição de probabilidades é obtida através dos 36 pares ordenados e, não exclusivamente, dos 21 pares não-ordenados. Seus principais projetos foram os livros *Liber de Ludo Aleae*, um manual de jogos de azar, e *Ars Magna*, no qual apresentava métodos de resoluções de equações de terceiro e quarto graus.

- **Galileo Galilei (1564-1642)**: Autor de outro manual sobre jogos, *Sopra le Scoperta dei Dadi*, que analisa entre outros assuntos, o lançamento de 3 dados e explica o fato de que a probabilidade da soma ser 9 é menor que a soma ser 10, sendo que ambas apresentam 6 combinações de trios não ordenados.

- **Pierre de Fermat (1601-1665)**: Contribuiu significativamente com a Geometria reconstruindo as principais ideias da obra de Apolônio. Atribui-se a ele o estabelecimento da Geometria Analítica. Além disso, suas correspondências com inúmeros matemáticos importantes da Europa do século XVII, tais como Torricelli, Huygens e, principalmente, Pascal, estabeleceram os alicerces da Teoria da Probabilidade Moderna.

- **Blaise Pascal (1623-1662)**: Desenvolveu uma solução distinta para o Problema dos Pontos e a publicou na *De Alea Geometria*, "Geometria do Acaso". Para isso, utilizou os resultados da correspondência que mantinha com Fermat, baseando-se no

[2]Dois jogadores disputavam um prêmio que seria dado a quem primeiro fizesse 6 pontos no jogo da balla. Quando o primeiro jogador tinha 5 pontos e o segundo tinha 3 pontos, foi preciso interromper o jogo. Como dividir o prêmio?

"Triângulo de Pascal", que hoje recebe o seu nome, apesar de não tenha sido por ele descoberto.

- **Christiaan Huygens (1629-1695)**: Escreveu a primeira obra impressa sobre o cálculo de probabilidades, *De Ratiocinis in Ludo Alea*, motivado pela correspondência com Fermat e Pascal. O livro aborda resoluções do problema dos pontos, apresenta uma coleção de problemas de dados e retiradas de bolas de uma urna. Baseado em dados estatísticos, desenvolveu a curva de mortalidade, definindo as noções de expectativa de vida e probabilidade de sobrevida, fundamentais para as Ciências Atuariais.

- **Jakob Bernoulli (1654-1705)**: Iniciou o processo de sistematização da TP, dissociando-a dos jogos de azar e seguros apenas, associando sua aplicação ao Direito por exemplo. Após sua morte, teve sua obra *Ars Conjectandi* publicada iniciando a visão probabilística frequentista e enunciando a "Lei dos Grandes Números", conhecida hoje como Teorema de Bernoulli, um dos pilares da TP.

- **Abraham de Moivre (1667-1754)**: Publicou a obra *The Doctrine of Chance* que apresentava muitos problemas com dados e outros jogos, e a definição de "independência". Investigou ainda taxas de mortalidade e os fundamentos da Teoria das anuidades.

- **Thomas Bayes (1701-1761)**: Em seu trabalho *Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances*, apresentou um caso especial de probabilidade na qual uma nova evidência altera a probabilidade de ocorrência de um evento. O Teorema de Bayes é atualmente muito utilizado no cálculo de probabilidades condicionais.

- **Pierre Laplace (1749-1827)**: Em suas obras, discutia sobre os conceitos e princípios da TP e suas aplicações nos jogos, na filosofia, nas ciências, nas decisões judiciais e na mortalidade. Foi a partir do trabalho de Laplace que os estudos na área aumentaram e despertaram o interesse dos mais relevantes matemáticos contemporâneos, tais como Friedrich Gauss (1777-1855), Andreyevich Markov (1856-1922), entre outros.

- **Andrei Kolmogorov (1903-1987)**: Formulou e apresentou de modo axiomático a primeira Teoria da Probabilidade fundamentada na Teoria dos Conjuntos.

3.2 Conceituação

A formalização e a formatação utilizadas para se estudar fenômenos aleatórios, variam dependendo da complexidade dos eventos estudados. Diferentes autores se utilizam de variadas notações e conceitos, porém todos modelos apresentam elementos básicos comuns. Serão apresentadas a seguir alguns destes elementos, suas definições, propriedades e exemplos. Tais conceitos foram baseados, principalmente, nos trabalhos de Albuquerque *et al.* [52], Dante e Viana [53], Morgado *et al.* [54] e Ross [47].

A palavra probabilidade é derivada do latim *probabilitas* que significa qualidade do que se pode comprovar; de *probabilis* que quer dizer o que pode passar por um teste, provável; e de *probare* que remete a ideia de provar, testar, examinar. O dicionário Michaelis [27] define probabilidade como "perspectiva positiva de que alguma coisa aconteça ou seja factível; chance, possibilidade". De maneira usual, a palavra provável é utilizada para eventos indefinidos, sendo muitas das vezes associada às palavras "sorte", "azar", "dúvida", "arriscado".

A Teoria da Probabilidade é definida por Lima e Magalhães [55] como sendo um ramo da Matemática que modela e estuda fenômenos e experimentos aleatórios, aqueles nos quais o acaso é o fator decisivo.

Inicialmente então, se faz necessário a compreensão do termo "acaso". Viali [48] o caracteriza como sendo um conjunto de fatores indeterminados e incontroláveis que influenciam na ocorrência de diferentes resultados em uma determinada experiência ou acontecimento. Por exemplo, no lançamento de uma moeda sabe-se que os possíveis resultados são "cara" ou "coroa". Contudo, antes do lançamento não é possível determinar com exatidão qual dos resultados ocorrerá devido justamente ao acaso. O conceito de acaso é relativamente tão antigo quanto às primeiras civilizações, porém sua assimilação e entendimento como sendo um fenômeno natural é recente. Anteriormente o acaso era compreendido como uma obra sobrenatural, fruto de uma intervenção divina. Ainda hoje, a aleatoriedade de alguns fenômenos é atribuída a crenças religiosas ou particulares do indivíduo, e não são aceitas naturalmente.

Dessa maneira, um experimento ou fenômeno pode ser caracterizado como:

- **Determinístico:** quando produz resultados iguais, se repetido em condições particularmente similares.

- **Aleatório:** quando produz resultados distintos, se repetido em condições particularmente similares.

Por exemplo, sabe-se que a água, sob condições normais de pressão, quando aquecida até 100°C, entra em ebulição. Tal evento é um fenômeno determinístico. Já nos casos a seguir, os experimentos são aleatórios, como no lançamento de um dado, no resultado de um jogo de bingo ou no sorteio dos números da loteria.

Na sequência serão definidos alguns elementos importantes relativos a experimentos aleatórios.

3.2.1 Espaço Amostral e Eventos

Considerando um experimento aleatório qualquer, embora o seu resultado não seja conhecido previamente, suponha que todas as possibilidades de resultados sejam possíveis de se determinar. Este conjunto de todos os resultados possíveis de um determinado experimento aleatório é chamado de espaço amostral e será representado pela letra S, sendo que em algumas bibliografias é utilizada a letra grega Ω . Qualquer um dos subconjuntos do espaço amostral é chamado de evento, e normalmente é simbolizado por uma letra maiúscula que represente o evento em questão.

Exemplo 3.2.1: Possibilidades de respostas para uma questão do ENEM, antes de resolvê-la.

Neste exemplo, o conjunto de possibilidades de resposta para uma questão do ENEM é dado por $S = \{A, B, C, D, E\}$, no qual as letras representam as cinco opções de respostas possíveis. Já o evento $R = \{B\}$, corresponde a situação em que o candidato respondeu optando pela alternativa B.

Exemplo 3.2.2: Possíveis números mostrados na face superior de um dado cúbico.

O espaço amostral neste caso é representado por $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, no qual os números se referem a qual face do dado voltada para cima, pode ser observada. Portanto, se $P = \{2, 4, 6\}$ e $I = \{1, 3, 5\}$, então P é o evento em que a face voltada para cima apresenta um número par e I é o evento em que a face voltada para cima exibe um número ímpar.

Exemplo 3.2.3: Expectativas de resultados no lançamento de duas moedas.

Os resultados esperados ao se lançar duas moedas, são expressos pelo par ordenado

(M_1, M_2), no qual M_1 representa a primeira moeda e M_2 a segunda. Assim sendo, todas as possibilidades são

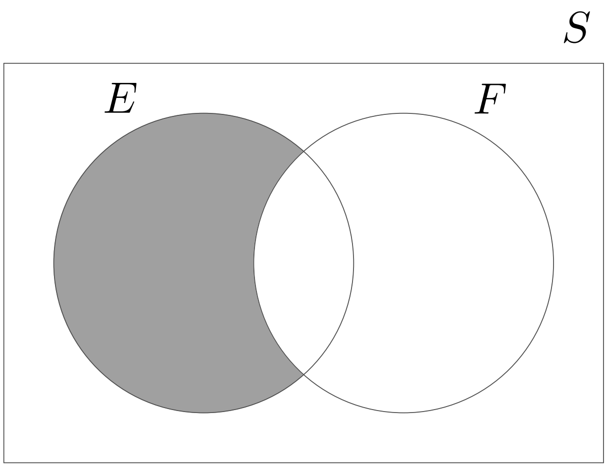
$$S = \{(C, C), (C, K), (K, C), (K, K)\},$$

com C significando que a face da moeda voltada para cima é "coroa", e K que a face mostrada é "cara". Desse modo, se $A = \{(C, C)\}$, então A é o evento em que ambas moedas exibem a face coroa, e $B = \{(C, K), (K, C), (C, C)\}$, representa a situação em que pelo menos uma coroa aparece.

3.2.2 Diagrama de Venn

Para ilustrar as relações lógicas entre dois ou mais eventos, é muito utilizado o chamado Diagrama de Venn como representação gráfica. Todos os resultados delimitados no interior dos respectivos círculos correspondem aos eventos (E, F, G, ...), enquanto que o espaço amostral S é representado por um retângulo que contém todos os círculos em seu interior. Eventos específicos podem ser evidenciados ao se destacar determinadas regiões do diagrama. A Figura 3.2 ilustra na região sombreada os resultados que pertencem ao evento E mas não ao F.

Figura 3.2: Exemplo de Diagrama de Venn



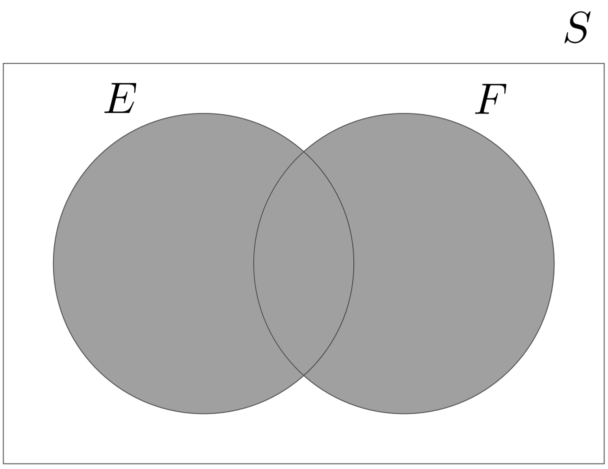
Fonte: Autoria própria

3.2.3 Relações entre Eventos

União e Interseção de Eventos

Sejam dois eventos quaisquer E e F de um espaço amostral S. Define-se o evento $E \cup F$ como sendo a união dos eventos E e F, ou seja, todos os resultados que pertencem ao E ou F. Isto é, o evento $E \cup F$ ocorre se, e somente se, pelo menos um dos dois eventos, E ou F, ocorrem. Observe que na Figura 3.3 está destacada toda a região pertencente ao E ou ao F.

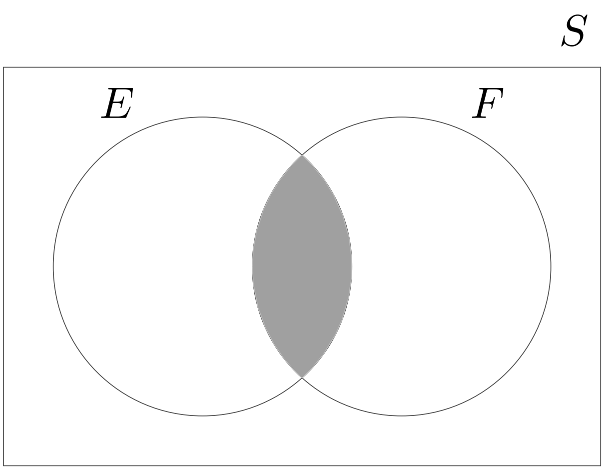
Figura 3.3: $E \cup F$



Fonte: Autoria própria

De maneira semelhante, fica estabelecido que o evento $E \cap F$, denominado de interseção de E e F, é o conjunto formado por todos os resultados que estão em E e em F, simultaneamente. Isto é, $E \cap F$ ocorre apenas se E e F ocorrem. Note que na Figura 3.4 está evidenciada a área que pertence, ao mesmo tempo, a ambos os eventos.

Figura 3.4: $E \cap F$



Fonte: Autoria própria

No Exemplo 3.2.3, vide Figura 3.7, se $A = \{(C, C)\}$ e $B = \{(C, K), (K, C), (C, C)\}$, então

- $A \cup B = \{(C, C), (C, K), (K, C)\}$, o que corresponde ao próprio evento B.

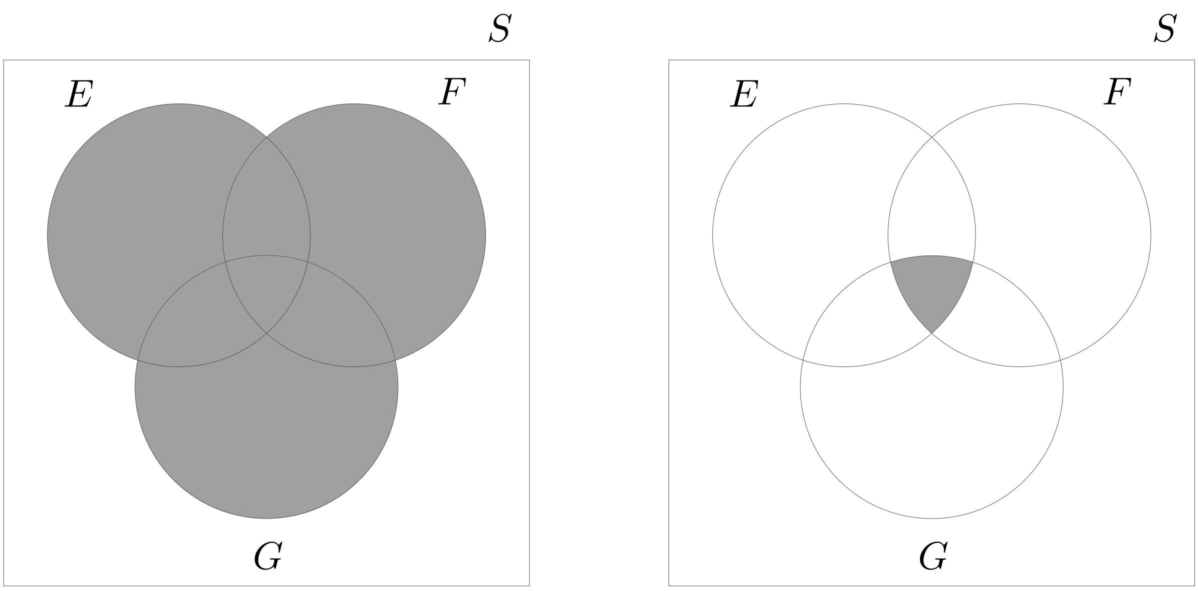
- $A \cap B = \{(C, C)\}$, o que representa o próprio evento A.

No Exemplo 3.2.2, temos que o evento $P \cap I$ não contém nenhum resultado, uma vez que o número obtido no lançamento de um dado é par ou ímpar. Portanto, tal evento não pode ocorrer, sendo nomeado evento vazio e representado pelo símbolo $\varnothing$. Como $P \cap I = \varnothing$, os eventos P e I são denominados mutuamente exclusivos ou disjuntos. De maneira similar, pelo fato de $P \cup I = S$, os eventos P e I são definidos também como coletivamente exaustivos.

Analogamente, a união e a interseção de mais de dois eventos também podem ser definidas. Sejam os eventos $E_1, E_2, \ldots, E_i$, com $i = (1, 2, \ldots, n)$, a união de n eventos, representada por $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, é o evento formado por todos os resultados que apareçam nos n eventos, vide Figura 3.5 (a), para o caso $n = 3$. De maneira semelhante, define-se a interseção dos eventos E_n, como sendo o evento composto pelos resultados que apareçam simultaneamente em todos os eventos E_n, $n = (1, 2, \ldots)$, sendo representada por $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$, retratada na Figura 3.5 (b), para o caso $n = 3$.

Figura 3.5: União e Interseção entre três eventos

(a) $E \cup F \cup G$ (b) $E \cap F \cap G$



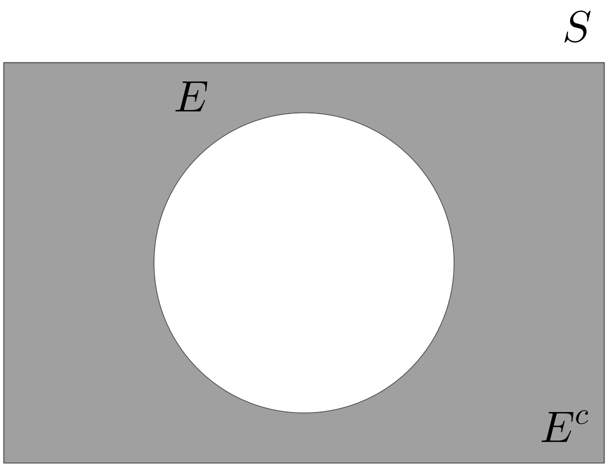
Fonte: Autoria própria

Complemento de um Evento

O complemento de um evento é definido para todo evento E, denotado por E^c. O complemento de E é o conjunto formado por todos os resultados do espaço amostral não contidos em E. Logo, E^c ocorre se, e somente se, E não ocorrer. Verifique que na Figura

3.6 está sombreada todo o espaço amostral, excetuando o evento E.

Figura 3.6: E^c representado por toda área em cinza



Fonte: Autoria própria

No Exemplo 3.2.1, o complementar de R é representado por $R^c = \{A, C, D, E\}$, ou seja, na avaliação do estudante, R^c apresenta as alternativas que ele julga estarem erradas. Já no Exemplo 3.2.2, temos que $P^c = \{1, 3, 5\} = I$ e $I^c = \{2, 4, 6\} = P$. Note que $P \cup I = S$, então $(P \cup I)^c = S^c = \varnothing$.

Relação de Inclusão

Sejam quaisquer dois eventos E e F, se todos os possíveis resultados presentes em E, estiverem também em F, é dito que E é um subconjunto de F. Desta maneira, tem-se que E está contido em F, representado por $E \subset F$. De modo equivalente, F contém E, sendo simbolizado por $F \supset E$. Se $E \subset F$ e $F \subset E$, então E e F são iguais. Examinando a Figura 3.7, observa-se que qualquer resultado que pertença ao evento E, necessariamente pertence também ao evento F.

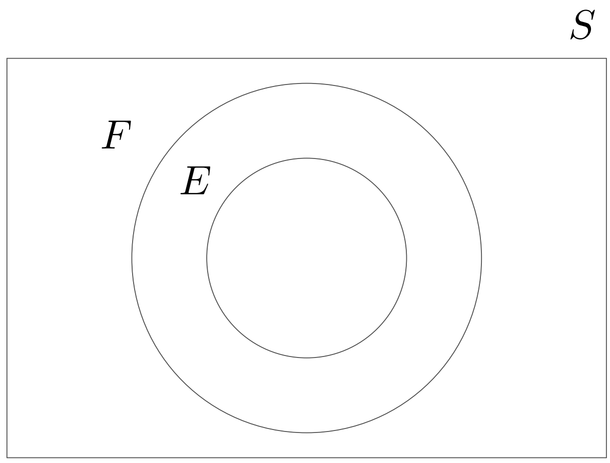
Retomando o Exemplo 3.2.3, se $A = \{(C, C)\}$ e $B = \{(C, K), (K, C), (C, C)\}$, então $A \subset B$, ou ainda, $B \supset A$.

Algumas Propriedades

Temos que as operações de união, interseção e complementos de eventos, obedecem a determinadas propriedades de modo semelhante à álgebra.

- Comutatividade: $E \cup F = F \cup E$ e $E \cap F = F \cap E$.
- Associatividade: $(E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G)$ e $(E \cap F) \cap G = E \cap (F \cap G)$.
- Distributividade: $(E \cup F) \cap G = (E \cap G) \cup (F \cap G)$ e $(E \cap F) \cup G = (E \cup G) \cap (F \cup G)$.

Figura 3.7: $E \subset F$



Fonte: Autoria própria

Para se verificar a veracidade de tais relações é necessário mostrar que o resultado contido no evento no membro do lado esquerdo da igualdade é equivalente ao que consta no membro do lado direito. Uma maneira informal de se verificar tais propriedades é por meio do diagrama de Venn. A distributividade é verificada na Figura 3.8, por exemplo.

