UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI - UFCA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

JOSÉ ALVES FRANCISCO

ENSINO DE MATEMÁTICA E DOMINÓ: PROPOSTAS DIDÁTICAS PARA O ENSINO BÁSICO

JUAZEIRO DO NORTE - CE
2022

JOSÉ ALVES FRANCISCO

ENSINO DE MATEMÁTICA E DOMINÓ: PROPOSTAS DIDÁTICAS PARA O ENSINO BÁSICO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri UFCA, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.
Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Valdinês Leite de Sousa Júnior

Coorientador: Prof. Dr. Junio Moreira de Alencar

Juazeiro do Norte - CE

2022

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E
TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Ensino de Matemática e Dominó: Propostas Didáticas para o Ensino Básico

JOSÉ ALVES FRANCISCO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em 29 de julho de 2022.

Banca Examinadora

Valdinês Leite de Sousa Júnior
____
Prof. Dr. Valdinês Leite de Sousa Júnior
Universidade Federal do Cariri - Orientador

Júnio Moreira de Alencar
____
Prof. Dr. Junio Moreira de Alencar
Instituto Federal do Ceará – Coorientador

Francisco de Assis Benjamim Filho.
____
Prof. Dr. Francisco de Assis Benjamim Filho
Universidade Federal do Cariri

Luciana Maria de Souza Macêdo
____
Profa. Ma. Luciana Maria de Souza Macêdo
Universidade Regional do Cariri

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação.
Universidade Federal do Cariri.
Sistema de Bibliotecas

F819e Francisco, José Alves.
Ensino de matemática e dominó : propostas didáticas para o ensino básico / José Alves Francisco. – 2022.
83 f.: il. color.30 cm.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Cariri, Centro de Ciências e Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Juazeiro do Norte, 2022.
Orientação: Prof. Dr. Valdinês Leite de Sousa Júnior.
Coorientação: Prof. Dr. Junio Moreira de Alencar.

1. Matemática - ensino. 2. Probabilidade. 3. Dominó. I. Título.

CDD 510.07

Bibliotecária: Glacinésia Leal Mendonça
CRB 3/ 925

Este trabalho é dedicado à minha mãe e meu pai (in memoriam), a minha família e amigos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço inicialmente a Deus por me conceder percorrer os caminhos que me trouxeram até aqui, também pela harmonia e sabedoria para concluir esta jornada.

Gratidão a minha mãe, Raimunda (in memoriam), mulher guerreira, que tudo fez por mim e que a imensidão de seu coração e amor nunca serão mensuráveis.

Reconhecimento ao meu pai, Antônio (in memoriam), homem de um caráter inquestionável, por ser um exemplo de vida.

Obrigado a toda minha família, por todo incentivo e fonte de conforto nas horas mais difíceis. Aos colegas de curso, pela troca de experiências, em especial a Maurício, Alan, Carmos e Gilson (in memoriam).

Aos meus colegas de trabalho em especial a Zelalber, Mario de Assis e ao amigo Leonardo por todo apoio e ajuda, sem os quais impossibilitariam minha conclusão do curso.

Agradeço ao meu orientador, professor Dr. Valdinês Leite de Sousa Júnior, por todo conhecimento, paciência, disponibilidade, apoio e incentivo.

Agradeço ao meu coorientador, professor Dr. Junio Moreira de Alencar, por todo compromisso, sapiência, reciprocidade, conforto e ajuda incansável.

Enfim, a todos com quem tive a honra de conviver e que, de forma direta ou indireta, contribuíram para a construção desse trabalho.

“ Quem ensina aprende ao ensinar. E quem aprende ensina ao aprender."

Paulo Freire

RESUMO

A pesquisa objetiva explorar o Jogo de Dominó como recurso didático para o aprendizado de Probabilidade e Estatística à nível da Matemática do Ensino Médio. Para tanto, realizamos uma pesquisa bibliográfica em trabalhos acadêmicos e didáticos que envolveram conceitos de Probabilidade e o Jogo de Dominó. A principal contribuição desta pesquisa é fornecer um produto didático que proporcione ao professor de Matemática do Ensino Médio refletir e inovar sua prática docente em sala de aula, nos conceitos de Probabilidade. O produto didático proposto consiste em explorar o Jogo de Dominó para auxiliar na compreensão de conteúdos matemáticos, propostos nesta pesquisa, por meio de situações problemas que utilizem as pedras do Dominó e de análise das partidas entre dois jogadores. Espera-se que este trabalho desenvolva um diálogo na comunidade acadêmica e escolar, sobre a importância de repensar práticas de ensino envolvente, dinâmica, cativante e interativa, desmistificando o olhar da Matemática como uma disciplina de difícil compreensão e desconectada de outras áreas do conhecimento e da vida.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Ensino Médio. Jogo de Dominó. Probabilidade.

ABSTRACT

The research aims to explore the Domino Game as a didactic resource for the learning of Probability and Statistics at the High School Mathematics level. Therefore, we carried out a bibliographical research in academic and didactic works that involved concepts of Probability and the Domino Game. The main contribution of this research is to provide a didactic product that allows the High School Mathematics teacher to reflect and innovate his teaching practice in the classroom, in the concepts of Probability. The proposed didactic product consists of exploring the Dominoes Game to assist in the understanding of mathematical contents, proposed in this research, through problem situations that use the Dominoes stones and analysis of the games between two players. It is expected that this work develops a dialogue in the academic and school community, about the importance of rethinking engaging, dynamic, captivating and interactive teaching practices, demystifying the look of Mathematics as a discipline that is difficult to understand and disconnected from other areas of knowledge and of life.

Keywords: Teaching Mathematics. High school. Domino game. Probability.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O ensino da matemática é um dos principais desafios da educação básica do Brasil. Conforme os relatórios sobre a aprendizagem em matemática, os índices percentuais seguem estagnados há uma década, segundo o portal todos pela educação [1]. Muitos autores vem reportando sobre as dificuldades da aprendizagem da matemática, apontando para o problema da rejeição dos alunos no aprendizado dessa disciplina e portanto para a necessidade dos professores de matemática se apropriarem de metodologias que promovam um maior envolvimento dos alunos em suas aulas [2].

Metodologias que se utilizam de jogos matemáticos é uma forma de motivar estudantes nas aulas de matemática [3]. Com efeito, o uso de jogos no ensino de matemática é uma atividade interessante e desafiadora, onde os estudantes vão adquirindo autoconfiança e novas habilidades cognitivas, através de uma maior interação com seus colegas. Os estudantes são incentivados a questionar e corrigir as suas ações por meio de uma participação ativa, que é valorizada, para a aquisição do conhecimento. Desse modo, os educandos brincam, jogam, aprendem, relacionam os saberes da matemática com a vida e a importância de aprender esses conceitos.

Nesse contexto, esse trabalho propôs-se a explorar o jogo de dominó como recurso didático para o aprendizado de probabilidade e estatística à nível da matemática do ensino médio. De modo periférico, este trabalho propôs-se a ilustrar o jogo do dominó, apresentar como conceitos de probabilidade e estatística podem ser compreendidos por meio de problemas envolvendo o jogo do dominó e analisar partidas de dominó entre dois jogadores. Para tal, foi escolhido um dos jogos mais conhecidos e de fácil entendimento pelo público em geral: o jogo de dominó. Com isto, este trabalho tem como objetivo a aplicação do jogo de dominó no ensino de matemática.

A identificação dos conceitos da probabilidade e estatística no jogo de dominó propostas nesse trabalho podem ser exploradas por professores de matemática como recurso didático que ajude no sucesso do desafio que é ensinar tais conceitos no ensino médio. Assim esse trabalho apresenta-se como uma importante ferramenta para o professor de matemática do ensino básico que em geral têm uma carga horária de sala de aula elevada para buscar melhorias na sua forma de ensinar matemática. Além do mais, esse trabalho também justifica-se pelo fato do jogo de dominó ser um jogo popular no Brasil, e explorar esse jogo de acordo com as propostas aqui apresentadas podem ser vista não apenas como uma fonte motivadora para os alunos gostarem de aprender matemática, mas também como uma importante maneira do professor fazer investigações científicas e matemática durante sua prática docente o que é importante para a própria motivação do professor para ensinar matemática e aperfeiçoar suas abordagens dentro do processo de ensino e aprendizagem. Sendo assim, como principal hipótese de trabalho, defende-se que os conteúdos da educação matemática para estudantes do ensino básico podem ser abraçados utilizando jogos como o dominó, em conjunto com estudos de probabilidade e afins. O objetivo é sugerir um percurso metodológico que agrega o ensino de matemática com a prática racional do jogo de dominó, baseando-se em conteúdo da probabilidade, estatística e lógica em geral. Sugestões de atividades didáticas serão apresentadas. O entendimento dessas atividades será relacionado diretamente com o jogo de dominó, combinando conceitos matemáticos com as ideias do jogo, com o intuito de auxiliar o ensino de matemática.

A fim de alcançar os objetivos traçados no trabalho, realizou-se um estudo bibliográfico e adotou-se o método hipotético dedutivo, a partir da problemática de que os estudantes têm muita dificuldade na aprendizagem de conteúdos de matemática na educação básica. Na tentativa de minimizar tal situação, apresenta-se uma temática que envolve o jogo de dominó associado a conteúdos tradicionais com a intenção de ensinar matemática, descrevendo um roteiro de conteúdos com o propósito de um estudo exploratório, buscando produzir informações aprofundadas e ilustradas que identificam e mostram que as atividades lúdicas ajudam na construção do saber.

Para um melhor entendimento, este trabalho foi dividido em sete capítulos. O Capítulo 1 é composto pela introdução do trabalho. No Capítulo 2, registram-se os documentos que apresentam as dificuldades da aprendizagem da matemática. No Capítulo 3, descreve-se os métodos e as técnicas utilizadas para a descrição da pesquisa No Capítulo 4, exploram-se os elementos inerentes ao jogo de dominó, tais como a nomenclatura das pedras do dominó e as regras do jogo. No Capítulo 5, tem-se uma abordagem de tópicos básicos de probabilidade, tais como introdução à probabilidade, classificação de eventos e definições de probabilidade. No Capítulo 6, serão apresentadas sugestões de atividades didáticas envolvendo conteúdos de matemática básica com o jogo de dominó. Ainda neste capítulo, algumas partidas serão analisadas, mesclando ideias de probabilidade com as regras do jogo. Por fim, no Capítulo 7, são realizados comentários acerca do trabalho desenvolvido nessa dissertação.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

A partir da busca do registro documental teórico acerca das dificuldades da aprendizagem matemática, verifica-se que o ensino de Matemática da Educação Básica sofre um elevado nível de rejeição por parte dos discentes. Dessa forma, muitos especialistas buscam metodologias para melhorar o aspecto da sua aprendizagem. Os estudantes apresentam imensas dificuldades na compreensão e aquisição dos conteúdos de Matemática do Ensino Médio e, em razão desta lacuna, propõe-se apresentar uma estratégia metodológica lúdica, para minimizar esta adversidade de adquirir tal conhecimento.

Apresentamos a seguir o resultado de uma avaliação diagnóstica realizada pelo SPAECE com o intuito de instrumentalizar estratégias que permitem levar a uma melhor compreensão de como está o nível de aprendizagem da Matemática no estado do Ceará.

Quadro 1 – Resultados de Matemática da rede pública estadual no Spaece no ensino médio nos anos de 2016, 2017 e 2018.

Ano	2016	2017 2	2018
Proficiência média da rede pública estadual	265,4	269,1	272,5
Nível de proficiência da rede pública estadual	Crítico	Crítico	Crítico
Nº de escolas no nível muito crítico	154	120	92
Nº de escolas no nível crítico	415	449	450
Nº de escolas no nível intermediário	55	71	93
Nº de escolas no nível adequado	04	05	11

Fonte: CAEd/UFJF.

O quadro 1, apresenta os resultados dos alunos do ensino médio de escolas públicas do Estado do Ceará, no Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará (SPAECE), nos anos de 2016, 2017 e 2018. Esta avaliação foi criada pelo governo do estado do Ceará, por intermédio da Secretaria de Educação do Estado do Ceará (SEDUC) em 1992. É uma maneira de analisar e monitorar os índices de aprendizagem de Matemática na Educação Básica, abrangendo as escolas de esfera municipal e estadual, desde a Alfabetização (2º ano), Ensino Fundamental (5º e 9º anos) e Ensino Médio (3º ano), ocorrendo anualmente. Analisando os resultados, observamos que os resultados não são nada satisfatórios, pois os níveis de proficiência, que são os padrões de desempenho dos estudantes por escola, numa ordenação: muito crítico, crítico, intermediário e adequado apresentam um baixo rendimento dos alunos, pois o quadro apresenta que as escolas da rede pública apresentam um resultado crítico, mostrando a dificuldade da aprendizagem matemática.

Nesse sentido, podemos perceber a situação de uma avaliação diagnóstica realizada pelo IDEB, com o objetivo de verificar os resultados obtidos pelos estudantes de Fortaleza, comparados com os resultados da média nacional, no Quadro 2.

Quadro 2 – IDEB do 5º ano da rede municipal de ensino

Ano	Fortaleza	Brasil 2	Benchmark
2005	3.2	3.4	4.3
2007	3.4	4.0	4.9
2009	3.9	4.4	6.5
2011	4.2	4.7	7.5

Fonte: Instituto Nacional de Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira

O Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB), foi criado em 2007 pelo Instituto Nacional de Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP) e funciona como um indicador de qualidade do ensino nas escolas brasileiras e estipula metas para a melhoria do ensino e, consequentemente, da aprendizagem por parte dos estudantes, envolvendo o Ensino Fundamental (5º e 9º anos) e Ensino Médio (1º, 2º e 3º anos).

Pela verificação do quadro acima, percebemos que nos anos de 2005, 2007, 2009 e 2011, os índices educacionais dos estudantes cearenses do 5º ano do Ensino Fundamental que residem em Fortaleza, foram inferiores aos resultados da média nacional, com o parâmetro de desempenho (Benchmark), comprovando que precisamos melhorar estes indicadores através de um material didático mais contextualizado, proporcionando assim uma matemática mais significante e diversificando as estratégias de metodologia.

A Tabela 3 apresenta o relatório do diagnóstico com o desempenho do PISA, com o propósito de ter um melhor entendimento com relação aos aspectos cognitivos dos estudantes brasileiros.

Quadro 3 – Desempenho dos Países em Matemática no PISA 2003 e no PISA 2009

Países	2003	2009 2	Diferença
COREIA	542	546	4
FINLÂNDIA	544	541	-3
ESTADOS UNIDOS	483	487	4
PORTUGAL	466	487	21
ESPANHA	485	483	-2
CHILE	...	421	...
URUGUAI	422	427	5
MÉXICO	385	419	34
COLÔMBIA	...	381	...
BRASIL	356	386	30
ARGENTINA	...	388	...
PANAMÁ	...	360	...
PERU	...	365	...

Fonte: Instituto Nacional de Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira

O Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA), é uma metodologia internacional que avalia os sistemas de ensino em todo o mundo, medindo o nível educacional de jovens de 15 a 16 anos, as questões são elaboradas por especialistas de todo o mundo e depois avaliadas por um comitê da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE). Os países que apresentam os melhores resultados educacionais são Coreia e Finlândia, enquanto o Brasil distante da média do OCDE e de países latino-americanos com renda per-capita menor que a brasileira. O Brasil ocupa as últimas posições no cenário mundial, pois a qualidade do ensino ainda é muito baixa, onde a formação de docentes e material didático, são aspectos relevantes que contribuem para estes resultados tão negativos. Para tanto, precisamos ter uma política educacional voltada realmente para uma transformação social que busque atingir os direitos sociais. A falta de investimentos também colabora com estes aspectos abordados acima, com um investimento de 5% do PIB e outros fatores como: estímulo ao protagonismo dos alunos, inserção da tecnologia na sala de aula e uso de material didático contextualizado.

Na busca por minimizar tal impacto na aprendizagem matemática, faz-se necessário que o professor desenvolva metodologias e estratégias para ensinar e aprender Matemática de forma mais significativa, objetivando que, cada aluno, construa seu próprio conhecimento. Ao participar da construção da sua aprendizagem, o estudante assume a função de protagonista do processo de ensino aprendizagem, despertando o interesse, desenvolvendo habilidades e competências para sua atuação enquanto estudante e ser social, construindo reflexões acerca das vivências, interagindo melhor entre os pares, entre outros fatores relacionados a conteúdos e atitudes.

Entre as estratégias de ensino a serem utilizadas em sala de aula, se encontram as atividades lúdicas, as quais possibilitam melhor compreensão dos conteúdos matemáticos quando expostos de forma dinâmica, interativa e cativante. Aplicar atividades lúdicas, em especial, os jogos em sala de aula de Matemática, percebe-se que colabora com o desenvolvimento cognitivo e a construção de conhecimentos, como: a criatividade, promovendo um saber espontâneo, emancipador, propiciam um pensar mais aprofundado do que em outra atividade, pois os processos de simbolização e de representação levam ao pensamento abstrato e efetivando um processo de ensino aprendizagem mais significativo.

A preferência por jogos como temática desta pesquisa possibilita a aquisição do aprendizado por parte do educando em virtude dos estímulos cognitivos que os provocam. O engajamento acadêmico inerente à aplicação dos jogos é bem produtivo e possibilita o envolvimento do indivíduo. Com isso, este modelo pode divertir e motivar o estudante, permitindo o desenvolvimento do raciocínio lógico e estimulando o seu pensamento e sua criatividade.

O uso do jogo de dominó propicia tal desenvolvimento, aprimorando habilidades básicas de Matemática, principalmente em Probabilidade. Espera-se que este trabalho seja uma contribuição ativa nas salas de aula, sendo explorado como um recurso pedagógico indutivo, para que o discente possa usar tais recursos através das tecnologias atuais disponíveis dentro e fora da escola.

3 METODOLOGIA

Neste trabalho foi desenvolvido propostas didáticas para o ensino de probabilidade utilizando o jogo Dominó. Para tanto, foi desenvolvido uma pesquisa com objetivo descritivo e exploratório, tendo uma finalidade básica estratégica, aqui também foi adotado o método hipotético-dedutivo e abordagem qualitativa baseando-se na literatura científica correlata.

Em um primeiro momento, pesquisou-se sobre as temáticas que envolviam o Jogo Dominó, desempenho dos alunos em matemática, probabilidade básica e o processo de ensino e aprendizagem. A partir disso, foi selecionado alguns trabalhos científicos como artigos, dissertações e livros para a contextualização da problemática e confrontação de ideias para o alcance dos objetivos do trabalho. Neste sentido, pode-se afirmar que neste trabalho foi realizado uma pesquisa bibliográfica de acordo com [4].

Em um segundo momento, buscou-se desenvolver propostas didáticas visando fomentar suporte prático ao professor de matemática em sua prática docente em sala de aula, a partir do conhecimento aqui produzido e com isso, tem-se na perspectiva de [4], o desenvolvimento de uma pesquisa básica estratégica. Além disso, ainda segundo [4] e também segundo [5] a pesquisa aqui desenvolvida é descritiva e exploratória uma vez que precisou um refinamento na leitura para identificação de pontos ainda não tão bem trabalhados na literatura científica que foram trabalhadas e descritas para facilitar o entendimento e a contextualização da problemática ao leitor. Nessas construções, levantou-se a hipótese da realização de propostas didáticas do ensino de probabilidade utilizando-se das pedras do dominó e das partidas desse jogo a partir das informações obtidas da pesquisa bibliográfica fez-se uso do método hipotético dedutivo reportado por [6].

As discussões dos resultados foram realizadas a partir das leituras realizadas, análise e confrontações de ideias dos autores pesquisados. Não foram adotados procedimentos estatísticos ou matemáticos para a coleta de dados, apenas a leitura crítica e reflexiva dos conteúdos. Em outros termos, a abordagem da presente pesquisa é do tipo qualitativa como aponta [6].

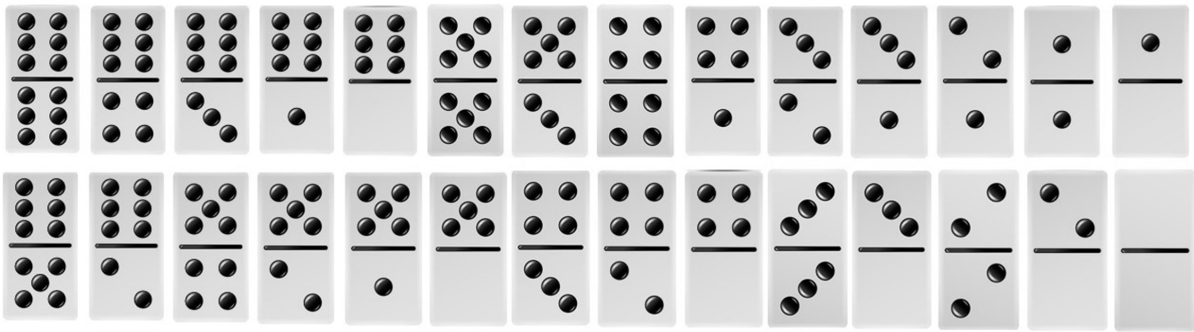
Ressalta-se ainda que embora o texto tenha como público alvo principal professores de matemática do ensino médio e fundamental. Buscou-se adotar uma linha de escrita científica que não fosse muito formal para possibilitar que alunos, professores de outras áreas como pedagogia podem-se ter o prazer de uma leitura leve e dinâmica. Assim, um procedimento adotado ao longo desse texto foi a busca incessante de uma escrita acessível ao maior número de interessados nos assuntos aqui trabalhados.

4 O DOMINÓ

4.1 Nomenclatura e regras do jogo

O jogo de dominó é composto por 28 **pedras** retangulares, onde cada pedra possui duas **faces** nas quais aparece uma quantidade de pontos que varia de 0 a 6 pontos. As pedras abrangem todas as combinações possíveis com estes números.

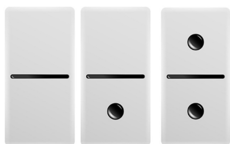
Figura 1 – Pedras do dominó



Fonte: O autor.

Cada pedra será representada pela simbologia $\{a - b\}$, em que a é o número de pontos de uma das faces e b é o número de pontos da outra face.

Figura 2 – Simbologia das pedras $\{0 - 0\}$, $\{0 - 1\}$ e $\{1 - 1\}$.



Fonte: O autor.

Com a notação acima, $\{a - b\}$ e $\{b - a\}$ representarão a mesma pedra do dominó.

Figura 3 – Pedras $\{2 - 4\}$ e $\{4 - 2\}$.

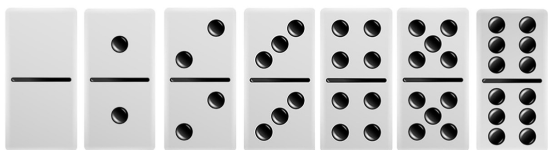
Fonte: O autor.

Os **dôbres** são as pedras que possuem as duas faces iguais, são elas:

$$\{0 - 0\}, \{1 - 1\}, \{2 - 2\}, \{3 - 3\}, \{4 - 4\}, \{5 - 5\} \text{ e } \{6 - 6\}.$$

Essas pedras serão chamadas respectivamente dôbre de **branco**, **pio**, **duque**, **terno**, **quadra**, **quina** e **sena**.

