Universidade Federal de Jataí (UFJ)
Unidade Acadêmica de Ciências Exatas e Tecnológicas (CIEXA)
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

André Ângelo Ferrato Thomáz

Sala de aula invertida: Uma proposta de ensino sobre máximos e mínimos

BRASIL
2022

UFJ

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JATAÍ

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFJ

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Jataí (UFJ) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFJ), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei 9.610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFJ é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

[x] Dissertação   [ ] Tese

2. Nome completo do autor

ANDRÉ ANGELO FERRATO THOMAZ

3. Título do trabalho

SALA DE AULA INVERTIDA: UMA PROPOSTA DE ENSINO SOBRE MÁXIMOS E MÍNIMOS

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento [x] SIM   [ ] NÃO[1]

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:

a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);

b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.

O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;

- Submissão de artigo em revista científica;

- Publicação como capítulo de livro;

- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.

---

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **FERNANDO RICARDO MOREIRA**, **Orientador**, em 11/08/2022, às 09:36, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

---

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **ANDRÉ ANGELO FERRATO THOMAZ**, **Discente**, em 11/08/2022, às 09:56, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufj.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0051989** e o código CRC **09EE9A8B**.

André Ângelo Ferrato Thomáz

Sala de aula invertida: Uma proposta de ensino sobre máximos e mínimos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT), da Unidade Acadêmica de Ciências Exatas e Tecnológicas (CIEXA), da Universidade Federal de Jataí (UFJ), como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de concentração: Matemática do Ensino Básico
Linha de Pesquisa: Ensino de Cálculo

Orientador: Prof. Dr. Fernando Ricardo Moreira

BRASIL
2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFJ.

Thomaz, André Ângelo Ferrato
Sala de aula invertida: Uma proposta de ensino sobre máximos e mínimos / André Ângelo Ferrato Thomaz. - 2022.
78 f.

Orientador: Prof. Dr. Fernando Ricardo Moreira.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Jataí, Unidade Acadêmica Especial de Ciências Exatas e Tecnológicas, Jataí, PROFMAT- Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RJ), Jataí, 2022.
Apêndice.
Inclui lista de figuras.

1. Sala de aula invertida. 2. Problemas de otimização. 3. Ensino de Cálculo. I. Moreira, Fernando Ricardo, orient. II. Título.

CDU 51

UFJ

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JATAI

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº **32** da sessão de Defesa de Dissertação de ANDRÉ ANGELO FERRATO THOMAZ, que confere o título de Mestre em **Matemática**, na área de concentração em **Matemática do Ensino Básico**.

No dia seis de maio de dois mil e vinte e dois, a partir das 08:00 horas, na Sala 16 do Prédio de Pós-graduação da Universidade Federal de Jataí, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada **"**SALA DE AULA INVERTIDA: UMA PROPOSTA DE ENSINO SOBRE MÁXIMOS E MÍNIMOS**"**. Os trabalhos foram instalados pelo Orientador, Professor Doutor Fernando Ricardo Moreira (PROFMAT / UFJ), com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professora Doutora Ana Paula Freitas Vilela Boaventura (CIEXA / UFJ) membro titular externo, Professor Doutor Rafael Siqueira Silva (PROFMAT / UFJ), membro titular interno. Durante a arguição os membros da banca **não fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sido o candidato **aprovado** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor Fernando Ricardo Moreira, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, no dia seis de maio de dois mil e vinte e dois.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

Documento assinado eletronicamente por **FERNANDO RICARDO MOREIRA**, **Orientador**, em 09/05/2022, às 08:41, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **RAFAEL SIQUEIRA SILVA**, **Professor do Magistério Superior**, em 09/05/2022, às 09:04, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **ANA PAULA FREITAS VILELA BOAVENTURA**, **Coordenador**, em 11/05/2022, às 10:37, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufj.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0021735** e o código CRC **8AB8CEA6**.

Os Programas de Pós-Graduação stricto sensu, ora em funcionamento na Universidade Federal de Jataí (UFJ), em virtude de procedimentos técnicos relacionados à CAPES, continuam provisoriamente vinculados à Universidade Federal de Goiás (UFG), no entanto, todos os elementos pré-textuais do trabalho apresentado estão identificados como Universidade Federal de Jataí, em função da migração da BDTD ter ocorrido a partir de 16 de agosto de 2021, e pelo fato das pesquisas e produções estarem sendo realizadas na UFJ.

À minha mãe, Maria das Dores Ferrato (in memoriam) e ao meu pai, João Simão Thomaz, pelo dom da vida e pelo amor incondicional a mim dispensado.

Agradecimentos

Grato, inicialmente, a Deus pela dádiva da vida.

À minha companheira, Tuanni Ferreira Nascimento, pelo suporte, pela inspiração e pela motivação que sempre me foram dados nos momentos de imprevistos e de dificuldades.

A meus filhos, Miguel Ângelo Ferreira Ferrato, Maitê Ferreira Ferrato e Noah Ferreira Ferrato, que foram, mesmo sem saber, o motivo da minha determinação e persistência.

Aos professores do PROFMAT/UFJ que proporcionam uma inspiração difícil de transpor em palavras. Os ensinamentos e os conhecimentos compartilhados me marcaram profundamente. em especial, meu orientador, Professor Doutor Fernando Ricardo Moreira, pelo empenho e dedicação.

Aos meus colegas de profissão e de Mestrado: Gisele Levulis Aguiar, Isaías Aristides Neto, Lucas Rozendo Marques, Marcieli Adamski Carvalho, Rafael Bento da Silva e Veruska Dolfini Barbora que compartilham os sonhos de uma melhor educação e que são grandes suportes e aliados quando existem dúvidas, questionamentos e debates.

À Sociedade Brasileira de Matemática e à Universidade Federal de Jataí, uma união que visa o aprimoramento do ensino de matemática no ensino básico por meio da implantação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Muito obrigado por fazerem parte de minha trajetória de estudos e de vida

“Existem pessoas que dizem: 'Pode ser que você nunca aprenda algo sobre matemática'. Aí está o truque: vai ou não usar a matemática em sua vida, o fato que você tenha tido a capacidade de entendê-la, deixa uma marca em seu cérebro que não existia antes, e essa marca o transforma em um solucionador de problemas.”

Neil deGrasse Tyson

Resumo

Cálculo é um campo do conhecimento da matemática proveniente da álgebra e da geometria e no ensino superior costuma ser inserido como disciplina. No entanto, os estudantes apresentam dificuldades em aprender conceitos básicos como de valores máximos e mínimos de funções, havendo a necessidade de tornar as aulas mais dinâmicas afim de estimular a participação e alcançar uma aprendizagem de qualidade. Assim, objetivou-se apresentar uma proposta de ensino em máximos e mínimos de funções de uma variável, apoiada na metodologia ativa em sala de aula invertida, para os estudantes de Cálculo em nível superior. A metodologia consistiu na elaboração de quatro módulos: Módulo 1 - Introdução à otimização; Módulo 2 - Máximos, mínimos, perímetro, área e volume; Módulo 3 - Máximos, mínimos, posição, velocidade e aceleração e Módulo 4 - Máximos, mínimos, números e distâncias entre pontos. Cada módulo dividido em cinco fases interligadas entre si: Fase 1 - Estímulo, Fase 2 - Domínio, Fase 3 - Prática, Fase 4 - Desafio e Fase 5 - Fixação, propondo leituras, realização de atividades online por meio de aplicativos e plataformas ou extra sala, lúdicas, práticas e jogos. Sugere-se uma avaliação quantitativa e qualitativa por meio do registro de estudo por tópicos na fase, envolvimento dos estudantes, apresentações e prova final. Espera-se com esta proposta oferecer aos docentes de Cálculo uma alternativa de metodologia ativa em sala de aula invertida que estimule os estudantes a construírem de forma autônoma, participativa e significativa seus conhecimentos.

Palavras-chave: Sala de aula invertida. Problemas de otimização. Ensino de Cálculo.

Abstract

Calculus is a branch of mathematical knowledge originating from algebra and geometry and in higher education it is usually inserted as a subject.However, students have difficulties in learning basic concepts such as maximum values and minimums of functions, there is a need to make classes more dynamic in order to stimulate participation and achieve quality learning. Thus, the objective to present a teaching proposal in maximums and minimums of functions of a variable, supported by a active methodologies designated flipped classroom, for students of Calculus in higher education. The methodology consists of the elaboration of four modules: Module 1 - Introduction to optimization; Module 2 - Maximums, minimums, perimeters, area and volume; Module 3 - Maximums, minimums, position, velocity and acceleration; Module 4 - Maximums, minimums, numbers and distances between points. Each module is divided into five interconnected phases: Phase 1 - Stimulus, Phase 2 - Mastery, Phase 3 - Practice, Phase 4 - Challenge and Phase 5 - Fixation, roposing readings, carrying out online activities through applications and platforms or extra room, recreational activities, practical activities and games. A quantitative and qualitative assessment is suggested through the registration of study by topics in the phase, student involvement, presentations and final exam. It is expected with this proposal to offer Calculus teachers an alternative of active methodology in an flipped classroom that encourages students to build their knowledge in an autonomous, participatory and meaningful way.

Keywords: Flipped classroom. Optimization problems. Teaching Calculus.

Sumário

Lista de Figuras

1 Introdução

O interesse por este estudo está relacionado à nossa prática docente, que aborda o processo de ensino e aprendizagem da matemática. A atenção está voltada para as dificuldades dos estudantes em aprender conceitos de Cálculo, particularmente os conceitos de valores máximos e mínimos de funções. A escolha deste tema decorre de nossa prática de ensino e pesquisa sobre a aplicação prática de todo o conceito matemático, visando alcançar um ensino mais próximo da realidade social dos alunos. Nos cursos que lecionamos, os alunos fazem perguntas sobre o valor prático e instrumental da matemática por meio de perguntas como "Para que presta isso?" e "Onde essa teoria é aplicada?" "Onde eu usaria no meu dia a dia?" entre outras coisas, estimularam o estudo do ensino de conceitos de máximos e mínimos de funções, que se tornou o objetivo principal deste trabalho.

Deste ponto de vista, o objeto de estudo torna-se uma verificação do processo de ensino do conceito de valores máximos e mínimos de funções na perspectiva da metodologia ativa, o que nos leva ao método de ensino de sala de aula invertida em que efetua-se a aprendizagem online antes das aulas presenciais, com atividades práticas como resolução de problemas ou discussões em grupo em sala de aula.

Como o ensino e aprendizagem de problemas de maximização e de minimização é o que se propõe discutir neste trabalho e neste ponto de vista, apresentar alternativas de ensino paras as resoluções das atividades propostas de otimização que surgem como aplicação do conceito de limites e derivada, designando, assim, metodologias diversificadas de ensino que possam auxiliar na aprendizagem com intuito de obter resultados satisfatórios. Para isto, utiliza-se como instrumentos principais, as técnicas de metodologias ativas no ensino de matemática e efeitos do estudo e aprendizagem de Cálculo, tais como, teoremas para obtenção e classificação de pontos críticos.

Esta proposta nasce da necessidade pela busca de meios para tornar as aulas de matemática no ensino superior mais dinâmicas, com maior produtividade e participação dos sujeitos, na qual o aluno é o ator principal do ensino e da aprendizagem e o professor é um orientador ou intermediador do conhecimento. Assim, aponta-se esta intervenção metodológica que poderá, inclusive, servir de auxílio para aulas de outros professores.