3.2.4 Axiomas da Probabilidade

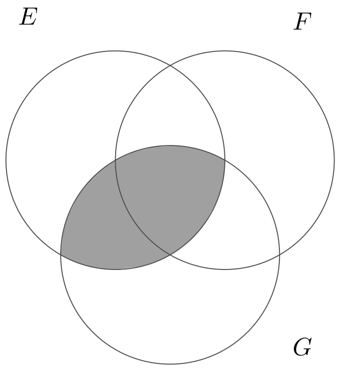
A probabilidade de um evento ocorrer pode ser definida em função da sua frequência relativa em uma repetição sucessiva de experimentos aleatórios. Suponha um experimento aleatório, para todo evento E do espaço amostral S, tem-se que $n(E)$ representa o número de vezes que E acontece nas n primeiras repetições do experimento. Logo, a probabilidade de ocorrência de E, é definida como:

$$P(E) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(E)}{n}$$

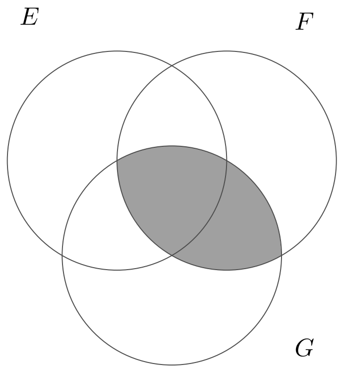
ou seja, $P(E)$ é definida como sendo a proporção de tempo em que E ocorre, também denominada de frequência limite de E. A definição de probabilidade através da frequência relativa se baseia na suposição que $\frac{n(E)}{n}$ converge para um limite constante, ou seja é um axioma do sistema. Porém, supor necessariamente que $\frac{n(E)}{n}$ converge para um valor constante, não é uma tarefa simples. Embora realmente espera-se que a frequência limite aconteça, antes se faz necessário supor um conjunto de axiomas mais simples e autoevidentes para se provar então a existência de tal frequência limite constante. Será apresentada a abordagem axiomática moderna da Probabilidade proposta por Kolmogorov,

Figura 3.8: $(\mathrm{E} \cap G) \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap G$

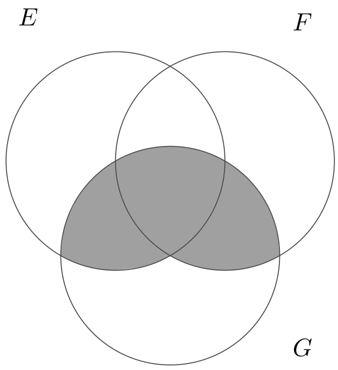
(a) Região sombreada: $\mathrm{E} \cap G$



(b) Região sombreada: $\mathrm{F} \cap G$



(c) Região sombreada: $(\mathrm{E} \cup F) \cap G$



Fonte: Autoria própria

adotada por Ross [47]. Em particular assume-se que para todo evento E no espaço amostral S, exite um valor $P(E)$, denominado probabilidade do evento E. Suponha que todas as probabilidades satisfaçam um conjunto de axiomas, intuitivos de probabilidade:

Axioma 3.1:

$$0 \leq P(E) \leq 1.$$

Axioma 3.2:

$$P(S) = 1.$$

Axioma 3.3: Sejam os eventos $E_1, E_2, \ldots,$ para cada sequência de eventos mutuamente exclusivos, os quais $E_i \cap E_j = \varnothing$ quando $i \neq j$, então

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i).$$

O Axioma 3.1 estabelece que a probabilidade de ocorrência do evento E é igual a algum número compreendido entre 0 e 1. Já o Axioma 3.2 afirma que, se um evento é igual ao espaço amostral, sua probabilidade de ocorrência é igual 1, logo o evento é dito como evento certo. Por fim, o Axioma 3.3 determina que em qualquer sequência de eventos mutuamente exclusivos, a probabilidade de ocorrência da união entre eles é exatamente a soma de suas respectivas probabilidades.

Considerando ainda a sequência de eventos $E_1, E_2, \ldots$, na qual $E_1 = S$ e $E_i = \varnothing$ para $i > 1$, como os eventos são mutuamente exclusivos e $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, pelo Axioma 3.3

$$P(S) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i) = P(S) + \sum_{i=2}^{\infty} P(\varnothing)$$

implicando em

$$P(\varnothing) = 0.$$

O evento vazio tem então probabilidade nula. Daí, para qualquer sequência de eventos mutuamente exclusivos $E_1, E_2, \ldots, E_n$,

$$P\left(\bigcup_{1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i). \tag{3.1}$$

A Equação 3.1 pode ser obtida do Axioma 3.3 juntamente com a definição de E_i como evento vazio para os valores $i > n$. Quando o espaço amostral é um número finito temos então que o Axioma 3.3 é equivalente à Equação 3.1.

Exemplo 3.2.4: Considere uma atividade escolar do tipo verdadeiro ou falso, ou seja, em cada sentença o aluno deve indicar com a letra V, se ela for verdadeira e com F, se ela for falsa. Por razões claras a proposição não pode ser ao mesmo tempo verdadeira e falsa, logo os eventos V e F são mutuamente exclusivos. A princípio, podemos supor que a probabilidade da sentença ser verdadeira, antes do aluno a examinar, é igual a probabilidade dela ser falsa, logo temos que

$$P(V) = P(F) = \frac{1}{2}.$$

Analisando agora uma questão de múltipla escolha com 5 alternativas. O enunciado instrui o estudante a assinalar a opção incorreta, dentre cinco afirmações. Escolhendo-se aleatoriamente uma das alternativas, a probabilidade de que ela seja incorreta é $P(I) = \dfrac{1}{5}$, enquanto que a de ser correta é $P(C) = \frac{4}{5}$. Assim sendo, a chance de acerto é de $\frac{1}{5} = 20\%$, lembrando, a escolha feita ao acaso.

Exemplo 3.2.5: Seja o experimento analisado, a retirada de uma carta qualquer de um baralho de 52 cartas, sem revelá-la. As possíveis cartas são: 2,3,4,5,6,7,8,9,10,J,Q,K,A, dos 4 naipes distintos (copas, ouros, espadas e paus), sendo os dois primeiros vermelhos e os outros dois, pretos. A probabilidade dela ser da cor vermelha é $P(V) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$, que é igual a de ser da cor preta $P(P) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$. Já a probabilidade de ser uma letra é dada por $P(L) = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$, ao passo que a de ser um número é $P(N) = \frac{36}{52} = \frac{9}{13}$.

Observe que as probabilidades encontradas nos Exemplos 3.2.4 e 3.2.5, vão de encontro aos Axiomas 3.1, 3.2 e 3.3:

Exemplo 3.2.4:

$$P(V \cup F) = P(V) + P(F) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 = P(S).$$

$$P(C \cup I) = P(C) + P(I) = \frac{4}{5} + \frac{1}{5} = 1 = P(S).$$

Exemplo 3.2.5:

$$P(V \cup P) = P(V) + P(P) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 = P(S).$$

$$P(L \cup N) = P(L) + P(N) = \frac{16}{52} + \frac{36}{52} = 1 = P(S).$$

A abordagem matemática moderna da Teoria da Probabilidade é baseada na suposição da existência de uma função conjunto P, definida para os eventos de um espaço amostral S, satisfazendo os Axiomas 3.1, 3.2 e 3.3. Os axiomas são naturais e estão de acordo com o conceito intuitivo de probabilidade, relacionado ao acaso e à aleatoriedade. Considera-se P definida para todos os eventos de S, mas na realidade quando o espaço amostral é infinito, P define apenas uma classe de eventos ditos mensuráveis. Serão apresentadas algumas proposições simples envolvendo os conceitos previamente estabelecidos.

Proposição 3.4:

$$P(E^c) = 1 - P(E).$$

Demonstração: Primeiramente, note que, como E e E^c são mutuamente exclusivos e como $E \cup E^c = S$, pelos Axiomas 3.2 e 3.3,

$$1 = P(S) = P(E \cup E^c) = P(E) + P(E^c)$$

o que é equivalente à Proposição 3.4. Traduzindo em palavras, significa que a probabilidade de que um evento não ocorra é igual ao total de possibilidades menos a probabilidade que ele ocorra. Por exemplo, no lançamento de um dado de seis faces, a probabilidade de sair um número menor que 3, isto é 1 ou 2, é dada por $P(m) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Portanto, a probabilidade de sair um número maior ou igual a 3 é $P(M) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Proposição 3.5:

$$\text{Se } E \subset F, \text{ então } P(E) \leq P(F).$$

Demonstração: Observe que F pode ser expresso da seguinte forma (retorne na Figura 3.7 para melhor visualizar, caso necessário):

$$F = E \cup (E^c \cap F). \tag{3.2}$$

Como E e $E^c \cap F$ são mutuamente exclusivos, pelo Axioma 3.3,

$$P(F) = P(E) + P(E^c \cap F).$$

Portanto, fica provado o resultado, uma vez que $P(E^c \cap F) \geq 0$ devido a $E \subset F$. Tal proposição pode ser ilustrada por exemplo, pelo fato da probabilidade de sair uma carta de ouros no baralho ser menor do que a de sair uma carta vermelha.

Proposição 3.6:

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F).$$

Demonstração: Inicialmente, note que $E \cup F$ pode ser reescrito ao se substituir F, como na Equação 3.2, por

$$P(E \cup F) = P[E \cup (E^c \cap F)] = P(E) + P(E^c \cap F),$$

logo

$$P(E^c \cap F) = P(E \cup F) - P(E). \tag{3.3}$$

Ademais, sendo $F = (E \cap F) \cup (E^c \cap F)$, novamente invocando o Axioma 3.3,

$$P(F) = P(E \cap F) + P(E^c \cap F)$$

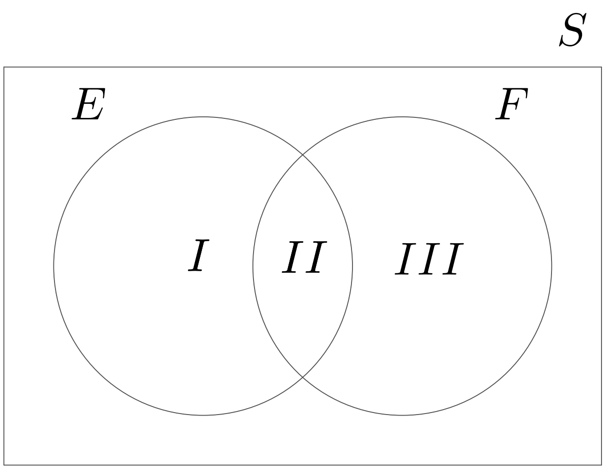
ou sua equivalência,

$$P(E^c \cap F) = P(F) - P(E \cap F). \tag{3.4}$$

Comparando as Equações 3.3 e 3.4, o resultado segue.

Outra maneira de se verificar informalmente a Proposição 3.6 seria por meio do diagrama da Figura 3.9, no qual $E \cup F$ foi divido em três áreas mutuamente exclusivas. Assim sendo, os resultados ficaram assim divididos: a área I simboliza aqueles que estão em E, porém não estão em F, ou seja, $E \cap F^c$; a área II retrata os que estão ao mesmo tempo em E e em F, ou melhor, $E \cap F$; e por fim, a área III representa os quais estão em F e que não pertencem a E, isto é, $E^c \cap F$. Pela Figura 3.9, observa-se

Figura 3.9: Diagrama de Venn subdividido em áreas



Fonte: Autoria própria

$$E \cup F = I \cup II \cup III,$$

$$E = I \cup II,$$

$$F = II \cup III.$$

Sendo I, II e III, áreas mutuamente exclusivas, pelo Axioma 3.3,

$$P(E \cup F) = P(I) + P(II) + P(III)$$

$$P(E) = P(I) + P(II)$$

$$P(F) = P(II) + P(III),$$

portanto

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(II).$$

Substituindo $P(II) = P(E \cap F)$, verifica-se a Proposição 3.6.

Exemplo 3.2.6: A probabilidade de se escolher aleatoriamente um aluno, durante a aula de Educação Física, que goste de futebol é de $\frac{4}{5}$, enquanto que a chance de gostar de vôlei é de $\frac{1}{2}$. Sabendo que a chance de se escolher alguém que goste das duas modalidades é de 40%, qual a probabilidade de que o aluno escolhido não goste de nenhum dos dois esportes?

Solução: Sejam F e V, os eventos no qual o aluno gosta de futebol e vôlei, respectivamente. A probabilidade deste aluno gostar de pelo menos uma das modalidades é dada, segundo a Proposição 3.6, por

$$P(F \cup V) = P(F) + P(V) - P(F \cap V) = \frac{4}{5} + \frac{1}{2} - \frac{40}{100} = 0,8 + 0,5 - 0,4 = 0,9.$$

Como o evento em que o aluno escolhido gosta de pelo menos um dos dois esportes é complementar à ele não gostar de nenhum dos dois, pela Proposição 3.4 obtém-se

$$P(F^c \cap V^c) = P[(F \cup V)^c] = 1 - P(F \cup V) = 1 - 0,9 = 0,1.$$

3.2.5 Espaços Amostrais com Resultados Equiprováveis

Em vários experimentos, naturalmente se espera que todos os resultados possíveis de acontecer sejam equiprováveis, isto é, tenham a mesma possibilidade de ocorrerem. Seja um evento cujo espaço amostral S é formado por um conjunto finito de elementos, por exemplo, $S = \{1, 2, \ldots, N\}$. Assim sendo, é natural supor que

$$P(1) = P(2) = \cdots = P(N). \tag{3.5}$$

Pelo Axioma 3.3, tem-se

$$P(1) + P(2) + \cdots + P(N) = P(S). \tag{3.6}$$

Substituindo o Axioma 3.2 e a Equação 3.5, em 3.6, segue que

$$P(N) + P(N) + \cdots + P(N) = 1$$

$$N.P(N) = 1$$

$$P(N) = \frac{1}{N}.$$

Assim sendo, para cada evento E

$$P(E) = \frac{\text{número de resultados em } E}{\text{número de resultados em } S}.$$

Isto significa que, supondo que todos os resultados de um experimento sejam equiprováveis, então a probabilidade de qualquer evento E é igual a razão entre os resultados de S contidos em E, pelo total de resultados de S.

Exemplo 3.2.7: Numa sala com 30 alunos, qual a probabilidade do professor chamar aleatoriamente um aluno específico para responder uma pergunta?

Solução: Como o professor irá escolher ao acaso qualquer um dentre os trinta estudantes possíveis, todos possuem a mesma chance de serem chamados. Portanto, a probabilidade é de $\frac{1}{30}$.

Exemplo 3.2.8: Nesta mesma turma existem 3 alunos com o nome de Pedro. Qual a probabilidade do aluno escolhido se chamar Pedro?

Solução: No Exemplo 3.2.7, foi encontrado que a probabilidade de cada um dos alunos ser chamado é de $\frac{1}{30}$. Assim sendo, a chance de um aluno com nome Pedro ser o escolhido é dado por $\frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{30} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10} = 10\%$.

3.2.6 Eventos Independentes

Outro conceito de suma importância para a TP é da independência entre eventos. Dois eventos E e F são ditos independentes se

$$P(E \cap F) = P(E).P(F). \tag{3.7}$$

Exemplo 3.2.9: No lançamento de duas moedas os 4 resultados possíveis, {(C,C), (C,K), (K,C), (K,K)}, são equiprováveis. Seja P o evento em que a primeira moeda saiu "cara" e S o evento em que a segunda moeda saiu "coroa", os eventos P e S são independentes?

Solução: Observe que $P = \{(K, C), (K, K)\}$, $S = \{(K, C), (C, C)\}$ e $P \cap S = \{(K, C)\}$. Assim sendo,

$$P(P) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},\ P(S) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ e } P(P \cap S) = \frac{1}{4}.$$

Para que P e S sejam independentes, pela Equação 3.7,

$$P(P \cap S) = P(P).P(S).$$

Substituindo os valores, tem-se que

$$P(P \cap S) = P(P).P(S) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Portanto, os eventos P e S são independentes.

3.2.7 Probabilidade Condicional

Um dos conceitos mais importantes da TP é a chamada Probabilidade Condicional. Sejam E e F dois eventos, temos que $P(F|E)$ representa a probabilidade de que F ocorra com a condição de que E tenha ocorrido. Nessa situação, E torna-se o novo ou reduzido, espaço amostral. Uma fórmula geral para $P(F|E)$ pode ser definida da seguinte maneira

$$P(F|E) = \frac{P(F \cap E)}{P(E)}. \tag{3.8}$$

Note que $P(F|E)$ só esta definida quando $P(E)>0$. A Equação 3.8 pode ser reescrita também como

$$P(F \cap E) = P(E).P(F|E). \tag{3.9}$$

Proposição 3.7: Seja E tal que $P(E)>0$. Então

a) $P(\varnothing|E) = 0$.

b) $P(S|E) = 1$.

c) $0 \leq P(F|E) \leq 1$.

Demonstração:

a) $P(\varnothing|E) = \dfrac{P(\varnothing \cap E)}{P(E)} = \dfrac{P(\varnothing)}{P(E)} = \dfrac{0}{P(E)} = 0$.

b) $P(S|E) = \dfrac{P(S \cap E)}{P(E)} = \dfrac{P(E)}{P(E)} = 1$.

c) Como $0 \leq P(E \cap F) \leq P(E)$, dividindo todos os termos por $P(E)$, tem-se que

$$\frac{0}{P(E)} \leq \frac{P(E \cap F)}{P(E)} \leq \frac{P(E)}{P(E)}$$

$$0 \leq \frac{P(E \cap F)}{P(E)} \leq 1. \tag{3.10}$$

Substituindo a Equação 3.8 em 3.10, completa-se a demonstração de

$$0 \leq P(F|E) \leq 1.$$

3.2.8 Teorema da Probabilidade Total

Um importante resultado, conhecido como Teorema da Probabilidade Total, será apresentado para facilitar a compreensão do Teorema de Bayes que virá na sequência. Primeiramente, será introduzido o conceito de partição do espaço amostral S.

Um conjunto de eventos $\{F_i\}$, com $i = 1, \ldots, m$; representa uma partição do espaço amostral S se

$$F_i \cap F_j = \varnothing, \forall i, j = 1, \ldots, m \ (i \neq j)$$

e

$$\bigcup_{i=1}^{m} F_i = S. \tag{3.11}$$

Assim sendo, os eventos que formam uma partição são mutuamente exclusivos, uma vez que não possuem resultados comuns, e também são coletivamente exaustivos, uma vez que a união de todos os resultados é o próprio espaço amostral. O conceito de partição pode ser aplicável a qualquer evento contido em S. A seguinte propriedade é conhecida como Teorema da Probabilidade Total.

Considere um evento E e uma partição do espaço amostral $\{F_j\}, j = 1, \ldots, m$. Tem-se então

$$P(E) = \sum_{j=1}^{m} P(E \cap F_j) \tag{3.12}$$

que pela definição de probabilidade condicional equivale a

$$P(E) = \sum_{j=1}^{m} P(E|F_j).P(F_j). \tag{3.13}$$

Demonstração: Inicialmente considere

$$E = E \cap S = E \cap \left(\bigcup_{j=1}^{m} F_j \right).$$

Pela distributividade da interseção com relação à união, tem-se

$$E = \bigcup_{j=1}^{m} (E \cap F_j). \tag{3.14}$$

Observe ainda que

$$(E \cap F_j) \cap (E \cap F_k) = \varnothing; \text{ com } j, k = \{1, \ldots, m\}, \text{ sendo } j \neq k$$

uma vez que F_j é uma partição, então $F_j \cap F_k = \varnothing$. Portanto, a partir da Equação 3.14, como todos os termos são mutuamente exclusivos, é obtido o resultado de 3.12, e por conseguinte, completa-se a demonstração.

3.2.9 Teorema de Bayes

Considere uma partição $\{F_j\}$, com $j = \{1, \ldots, m\}$ do espaço amostral com $P(F_j)>0$ para todo j. Seja E um evento no qual $P(E)>0$, pela definição de probabilidade condicional, apresentada na Subseção 3.2.7, tem-se

$$P(F_j|E) = \frac{P(F_j \cap E)}{P(E)} \quad \text{e} \quad P(E|F_j) = \frac{P(F_j \cap E)}{P(F_j)}. \tag{3.15}$$

Substituindo a Equação 3.9 em 3.15

$$P(F_j|E) = \frac{P(F_j).P(E|F_j)}{P(E)}. \tag{3.16}$$

Trazendo a Equação 3.13 para 3.16, obtem-se o chamado Teorema de Bayes

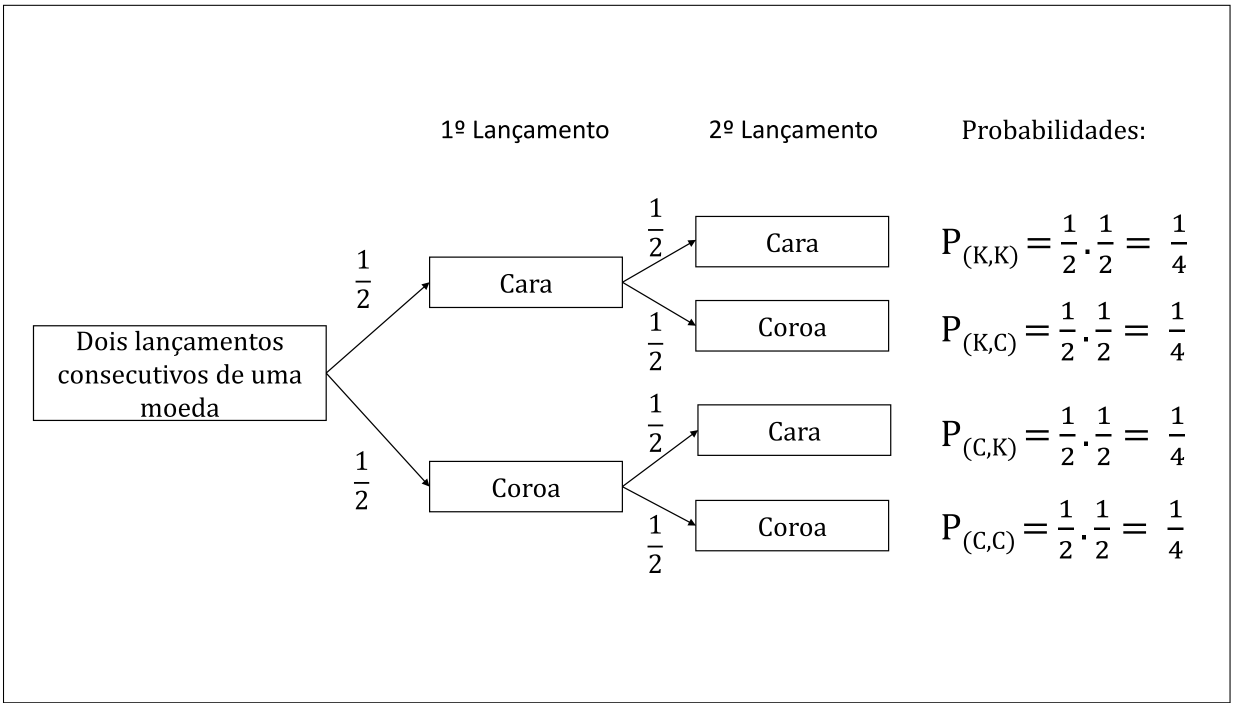
$$P(F_j|E) = \frac{P(F_j).P(E|F_j)}{\sum_{k=1}^{m} P(F_k).P(E|F_k)}.$$

As probabilidades $P(F_j)$ e $P(F_j|E)$ são chamadas *a priori* e *a posteriori*, respectivamente. O Teorema de Bayes relaciona a probabilidade *a posteriori* em termos das probabilidades condicionais e *a priori*.

3.2.10 Árvore de Probabilidades

Um recurso muito utilizado no estudo da TP é conhecido como árvore de probabilidades. Tal artifício diagramático é empregado para representar as possibilidades de ocorrência de um evento de maneira visual, simples e organizada. Pode ser adotado para ilustrar eventos dependentes ou independentes. A Figura 3.10 traz a árvore de possibilidades no lançamento de uma moeda por duas vezes consecutivas.