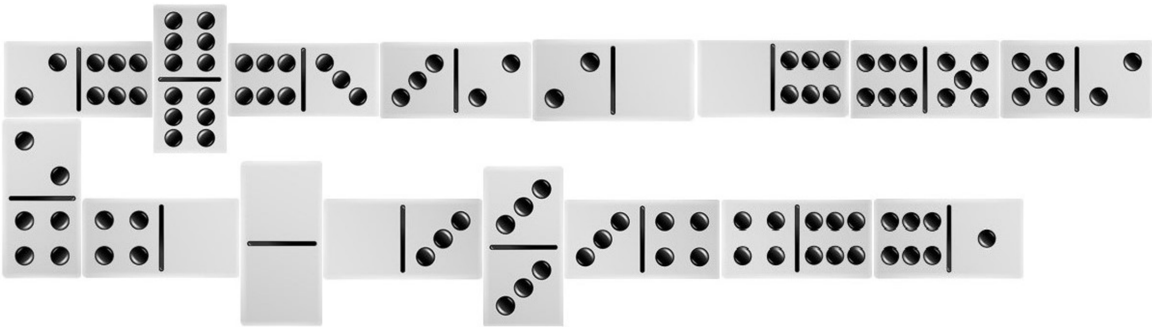
Figura 4 – Dôbres do dominó.



Fonte: O autor.

O presente trabalho foi desenvolvido considerando uma disputa de apenas dois jogadores. O objetivo do jogo é colocar todas as suas pedras na mesa antes do adversário. Cada jogador recebe 14 pedras no início da cada partida. O jogo começa pelo jogador que tenha o dôbre de sena. Após o primeiro lance, o jogo se desenvolve da seguinte maneira: na sua vez, cada jogador coloca uma das suas pedras em uma das 2 possibilidades de face disponíveis, de forma que os pontos de um dos lados coincidam com os pontos da extremidade onde está sendo colocada. Tradicionalmente, os dôbres são colocadas transversalmente às demais pedras do dominó. Se um jogador não puder jogar por não ter em mãos nenhuma das opções de pedras disponíveis na mesa, **passará** a vez ao seu oponente.

Figura 5 – Desenvolvimento do jogo



Fonte: O autor.

O jogador que ficar sem nenhuma pedra nas mãos será declarado o **vencedor**. Por outro lado, quando nenhum dos dois jogadores possuir a pedra necessária para continuar a partida, o jogo é considerado **fechado**. Nesse momento, os jogadores contarão os pontos das pedras restantes. O jogador com menos pontos vence a partida. Caso os dois jogadores tenham o mesmo número de pontos, a partida termina em **empate**. Para mais detalhes veja, [7].

No jogo de dominó, a aplicação de técnicas e estratégias são atribuições de extrema importância, uma vez que a aleatoriedade das pedras inicias distribuídas aos jogadores acarreta uma tomada de decisão para tentar vencer o seu oponente. O exercício das operações algébricas no jogo de dominó contribui para a educação matemática do jogador.

Os lances das partidas comentadas mais a frente seguem um raciocínio para se obter um jogo de dominó bem mais disputado. No dominó, cada pessoa que joga tenta colocar sua teoria em prática. Muitos jogadores realizam determinadas jogadas sem conhecimento de causa, utilizando muitas vezes, o fator sorte para definição delas. A atenção aos detalhes das jogadas é bem mais relevante do que o fator sorte, principalmente se a distribuição do jogo é uniforme.

Algumas habilidades são necessárias para que um jogador consiga chegar em um nível de jogo mais elevado. É preciso ter bastante atenção a cada jogada. É importante ter uma boa memória, principalmente na **contagem** das pedras, fator importante para a inferência sobre a estratégia do oponente e para a sequência de jogadas. A contagem das pedras é fundamental, uma vez que é possível deduzir quais pedras o adversário possui. Ao contar as pedras, o jogador evitará ao máximo que o adversário lhe aplique um passe. Uma análise mais profunda dessas técnicas pode ser encontrada em [8].

5 PROBABILIDADE NO JOGO DE DOMINÓ

5.1 Conceitos Básicos

O estudo da probabilidade vem da necessidade de medir a incerteza de determinados acontecimentos que não se pode prever antecipadamente. A seguir, apresentaremos alguns conceitos de probabilidade aplicados ao jogo de dominó. Para uma análise mais aprofundada de tais conceitos desta seção, sugerem-se as referências [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16], [17], [18], [19], [20], [21], [22], [23] e [24].

Em sua natureza, a probabilidade estuda **experimentos aleatórios**. Experimentos aleatórios são aqueles gerados a partir de uma repetição de procedimentos semelhantes. Estes experimentos podem apresentar resultados diferentes a cada ocorrência.

O conjunto de todos os resultados possíveis que ocorre em qualquer experimento é chamado de **espaço amostral**. No caso do jogo do dominó, a representação do espaço amostral para o sorteio de uma pedra será

$$\begin{aligned}\Omega \;=\; & \{0-0, 0-1, 0-2, 0-3, 0-4, 0-5, 0-6, \\ & 1-1, 1-2, 1-3, 1-4, 1-5, 1-6, 2-2, \\ & 2-3, 2-4, 2-5, 2-6, 3-3, 3-4, 3-5, \\ & 3-6, 4-4, 4-5, 4-6, 5-5, 5-6, 6-6\}.\end{aligned}$$

Qualquer subconjunto do espaço amostral é chamado de **evento**. Se $A \subset \Omega$ é um evento, $P(A)$ denotará a probabilidade de ocorrência desse evento.

Exemplo 5.1 *Ao retirar-se todas as pedras do dominó em que uma das faces é o terno, forma-se o evento*

$$A = \{3-0, 3-1, 3-2, 3-3, 3-4, 3-5, 3-6\}.$$

Em probabilidade, existem diversos tipos de eventos. Veremos alguns deles.

O **evento simples** é aquele formado por um único elemento do espaço amostral.

Exemplo 5.2 *O evento A = $\{5-5\}$ é a representação de um evento simples, sendo a retirada da pedra de dôbre de quina de um dominó.*

O **evento certo** é aquele que seguramente ocorrerá. Num jogo de dominó, este evento equivale a dizer que $A = \Omega$. Já o **evento impossível** é aquele que não ocorrerá, pois não será um elemento do espaço amostral.

Exemplo 5.3 *A retirada do dôbre de sete $\{7-7\}$ de um dominó, é um evento impossível, já que esta pedra não está contida no espaço amostral Ω.*

Em algumas situações, é necessário calcular a probabilidade da união de dois eventos. Assim, dados eventos A e B, entende-se como **evento união** ao conjunto de chance de ocorrer o evento A ou o evento B.

$$X = A \cup B.$$

Exemplo 5.4 *Seja* $A = \{0-0, 0-1, 1-1, 0-2\}$ *o evento que é constituído pela retirada de pedras do dominó cuja soma de pontos não ultrapasse dois e seja* $B = \{0-2, 1-1, 0-3, 1-2\}$ *o evento da retirada de pedras do dominó cuja a soma de pontos seja dois ou três. Dessa forma,*

$$C = A \cup B = \{0-0, 0-1, 1-1, 0-2, 0-3, 1-2\},$$

representa a retirada de pedras do dominó cuja a soma não ultrapasse três,

Analogamente ao evento união, pode-se definir o **evento intersecção**. Assim, dados eventos A e B, o evento intersecção é o conjunto de chance de ocorrer o evento A e o evento B simultaneamente.

$$X = A \cap B.$$

Exemplo 5.5 *Seja* $A = \{0-0, 0-1, 1-1, 0-2, 1-2, 0-3\}$ *o evento da retirada de pedras do dominó cuja soma de pontos não ultrapasse três e* $B = \{0-1, 1-1, 0-2, 1-2, 0-3, 0-4, 1-3, 2-2\}$ *o evento da retirada de pedras do dominó em que a soma de pontos esteja entre um e quatro inclusive. Daí,*

$$C = A \cap B = \{0-1, 1-1, 0-2, 1-2, 0-3\}$$

representa a retirada de pedras do dominó em que a soma de pontos esteja entre um e três inclusive, sendo a intersecção dos conjuntos A *e* B.

Quando dois eventos A e B não possuem intersecção, dizemos que tais eventos são **mutuamente exclusivos**, isto é, $A \cap B = \varnothing$.

Exemplo 5.6 *Seja*

$$A = \{0-5, 1-4, 1-5, 1-6, 2-3, 2-4, 2-5, 2-6, 3-3, 3-4, 3-5, 4-4\}$$

, o evento da retirada de pedras do dominó em que a soma de pontos está entre cinco e oito, e seja $B = \{3-6, 4-5, 4-6, 5-5, 5-6, 6-6\}$ *o evento da retirada de pedras do dominó em que a soma de pontos está entre nove e doze. Os eventos* A *e* B *são mutuamente exclusivos, pois não possuem elementos em comum, assim* $A \cap B = \varnothing$.

Dado um evento A, entende-se por **evento complementar**, denotado por A^C, o evento constituído pelos elementos de Ω que não estão em A. Ou seja, $A^C = \Omega - A$. Além disso, $\Omega = A^C \cup A$ e $A^C \cap A = \varnothing$.

Exemplo 5.7 *Seja*

$$\begin{aligned} A &= \{0-0, 0-1, 0-2, 1-1, 0-3, 1-2, 0-4, 1-3, \\ &\quad 2-2, 0-5, 1-4, 2-3, 0-6, 1-5, 2-4, 3-3\} \end{aligned}$$

o evento da retirada de pedras do dominó em que a soma de pontos seja menor que sete. O seu evento complementar é

$$\begin{aligned} A^C &= \{1-6, 2-5, 2-6, 3-4, 3-5, 3-6, 4-3, 4-4, \\ &\quad 4-5, 4-6, 5-2, 5-3, 5-4, 5-5, 5-6, 6-6\}, \end{aligned}$$

que é formado a partir da retirada de pedras de dominó em que a soma seja maior que seis.

5.2 Definições de Probabilidade

Para o desenvolvimento dessa seção, nos baseamos nas referências [9], [10] [11], [13], [14], [15], [16], [22], [23], [25], [26] e [27].

Definição 5.1 *(Axiomas de Kolmogorov) Considere o espaço amostral Ω, um conjunto não vazio. Uma probabilidade em Ω é uma função que associa a eventos de Ω, digam-se $E_1, \ldots, E_k$, um número real $P(E_i)$, com $i = 1, \ldots, k$, que satisfaz três axiomas:*

(i) $0 \leq P(E_i) \leq 1$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

(ii) $P(\Omega) = 1$.

(iii) *Se $E_i \cap E_j = \varnothing$, $i < j = 2, \ldots, k$, então*

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_k) = P(E_1) + P(E_2) + \cdots + P(E_k),$$

isto é, $P\left(\cup_{i=1}^{k} E_i\right) = \sum_{i=1}^{k} P(E_i)$.

Do Axioma **(i)**, nota-se que uma probabilidade será um número entre 0 e 1. Quanto mais próximo de 1, mais provável é a ocorrência do evento de interesse. Quanto mais distante de 1, menos provável. O Axioma **(ii)**, explicita essa escala em seu extremo, indicando que a probabilidade do próprio espaço amostral equivale a 1, ou seja, é certo que Ω ocorrerá. Seguindo o mesmo raciocínio, tem-se que $P(\varnothing) = 0$. Quanto ao Axioma **(iii)**, quando se envolvem eventos mutuamente exclusivos, a probabilidade da união desses eventos será igual à soma das probabilidades de cada um desses eventos.

Exemplo 5.8 *Seja A o evento constituído pela retirada de uma pedra de quina do dominó. Assim,*

$$P(A) = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}.$$

*Por outro lado, A^C é constituído pela retirada de uma pedra do dominó que não seja quina. Os axiomas **(ii)** e **(iii)** nos dão que*

$$P(\Omega) = P(A^C \cup A) = P(A^C + A) = P(A^C) + \frac{1}{4} = 1.$$

Portanto, $P(A^C) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Exemplo 5.9 *Na situação de um evento B, que é a retirada dos dôbres de um dominó, cada retirada de pedra é disjunta uma da outra, sendo cada probabilidade de retirada de um dôbre igual a $\frac{1}{28}$. Pelo Axioma **(iii)**,*

$$P(B) = \underbrace{\frac{1}{28} + \cdots + \frac{1}{28}}_{7-vezes} = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}.$$

Definição 5.2 *(Definição Clássica ou Laplaciana) Sejam Ω um espaço amostral formado pela união de m eventos simples e equiprováveis e $A \subset \Omega$ um evento. Definimos a probabilidade do evento A e representamos por P(A) como,*

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

Em que $n(\Omega) = m$ denota o número de elementos de Ω e n(A) o número de elementos de A.

Exemplo 5.10 *Considere que A representa o evento de retirar uma pedra do dominó em que uma das faces tem apenas um ponto. Então, $n(\Omega) = 28$, $n(A) = 7$ e*

$$P(A) = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}.$$

Definição 5.3 *(Definição de probabilidade de maneira frequentista) Considera-se agora um experimento que possa ser repetido em condições semelhantes por um número n de vezes e que em $n(A)$ vezes ocorra o evento A. Neste caso, o experimento é repetido várias vezes, estimando-se a probabilidade de A pela sua frequência relativa de ocorrências*

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}.$$

Note-se que agora $n(A)$ reflete o número de vezes em que o evento de interesse ocorre em n tentativas, independentemente de qualquer informação sobre o espaço amostral. No que lhe concerne, anteriormente, sob a abordagem clássica, $n(A)$ não necessita de experimentação, apenas da composição do próprio espaço amostral.

Exemplo 5.11 *Suponha que sejam sorteadas as seguintes 7 pedras de dominó*

$$A = \{0-4, 1-3, 2-2, 3-6, 4-5, 5-1, 6-3\}$$

calcularemos a probabilidade do evento A, de se ter a face 3.

Como foram retiradas 3 pedras com a face 3, diante de um total de 7 pedras, então

$$P(A) = \frac{3}{7}.$$

Definição 5.4 *(Probabilidade da união de dois eventos) A probabilidade da união de dois eventos é igual à soma das probabilidades de ocorrência de cada um dos eventos, subtraída da probabilidade da ocorrência dos dois eventos simultaneamente, isto é,*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Caso A e B sejam eventos mutuamente exclusivos, ou seja, $P(A \cap B) = \varnothing$, a fórmula será simplesmente

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B),$$

como destacado anteriormente, no Axioma **(iii)** de Kolmogorov.

Exemplo 5.12 *Sejam A o evento da retirada de uma pedra de dominó com face 1 e B o evento da retirada de uma pedra que tenha face 6. Daí,*

$$P(A) = \frac{7}{28}, \quad P(B) = \frac{7}{28} \quad e \quad P(A \cap B) = \frac{1}{28},$$

já que há 7 possibilidades em 28 para as pedras de 1 e 6 e ainda 1 pedra em comum das 28 que é a pedra de $\{1-6\}$. Assim,

$$P(A \cup B) = \frac{7}{28} + \frac{7}{28} - \frac{1}{28} = \frac{13}{28}.$$

Definição 5.5 *(Probabilidade da intersecção de dois eventos) É a probabilidade de ocorrerem conjuntamente os eventos de interesse, ou a probabilidade de acontecer a intersecção entre os eventos.*

Em outra perspectiva, para dois eventos A e B, $P(A \cap B)$ pode ser interpretada como

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A),$$

onde $P(B|A)$ é a probabilidade de acontecer B sabendo que aconteceu A.

Exemplo 5.13 *Seja A o evento de se retirar uma pedra de pio e seja B o evento de se retirar uma segunda pedra de pio. Note que para A, há 28 pedras, das quais 7 envolvem pio, enquanto para B restam 27 pedras, das quais 6 envolvem pio. Daí, a probabilidade de se retirar de um dominó uma pedra de pio e em seguida retirar outra pedra de pio, respectivamente será*

$$P(A \cap B) = \frac{7}{28} \cdot \frac{6}{27} = \frac{42}{756} = \frac{1}{18}.$$

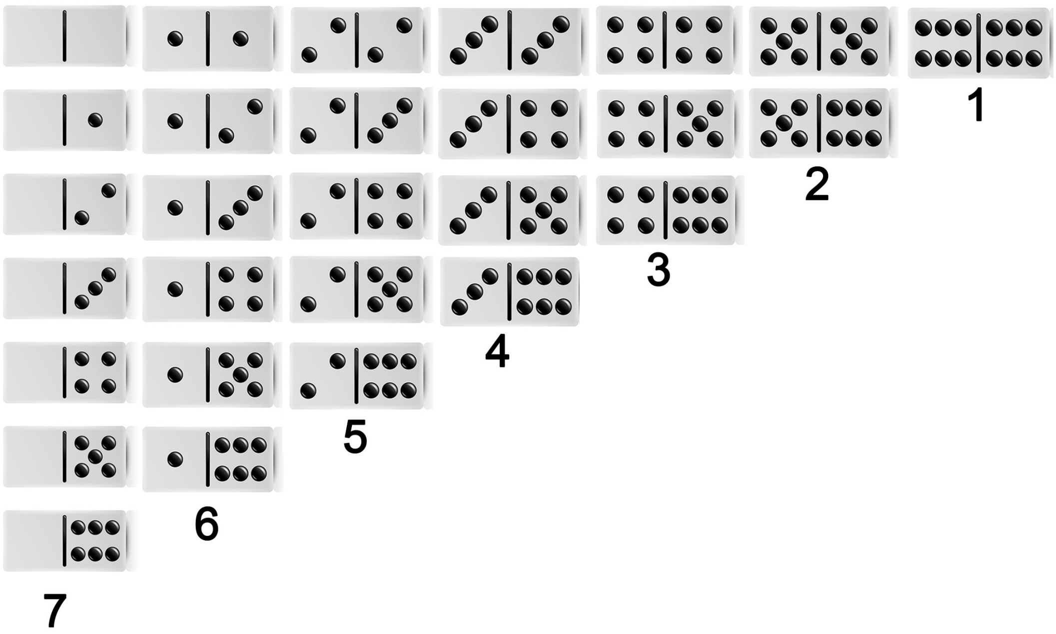
6 PROPOSTAS DIDÁTICAS

6.1 Contagem das pedras de um Dominó

Nesta seção, exploraremos os conceitos de contagem com probabilidade e análise combinatória e com estes conceitos apresentaremos 7 modos diferentes de se chegar que o dominó possui 28 pedras.

Exemplo 6.1 *Neste primeiro caso, criam-se colunas com as pedras de branco, pio, até a sena. Pela quantidade de cada coluna, pode-se realizar esta soma das pedras de um dominó manualmente totalizando* 28 *pedras, como pode-se observar pela Figura 6 que* $7+6+5+4+3+2+1=28$ *pedras.*

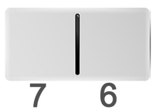
Figura 6 – Representação das pedras de um dominó.



Fonte: O autor.

Exemplo 6.2 *Uma outra abordagem para esse problema, baseia-se na ideia de querer fabricar pedras do dominó. Assim, tem-se* 7 *possibilidades de permutar os números na primeira face, onde pode-se colocar os números* $\{0,1,2,3,4,5,6\}$*. Na segunda face, pode-se colocar* 6 *possibilidades, pois não se deve repetir o número escolhido da primeira face (essa análise exclui os dôbres). O resultado é* $7\cdot 6=42$ *pedras, conforme a Figura 7.*

Figura 7 – 7×6 possibilidades.



Fonte: O autor.

As pedras do tipo $\{2-4\}$ *e* $\{4-2\}$ *e afins, são consideradas iguais. Assim, serão contabilizadas uma única vez, representado pela Figura 8.*

Figura 8 – Pedras do dominó: $\{2-4\}$ e $\{4-2\}$.

Fonte: O autor.

Para corrigir essa contagem em dobro, basta dividir 42 *por* 2*, obtendo* 21 *pedras com números diferentes e* 7 *pedras com repetição (os dôbres). No total temos* $21+7$ *igual a* 28 *pedras de dominó [24].*

Exemplo 6.3 *Outra análise pode ser feita da seguinte forma. Cada pedra de dominó é constituída de dois números. As pedras são simétricas, de sorte que o par de números não é ordenado. Um exemplo pode ser constatado na Figura 9. Quer-se determinar quantas pedras diferentes podem ser formadas usando os números* $0, 1, 2, 3, 4, 5$ *e* 6*.*

Figura 9 – Pedras $\{3-2\}$ e $\{2-3\}$.

Fonte: O autor.

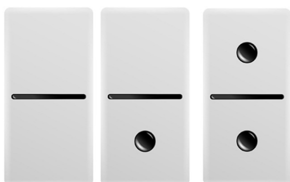
Primeiramente, deve-se trabalhar com o espaço amostral. Se tivermos apenas o número 0*, a única pedra que consegue-se construir é* $\{0-0\}$*, conforme a Figura 10.*

Figura 10 – Pedra $\{0-0\}$.

Fonte: O autor.

Com os números $0, 1$*, constroem-se as pedras* $\{0-0\}, \{0-1\}$ *e* $\{1-1\}$ *, veja Figura 11.*

Figura 11 – Pedras $\{0-0\}$, $\{0-1\}$ e $\{1-1\}$.



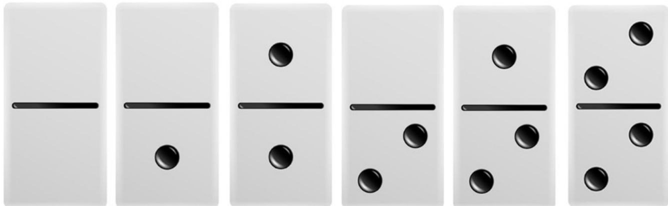
Fonte: O autor.

Já com os números $0, 1, 2$*, pode-se construir as pedras*

$$\{0-0\}, \{0-1\}, \{1-1\}, \{2-0\}, \{2-1\} \text{ e } \{2-2\},$$

conforme a Figura 12.

Figura 12 – Pedras $\{0-0\}$, $\{0-1\}$, $\{1-1\}$, $\{2-0\}$, $\{2-1\}$ e $\{2-2\}$.



Fonte: O autor.

Para os números $0, 1, 2, 3$*, constroem-se as pedras*

$$\{0-0\}, \{0-1\}, \{1-1\}, \{2-0\}, \{2-1\}, \{2-2\}, \{3-0\}, \{3-1\}, \{3-2\} \text{ e } \{3-3\}.$$

Intuitivamente, pode-se identificar que, de acordo com a quantidade dos números $1, 2, 3, 4$*, a soma das parcelas é a seguinte:* $1, 1+2 = 3, 1+2+3 = 6, 1+2+3+4 = 10$*. Com isso, pode-se chegar à quantidade de pedras de um dominó clássico com pedras de número* $0, 1, 2, 3, 4, 5$ *e* 6 *através da soma:* $1+2+3+4+5+6+7 = 28$*.*

Exemplo 6.4 *O exemplo anterior sugere a seguinte questão: quantas pedras diferentes podem ser formadas num jogo de dominó se usarmos os números* $0, 1, 2, 3, \ldots, n$*? Para responder tal questionamento, usaremos a ideia de Gauss para a soma dos termos de uma progressão aritmética. Dessa forma, a quantidade de pedras de um dominó de* n *pedras será dada por*

$$1+2+3+\ldots+n = (1+n)\cdot\frac{n}{2} = \frac{n\cdot(n+1)}{2}.$$

Para o jogo de dominó, usa-se $n = 7$ *categorias de pedras, ou seja, teremos ao todo*

$$\frac{n\cdot(n+1)}{2} = \frac{7\cdot(7+1)}{2} = \frac{7\cdot 8}{2} = 28$$

pedras de dominó.