Contudo, a compreensão de que o professor é o detentor do conhecimento máximo tem passado por um processo de modificação com o decorrer dos tempos, o olhar da aprendizagem acabou por se direcionar para o aluno e as metodologias de ensino e aprendizagem são/foram um dos caminhos para essa a transformação. Sabe-se que cada sujeito é único e tem sua peculiaridade na aprendizagem. Entretanto, é consistente observar que a aula expositiva, teórica, bem como as práticas são importantes para o processo de ensino e aprendizagem de Cálculo [1].

Assim, o professor precisa se adequar, arquitetar elementos possíveis para que seus alunos possam ter meios para obter uma aprendizagem satisfatória. Paulo Freire (1996,p. 52) afirma: "Saber ensinar não é transferir conhecimento, mas criar possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção". Nesse âmbito, nota-se ser imprescindível uma aprendizagem mais ativa, em que os alunos se responsabilizam pelo processo de aprender, participem e desenvolvam capacidades críticas. Cremos que as metodologias ativas podem ser um subsídio ao professor.

As metodologias ativas baseiam-se no aluno como personagem principal e maior responsável pelo seu processo de aprendizado. Nessas metodologias o discente é um protagonista e não ocupa a posição de apenas um mero expectador na sala de aula. Desta forma, os estudantes são incentivados a desenvolver uma capacidade de absorção de conteúdos de forma autônoma e mais participativa.

Segundo Glasser (2001), em sua famosa obra, *A teoria de escolha*, o aprendizado pode ser passivo e ativo e acontece de diferentes maneiras:

- Passivo: quando se lê, quando se escuta, quando se vê, quando se vê e escuta;

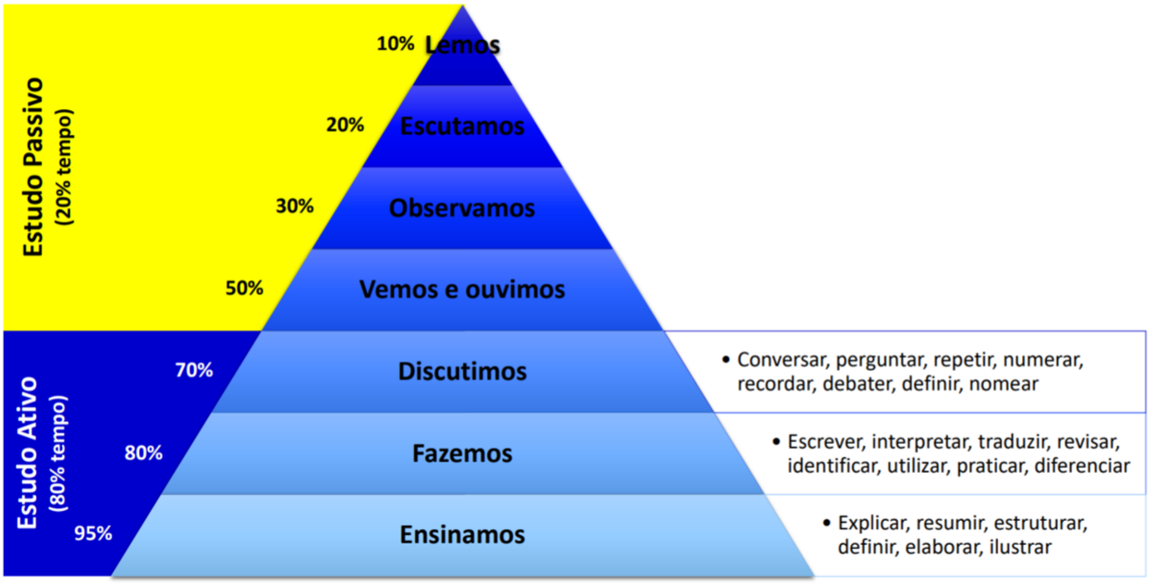
- Ativo: quando se discute, quando se pratica e quando se ensina.

  O ensino tradicional está fundamentado nas formas passivas de aprendizagem, onde o professor é responsável pela explicação do conteúdo e o aluno repassar esses conteúdos, explanados pelo professor em sala de aula, em seu ambiente de estudo.

A figura 1.1 que ilustra as porcentagens, de acordo com Glasser (2001), do que se aprende em relação a forma como as atividades diferentes executadas em seu processo de captura de informação.

[1]Neste trabalho a expressão Cálculo refere-se a um campo do conhecimento da matemática derivado da álgebra e da geometria, que estuda as variações de grandeza e quantidades e aborda temas como limites, derivadas e integrais. Em cursos superiores costuma fazer parte como disciplinas, denominadas, com cálculo diferencial, cálculo integral, cálculo diferencial e integral, cálculo infinitesimal, cálculo I, cálculo II, cálculo III, cálculo A, cálculo B, entre outras denominações.

Figura 1.1: Pirâmide de aprendizagem de William Glasser



Fonte: https://diplomaciacacd.com.br/saladeaulainvertida.pdf. Acesso em 09 de outubro de 2021.

Existem alguns métodos de ensino/aprendizagem denominados metodologias ativas, entre eles estão: aprendizagem baseadas em investigação, instrução por pares, rotação por estações, sala de aula invertida, aprendizagem baseada em jogos (gamificação), aprendizagem baseada em problemas, aprendizagem baseada em projetos, entre outras.

O foco deste trabalho está na metodologia ativa sala de aula invertida, que segundo Bergmann e Sams (2016) tem como proposta metodológica prover aulas menos expositivas, mais produtivas e participativas, capazes de engajar os alunos no conteúdo e melhor utilizar o tempo e conhecimento do professor. E que Bacich e Moran (2018) compreendem que:

> A sala de aula pode ser um espaço privilegiado de cocriação, *maker*, de buscar soluções empreendedoras, em todos os níveis, onde estudantes e professores aprendam a partir de situações concretas, desafios, jogos, experiências, vivências, problemas, projetos, com os recursos que tem em mãos: materiais simples ou sofisticados, tecnológicas básicas ou avançada. (BACICH; MORAN, 2018, p.39)

Bergmann e Sams (2016) descrevem que o modelo invertido de aprendizagem pode ajudar os alunos não só a tirarem boas notas em seus testes, mas também a se tornarem melhores aprendizes, alcançando um nível mais profundo de compreensão do que se pretende assimilar. Também mostram como essa abordagem permitiu não só interações mais frequentes, mas também relacionamentos mais profundos e mais pessoais com os alunos, e como estes conseguem personalizar melhor a própria aprendizagem.

Para promover o desenvolvimento e elaboração da proposta de aprendizagem em Cálculo deste trabalho, foram observados o desinteresse e o baixo desempenho dos estudantes nos cursos de ciências exatas como fenômenos amplos.

O aproveitamento insuficiente em disciplinas de curso superior que contém tópicos de Cálculo, e que resulta em evidente reprovação, é um fato em diversas instituições de ensino, tanto no Brasil como no exterior. A pesquisa de Barufi (1999) apresenta que, na Universidade de São Paulo (USP), de 1990 a 1995, a média de reprovação em CDI foi de 43,8 %. Além disso, Rezende (2003) desponta que, nas universidades do Rio de Janeiro, a média de reprovação da disciplina citada variou de 45% a 95%, em relação ao curso para o qual era disponibilizada.

Uma determinada situação pode ser relativamente esclarecida por meio de adversidades inerentes aos conceitos estudados, que podem ser subjetivos, altamente generalizados e excessivos. No entanto, os cursos tradicionais de ensino de ciências exatas também podem ser considerados responsáveis, quase sempre focando em argumentações teóricas de longa duração seguidos de extensas listas de exercícios para preparar os alunos para o conhecimento do conteúdo a ser abordado no processo de aprendizagem, especialmente necessitam que sejam feitos fora da aula.

No entanto, Rosa, Alvarenga e Santos (2019) apontam que os alunos não podem ser culpados apenas por seus fracassos em avaliações de Cálculo. Isso porque a experiência tem demonstrado que o desempenho diferenciado dos professores pode contribuir para um melhor aproveitamento dos alunos. A prova é esta, segundo matéria publicada no Correio Braziliense em 10 de dezembro de 2015, Projeto desenvolvido pelo Professor Ricardo Fragelli na Universidade de Brasília (UnB) reconhecendo o aluno que se destaca de forma positiva e faça com que ele ajude aquele aluno que enfrentam maiores dificuldades na disciplina. Diferente de aulas com métodos tradicionais, os resultados desses projetos resultaram em um aumento nas taxas de aprovação de cálculo de 50% para 95% na UnB – Campus Gama.

Visto que a reprovação constante pode levar o aluno a se evadir da instituição, pois, ao ser reprovado várias vezes, pode ter a sensação de que é incapaz de aprender os conceitos matemáticos, e, então, desiste do curso. Quando o estudante entra na universidade, este tem muitas perspectivas em termos de aprendizagem, e quando não alcança o desempenho acadêmico satisfatório, sente-se confuso, desmotivado.

Um estudante irá desistir devido a repetidas reprovações, porque ao reprovar várias vezes, ele pode sentir que não pode aprender conceitos matemáticos e depois desistir. Depois que o aluno entra na universidade, ele tem muitas perspectivas de aprendizado, quando seu desempenho acadêmico não é satisfatório, ele se sente confuso e desmotivado.(ROSA; ALVARENGA; SANTOS,2019)

Visando as características mencionadas, atentamos para a elaboração de uma proposta de ensino apoiada na sala de aula invertida, que baseia-se em uma adaptação da metodologia da Sala de Aula Invertida na qual traz um envolvimento do trabalho com as tecnologias aliadas ao ensino de Cálculo.

Sobretudo, esta proposta almeja transformar a divergência entre o que se propõe em salas de aula e sua efetiva prática relacionadas ao Cálculo, em específico máximos e mínimos de funções, visando se tornar altamente expressiva para docentes e discentes. Além disso, esse trabalho também visa diminuir as dificuldades dos estudantes na aprendizagem de Cálculo e na busca de alternativas metodológicas ativas para o ensino em que são ministradas as aulas dos conceitos de matemáticos indicados.

Dessa forma, a pergunta norteadora foi: É possível elaborar uma proposta de ensino baseada na metodologia ativa da sala de aula invertida para que os estudantes de Cálculo aprendam a resolver problemas de otimização (máximos e mínimos de funções de uma variável)?

Neste intuito, o presente trabalho foi estruturado em 4 capítulos além desta introdução. No capítulo 1, traz-se a revisão teórica que dá suporte para discutir sobre as metodologias ativas de ensino, pontuando as mais encontradas em pesquisas com enfoque especial na metodologia da sala de aula invertida. No capítulo 2, fala-se sobre a história e aplicações de máximos e mínimos e os conceitos matemáticos que serviram de suporte para a construção desta proposta, tais como máximos e mínimos para funções não lineares com uma única variável. No capítulo 3, é apresentado o delineamento da proposta de ensino e sua descrição da aplicação a uma turma de Cálculo focada nos conteúdos sobre máximos e mínimos em funções com uma variável. Encerra-se o corpo do texto desta dissertação com as considerações finais, nas quais retoma-se a questão de pesquisa para responde-la a partir das compreensões que foram construídas, e sugere-se caminhos para futuros trabalhos relacionados a mesma temática.

Objetivo Geral

Apresentar uma proposta de ensino em máximos e mínimos de funções de uma variável, apoiada na metodologia ativa em sala de aula invertida para os estudantes de Cálculo.

Objetivos Específicos

- Apresentar um estudo de obras sobre as metodologias ativas, em destaque um estudo da literatura sobre a metodologia sala de aula invertida;

- Apresentar um estudo de livros e documentos sobre a história e aplicação de máximos e mínimos, e conceitos de Cálculo de função de uma variável;
- Elaborar a proposta baseada na teoria da metodologia ativa sala de aula invertida, adaptada para o ensino superior envolvendo especificamente os tópicos de máximos e mínimos de funções de uma variável.