Figura 3.10: Exemplo de Árvore de Probabilidades

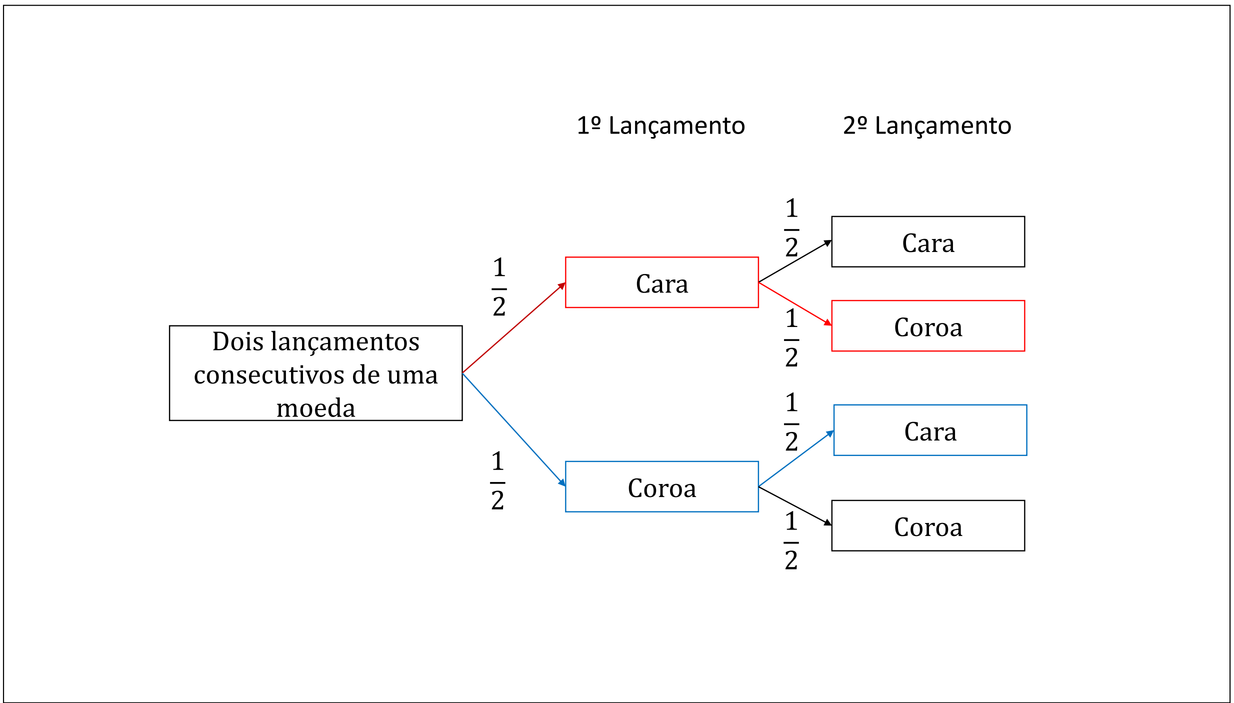


Fonte: Autoria própria

As probabilidades calculadas foram obtidas baseadas nos próximos conceitos.

O primeiro deles é a ideia de nó, representada pelos retângulos na Figura 3.10. A probabilidade relacionada a cada um dos nós é indicada pelos valores próximos às setas que os antecedem, excetuando o primeiro que representa o espaço amostral. Tais valores correspondem à ocorrência de um evento condicionado ao acontecimento de todos os outros nós que o precedem, no caminho longitudinal contínuo correspondente. Dessa forma, cada trilha representa um resultado possível, sendo denominado de ramo desta árvore de possibilidades. Observe que na Figura 3.11, o ramo de cor vermelha indica que o no primeiro lançamento o resultado foi cara e no segundo, coroa. Já o ramo azul, ilustra o resultado {(C,K)}.

Figura 3.11: Exemplo de ramos



Fonte: Autoria própria

Assim sendo, para o cálculo geral de probabilidades:

- ao longo dos ramos devem ser multiplicadas, uma vez que os eventos são independentes.
- em colunas devem ser somadas, pois indicam união de eventos disjuntos.
- para cada conjunto de ramos que saem de um nó, a soma das probabilidades deve ser 1, já que designam eventos complementares.

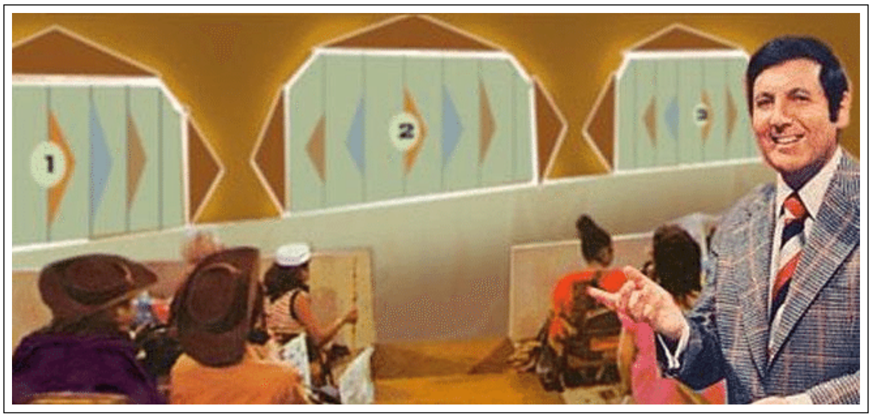
4 Problema de Monty Hall

A proposta deste capítulo é apresentar: um pouco da história de Monty Hall até o surgimento do problema matemático que leva seu nome; discutir os aspectos probabilísticos mais relevantes sobre o PMH, propondo soluções para sua interpretação e conclusão; e uma adaptação para expandí-lo para mais portas, buscando uma generalização.

4.1 Monty Hall

Monte Halparin (1921-2017), mais conhecido como Monty Hall, foi um famoso apresentador televisivo de programas de auditório a partir da década de 60. Apesar de ter nascido em Winnipeg no Canadá, fez carreira como cantor, ator, produtor e, principalmente, como apresentador de televisão nos Estados Unidos. A Figura 4.1 mostra-o em um dos seus mais famosos programas, chamado *“Let’s make a deal”*, que em português significa “Vamos fazer um acordo”[1], no qual ficou notabilizado o Problema de Monty Hall. Desde então, o PMH passou a ser amplamente discutido, difundido e estudado pela comunidade científica e, até mesmo, por entusiastas da Matemática.

Figura 4.1: Monty Hall em seu programa *“Let’s make a deal”*



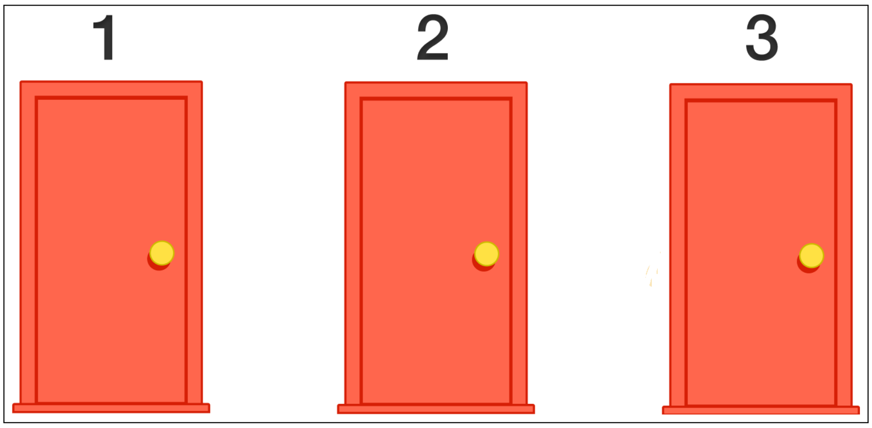
Fonte: https://www.researchgate.net/figure/Monty-Hall-e-o-cenario-de-Lets-Make-a-Deal-O-jogo-consistia-no-seguinte-o$_{f}$ig1$_{3}$14656345/

[1]Tradução obtida em https://translate.google.com.br/.

4.2 O Problema

Em um dos blocos do programa *"Let's make a deal"*, Monty Hall convidava um dos espectadores para participar de um jogo que consistia em escolher uma dentre três portas numeradas de 1 a 3, como apresentado na Figura 4.2.

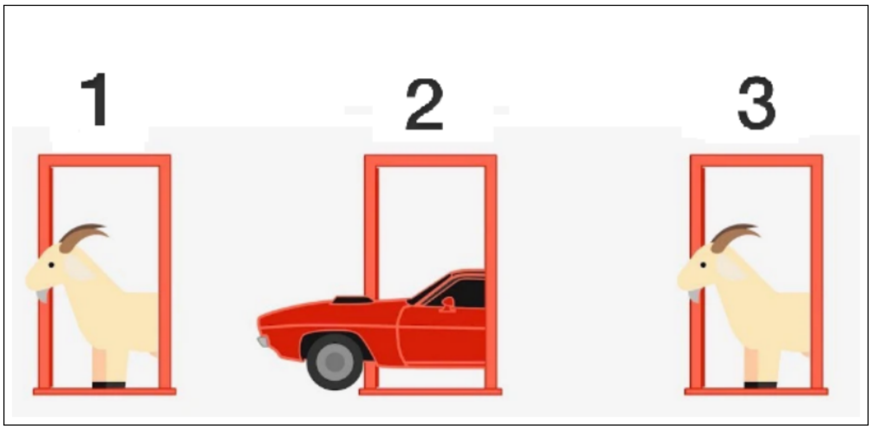
Figura 4.2: Situação inicial do PMH



Fonte: Adaptado de https://icaroagostino.github.io/post/monty-hall/

Cada porta ocultava uma determinada premiação por detrás. Os possíveis prêmios serão descritos como um carro 0 km e duas cabras, ilustrados na Figura 4.3. O objetivo seria encontrar o carro.

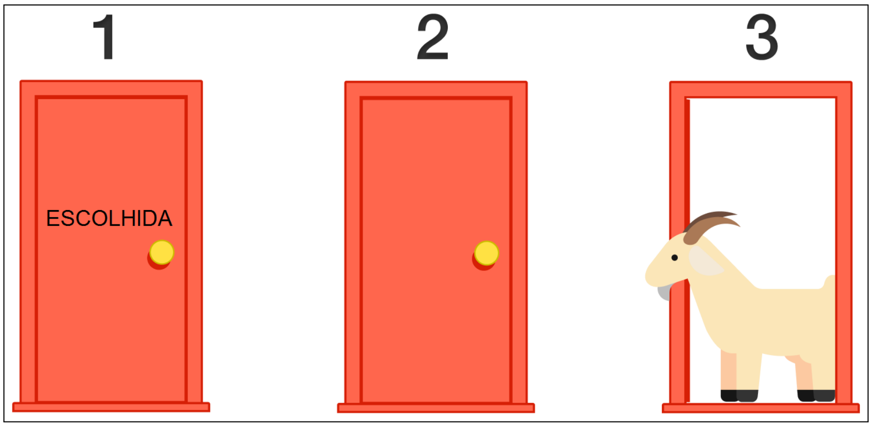
Figura 4.3: Possíveis premiações do PMH



Fonte: https://paulvanderlaken.com/2020/04/14/simulating-visualizing-monty-hall-problem-python-r

Após o participante selecionar uma das três portas, o apresentador abria uma das outras duas restantes, revelando uma cabra, como exemplificado na Figura 4.4. Então, perguntava ao jogador se ele gostaria de manter ou trocar a porta escolhida inicialmente.

Figura 4.4: Exemplo em que o jogador escolhe a porta 1 e na sequência Monty Hall revela uma cabra atrás da porta 3



Fonte: Adaptado de https://icaroagostino.github.io/post/monty-hall/

A questão parece trivial, porém carrega consigo um problema matemático dos mais fascinantes devido à sua simplicidade e objetividade. O PMH consiste em determinar uma estratégia de escolha que permita ao jogador ter uma maior probabilidade de acertar qual das 3 portas é a dita vencedora, ou seja, qual delas esconde o carro.

O problema leva o nome de Monty Hall, apesar que o enfoque matemático nunca foi feito por ele ou nem mesmo em um de seus programas. O PMH, apesar de muito disseminado entre 1960 e 1980, ganhou real notoriedade na década de 90 ao ser publicado na coluna *"Ask* Marilyn", Figura 4.5, de Marilyn vos Savant na revista *Parade's Magazine*.

Figura 4.5: Coluna *"Ask* Marilyn", de Marilyn vos Savant na *Revista Parade's*

Ask Marilyn

In our June 22nd issue, PARADE introduced Marilyn Mach vos Savant, a 39-year-old woman with the highest IQ ever recorded—230 on the Stanford-Binet scale. We invited readers to help Marilyn do what she does best—think—by asking her some tough questions. Here are Marilyn's answers:

All my life, I've believed if men refused to fight, there would be no wars. All my life, I've been told it's not that simple. Why not?

—Karleen Sheppard, St. Paul, Minn.

If every man and woman refused to fight, there would, indeed, be no more wars. But consider the price to be paid for this sort of peace. We would be easy prey for any madman. A leader could rise quite peacefully to power, acquire the necessary following, then inform all the members of a particular religion that they would henceforth be incarcerated in concentration camps until they died. To these people, and to many more, the presence of war in their lives might be preferable to the absence of dignity.

Which is more important, quality or quantity?

In this society, I would say that quantity is generally considered more important than quality. In the area of politics, for example, we elect our President not on the quality of the votes he receives, but on their number. Our economy doesn't run on how we earn our money; it runs on the amount we earn. Socially, our ideal is "the greatest good for the greatest number," not "the greatest good for the greatest." Even theoretically, quantity appears to win. After all, which would most of us choose—the finest diamond on the earth or all the rest of them? And if we're cautious enough before making our choice to ask which is worth more, we're *still* deciding by quantity—of dollars!

Do you feel that gifted classes or enrichment classes are only for high-IQ individuals?

—Marcia B. Ward, Urbana, Ohio

Definitely not. A high IQ, while certainly an asset, should be only one of the factors considered. The schools are full of budding young Edisons who may not happen to test well, which I strongly suspect happens far more often than we think. Achievement might be another factor, motivation still another, perseverance another yet. Strong desire might be the most important factor of all.

In any case, this opportunity must be made available to every youngster. After all, human qualities such as devotion to a cause and love of mankind aren't on the IQ tests, but I still think Mother Teresa is one of the most gifted individuals in the world.

Can one's spirit communicate with oneself and be aware of it?

—George Gessitz Newton, N.J.

I would say so. One of the more noticeable types of communication itself would be the physical result. For example, if we open the front door and see a lion, adrenalin will shoot through our veins. The lion, however, didn't do the communicating. In fact, it was unnecessary. Even if we only *think* we see a lion, the results will be the same. Our spirit (or mind) communicated with our self (or our physical form). The spirit can be aware of this but is not always so, although this is certainly understandable. In the midst of a rousing argument, it's far more satisfying to yell, "You make me sick!" than it is to yell, "I make myself sick!"

What does the person with the highest IQ in the world say about classes for the gifted, your brain power, ending war?

If you have a question for Marilyn Mach vos Savant, send it to: "Ask Marilyn," PARADE, 750 Third Ave., New York, N.Y. 10017. Full name will be used unless otherwise requested. Because of volume of mail, personal replies are impossible.

CROCHET HATS

Fonte: https://parade.com/533287/marilynvossavant/parade-columnist-marilyn-vos-savants-favorite-questions-from-the-last-30-years/

Marilyn vos Savant, aos dez anos de idade, bateu o recorde mundial com um resultado de 228 pontos nos testes de quociente de inteligência (QI). Entrou para o *"Guinness Book of World Records"*, o livro dos recordes mundiais, na categoria de QI mais alto do mundo para mulheres, e permaneceu durante cinco anos consecutivos, colocando-a no *hall* de notáveis de todos os tempos da entidade.

Com a sua entrada no livro dos recordes, Marilyn foi convidada para ser colaboradora da revista *Parade's*. Apesar do QI altamente desenvolvido, a escritora não quis se dedicar à vida acadêmica. Em sua coluna, respondia semanalmente às mais diferentes categorias de perguntas que variavam de formulações científicas, conceituações filosóficas, até à assuntos particulares de seus leitores.

Foi então que, em setembro de 1990, a repercussão de uma resposta sua a uma pergunta feita à "*Ask* Marilyn", consagrou a inteligência acima da média da colunista. A pergunta do leitor notabilizou tanto a escritora quanto o Problema de Monty Hall, a partir da discussão acerca da probabilidade na seguinte tomada de decisão no PMH: é mais vantajoso manter ou trocar a porta inicialmente escolhida? A resposta da autora será abordada na próxima seção.

A partir disso, o PMH foi altamente propagado, ganhando adaptações em diversos programas televisivos, por vários e vários anos, e em diferentes países. No Brasil, apareceu em muitos programas de auditório, tais como a icônica "Porta dos Desesperados" de Serginho Malandro, retratada na Figura 4.6, sucesso na década de 1980.

Figura 4.6: Quadro televisivo "Porta dos Desesperados", muito famoso nos anos 80

Fonte: http://opercebedor.blogspot.com/2014/03/porta-dos-desesperados.html

Uma outra adaptação do PMH foi utilizada no programa Topa ou Não Topa, Figura 4.7, que foi ao ar de 2006 a 2020 no SBT. A ideia do programa foi expandir para um número maior de opções de trocas, agora não mais de portas, mas sim de maletas, que continham importâncias de $R\$\ 0,50$ até $R\$\ 1.000.000,00$. O raciocínio lógico matemático aplicado no Problema de Monty Hall aparece aqui também. Em alguns momentos o apresentador do programa oferece a oportunidade ao jogador de trocar a mala escolhida inicialmente, após abrir várias outras, revelando assim as importâncias nelas contidas.

Figura 4.7: Programa Topa ou Não Topa do SBT, que já foi apresentado ao longo dos anos por Sílvio Santos, Roberto Justus e Patrícia Abravanel

Fonte: https://www.bastidoresdatv.com.br/televisao/volta-do-topa-ou-nao-topa-vira-impasse-dentro-do-sbt

O PMH também recebe a alcunha de Paradoxo de Monty Hall. A princípio é comum as pessoas pensarem que cada uma das portas que ao final restam fechadas, possuem a mesma probabilidade de ser a porta dita vencedora, ou seja, aquela que revelará o carro. Assim sendo, os participantes do jogo tem a tendência de manter a sua escolha inicial, até mesmo por fatores emocionais ou crenças particulares. O contraditório, "paradoxal", está no fato de que trocar de porta dobra a probabilidade de se vencer em relação à manutenção da porta escolhida inicialmente. Tal constatação, será abordada na sequência.

4.3 Solucionando o Problema

O objetivo desta seção é apresentar respostas para o PMH, ou seja, calcular qual é a melhor estratégia para selecionar a porta vencedora. Marilyn vos Savant afirmou que a melhor opção ao se jogar o PMH seria a troca de porta, obtendo assim o dobro de chances de se vencer. Serão exibidas soluções baseadas em definições de Probabilidade, no Teorema de Bayes e na Árvore de Probabilidades, expostos no Capítulo 3, para corroborar com a afirmação da autora.

4.3.1 Utilizando definições de Probabilidade

Seja o espaço amostral S, todas as possibilidades de situações que podem ocorrer no PMH. Tem-se que $s \in S$ é dado por

$$s = (\text{PV, PE, PA, TP}),$$

sendo

$$\begin{cases} PV: & \text{porta vencedora;} \\ PE: & \text{porta escolhida inicialmente;} \\ PA: & \text{primeira porta aberta;} \\ TP: & \text{oportunidade de trocar ou não da PE.} \end{cases}$$

Cada uma das portas PV, PE e PA recebem um número de 1 até 3, enquanto que os possíveis resultados para TP serão: sim (S) ou não (N). Portanto,

$$\begin{aligned} S = \{&(1,1,2,S),(1,1,2,N),(1,1,3,S),(1,1,3,N),(1,2,3,S),(1,2,3,N),\\ &(1,3,2,S),(1,3,2,N),(2,1,3,S),(2,1,3,N),(2,2,1,S),(2,2,1,N),\\ &(2,2,3,S),(2,2,3,N),(2,3,1,S),(2,3,1,N),(3,1,2,S),(3,1,2,N),\\ &(3,2,1,S),(3,2,1,N),(3,3,1,S),(3,3,1,N),(3,3,2,S),(3,3,2,N)\}. \end{aligned}$$

As 24 possibilidades totais enumeradas podem ser obtidas através dos cálculos:

Participante selecionando a porta vencedora inicialmente: 3.1.2.2 = 12 possibilidades, sendo 3 opções para PV (uma vez que qualquer uma das três portas pode ser a vencedora), 1 opção para PE (afinal o jogador escolheu a vencedora), 2 para PA (já que o apresentador pode abrir qualquer uma das duas restantes) e 2 para TP (sim ou não).

Participante não selecionando a porta vencedora inicialmente: 3.2.1.2 = 12 possibilidades, sendo 3 opções para PV, 2 para PE (as não vencedoras no caso), 1 para PA (visto que o participante não escolheu a vencedora, o apresentador só poderá abrir a porta que oculta a cabra) e 2 para TP.

Total de Possibilidades: $12 + 12 = 24$ possibilidades, listados em S.

Na sequência serão definidas as probabilidades de cada elemento s_i, com $i = \{1, 2, \ldots, 24\}$.

O primeiro caso seria aquele em que o jogador não seleciona a porta vencedora inicialmente, isto é, $PV \neq PE$. O elemento $s_9 = (2, 1, 3, S)$ indica que $PV = 2$ e $PE = 1$. Assim sendo, o apresentador só poderia abrir a porta 3, lembrando que ele não pode abrir nem a PE e nem a PV. Dessa maneira:

a) Porta Vencedora: uma possibilidade em três, ou seja $\frac{1}{3}$.

b) Porta Escolhida Inicialmente: uma possibilidade em três, logo $\frac{1}{3}$.

c) Porta Aberta: uma possibilidade existente apenas.

d) Troca de Porta: uma possibilidade em duas (S ou N), portanto $\frac{1}{2}$.

Dessa maneira, $P(s_9) = P(2, 1, 3, S) = \frac{1}{3}.\frac{1}{3}.1.\frac{1}{2} = \frac{1}{18}$.

O outro caso seria aquele em que o concorrente escolheu inicialmente a porta vencedora, ou seja, $PV = PE$, por exemplo o elemento $s_2 = (1, 1, 2, N)$. Nesta situação:

a) Porta Vencedora: uma possibilidade em três, ou seja $\frac{1}{3}$.

b) Porta Escolhida Inicialmente: uma possibilidade em três, logo $\frac{1}{3}$.

c) Porta Aberta: uma possibilidade em duas, portanto $\frac{1}{2}$.

d) Troca de Porta: uma possibilidade em duas (S ou N), ou seja, $\frac{1}{2}$.

Assim sendo, $P(s_2) = P(1, 1, 2, N) = \frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{36}$.

Desse modo, obteve-se os valores da Tabela 4.1. Observe que os elementos em azul representam as escolhas vencedoras, nas quais $PV = PE$, com $TP = N$ ou $PV \neq PE$, com $TP = S$. No que diz respeito às opções em vermelho, ou $PV = PE$, com $TP = S$ ou $PV \neq PE$, com $TP = N$, sendo assim escolhas perdedoras. Note também que se forem somadas as probabilidades dos 24 elementos, o valor obtido é $1 = 100\%$, como esperado, por se tratarem de todos os eventos possíveis, sendo então complementares.