Exemplo 6.5 *Pode-se efetuar tal soma utilizando uma* ***combinação com repetição****, determinando o espaço amostral do jogo do dominó. A contagem de pontos de cada uma das duas partes de uma pedra de dominó, é um número inteiro entre* 0 *e* 6*, onde pode ocorrer a repetição, em um padrão combinatório da distribuição de* 7 *possibilidades para cada uma das duas faces da pedra do dominó. O algoritmo da combinação com repetição dado por*

$$C_{n,k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!},$$

onde n *é a quantidade de faces do dominó,* k *é o número de faces que podem ser repetidas (no caso* $k = 2$*). Assim,*

$$C_{7,2} = \frac{(7+2-1)!}{2!\cdot(7-1)!} = \frac{8!}{2!\cdot 6!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6!}{2\cdot 6!} = \frac{8\cdot 7}{2} = 28.$$

Esse cálculo determina a cardinalidade do espaço amostral do dominó.

Exemplo 6.6 *Também pode ser usada a ideia de* ***combinatória simples*** *nas pedras com números diferentes. Das n pedras, deve-se escolher duas. Ou seja,*

$$C_{n,2} = \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)! \cdot 2!} = \frac{n(n-1)}{2 \cdot 1} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

As pedras com números iguais, totalizam n ao todo. Assim, a contagem final de um dominó com n pedras será dada por

$$\frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n-1)+2n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exemplo 6.7 *A contagem das pedras do dominó também pode ser feita usando* ***teoria dos conjuntos****. Defina,*

$$n(A_i) = \textit{quantidade de vezes que aparece a pedra } i,$$

onde i está relacionado com as faces de dominó, variando de 0 a 6.

Na Figura 13, temos a pedra que tem apenas a face com a variação $i = 0$. Daí, $n(A_0) = 1$.

Figura 13 – Pedra do dominó: $\{0-0\}$.

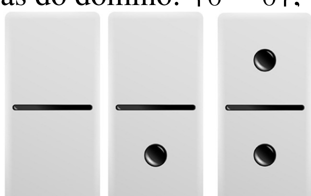
Fonte: O autor.

Na Figura 14, tem-se pedras com a variação $i = 0, 1$. Assim,

$$\begin{aligned} n(A_0 \cup A_1) &= n(A_0) + n(A_1) - n(A_0 \cap A_1) \\ &= 2 + 2 - 1 \\ &= 3. \end{aligned}$$

Note que $n(A_0 \cap A_1)$ é a pedra de $\{0-1\}$, onde já ocorreu a sua contagem quando foram contadas as pedras de branco e pio.

Figura 14 – Pedras do dominó: $\{0-0\}$, $\{0-1\}$ e $\{1-1\}$.

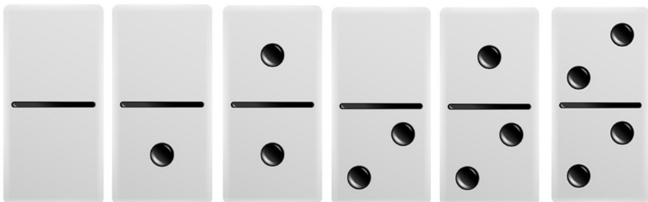


Fonte: O autor.

Na Figura 15, temos as pedras com a variação com $i = 0, 1, 2$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} n(A_0 \cup A_1 \cup A_2) &= n(A_0) + n(A_1) + n(A_2) - n(A_0 \cap A_1) \\ &- n(A_0 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_2) + n(A_0 \cap A_1 \cap A_2) \\ &= 3 + 3 + 3 - 1 - 1 - 1 + 0 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Figura 15 – Pedras do dominó: $\{0-0\}$, $\{0-1\}$, $\{1-1\}$, $\{0-2\}$, $\{1-2\}$ e $\{2-2\}$.



Fonte: O autor.

Observe que $n(A_0 \cap A_1), n(A_0 \cap A_2), n(A_1 \cap A_2)$ são as pedras de $\{0-1, 0-2, 1-2\}$, onde já ocorreram a sua contagem, quando foram contadas as pedras de branco, pio e duque. Por outro lado, $n(A_0 \cap A_1 \cap A_2)$ = 0, pois as pedras de dominó, possuem intersecções duas a duas.

De maneira geral,

$$\begin{aligned} n(\cup_{i=0}^{k} A_i) &= \sum n(A_i) - \sum_{i \neq j \in \{0,1,\ldots,k\}} n(A_i \cap A_j) + \ldots - (-1)^{n+1} \\ &+ \sum_{i \neq j \neq \ldots \neq k \in \{0,1,\ldots,k\}} n(A_i \cap A_j \cap \ldots \cap A_k) \end{aligned}$$

Uma vez que as intersecções três a três, quatro a quatro, ..., k a k são todas nulas, teremos Daí,

$$n(A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_k) = n(\cup_{i=0}^{k} A_i) = \sum n \cdot A_i - \sum_{i \neq j \in \{0,1,\ldots,k\}} n(A_i \cap A_j)$$

No caso específico do dominó, quando aplicarmos na fórmula com o i , obtemos:

$$\begin{aligned} n(\cup_0^6 A_i) &= \sum_{i=0}^{6} n(A_i) - \sum_{i \neq j \in \{0,1,\ldots,6\}} n(A_i \cap A_j) \\ &= 7 \cdot 7 - \binom{7}{2} \\ &= 49 - \frac{7!}{5! \cdot 2!} \\ &= 49 - \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 2 \cdot 1} \\ &= 49 - 7 \cdot \frac{6}{2} \\ &= 49 - 21 \\ &= 28. \end{aligned}$$

6.2 Problemas no Dominó

Os problemas aqui abordados foram inspirados em [24].

Problema 1 ***Qual número aparecerá no final da cadeia?***

Deseja-se enfileirar todas as pedras do dominó de maneira contínua. Por exemplo, comece com a pedra $\{6-3\}$. *Em seguida, coloque a pedra* $\{3-4\}$ *e depois a pedra* $\{4-1\}$ *conforme a Figura 16. É possível descobrir qual será a face que aparecerá na extremidade da direita da última pedra?*

Figura 16 – Pedras do dominó: $\{6-3\}$, $\{3-4\}$, $\{4-1\}, \ldots \downarrow$

Fonte: O autor.

Para responder a este questionamento, é necessário observar que para construírmos uma cadeia contínua com as pedras do dominó, cada face se conecta com a face da pedra seguinte. No nosso exemplo, iniciamos com a pedra de sena $\{6-3\}$, *dessa forma, restaram as pedras* $\{6-0, 6-1, 6-2, 6-4, 6-5, 6-6\}$. *Daí, teríamos as seguintes possibilidades na cadeia a ser formada*

$$\{6-3\}\cdots\{a-6\}\{6-b\}\cdots\{x-6\}\{6-6\}\{6-y\}\cdots\{z-6\}\{6-w\}\cdots\{c-6\}.$$

ou

$$\{6-3\}\cdots\{a-6\}\{6-b\}\cdots\{x-6\}\{6-y\}\cdots\{z-6\}\{6-w\}\cdots\{c-6\}\{6-6\}.$$

Sendo assim, para formar uma cadeia contínua, necessariamente, teremos uma face de sena na extremidade direita da cadeia.

Problema 2 ***De quantas formas pode-se colocar duas pedras de dominó?***

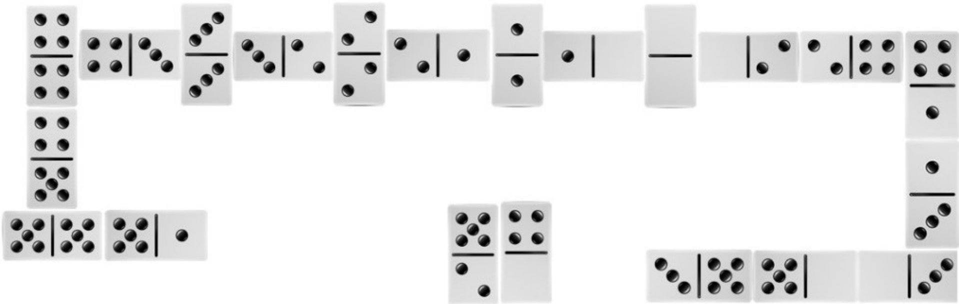
Deseja-se colocar duas pedras do dominó, como segue:

$$\{a-b\}\{b-c\}.$$

De quantas maneiras isso pode ser feito? Para isso, analisaremos duas situações. Se a primeira pedra é um dôbre há 7 *possibilidades e para a segunda há* 6 *possibilidades. Logo, pelo princípio multiplicativo, existem* $7 \cdot 6 = 42$ *possibilidades. Se a primeira pedra não é um dôbre, teríamos* 21 *possibilidades. Para calcular a segunda pedra, imagine que a primeira tenha sido* $\{1-6\}$. *As outras possibilidades para a face de pio são* $\{1-0, 1-1, 1-2, 1-3, 1-4, 1-5\}$ *e para a face de sena são* $\{6-0, 6-2, 6-3, 6-4, 6-5, 6-6\}$. *Com isso, teríamos* 12 *possibilidades para as duas situações. Logo, pelos dois casos, usando a regra do produto, há* $21 \cdot 12 = 252$ *possibilidades. Portanto, pela regra da adição temos um total de* $42 + 252 = 294$ *possibilidades.*

Problema 3 ***É possível formar um dominó retirando as pedras de sena?***

Figura 17 – Jogo de dominó sem as pedras de sena.

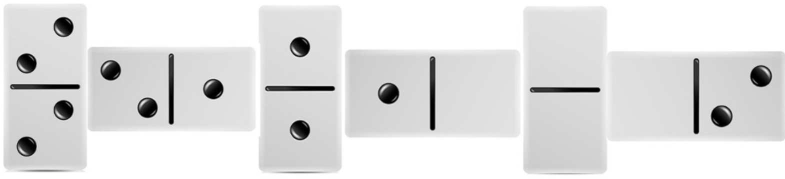


Fonte: O autor.

Para esta verificação, observemos através da Figura 17 que não é possível formar esta categoria de dominó, pois sobrariam pedras soltas. Por exemplo, as pedras $\{5-2\}$ *e* $\{4-0\}$ *não iriam se encaixar com nenhuma outra.*

Por outro lado, é possível formar um dominó somente com as pedras $\{2-2\}$, $\{2-1\}$, $\{1-1\}$, $\{1-0\}$, $\{0-0\}$, $\{0-2\}$, *como mostra a Figura 18.*

Figura 18 – Pedras que possuem face menor ou igual a 2.



Fonte: O autor.

Além disso, é possível formar um jogo de dominó com as pedras

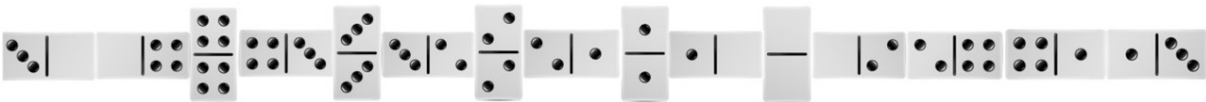
$$\{3-0\},\{0-4\},\{4-4\},\{4-3\},\{3-3\},$$

$$\{3-2\},\{2-2\},\{2-1\},\{1-1\},\{1-0\},$$

$$\{0-0\},\{0-2\},\{2-4\},\{4-1\},\{1-3\},$$

veja a Figura 19.

Figura 19 – Pedras que possuem face menor que ou igual a 4.



Fonte: O autor.

As análises acima sugerem que, quando o número máximo da face é par, é possível criar um dominó e, quando o número máximo da face é ímpar, não é possível criar um dominó.

Problema 4 ***Quanto vale a soma de todos os números das pedras de um dominó?***

Como cada número do dominó $\{0,1,2,3,4,5,6\}$ *aparece* 8 *vezes. Para determinar a soma de todas as pedras do dominó basta multiplicarmos por oito a soma de cada uma das pedras, isto é,* $8\cdot(0+1+2+3+4+5+6)=8\cdot 21=168$.

Problema 5 ***Um exemplo avançado com probabilidade.***

Considere o evento A *de retirada de* 7 *pedras aleatoriamente de um dominó e calcule a probabilidade do evento de se ter* 4 *quinas na mão. A probabilidade será a combinação de escolher* 4 *quinas num total de* 7 *e selecionar* 3 *outras pedras de um total das* 21 *pedras restantes. Quanto ao espaço amostral, não há restrições, são escolhidas* 7 *pedras quaisquer de um total de* 28. *A probabilidade do evento* A *será*

$$P(A)=\frac{C_{7,4}\cdot C_{21,3}}{C_{28,7}}\approx 3,93\%.$$

6.3 Medidas de Tendência Central

Apresentaremos uma proposta de exemplo do ensino de dois conceitos da área de Estatística usando dominó, a **mediana** e a **moda**.

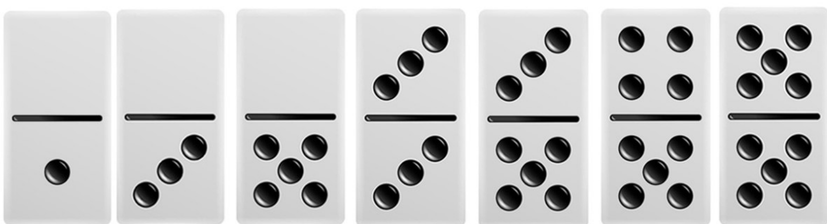
A **mediana** é uma medida de posição central que divide o conjunto de valores observados após a sua ordenação exatamente na sua metade. Se é retirada uma quantidade ímpar, a mediana será dada pelo valor central. Caso seja retirada uma quantidade par, a mediana será dada pelos valores das posições centrais. Por outro lado, a **moda** é a medida que apresenta a maior frequência dos valores observados. Vejamos um exemplo simples da aplicação dessas duas medidas usando dominó.

Exemplo 6.8 *Retiram-se sete pedras do dominó que são:*

$$\{0-1,0-3,0-5,3-3,3-5,4-5,5-5\},$$

representado pela Figura 20. A mediana é a pedra que ocupa a posição central. Como há 7 *pedras, a posição central é ocupada pela pedra* $\{3-3\}$. *A moda é a face que mais aparece no dominó. No nosso exemplo, é a face de quina, pois esta pedra possui a maior frequência com aparição em* 4 *pedras.*

Figura 20 – Pedras $\{0-1,0-3,0-5,3-3,3-5,4-5,5-5\}$.



Fonte: O autor.

6.4 Partidas Analisadas

As partidas foram retiradas do jogo online Dominó Expert (14×14) que se encontra em [28] e para o melhor entendimento das discussões dos resultados será convencionado que o jogador cujas pedras podem ser visualizadas será chamado Jogador X e cujas pedras não podem ser visualizadas será chamado Jogador Y, conforme pode ser observado na Figura 22.

Figura 21 – Pedras retiradas do jogo online dominó expert.

Fonte: O autor.

Algumas regras básicas neste jogo são as seguintes:

(i) O jogador que vence uma partida com sua pedra se encaixando nas duas pontas ou de dôbre em uma das pontas, ganha 2 pontos;

(ii) O jogador que vence uma partida de dôbre nas duas pontas, ganha 4 pontos;

(iii) Só é possível fechar o jogo de forma natural, isto é, quando as faces de cada uma das duas pontas que faltam jogar, já foram colocadas 6 vezes na mesa e com isso a pedra que falta jogar, fara com que o jogo fique sem continuidade;

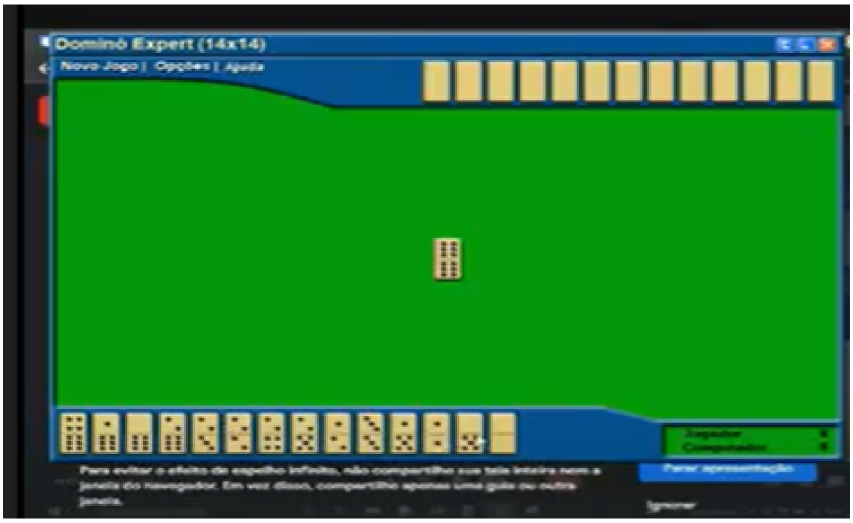
(iv) Vence o jogo quem primeiro obter dez ou mais pontos.

Ao iniciar a partida, é interessante organizar as pedras pelas suas maiores frequências para futuramente jogar em cima destas faces, objetivando dar passes no seu oponente. Outro fator decisivo a ser analisado é a frequência de dôbres. O excesso dessas pedras pode ocasionar a impossibilidade de jogar essas pedras, ou seja, que o jogador fique impossibilitado de colocá-las no jogo.

Para maiores detalhes de como funciona as regras do jogo de dominó aqui utilizadas consultar o endereço eletrônico [28].

PARTIDA 1

Figura 22 – Início da Partida 1.



Fonte: O autor.

Observando a Figura 22, o jogador X está com três quinas sem o dôbre que são

$$\{5-0\}, \{5-1\} \text{ e } \{5-2\},$$

enquanto o jogador Y está com as outras quatro quinas, a saber,

$$\{5-3\}, \{5-4\}, \{5-5\} \text{ e } \{5-6\},$$

isso quer dizer o seguinte: se X segurar essas quinas na mão, o dôbre de quina de Y irá ficar impossibilitado de jogar à medida que Y for jogando as quinas e o jogador X ficar jogando nestas pedras.

O jogador Y está com três pios sem o dôbre que são

$$\{1-0\}, \{1-3\} \text{ e } \{1-4\},$$

enquanto o jogador X está com as outras quatro quinas, a saber,

$$\{1-1\}, \{1-2\}, \{1-5\} \text{ e } \{1-6\},$$

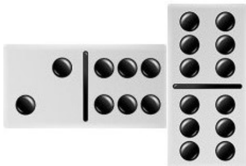
isso quer dizer o seguinte: se Y segurar esses pios na mão, o dôbre de pio de X irá ficar impossibilitado de jogar à medida que X for jogando os pios e o jogador Y ficar jogando nestas pedras.

A estratégia de jogo de X será em cima de suas maiores frequências, que no caso são 6 pedras de duque $\{2-1\}, \{2-2\}, \{2-3\}, \{2-4\}, \{2-5\}$ e $\{2-6\}$ indicando uma probabilidade de $6/7$ e quatro senas, que são $\{6-0\}, \{6-1\}, \{6-2\}$ e $\{6-4\}$ apresentando uma probabilidade de $4/7$. O jogador X não deve jogar pio para evitar que o dôbre de pio seja impossibilitado de jogar, exceto se for forçado a isso, não deve jogar quadra e branco que são as maiores frequências de Y. Enquanto a estratégia do seu oponente Y, são 5 pedras de de quadra $\{4-0\}, \{4-1\}, \{4-3\}, \{4-4\}$ e $\{4-5\}$ indicando uma probabilidade de 5/7 e 4 pedras de branco, que são $\{0-1\}, \{0-2\}, \{0-3\}$ e $\{0-4\}$. O jogador Y não deve jogar pio para evitar que o dôbre de pio seja impossibilitado de jogar.

Lance 1

O concorrente Y começou jogando por conta de ter tirado o dôbre de sena. Neste caso, o primeiro lance não foi uma boa escolha, uma vez que X está com quatro senas, enquanto Y ficará somente com duas. Isso indica que X ficará com uma probabilidade de $4/6$, enquanto Y de $2/6$ das pedras restantes de sena. Enquanto isso, o jogador X em sua primeira jogada pode jogar $\{6-0\}, \{6-1\}, \{6-2\}$ e $\{6-4\}$. Por conta da sua estratégia, X não pode escolher branco, pio e quadra. Assim, X resolve jogar $\{6-2\}$, seguindo sua estratégia.

Figura 23 – Partida 1 - Lance 1

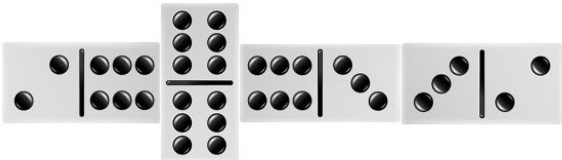


Fonte: O autor.

Lance 2

No seu segundo lance, o jogador Y poderia jogar $\{6-3\}, \{6-5\}$ e $\{2-0\}$. Por conta da sua estratégia, ele não jogará quina. Neste caso, poderá jogar branco ou terno. Provavelmente, Y jogará terno por conta da maior frequência, com probabilidade de $4/7$. Assim, Y joga $\{6-3\}$. O rival X pode jogar com $\{2-1\}, \{2-2\}, \{2-3\}, \{2-4\}, \{2-5\}$ e $\{3-3\}$, não tendo a necessidade de jogar o dôbre de terno. X deseja fazer o seu jogo de duque, ficando com uma probabilidade de $4/5$. Dessa forma, X acaba jogando a pedra $\{3-2\}$, fazendo dois duques.

Figura 24 – Partida 1 - Lance 2

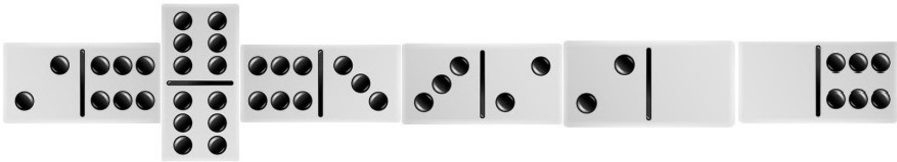


fonte: O autor.

Lance 3

Em seu terceiro lance Y é obrigado a jogar o seu último duque, que é $\{2-0\}$. Por outro lado, X só irá jogar no duque quando for obrigado, já que a ponta é sua. O jogador X tem a opção de jogar $\{0-0\}, \{0-5\}$ e $\{0-6\}$. Ele não tem a intenção de jogar quina, uma vez que ele quer impossibilitar Y de jogar o dôbre de quina. Se jogar o dôbre de branco, o oponente poderá jogar com terno ou quadra, que são suas frequências superiores. Assim, X joga $\{0 - 6\}$. Isso forçará Y a jogar quina.