2 Metodologias ativas de ensino

Desde o início de nossa vida, aprendemos no dia a dia, aprimoramos, elaboramos, desenvolvemos ideias e pensamentos por/no meio familiar, quer seja com alguém mais experiente (processo indutivo) ou pelos questionamentos a partir de teorias, testagens ou práticas (processo dedutivo), "[...] não apenas para nos adaptarmos à realidade, mas, sobretudo, para transformar, para nela intervir, recriando-a" (FREIRE, 1996,p.76).

Neste âmbito, os educadores quando buscam o desenvolvimento de sua formação e atuação voltadas para a integralidade dos sujeitos, podem ter mais condições de perceber o engajamento e busca pela formação dos seus próprios alunos. Estes têm uma inquietação que está relacionada fundamentalmente a um futuro melhor para a humanidade. Ele está sempre buscando novos conhecimentos e novas maneiras de facilitar e conduzir o processo de ensino-aprendizagem, sentindo-se não apenas alguém que ensina, mas alguém que também aprende ao ensinar, aprende em comunhão com outros (FREIRE, 2001).

Entendemos que o professor precisa criar estratégias para auxiliar a aprendizagem dos alunos, procurando compreender seus modos de aprender, bem como os tipos de raciocínios e pensamentos matemáticos, tais como o dedutivo, o indutivo e o abdutivo.

Nesse sentido, o método dedutivo torna explícitas verdades particulares contidas em verdades universais. O procedimento dessa comprovação consiste em estabelecer estruturas lógicas, por meio da relação existente entre antecedente e consequente, entre hipótese e tese, entre premissas e conclusão. Assim, se leva o pesquisador do conhecido ao desconhecido com pouca margem de erro. Também é de alcance limitado pois na conclusão não pode haver conteúdos que excedam os argumentos iniciais. Os argumentos matemáticos são, na maior parte, dedutivos. Em que o método de demonstração é deduzir os teoremas, garantindo que são verdadeiros se forem verdadeiros os axiomas e postulados. Embora o conteúdo dos teoremas já esteja fixado nos axiomas e postulados, ele está longe de ser óbvio (CERVO; BERVIAN, 2007).

A dedução consiste em um recurso metodológico em que a racionalização ou a combinação de ideias em sentido interpretativo vale mais que a experimentação de caso por caso, em termos mais simples pode-se dizer que é o raciocínio que caminha do geral para o particular. De acordo com os estudos clássicos, o método dedutivo é sempre definido como sendo o processo de estudo que vai do geral para o particular ou, melhor dizendo, parte-se dos princípios já reconhecidos como válidos e irrefutáveis para uma conclusão. A utilização do método dedutivo nos leva a partir do que já é conhecido para o desconhecido. Pode-se afirmar que, nesse caso, a margem de erro é quase nula, uma vez que a conclusão do estudo não deve extrapolar as premissas (OLIVEIRA,2013).

Na etapa que conclui o processo investigativo matemático, o pensamento dedutivo tem uma ação predominante, quase que exclusiva, relativamente aos demais tipos de pensamento inferencial. Nas fases exclusivamente exploratórias da investigação, em que possui muitas dúvidas e imprecisões, o pensamento matemático é distintamente conjectural, processando-se de um modo denominado miscigenado, ou seja, um mesmo argumento é estruturado com base numa mescla de abduções, induções e deduções (OLIVEIRA, 2013).

A composição da argumentação é de tipo abdutivo, visto que se tem pelo menos uma única elucidação plausível, e por isso, persuasivo e acreditável, de um fenômeno analisado experimentalmente. Entretanto, o argumento abrange, igualmente, a sustentação indutiva de uma asserção estatística e, com base nessa 'verdade assimptótica', a dedução da propriedade.

Mas para estes tipos de pensares e modos de aprender serem evidenciados se faz necessário que os métodos e as estratégias ultrapassem o processo de só transmitir nas aulas.

Os métodos que predominam no ensino em que o professor transmite inicialmente a teoria e depois o aluno a utiliza em condições particulares sob aspectos expositivos ou transmissivos, isto é, aquela em que a informação está envolvida como meio de transmissão direta de um sujeito que conhece a outro que não conhece. Segundo Nóvoa e Amante (2015):

> [...] o conhecimento pertence ao professor, que se serve do quadro negro para o transmitir aos alunos. Esta realidade induz uma pedagogia transmissiva, fortemente marcada por uma relação "vertical" entre professor e alunos. O conceito anglo-americano de *lecture* (palestra, preleção, lição) traduz bem este modelo de ensino. E não podemos esquecer que *lecture* (em língua inglesa) vem diretamente de *lecture* (em língua francesa), isto é, ler para os outros. Está aqui a raiz das didáticas que ainda hoje dominam os ambientes universitários (NÓVOA; AMANTE, 2015, p.24).

O ensino desdobrado sob essa perspectiva é um processo ativo apenas do professor. Os alunos não se preparam para as aulas, pois lhes cabe apenas entrar na sala e ouvir a apresentação do professor. A avaliação é a ocasião de finalização deste processo, sem estar vinculada com os processos de ensino e aprendizagem (não é contínua). O professor espera que, se o aluno não adquiriu conhecimento, o problema é exclusivamente deste e que não é necessário reavaliar o processo de ensino. Nessa modalidade, o professor conduz o conhecimento sem influência com os alunos, que ouvem (passivamente). O professor esquematiza, pesquisa, organiza materiais, e ao chegar em sala explana, interpreta as apresentações, exibe, relembra e transmite o conteúdo da aula. Ou seja, aprende reiteradas ocasiões, ao passo que o aluno se restringe a ouvir a explicação do professor.

Verifica-se que essa aprendizagem por intermédio da transferência de ideias é importante, mas a aprendizagem por meio de dúvidas e experimentos é mais relevante para um entendimento amplo e aprofundado. Ultimamente tem existido uma evidência em combinar metodologias ativas em contextos híbridos, que liguem as vantagens das metodologias indutivas e das metodologias dedutivas. Os modelos híbridos procuram compensar a experimentação com a dedução, invertendo a ordem tradicional: experimenta-se, entende-se a teoria e volta para a realidade, assim a temos, a indução-dedução, com orientação docente.

Paulo Freire (1996) destaca que ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção. Ele ainda salienta que o papel do professor deve estar aberto a indagações, à curiosidade, às perguntas dos alunos, que seja crítico e inquiridor, incomodado na realização que tem a preocupação de ensinar e não transferir conhecimento. Para tanto, entendemos que as metodologias ativas podem ser uma forma de ser trabalhar em contextos híbridos, tal como observa Bacich e Moran (2018), para eles:

> [...] Nos últimos anos, tem havido uma ênfase em combinar metodologias ativas em contextos híbridos, que unam as vantagens das metodologias indutivas e das metodologias dedutivas. Os modelos híbridos procuram equilibrar a experimentação com a dedução, invertendo a ordem tradicional: experimentamos, entendemos a teoria e voltamos para a realidade (BACICH; MORAN, 2018, p.37).

Bacich e Moran (2018) afirmam que a aprendizagem se torna ativa e significativa, quando a levamos de uma categoria mais simples a condições complexas de conhecimento em todas as esferas da vida, este crescimento das ideias passa por diversas etapas, determinado tempo e das relações sociais. É nesse ponto de vista que se situa o processo ativo - tido aqui como sinônimo de metodologias ativas - como uma possibilidade de condução do trabalho do professor (ensino) para a tarefa do estudante (aprendizagem), ideia confirmada por Freire (1996) ao referir-se à educação como um procedimento que é realizado somente pelo próprio sujeito, que concretiza a interação entre sujeitos históricos por meio de seus vocábulos, atos e pensamentos.

Aprendemos o que é mais significativo no momento em que estamos. John Dewey (1859 - 1952), Paulo Freire (1921 - 1997), Carl Rogers (1902 - 1987), Lev Vygotsky (1896 - 1934) e Jerome Bruner (1915 - 2016), entre tantos outros, têm destacado como cada pessoa aprende de forma ativa, a partir do contexto em que se encontra, o que lhe é relevante e próximo ao nível de competências que possui. Estes autores também questionam o modelo escolar de transmissão e avaliação uniforme para todos os alunos.

De forma geral, toda aprendizagem é ativa em determinada condição, pois demanda, do aprendiz e do docente, modos distintos de engajamento na aprendizagem e sua posterior aplicação. "A curiosidade, o que é diferente e se destaca no entorno, desperta a emoção. E, com a emoção, se abrem as janelas da atenção, foco necessário para a construção do conhecimento" (MORA, 2013, p. 66). Além de, salienta Oliveira (2013), que a evidência empírica e quase-empírica, a experimentação – por exemplo, a computacional e a demonstração probabilística, que adere em inferências indutivas e abdutivas colaboram para a assentimento de conhecimento matemático (informal) novo.

Determinadas adaptações às condições e a ideia de autonomia do educando levaram ao desenvolvimento de metodologias ativas de ensino que têm a finalidade de formar indivíduos autônomos, críticos e instituidores de julgamento. Moran (2018) destaca para que a aprendizagem mais profunda [ocorra] requer espaços de prática frequentes (aprender fazendo) e de ambientes ricos em oportunidades. Por isso, é importante o estímulo multissensorial e a valorização dos conhecimentos prévios dos estudantes para "ancorar" os novos conhecimentos (MORAN, 2018).

O ensino dito como tradicional, como Saviani (1994) descreve como o modelo pedagógico, que são aulas expositivas através de instrumentos que seguem os seguintes passos: prepara-se o material didático, apresenta-se planejamento, averígua-se a apropriação e a sua aplicação, para fixação do conteúdo. Este método criado na tentativa de padronizar e organizar a educação básica e o ensino-aprendizagem, é importante, mas convive com outros espaços e formas de aprender, por sua vez, mais compreensíveis, atraentes e adequadas às necessidades de cada um. Nesse método de ensino expositivo os alunos são apenas ouvintes. Não participam de maneira ativa das aulas que estão sendo ministradas (GUEDES, 2014).

Para Vidal (2002) uma das desvantagens do ensino tradicional é que o aluno passa apenas a decorar o que o professor faz e repassar nas avaliações para alcançar as notas se tornando um modelo engessado. O ensino convencional são métodos nas quais os professores são os únicos a transmitirem as informações, mas esse conceito só tinha embasamento quando as informações eram pouco acessíveis (ALMEIDA,2010). Hoje com a modernização, com o conhecimento na palma da mão, se pode estudar em todos os locais e em qualquer momento (VALENTE, 2014).

A aprendizagem ativa, com diversas técnicas e procedimentos, desenvolve a realização de determinadas tarefas alternadas e diversificadas, superando modelos automatizados, pouco eficientes. De acordo com Michael (2006) podemos descrever metodologias ativas como o processo em que os estudantes desenvolvem atividades que necessitam de reflexão de ideias e desenvolvimento da capacidade de usá-las. O destaque na palavra ativa necessita continuamente uma conexão com a aprendizagem reflexiva, para tornar real o que se está aprendendo com cada atividade. Ensinar e aprender tornam-se atraentes quando se "convertem em processos de pesquisa constantes, de questionamento, de criação, de experimentação, de reflexão e de compartilhamento crescentes, em áreas de conhecimento mais amplas e em níveis cada vez mais profundos" (MORAN, 2018,p.39).