Tabela 4.1: Probabilidades dos eventos de S, em azul as escolhas vencedoras e em vermelho as perdedoras

$P(s_1) = \mathrm{P}(1,1,2,\mathrm{S}) = \frac{1}{36}$	$P(s_2) = \mathrm{P}(1,1,2,\mathrm{N}) = \frac{1}{36}$	$P(s_3) = \mathrm{P}(1,1,3,\mathrm{S}) = \frac{1}{36}$
$P(s_4) = \mathrm{P}(1,1,3,\mathrm{N}) = \frac{1}{36}$	$P(s_5) = \mathrm{P}(1,2,3,\mathrm{S}) = \frac{1}{18}$	$P(s_6) = \mathrm{P}(1,2,3,\mathrm{N}) = \frac{1}{18}$
$P(s_7) = \mathrm{P}(1,3,2,\mathrm{S}) = \frac{1}{18}$	$P(s_8) = \mathrm{P}(1,3,2,\mathrm{N}) = \frac{1}{18}$	$P(s_9) = \mathrm{P}(2,1,3,\mathrm{S}) = \frac{1}{18}$
$P(s_{10}) = \mathrm{P}(2,1,3,\mathrm{N}) = \frac{1}{18}$	$P(s_{11}) = \mathrm{P}(2,2,1,\mathrm{S}) = \frac{1}{36}$	$P(s_{12}) = \mathrm{P}(2,2,1,\mathrm{N}) = \frac{1}{36}$
$P(s_{13}) = \mathrm{P}(2,2,3,\mathrm{S}) = \frac{1}{36}$	$P(s_{14}) = \mathrm{P}(2,2,3,\mathrm{N}) = \frac{1}{36}$	$P(s_{15}) = \mathrm{P}(2,3,1,\mathrm{S}) = \frac{1}{18}$
$P(s_{16}) = \mathrm{P}(2,3,1,\mathrm{N}) = \frac{1}{18}$	$P(s_{17}) = \mathrm{P}(3,1,2,\mathrm{S}) = \frac{1}{18}$	$P(s_{18}) = \mathrm{P}(3,1,2,\mathrm{N}) = \frac{1}{18}$
$P(s_{19}) = \mathrm{P}(3,2,1,\mathrm{S}) = \frac{1}{18}$	$P(s_{20}) = \mathrm{P}(3,2,1,\mathrm{N}) = \frac{1}{18}$	$P(s_{21}) = \mathrm{P}(3,3,1,\mathrm{S}) = \frac{1}{36}$
$P(s_{22}) = \mathrm{P}(3,3,1,\mathrm{N}) = \frac{1}{36}$	$P(s_{23}) = \mathrm{P}(3,3,2,\mathrm{S}) = \frac{1}{36}$	$P(s_{24}) = \mathrm{P}(3,3,2,\mathrm{N}) = \frac{1}{36}$

Fonte: Autoria própria

Em seguida, é necessário estabelecer a probabilidade do candidato ganhar o carro. Seja o evento V, aquele em que o concorrente escolhe a porta vencedora ao final, então

$$
\begin{aligned}
V = \{&(1,1,2,N),(1,1,3,N),(1,2,3,S),(1,3,2,S),\\
&(2,1,3,S),(2,2,1,N),(2,2,3,N),(2,3,1,S)\\
&(3,1,2,S),(3,2,1,S),(3,3,1,N),(3,3,2,N)\}.
\end{aligned}
$$

Aplicando o Axioma 3.3 com as probabilidades dos elementos de V, encontradas na Tabela 4.1, segue que

$$
\begin{aligned}
P(V) &= \frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{18}+\frac{1}{18}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{18}+\frac{1}{18}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}\\
&= \frac{18}{36}\\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Tal resultado, indica que a chance do candidato ganhar no PMH é de 50%. Porém, o objetivo do jogo é estabelecer uma estratégia vencedora, isto é, descobrir qual escolha possui maior probabilidade de chegar à PV: trocar ou manter a PE. Para isso, será calculada a seguir a probabilidade do evento T, no qual o jogador opte pela troca de porta. Seja

$$\begin{aligned}T = \{&(1,1,2,S),(1,1,3,S),(1,2,3,S),(1,3,2,S),\\&(2,1,3,S),(2,2,1,S),(2,2,3,S),(2,3,1,S)\\&(3,1,2,S),(3,2,1,S),(3,3,1,S),(3,3,2,S)\}.\end{aligned}$$

Utilizando mais uma vez os valores da Tabela 4.1:

$$P(T) = \frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{18}+\frac{1}{18}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{18}+\frac{1}{18}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}. \quad (4.1)$$

Este valor indica que o candidato pode optar pela troca de porta em 50% das possibilidades totais, conforme já era previsto. Para se empregar o conceito de Probabilidade Condicional, definido na Subseção 3.2.7, é preciso estabelecer o evento $V \cap T$, ou seja, vencer trocando de porta. Dessa maneira, tem-se

$$V \cap T = \{(1,2,3,S),(1,3,2,S),(2,1,3,S),(2,3,1,S),(3,1,2,S),(3,2,1,S)\}.$$

Novamente invocando a Tabela 4.1:

$$P(V\cap T) = \frac{1}{18}+\frac{1}{18}+\frac{1}{18}+\frac{1}{18}+\frac{1}{18}+\frac{1}{18} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}. \quad (4.2)$$

Aplicando os valores encontrados em (4.1) e (4.2), calcula-se $P(V|T)$, isto é, a probabilidade de se vencer dado que a porta inicial foi trocada, por meio de

$$P(V|T) = \frac{P(V\cap T)}{P(T)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Utilizando o conceito de complementar de um evento, Subseção 3.2.3, verifica-se que $P(V \cap T)^c$ representa a chance de se vencer no PMH sem trocar de porta, ou seja, mantendo a PE. Então, pela Proposição 3.4

$$P(V|T)^c = 1 - P(V|T) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Assim sendo, ficou comprovado mediante a utilização dos conceitos e definições explorados no Capítulo 3, que a estratégia vencedora no PMH é optar pela troca da PE. Tal escolha possui o dobro da chance de se acertar a PV se comparada à alternativa de manter a porta escolhida inicialmente, como apontado por Marilyn vos Savant.

4.3.2 Utilizando o Teorema de Bayes

Deseja-se comparar as probabilidades de se vencer no PMH, trocando ou mantendo a porta escolhida inicialmente. Para isso, deverão ser calculadas as probabilidades condicionadas a seguir.

Supondo, sem perda de generalidade, que o concorrente escolha inicialmente a porta número 1, e que na sequência seja revelada uma cabra na porta 3, como mostrado na Figura 4.4. Sejam os seguintes eventos:

- **V1**: a porta número 1 é a vencedora.
- **V2**: a porta número 2 é a vencedora.
- **V3**: a porta número 3 é a vencedora.
- **A3**: o apresentador abriu a porta 3, revelando uma cabra.

Note que inicialmente o carro pode estar atrás de qualquer uma das três portas, então

$$P(V1) = P(V2) = P(V3) = \frac{1}{3}.$$

As probabilidades do evento A3 ocorrer, em cada um dos cenários, são

- $P(A3|V1) = \frac{1}{2}$, uma vez que a PA pode ser a 2 ou a 3;
- $P(A3|V2) = 1$, visto que $PA = 3$, já que $PE = 1$ e $PV = 2$;
- $P(A3|V3) = 0$, pois a PV é a 3.

No caso analisado, como $PE = 1$ e $PA = 3$, para ganhar o carro mediante a troca, a PV obrigatoriamente deverá ser a 2. Logo, basta calcular a P(V2|A3), que pelo Teorema de Bayes 3.2.9 é dada por

$$\begin{aligned} P(V2|A3) &= \frac{P(V2).P(A3|V2)}{P(V1).P(A3|V1) + P(V2).P(A3|V2) + P(V3).P(A3|V3)} \\ &= \frac{\frac{1}{3}.1}{\frac{1}{3}.\frac{1}{2} + \frac{1}{3}.1 + \frac{1}{3}.0} \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Para calcular a probabilidade de vencer mantendo a PE, basta encontrar o valor de P(V1|A3). Observe que $P(V1|A3) + P(V2|A3) + P(V3|A3) = 1$; $P(V2|A3) = \dfrac{2}{3}$ e $P(V3|A3) = 0$. Logo,

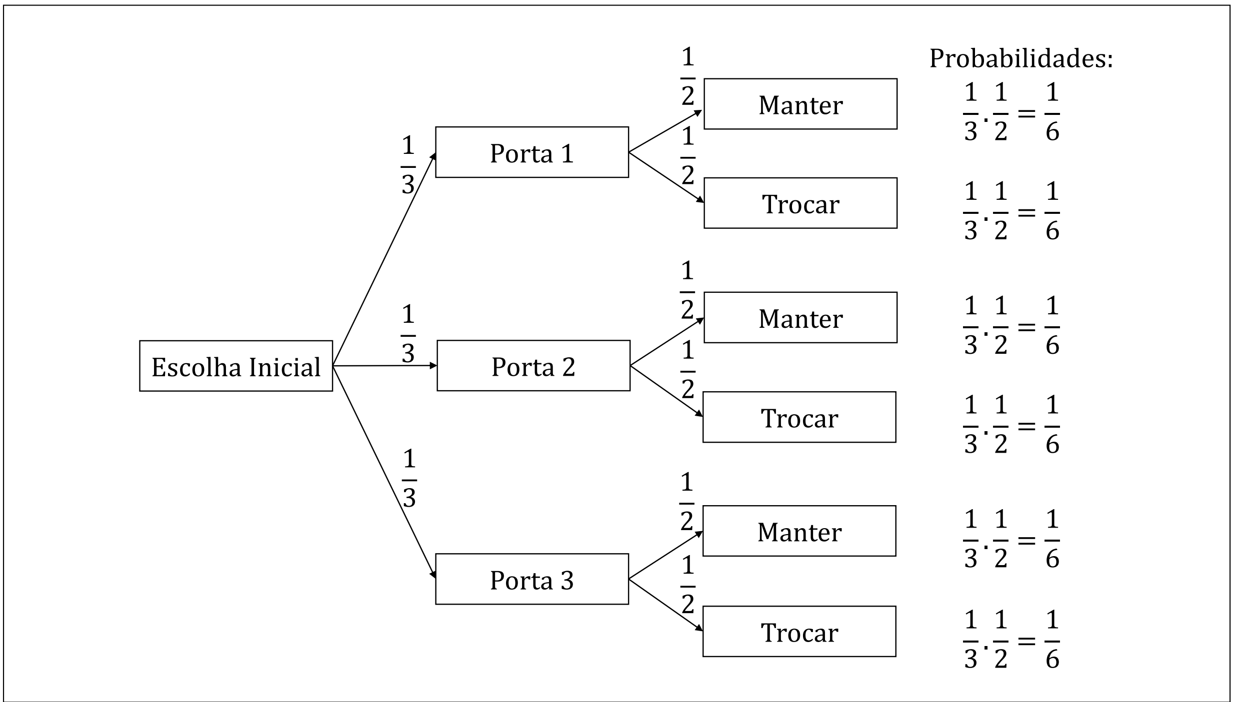
$$\begin{aligned}
&P(V1|A3) + P(V2|A3) + P(V3|A3) = 1\\
&P(V1|A3) + \frac{2}{3} + 0 = 1\\
&P(V1|A3) = 1 - \frac{2}{3}\\
&P(V1|A3) = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Assim sendo, mais uma vez fica demonstrada que a estratégia vencedora é a escolha pela troca da PE, uma vez que a sua probabilidade de vencer no PMH é duas vezes maior que a opção pela manutenção da porta escolhida inicialmente.

4.3.3 Utilizando a Árvore de Probabilidades

Um recurso bastante útil para ilustrar as possibilidades dentro do PMH é a chamada Árvore de Probabilidades, apresentada na Subseção 3.2.10. Todas probabilidades do espaço amostral podem ser representadas num diagrama em forma de ramificações, semelhantes à galhos de árvores, como pode ser observada na Figura 4.8.

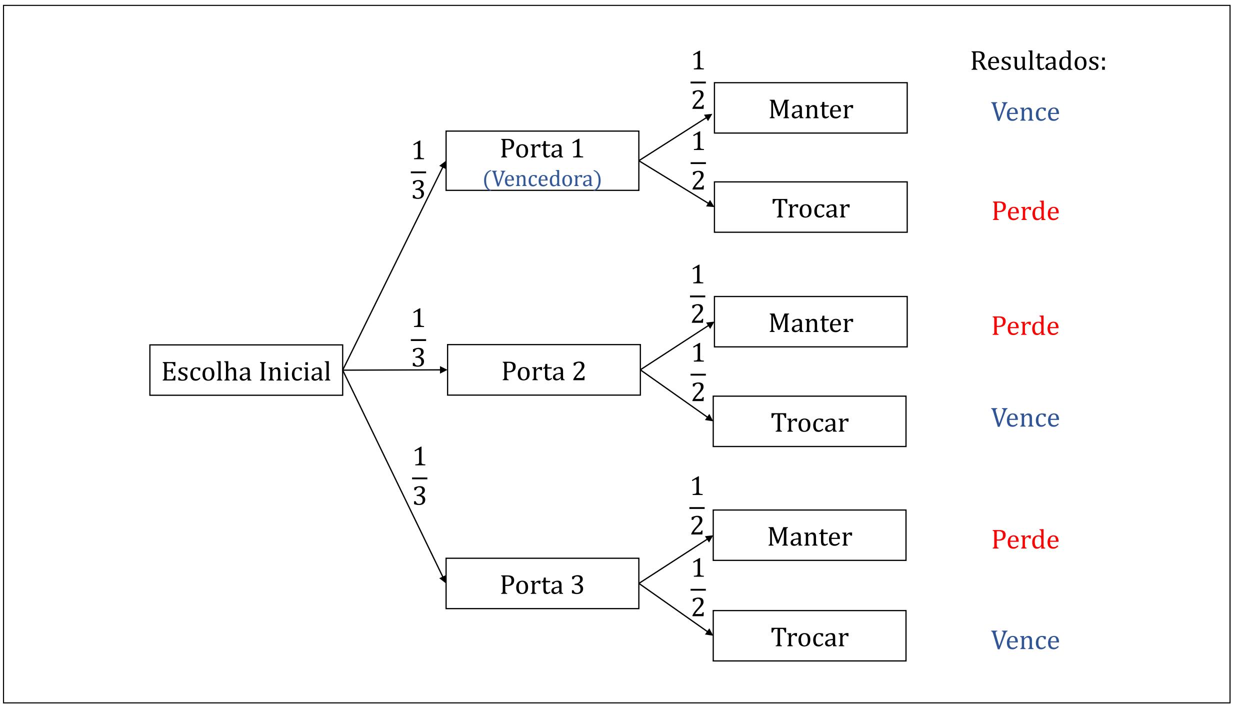
Figura 4.8: Árvore de Probabilidades no PMH



Fonte: Autoria própria

Suponha agora que a porta vencedora seja a porta número 1. Observando a Árvore de Probabilidades da Figura 4.9, nota-se que:

Figura 4.9: Diagrama representando a probabilidade de vencer ou perder, mantendo ou trocando a porta escolhida inicialmente



Fonte: Autoria própria

a) **caso a Porta Escolhida Inicialmente seja a 1:** se o jogador optar por *manter* a PE, ele VENCE, já que a porta 1 é a vencedora; e se optar por *trocar* de porta, ele PERDE;

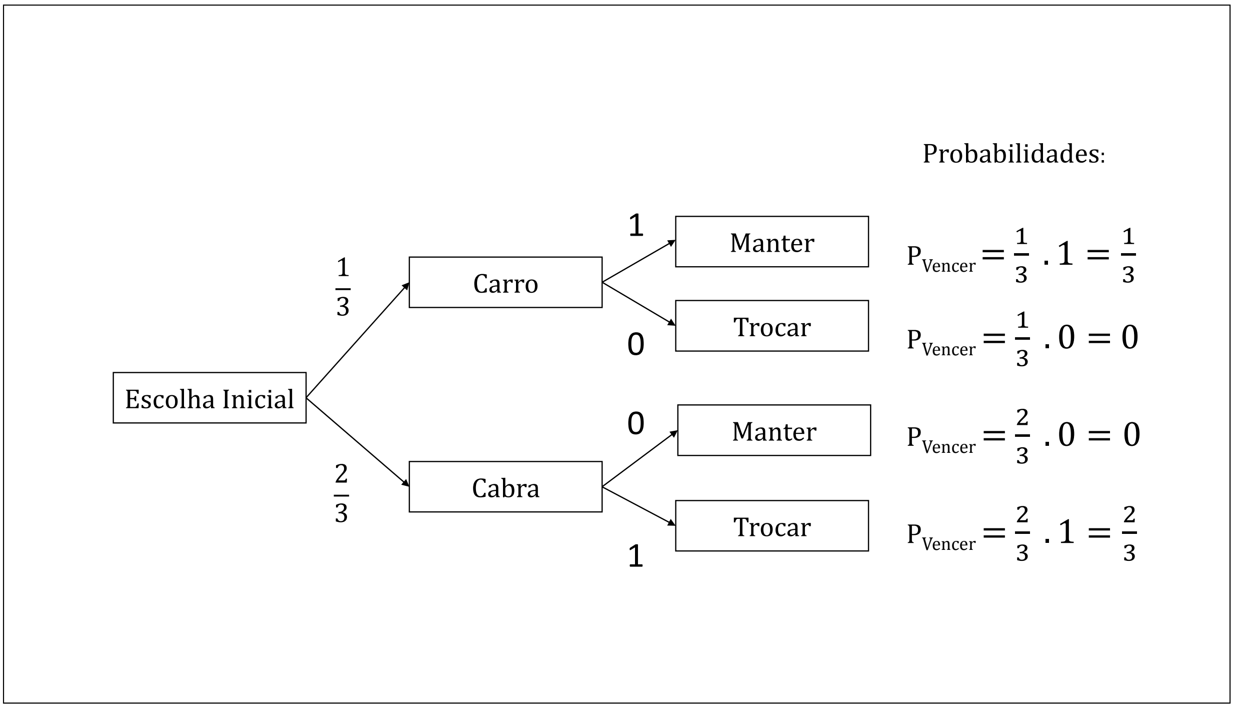
b) **caso a Porta Escolhida Inicialmente seja a 2:** se o concorrente escolher *manter*, ele PERDE, pois a PV é a 1; e se escolher *trocar* de porta, ele VENCE, uma vez que o apresentador terá obrigatoriamente aberto a porta 3;

c) **caso a Porta Escolhida Inicialmente seja a 3:** se o participante preferir *manter* a porta, ele PERDE, pois a porta vencedora é a de número 1; e se preferir *trocar*, ele GANHA, já que a PA foi a necessariamente a 2.

Assim sendo, comparando as Figuras 4.8 e 4.9, observa-se que a chance de se vencer trocando de porta é de $\frac{2}{6}$, enquanto que a possibilidade de se vencer não trocando é $\frac{1}{6}$. Dessa maneira, constata-se novamente que a probabilidade de se vencer trocando de porta é o dobro da probabilidade de se vencer mantendo a porta escolhida inicialmente.

Outra forma de pensar está ilustrada na Figura 4.10. O participante tem $\frac{1}{3}$ de chance de selecionar a porta que oculta o carro e $\frac{2}{3}$ de escolher aquela que ou esconde uma cabra. Caso a seleção inicial tenha sido o carro, se o jogador optar pela manutenção da porta ele vence e se trocar, ele perde. Na hipótese de ter escolhido inicialmente uma cabra, se decidir manter a porta ele perde e se optar pela troca, ele vence. Assim sendo, temos que a probabilidade de se vencer mantendo a porta escolhida inicialmente é de $\frac{1}{3}.1 = \frac{1}{3}$, enquanto que a de se ganhar trocando a PE é de $\frac{2}{3}.1 = \frac{2}{3}$.

Figura 4.10: Probabilidade de se vencer, escolhendo inicialmente o carro ou uma cabra



Fonte: Autoria própria

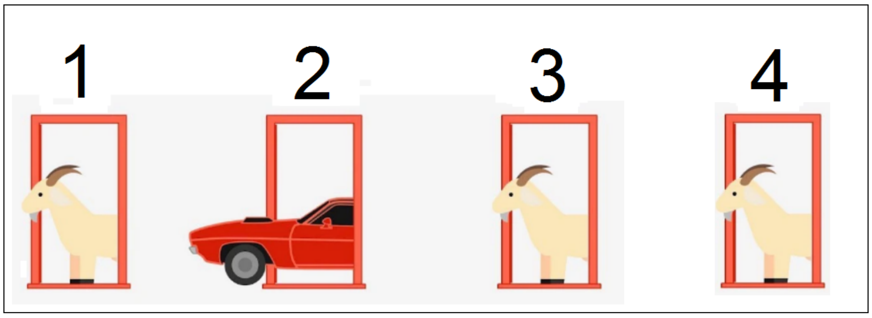
4.4 Expandindo o PMH

A maioria dos trabalhos que se baseiam no PMH, fazem menção ou utilizam o embasamento lógico relacionado ao problema original. Nesta seção o Problema de Monty Hall clássico, será expandido para mais portas. Primeiramente será analisado o PMH com 4 portas (PMH4).

4.4.1 O PMH com 4 portas

O PMH4 consiste num problema similar ao tradicional, porém com quatro portas, numeradas de 1 a 4, sendo um carro e três cabras, retratadas na Figura 4.11.

Figura 4.11: Esquema ilustrativo do PMH4

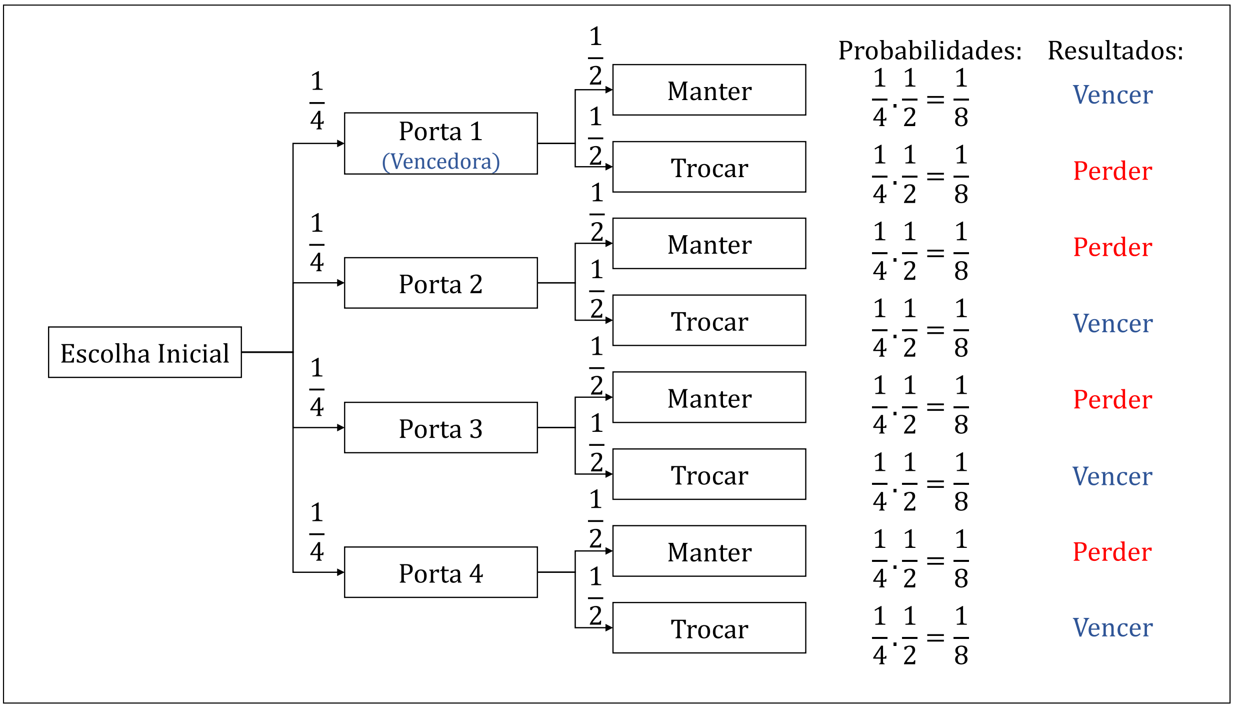


Fonte: Adaptado de https://paulvanderlaken.com/2020/04/14/simulating-visualizing-monty-hall-problem-python-r/

De maneira análoga ao original, após a seleção inicial de uma das quatro portas por parte do concorrente, o apresentador irá abrir duas portas, revelando 2 cabras. Note que se caso fosse aberta apenas uma porta, recairia exatamente no PMH clássico, na qual o participante teria que escolher uma dentre 3 portas possíveis para encontrar o carro. Após a abertura das 2 portas, o jogador é indagado se gostaria de manter a PE ou se gostaria de trocá-la pela outra porta que resta fechada.