Figura 25 – Partida 1 - Lance 3

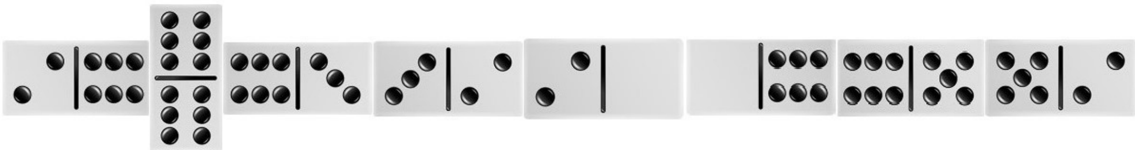


Fonte: O autor.

Lance 4

O jogador Y é forçado a jogar $\{6 - 5\}$ em seu quarto lance. Já X pode jogar $\{2 - 1\}, \{2 - 2\}, \{2 - 4\}, \{2 - 5\}, \{5 - 0\}$ e $\{5 - 1\}$. X joga $\{5 - 2\}$, mas fazendo dois duques. Dessa forma, Y leva um passe e, com isso, X passa a ter a vantagem.

Figura 26 – Partida 1 - Lance 4

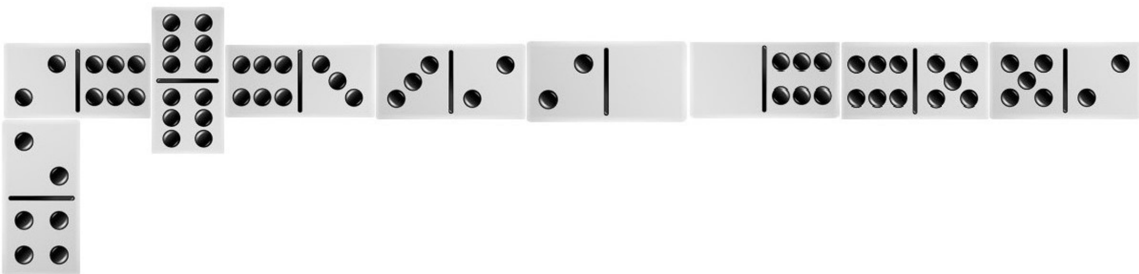


Fonte: O autor.

Lance 5

Uma vez que Y levou um passe, X pode jogar $\{2 - 1\}, \{2 - 2\}$ e $\{2 - 4\}$. Por outro lado, X não joga pio para evitar ter o seu dôbre impossibilitado de jogar, nem joga o dôbre de duque para tentar bater nas duas pontas. Com isso, lança $\{2 - 4\}$ e fica com a probabilidade de $2/2$ destas pedras.

Figura 27 – Partida 1 - Lance 5

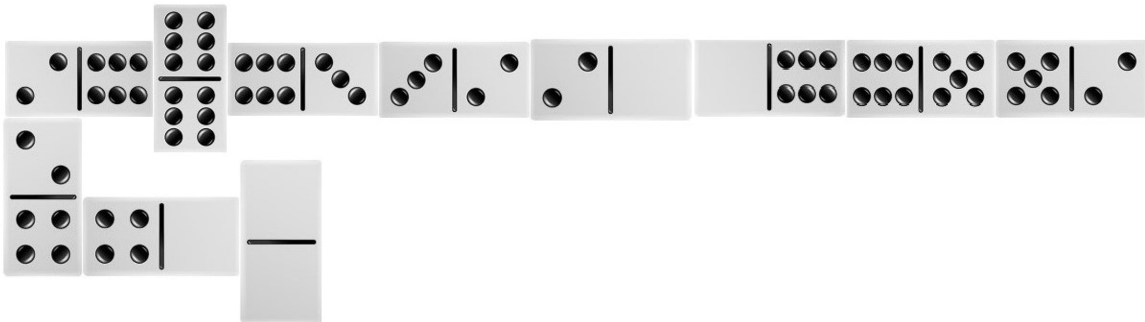


Fonte: O autor.

Lance 6

No sexto lance da partida, Y pode jogar $\{4 - 0\}, \{4 - 1\}, \{4 - 3\}, \{4 - 4\}$ e $\{4 - 5\}$. Ele não pode jogar o dôbre de quadra, se não X entra de sena e dá outro passe em Y. Y não pode jogar nem quina nem pio por conta de ficar impossibilitado de jogar o dôbre destas pedras. Y não pode jogar terno, se não vai obrigar na próxima jogada quebrar o terno porque X vai jogar o dôbre de terno, com isso a melhor das alternativas será jogar branco, ficando com probabilidade de $2/4$ desta face. A essa altura do jogo, observamos que X está com um jogo mais consistente e caminhando para a vitória, X tem opção de jogar $\{1-2\}, \{2-2\}, \{0-0\}$ e $\{0-5\}$. Não pode jogar na sua ponta de duque e não pode mandar quina, então a melhor opção é jogar o dôbre de branco ficando com probabilidade de $1/3$.

Figura 28 – Partida 1 - Lance 6

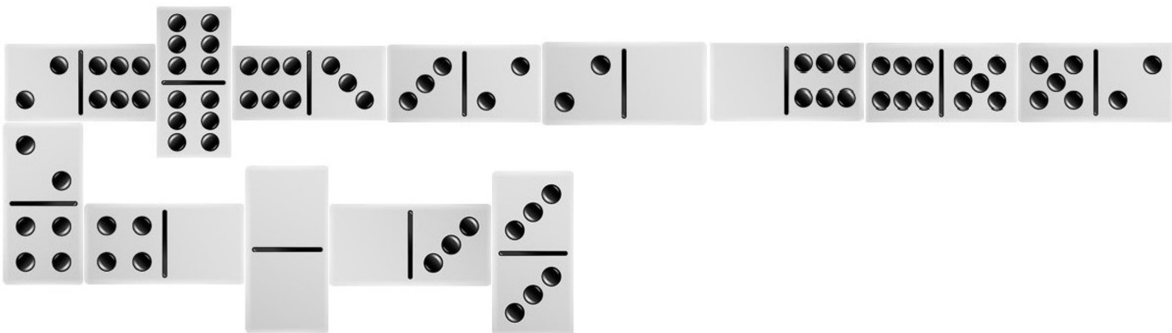


Fonte: O autor.

Lance 7

Nesta jogada, Y pode jogar $\{0-1\}$ e $\{0-3\}$. Ele não pode jogar pio, daí irá jogar terno, ficando com uma probabilidade de $3/4$. Enquanto isso, X pode jogar $\{2-1\}, \{2-2\}$ e $\{3-3\}$. X não jogará na sua ponta de duque, assim X joga a sua única opção que é o dôbre de terno.

Figura 29 – Partida 1 - Lance 7

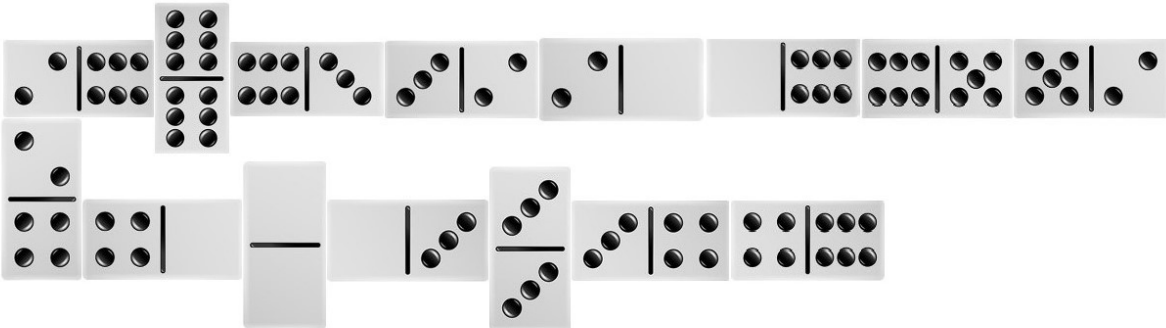


Fonte: O autor.

Lance 8

Neste lance, Y pode jogar $\{3-1\}, \{3-4\}$ e $\{3-5\}$, por conta da estratégia de não poder mandar pio e quina, então Y joga a quadra $\{3-4\}$ e ainda fica com uma probabilidade de $3/4$ desta face. Por outro lado, X pode jogar $\{1-2\}, \{2-2\}$ e $\{4-6\}$. X não jogará na sua ponta de duque. Com isso, X jogará a quadra $\{4-6\}$, ficando uma probabilidade de $1/1$ das pedras de sena. Assim, faz com que Y leve outro passe.

Figura 30 – Partida 1 - Lance 8

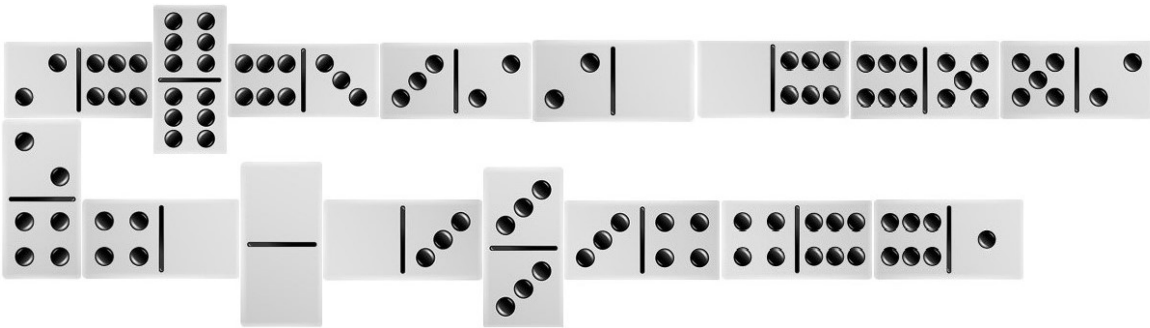


Fonte: O autor.

Lance 9

Y não consegue jogar neste lance. X pode jogar $\{1-2\}, \{2-2\}$ e $\{6-1\}$. X continua com a estratégia de não jogar na sua ponta de pio e com isso jogará na sua ponta de sena, lançando $\{6-1\}$.

Figura 31 – Partida 1 - Lance 9

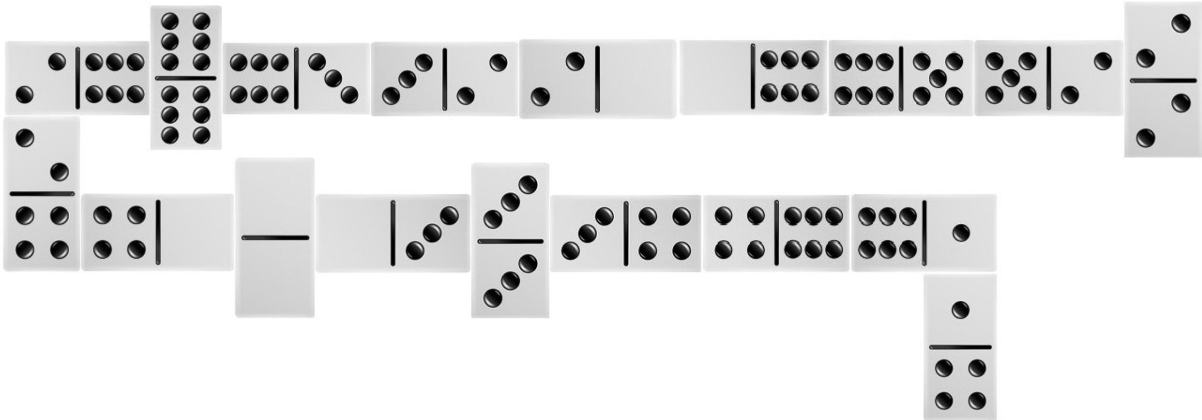


Fonte: O autor.

Lance 10

Neste lance, Y pode jogar $\{1-0\}, \{1-3\}$ e $\{1-4\}$ e firmar ponta de terno ou quadra. Como há mais pedras de quadra do que de terno, Y jogará $\{1-4\}$, ficando com uma probabilidade de $2/2$. Neste lance X pode jogar $\{2-1\}$ e $\{2-2\}$. Como X não tem quadra, é obrigado a jogar na sua ponta de duque e joga o dôbre de duque, ficando com a probabilidade de $1/1$ deste naipe.

Figura 32 – Partida 1 - Lance 10

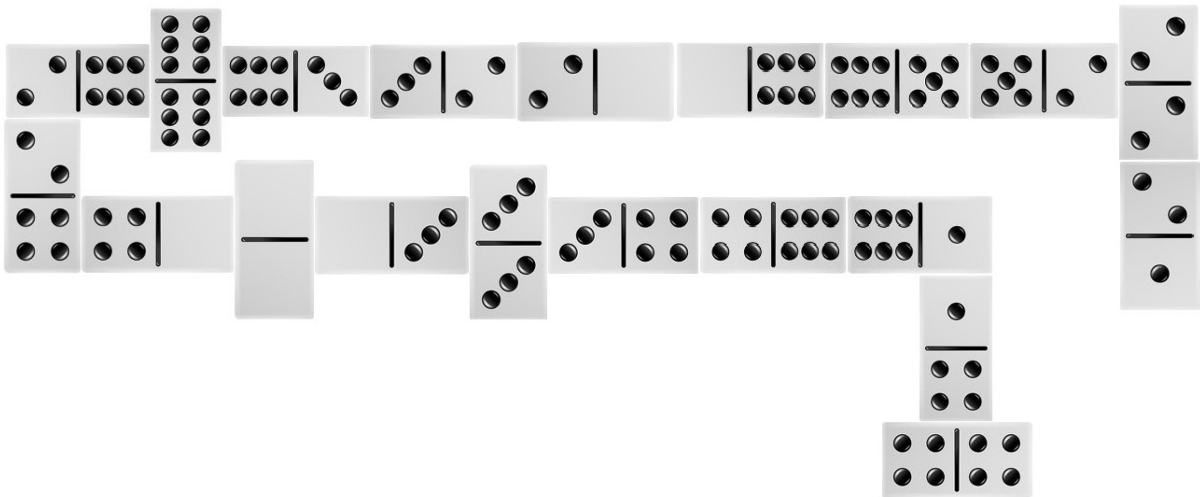


Fonte: O autor.

Lance 11

Neste lance Y pode jogar $\{4-4\}$ e $\{4-5\}$. Para não ficar impossibilitado de ficar sem jogar o seu dôbre de quadra, Y joga $\{4-4\}$ e fica com uma probabilidade de $1/1$ das quadras. Neste lance X só pode jogar $\{2-1\}$, ficando com uma probabilidade $1/2$ dos pios.

Figura 33 – Partida 1 - Lance 11

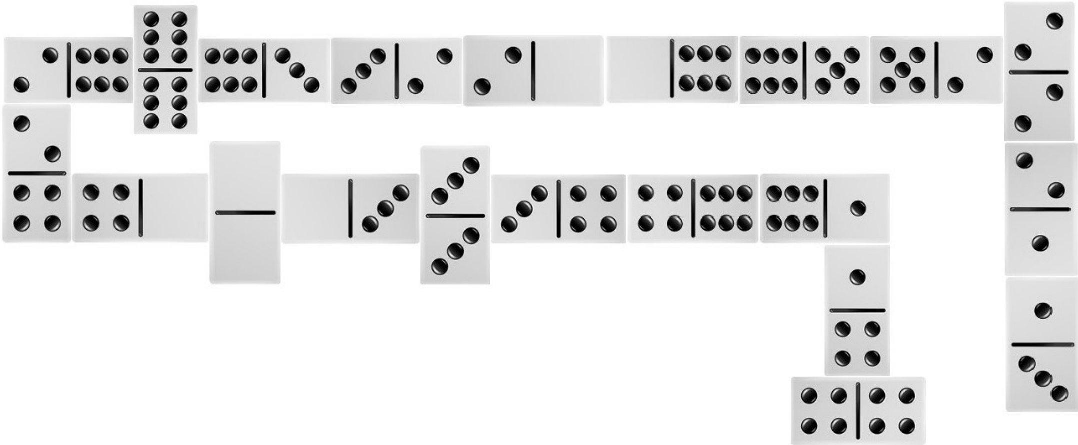


Fonte: O autor.

Lance 12

Neste lance, Y pode jogar $\{1-0\}$, $\{1-3\}$ e $\{4-5\}$. Y não pode jogar na sua ponta de quadra, assim, joga terno para adquirir esta ponta, jogando $\{1-3\}$ e ficando com uma probabilidade de $1/1$. Neste lance X não consegue jogar, levando um passe.

Figura 34 – Partida 1 - Lance 12

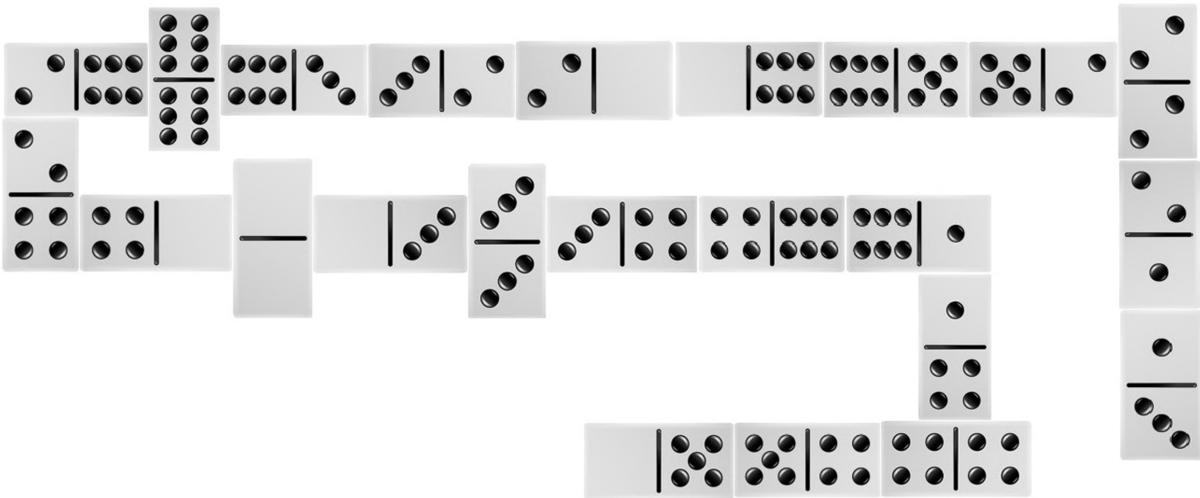


Fonte: O autor.

Lance 13

Neste lance, Y pode jogar $\{3-5\}$ e $\{4-5\}$. Qualquer que seja a sua jogada, ele jogará quina, neste caso, é melhor jogar a pedra com mais pontos. Assim, Y joga $\{4-5\}$. Neste lance, X pode jogar $\{5-0\}$ e $\{5-1\}$, não vai jogar pio para evitar que tenha o dôbre de pio impossibilitado de jogar, com isso joga $\{5-0\}$.

Figura 35 – Partida 1 - Lance 13

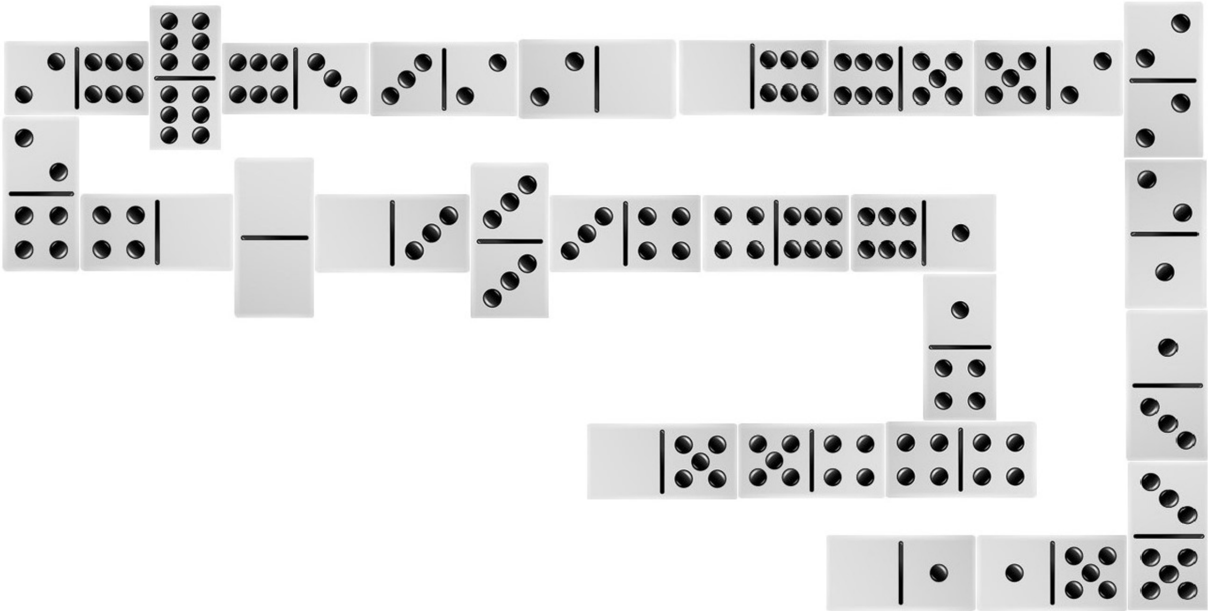


Fonte: O autor.

Lance 14

Neste lance, Y pode jogar $\{3-5\}$ e $\{0-1\}$. Não pode mandar pio, pois X ganhará nas duas pontas com a seguinte sequência de jogadas, Y joga $\{0-1\}$ e X deita o dôbre de pio, a única possibilidade é Y jogar $\{3-5\}$ e com isso X bate com $\{5-1\}$ nas duas pontas ganhando assim ganhar 2 pontos nessa partida. Se jogar quina o jogo terminará com uma contagem de pontos. Assim, a melhor das hipóteses é Y jogar $\{3-5\}$. Neste lance X só pode jogar $\{5-1\}$.

Figura 36 – Partida 1 - Lances 14 e 15



Fonte: O autor.

Lance 15

Neste lance, Y vai impossibilitar que seja jogado o dôbre de pio de X, jogando $\{1 - 0\}$. X não consegue jogar neste lance, levando um passe.

Lance 16

Y não consegue jogar nesse lance e o jogo acaba indo para a contagem de pontos. Y termina o jogo com a pedra de $\{5 - 5\}$, enquanto X termina com a pedra de $\{1 - 1\}$. Com isso, X ganha o jogo por ficar com menos pontos, no caso, X com 2 pontos e Y com 10 pontos.

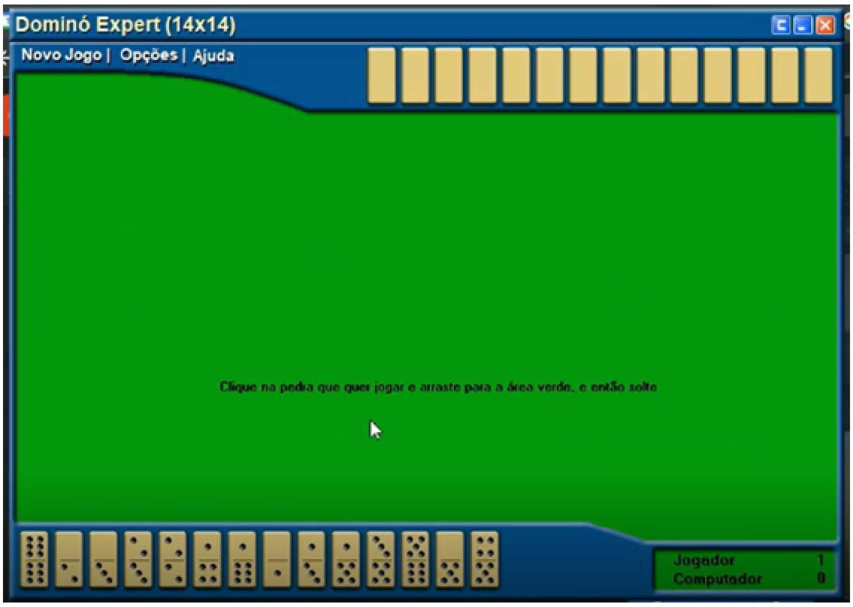
Quadro 4 – Lances jogados durante a partida 1.