Essa busca de determinada forma de proceder no ensino-aprendizagem, em sala de aula, na qual professor e aluno possam aprender independente dos materiais e tecnologias à disposição. O importante é instigar a capacidade criadora, se desenvolvendo como pesquisador, descobrindo o potencial, sendo uma atitude constante, uma evolução pujante. Assim, vemos que a metodologia abdutiva, como abordagem oriunda de uma reflexão intensa sobre a construção do conhecimento, provoca transformações verdadeiras com fortes decorrências epistêmicas.

Verifica-se ainda que a dinâmica escolar de algumas instituições em que os métodos, ditos tradicionais, necessitam evoluir para que todos tenham oportunidades reais de aprender e de empreender, em um espaço mais cordial e arrojado, desde os professores, até a direção escolar, em ambientes físicos e digitais.

Nesse âmbito, o papel do professor é auxiliar os alunos, para que eles mesmo consigam fazer, pensar, participar, questionar e serem críticos de suas ações e pensares. Estudos revelam que quando o professor fala menos, orienta mais e o aluno participa de forma ativa, a aprendizagem é mais expressiva (DOLAN & COLLINS, 2015). Esta teoria discorre com outros educadores contemporâneos, como Paulo Freire, em que nenhum indivíduo deve ser tratado como um recipiente vazio, e o conhecimento prévio deve ser considerado e explorado.

Nesse sentido, as metodologias ativas evidenciam a ação principal do aluno, ao seu envolvimento direto, participativo e reflexivo em todas as etapas do processo, conhecendo, delineando, criando, com orientação do professor e centralizadas na participação efetiva dos estudantes na construção do processo de aprendizagem. O papel principal do professor é o de orientador, tutor dos estudantes individualmente e em atividades em grupo, nas quais os alunos são sempre protagonistas.

Para George J. Mouly (1970,p.255), "a motivação envolve uma complexa interação das condições do indivíduo e do ambiente total em que se encontra", a seriedade de se respeitar os interesses do aluno e a possibilidade de tornar o ambiente de aprendizagem agradável, sendo indispensável que o aluno tome parte ativamente das propostas de atividade que o professor leva e que estas sejam envolvidas em metodologias que estimulem o aluno a participar da aula e que tenham sentido para ele.

A aprendizagem é mais relevante e satisfatória quando os alunos se sentem instigados, quando eles acham sentido nas atividades que o professor propõe quando consultamos suas pretensões profundas, quando se engajam em projetos para os quais trazem contribuições, quando há diálogo sobre as atividades e a forma de realizá-las. Para isso, é fundamental conhecê-los, perguntar, mapear o perfil de cada estudante. Além de conhecê-los, acolhê-los afetivamente, estabelecer pontes, aproximar-se do universo deles, de como eles enxergam o mundo, do que eles valorizam, partindo de onde eles estão para ajudá-los a ampliar sua percepção, a enxergar outros pontos de vista, a aceitar desafios criativos e empreendedores.

> A aprendizagem por projetos, por problemas, por design, construindo histórias, vivenciando jogos, interagindo com a cidade com o apoio de mediadores experientes, equilibrando as escolhas pessoais e as grupais é o caminho que comprovadamente traz melhores e mais profundos resultados em menor tempo na educação formal (MORAN, 2018,p.47).

Por mais que muitos métodos de ensino proporcionem o formato de um método ativo, algumas características são essenciais para identificar uma proposta adequada que esteja no ambiente das Metodologias Ativas, devendo "ser construtivista (aprendizagem significativa), ser colaborativa (em grupo), interdisciplinar (integrado), contextualizada (realidade), reflexiva (ética e valores), crítica, investigativa (aprender a aprender), humanista (social), motivadora (emoção), desafiadora" (CECY; OLIVEIRA; COSTA; 2013,p.25).

O sistema educacional baseado no que se refere a "transmissão do conteúdo" para os estudantes não está acompanhando com êxito as características apontadas, especialmente no ensino da Matemática que continua sendo, predominantemente, tradicional. D' Ambrósio (1991,p.1) afirma que "[...] há algo errado com a matemática que estamos ensinando. O conteúdo que tentamos passar adiante através dos sistemas escolares é obsoleto, desinteressante e inútil".

A problematização é uma possibilidade para sobrepor os desafios, temas contextualizados fazem mais significado para o estudante provocando melhor concepção diante do que se está sendo apresentado. A aprendizagem baseada em metodologias ativas apresenta potencial para aprimorar o aprendizado dos alunos, tomando que um de seus indicativos é trabalhar com problemas dentro da realidade dos estudantes e que valorizam a experiência de cada indivíduo contribuindo para sua autonomia e proatividade diante da construção do seu conhecimento.

Destacamos que existem distintos formatos de metodologias ativas que podem ser empregadas isoladamente, ou de forma integrada. Muitos educadores ao descobrirem os métodos utilizados, podem identificar o uso das metodologias ativas em suas aulas sem conhecimento que estavam aproveitando um método sistematizado.

É necessária uma adaptação das diversas técnicas, para que seja melhor utilizada, para uma abordagem importante, mas não exclusiva. Comparando a uma dieta alimentar, se todos os dias repetimos o mesmo prato, torna-se intolerável. A variedade e combinação dos ingredientes são extremamente importantes para o sucesso de um bom projeto alimentar, assim como no educacional. Sendo que diversos pratos podem ser preparados com os mesmos ingredientes que vamos experimentando e adequando, para agradar aos paladares.

2.1 Aprendizagem baseada em investigação

Uma das maneiras de aprendizagem ativa é por meio da aprendizagem baseada na investigação (ABIn), em que os alunos concebem as questões, desenvolvem as hipóteses sobre as respostas, escolhem os experimentos para testar as hipóteses, desenham as figuras, analisam os resultados e registram o relatório, individualmente ou em grupo, e utilizam métodos indutivos e dedutivos – interpretações coerentes e soluções possíveis (BONWELL; EISON, 1991).

Nesse ambiente, cabe ao professor orientar todo o trabalho em aspecto educativo, que envolve: examinar, ponderar situações e pontos de vista diversos, propor alternativas, advertir riscos, levando a aprender pela descoberta seguindo do simples para o complexo. Esse trabalho pode ser concretizado fora de uma sala de aula e revela que a aprendizagem em outros ambientes pode estimular o interesse dos alunos, desde crianças até em adultos, em envolver o procedimento pelo qual nós conferimos sentido ao mundo. Os desafios se bem esquematizados contribuem para abranger as competências esperadas, sejam intelectuais ou emocionais, particulares ou de convivência. Nestas etapas de formação, os alunos precisam do acompanhamento de profissionais experientes para ajudá-los a tornar conscientes alguns processos, a estabelecer conexões não percebidas, a superar etapas mais rapidamente, a confrontar novas possibilidades (MORAN, 2018). O ensino por investigação abrange uma abordagem que tem uma longa história na educação em ciência, em que promove o questionamento, a idealização, a acolhimento de evidências, os esclarecimentos embasados nas ênfases e no entrosamento. Deste modo, é determinante proporcionar aos alunos o envolvimento para a aprendizagem em que eles estejam dispostos a descobrir, a examinar os seus conceitos e pesquisar as circunstâncias que são indicadas.

2.2 Aprendizagem baseada em problemas

A aprendizagem baseada em problemas (ABProb), do inglês problem-based learning (PBL), surgiu na década de 1960, inicialmente aplicada em escolas de medicina, com o objetivo de estruturar o currículo do curso. A aprendizagem baseada em problemas é uma metodologia de ensino que recomenda a realização de atividades guiadas, com o objetivo de preparar os alunos para resolverem questões do mundo real. Essa metodologia faz parte das metodologias ativas, pois o protagonista na aula é o aluno.

Essa metodologia ajuda o estudante a entender o conteúdo na prática com mais participação, também com um foco mais específico, foco na aprendizagem baseada em problemas é a pesquisa de diversas causas possíveis para um problema (por exemplo: a inflamação de um joelho), estabelecendo uma relação equilibrada entre prática e teoria. A aprendizagem baseada em problemas se divide em três conceitos básicos: o entendimento do problema surge através da interação dos alunos; o conflito cognitivo deve existir, pois é ele que estimula a aprendizagem; o conhecimento ocorre com o reconhecimento e aceitação da interpretação de vários atores sobre o mesmo fenômeno. Vignochi *et al.* (2009) sugere que a aprendizagem baseada em problemas:

> [...] de forma mais ampla, propõe uma matriz não disciplinar ou transdisciplinar, organizada por temas, competências e problemas diferentes, em níveis de complexidade crescentes, que os alunos deverão compreender e equacionar com atividades individuais e em grupo. Cada um dos temas de estudo é transformado em um problema a ser discutido em um grupo tutorial que funciona como apoio para os estudos (VIGNOCHI; BENETTI; MACHADO; MANFROI, 2009,p.122)

A aprendizagem baseada em problemas (ABProb) surge como uma dessas estratégias de método inovadoras em que os estudantes trabalham com o objetivo de solucionar um problema real ou simulado a partir de um contexto. Os princípios da aprendizagem baseada em problemas incentivam o trabalho em equipe, a interação entre os envolvidos e simulam situações do cotidiano do aluno.

Trata-se, portanto, de um método de aprendizagem centrado no aluno, que deixa o papel de receptor passivo do conhecimento e assume o lugar de protagonista de seu próprio aprendizado por meio da pesquisa. A ABProb tem apresentado resultados positivos, observados por pesquisadores das mais diferentes áreas, os quais a utilizaram como método de aprendizagem, seja em cursos universitários, seja na educação básica (SOUZA; DOURADO, 2015).

A aprendizagem baseada em problemas tem como inspiração os preceitos da escola ativa, do método científico, de um ensino integrado e integrador dos conteúdos, dos ciclos de estudo e das diferentes áreas envolvidas, em que os alunos aprendem a aprender e preparam-se para resolver problemas relativos aos seus futuros ofícios, enquanto na aprendizagem baseada em projetos procura-se uma solução específica como exemplo, construir uma ponte. Na prática, possui ampla conexão e, por isso, é frequentemente entendida como sinônimo.

2.3 Aprendizagem baseada em projetos

Os projetos podem nos auxiliar a ampliar, além do conteúdo, capacidades sócio emocionais como criticidade, criatividade, colaboração e comunicação de forma propositada e organizada, além de arranjar o ensino mais instigante e aperfeiçoar estudantes que tenham verdadeiro entusiasmo por aprender.

A aprendizagem baseada em projetos (ABP) é uma metodologia de aprendizagem em que os alunos se deparam com tarefas e desafios para resolver um problema ou desenvolver um projeto que tenha relação com a sua vida externa à sala de aula. De acordo com Bacich e Holanda (2018), uma das partes mais difíceis é definir o que de fato é um projeto, e o que se observa na literatura especializada é a diferenciação entre projetos temáticos, como citados no primeiro parágrafo, e a aprendizagem baseada em projetos (ABP).

A ABP é uma metodologia ativa que utiliza projetos focalizados no ensino, associando, na maior parte das ocasiões, duas ou mais disciplinas. Nesta metodologia, os alunos podem lidar com questões interdisciplinares, tomar decisões e agir sozinhos e em equipe. Por meio destes projetos, lidam também com suas habilidades de criticidade e criatividade e a percepção de que existem diversos modos de se alcançar uma tarefa, competências tidas como necessárias para o momento contemporâneo.

O emprego de metodologias ativas em um formato associado à proposta pedagógica da instituição demanda uma análise no que se refere a determinados elementos principais do método: a ação do educador e dos alunos em um planejamento de como se segue a proposta pedagógica que se afasta do molde considerado como tradicional; a ação realizada pelo professor e pelos estudantes passa, portanto, por modificações em comparação ao modelo de ensino centrada na transmissão de conhecimentos do professor para os estudantes. As estratégias metodológicas a serem utilizadas no planejamento e na execução das aulas são recursos importantes ao estimularem a reflexão sobre questões essenciais, como o engajamento dos estudantes e as possibilidades de personalização na educação.