Analisando a nova situação, pela Figura 4.12, oberva-se que o jogador pode optar por:

Figura 4.12: Árvore de Probabilidades do PMH4, supondo que a porta vencedora seja a número 1



Fonte: Autoria própria

- **MANTER** a porta escolhida inicialmente em quatro situações: quando escolhe as portas 1, 2, 3 ou 4. Apenas no cenário em que ele tenha escolhido a PV, que no caso é a de número 1, ele irá vencer. Logo, ele terá vencido em apenas uma oportunidade das quatro possíveis.

- **TROCAR** a PE também nas mesmas quatro situações. Porém, quando opta por trocar de porta, o participante vence em três das quatro oportunidades.

Note que tanto no PMH, quanto no PMH4, Figuras 4.8, 4.9 e 4.12, o jogador tem 50% de chance de vencer, que equivale a 50% de perder. A discussão aqui se refere a comparação entre: vencer *mantendo* a PE e vencer *trocando* a PE. Observe que, no PMH clássico cada um dos possíveis caminhos trilhados pelo jogador representa $\frac{1}{6}$ do total, pois são seis as possíveis decisões tomadas. Já no PMH4 são oito possibilidades de escolha para o jogador, sendo representado por $\frac{1}{8}$ a probabilidade de cada uma delas. Verifique que no PMH4 a possibilidade de vencer, uma vez que a PE foi trocada, é dada por

$$P(V|T) = \frac{P(V \cap T)}{P(T)} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}. \tag{4.3}$$

Averiguando agora a chance de vencer, dado que a PE foi mantida, tem-se

$$P(V|M) = \frac{P(V \cap M)}{P(M)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}. \tag{4.4}$$

Outra maneira de se chegar ao resultado de 4.4, seria substituindo 4.3 na Proposição 3.4

$$P(V|T)^c = 1 - P(V|T) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

Com o intuito de generalizar um pensamento lógico a respeito da tomada de decisões frente ao PMH, seja ele expandido ou não, baseado nos fundamentos probabilístico, segue a expansão para um número maior de portas, primeiramente 100, e depois para qualquer número n.

4.4.2 O PMH com 100 portas

O PMH com cem portas (PMH100), conta com as mesmas etapas dos demais problemas:

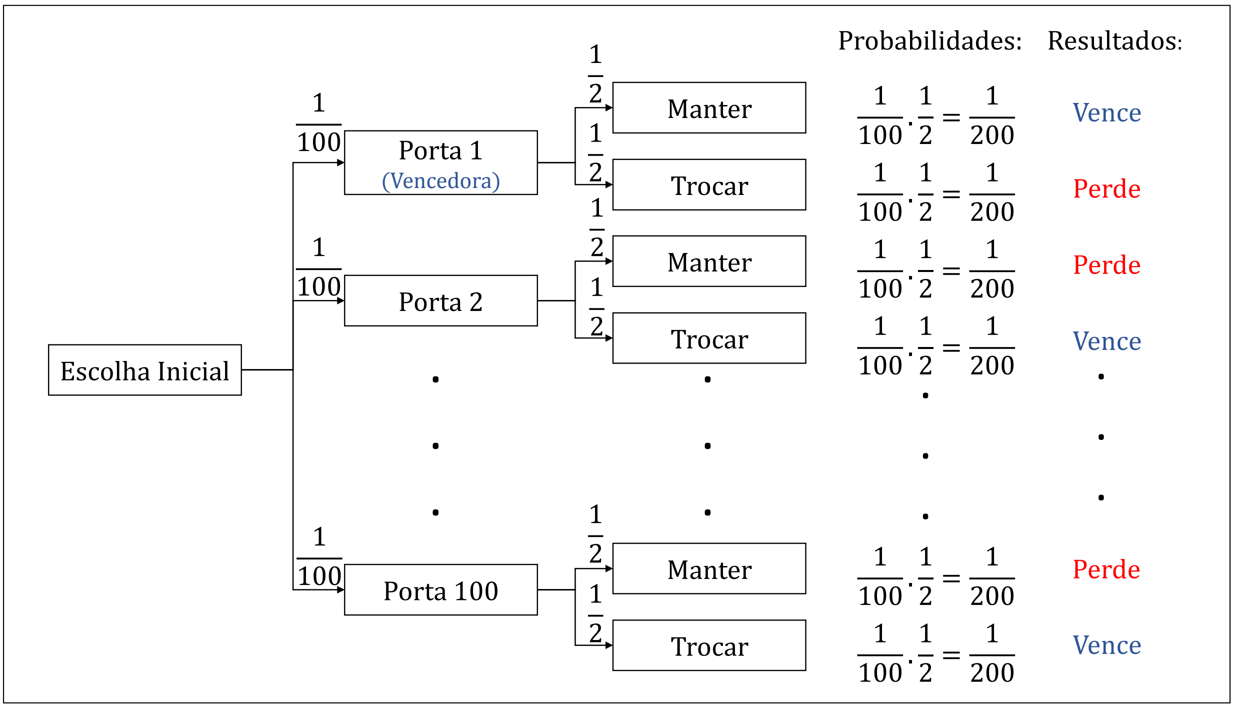
1º) O participante irá selecionar uma dentre cem portas, numeradas de 1 a 100, sendo as premiações possíveis, 1 carro e 99 cabras.

2º) Após escolhida a porta desejada, serão abertas 98 portas que ocultavam cabras.

3º) O jogador deverá decidir se mantém ou se troca a porta escolhida inicialmente.

De maneira semelhante ao PMH e PMH4, é possível imaginar que ao final do PMH100 o jogador tenha 50% de chance de vencer, uma vez que terá que escolher entre permanecer ou substituir a porta selecionada no começo. Vale ressaltar que, caso o jogador opte por manter a PE, ele vencerá única e exclusivamente se tiver escolhido a PV no primeiro momento, logo a possibilidade é de $\frac{1}{100} = 1\%$, como ilustra a Figura 4.13. Caso opte por trocar, ele irá vencer em todos os casos em que não tenha selecionado a porta vencedora inicialmente, portanto a chance é de $1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100} = 99\%$.

Figura 4.13: Árvore de Probabilidades do PMH100, supondo que a porta vencedora seja a número 1

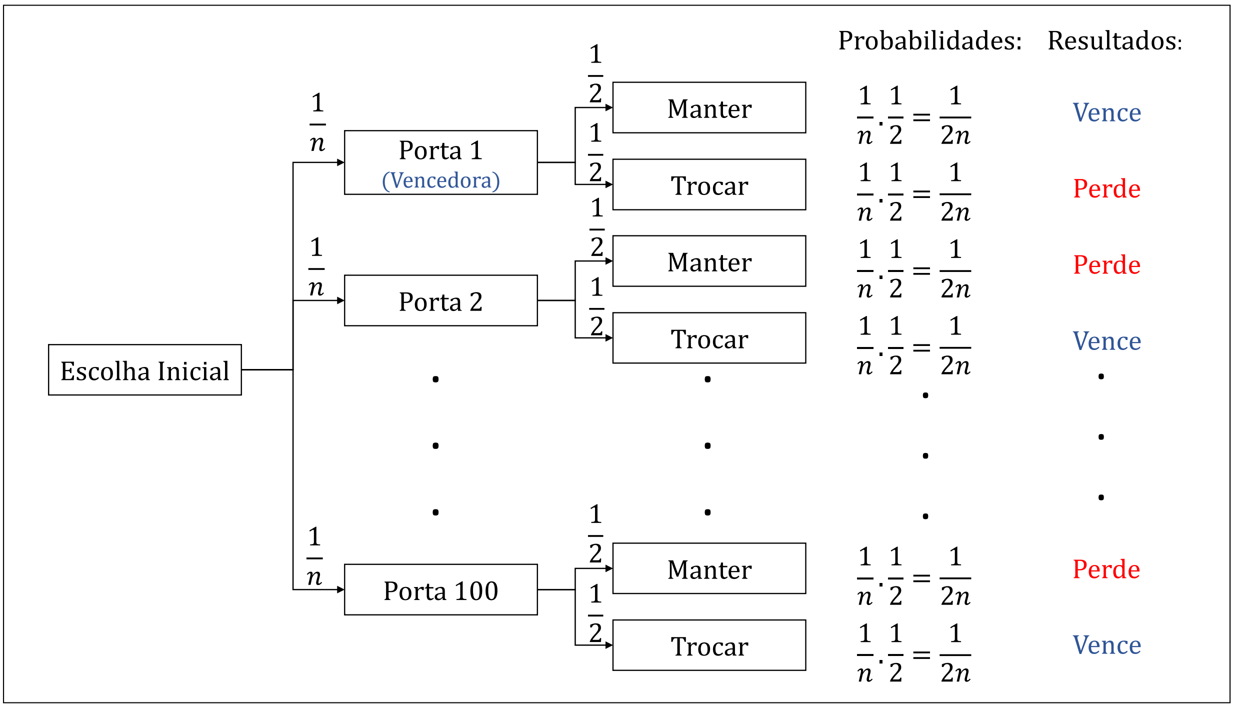


Fonte: Autoria própria

4.4.3 O PMH com n portas

Para finalizar, uma análise generalizada com a situação em que o PMH apresente n portas (PMHN), com $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 3$. Observe na Figura 4.14 que o jogador irá vencer mantendo a PE, unicamente, se tiver escolhido a PV no início. Assim sendo, a probabilidade é de uma dentre as n opções de portas, ou seja, $\frac{1}{n}$. Para que o participante vença trocando a PE, necessariamente $PV \neq PE$, logo são $n-1$ possibilidades dentre as n opções possíveis, ou seja a probabilidade é de $\dfrac{n-1}{n}$.

Figura 4.14: Árvore de Probabilidades do PMHN, supondo que a porta vencedora seja a número 1



Fonte: Autoria própria

Note que as probabilidades de se vencer mediante a troca, observadas nas análises do PMH 4.3, PMH4 4.4.1 e PMH100 4.4.2, vão de encontro ao valor de $\dfrac{n-1}{n}$, para $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 3$, como mostra a Tabela 4.2.

Tabela 4.2: Probabilidades no PMHN

Número de Portas	P(V|M)	P(V|T)
3 portas	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
4 portas	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
100 portas	$\frac{1}{100}$	$\frac{99}{100}$
n portas	$\frac{1}{n}$	$\frac{n-1}{n}$

Fonte: Autoria própria

5 Produto Educacional

O Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), cujo regimento pode ser encontrado no site[1] do próprio programa, tem como objetivo proporcionar formação matemática aprofundada e relevante ao exercício da docência. Visando dar ao egresso a qualificação certificada para o exercício da profissão de professor, ao final do curso, o mestrando deve produzir um trabalho de acordo com temas específicos pertinentes ao currículo da Educação Básica e de impacto significativo na prática didática em sala de aula. Baseado nessa proposta, foi elaborado um produto educacional utilizando o *software* GeoGebra [56], que associa o conteúdo de Probabilidade ao Problema de Monty Hall. Esse material está disponível de maneira gratuita no formato de um livro digital, o GeoGebra Book (GGB).

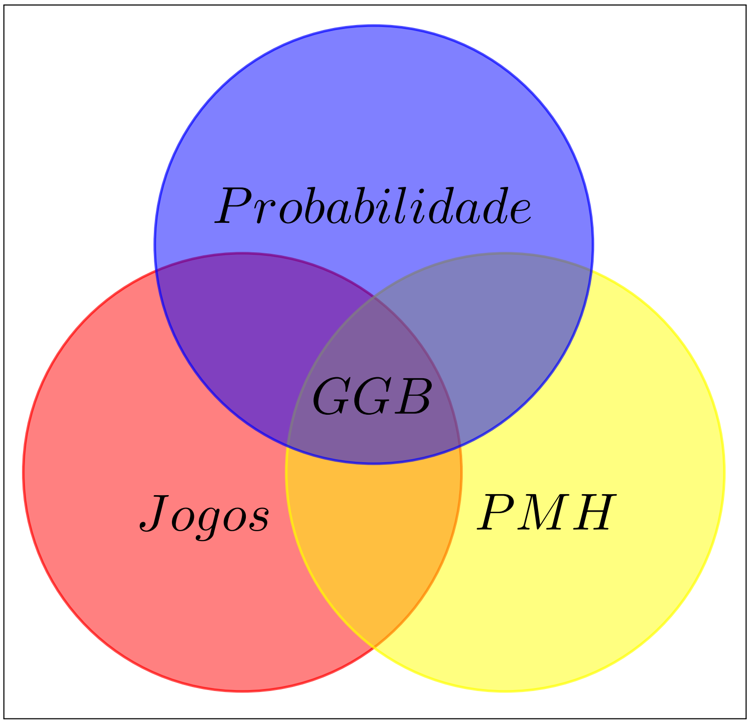
As motivações para a utilização desse recurso foram sua facilidade de edição e divulgação, uma vez que são feitas de maneira remota; a grande variedade de ferramentas que podem ser incorporadas a este *e-book*, que além de textos e figuras, permite a inclusão de vídeos, *applets*, arquivos em pdf, questões, notas e *links* da *web*; e a escassez de trabalhos que se utilizem desse versátil instrumento como recurso pedagógico. Por exemplo, buscando por pesquisas sobre o assunto "GeoGebra Book", ou ainda "GeoGebrabook", no repositório da BDTD, foram encontrados apenas três dissertações que abordam a utilização do GGB voltadas ao ensino de Geometria Plana, Analítica e Espacial, respectivamente. Com relação ao acervo de periódicos da CAPES[2], estão disponibilizados dois artigos sobre o uso do GGB como ferramenta no ensino de Cálculo e na resolução de problemas de máximo e mínimo de funções, ambos voltados principalmente para o Ensino Superior.

Assim sendo, com o propósito de enriquecer o acervo da área, foi criado um material didático para ser utilizado nas aulas de Álgebra do Ensino Médio, em contrapartida à maioria dos *applets* do GeoGebra serem voltados para o campo da Geometria. O intuito é

[1]Disponível em https://profmat-sbm.org.br/regimento/.
[2]Disponível em https://www.periodicos.capes.gov.br/.

aliar a parte teórica de Probabilidade aplicada na prática com jogos adaptados do PMH, como esquematizado na Figura 5.1.

Figura 5.1: GGB alia a teoria da probabilidade na prática do PMH



Fonte: Autoria própria

Neste capítulo serão descritos o processo de criação do GGB; a organização da parte teórica do livro; a resolução das atividades nele contidas e a adaptação e extensão do jogo envolvendo o PMH, parte central desta dissertação.

5.1 GeoGebra Book

A plataforma GeoGebra é um sistema de geometria dinâmica aliada à computação algébrica. Segundo informações contidas no site do próprio desenvolvedor[3], este *software* matemático atende a todos os níveis de ensino e permite serem trabalhados os conteúdos de Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos, em um único pacote de fácil acesso e manipulação. Idealizado e desenvolvido por Markus Hohenwarter, a plataforma foi resultado de sua tese de Doutorado no Ensino de Matemática, na Universidade de Salzburg. Atualmente, o GeoGebra possui uma comunidade de milhões de usuários em praticamente todos os países e se tornou um líder na área de *softwares* de matemática dinâmica, apoiando o ensino e a aprendizagem em

[3]Disponível em https://www.geogebra.org/about.

Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática. A instalação do aplicativo é opcional, uma vez que o mesmo pode ser acessado via internet, até mesmo por meio de celulares. As novas tecnologias, tais como, *notebooks*, *tablets*, *smartphones* estão modificando a forma em que vivemos, cabendo ao processo educacional se adequar a essa evolução, como observado por Borba [57]. A BNCC define como Competência Geral 5 da Educação Básica

> compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva. [11, p.9]

Segundo Abar [58], o GeoGebra representa uma importante revolução, principalmente com relação às aulas de Matemática, que incorporam cada vez mais as tecnologias de informação e comunicação. Baldini e Cyrino [59] o consideram um dos *softwares* de maior evidência na educação matemática devido ao seu fácil acesso, disponibilidade em várias plataformas, linguagem e *layout* simples e práticos. Pesquisando no acervo do repositório do PROFMAT [60] foram registradas, até o momento da pesquisa, 354 dissertações que trazem o GeoGebra como parte integrante do trabalho, demonstrando a sua relevância dentro de um programa de Mestrado Profissional em Matemática.

Com o passar dos anos, este utilitário tem expandido suas possibilidades de aplicação dentro da sala de aula. Nesse cenário, foi incluído em sua interface o recurso de criação de um *e-book online*, o GeoGebra Book. Tal mecanismo foi disponibilizado no site da plataforma, a partir de 2012, segundo informado pelo escritório do GeoGebra, via *e-mail*[4]. A ferramenta está associada às demais funcionalidades do *software*, sendo ofertada gratuitamente através do site oficial da plataforma[5].

O GGB representa um compilado de materiais e atividades relativas às ferramentas ofertadas no próprio GeoGebra. Permite ao usuário cadastrado, criar, compartilhar, consultar e usufruir de todos os recursos deste acervo. Toda coletânea hospedada no perfil pessoal pode ser disponibilizada publicamente ou mantida restrita ao uso particular e de terceiros, via *link*. Dentre os diversos recursos que o GeoGebra Book pode exibir, é possível citar:

a) Textos: apresentação, descrição, ou explicação de algum conteúdo ou atividade;

[4] *E-mail* para contato: office@geogebra.org.
[5] Disponível em https://www.geogebra.org/?lang=pt.

b) Vídeos: videoaulas, palestras, *sketchs*, filmes;

c) Imagens: ilustrações, fotografias, mapas, resumos;

d) *Hiperlinks*: arquivos em formato pdf, páginas da *web*;

e) Perguntas: questionários abertos ou fechados, formulários;

f) *Applets*: utilizam as diversas funcionalidades e aplicabilidades do GeoGebra.

O uso do GGB tem como pontos positivos: a facilidade e rapidez no compartilhamento e acesso aos materiais, sem a demanda de consumo de memória do sistema operacional; uma vez que a plataforma pode ser acessada via *smartphone*, se torna dispensável o uso do laboratório de informática; por ser um livro digital, sua edição, expansão e refinamento podem ser feitos progressivamente, concomitante à sua disponibilização ao público; e a alta interatividade com os demais recursos da plataforma GeoGebra. Como pontos negativos, destacam-se algumas adversidades na edição de texto e imagens, dificuldade na verificação das respostas das questões fechadas, e a ausência de um relatório gerado pelo GeoGebra a respeito da utilização do GGB.

5.2 Criação do GeoGebra Book

O livro digital elaborado foi criado buscando oferecer um conjunto de recursos variados aos leitores. A proposta foi aliar os elementos teóricos sobre Probabilidade, complementados com exemplos resolvidos e exercícios propostos, introduzindo o caminho para a aplicação de jogos, adaptando e expandindo o PMH.

Como diferencial deste trabalho, pode se destacar a utilização de poucos textos expostos diretamente no GGB. Apesar de se tratar de um livro digital, a ideia foi diminuir a quantidade de conteúdo apresentado na forma escrita tradicional, substituindo-o por figuras, vídeos, resumos ilustrados e alguns *applets*, no intuito de suavizar e optimizar a "leitura" por parte do usuário. A alternância desses recursos, aliada a *hiperlinks* que direcionam o leitor para arquivos mais substanciais de textos e conteúdos, o transformam num recurso dinâmico e de fácil manipulação. Outro destaque distintivo para o GGB criado, foram os seus *applets*. Na maior parte das vezes, os alunos procuram uma visualização facilitada pela geometria dinâmica do *software*. Porém, os *applets* deste *e-book* foram desenvolvidos ou adaptados de outros já existentes, para ilustrar conceitos algébricos do Ensino Médio.

Para a criação do GGB foram utilizados os embasamentos adquiridos pelas referências do 2º Congresso Brasileiro de GeoGebra, em específico o minicurso 6 sobre GeoGebra Book, ministrado pela professora Doutora Celina Abar; as informações obtidas nas Oficinas de Experiências Matemáticas 2021 da UFSM; as experiências vividas durante a disciplina de Recursos Computacionais do PROFMAT, ministrada pelo professor Doutor Gilmer Peres; e pelas orientações e diretrizes dos trabalhos encontrados sobre GGB nas plataformas mencionadas na introdução deste Capítulo 5.

O produto educacional criado, intitulado "Probabilidade aplicada ao Problema de Monty Hall"[6], foi estruturado em cinco capítulos, como mostra a Figura 5.2.

Figura 5.2: *Layout* inicial do GGB criado

Fonte: https://www.geogebra.org/m/thhzw8h3

5.2.1 Capítulo 1: Introdução

Neste primeiro capítulo é descrita uma breve apresentação do livro digital, seus objetivos e as motivações de sua criação, indicadas na Figura 5.3. Ao clicar no nome do autor na parte superior, outros trabalhos do professor Edilberto Paiva que estejam disponibilizados publicamente no GeoGebra, serão mostrados; se selecionar o nome do autor no meio do texto, será exibido o seu currículo lattes no Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq). Para auxiliar na utilização do *e-book* por parte do usuário, está disponibilizado um sumário com *hiperlinks*, Figura 5.4, que redirecionam o leitor para a seção desejada.

[6] Disponível em https://www.geogebra.org/m/thhzw8h3.