Jogadores	Lance 1	Lance 2	Lance 3	Lance 4	Lance 5
Y X	$6-6$ $6-2$	$6-3$ $3-2$	$2-0$ $0-6$	$6-5$ $5-2$	passou $2-4$
	Lance 6	Lance 7	Lance 8	Lance 9	Lance 10
Y X	$4-0$ $0-0$	$0-3$ $3-3$	$3-4$ $4-6$	passou $6-1$	$1-4$ $2-2$
	Lance 11	Lance 12	Lance 13	Lance 14	Lance 15
Y X	$4-4$ $2-1$	$1-3$ passou	$4-5$ $5-0$	$3-5$ $5-1$	$1-0$ passou
	Lance 16				
Y X	passou -				

Fonte: O autor.

PARTIDA 2

Figura 37 – Início da Partida 2.



Fonte: O autor.

Na Figura 37, o jogador X está com cinco pios $\{1-0\}, \{1-3\}, \{1-4\}, \{1-5\}, \{1-6\}$ e cinco quinas $\{5-0\}, \{5-1\}, \{5-3\}, \{5-4\}$ e $\{5-6\}$, perfazendo uma probabilidade de $5/7$ para cada pedra. Além disso, X possui quatro brancos $\{0-1\}, \{0-2\}, \{0-3\}, \{0-5\}$ e quatro ternos $\{3-0\}, \{3-1\}, \{3-2\}$ e $\{3-5\}$, totalizando uma probabilidade para cada pedra de $4/7$. Possui apenas dois dôbres, duque e sena, com nenhuma chance para ser impossibilitado de jogar.

Por outro lado, o jogador Y tem cinco quadras com o dôbre, são elas $\{4-0\}, \{4-2\}, \{4-3\}, \{4-4\}$ e $\{4-6\}$, possuindo uma probabilidade de $5/7$. Possui quatro duques $\{2-1\}, \{2-4\}, \{2-5\}$ e $\{2-6\}$ e quatro senas que são $\{6-0\}, \{6-2\}, \{6-3\}$ e $\{6-4\}$, com uma probabilidade de $4/7$ para cada categoria de pedra. Não tem nenhum dôbre que possa ser impossibilitado de jogar, mas em compensação possui cinco dôbres $\{0-0\}, \{1-1\}, \{3-3\}, \{4-4\}$ e $\{5-5\}$.

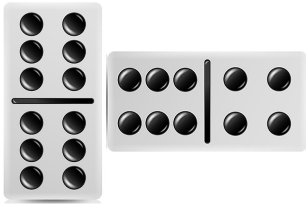
A estratégia de jogo de X será em cima das cinco pedras de pio e das cinco pedras de quina que possui, indicando uma probabilidade de $5/7$, visando dar passes no oponente Y com essas pontas. X terá a vantagem de sair no jogo, pois está com o dôbre de sena.

Por outro lado, o jogo de Y tem cinco quadras com probabilidade de $5/7$, quatro duques e quatro senas, com probabilidade de $4/7$. Existe uma situação crítica no jogo de Y que são os cinco dôbres. Sua estratégia é não jogar nem quina nem pio para não facilitar o jogo de X e ir encaixando o jogo de sua maior frequência que é a quadra, sena ou duque.

Lance 1

O jogador X começou jogando por conta de ter tirado o dôbre de sena. Neste caso, o primeiro lance acaba não sendo bom, pois X ficará com uma probabilidade de $2/6$ nas pedras de sena, enquanto Y ficará com probabilidade de $4/6$ das pedras restantes de sena. Enquanto isso, o jogador Y, em sua primeira jogada, pode jogar $\{6-0\}, \{6-2\}, \{6-3\}$ e $\{6-4\}$ e, por conta da sua estratégia, não pode jogar branco, nem terno. Y jogará quadra, pois permanecerá com uma probabilidade de $4/6$, enquanto se jogar duque ficará com uma probabilidade de $3/6$. Portanto, $\{6-4\}$ é a jogada mais forte.

Figura 38 – Partida 2 - Lance 1

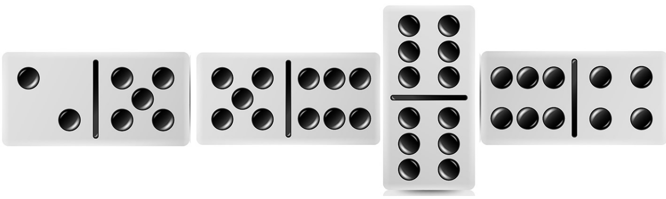


Fonte: O autor.

Lance 2

No seu segundo lance, o jogador X tem como opção jogar $\{4-1\}, \{4-5\}, \{6-1\}$ e $\{6-5\}$. A princípio, não há diferença entre jogar pio ou quina, pois permanecerá com uma probabilidade de $4/6$. Entretanto, X decide jogar a quina $\{6-5\}$ por ter uma quantidade maior de pontos caso o jogo seja fechado. Por outro lado, Y não pode jogar na quadra por conta da sua estratégia, assim, Y pode jogar $\{2-5\}$ e $\{5-5\}$. Se jogar duque, Y ficará com probabilidade de $3/6$ nas mãos desta ponta, caso jogue o dôbre de quina, Y ficará com uma probabilidade menor na mão, de apenas $1/5$. Daí, o lance mais forte é jogar $\{5-2\}$.

Figura 39 – Partida 2 - Lance 2

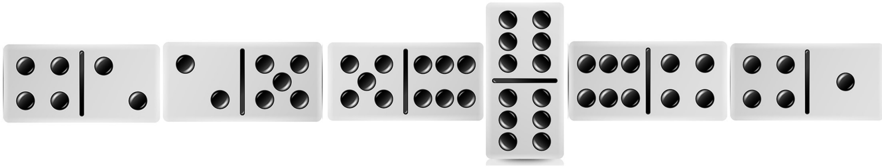


Fonte: O autor.

Lance 3

Em seu terceiro lance, X pode jogar $\{2-0\}, \{2-2\}, \{2-3\}, \{4-1\}$ e $\{4-5\}$, seguirá sua estratégia de jogar pio ou quina. Se jogar pio, ficará com uma probabilidade de $4/6$. Sendo assim, X jogará $\{4-1\}$. Em contrapartida, Y tem que jogar no pio para seguir com sua estratégia, podendo jogar as pedras $\{2-1\}, \{2-4\}, \{2-6\}$ e $\{1-1\}$. Dentro da sua estratégia, Y jogará quadra, continuando com $3/4$ de pedras desta face, sendo melhor do que jogar sena, ficando com uma probabilidade de $2/3$ destas pedras. Com isso, Y joga $\{2-4\}$.

Figura 40 – Partida 2 - Lance 3

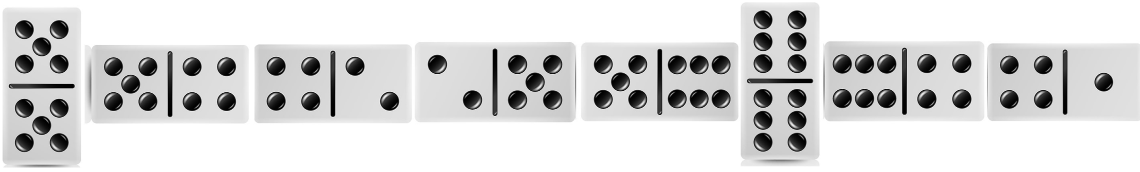


Fonte: O autor.

Lance 4

No seu quarto lance, X pode jogar $\{1-0\}, \{1-3\}, \{1-5\}, \{1-6\}$ e $\{4-5\}$. X não poderá jogar no pio que é sua ponta, então a única possibilidade é jogar $\{4-5\}$. Por outro lado, Y pode jogar $\{1-1\}, \{1-2\}$ e $\{5-5\}$, mas não pode jogar duque, pois ficará apenas com uma probabilidade de $1/4$, e, entre jogar o dôbre de pio ou quina, é melhor jogar com a maior quantidade de pontos, prevendo um possível fechamento de jogo, desse jeito Y joga o dôbre de quina.

Figura 41 – Partida 2 - Lance 4

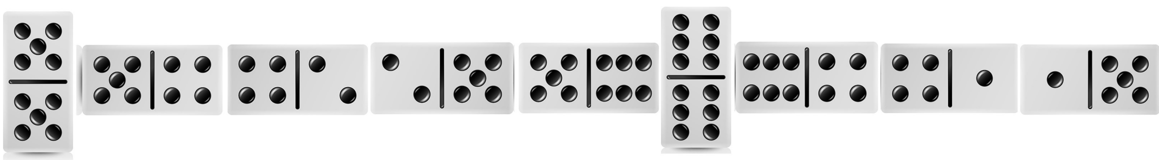


Fonte: O autor.

Lance 5

A esta altura do campeonato, a partida caminha excelentemente para o jogador X, pois as pontas sob a mesa são as suas maiores frequências de antes do início da partida, no momento X está com pio na ordem de $4/6$ e quina com $3/3$. X tem seis opções de jogadas $\{1-0\}, \{1-3\}, \{1-5\}, \{1-6\}, \{5-0\}$ e $\{5-3\}$. X joga $\{5-1\}$, fazendo duas quinas, dando um passe em Y e com uma caminhada mais tranquila para a vitória. O oponente Y leva um passe, portanto, não consegue jogar neste lance.

Figura 42 – Partida 2 - Lance 5



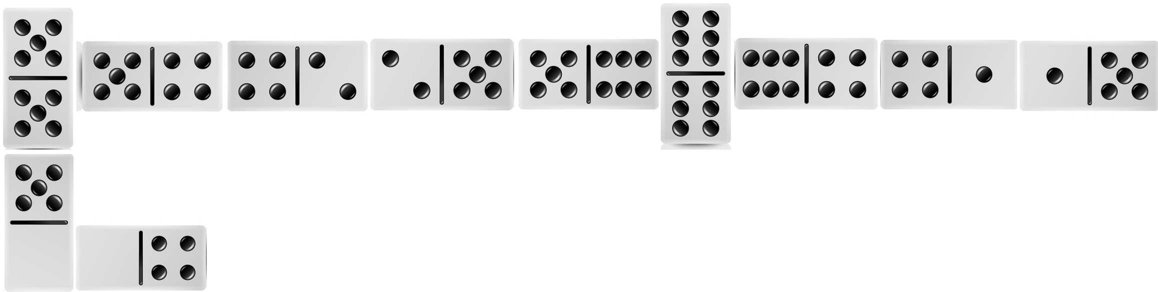
Fonte: O autor.

Lance 6

Nesta jogada, X pode jogar $\{5-0\}$ e $\{5-3\}$. Se jogar terno ou quina, ficará com uma probabilidade de $3/6$. Com isso, joga $\{5-0\}$. Nesta jogada, Y pode jogar $\{0-0\}, \{0-$

$4\}$ e $\{0 - 6\}$. Como X não tem quadra, o melhor é jogar $\{0 - 4\}$ e firmar a ponta de quadra, ficando com a probabilidade de $2/2$.

Figura 43 – Partida 2 - Lance 6

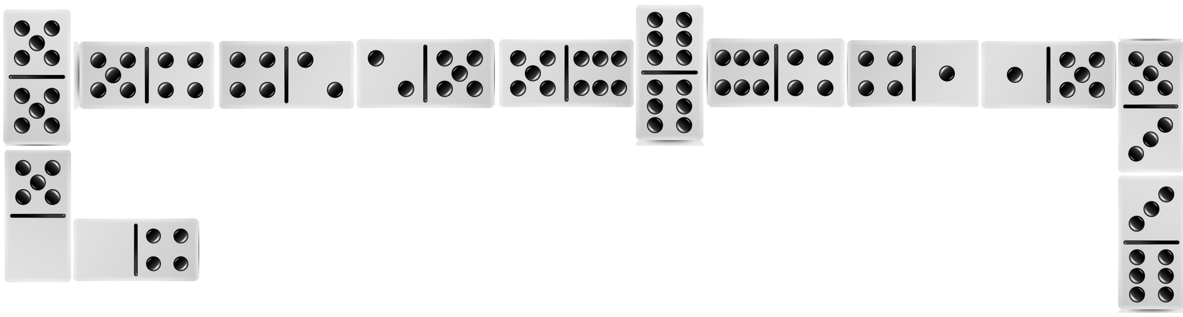


Fonte: O autor.

Lance 7

Neste lance, X é forçado a quebrar a sua ponta de quina com a única jogada que possui, jogar $\{5 - 3\}$. Por outro lado, Y pode jogar $\{3 - 4\}, \{4 - 4\}, \{3 - 3\}$ e $\{3 - 6\}$. Y não jogará na sua ponta firmada de quadra. Se jogar o dôbre de terno, ficará com uma probabilidade de $2/5$. Enquanto se jogar sena ficará com uma probabilidade de $2/3$. Assim, a melhor possibilidade é jogar $\{3 - 6\}$.

Figura 44 – Partida 2 - Lance 7

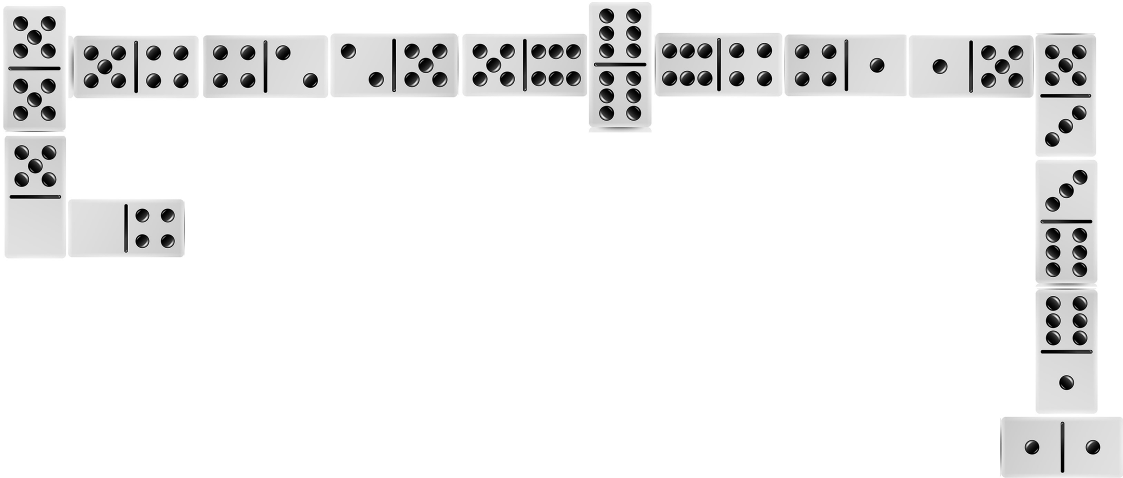


Fonte: O autor.

Lance 8

Neste lance a única possibilidade para X é jogar $\{6 - 1\}$, ficando com uma probabilidade de $2/4$ das pedras de pio. Y pode jogar $\{4 - 3\}, \{4 - 4\}, \{1 - 1\}$ e $\{1 - 2\}$. Y não joga na quadra que é sua ponta, sendo assim, pode jogar no pio mandando duque e ficando com uma probabilidade de $1/4$ ou jogando o dôbre de pio, ficando com uma probabilidade de $1/3$. Assim, a melhor probabilidade é jogar o dôbre de pio.

Figura 45 – Partida 2 - Lance 8

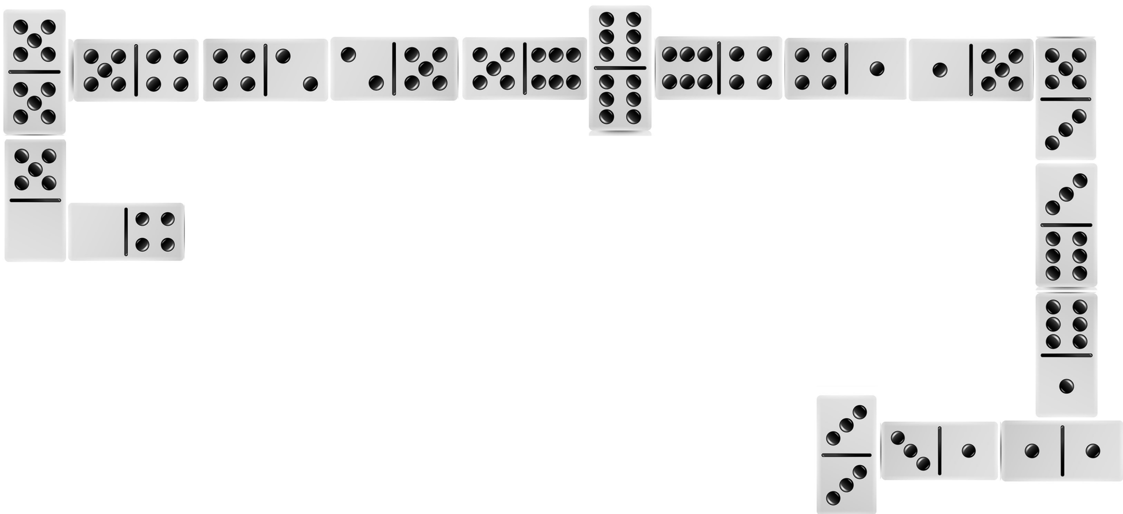


Fonte: O autor.

Lance 9

Nesta jogada, X pode jogar $\{1 - 0\}$ e $\{1 - 3\}$. Se jogar branco ou terno, fica com uma probabilidade de $2/4$. Logo, Y jogará a que tem mais pontos, assim joga $\{1 - 3\}$. Por sua vez, Y pode jogar $\{3 - 4\}$, $\{4 - 4\}$ e $\{3 - 3\}$. Entretanto Y, não jogará na sua ponta de quadra, então jogará o dôbre de terno, ficando com uma probabilidade de $1/3$ da ponta de terno.

Figura 46 – Partida 2 - Lance 9

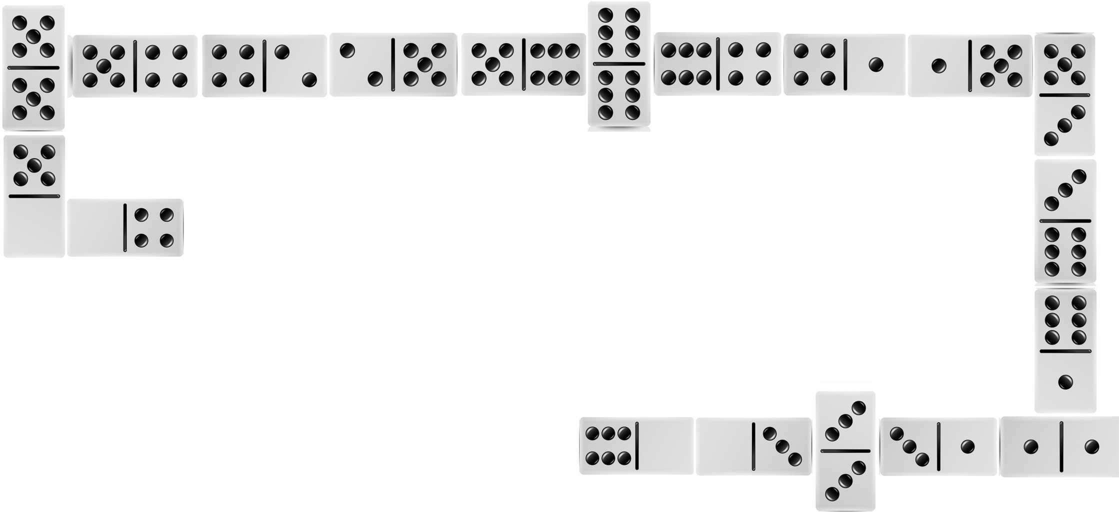


Fonte: O autor.

Lance 10

Nesse lance, X tem como opção jogar $\{3 - 0\}$ e $\{3 - 2\}$. Como Y jogou duque e depois novamente jogou neste duque, X ficou com possibilidade de ter o seu dôbre de duque impossibilitado de jogar, por conta disto, X jogará $\{3 - 0\}$, ficando ainda com uma probabilidade de $2/4$ desta face de branco. Enquanto isso, Y pode jogar $\{4 - 3\}$, $\{4 - 4\}$, $\{0 - 0\}$ e $\{0 - 6\}$, tendo a oportunidade de dar um passe em X, jogando $\{0 - 6\}$.

Figura 47 – Partida 2 - Lance 10

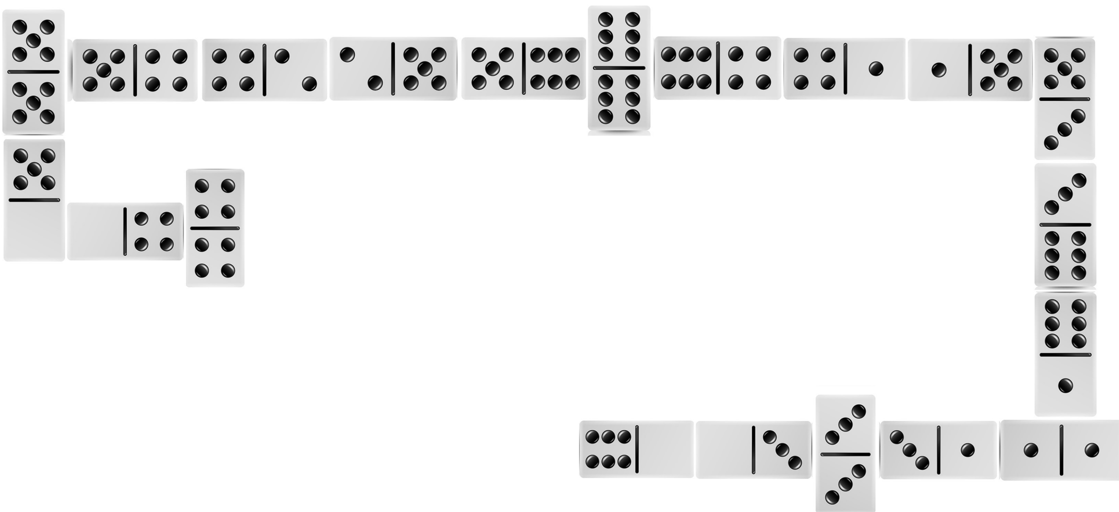


Fonte: O autor.

Lance 11

Nessa jogada, X não joga, pois acabou de levar um passe. Enquanto isso, Y jogará o dôbre de quadra e dará outro passe em X.