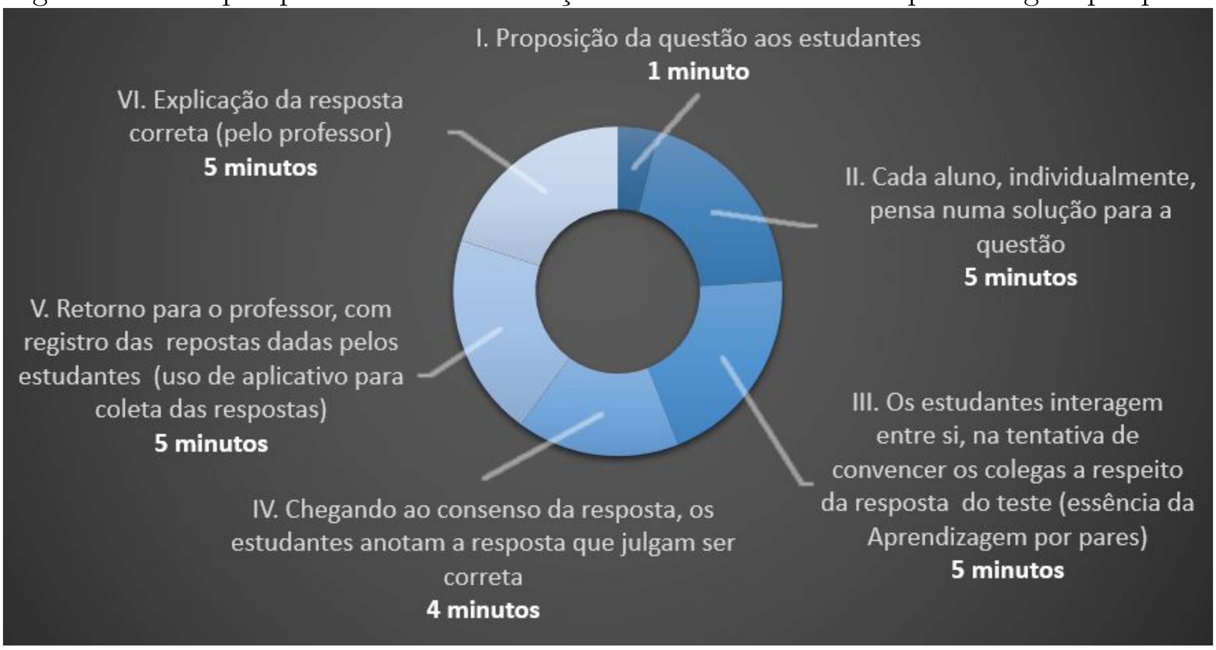
2.4 Aprendizagem entre pares (*Peer instruction*)

A aprendizagem por pares, traduzido de *peer instruction*, é uma estratégia que tende a minimizar ainda mais a intervenção do professor, pois quando os estudantes sentirem dificuldades no desenvolvimento da atividade de aprendizagem indicada devem discutir entre os pares, promovendo a troca de ideias e o desenvolvimento do conhecimento em coletividade.

Peer instruction foi a estratégia de ensino incrementada por um professor de física na universidade de Harvard, Eric Mazur, em 1991. Uma das características principais dessa metodologia é o engajamento que pode ser criado com os estudantes tendo em vista que o professor necessita desenvoltura caracterizada na aplicação de testes conceituais para promover o debate dos estudantes e conjuntamente cabe verificar a questão da compreensão acerca de determinados tópicos.

Realizada em sala com os alunos podendo até mesmo se utilizar de *software* ou aplicativos de *smartphones*, computador ou até mesmo *flashcards*. A aplicação dos testes conceituais segue a seguinte receita apontada por Mazur (2015), que, embora seja generalizada, orienta para o encaminhamento:

Figura 2.1: Tempo aproximado de realização de uma atividade na aprendizagem por pares



Fonte: Construído pelo autor

E a ocorrência de se empregar aplicativos torna a percepção de resultados em um intervalo de tempo muito menor, uma vez que:

> Quando se opta pelos aplicativos, no mesmo instante em que os acadêmicos respondem as questões, o software gera um gráfico que permite a visualização dos resultados obtidos, permitindo que o docente analise o nível de compreensão da turma em relação ao assunto que está sendo ensinado e possa dar um feedback imediato. (CAMARGO; DAROS, 2018,p.45)

Reunindo a promoção do acesso das novas tecnologias e o uso de recursos digitais em face do ensino, seja em sala de aula ou até em tarefas de casa, essa metodologia tem potencial de grande subsídio aos profissionais da educação em suas aulas, visto que podemos faze-la com que os estudantes possam utilizar seus smartphones em algo adequado para a aprendizagem. Com a utilização de aplicativos específicos para esse estilo de atividades (como o Google Forms, Plickers e Kahoot) uma vez que ao fim do procedimento de retorno dos estudantes, o professor obtém ter uma análise imediata referente sobre como os estudantes foram na atividade.

Assim na metodologia *peer instruction*, as aulas são organizadas através da discussão dos conceitos dos temas de acordo com Mazur (2015), enquanto as estratégias de resolução de problemas determina se como objetivo adicional, já que as aulas dedica-se no domínio e na aprendizagem dos assuntos, que avançam conforme o desempenho dos alunos. O desenvolvimento das habilidades para resolver problemas é deixado para as tarefas extraclasses e também exclusivamente em uma aula nas sessões de discussão, para Mazur (2015, p.23) observou que " uma melhor compreensão dos conceitos fundamentais levou a um melhor desempenho nos problemas convencionais". Ele evidenciado ao realizar testes pertinentes a resoluções de questões de atividades de verificações abrangendo formulações matemáticas.

2.5 Rotação por estações

As propostas didáticas sistematizadas no modelo de aprendizagem através de rotação por estações retratam a inter-relação com as tecnologias de informação e digitais, para aprofundar relações entre conceitos e propriedades específicas de cada assunto, estabelecer objeções, como também exercitar o interesse, a responsabilidade pelo aprendizado e a partilha no exercício dos estudantes, considerando o posicionamento dos demais estudantes e aprendendo com eles em ambientes ativos.

Na rotação por estações de aprendizagem os estudantes são divididos em pequenos grupos, que participam de determinadas estações de trabalho, sendo uma delas com acesso a um conteúdo online. A partir disso, os estudantes executam um rodízio por essas estações, cada uma com uma atividade que se comunica com o objetivo central da aula.

As estações precisam ser planejadas de forma que sejam independentes, sem exigência de algum pré-requisito ou exercício prévio, levando em consideração que cada grupo iniciará as atividades em uma estação diferente (SOUZA; ANDRADE, 2016). Ainda segundo Souza e Andrade (2016),

> os modelos de rotação permitem que os estudantes de um curso ou de uma disciplina, em um roteiro pré-estabelecido pelo professor, passem algum tempo imersos em diferentes estações de ensino, em que pelo menos uma tem que ser online. (SOUZA; ANDRADE, 2016, p.4)

E os outros podem incluir atividades, como instruções para pequenos grupos ou toda a classe, projetos em grupo, tutoria individual ou ainda tarefas escritas, ainda de acordo com Souza e Andrade (2016), Neste âmbito, a internet deve estar disponibilizada para a turma e/ou os aparelhos eletrônicos (televisões e fones de ouvidos) igualmente proporcionaram recursos pedagógicos importantes para uma aprendizagem ativa, como observado na figura 2.2.

Figura 2.2: Rotação por estações

Fonte: Adaptada de https://www.clipescola.com/rotacao-por-estacoes/. Acesso em 08 de fevereiro de 2022.

É interessante destacar que as atividades colaborativas no processo de desenvolvimento da autonomia do estudante são de extrema importância, uma vez que "a interação com pessoas que querem compartilhar o que sabem com os demais amplia as possibilidades de encontrar soluções inovadoras, de viabilizar projetos mais rapidamente" (MORAN, 2014,p.3).

Na rotação por estações de aprendizagem o professor necessita ocupar-se de diferentes ações que cercam o planejamento das estações fixas. Por exemplo, ele deve definir quantas, quais são e qual a quantidade de alunos em cada estação, de acordo com o número de discentes na classe; deve organizar o espaço, que pode ser a própria sala de aula; visto que a quantidade de estações de trabalho está ligada diretamente com o tamanho de uma turma de estudantes, esse tamanho pode influenciar positivamente ou negativamente a aula e o ideal é que cada grupo tenha um número menor de estudantes; deve delimitar quanto tempo é necessário para cada estação e qual o tempo limite para a mudança de estação de trabalho; assim tempo de permanência em cada estação dependerá das características da turma e dos objetivos propostos em cada estação. A avaliação nesta metodologia de ensino tem o objetivo de diagnosticar e analisar o desempenho individual e do grupo daquilo que foi ensinado nas estações. precisa também pensar nos recursos didáticos necessários para cada estação, de maneira a não faltar nenhum material durante o andamento das atividades.

As práticas para cada estação podem assumir diversos formatos, abrangendo tarefas de leitura, escrita, produção, discussão, exercícios, atividades em plataformas virtuais, atividades envolvendo aplicativos e recursos tecnológicos. Enfim, o professor tem a sua disposição diferentes ferramentas com as quais pode usar sua imaginação para criar as estações, de forma a auxiliar na aprendizagem do conteúdo proposto.

Normalmente, as atividades são colaborativas, podendo haver uma estação com o professor, uma em que se realizem atividades individualizadas e uma com computadores para o desenvolvimento da atividade *online*.

Dentre os benefícios mencionados por Souza e Andrade (2016), se sobressai o trabalho do professor com grupos menores, favorecendo a aprendizagem, a personalização, o diálogo, a escuta e a percepção das dificuldades dos estudantes. E, ao lado disso, o professor obtém a possibilidade de dar *feedback* a seus alunos de maneira mais ágil, levando-os a refletir, reinventar, criar, pensar e agir. Em seu artigo, destacam as escolas, tanto do Brasil como de outros países, que já utilizam essa metodologia, em razão dos benefícios que proporcionam ao processo de ensino-aprendizagem.

Nessas aulas sobre os modelos de rotação, os educandos recebem um roteiro, contendo informações de como podem se organizar e se movimentar nos ambientes de estudos desenvolvidos no modelo rotação por estações. As atividades planejadas nesses ambientes s o estudos que podem não depender de uma sequência rígida, podendo ser cumpridos conforme a organização dos educandos, uma vez que, segundo Bacich, Neto e de Melo Trevisani (2015, p.78), “o planejamento desse tipo de atividade não é sequencial [...] mas funciona de forma integrada para que, ao final da aula todos tenham tido a oportunidade de ter acesso aos mesmos conteúdos.”

O professor deverá organizar a sala com pontos específicos, com uma programação fixa, para que os estudantes possam fazer um rodízio nesses pontos, em um tempo que poderá ser estabelecido por ele ou até que o estudante cumpra o objetivo da aprendizagem da estação.

2.6 Sala de aula invertida

Para tentar garantir que todos os alunos aprendam o mínimo esperado, os professores explicam os conceitos básicos e, então, pedem que eles estudem e aprofundem os conceitos por meio de leituras e atividades.

Atualmente, após os estudantes desenvolverem o domínio básico de leitura e escrita nos primeiros anos do ensino fundamental, podemos inverter o processo: as informações básicas sobre um tema ou problema podem ser pesquisadas pelo aluno para iniciar o estudo do objeto e a partir dos conhecimentos precedentes, ir ampliando-os com referências dadas pelo professor e com as que os alunos se depara nas chances informativas disponibilizadas a ele.