Figura 5.3: Apresentação e motivação do GGB

Fonte: https://www.geogebra.org/m/thhzw8h3#material/rmvgmtkd

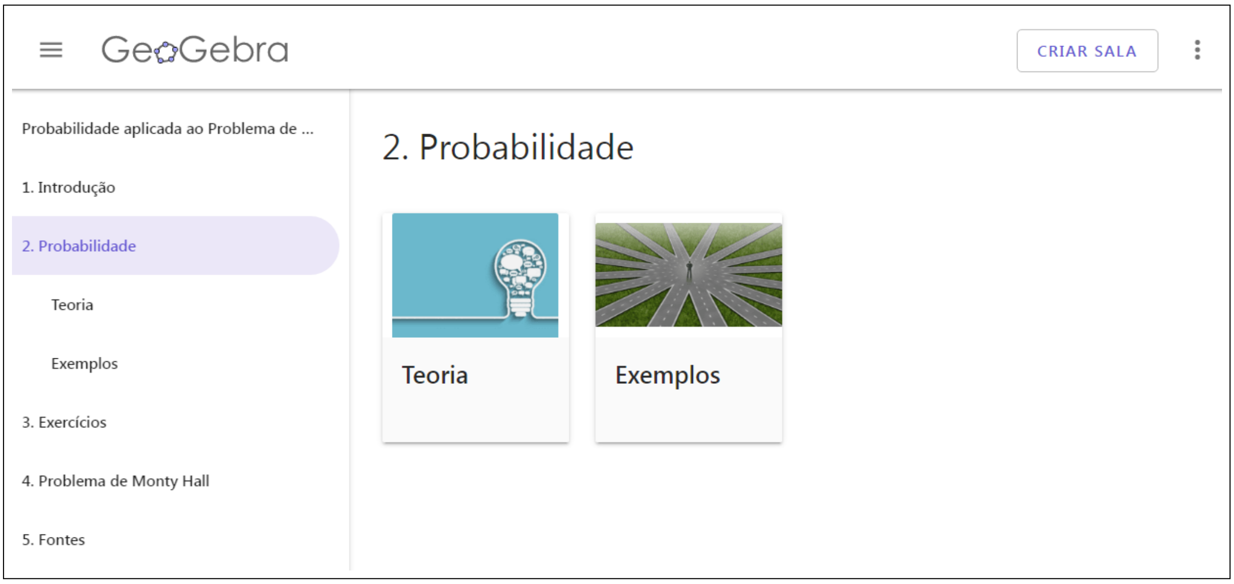
Figura 5.4: Sumário do GGB

Fonte: https://www.geogebra.org/m/thhzw8h3#material/rmvgmtkd

5.2.2 Capítulo 2: Probabilidade

Este capítulo é dividido em duas seções, Teoria e Exemplos, ilustradas na Figura 5.5. A primeira apresenta a parte teórica acerca da temática de Probabilidade. Já a segunda traz exemplos de problemas probabilísticos.

Figura 5.5: Teoria e Exemplos de Probabilidade



Fonte: https://www.geogebra.org/m/thhzw8h3#chapter/698752

Como um dos objetivos deste trabalho é apresentar uma proposta de material didático, que utiliza um jogo adaptando o PMH para introduzir e desenvolver o raciocínio probabilístico, acarretou com que a parte teórica do GGB fosse assim disponibilizada:

- **Parte Teórica I**

  Composta por um material mais denso e amplo, a parte teórica I disponibiliza o Capítulo 3 desta dissertação, em formato pdf, como mostra a Figura 5.6 (a).

- **Parte Teórica II**

  Em seguida, foi realizada uma busca por vídeos sobre o tema de probabilidade no YouTube. O intuito era optar por uma videoaula breve, dinâmica, bem explicativa com uma linguagem fácil e atual. Foi então selecionada uma videoaula[7] do canal do YouTube "Gis com Giz Matemática" da professora Gis Bezerra, indicado na Figura 5.6 (b). A professora apresenta o tema com clareza e simplicidade, exemplificando

[7]Disponível em https://www.youtube.com/watch?v=AZH67sWDW5w.

com questões do cotidiano, apresentando os principais elementos e propriedades, e resolvendo algumas questões características.

- **Parte Teórica III**

  Por fim foi disponibilizado um mapa mental[8], ilustrado na Figura 5.6 (c), para que o leitor possa realizar uma consulta a um resumo objetivo com as principais fórmulas, propriedades e conceitos sobre probabilidade.

Figura 5.6: Parte Teórica

(a) PDF do Capítulo 3 desta dissertação

(b) Videoaula sobre probabilidade

(c) Mapa mental resumo

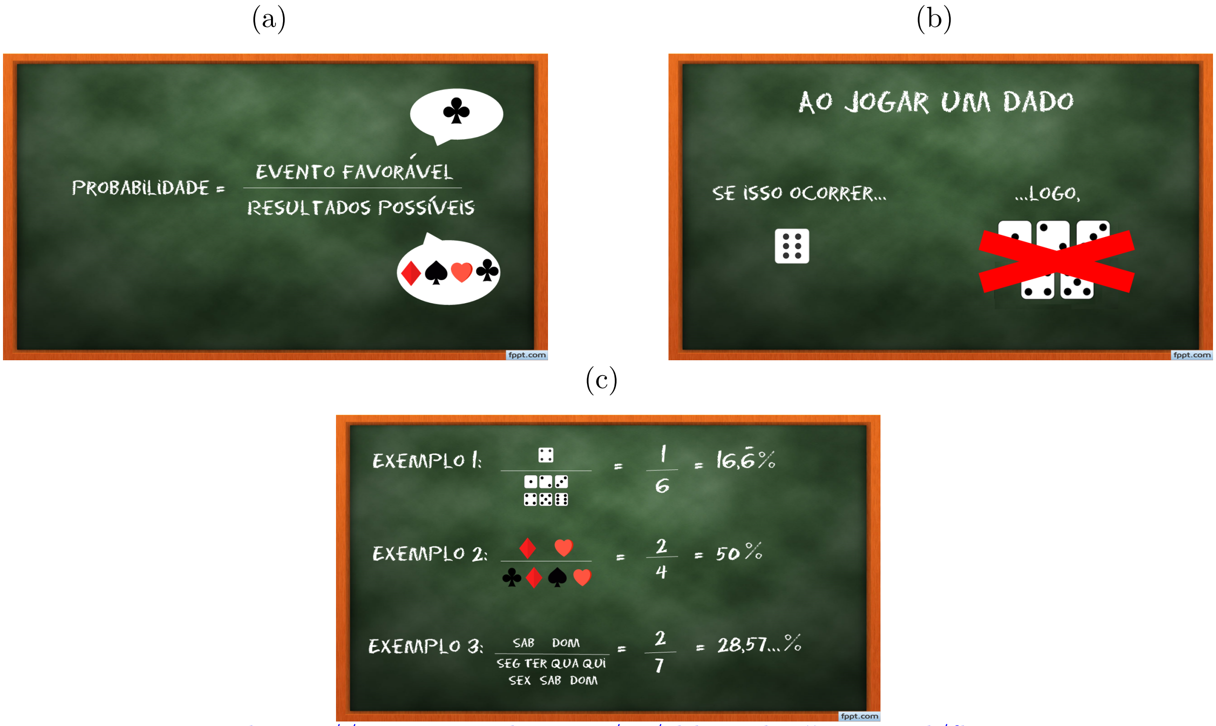
Fonte: https://www.geogebra.org/m/thhzw8h3#material/qqyamnma

A seção de Exemplos, foge um pouco do tradicional modelo de atividades resolvidas, sendo representados por figuras. A proposta foi escapar da descrição passo a passo para se chegar ao gabarito, no formato de texto, sendo substituído por imagens mais sucintas e ilustrativas de autoria própria. A Figura 5.7 retrata alguns dos exemplos exibidos. O item

[8]Disponível em https://br.pinterest.com/pin/750201250410485473/.

(a) representa a fórmula para se calcular a probabilidade de sair uma carta de paus retirada aleatoriamente de um baralho, ou seja, $\frac{1}{4}$. A situação retratada em (b) é o lançamento de um dado, na qual a face voltada para cima é o número "6". Por fim, em (c) o exemplo 1 se refere a probabilidade de sair o número "4" no lançamento de um dado, isto é, $\frac{1}{6}$; o exemplo 2 determina que a possibilidade de uma carta ser vermelha, ao ser retirada aleatoriamente de um baralho, é de 50%; enquanto que no exemplo 3 é demonstrada que a possibilidade de uma determinada data cair no final de semana é de $\frac{2}{7} \approx 28,57\%$.

Figura 5.7: Algumas das imagens exibidas na seção de Exemplos



Fonte: https://www.geogebra.org/m/thhzw8h3#material/fbe74zpe

5.2.3 Capítulo 3: Exercícios

Na sequência são propostas duas séries de atividades que alternam entre questões abertas e fechadas. A primeira, analisa exercícios de probabilidade no lançamento de dados e a segunda a respeito de cálculos probabilísticos na retirada de cartas de um baralho. Apesar da evolução constante dos *games*, tanto jogos de cartas como de dados ainda fazem parte do cotidiano dos alunos, devido a sua fácil manipulação e entendimento. A sequência de atividades escolhidas foi pensada com o intuito de criar um raciocínio lógico, partindo de situações problemas mais simples e evoluindo para questões de probabilidade condicional, preparando a introdução do PMH. As questões foram divididas em Atividades

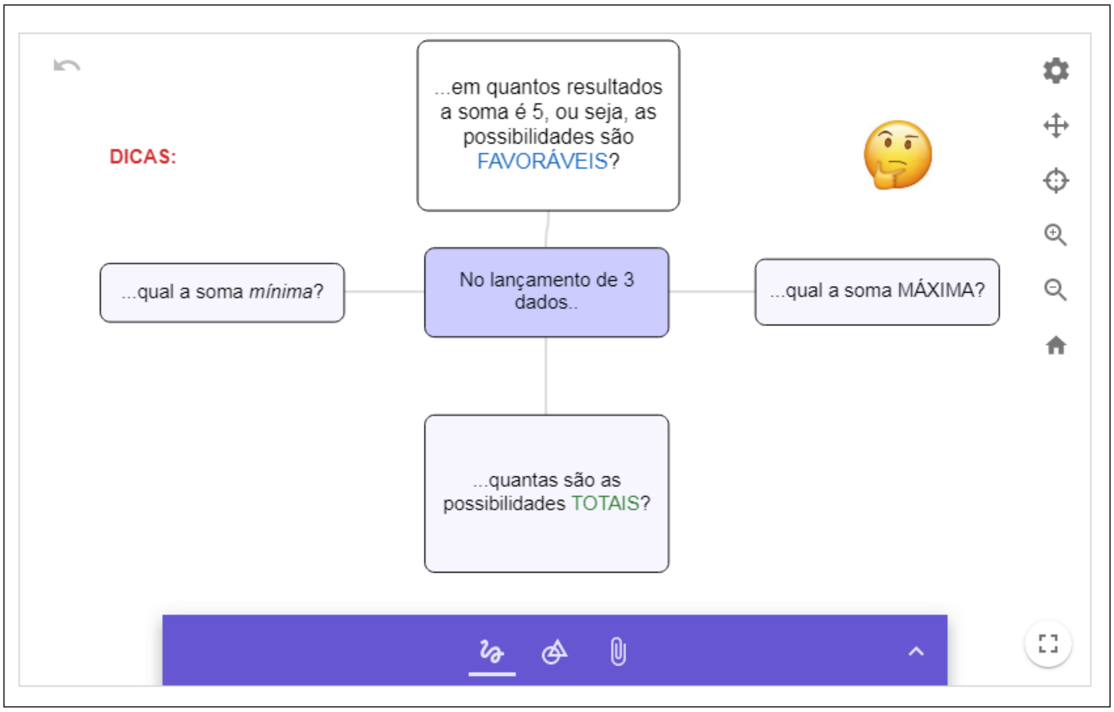
Propostas: Dados e Baralho, Figura 5.8.

Figura 5.8: A seção de Exercícios contemplam atividades envolvendo o lançamento de dados e retirada de cartas de um baralho

Fonte: https://www.geogebra.org/m/thhzw8h3#chapter/698785

Após cada um dos enunciados, depois dos espaços destinados às respostas, é apresentado na forma de notas, algumas dicas para resoluções das atividades, como ilustradas na Figura 5.9. Além disso, tais notas servem também para que o leitor possa deixar registrado seu raciocínio ou suas contas, de modo a melhor visualizar a questão.

Figura 5.9: Notas com dicas a respeito das questões



Fonte: https://www.geogebra.org/m/thhzw8h3#material/nrsgptwx

Caso o leitor apresente alguma dúvida durante a resolução dos exercícios, são disponibilizados no começo da seção, vide Figura 5.10, *links* para o Capítulo 2 do GGB, no qual o usuário pode consultar a Teoria e os Exemplos. Além disso, são oferecidos também, atalhos para videoaulas sobre atividades de probabilidade com dados e baralho, do canal do YouTube "Gênio da Matemática"[9]; e um resumo sobre a material elaborado pelo grupo Clubes de Matemática da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP)[10].

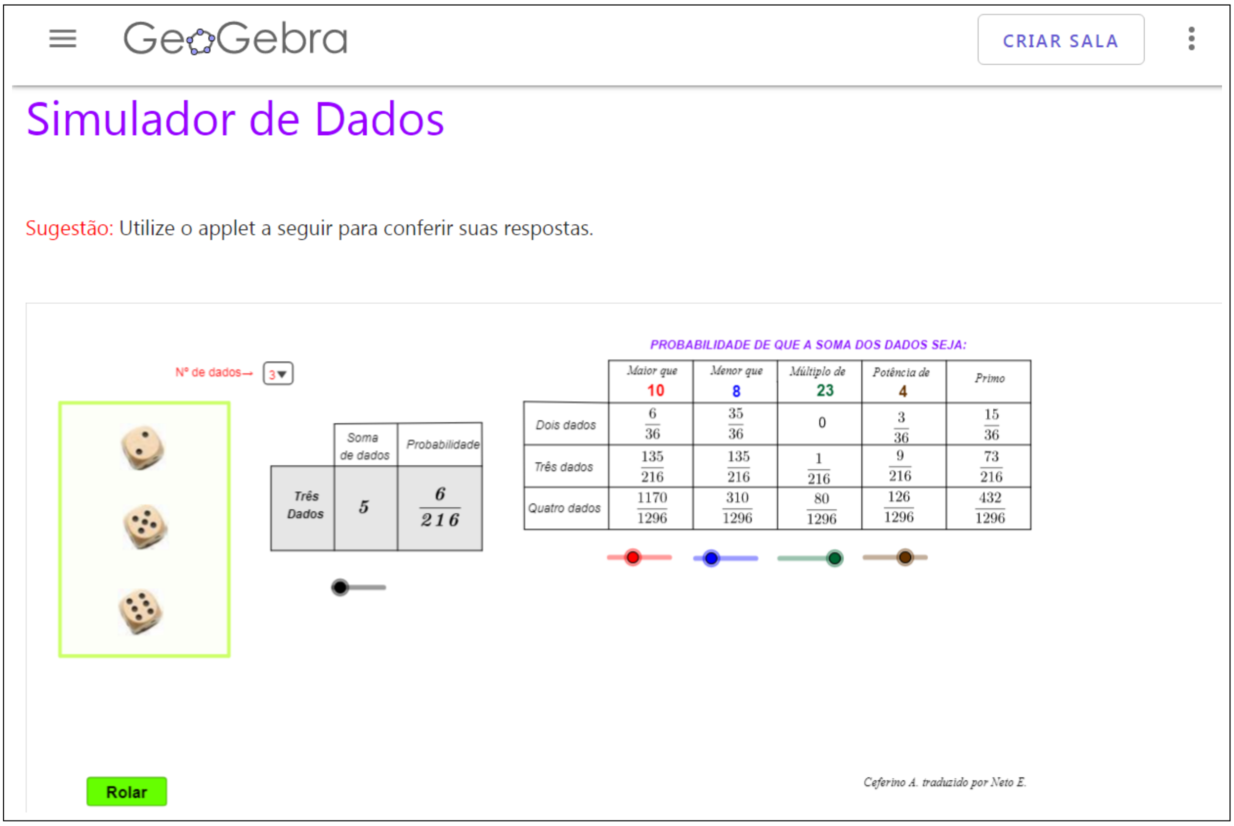
Figura 5.10: Cabeçalho dos exercícios envolvendo dados, similar ao das atividades com cartas de um baralho

Fonte: https://www.geogebra.org/m/thhzw8h3#material/nrsgptwx

Ao término das questões 7 e 13 está disponibilizado este capítulo em formato pdf, de modo similar à Figura 5.6 (a), com as discussões acerca dos gabaritos das atividades. Na seção de dados, também é ofertado um *applet* do próprio GeoGebra que foi adaptado e traduzido, como mostrado na Figura 5.11, para que o usuário possa simular o lançamento de dados, visualizando as situações-problema propostas nos exercícios. O *applet* possui também uma calculadora de probabilidades.

[9]Disponível em https://www.youtube.com/c/geniodamatematica1.
[10]Disponível em http://clubes.obmep.org.br/blog/sala-de-estudo-probabilidades/.

Figura 5.11: Simulador e calculadora de probabilidades para lançamentos de dados



Fonte: Adaptado e traduzido a partir de https://www.geogebra.org/m/JzSHbt9h

- **Atividades Propostas: Dados**

As atividades referentes ao lançamento de dados, questões 01 a 07, se iniciam com o lançamento de um dado, evoluindo para o lançamento de três dados. A seguir, o raciocínio esperado para a resolução das questões:

Questão 01

Qual a probabilidade de que no lançamento de um dado saia o mesmo resultado por duas vezes consecutivas?

Solução: No primeiro lançamento, como não existe nenhuma condição específica definida, ou seja, pode sair qualquer uma das seis faces, então a probabilidade é de $\frac{6}{6} = 1$. No segundo lançamento, a condição exigida é que a face mostrada seja a mesma que a do primeiro lançamento, assim sendo, $\frac{1}{6}$. Multiplicando-se $1.\frac{1}{6} = \frac{1}{6}$, portanto a probabilidade é de $\frac{1}{6}$.

Uma outra proposta de resolução seria enumerando todas as possibilidades para dois lançamentos, representados pelo par ordenado (L_1,L_2), com L_1 sendo o número do primeiro lançamento e L_2 do segundo. Dessa forma, as possibilidades totais seriam: (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6). Logo, são 36 possibilidades totais. Temos que em 6 oportunidades $L_1 = L_2$, sendo elas (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5) e (6,6). Portanto, a probabilidade é de $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Questão 02

No lançamento de dois dados, qual a probabilidade de que saia dois "6"?

Solução: No primeiro lançamento, existe agora a condição inicial de sair obrigatoriamente um "6", portanto a probabilidade é de $\frac{1}{6}$. No segundo lançamento, a condição exigida é que a face mostrada seja o "6" novamente, logo $\frac{1}{6}$. Multiplicando-se $\frac{1}{6}.\frac{1}{6}$, então a probabilidade pedida é de $\frac{1}{36}$.

Analogamente à **Questão 01**, outro modo de se fazer a questão seria avaliando os 36 pares ordenados possíveis (L_1,L_2). Dessa maneira, apenas a combinação (6,6) satisfaz o enunciado, por isso a probabilidade é de $\frac{1}{36}$.

Questão 03

Existe diferença entre a Questão 01 e a Questão 02?

Solução: Nesta questão aberta, o objetivo é que o leitor observe que o par ordenado (6,6), que satisfaz à **Questão 02**, é um dentre os seis pares ordenados (L_1,L_2) que atendem à **Questão 01**, fazendo com que a probabilidade desta questão seja seis vezes maior do que a da **Questão 02**.

Questão 04

Qual a probabilidade de que a soma de três dados cúbicos dê um valor menor que 6?

Solução: A resolução desta questão perpassa por uma mistura entre as soluções apresentadas nas duas primeiras questões. No cálculo das possibilidades totais, temos que, no lançamento de três dados cúbicos, serão 6 possibilidades para o primeiro dado, 6 para o segundo e 6 para o terceiro, totalizando $6.6.6 = 216$ combinações possíveis. Destas, temos que apenas 10 apresentam um somatório menor do que 6, sendo elas: (1,1,1), (1,1,2), (1,1,3), (1,2,1), (1,2,2), (1,3,1), (2,1,1), (2,1,2),(2,2,1),(3,1,1). Desse modo, a probabilidade é de $\frac{10}{216}$.

Questão 05

Qual a probabilidade de que a soma de 3 dados cúbicos dê um valor maior ou igual a 6?

Solução: Para resolver esta questão basta o leitor recordar que a soma das probabilidades de todos os eventos possíveis é igual a 100% $= 1$. Logo, a soma da probabilidade da soma ser menor que 6, com a probabilidade da soma ser maior ou igual a 6, deve ser 1. Portanto, a probabilidade pedida pode ser encontrada fazendo $1 - \frac{10}{216} = \frac{206}{216}$.

Questão 06

Qual a relação entre a Questão 04 e a Questão 05?

Solução: Como foi inicialmente comentado na **Questão 05**, os eventos envolvidos nas duas atividades são complementares, ou seja, a soma de suas probabilidades deve contemplar todas as possibilidades do espaço amostral, logo deve ser igual a 1. Consequentemente, o fato da **Questão 04** ser simples de se resolver por enumeração, facilita a resolução da **Questão 05**, uma vez que os eventos citados em ambas questões são complementares.

Questão 07

No lançamento de dois dados, qual a probabilidade de sair dois números iguais, sabendo que os números que saíram são pares?

Solução: Sejam I o evento no qual os dois números que saíram são iguais e P o evento em que ambos são pares. Utilizando a fórmula geral para calcular esta Probabilidade Condicional, como abordado na Subseção 3.2.7, tem-se então que $P(I|P) = \frac{P(I \cap P)}{P(P)}$. O numerador é igual a $\frac{3}{36}$, uma vez que são 3 opções, (2,2), (4,4) e (6,6), dentre os 36 pares ordenados (L_1,L_2) possíveis. Já o denominador é obtido pelo produto $\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, no qual $\frac{1}{2}$ é a chance do número que sair em cada um dos lançamentos seja par. Assim sendo, a probabilidade de sair dois números iguais, uma vez que os números que saíram são pares é dada por $\frac{\frac{3}{36}}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{12}.\frac{4}{1} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$. Outra forma para se resolver seria simplesmente listando os pares ordenados no qual saíram dois números pares, que é a condição inicial: (2,2), (2,4), (2,6), (4,2), (4,4), (4,6), (6,2), (6,4), (6,6). Note que apenas em três deles os números foram repetidos, logo a probabilidade procurada é de $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

- **Atividades Propostas: Baralho**

As atividades referentes à retirada de cartas de um baralho, questões de 08 a 13, iniciam explorando o conceito de eventos dependentes, uma vez que trabalham a ideia das cartas serem retiradas sem reposição. Seguem algumas sugestões de como resolvê-las:

Questão 08

Qual a probabilidade de se retirar duas cartas aleatórias do baralho e ambas serem do mesmo naipe?