Figura 48 – Partida 2 - Lance 11

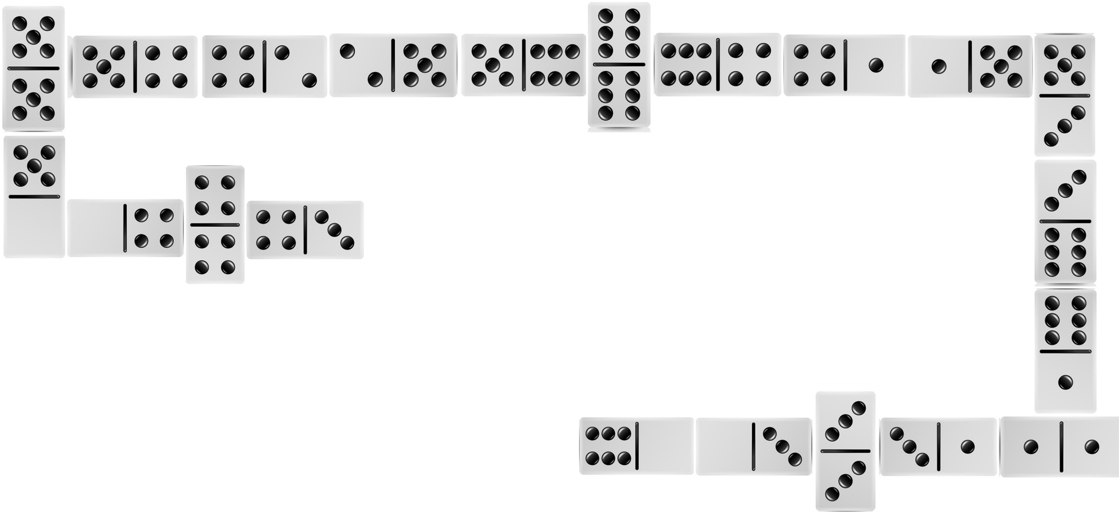


Fonte: O autor.

Lance 12

Novamente, X não joga, pois levou outro passe. Já Y pode jogar $\{4-3\}$ e $\{6-2\}$. Y não jogará duque para evitar que o oponente jogue o seu dôbre de duque. Assim, Y jogará a quadra $\{4-3\}$.

Figura 49 – Partida 2 - Lance 12

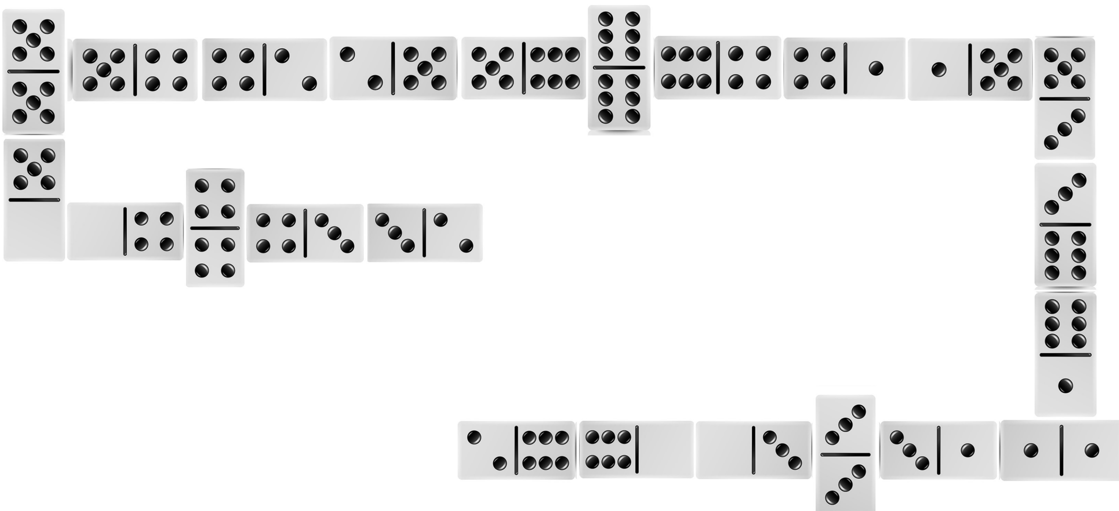


Fonte: O autor.

Lance 13

X jogará a sua única possibilidade que é $\{3 - 2\}$, enquanto Y objetiva, bater com o dôbre de branco para ganhar 4 pontos nesta partida. Para isso, ele abre o jogo, jogando $\{6 - 2\}$, fazendo dois duques.

Figura 50 – Partida 2 - Lance 13

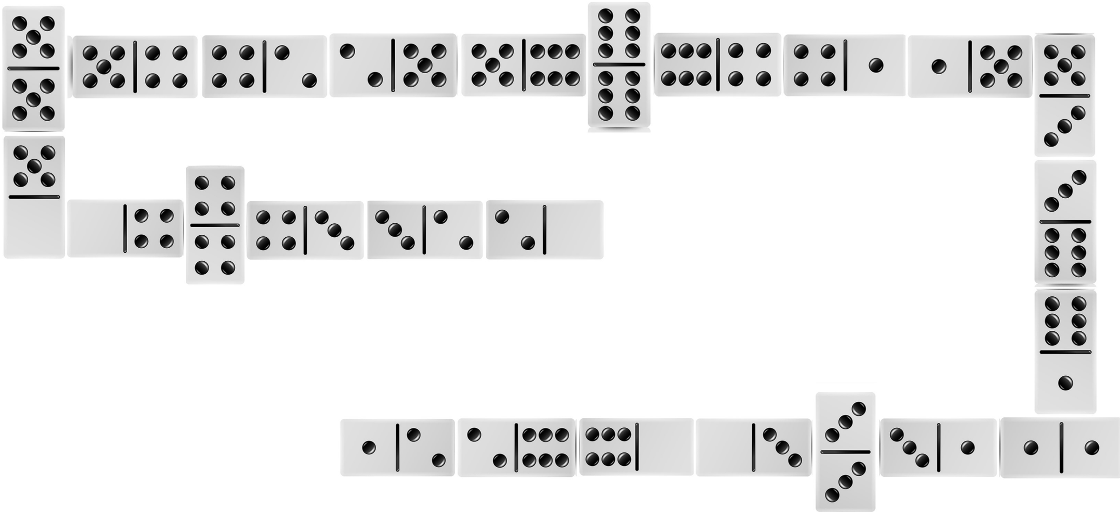


Fonte: O autor.

Lance 14

Neste lance, X pode jogar $\{2 - 0\}$ e $\{2 - 2\}$. X não conseguirá escapar da estratégia montada por Y se jogar o dôbre de duque. Sendo assim, X joga $\{2 - 0\}$. O oponente Y pode jogar $\{0 - 0\}$ e $\{2 - 1\}$. Y percebe que não pode mais bater de dôbre, mas está com a vitória simples assegurada. Y joga $\{2 - 1\}$, impedindo de jogar o dôbre de duque.

Figura 51 – Partida 2 - Lance 14

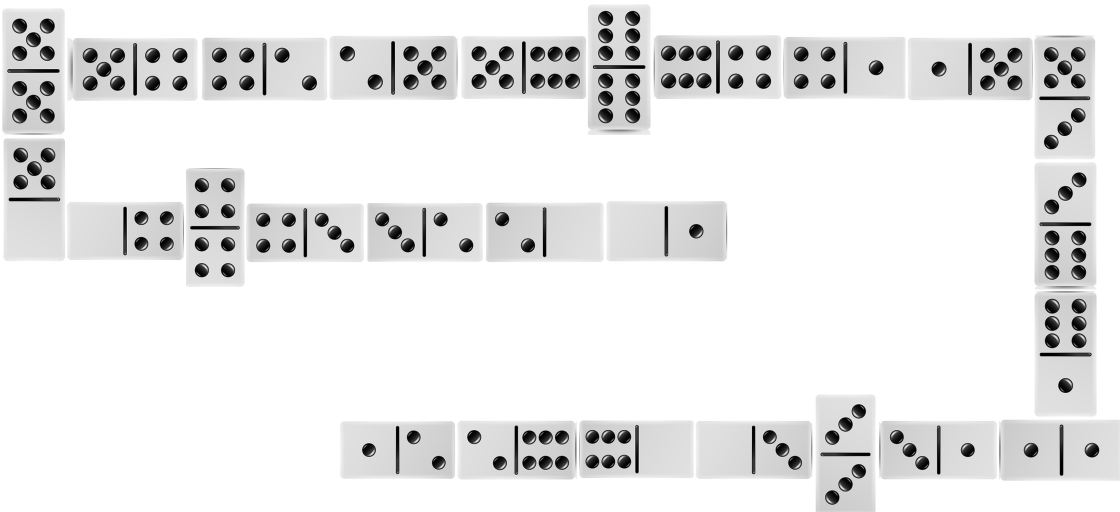


Fonte: O autor.

Lance 15

Neste lance, X tem a pedra $\{1-0\}$ para jogar. X não pode fazer dois brancos para evitar que Y bata com o dôbre, totalizando uma vitória de 4 pontos. Assim, X joga fazendo dois pios. Y não consegue jogar neste lance, levando um passe.

Figura 52 – Partida 2 - Lance 15



Fonte: O autor.

Lance 16

X não consegue jogar neste lance e, com isso, o jogo está empatado, indo para a contagem de pontos. X terminou com o dôbre de duque $\{2-2\}$. Já Y terminou com o dôbre de branco $\{0-0\}$. Com isso, o vencedor é Y, por terminar com menos pontos, no caso 0, contra 4 do oponente X.

Quadro 5 – Lances jogados durante a partida 2.

Jogadores	Lance 1	Lance 2	Lance 3	Lance 4	Lance 5
X Y	$6-6$ $6-4$	$6-5$ $5-2$	$4-1$ $2-4$	$4-5$ $5-5$	$1-5$ passou
	Lance 6	Lance 7	Lance 8	Lance 9	Lance 10
X Y	$5-0$ $0-4$	$5-3$ $3-6$	$6-1$ $1-1$	$1-3$ $3-3$	$3-0$ $0-6$
	Lance 11	Lance 12	Lance 13	Lance 14	Lance 15
X Y	passou $4-4$	passou $4-3$	$3-2$ $6-2$	$2-0$ $2-1$	$0-1$ passou
	Lance 16				
X Y	passou -				

Fonte: O autor.

PARTIDA 3

Figura 53 – Início da Partida 3.

Fonte: O autor.

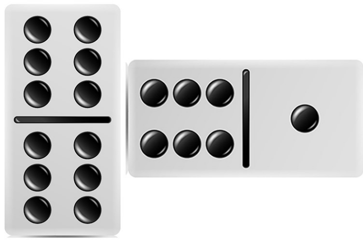
Na Figura 53, o jogador X está com seis pios, que são $\{1-0\}, \{1-2\}, \{1-3\}, \{1-4\}, \{1-5\}$ e $\{1-6\}$, totalizando uma probabilidade de $6/7$, além de cinco ternos com o dôbre que são $\{3-1\}, \{3-2\}, \{3-3\}, \{3-5\}$ e $\{3-6\}$, perfazendo uma probabilidade de $5/7$. X também possui quatro duques, que são $\{2-1\}, \{2-3\}, \{2-4\}$ e $\{2-6\}$, obtendo uma probabilidade de $4/7$ e apenas dois dôbres que são os de branco e terno com nenhuma chance para serem impossibilitados de jogar. Em contrapartida, o jogador Y tem cinco brancos, que são: $\{0-2\}, \{0-3\}, \{0-4\}, \{0-5\}$ e $\{0-6\}$, possuindo uma probabilidade de $5/7$. Y tem um grande potencial de ter os dôbres de quadra, quina e sena impossibilitados de jogar, pois tem em suas mãos estas faces com quatro frequências, incluindo o dôbre.

A estratégia desta partida no jogo de X será em cima das suas maiores frequencias, que são as pedras de pio, terno e duque e jogar na ponta de branco para não permitir Y construir esta sua ponta de maior frequência que é o branco e ainda não jogar as pontas de quadra, quina e sena com a finalidade de impossibilitar o adversário de jogar esses dôbres. Enquanto isso, a estratégia para o jogo de Y será em cima dos seus cinco brancos. Y tentará não jogar quadra, quina e sena para evitar que esses seus dôbres sejam impossibilitados de jogar.

Lance 1

O jogador Y começou a partida, pois tirou o dôbre de sena. Enquanto isso, o jogador X, em sua primeira jogada, pode jogar $\{6-1\}, \{6-2\}$ e $\{6-3\}$. Se jogar pio, fica com uma probabilidade de $5/6$. Se jogar terno, fica com a probabilidade de $4/6$. Se for de duque, ficará com uma probabilidade de $3/6$. Assim, Y joga pio, que é a jogada mais forte.

Figura 54 – Partida 3 - Lance 1

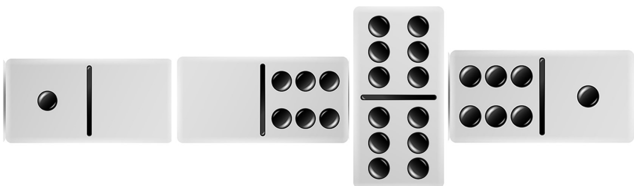


Fonte: O autor.

Lance 2

O jogador Y em seu segundo lance tem como opção jogar $\{1-1\}, \{6-0\}, \{6-4\}$ e $\{6-5\}$. Y não jogará quadra ou quina, para evitar que o seu dôbre de quadra ou quina seja impossibilitado de jogar. Se jogasse o dôbre de pio não traria a priori nenhuma vantagem, ao passo que lançando a pedra de branco, Y ficará com uma probabilidade de $4/6$, então o lance mais forte é jogar $\{6-0\}$. Enquanto isso, X tem as possibilidades de jogar $\{1-0\}, \{1-2\}, \{1-3\}, \{1-4\}, \{1-5\}$ e $\{0-0\}$. X tem a possibilidade de fazer dois pios, coincidindo com a sua principal estratégia. Assim, lança $\{0-1\}$, ainda ficando na mão com uma probabilidade de $4/5$.

Figura 55 – Partida 3 - Lance 2

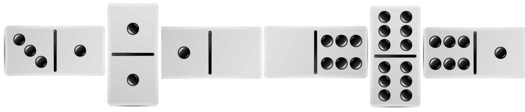


Fonte: O autor.

Lance 3

Em seu terceiro lance Y só tem como opção jogar o dôbre de pio. Enquanto X pode jogar $\{1-2\}, \{1-3\}, \{1-4\}$ e $\{1-5\}$, não jogará nem quadra, nem quina por conta de objetivar a impossibilidade de jogar estes dôbres que estão com o seu adversário Y. Se jogar duque, ficará com uma probabilidade de $3/6$ e, se lançar terno, ficará com a probabilidade de $4/6$. Portanto, a melhor jogada é lançar $\{1-3\}$.

Figura 56 – Partida 3 - Lance 3

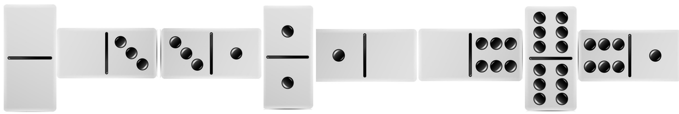


Fonte: O autor.

Lance 4

No seu quarto lance, Y pode jogar $\{3-0\}$ e $\{3-4\}$. Y não poderá jogar quadra para evitar a impossibilidade de jogar o dôbre de quadra, então a opção será jogar branco, ficando na mão com uma probabilidade de $3/4$. X pode jogar $\{1-2\}, \{1-4\}, \{1-5\}$ e $\{0-0\}$. X não quebrará o pio que é a sua ponta, desse jeito Y joga o dôbre de branco, fazendo com que Y quebre um dos seus três brancos restantes.

Figura 57 – Partida 3 - Lance 4

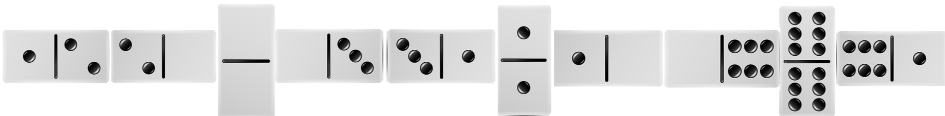


Fonte: O autor.

Lance 5

Em seu quinto lance, Y pode jogar $\{0-2\}, \{0-4\}$ e $\{0-5\}$. Novamente, Y não jogará quadra nem quina, sendo assim, lança duque mesmo ficando com uma probabilidade de $2/6$. Neste lance, X tem a chance de jogar $\{1-2\}, \{1-4\}, \{1-5\}, \{2-6\}, \{2-4\}$ e $\{2-3\}$. Obviamente, X não perde a oportunidade de dar um passe em Y, fazendo dois pios, jogando $\{2-1\}$.

Figura 58 – Partida 3 - Lance 5

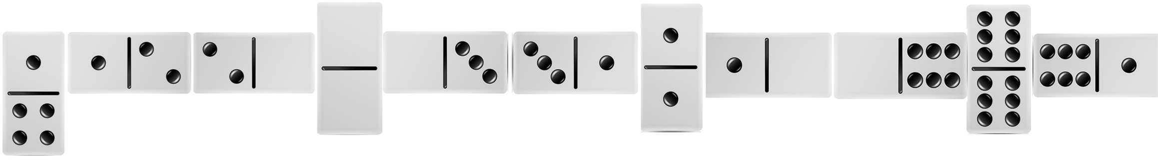


Fonte: O autor.

Lance 6

Neste lance, Y leva o seu primeiro passe. Enquanto X, em seu sexto lance pode jogar $\{1-4\}$ e $\{1-5\}$. X observa que Y terá a oportunidade de liberar um de seus dôbres de quadra ou quina. Como em ambas as situações X ficará com uma probabilidade de $2/6$, prefere que seja o de quadra, que é o de menor pontuação, com isso ele joga $\{1-4\}$.

Figura 59 – Partida 3 - Lance 6

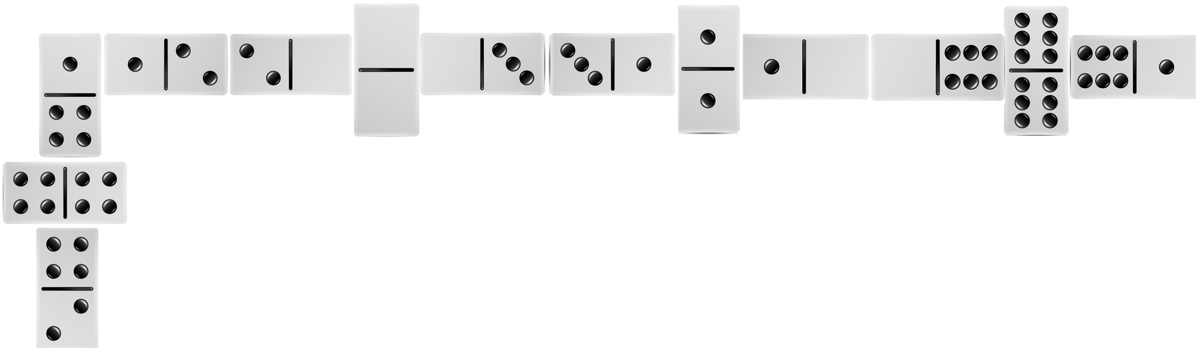


Fonte: O autor.

Lance 7

Neste lance, Y pode jogar $\{4-0\}, \{4-3\}, \{4-4\}$ e $\{4-6\}$. Entretanto, Y não desperdiçará a oportunidade de jogar o seu dôbre de quadra. Por sua vez, X pode jogar $\{1-5\}, \{4-2\}$ e $\{4-5\}$. X não jogará em sua ponta de pio e não jogará quina para não liberar o dôbre de quina do adversário, sendo assim, X jogará o duque $\{4-2\}$, permanecendo com uma probabilidade de $2/4$.

Figura 60 – Partida 3 - Lance 7

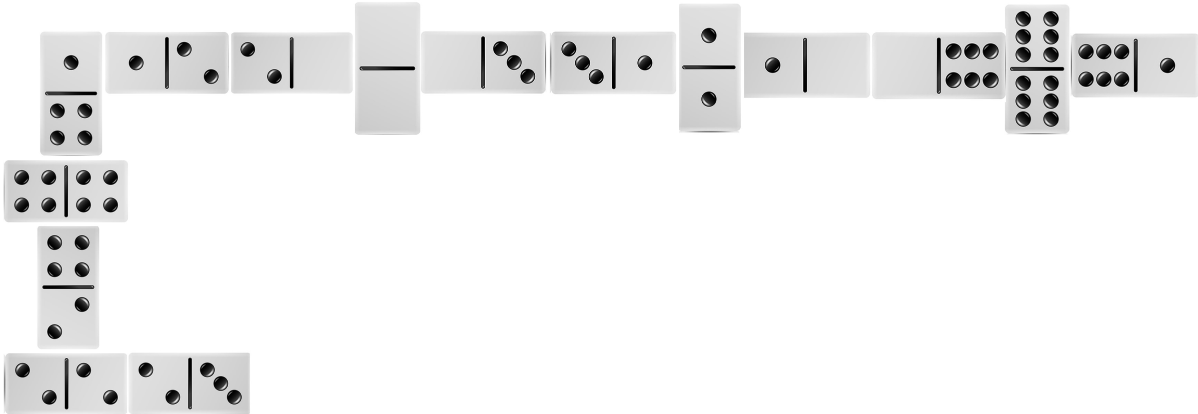


Fonte: O autor.

Lance 8

Neste lance, Y pode jogar $\{2-2\}$ e $\{2-5\}$. Como não pode jogar quina para evitar que o adversário jogue nestas pontas impossibilitando de jogar o seu dôbre, ele irá jogar o dôbre de duque ficando com uma probabilidade de $1/3$. Enquanto isso, X pode jogar $\{1-5\}, \{2-6\}$ e $\{2-3\}$. Obviamente, X não jogará na sua ponta de pio. Se jogar sena, ficará com uma probabilidade de $1/3$, ao passo que se jogar terno, ficará com uma probabilidade maior de $3/4$, daí, joga $\{2-3\}$.

Figura 61 – Partida 3 - Lance 8

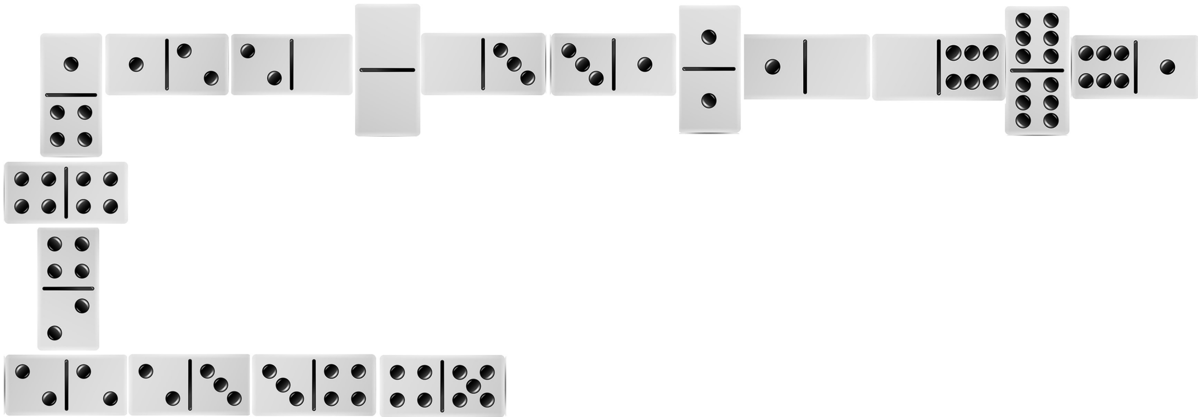


Fonte: O autor.