Para não ficarem à margem dos avanços digitais, os educadores têm buscado conhecer, entender e apropriar-se dos recursos tecnológicos, utilizando-os como ferramentas pedagógicas (SILVA-SOUZA, 2013), a aula invertida é uma das formatações pedagógicas resultantes da utilização desses recursos. A aula invertida é uma tática intensificada e um modelo híbrido, que torna ótimo o percurso da aprendizagem do aluno e do exercício do professor.

A aula invertida é uma abordagem híbrida de ensino que tem suas origens em 1990, quando Eric Mazur, docente de Física na Universidade de Harvard, tomou a decisão de, ao invés de ministrar aulas expositivas, distribuir materiais para que os alunos estudassem e depois em suas salas de aula resolvessem questões em computadores e debatessem com ele e seus colegas sobre as dúvidas. Essa ação foi denominada de *peer instruction*, discutido na subseção 2.4 .Tais mudanças em suas aulas aconteceram devido ao fato de que, mesmo os discentes com desempenho positivo, ainda cometiam equívocos quanto a conceitos básicos de física newtoniana. O professor constatou que, com a leitura prévia do conteúdo e a resolução dos conceitos-testes, os estudantes compreenderam conhecimentos novos (ŠESTÁKOVÁ, 2013)

Desenvolvida em 2007 por Jonathan Bergmann e Aron Sams, professores de Química do ensino médio no Estado do Colorado, Estados Unidos, foram os primeiros divulgadores de determinados procedimentos da aula invertida, que inconformados com o método tradicional, de expor o máximo de conteúdo possível no tempo disponível esperando que os alunos o memorizassem, começaram a pensar formas diferentes de ensinar. Tal inquietude foi gerada, segundo Bergmann e Sams (2016), quando eles perceberam que mesmo os alunos que se saiam bem, estavam apenas reproduzindo mecanicamente a instrução recebida e que não haviam atingido uma aprendizagem significativa ou de relevante interesse a eles próprios. Especialmente empregando uso de vídeo como material para estudo que antecede a aula, com a conveniência de que o aluno pode assisti-lo no seu ritmo, número de vezes que necessitar, se necessário, e com o auxílio dos pais e/ou colegas. Em seguida, o professor pode orientar atividades de acordo com a situação de cada aluno e suas necessidades específicas.

Outro aspecto que salienta Bergmann e Sams (2016) é a dificuldade de lecionar para alunos que faltavam as aulas por conta de compromissos e eventos, como esporte e atuação política, surgiu a ideia de pré-gravar todas as aulas para que os alunos pudessem acessar antes da aula presencial e durante as aulas poderiam focar nas duvidas dos alunos e conceitos que os alunos não compreenderam.. Os vídeos passaram a ser tarefa de casa e os alunos deviam anotar as duvidas a cerca do vídeo e tambem o que eles aprenderam. Ou seja:

> Basicamente, o conceito de sala de aula invertida é o seguinte: o que tradicionalmente e feito em sala de aula, agora é executado em casa, e o que tradicionalmente e feito como trabalho de casa, agora e realizado em sala de aula.(BERGMANN; SAMS, 2016, p.11).

O efeito foi surpreendente, pois, assistindo aos vídeos, alunos e professores começaram a dialogar a respeito dos conteúdos das aulas, tiraram dúvidas e participaram ativamente. Os estudantes assistiam aos vídeos e depois iam à sala de aula para tirarem dúvidas, surgindo, de fato, a sala de aula invertida (BERGMANN; SAMS, 2016)

Descrita em 2009 pelo educador americano Salman Khan, matemático e engenheiro norte-americano, despretenciosamente, gravou vídeos curtos, bem diretos ao ponto, com a explicação narrada ao fundo e números aparecendo em uma lousa para ajudar uma prima com dificuldades em matemática. E virou celebridade, por ter suas aulas assistidas milhões de vezes por meio do site que criou: Khan Academy. Inserindo mais um componente à concepção de sala de aula invertida, criando vídeos explicativos e de curta duração, concernentes a diversas áreas, mas com maior ênfase nas ciências exatas, divulgando com bastante êxito essas aulas.

Reformular talvez nem seja a melhor palavra para o que Khan vem fazendo. O que ele tem feito mesmo é inverter a sala de aula, o que em inglês é chamado de *flip the classroom*. Isso mesmo: ele tem colocado a classe de cabeça para baixo. Em relação ao atual modelo de ensino, Khan (2013) critica a passividade, enquanto o mundo requer gente criativa e com alta capacidade inovadora.

analisa que enquanto o mundo requer gente criativa e com alta capacidade inovadora, o modelo vigente reforça a passividade.

O mundo de hoje necessita de uma força de trabalho composta de pessoas com interesse permanente em aprender, que sejam criativas, curiosas e autônomas, capazes de conceber e implementar novas ideias. Infelizmente, esse é o tipo de estudante que o modelo prussiano suprime ativamente.

Khan, que, ao contrário do que muitos temem, as videoaulas em casa não diminuem nem a necessidade de um bom professor nem a importância dos momentos presenciais de interação. O que ocorre, aliás, é uma valorização de ambos. "Os professores estão usando tecnologia para humanizar a sala de aula. Eles pegam uma situação fundamentalmente desumanizada e sem interação e a transformam num espaço de troca", afirmou.

O aluno poderá partilhar sua concepção de um determinado tema com os colegas e o professor, em níveis de influência mútua e crescente desenvolvimento, com participações em diversas possibilidades de discussões e sínteses em grupo, em momentos futuros que podem ser híbridos, presenciais e online, combinados.

Assim, a aula invertida tem sido realizada de uma forma simplificada como assistir vídeos antes e realizar atividades presenciais depois. Esse é um dos formatos de inversão. O aluno pode partir de pesquisas, projetos e produções para dar início em um assunto e, a seguir, aprofundar seu conhecimento e competências com atividades supervisionadas. Porém, a inversão tem um alcance maior quando é combinada com determinadas dimensões da personalização e/ou individualização, como a autonomia e a flexibilização.

Parte do processo de aprendizagem - conhecimento básico - fica a cargo do aluno com curadoria do professor, e pode ocorrer tanto antes do encontro coletivo em sala de aula (aula invertida) quanto nesse ambiente, mas com percursos particulares em ritmos adaptados a cada um ou até em atividades no pós aula.

Na visão de Bergmann e Sams (2016), a sala de aula invertida vai muito além da simples gravação de vídeo-aulas. Eles afirmam que, este modelo pode: aprimorar a interação entre os estudantes e o professor, promover um ambiente de aprendizagem onde os estudantes passam a ser responsáveis pelo seu próprio aprendizado, promover a aprendizagem construtivista, oferecer uma maneira de o conteúdo ficar permanentemente disponibilizado ao estudante, de modo que possa assisti-lo quantas vezes quiser.

A aprendizagem invertida se apoia em quatro pilares norteadores, indicados pelas iniciais FLIP (em inglês, inverter) como observado na figura 4.2.

- Ambiente Flexível (Flexibe environment);

  Espaços flexíveis que promovam a sequência de aprendizagem e avaliação de cada estudante. Na aprendizagem invertida, é feito um arranjo adequado à sala de aula,

Figura 2.3: Pilares da aprendizagem invertida organizados como o acrônimo FLIP.

Fonte: Construída pelo Autor

que visa disponibilizar aos estudantes uma atitude mais apropriada para determinada atividade, seja individual, seja em grupo.

- Cultura de aprendizagem (Learning culture);

  O estudante se envolve com os objetivos da aprendizagem, possibilitando a atuar ativamente em vez de apenas se esforçarem para cumprir as obrigações acadêmicas. De maneira diferente do modo tradicional, a aprendizagem invertida aloca o estudante como o personagem principal. A sala de aula é transformada em uma oportunidade para abordar de forma mais aprofundada os objetos de aprendizagem, de modo a aumentar o aprendizado.

- Conteúdo dirigido (Intentional Content);

  Os educadores orientam os principais conteúdos e ferramentas que deverão ser acessados pelos estudantes. Os educadores que empregam esse método costumam definir como utilizar a sala de aula invertida para desenvolver o entendimento tanto dos processos quanto dos conceitos do melhor formato. Eles buscam determinar o que é explorado no espaço físico e quais materiais devem ser cultivados pelos estudantes na hora que estiverem no seu local de estudo particular. Cada conteúdo tem um nível de aprendizado intencional que são específicos para determinado tipo de assunto. Dessa forma, ao ser seguido um modelo centrado nos estudantes e em metodologias de ensino ativas, o tempo de aprendizado em sala de aula é aplicado ao máximo.

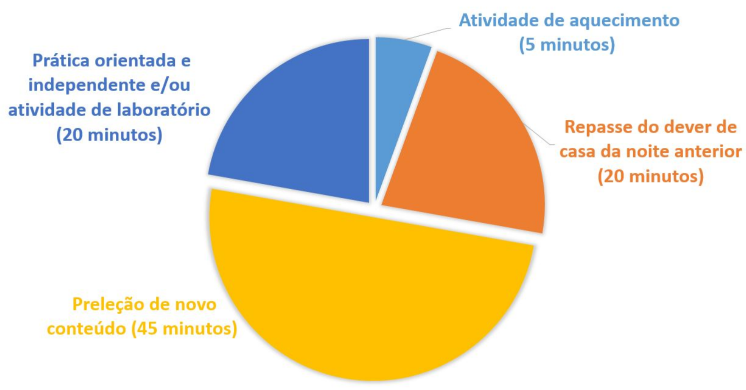
- Educador profissional (Professional educator);

  Os educadores são exigentes quanto à prática das atividades e realizar retorno constantemente. Na aprendizagem invertida, o papel do educador profissional é de extrema importância. Ele analisa o estudante e fornece um retorno da informação relevante em momentos apropriados para cada tipo de situação. Além de se atualizar constantemente, o educador profissional deve estar aberto a críticas construtivas e elogios. Para que o método de ensino-aprendizagem se torne cada vez mais eficaz e mesmo com o protagonismo do estudante, o educador continua sendo uma parte indispensável para que a sala de aula invertida funcione da melhor maneira imaginável.

Proporcionando a disponibilidade de eleger onde e quando aprender, flexibilizando a sequência de estudo e avaliação dessa prática de cada estudante, de forma que o ponto de atenção do ensino e aprendizagem seja centrado no estudante, que se envolve a responsabilidade de sua aquisição de conhecimento, e permitindo ao professor orientar suas atividades para propósitos e objetivos mais conforme apareça a demanda. Também é possível abandonar de imaginar circunstâncias, dado que com apoio da tecnologia, torna-se a empregar simulações em situações características.