Solução: A retirada da primeira carta não possui nenhuma condição específica, ou seja, ela pode ser qualquer uma dentre as 52 cartas existentes, logo $\frac{52}{52} = 1$. Como uma carta foi retirada, o baralho passará a contar com 51 cartas no total, sendo 12 apenas do naipe da primeira. Como a segunda carta deve ser necessariamente do mesmo naipe da primeira, existem 12 possibilidades dentre as 51 cartas restantes. Então a probabilidade pedida é calculada pelo produto $1.\frac{12}{51} = \frac{12}{51}$.

Questão 09

Qual a probabilidade de se retirar duas cartas aleatórias do baralho e ambas serem de ouros?

Solução: A retirada da primeira carta possui agora a condição específica dela ser de ouros. Assim sendo, a probabilidade é de $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$, uma vez que são 13 cartas de cada um dos quatro naipes. Como a segunda carta a ser retirada também deve ser de ouros, existem agora 12 possibilidades dentre as 51 cartas restantes, logo $\frac{12}{51}$. Dessa maneira a probabilidade é de $\frac{1}{4}.\frac{12}{51} = \frac{3}{51}$.

Questão 10

Existe diferença entre a Questão 08 e a Questão 09?

Solução: A **Questão 08** retrata a situação em que duas cartas retiradas aleatoriamente de um baralho são do mesmo naipe, ou seja, podem ser duas cartas de espadas, paus, copas ou ouros. Note que a **Questão 09** é um caso específico da **Questão 08**, na qual as duas cartas retiradas são de ouros, necessariamente. Assim sendo, expandindo a resposta da **Questão 09** para os demais naipes, teríamos que a possibilidade das duas cartas serem de espadas é igual a $\frac{3}{51}$, de copas também $\frac{3}{51}$, assim como de paus $\frac{3}{51}$. Somando a probabilidade de cada um dos naipes $\frac{3}{51} + \frac{3}{51} + \frac{3}{51} + \frac{3}{51} = \frac{12}{51}$ que é justamente a resposta da **Questão 09**.

Questão 11

Ao se retirar uma carta aleatoriamente de um baralho, qual situação possui maior probabilidade de acontecer: a carta ser uma letra vermelha ou a carta ser um número de espadas? JUSTIFIQUE SUA RESPOSTA.

Solução: A probabilidade da carta retirada aleatoriamente ser uma letra (A,K,Q,J) é dada pelo produto entre $\frac{16}{52}$, que é a possibilidade dela ser uma letra, por $\frac{1}{2}$, que é chance dela ser vermelha. Logo, a probabilidade é de $\frac{16}{52}.\frac{1}{2} = \frac{8}{52}$. Para que a carta seja um número de espadas, basta multiplicar a possibilidade dela ser um número que é de $\frac{36}{52}$, pela chance dela ser de espadas que é $\frac{1}{4}$, logo $\frac{36}{52}.\frac{1}{4} = \frac{9}{52}$. Portanto, a probabilidade de se retirar um número de espadas é maior do que a de sair uma letra vermelha, pois $\frac{9}{52} > \frac{8}{52}$.

Questão 12

Qual a probabilidade de ao retirarmos uma carta do baralho ela ser um número primo, sabendo que ela é vermelha?

Solução: Sejam P o evento no qual a carta retirada é um número primo e V o evento em que ela é vermelha. Utilizando a fórmula geral de Probabilidade Condicional, tem-se que $P(P|V) = \frac{P(P \cap V)}{P(V)}$. O numerador representa a possibilidade da carta ser um número primo (2, 3, 5, 7) e vermelha (copas ou ouros), logo 8 possibilidades dentre as 52 possíveis. O denominador é dado por $\frac{1}{2}$, uma vez que a carta necessariamente é vermelha. Assim sendo, a probabilidade de ao se retirar uma carta do baralho ela ser um número primo, sabendo que ela é vermelha é $P(P|V) = \frac{P(P \cap V)}{P(V)} = \frac{\frac{8}{52}}{\frac{1}{2}} = \frac{8}{52}.\frac{2}{1} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$.

Questão 13

Qual probabilidade é maior:

A) ao se lançar 3 dados honestos, os três números serem PARES.

ou

B) ao se retirar 3 cartas aleatoriamente de um baralho, as três serem da MESMA COR.

Solução: A probabilidade de ao se lançar 3 dados honestos, os três números serem pares é dada por $\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$, uma vez que $\frac{1}{2}$ é a possibilidade de em cada um dos dados sair um número par. Já ao se retirar 3 cartas aleatoriamente de um baralho, a probabilidade das três serem da mesma cor é dada por $\frac{52}{52}.\frac{25}{51}.\frac{24}{50} = \frac{12}{51} = \frac{4}{17}$, visto que para a primeira carta não há condição específica, a segunda deverá ser uma dentre as 25 restantes da cor da primeira, e para a última ficaram 24 opções dentre as 50 que sobraram. Logo, $\frac{4}{17} > \frac{1}{8}$, e portanto a probabilidade maior é da opção B.

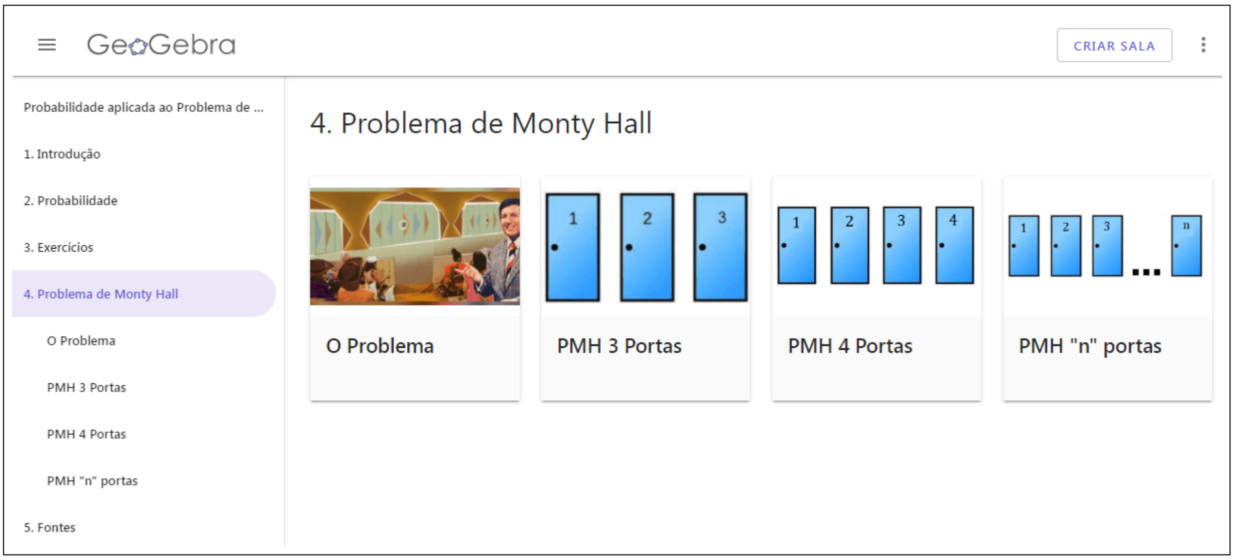
5.2.4 Capítulo 4: Problema de Monty Hall

Neste capítulo, inicialmente foi introduzido o PMH, apresentando de forma breve a história do seu surgimento, a dinâmica e o objetivo do jogo, como também foi feito no

Capítulo 4 desta dissertação. Caso o leitor se interesse por outras fontes, são oferecidos resumos explicativos sobre o PMH por meio da leitura da matéria[11] do colunista econômico Samy Dana, publicada no Portal G1, ou ainda por um vídeo[12] curto do canal do YouTube "Me Salva!".

Depois de conhecer um pouco mais sobre o problema, são propostos exercícios referentes a probabilidade de se vencer no PMH clássico com 3 portas. Por fim, o Problema de Monty Hall é estendido para 4, ..., n portas, como mostra a Figura 5.12, a fim de possibilitar ao usuário chegar a uma conclusão a respeito da estratégia vencedora.

Figura 5.12: Seções do Capítulo 4 do GGB



Fonte: https://www.geogebra.org/m/thhzw8h3#chapter/698789

As seções PMH 3, 4 e n portas têm uma estrutura muito similar, na qual o leitor é convidado a jogar o PMH com as n portas, respectivamente. Todos começam com questões envolvendo o cálculo da probabilidade de se acertar e de se errar a porta vencedora inicialmente. O objetivo é construir uma linha de raciocínio que guiará ao desfecho encontrado na Tabela 4.2. Na sequência, após serem abertas $n - 2$ portas, revelando cabras, o jogador deve apontar se opta pela manutenção da porta selecionada a princípio ou se prefere trocar pela outra porta que permanece fechada. Em seguida, é proposta a simulação do PMH utilizando *applets*, Figura 5.13, por diversas vezes. O participante deve ora manter a escolha inicial, ora trocar de porta, com o intuito de se fazer um comparativo. O número de tentativas vai aumentando com objetivo do leitor observar se ele vence mais

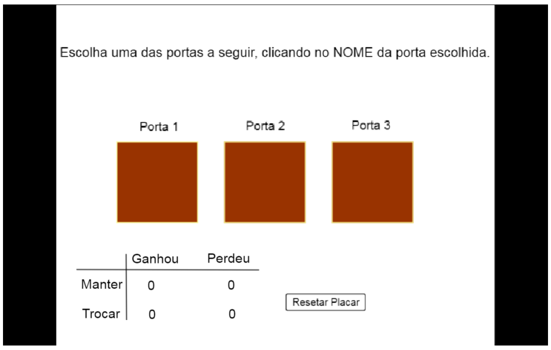
[11]Disponível em https://g1.globo.com/economia/educacao-financeira/blog/samy-dana/post/2018/07/12/o-enigma-de-monty-hall-e-as-nossas-escolhas-irracionais.ghtml.

[12]Disponível em https://www.youtube.com/watch?v=Hh7pDPnKK-4&t=6s.

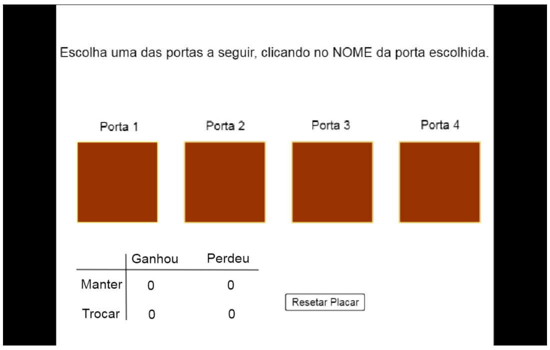
mantendo ou trocando a porta inicialmente escolhida.

Figura 5.13: *Applets* do PMH com 3, 4 e n portas

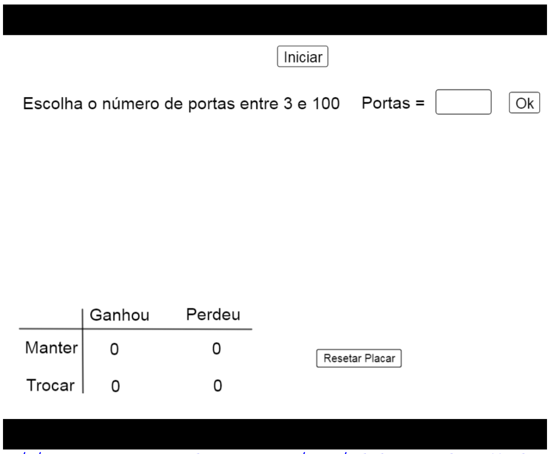
(a) 3 portas



(b) 4 portas



(c) n portas



Fonte: https://www.geogebra.org/m/thhzw8h3#chapter/698789

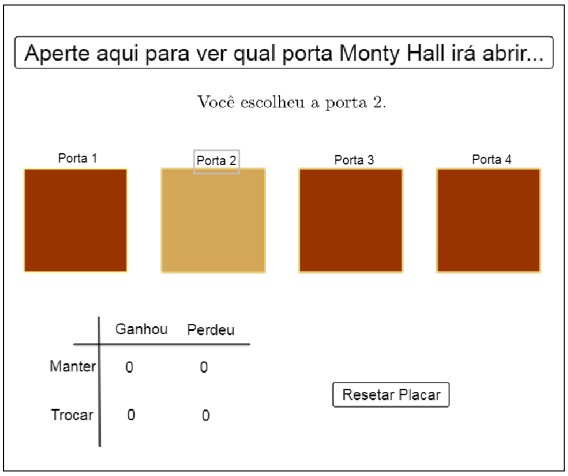
Vários são os materiais encontrados sobre o PMH no acervo do GeoGebra. Dentre as atividades lá encontradas, foi selecionada para servir como modelo para o jogo, o *applet*[13] do autor Sudeep Gokarakonda. Inicialmente este material foi traduzido para o português. Na sequência foi estudada a dinâmica de funcionamento deste *applet* sobre o PMH clássico com 3 portas, observando os comandos necessários para a elaboração de um material que contemplasse mais portas. Dando prosseguimento, foi criado então uma atividade, o PMH4, tendo como base o PMH clássico traduzido, incluindo agora mais uma porta, como retratado na Figura 5.14.

Por fim, foi desenvolvido um *applet* que simula o Problema de Monty Hall com n portas (PMHN), Figura 5.15. Este aplicativo, difere do PMH e PMH4, pois possui apenas a dinâmica de texto, abolindo as animações, vide que o usuário pode selecionar quantas portas ele deseje, sendo possível de 3 a 100 portas. Depois da última questão desta seção,

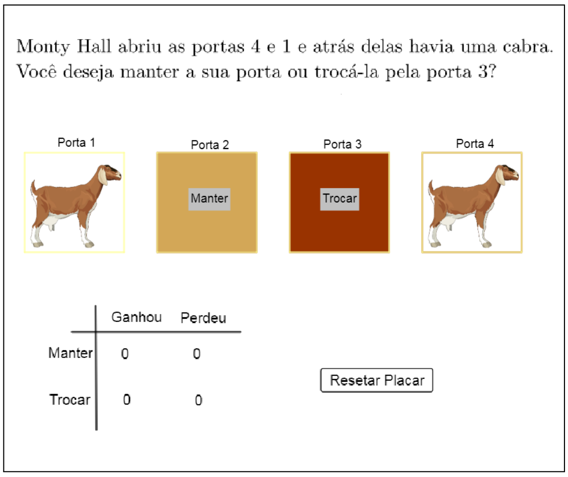
[13]Disponível em https://www.geogebra.org/m/tyakctnw.

Figura 5.14: Exemplo de sequência de escolhas num jogo do PMH4

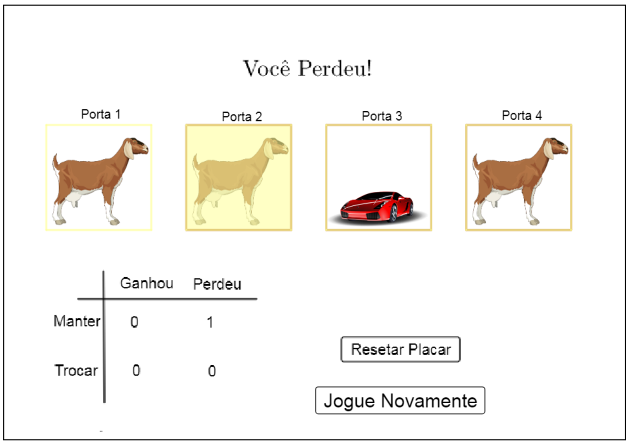
(a) Jogador escolheu a porta 2



(b) Duas portas foram abertas



(c) O jogador manteve a porta 2 e perdeu



Fonte: https://www.geogebra.org/m/thhzw8h3#material/pdtpeksx

o usuário deverá preencher um questionário[14] sobre a utilização do GGB. O objetivo é dar um *feedback* sobre quem são os usuários do *e-book*, se gostaram do livro, dos *applets*, etc., enfim coletar relatos das experiências dos leitores. As perguntas são:

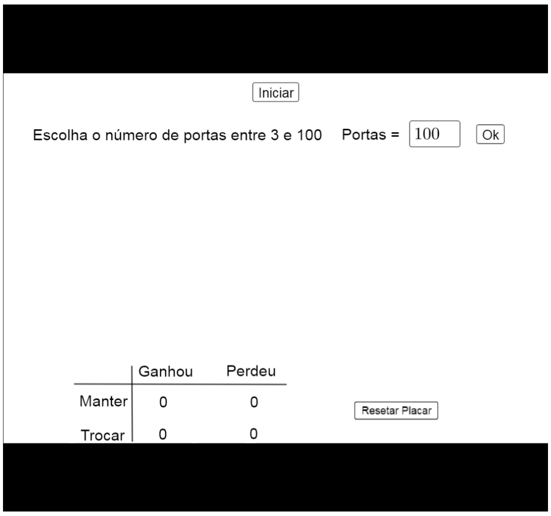
1. Se o leitor é professor, aluno ou apenas um entusiasta pela temática.
2. Se o usuário achou o material excelente, bom, regular ou ruim.
3. Se o usuário aprendeu/desenvolveu o conteúdo de Probabilidade e/ou PMH, ou nenhum dos dois.
4. Se o jogador descobriu qual estratégia é a dita vencedora, manter ou trocar a porta inicialmente escolhida.

[14] Disponível em https://forms.gle/Z6m2xhF2YmnZx2Dv6.

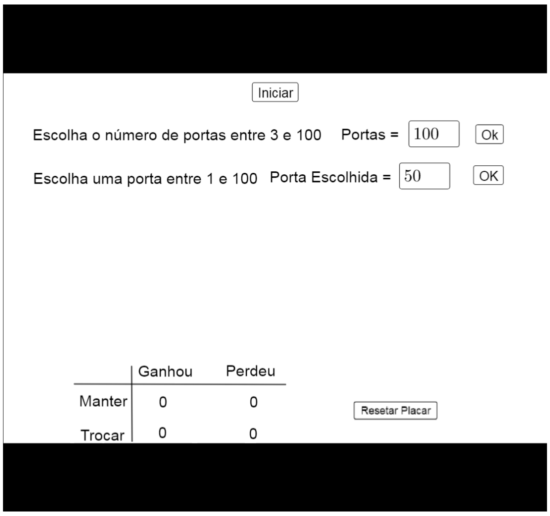
5. Espaço destinado a dúvidas, comentários, sugestões e críticas.

Figura 5.15: Exemplo de sequência de escolhas num jogo do PMHN

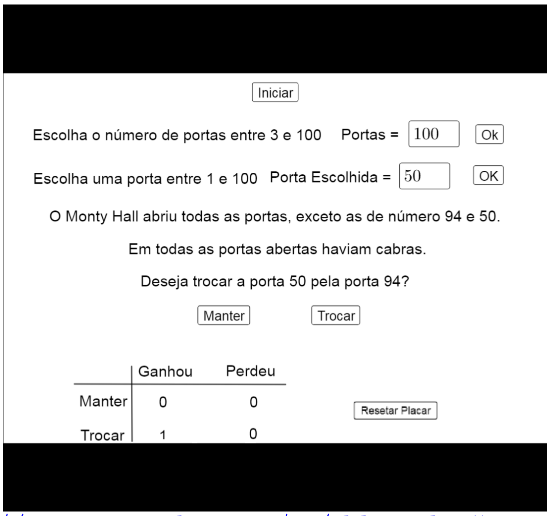
(a) Jogador seleciona 100 portas



(b) Jogador escolhe a porta de número 50



(c) Jogador opta por trocar pela porta 94 e ganha



Fonte: https://www.geogebra.org/m/thhzw8h3#material/v6sxyzfg

5.2.5 Capítulo 5: Fontes

O último capítulo traz as referências de onde foram retiradas as imagens utilizadas no GGB. A tentativa foi colocar, em sua maioria, páginas da internet que trazem os conteúdos sobre Probabilidade e PMH, com uma abordagem prática e objetiva. Aquelas figuras não referenciadas são de autoria própria.

6 Considerações Finais

O objetivo final deste trabalho foi explorar conceitos probabilísticos de uma maneira prática e lúdica, aplicando os conteúdos discutidos em situações específicas de jogos. O principal plano de fundo utilizado para se contextualizar as situações-problema, foi o mundialmente conhecido PMH. A intenção foi tratar o Problema de Monty Hall como um jogo, para que o usuário do *e-book* desenvolvido colocasse em ação o conhecimento aprendido, reaprendido ou aprofundado sobre Probabilidade, e fosse capaz de avaliar qual estratégia seria a vencedora. O produto educacional criado, juntamente com esta dissertação, que descreve todos os elementos do GGB elaborado, têm a proposta de contribuir com o processo de ensino e aprendizagem de Probabilidade, enriquecendo as práticas docentes com esta moderna ferramenta pedagógica. Para tal finalidade foi necessário trilhar todo um percurso.

O uso de jogos na Educação foi pesquisado inicialmente para se conhecer as principais vertentes teóricas, os obstáculos enfrentados, as tendências atuais e os trabalhos recentes na área. A BNCC [11] aponta que a aprendizagem matemática está intimamente associada à sua compreensão, isto é, a assimilação dos significados dos objetos matemáticos devem estar atreladas à sua aplicação na prática cotidiana. O PROFMAT corrobora, exigindo que o trabalho de conclusão de curso esteja de acordo com temas específicos pertinentes ao currículo de Matemática da Educação Básica e impacto na prática didática em sala de aula. Assim sendo, a utilização de jogos se mostra como um grande aliado, permeando as esferas da vida particular dos alunos e, também, a escolar. Dessa maneira, foram observados vários aspectos positivos e diversas formas de aplicação dos mais variados tipos de jogos, expandindo assim o repertório de recursos pedagógicos que podem ser utilizados por professores, fugindo um pouco do modelo tradicional de ensino.

O conteúdo específico de Probabilidade foi estudado e aprofundado num segundo momento, buscando ser aqui apresentado de maneira compatível à um trabalho de pós-graduação e que também possa ser compreendido por um aluno do Ensino Médio. Para isso, foram utilizadas referências bibliográficas de ambos os níveis de ensino. Tal tarefa não foi fácil, pois a diferença do grau de análise dos diferentes públicos é considerável. Este fato influenciou no emprego de algumas estratégias para melhor elucidar alguns conteúdos, tais como o uso de figuras para ilustrar elementos e conceitos, a utilização de vários exemplos e modelos, e na exposição de mais de uma linha de pensamento na execução e demonstração de propriedades e atividades. Além disso, o produto educacional criado possui como característica uma heterogeneidade de recursos para tratar a temática, que vão desde textos e figuras, até vídeos e *applets*, buscando cada um atingir o seu público e objetivo específico. Dentro do próprio recurso, seja ele uma explicação teórica, ou um exercício, foi proporcionado ao leitor fontes mais profundas e amplas, mas também outras mais dinâmicas e objetivas.

O PMH foi escolhido devido a imediata visualização de um princípio matemático envolvido a priori, e a complexa discussão acerca de conceitos probabilísticos a medida que o jogo se desenvolve, tomadas de decisões são necessárias. Apesar de ser um problema de dinâmica fácil, sua interpretação não é trivial. A análise não se limita a estabelecer que o jogador tem 50% de chance de vencer, uma vez que pegando todos os cenários possíveis, ele ganha em metade deles e perde na outra metade das vezes. Mas sim, idealizar o porquê que a estratégia de troca implica em uma maior probabilidade de o fazer vencer o PMH, independente de quantas portas forem, e mais ainda, quanto maior o número de portas, maior será esta possibilidade ao se optar pela troca.