Lance 9

Nesta jogada, Y tem somente a possibilidade de jogar $\{3-4\}$. Já X pode jogar $\{1-5\}$ e $\{4-5\}$, mas não jogará na sua ponta de pio e, assim, joga $\{4-5\}$.

Figura 62 – Partida 3 - Lance 9

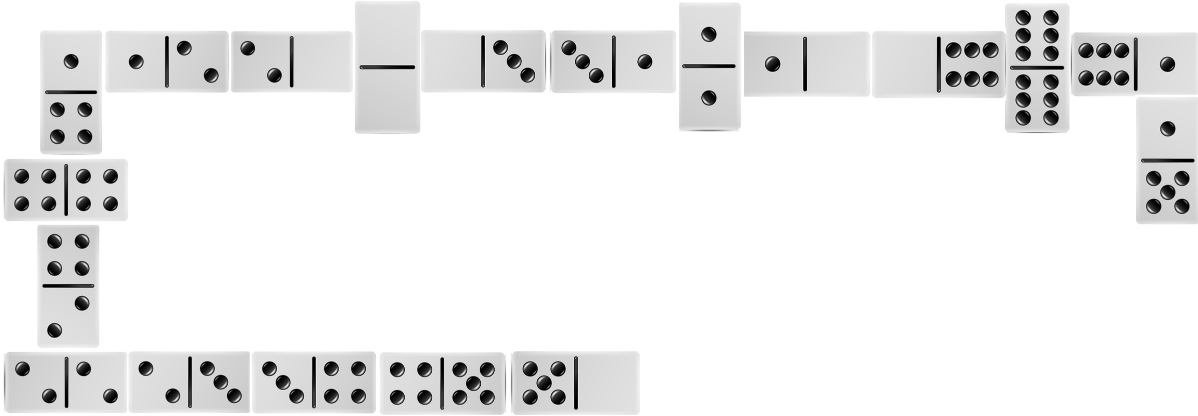


Fonte: O autor.

Lance 10

Nessa jogada, Y pode jogar $\{5-0\}$, $\{5-2\}$, $\{5-5\}$ e $\{5-6\}$. Daí, Y jogará branco para firmar a ponta e obrigar o adversário a quebrar a ponta de pio. Logo joga $\{5-0\}$. Enquanto X é obrigado a quebrar a sua ponta de pio, jogando $\{1-5\}$.

Figura 63 – Partida 3 - Lance 10

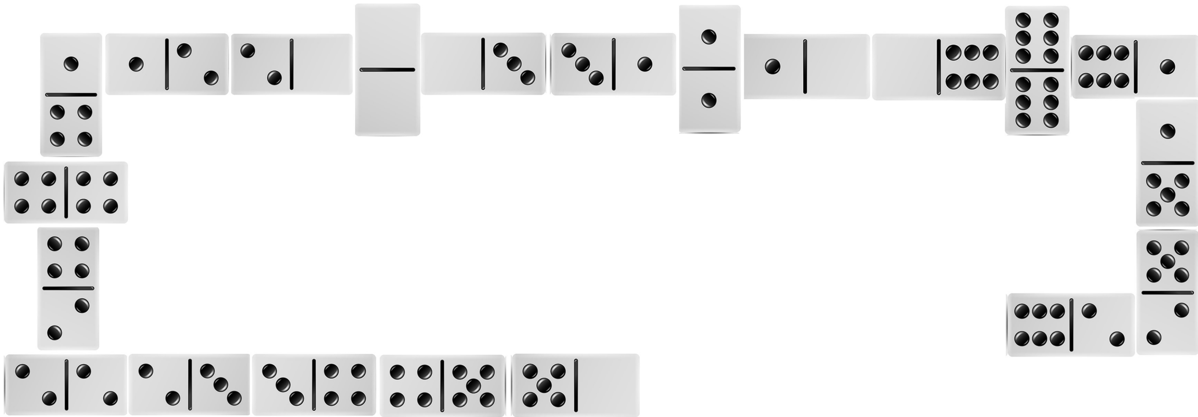


Fonte: O autor.

Lance 11

Nesse lance, Y pode jogar $\{0-4\}$, $\{5-2\}$, $\{5-5\}$ e $\{5-6\}$. Para evitar que X entre com o seu jogo de terno, Y jogará $\{5-2\}$. Por outro lado, X é obrigado a jogar $\{2-6\}$.

Figura 64 – Partida 3 - Lance 11

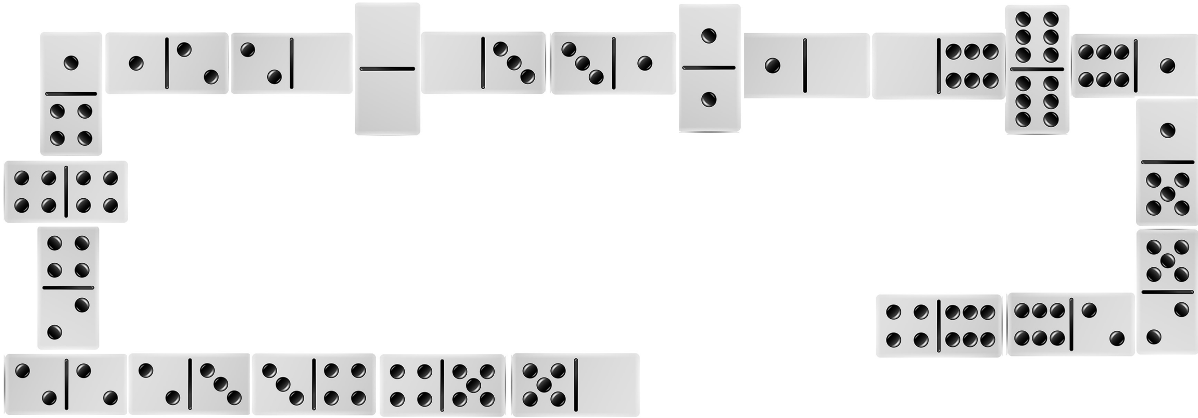


Fonte: O autor.

Lance 12

Neste lance, Y dará um passe em X jogando $\{6-4\}$. X não consegue jogar, levando um passe.

Figura 65 – Partida 3 - Lance 12

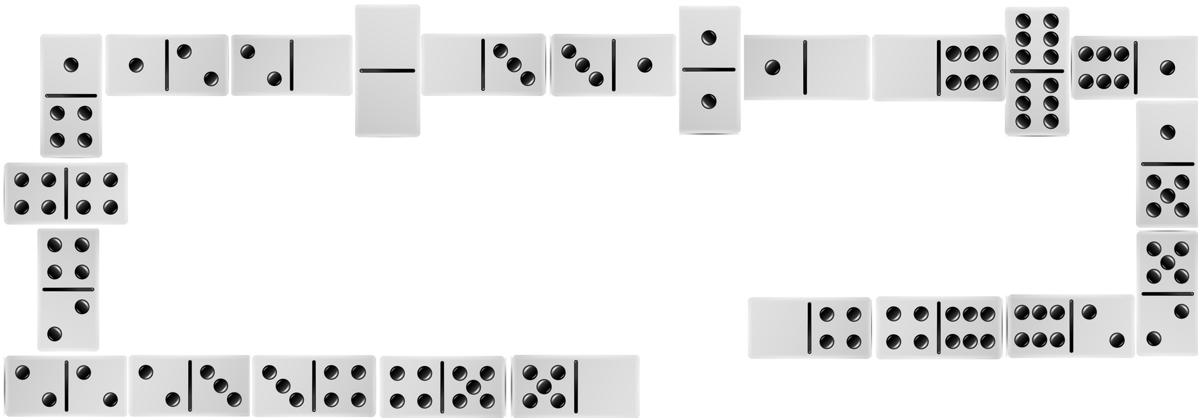


Fonte: O autor.

Lance 13

Y irá jogar a sua única possibilidade $\{4-0\}$ que é um fecha natural. Neste lance, X não consegue jogar, levando um passe.

Figura 66 – Partida 3 - Lance 13



Fonte: O autor.

Lance 14

Neste lance, Y não consegue jogar, levando um passe. O jogo está fechado. Na contagem de pontos, Y terminou com as pedras de $\{5-5\}$ e $\{5-6\}$, totalizando 21 pontos. Enquanto X terminou com as pedras de $\{3-3\}$, $\{5-3\}$ e $\{6-3\}$, totalizando 23 pontos. Como Y ficou com um quantitativo de pontos menor, ele é declarado o vencedor da partida.

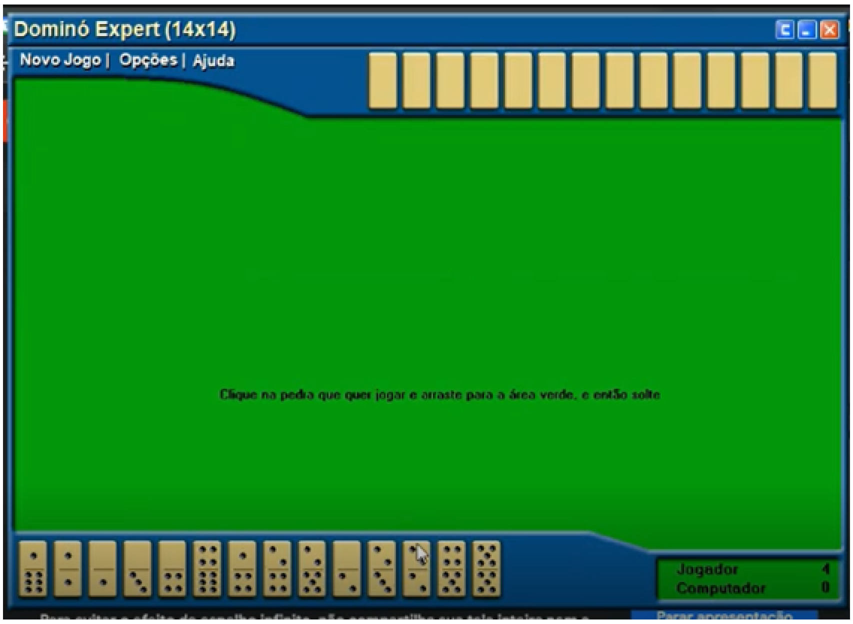
Quadro 6 – Lances jogados durante a partida 3.

Jogadores	Lance 1	Lance 2	Lance 3	Lance 4	Lance 5
Y	$6-6$	$6-0$	$1-1$	$3-0$	$0-2$
X	$6-1$	$0-1$	$1-3$	$0-0$	$2-1$
	Lance 6	Lance 7	Lance 8	Lance 9	Lance 10
Y	passou	$4-4$	$2-2$	$3-4$	$5-0$
X	$1-4$	$4-2$	$2-3$	$4-5$	$1-5$
	Lance 11	Lance 12	Lance 13	Lance 14	Lance 15
Y	$5-2$	$6-4$	$4-0$	passou	-
X	$2-6$	passou	passou	passou	-

Fonte: O autor.

PARTIDA 4

Figura 67 – Início da Partida 4.



Fonte: O autor.

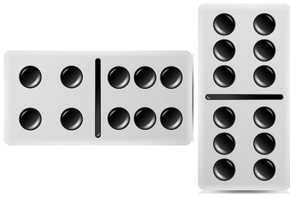
Na Figura 67, o jogador X está com cinco duques que são $\{2-0\}, \{2-2\}, \{2-3\}, \{2-4\}$ e $\{2-5\}$ e cinco quadras que são $\{4-0\}, \{4-1\}, \{4-2\}, \{4-5\}$ e $\{4-6\}$, totalizando uma probabilidade de $5/7$ para as duas pontas. Possui ainda quatro brancos que são $\{1-0\}, \{2-0\}, \{3-0\}$ e $\{4-0\}$, perfazendo uma probabilidade de $4/7$ e um grande potencial de ter o dôbre de pio impossibilitado de jogar. Em contrapartida, o jogador Y tem cinco ternos que são $\{3-1\}, \{3-3\}, \{3-4\}, \{3-5\}$ e $\{3-6\}$ e cinco senas que são $\{6-0\}, \{6-2\}, \{6-3\}, \{6-5\}$ e $\{6-6\}$, possuindo em cada ponta uma probabilidade de $5/7$. Possui também quatro quinas que são $\{5-0\}, \{5-1\}, \{5-3\}$ e $\{5-6\}$ com uma probabilidade de $4/7$. Apesar de ter quatro dôbres $\{0-0\}, \{3-3\}, \{4-4\}$ e $\{6-6\}$, nenhum deles tem potencial de ser impossibilitado de jogar.

A estratégia desta partida do jogo de X será em cima das pedras de duque, quadra e branco, não jogar terno, sena e quina para não permitir que Y jogue nessas pontas e ainda não jogar na ponta de pio para evitar que Y impossibilite de jogar o dôbre de pio. Enquanto isso, a estratégia para o jogo de Y é jogar com as pedras de terno e sena, não jogar duque, quadra e branco para evitar que X jogue nessas pontas.

Lance 1

O jogador Y começou jogando por conta de ter tirado o dôbre e ainda fica com uma probabilidade $4/6$. Enquanto isso, o jogador X, em seu primeiro lance, pode jogar $\{6-1\}$ e $\{6-4\}$. Se mandar pio fica na mão com uma probabilidade de $3/6$. Se jogar quadra, fica com uma probabilidade de $4/6$. Assim, X joga $\{6-4\}$ que é a jogada mais forte.

Figura 68 – Partida 4 - Lance 1

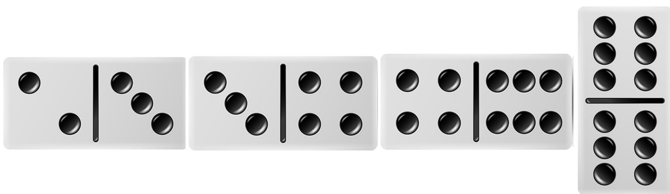


Fonte: O autor.

Lance 2

O jogador Y, em seu segundo lance, tem como opção jogar $\{6-0\}, \{6-2\}, \{6-3\}, \{6-5\}, \{4-3\}$ e $\{4-4\}$. Y não jogará sena por ser uma das suas maiores frequências com uma probabilidade de $4/5$, então resta jogar na quadra e mandando $\{4-3\}$, ficando com uma probabilidade de $4/6$ desta face 3. Enquanto isso X tem as possibilidades de jogar $\{3-0\}, \{3-2\}$ e $\{6-1\}$. Se jogar branco ou pio, ficará com uma probabilidade de $3/6$, enquanto se jogar duque ficará com uma probabilidade de $4/6$, então jogará $\{3-2\}$ que é a melhor probabilidade de jogada.

Figura 69 – Partida 4 - Lance 2

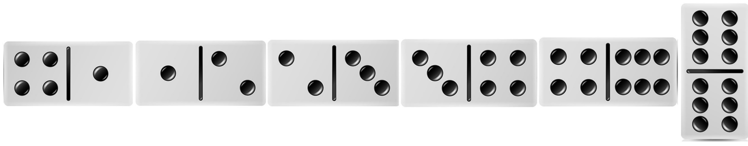


Fonte: O autor.

Lance 3

Em seu terceiro lance, Y tem como opção jogar $\{6-0\}, \{6-2\}, \{6-3\}, \{6-5\}$ e $\{2-1\}$. Contudo, Y não jogará na ponta de sena por conta de sua probabilidade de $4/5$. Daí, jogará $\{2-1\}$, ficando com uma probabilidade de $2/6$ desta face. Enquanto isso, X pode jogar $\{1-0\}, \{1-1\}, \{1-4\}$ e $\{1-6\}$. Se jogar branco ficará com uma probabilidade de $3/6$. Se jogar quadra, ficará com uma probabilidade de $3/4$. Se jogar o dôbre de pio, ficará com uma probabilidade de $3/5$. Por fim, se jogar sena, fazendo tudo pio, ficará com uma probabilidade de $3/5$. Neste cenário, a melhor jogada é $\{1 - 4\}$.

Figura 70 – Partida 4 - Lance 3

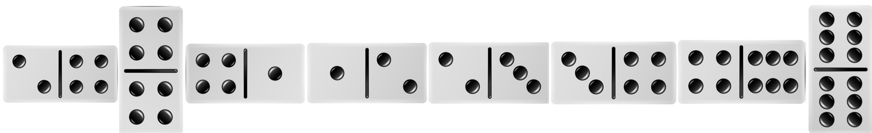


Fonte: O autor.

Lance 4

No seu quarto lance, Y pode jogar $\{6 - 0\}, \{6 - 2\}, \{6 - 3\}, \{6 - 5\}$ e $\{4 - 4\}$. Como Y não jogará sena, por ter uma probabilidade de $4/5$, jogará o dôbre de quadra. X pode jogar $\{4-0\}, \{4-2\}, \{4-5\}$ e $\{6-1\}$. Se jogar branco, fica com uma probabilidade de $3/6$. Jogando duque, fica com uma probabilidade de $3/4$. Caso jogue quina, ficará com uma probabilidade de $2/6$. Se jogar pio, ficará com uma probabilidade de $2/4$. Dessa forma, Y joga $\{4 - 2\}$.

Figura 71 – Partida 4 - Lance 4



Fonte: O autor.

Lance 5

Em seu quinto lance, Y pode jogar $\{6 - 0\}, \{6 - 2\}, \{6 - 3\}$ e $\{6 - 5\}$. Por estratégia, Y não pode jogar duque ou branco. Se jogar terno, fica com uma probabilidade de $3/4$ e se jogar quina, fica com uma probabilidade de $3/6$. Com isso, jogará $\{6 - 3\}$. Já X pode jogar $\{2 - 0\}, \{2 - 2\}, \{2 - 5\}$ e $\{3 - 0\}$. Pela sua estratégia, não jogará no duque e sim no branco, ficando com uma probabilidade de $3/6$, com isso joga $\{3 - 0\}$.

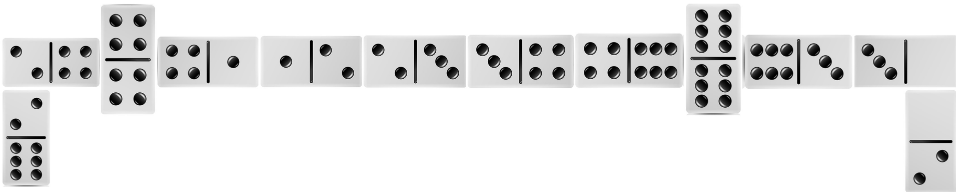
Figura 72 – Partida 4 - Lance 5

Fonte: O autor.

Lance 6

Nesse sexto lance, Y pode jogar $\{0 - 0\}, \{0 - 5\}, \{0 - 6\}$ e $\{2 - 6\}$. Se jogar quina, fica com uma probabilidade de $3/6$. Caso jogue sena, fica com uma probabilidade de $2/3$. Neste cenário, a melhor possibilidade é jogar $\{2 - 6\}$. Por outro lado, X pode jogar $\{0 - 1\}, \{0 - 2\}, \{0 - 4\}$ e $\{6 - 1\}$. Jogando pio, fica com probabilidade de $2/4$. Se fizer duque, fica com uma probabilidade de $2/2$. Caso jogue quadra, ficará com a probabilidade de $1/1$. Com isso, a jogada com melhor possibilidade é jogar $\{0 - 2\}$.

Figura 73 – Partida 4 - Lance 6

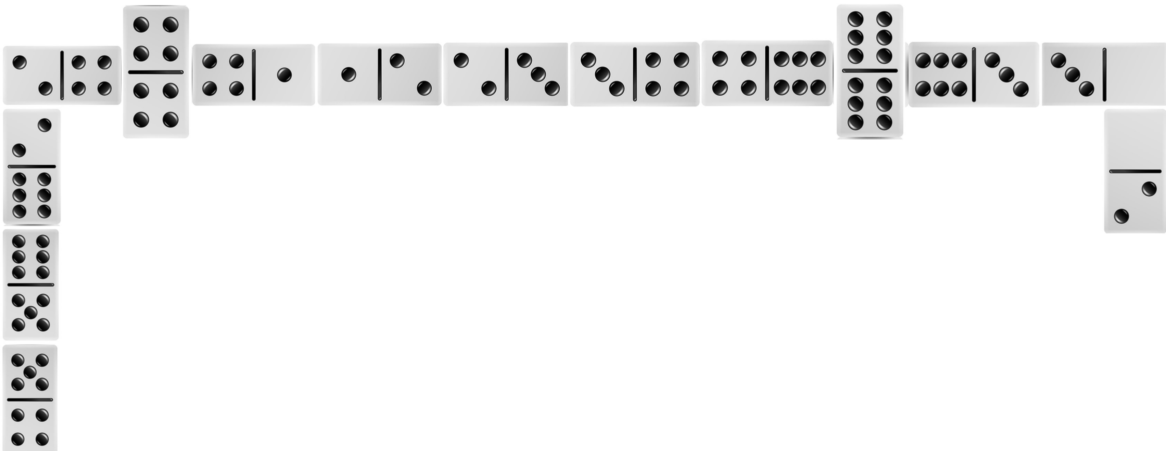


Fonte: O autor.

Lance 7

Nessa sétima jogada, Y pode jogar $\{6 - 0\}$ e $\{6 - 5\}$. Se mandar branco, fica com uma probabilidade de $2/4$. Se lançar quina, fica com uma probabilidade de $3/6$. Como o seu dôbre de branco pode ser impossibilitado de jogar, Y joga $\{6 - 5\}$, enquanto X neste lance pode jogar $\{2 - 2\}, \{2 - 5\}, \{5 - 4\}$ e $\{5 - 5\}$. X não jogará na sua ponta de duque, e observa que se lançar quadra, dará um passe em Y, com isso, joga $\{5 - 4\}$.

Figura 74 – Partida 4 - Lance 7

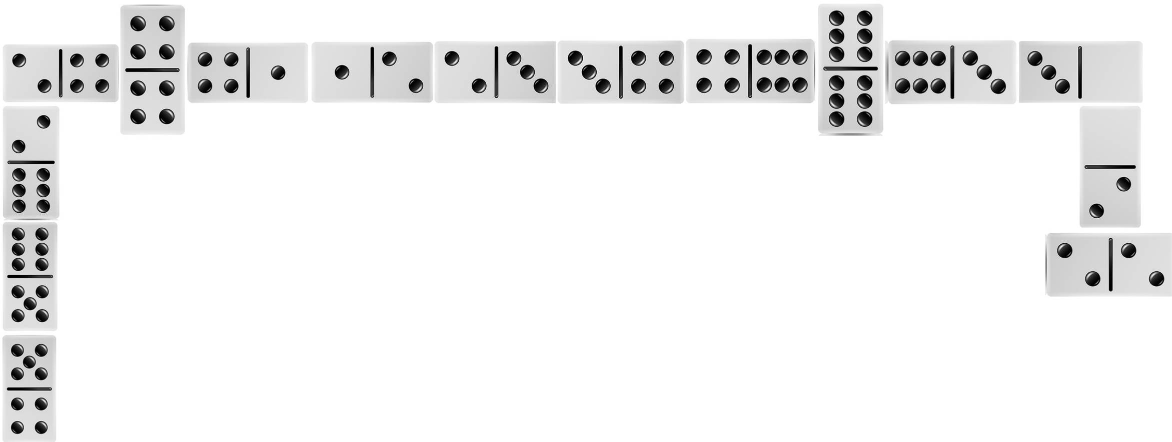


Fonte: O autor.