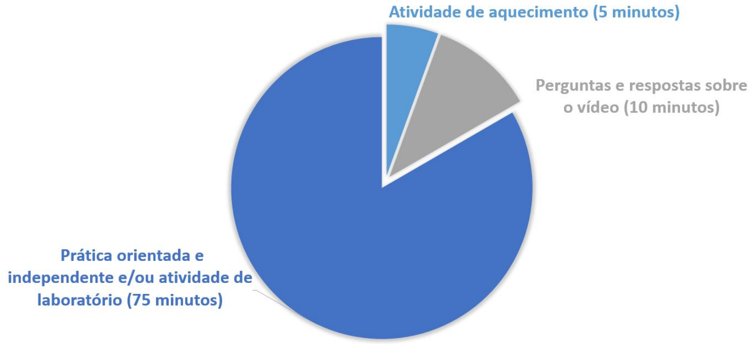
Até aqui entendemos os fundamentos da sala de aula invertida, mas há mais do que inverter o que é feito em casa e o que é feito em sala de aula, vejamos a rotina de uma aula ou módulo com o uso da metodologia: Inicia-se a aula com discussão sobre o vídeo ou material disponibilizado pelo professor com certa antecedência, normalmente entre uma a duas semanas, as perguntas e respostas são orientadas no início do período letivo, quando os estudantes são treinados a assistir os vídeos de modo ideal para causar o resultado pretendido, incentivando a eliminar as distrações e sugerindo "pausar" ou "retroceder" o professor, ou seja, usar o botão de "pausa". É orientado aos estudantes a anotação de pontos importantes e dúvidas que surgirem, para que resumam o que foi aprendido, para que levem para a sala questões pertinentes e evitam controvérsias e equívocos comuns. Neste ponto da aula, pode-se avaliar a qualidade das abordagens do vídeo para eventuais melhorias. Depois do tira-dúvidas passa-se ás tarefas do dia para a sala de aula, como o tempo é maior em relação as aulas tradicionais, pode-se realizar uma quantidade maior de tarefas e diversificadas, como atividades práticas mais extensas ou resolução de problemas.

Figura 2.4: Divisão do tempo em uma aula tradicional em relação às atividades



Fonte: Construída pelo Autor

Figura 2.5: Divisão do tempo em uma aula invertida em relação às atividades



Fonte: Construída pelo Autor

Com o recurso dos vídeos, o controle das aulas está nas mãos dos estudantes, conforme analisam Bergmann e Sams (2016):

> Quando damos aos alunos a capacidade de "pausar o professor", eles têm a chance de dirigir a exposição em seu próprio ritmo. Recomendamos, em especial, aos alunos mais vagarosos que usem sem inibição o botão de retrocesso, para que ouçam nossa explicação mais uma vez e a absorvam profundamente. Se ainda assim não compreenderem, trabalharemos com eles individualmente ou em pequenos grupos na sala de aula (BERGMANN; SAMS, 2016, p.11).

No entanto, este método não pode ser encarado como uma substituição do professor por vídeos, muito menos como um modelo que promove o isolamento dos estudantes. Esse modelo de metodologia ativa se justifica levando em consideração que o básico da educação hoje está disponível de forma online e gratuita.

Para isso também a inversão dos processos vem colaborar, pois ao utilizar vídeo-aulas o professor pode mesclar vídeos de sua autoria com outros vídeos de outros profissionais que estão disponíveis na rede sem custo adicional, e no momento presencial com os alunos tem o tempo necessário para individualizar a atenção.

No caso da produção de vídeos autorais, de acordo com Moreira (2018) tem-se no mercado uma infinidade de equipamentos de baixo custo e também *softwares* livres que podem colaborar nesse intuito, porém é preciso uma atenção especial quanto a qualidade dos vídeos e também o tempo de duração de cada um. A duração dos vídeos deve ser adequada à faixa etária escolar dos estudantes não ultrapassando mais que um ou dois minutos a série em que estuda, por exemplo, para alunos do sétimo ano os vídeos devem durar no máximo nove minutos, assim como não mais que quinze minutos para o ensino médio e superior.

Ao mesclar a realidade física com a realidade virtual, numa metodologia híbrida, mesclam-se momentos presenciais com momentos online de forma a aproximar-se mais da nova realidade em que vivem os alunos, gerando assim uma grande convergência, onde há um integração de tecnologias, provocando-as aos estudantes fazerem um estudo prévio, estudo esse online, bem como uma avaliação online desse estudo, criando assim uma educação inovadora e humanística e assim usufruir de todo o potencial que os estudantes tem naturalmente à disposição. Sabe-se que os estudantes tem sempre um grande potencial, porém na maioria dos casos o professor tem dificuldades para aproveitar esse potencial com eficiência. Nesse contexto, Cortelazzo et. al. (2019) relatam que:

> O foco deve estar completamente centrado nas interações que ocorrem nos momentos presenciais, ou seja, na sala de aula! É aí que o professor deve ter a sensibilidade para compreender as deficiências ou os gaps na aprendizagem dos estudantes e reforçar, complementar, motivar e ligar conteúdos que os sensibilizem a ponto de compreenderem completamente aquele tema (CORTELAZZO et. al.; 2019,p.81).

Para inverter a sala de aula é necessário sintonizar os alunos em argumentações e resolução de problemas, analisando, desenvolvendo e aproveitando o que foi aprendido on-line com atividades bem delineadas e promovendo retorno imediatamente. Para isso, necessita de uma preparação em competências mais abrangentes, somente o conhecimento do conteúdo não basta, o entrosamento ao grupo e com cada aluno, bem como se faz necessário o planejamento, o acompanhamento e a avaliação das atividades diversificadas de relativa importância.

Pesquisas sobre formas diferentes de aula invertida mostram que quando se começa com atividades, projetos e experimentação, o avanço é maior do que começando por materiais prontos (textos, vídeos) (FONSECA; GOMES, 2013).

Mostra-se possível associar outras metodologias ativas, o que se suplementa um diferencial da sala invertida, a aprendizagem por projetos, a junção do currículo com o trabalho docente, a vantagem de se aplicar conceitos clássicos com tecnologias e metodologias modernas, visto que trazer tecnologia pra sala de aula não é somente agregar uma parafernalha tecnológica, mas sim fazer com que essa tecnologia se torne um diferencial positivo, que traga resultados, para isso uma mudança na maneira do fazer educação é necessária.

Em suma, para que a sala de aula invertida obtenha êxito, professores e estudantes tem necessidade de se organizar em três momentos distintos:

- Antes da aula - é o momento de recordar e compreender, é onde o professor prepara o conteúdo e o compartilha com seus estudantes por meio da tecnologia previamente selecionada. Os alunos, por sua vez, acessam esse conteúdo e realizam as possíveis atividades ou preparação de experimentos e construção de modelos que possam estar incluídos no material disponibilizado pelo professor.

- Durante a aula - tempo de aplicar, analisar, avaliar e criar. O professor esclarece as dúvidas já consolidadas e os alunos realizam atividades práticas de forma individual ou em grupos, mas sempre com apoio e orientação de seu mestre.

- Depois da aula - é a junção de tudo, momento de recordar, compreender, aplicar, analisar e criar, onde o professor avalia e decide o próximo tópico, seja de um novo conteúdo ou ainda de repetição do mesmo, mas abordado de forma diferente. Ao aluno cabe acessar o conteúdo, criando assim um ciclo de aprendizagem.

Assim que iniciamos a pesquisar sobre uma estratégia metodológica ativa percebemos que o ponto essencial está em concentrar-se nos alunos, de modo a propiciar que eles avancem por conta própria e que o professor seja promotor de situações que os motivem e que possibilitem a aprendizagem, além de ser um apoio quando eles sentirem dificuldades no processo de aprendizagem.

Desde o início da missão em lecionar, mantive a percepção, sempre fascinado e interligado a propostas que de alguma maneira sejam capazes de "incrementar" quando o assunto era o ensino de matemática. Partindo da elaboração de jogos, de materiais didáticos, de dinâmicas, entre outras atividades, tudo que tivesse alguma relação com a tecnologia, tornava-se satisfatório ao ser desenvolvido e aplicado. Aproveitando essa aptidão pela inovação. Visto que a metodologia ativa sala de aula invertida mantém forte a incitação para a modernização do ensino, pois conta com características inovadoras, com alto potencial de despertar o interesse do estudante e favorecer o seu desenvolvimento.

Percebe-se que é preciso ter uma nova dimensão de ensino com o crescimento exponencial de uso de tecnologia em todos os campos e tendo em vista a quantidade de informações contidas na internet na atualidade. Dessa maneira, como professor, acredito que seja necessário ter o entendimento que torne apto a trabalhar com a inclusão dessas novas tecnologias de informação e comunicação no processo de ensino-aprendizagem, e a metodologia sala de aula invertida é uma possibilidade incrível para os professores em sala de aula, em que se podem reduzir o tempo de exposição de conteúdo em sala de aula e ao mesmo tempo focar nas dificuldades dos alunos e também personalizar os estudos desses alunos baseando-se no contato de aluno e professor que acaba sendo maior do que no modelo tradicional.

Pesquisando, encontramos benefícios que a metodologia da sala de aula invertida proporciona aos estudantes: maior autonomia do estudante, maior interesse nas aulas, melhoria na aprendizagem, personalização da aprendizagem, otimização do tempo, maior flexibilidade nas aulas e desenvolvimento de habilidades. Considera-se que, entre todos, o benefício que mais se destaca da metodologia sala de aula invertida é pela a liberdade do estudante na aquisição de conhecimento. O estudante demonstra que seja componente do processo ao se perceber também responsável pela própria aprendizagem, sendo que esta autonomia provoca um maior comprometimento do aluno com o que está sendo estudado. Os conteúdo de cada objeto de aprendizagem passam a ser mais coerente com a realidade. Para que isso seja possível, o estudante deve ter acesso antecipado ao conteúdo e interagir com os demais colegas para realizar projetos e resolver problemas. O intuito é fazer com que o aluno tenha uma postura mais ativa, além de aumentar o interesse dele pelo tema abordado.

2.6.1 Avaliação - Sala de aula invertida

Sabe-se que um modelo adequado de avaliação deve mensurar com especificidade o nível de assimilação do tema estudado pelos estudantes. Discutiremos dois aspectos: se os estudantes aprenderam os objetivos do curso e se não, como proceder para alcançar o nível satisfatório.

A forma de organizar a avaliação que sobrepõe a maior parte das instituições de ensino, em que a busca pela qualidade e segurança dos testes, e ainda acumula tarefas volumosas para o professor, ainda mais pela quantidade de estudantes por turma. Bergmann e Sams (2016) acredita que a implementação do modelo de aprendizagem invertida, incide na utilização de ferramentas disponíveis em meio digital, para fornecer um retorno aos estudantes, completando a compreensão do estudo.

Ao interagir com os estudantes o professor pode perceber o nível de aprendizagem e corrigir os desacertos, e enquanto desenvolvem novas concepções, dependendo do avanço da aprendizagem e da quantidade de conhecimento para atingir determinado objetivo, os estudantes necessitam de diversos níveis de assistência. Pode-se fornecer essa ajuda, mas é imperioso que enfrentem as próprias dificuldades, para que absorva mais profundamente, mas sabe-se que a ajuda será precisa para determinados estudantes.

No caso de estudantes incapazes de apresentar o quanto estão em direção aos objetivos, necessita criar planos de intervenção personalizados, para que repitam o processo e encarreguem-se de reter de conhecimentos ainda não arraigados. O reestabelecimento da aprendizagem pode diversificar de acordo com cada estudante. Provavelmente a recomendação que revise o material ou assista novamente os vídeos ou, ainda em casos bem específicos que o vejam pela primeira vez. Ou a indicação de livros ou *websites* para uma reanalise de conceitos mal compreendidos.

No entanto, salienta Bergmann e Sams (2016), que um dos componentes do bom ensino é acompanhar os estudantes na jornada da aprendizagem, ou seja, interagir e dialogar, para garantir que compreendam os objetivos da aprendizagem, em que a estratégia indicada nesse processo é o questionamento. Dedicar momentos de descoberta de como cada estudante pensa e aprende, simplesmente conversando e tentando conhece-los. Este método apresenta-se altamente subjetivo, mas de acorodo com Bergmann e Sams (2016) funciona. Conversar com os estudantes, conhece-los como pessoas admiráveis e propiciar a aprendizagem.