O GeoGebra foi definido como plataforma de compartilhamento do produto educacional, após ter sido sugerido e apresentado pela orientação a funcionalidade do GGB, como possibilidade para a criação de um livro digital. Durante a disciplina de Recursos Computacionais do PROFMAT, foi feito um pequeno projeto piloto. À época, foi utilizado um *applet*[1] do PMH no GeoGebra, porém associado com o conteúdo de Probabilidade, por meio de outros arquivos que eram disponibilizados aos alunos, de maneira gradativa, tais como resumos do conteúdo no Word e questionários via Google Forms. O GeoGebra Book se mostrou então, uma excelente forma de centralizar todos estes recursos, num só local de fácil acesso e manipulação. A plataforma permite ser compartilhada via Google Sala de Aula o que, se tratando de ensino remoto facilita bastante também. A medida que o GGB foi sendo manipulado, e suas múltiplas aplicabilidades foram sendo exploradas e

[1] Disponível em https://www.geogebra.org/m/vyy63uts.

aprendidas, tornou-se peça fundamental deste trabalho. O foco inicial era trabalhar o PMH usando uma dessas funcionalidades, que eram os *applets* do GeoGebra, para criar os jogos envolvendo e adaptando os princípios do problema. Com a variedade de possibilidades descobertas, culminou com uma extensão na utilização do *software* como um todo, sendo uma experiência inesperada, muito agregadora e vasta.

Além disso, as competências específicas 3, 4 e 5, de Matemática e suas Tecnologias, apontadas pela BNCC [11], trazidas no Capítulo 2, podem ser contempladas com a tríade: Probabilidade x Jogos x PMH. A utilização de estratégia pautada em conceitos probabilísticos para se interpretar, construir modelos e resolver o PMH, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, atendem a competência específica 3. A compreensão e utilização da tabela de resultados ao se jogar o PMH, PMH4 e PMHN, na busca de soluções, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático, abrange a competência específica 4. A observação de padrões, as experimentações, com o objetivo de validar conjecturas durante a utilização do GGB é característico da competência específica 5.

Alguns percalços foram encontrados no caminho. A pandemia da COVID-19 juntamente com dois processos de greve das escolas estaduais mineiras (2020 e 2022), durante o período de elaboração desta dissertação, impossibilitaram com que o GGB criado fosse aplicado dentro de uma sequência didática junto aos alunos. Os primeiros casos da doença no Brasil foram registrados no primeiro trimestre de 2020, acarretando o isolamento social e consequentemente, o fechamento de escolas por tempo indeterminado, afetando toda a dinâmica escolar, perdurando até o fim do ano seguinte. Nesse período o ensino passou a ser à distância, migrando para o híbrido no último trimestre de 2021 apenas. Mesmo com o retorno das atividades escolares sendo feito de maneira remota, vários estudantes não conseguiram acompanhar as aulas, pois não possuíam condições financeiras (acesso à internet, computador, *smartphones*, etc.), condições de saúde (psicológicas, emocionais, doença, etc.), ou até mesmo, condições de estudo (local e tempo adequado, por exemplo). Esse foi um período de muita dificuldade, instabilidade e incertezas para toda a população, não somente a escolar, mas mundial.

Este trabalho tem a proposta de ser estendido futuramente, com a possível aplicação do *e-book* elaborado, em conjunto a aulas e outras atividades presenciais junto aos alunos do Ensino Médio. Outro trabalho que poderá ser feito é com os professores da Rede

Estadual de Ensino de Minas Gerais, uma vez que a sua grande maioria, pelo menos nas experiências que tiveram com o ensino à distância, fizeram uso de recursos pedagógicos diferenciados, aplicados de maneira remota, podendo então adicionar o GGB à sua coleção de instrumentos didáticos.

Os pontos positivos que podem ser destacados ao final desta dissertação são: como um dos seus diferenciais, o PMH foi expandido para n portas, buscando uma generalização em sua análise; a aplicação de conceitos matemáticos em problemas objetivos; a abordagem do pensamento probabilístico em jogos; a proposta diferenciada do GGB aliando os mais variados recursos para a apresentação, explicação e prática de determinado assunto; e a facilidade de manuseio e acesso às informações do GeoGebra Book.

Os pontos negativos que podem ser apontados por fim foram: as dificuldades relativas à pandemia, isolamento e dinâmica social neste período; a adaptação a todo um processo remoto de aulas, orientações, reuniões, avaliações, etc.; a não aplicação do produto educacional à tempo; a falta da interação interpessoal, seja ela professor/aluno ou aluno/aluno, muito importantes no processo do jogo em si; algumas peculiaridades do GGB, em particular, sua edição de textos e imagens.

A realização deste trabalho contribuiu individualmente, de maneira considerável, para o aprimoramento e desenvolvimento de aspectos importantíssimos para a vida de um professor. O constante estudo e atualização acerca de conteúdos matemáticos específicos, a fim de melhor aplicá-los e contextualizá-los na prática pedagógica, aliada à sua reflexão e discussão em conjunto com os orientadores, permitiu um engrandecimento pessoal e profissional. A aprendizagem de novas metodologias e ferramentas de ensino, ao se pesquisar sobre tendências pedagógicas, possibilitou a expansão de propostas didáticas que foram de suma importância, principalmente, na adaptação a situações e contextos de ensino atípicos e desafiadores, como se mostrou a pandemia, o ensino remoto, o híbrido, e sua transição para o presencial novamente.

Considerando os objetivos traçados inicialmente, as propostas encontradas no regimento do PROFMAT em consonância com as diretrizes da BNCC, acredita-se que o trabalho atingiu o seu propósito. Espera-se que tanto a dissertação quanto o GGB criado possam colaborar e auxiliar no processo de ensino, por parte dos professores, e aprendizagem por todos aqueles que queiram se informar, exercitar e assimilar sobre o conteúdo de Probabilidade aplicado em jogos, assim como foi a sua elaboração e execução.

Referências

1 NETO, A. T.; TREVISANI, F. de M.; BACICH, L. (Org.). *Ensino híbrido: personalização e tecnologia na educação*. 1. ed. Porto Alegre: Editora Penso, 2015. 382 p. ISBN 978-85-8429-049-9.

2 SERAFIM, M. L.; SOUSA, R. P. de. *Multimídia na educação: o vídeo digital integrado ao contexto escolar*. Campina Grande: EDUEPB, 2011. 276 p. ISBN 978-85-7879-065-3. Disponível em: <https://books.scielo.org/id/6pdyn/pdf/sousa-9788578791247-02.pdf>. Acesso em: 11/01/2022.

3 ALVES, F. *Gamification: como criar experiências de aprendizagem engajadoras*. 2. ed. São Paulo: DVS, 2015. 200 p. ISBN 978-8582891025. Disponível em: <https:-//books.google.com.br/books?id=VO-MBAAAQBAJ&printsec=frontcover&hl=pt-BR&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false>. Acesso em: 30/03/2022.

4 BAUMGARTEL, P. O uso de jogos como metodologia de ensino de matemática. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - EBRAPEM. Curitiba: Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), 2016. Disponível em: <http://www.ebrapem2016.ufpr.br/wp-content/uploads-/2016/04/gd2_priscila_baumgartel.pdf>. Acesso em: 10/02/2021.

5 STOICA, A. Using math projects in teaching and learning. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, v. 180, p. 702–708, 2015. Disponível em: <https://www.sciencedirect-.com/science/article/pii/S187704281501527X>. Acesso em: 30/03/2022.

6 ALVES, L. Games e educação: Desvendando o labirinto da pesquisa. *Revista da FAEEBA - Educação e Contemporaneidade*, Salvador, v. 22, n. 40, p. 177–186, 2013. Disponível em: <https://revistas.uneb.br/index.php/faeeba/article/download/7448/4811/>. Acesso em: 06/04/2022.

7 MARTINS, C. *Gamificação nas práticas pedagógicas: um desafio para a formação de professores em tempos de cibercultura*. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, 2015. Disponível em: <http://tede2.pucrs.br/tede2/handle-/tede/6488>. Acesso em: 06/04/2022.

8 GONÇALVES, F. P. *A Gamificação no Ensino: Utilização de Recursos Sensoriais na Aprendizagem de Fundamentos Matemáticos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de São Carlos, 2021. Disponível em: <https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar-/13911>. Acesso em: 18/01/2022.

9 SAKUDA, L. O.; FORTIM, I. II censo da indústria brasileira de jogos digitais. *Brasília: Ministério da Cultura*, 2018. Disponível em: <https://censojogosdigitais.com.br/relatorios-/>. Acesso em: 30/03/2022.

10 GRANDO, R. C. *O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula*. Tese (Doutorado em Matememática) — Universidade Estadual de Campinas, 2000. Disponível em: <http://matpraticas.pbworks.com/w/file/fetch/124818583/tese_grando%281%29-.pdf>. Acesso em: 10/03/2021.

11 BRASIL. Base nacional comum curricular. *Brasília: Ministério da Educação*, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 21/01/2021.

12 PONTES, J. da C. *Identificação e caracterização do perfil de erros e dificuldades de aprendizagem nas questões de Estatística e Probabilidade das provas de Matemática do ENEM nos anos de 2013 a 2016 dos aprovados na primeira chamada do SISU para ingressar na UFRN*. Tese (Doutorado) — Programa de pós-graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática do Centro de Ciências Exatas e da Terra da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2019. Disponível em: <https://repositorio.ufrn-.br/jspui/handle/123456789/28114>. Acesso em: 06/04/2022.

13 BUCKINHAM, D. Cultura digital, educação midiática e o lugar da escolarização. *Educação Realidade*, Porto Alegre, v. 35, n. 3, p. 37–58, 2010. Disponível em: <https:/-/seer.ufrgs.br/educacaoerealidade/article/view/13077/10270>. Acesso em: 03/02/2021.

14 SMOLE, K. S. et al. *Cadernos do Mathema: jogos de Matemática de 1º a 3º ano*. 1. ed. Penso, 2008. 120 p. ISBN 978-8536314709. Disponível em: <https://srvd.grupoa.com.br/uploads/imagensExtra/legado/S/SMOLE_Katia_Stocco-/Cadernos_De_Mathema_Ensino_Medio/Liberado/Amostra.pdf?fromwebsite>. Acesso em: 17/01/2022.

15 GRANDO, R. C. Mestrado em Matememática, *O jogo e suas possibilidades metodológicas no processo ensino-aprendizagem da matemática*. 1995.

16 GRANDO, R. C. *O jogo e a matemática no contexto de sala de aula*. 1. ed. São Paulo: Paulus, 2004. 120 p. ISBN 85-349-2261-6. Disponível em: <https://pnaic.paginas.ufsc.br-/files/2019/05/Texto-1.pdf>. Acesso em: 03/02/2021.

17 PRADO, L. L. Jogos de tabuleiro modernos como ferramenta pedagógica: Pandemic e o ensino de ciências. *Revista Eletrônica Ludus Scientiae*, Foz do Iguaçu, v. 2, n. 2, p. 26–38, 2018. Disponível em: <https://revistas.unila.edu.br/relus/article/download/1485/1522.> Acesso em: 17/01/2022.

18 MIRANDA, A. F. S. *Jogos pedagógicos no processo de ensino e aprendizagem em química na modalidade educação de jovens e adultos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Goiás, 2015. Disponível em: <https:/-/repositorio.bc.ufg.br/tede/bitstream/tede/4924/5/Disserta%c3%a7%c3%a3o%20-%20Ana%20Fl%c3%a1via%20Souza%20Miranda%20-%202015.pdf>. Acesso em: 18/04/2022.

19 ARAÚJO, K. T. Os jogos e a educação. *Revista Eletrônica de Educação*, UniFil, Londrina-PR, n. 9, p. 11–19, 2011.

20 BROUGÈRE, G. *Jogo e educação*. Porto Alegre-RS: ArtMed, 1998.

21 GRANDO, R. C. Concepções quanto ao uso de jogos no ensino da matemática. *Revista de Educação Matemática*, v. 10, p. 45–52, 2007. Disponível em: <https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/5008048/mod_resource/content/1-/texto%20jogos%20regina%20grando.pdf>. Acesso em: 10/03/2021.

22 PIAGET, J. *A formação do símbolo na criança*. Rio de Janeiro: Zahar, 1978.

23 VYGOSTKY, L. *A formação social da mente*. São Paulo: Martins Fontes, 1989.

24 BROUGÈRE, G. A criança e a cultura lúdica. *Revista da Faculdade de Educação*, São Paulo, n. 24, 1998.

25 SMOLE, K. S.; MILANI, E.; DINIZ, M. I. *Cadernos do Mathema: jogos de Matemática de 6º a 9º ano*. Porto Alegre: Artmed, 2007. 94 p. ISBN 978-85-363-1148-7. Disponível em: <https://professorarnon.com/medias/documents/140421210142.pdf>. Acesso em: 12/01/2022.

26 HUIZINGA, J. *Homo Ludens: o jogo como elemento da cultura*. 4. ed. São Paulo: Perspectiva, 2000. 162 p. Disponível em: <http://jnsilva.ludicum.org/Huizinga_HomoLudens-.pdf>. Acesso em: 17/01/2022.

27 MICHAELIS, H.; VASCONCELOS, C. M. *Michaelis Dicionário Escolar Língua Portuguesa*. São Paulo: Editora Melhoramentos, 2016. Disponível em: <https://michaelis-.uol.com.br>. Acesso em: 18/03/2021.

28 KAMII, C.; DEVRIES, R. *Jogos em grupo na educação infantil*. 1. ed. [S.l.]: Penso, 2009. 385 p. ISBN 978-8536319896.

29 AVANÇO, L. D. *Jogo e educação: Resgate do paradigma socrático*. Tese (Doutorado) — Programa de Pós-Graduação em Educação - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Presidente Prudente-SP, 2018. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/bitstream-/handle/11449/154054/avanco_ld_dr_prud.pdf?sequence=3&isAllowed=y>. Acesso em: 11/02/2021.

30 LIMA, J. M. de. *O jogo como recurso pedagógico no contexto educacional*. 1. ed. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2008. 156 p. (PROGRAD). ISBN 9788598605487. Disponível em: <https://www.culturaacademica.com.br/catalogo/jogo-como-recurso-pedagogico-no-contexto-educacional-o/>. Acesso em: 25/02/2021.

31 ALVES, F. *Gamification: Como criar experiências de aprendizagem engajadoras*. São Paulo: DVS, 2014. Disponível em: <https://www.amazon.com-.br/Gamification-Experi%C3%AAncias-Aprendizagem-Engajadoras-Completo/dp-/8582890885?asin=B01AKHNEYG&revisionId=6004b400&format=1&depth=1>. Acesso em: 18/04/2022.

32 MACEDO, L.; PETTY, A. L. S.; PASSOS, N. C. *Aprender com jogos e situações-problema*. [s.n.], 2000. Disponível em: <https://statics-submarino.b2w.io/sherlock/books-/firstChapter/237847.pdf>. Acesso em: 24/04/2022.

33 BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais*. Brasília, 1998. Estabelece os parâmetros curriculares do Ensino

Fundamental em âmbito nacional. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 12/08/2021.

34 BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.* Brasília, 2000. Estabelece os parâmetros curriculares do Ensino Médio em âmbito nacional. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 12/08/2021.

35 ALMEIDA, F. N. *Jogo aplicado à educação: Experiência escolar com Ensino Fundamental II.* Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2015. Disponível em: <https://tede2.pucsp.br/bitstream/handle/18187/1/Felipe%20Neves%20de%20Almeida.pdf>. Acesso em: 12/08/2021.

36 AMARAL, R. R. *PERSEVERE: um estudo sobre jogos digitais na educação básica no contexto do ensino de Física.* Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Pernambuco, 2019. Disponível em: <https://repositorio.ufpe.br/bitstream/123456789/34280/1/TESE%20Ricardo%20Ribeiro%20do%20Amaral.pdf>. Acesso em: 12/08/2021.

37 PAULA, B. H. *Jogos digitais como artefatos pedagógicos: o desenvolvimento de jogos digitais como estratégia educacional.* Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, 2015. Disponível em: <http://repositorio.unicamp.br/jspui/handle/REPOSIP/285203>. Acesso em: 11/02/2021.

38 PFIFFER, C. S. *Jogos com conteúdos matemáticos para os anos finais do ensino fundamental.* Dissertação (Mestrado) — Universidade Regional de Blumenau, 2014. Disponível em: <https://bu.furb.br//docs/DS/2014/360422_1_1.pdf>. Acesso em: 25/02/2021.

39 AZEVEDO, K. L. *Jogo de tabuleiro com elementos de RPG "Aventura de um livro mágico": contribuições para a educação matemática.* Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Pernambuco, 2017. Disponível em: <https://repositorio.ufpe.br/bitstream/123456789/25198/1/DISSERTA%c3%87%c3%83O%20Kelly%20de%20Lima%20Azevedo.pdf>. Acesso em: 25/02/2021.

40 MORAIS, M. L. C. *Cidadão fiscal: um jogo utilizando a gamification como forma de aumentar o engajamento na educação fiscal.* Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual do Ceará, 2017. Disponível em: <https://siduece.uece.br/siduece/trabalhoAcademicoPublico.jsf?id=87770>. Acesso em: 25/02/2021.

41 ANASTACIO, B. S. *Contextos lúdicos de aprendizagem: uma aproximação entre os jogos eletrônicos e educação à distância.* Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Educação - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis-SC, 2016. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/172787/343739.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 25/02/2021.

42 MOURA, T. J. *Probabilidade e jogos digitais: uma experiência com o softaware GeoGebra no ensino médio.* Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional - Universidade Federal de Goiás, Catalão-GO, 2020. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=170300441>. Acesso em: 25/02/2021.

43 PERES, L. *O uso de jogos como instrumento de ensino-aprendizagem de Matemática*. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional - Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto-SP, 2016. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=150570974>. Acesso em: 25/02/2021.

44 REZENDE, R. L. *Estudo da teoria da probabilidade através das dinâmicas de jogos*. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional - Universidade Federal de Goiás, Goiânia-GO, 2020. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=171052247>. Acesso em: 10/02/2021.

45 LIMA, J. G. M. *O ensino de análise combinatória mediado pelo lúdico: uma prática com jogos numa escola de educação básica*. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional - Universidade Federal de Goiás, Floriano-PI, 2020. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2-/get_tcc3.php?id=171053246>. Acesso em: 25/02/2021.

46 LAPLACE, P. S. *A Philosophical Essay on Probabilities*. New York, USA: John Wiley Sons, 1902. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=8TJY-H6G2SYC>. Acesso em: 12/08/2021.

47 ROSS, S. *Probabilidade: um curso moderno com aplicações*. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2010. 608 p. ISBN 9788577806218. Disponível em: <https://www.meulivro.biz-/bioestatistica/2192/probabilidade-um-curso-moderno-com-aplicacoes-8-ed-pdf/>. Acesso em: 12/08/2021.

48 VIALI, L. Algumas considerações sobre a origem da teoria da probabilidade. *Revista Brasileira de História da Matemática*, v. 8, p. 85–97, 2008. Disponível em: <https://www-.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/177>. Acesso em: 12/08/2021.

49 HALD, A. *A History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750*. New Jersey: John Wiley Sons, 2003. 611 p. ISBN 0-471-47129-1. Disponível em: <https://www.mdthinducollege.org/ebooks/statistics-/A_History_of_Probability_and_Statistics.pdf>. Acesso em: 12/08/2021.

50 SILVA, W. N. *Um resumo sobre a história da probabilidade e alguns casos curiosos*. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional - Universidade Federal do Oeste do Pará, Santarém-PA, 2020. Disponível em: <https://repositorio.ufopa.edu.br/jspui/bitstream/123456789/298-/1/Disserta%c3%a7%c3%a3o_UmResumoSobre.pdf>. Acesso em: 12/08/2021.

51 PAULO, F. F. *Uma análise histórica do desenvolvimento da probabilidade e a utilização de materiais concretos para seu ensino*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal da Paraíba, 2013. Disponível em: <https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/tede-/7536?locale=pt_BR>. Acesso em: 06/04/2022.

52 ALBUQUERQUE, J. P. A.; FORTES, J. M. P.; FINAMORE, W. A. *Probabilidades, variáveis aleatórias e processos estocásticos*. 2. ed. Rio de Janeiro-RJ: Interciência - PUC Rio, 2018. 344 p. ISBN 978-85-8006-227-4. Disponível em: <https://plataforma.bvirtual-.com.br/Acervo/Publicacao/176620>. Acesso em: 06/04/2022.

53 DANTE, L. R.; VIANA, F. *Análise Combinatória, Probabilidade e Computação*. 1. ed. São Paulo-SP: Ática, 2020. 272 p. ISBN 978-65-5767-045-3. Disponível em: <https://saber.com.br/obras/PNLD/PNLD_2021_OBJETIVO_2/Obra-9bdb7ba6-2459-477e-b6a9-20d0c1e49f0c/9bdb7ba6-2459-477e-b6a9-20d0c1e49f0c.pdf>. Acesso em: 06/04/2022.

54 MORGADO, A. C. O. et al. *Análise Combinatória e Probabilidade*. Rio de Janeiro: SBM, 1991. Disponível em: <https://portaldaobmep.impa.br/uploads/msg/5fpwf84eez8c0.pdf>. Acesso em: 06/04/2022.

55 LIMA, A. C. P.; MAGALHãES, M. N. *Noções de Probabilidade e Estatística*. 6. ed. São Paulo-SP: EDUSP, 2005. Disponível em: <https://www.academia.edu/19263364/Livro_Nocoes_de_Probabilidade_e_Estatistica_Magalhaes_parte_1>. Acesso em: 06/04/2022.

56 HOHENWARTER, M. et al. *GeoGebra*. 2017. Disponível em: <http://www.geogebra.org>. Acesso em: 22/04/2022.

57 BORBA, M. C.; SCUCUGLIA, R. R. S.; GADANIDIS, G. *Fases das Tecnologias Digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento*. 1. ed. Belo Horizonte-MG: Autêntica, 2014. 152 p. ISBN 978-8582174999. Disponível em: <https://sbemmatogrosso.com.br/publicacoes/index.php/coinspiracao/article/view/52>. Acesso em: 14/04/2022.

58 ABAR, C. A. A. P. Geogebra book: um recurso para desenvolver atividades. In: II CONGRESSO BRASILEIRO DO GEOGEBRA. [S.l.], 2021.

59 BALDINI, L. A. F.; CYRINO, M. C. C. T. O *software* geogebra na formação de professores de matemática: uma visão a partir de dissertações e teses. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, v. 1, p. 42–61, 12 2012.

60 SBM. *PROFMAT*. Disponível em: <https://profmat-sbm.org.br/?s=geogebra>. Acesso em: 22/10/2021.