Lance 8

Neste oitavo lance, Y leva um passe, portanto não joga. Já X pode jogar $\{2 - 2\}, \{2 - 5\}$ e $\{4 - 0\}$. A fim de dar outro passe em Y, X jogará o dôbre de duque.

Figura 75 – Partida 4 - Lance 8

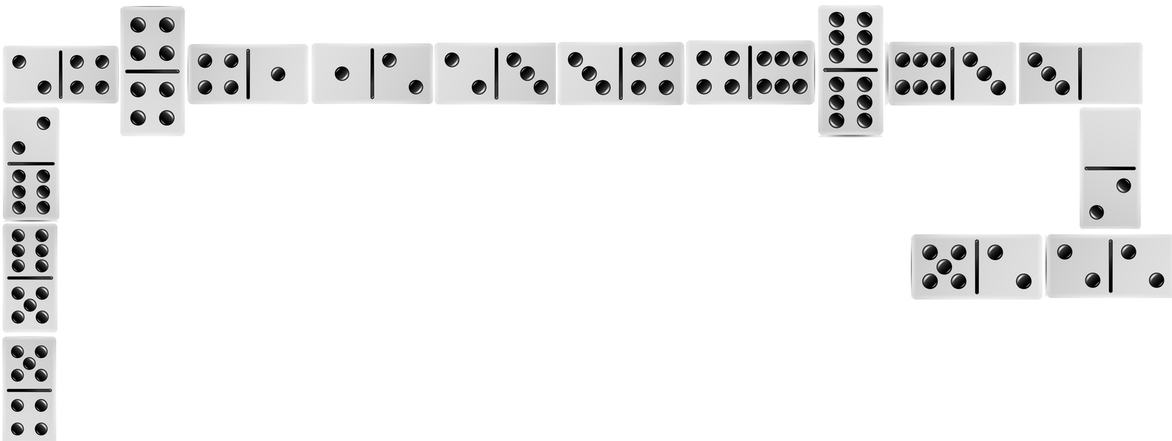


Fonte: O autor.

Lance 9

Nesta jogada, Y leva outro passe e não joga novamente. Enquanto isso, X pode jogar $\{2-5\}$ e $\{4-0\}$. Se jogar quina ou branco, ficará com uma probabilidade de $1/4$ destas ambas pedras, então jogará a pedra que tiver o maior número de pontos, no caso $\{2-5\}$.

Figura 76 – Partida 4 - Lance 9

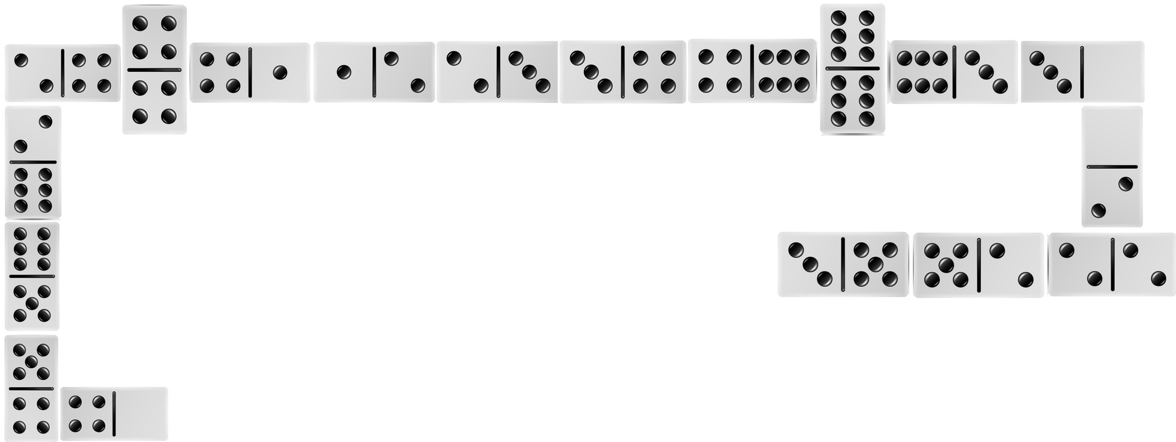


Fonte: O autor.

Lance 10

Agora, neste décimo lance, Y tem como opção jogar $\{5-0\}$, $\{5-1\}$ e $\{5-3\}$. Se jogar branco, vai ficar com uma probabilidade de $2/4$, caso jogue pio, ficará com a probabilidade de $1/4$, e se jogar terno, fica com a probabilidade de $2/2$, então jogará a sua melhor possibilidade que é $\{5-3\}$. Enquanto para X, a sua única possibilidade é jogar $\{4-0\}$.

Figura 77 – Partida 4 - Lance 10

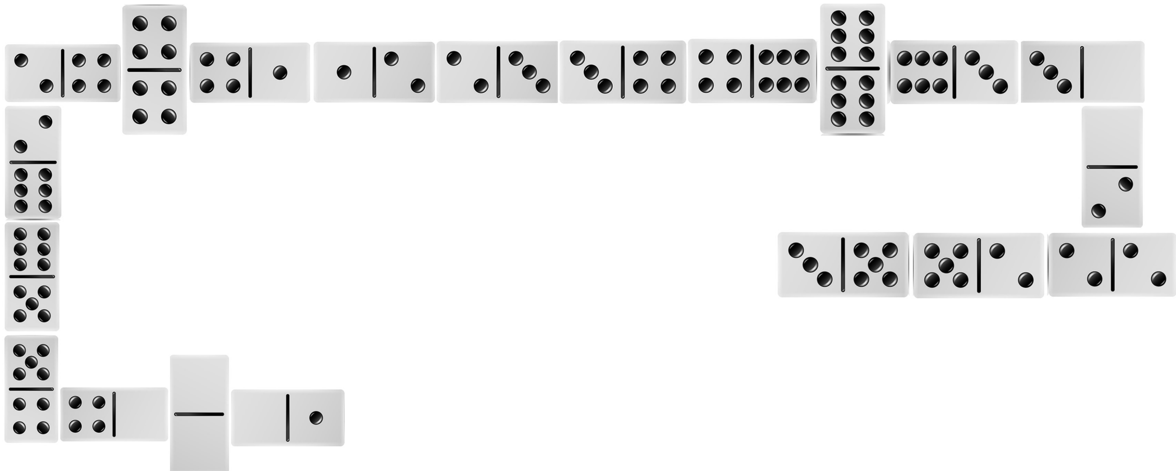


Fonte: O autor.

Lance 11

Neste lance, Y poderia jogar $\{0-0\}$, $\{0-5\}$, $\{0-6\}$, $\{3-1\}$ e $\{3-3\}$. Não jogará terno, pois tem uma probabilidade de $2/2$. Se jogar o dôbre de branco, ficará com uma probabilidade de $2/3$. Caso jogue quina, ficará com a probabilidade de $1/2$. Se jogar sena, fica sem a ponta, com isso o melhor é jogar o dôbre de branco. Enquanto X pode jogar uma única possibilidade que é $\{0-1\}$.

Figura 78 – Partida 4 - Lance 11

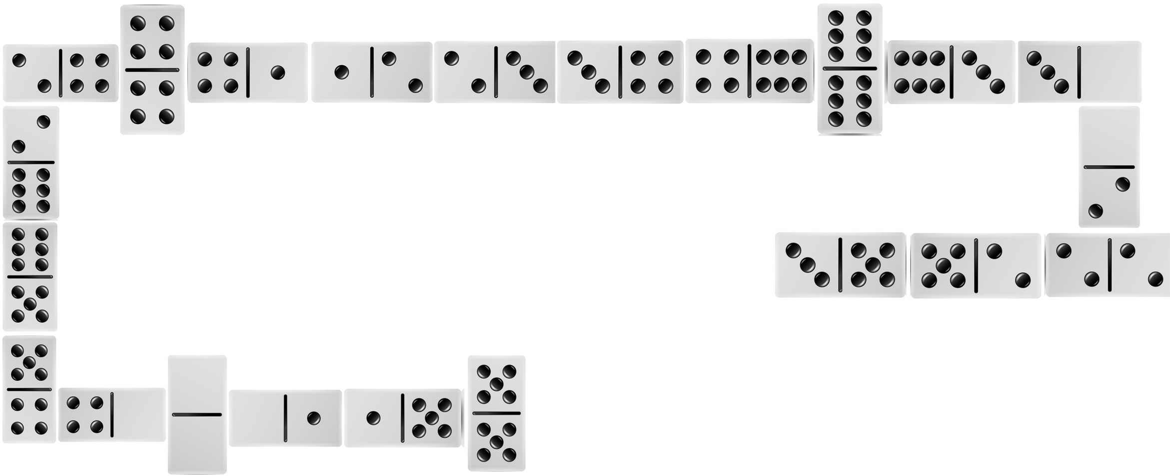


Fonte: O autor.

Lance 12

Neste lance, Y pode jogar $\{1-5\}, \{3-1\}$ e $\{3-3\}$, (aqui se Y jogar $\{1-3\}$, X passa, se Y joga $\{3-3\}$, X passa e Y ganha nos pontos), não jogará no terno, pois tem uma probabilidade de $2/2$. Com isso, Y jogará $\{1-5\}$ com objetivo de ganhar nas duas pontas. Por outro lado, nessa jogada, X tem somente a opção de jogar o dôbre de quina.

Figura 79 – Partida 4 - Lance 12

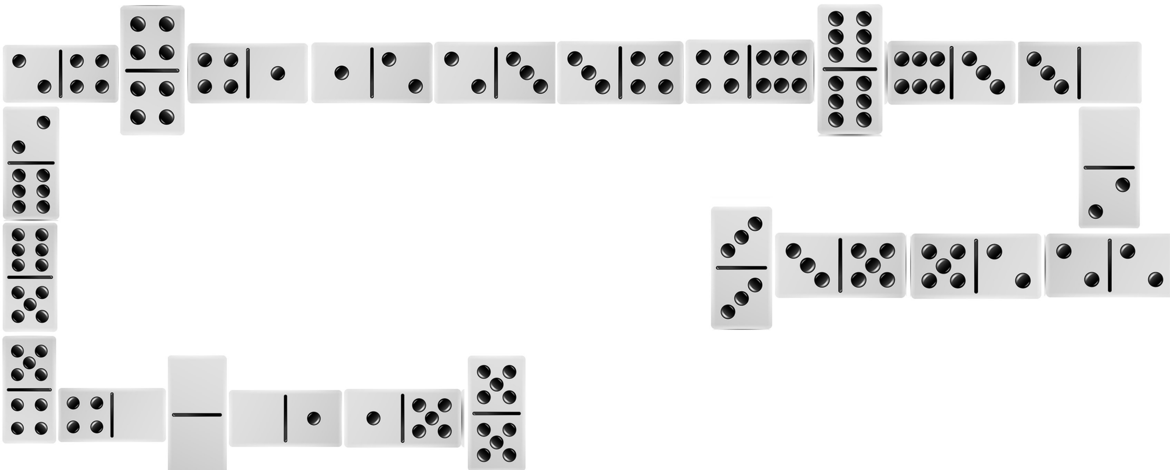


Fonte: O autor.

Lance 13

Neste lance, Y tem a opção de jogar $\{3-1\}$, $\{3-3\}$ e $\{5-0\}$. Não jogará pio que é o jogo do oponente X. Assim, jogará o dôbre de terno para dar um passe em X. Nessa jogada, X não consegue jogar, levando um passe de Y.

Figura 80 – Partida 4 - Lance 13

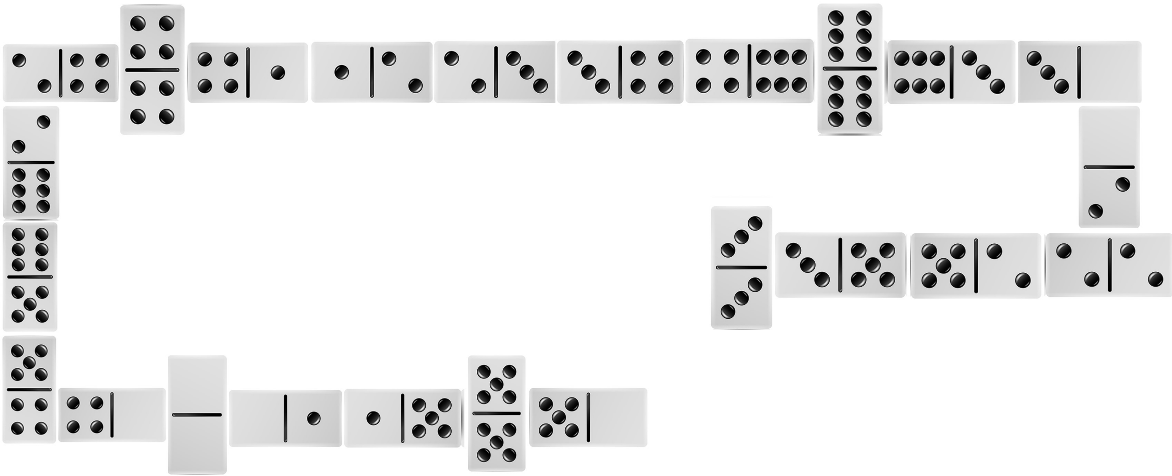


Fonte: O autor.

Lance 14

Nesta jogada, Y tem as opções de jogar $\{3-1\}$ e $\{5-0\}$. Novamente, não jogará na sua ponta de pio. Assim, Y joga $\{5-0\}$, dando outro passe em X. Neste lance, X não consegue jogar, pois levou um passe.

Figura 81 – Partida 4 - Lance 14

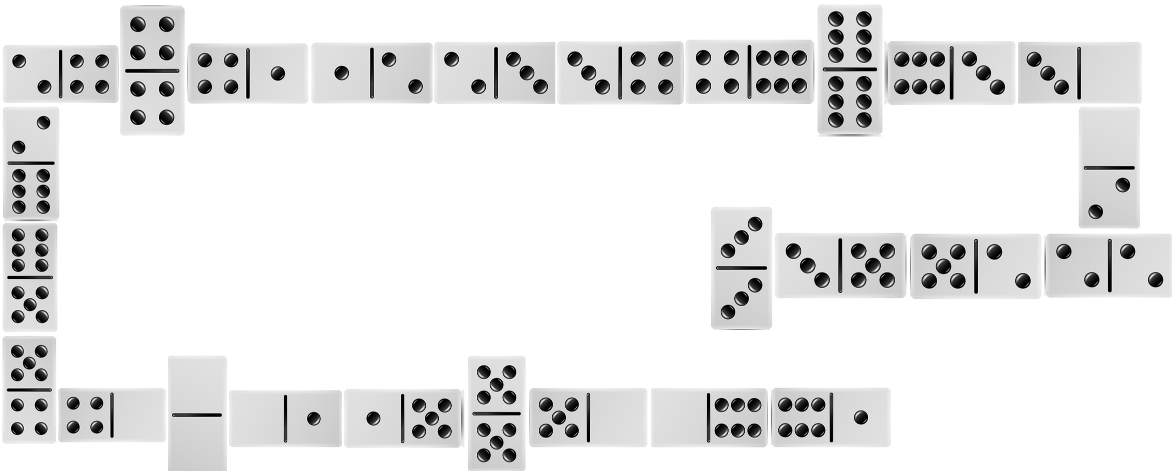


Fonte: O autor.

Lance 15

Neste lance, Y pode jogar $\{3 - 1\}$ e $\{0 - 6\}$. O melhor é jogar $\{0 - 6\}$ para bater nas duas pontas e ter uma vitória de 2 pontos. Neste lance X tem somente a opção de jogar $\{6 - 1\}$.

Figura 82 – Partida 4 - Lance 15



Fonte: O autor.

Lance 16

Neste lance, Y se torna o vencedor nas duas pontas, jogando $\{1 - 3\}$, totalizando 2 pontos.

Quadro 7 – Lances jogados durante a partida 4.

Jogadores	Lance 1	Lance 2	Lance 3	Lance 4	Lance 5
Y X	$6-6$ $6-4$	$4-3$ $3-2$	$2-1$ $1-4$	$4-4$ $4-2$	$6-3$ $3-0$
	Lance 6	Lance 7	Lance 8	Lance 9	Lance 10
Y X	$2-6$ $0-2$	$6-5$ $5-4$	passou $2-2$	passou $2-5$	$5-3$ $4-0$
	Lance 11	Lance 12	Lance 13	Lance 14	Lance 15
Y X	$0-0$ $0-1$	$1-5$ $5-5$	$3-3$ passou	$5-0$ passou	$0-6$ $1-6$
	Lance 16				
Y X	$1-3$ $-$				

Fonte: O autor.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho explorou-se o jogo de dominó como ferramenta didática e estratégica no ensino de probabilidade e estatística a nível médio escolar.

A pesquisa bibliográfica possibilitou fazer uma objetiva apresentação do jogo de dominó, elaborar e apresentar situações problemas que usem as pedras do jogo de dominó para facilitar no entendimento dos conceitos de estatística e probabilidade. Tais problemas foram resolvidos e ilustrados em detalhes facilitando o professor de matemática a inovar nas suas aulas pois além de tradicionalmente o jogo de dominó não ser explorado dessa forma nos exemplos de probabilidade e estatística, o professor também pode se valer desses exemplos para tornar suas aulas mais atraentes tornado tais exemplos em situações reais e concretas na aprendizagem colaborativa dos seus alunos.

A análise das partidas dos jogos pode servir para os professores colocarem na prática em suas salas de aulas a possibilidade dos alunos aprenderem jogando. Refletirem conceitos matemático em situações de tomadas de decisão isso poderá promover interessantes investigações científicas e matemáticas em sala de aula. Uma das maiores dificuldades na elaboração do trabalho foi a falta de tempo e o contexto da pandemia que impossibilitou a prática em sala de aula das propostas aqui apresentadas.

Espera-se que este trabalho inspire outros pesquisadores a investigarem a praticidade em sala de aula. Pretende-se em trabalhos futuros adaptar tais propostas para situações de aprendizagem concretas em salas de aula presenciais e no modelo educação a distância. Por fim, espera-se que esse trabalho promova o debate na comunidade científica e no meio escolar, especialmente entre os professores da matemática básica, para que assim seja promovido melhorias na qualidade do ensino da matemática básica.

REFERÊNCIAS

[1] PORTAL, TODOS PELA EDUCAÇÃO. **Em 10 anos, aprendizado adequado no Ensino Médio segue estagnado, apesar dos avanços no 5º ano do fundamental**. Portal Todos Pela Educação, 2019. Disponível em: <https://todospelaeducacao.org.br/noticias/meta-3-em-10-anos-aprendizado-adequado-ensino-medio-segue-estagnado-avancos-5-ano\-fundamental/>. Acesso em: 12-03-2022. Citado na página 14.

[2] MASOLA, Wilson; ALLEVATO, Norma. Dificuldades de aprendizagem matemática: algumas reflexões. **Educação Matemática Debate**, v. 3, n. 7, p. 52–67, 2019. Citado na página 14.

[3] ROCHA, Paul Symon Ribeiro; OLIVEIRA, Wellyda Veras de. Jogos para o ensino da matemática: Uma revisão sistemática da literatura. **Anais da VII Escola Regional de Computação Aplicada à Saúde**, SBC, p. 276–281, 2019. Citado na página 14.

[4] GIL, Antonio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. São Paulo: Atlas, 2010. Citado na página 19.

[5] FURTADO, Maria Sueli Viana; DUARTE, Simone Viana. **Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) em cinêcias sociais aplicadas**. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, 2011. Citado na página 19.

[6] MARCONI, Marina de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. **Metodologia Científica**. 6.ed. ed. [S.l.: s.n.]. Citado na página 19.

[7] LUDIJOGOS. **Regras Dominó**. Disponível em: <https://www.ludijogos.com/multiplayer/domino/regras/#:~:text=Jogo,Acesso-em-12-01-2021>. Citado na página 21.

[8] MEGAJOGOS. **7 táticas essenciais para você ganhar no dominó**. Disponível em: <https://blog.megajogos.com.br/7-taticas-essenciais-para-voce-ganhar-no-domino,Acesso-em-20-12-2021>. Citado na página 22.

[9] ROSS, Sheldon. **Probabilidade: um curso moderno com aplicações**. Porto Alegre: Bookman, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 25.

[10] SPIEGEL, Murray R. **Probabilidade e Estatística**. [S.l.]: McGraw-Hill do Brasil, 1977. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 25.

[11] GUERRA, Mauri José. **Estatística Indutiva**. São Paulo: Livraria Ciência e Tecnologia, 1979. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 25.

[12] HOEL, Paul Gerhard. **Estatística Elementar**. São Paulo: Atlas, 1980. Citado na página 23.

[13] MORETTIN, Luiz Gonzaga. **Estatística Básica: Probabilidade e Inferência, volume único.** São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 25.

[14] MORGADO, Augusto César; CARVALHO, João Bosco Pitombeira de; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; FERNANDEZ, Pedro. **Análise Combinatória e Probabilidade**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1991. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 25.

[15] FREUND, John E. **Estatística aplicada: Economia, Administração e Contabilidade**. Porto Alegre: Bookman, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 25.

[16] CASELLA, George. **Inferência Estatística**. São Paulo: Cengage Learning, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 25.

[17] LOVÁSZ, Lászlo; PELIKÁN, József; VESZTERGOMBI, Katalin. **Matemática Discreta**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2003. Citado na página 23.

[18] LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **Temas e Problemas**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2003. Citado na página 23.

[19] NETO, Antonio Caminha Muniz. **Tópicos de Matemática Elementar: Combinatória**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. v. 4. Citado na página 23.

[20] LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **A Matemática do Ensino Médio**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006. v. 2. Citado na página 23.

[21] MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Matemática Discreta: Coleção Profmat**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013. Citado na página 23.

[22] LIPSCHUTZ, Seymour. **Probabilidade**. São Paulo: Makron Books, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 25.

[23] SANTOS, José Plinio de Oliveira. **Introdução à Análise Combinatória**. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 25.

[24] OBMEP, PROGRAMA DE INICIAÇÃO CIENTIFICA DA. **Problemas com Dominó**. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=GuFDMXSsBrs,Acesso-em-14-12-2020>. Citado 3 vezes nas páginas 23, 29 e 33.

[25] PINHEIRO, João Ismael D. **Estatística Básica: A arte de trabalhar com dados**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2009. Citado na página 25.

[26] MAGALHÃES, Marcos Nascimento. **Noções de Probabilidade e Estatística**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2005. Citado na página 25.

[27] SILVA, Fabrıcio Menezes Netto da. Dissertação (Mestrado), **Jogos no processo de ensino e aprendizagem em probabilidade**. São Carlos: Universidade Federal de São Carlos, 2013. Citado na página 25.

[28] RKSOFT. **Dominó Expert: Jogo de dominó para computador - regra (14x14)**. Disponível em: <https://www.rksoft.com.br/html/dominoexpert.html>. Acesso em: 13/08/2022. Citado na página 36.