> O professor deve fazer as perguntas certas a cada aluno. Ao conhecermos bem nossos alunos e até que ponto eles compreendem cada objetivo de aprendizagem, ajustamos nossas perguntas à compreensão de cada um. Cada aluno tem diferente nível de compreensão e nosso principal objetivo é o crescimento (BERGMANN; SAM, 2016, p.117).

Acredita-se que os estudantes precisam de avaliações de alto nível, para demonstrarem o nível de aprendizagem, assim nas avaliações somativas devem apresentar um nível mínimo de proficiência. Considerando os objetivos de aprendizagem, busca-se aqueles imprescindíveis ao elaborar o teste, que sejam essenciais para o sucesso nos conteúdos subsequentes, oferecendo condições de recuperação para os estudantes que não alcançarem o mínimo, também tentando ensiná-los a responsabilizar-se pela própria aprendizagem.

Sequer existe uma única forma de inverter a sala de aula, assim como tampouco uma única maneira de avaliar e uma única maneira de oferecer *feedback* aos estudantes, assim o professor deve escolher o melhor para os estudantes e realizar de acordo com os parâmetros do contexto educacional ao qual está inserido. Todos os contextos de avaliação em escolas de todo o mundo são diferentes, e todos devem operar conforme os parâmetros do ambiente em que leciona.

Como o propósito do referido trabalho é apresentar uma proposta de ensino de otimização, bem como motivar o aluno tornar seu aprendizado mais ativo, apresentou-se neste capítulo alguns aspectos sobre Metodologias Ativas, com destaque para a metodologia Sala de Aula Invertida e segue-se no capitulo adiante critérios da teoria de máximos e mínimos, um recorte sobre aplicações, além da fundamentação teórica do campo de conhecimento do Cálculo.

3 Otimização - história e conceitos

As soluções que são obtidas como máximos ou mínimos, referem-se a otimização - uma área da matemática que soluciona problemas que envolvem funções matemáticas como, por exemplo, de área, volume, entre outros. O principal fundamento da otimização é encontrar uma solução que seja a mais eficiente possível, dadas condições conhecidas à priori. Assim, a estratégia a ser seguida é transformar certa situação em um fenômeno matemático que pode ser estudado em termos de uma função para a qual pode-se determinar os valores de máximo e mínimo que esta função atinge em um certo conjunto conhecido. Problemas deste tipo podem ser encontrados em aplicações envolvendo diversas áreas do conhecimento. Segundo Stewart (2013, p.294) "Na solução destes problemas práticos, o maior desafio está frequentemente em converter o problema em um problema de otimização matemática, determinando a função que deve ser maximizada ou minimizada", ou seja, obter um modelo matemático para o problema.

Em problemas de engenharia, de administração, de logística, de transporte, de economia, de biologia ou de outras ciências, quando se consegue construir modelos matemáticos bastante representativos dos respectivos sistemas em estudo, é possível aplicar as técnicas matemáticas de otimização para maximizar ou minimizar uma função previamente definida como índice de desempenho, ou índice de performance, visando encontrar uma "solução ótima"do problema. Um ponto de máximo ou de mínimo é denominado apenas de extremante de uma função.

Determinado problema de maximização e minimização ou problema de otimização é aquele onde se procura determinar os valores extremos de uma função, isto é, o maior ou o menor valor que uma função pode assumir em um dado intervalo. Problemas de otimização são comuns em nossa vida diária e aparecem quando procuramos determinar o nível de produção mais econômico de uma fábrica, o ponto da órbita de um cometa mais próximo da terra, a velocidade mínima necessária para que um foguete escape da atração gravitacional da terra, etc. Problemas desta natureza constituem aplicações importantes dos conceitos estudados no Cálculo Diferencial e Integral (CDI), parte do objeto de estudo deste trabalho, os conceitos e propriedades do estudo das derivadas constituem importantes ferramentas para modelagem de diversos problemas. A diferenciação numérica, que descreve algoritmos para calcular a derivada de uma função matemática, se originou de problemas relativos ao traçado de tangentes a curvas e de questões que buscavam determinar máximos e mínimos de funções, na Grécia antiga, porém a primeira manifestação realmente clara do método diferencial data de 1629 (EVES, 2011).

O estudo da otimização teve início através de métodos clássicos e a necessidade de resolver problemas de otimização fez surgir o cálculo diferencial e o cálculo de variações. Observa-se ser um dos instrumentos matemáticos com melhor emprego nas demais áreas das ciências. Em termos gerais, o principal fundamento do Cálculo Diferencial e Integral (CDI) é o estudo sobre os conceitos e propriedades dos limites, derivadas e integrais de funções de uma ou de várias variáveis. Pode-se deparar com aplicações de derivadas e integrais, por exemplo, no cálculo de áreas de regiões limitadas e no cálculo do volume de sólidos geométricos limitados por funções. Além disso, pode-se utilizar resultados do estudo das derivadas para resolver problemas de maximização e minimização em estudos avançados de Matemática. Stewart (2013) destaca a importância das funções para o Cálculo, seja por palavras, gráficos, tabelas ou expressão analítica da relação entre as variáveis independentes e dependentes.

3.1 Um pouco de história

Participamos da partilha com as civilizações da antiguidade múltiplos itens do conhecimento científico. Especificamente, o caráter verídico matemático que já era conhecido antigamente. Mas, não da mesma maneira que já se sabe hoje. Diferentes culturas incorporam um mesmo conhecimento de formas diferentes. Aos egípcios, por exemplo, era íntimo o conteúdo do teorema de Pitágoras. Por anos, seus excelentes engenheiros devem tê-lo aproveitado. Como um resultado numérico somente, sem nunca terem lhe conferido um enfoque matemático no sentido da escola pitagórica. Pode-se reconhecer que essa matemática com o aspecto que ela tem hoje, surgiu por meados do século XVII. (BENNATON, 2017)

De acordo com Bennaton (2017) em se tratando de datas é uma boa alternativa, pois coincide com o nascimento da ciência moderna, onde viveram vários destaques no contexto matemático, tais como: Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716), Isaac Newton (1643 - 1727), Christiaan Huygens(1629 -1695), Johann Bernoulli (1667 - 1748), Jakob Bernoulli (1655 - 1705), René Descartes (1596 - 1650), Marin Mersenne(1588 - 1648), Blaise Pascal(1623 - 1662), Pierre de Fermat (1601 - 1665), Evangelista Torricelli (1608 - 1647),Bonaventura Cavalieri (1598 - 1647), Girard Desargues (1591 - 1661), Edmond Halley (1656 - 1742) e muitos outros.

A sequência do tempo pode ser compreendida: Nicolau Copérnico (1473 - 1543) nasceu no final do XV e viveu até meados do século seguinte. Giordano Bruno (1548 - 1600) e Ticho Brahe (1546 - 1601) viveram na segunda metade do XVI. Galileu Galilei (1546 - 1642) e Johannes Kepler (1571 - 1630) nasceram em meados do século XVI e adentraram o XVII e concebem as primeiras providências para se obter a matemática como conhecemos contemporaneamente. Estes iniciaram o período conhecido como "revolução copernicana", onde ocorreram profundas transformações na concepção de universo e na proposição de um sistema planetário heliocêntrico (KUHN, 1957).

Já no século XVIII, temos que considerar Leonhard Euler (1707 - 1783) , Joseph-Louis Lagrange (1736 - 1813) e, para completar, Augustin-Louis Cauchy (1789 - 1857). Para o que nos interessa, que é começar a investigar um pouco a história do Cálculo matemático de máximos e mínimos. É certo que tem relação com as noções de derivada e integral, mas não como as conhecemos hoje. (BENNATON, 2017)

O Cálculo nasceu, de formato independente, por volta do século XVI, e no século XVII trouxe grandes avanços para a matemática, principalmente pelas novas áreas de pesquisa abertas. No século XVII estes conceitos estavam presos ao traçado de tangentes e à avaliação de áreas. Porém, a maior realização matemática do período foi a descoberta simultânea e de maneira independente do cálculo diferencial e integral, ou cálculo infinitesimal, na segunda metade do século, pelo inglês Isaac Newton (1643-1727) e pelo alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) (BOYER; MERZBACH, 2019, p.289). Ao longo do tempo o Cálculo se tornou ferramenta fundamental para o desenvolvimento da Matemática em geral. Como era de se esperar, o Cálculo não se afastou da tradição geométrica consagrada, por exemplo, por Arquimedes de Siracusa.

Apesar de Euler e Lagrange empenharem no sentido de "desgeometrizar"a matemática criada pelos seus antecessores. Entre inúmeros outros feitos, Euler é o responsável pelo conceito de função matemática e Lagrange, com o seu "*Mécanique Analytique*", reconstruiu a mecânica newtoniana em bases analíticas, desprendida de figuras geométricas. Especificamente, um e depois o outro plantaram e fortaleceram as raízes do cálculo variacional. (BENNATON, 2017)

Atualmente, estamos acostumados a definir derivadas e integrais utilizando os conceitos e resultados de limites de funções. Mas, antes de Cauchy, não era bem assim. Foi ele quem organizou nesta estrutura. Livrou o cálculo dos "infinitésimos"introduzindo os conceitos de limite e de continuidade. Deu fundamentos às idéias de derivada e integral. Estabeleceu a análise matemática com o formato, a autonomia e a severidade contemporâneas.

No século XVII, segundo Bennaton (2017), tem-se um personagem simbólico: Pierre de Fermat (1607-1665) não era um matemático profissional. De temperamento tímido, publicou apenas um artigo em vida. Dos seus feitos, há apenas anotações esparsas, cartas e comentários de admiradores. Consta que era basco, tinha uma inclinação por línguas e literatura, estudou leis e se tornou uma espécie de procurador da justiça. Por tédio, vocação ou apenas para se entreter, resolveu recriar, seguindo a moda da época, uma obra perdida de Apolônio. Era o "Plane Loci", sobre lugares geométricos. Talvez por conta disso, sentiu-se estimulado a representar curvas por meio de relações algébricas entre as coordenadas. Inventou assim a geometria cartesiana ou analítica, por volta de 1630.

Esta geometria é "cartesiana"em honra a Descartes que a divulgou em 1637. O que é justo, pois, ao que tudo indica não se sabia do trabalho de Fermat até a sua publicação póstuma. Além disso, a notação matemática de Fermat era terrível. Acostumara-se a usar o método de Viète (criador da primeira sistematização de símbolos algébricos, no final do XVI) mais perto da linguagem corrente do que do simbolismo que temos hoje. Contudo, a geometria "cartesiana"de Fermat é considerada mais genérica e mais acurada do que a de Descartes. De posse de representações algébricas para curvas e superfícies, Fermat resolveu aventurar-se na resolução de uma outra classe de problemas clássicos. O traçado de tangentes. Em decorrência, debruçou-se na investigação de pontos extremos de curvas. Nesta área, praticamente inexplorada até então, criou um método próprio. Um método de obtenção de máximos e mínimos que funcionava mais ou menos assim:

- de posse da expressão algébrica da curva (digamos, $f(x) = ax^2 + bx + c$) avalia-se a mesma levemente deslocada (ou seja, $f(x + E)$;
- expande-se a expressão, separando-se os termos no deslocamento (ou seja, $aE^2 + 2axE + bE$);
- os deslocamentos são muito pequenos, considera-se apenas os termos mais relevantes, ou seja, $(2ax + b)E$;
- investiga-se quando a expressão resultante é nula para qualquer valor do deslocamento (ou seja, em $x = -b/2a$);
- neste ponto a curva é "quase constante"e a tangente a ela deve ser horizontal. Assim sendo, pode se tratar de um ponto extremo.

Kepler (1571–1630) havia observado que os incrementos de uma função se tornam infinitesimais nas proximidades de um ponto de máximo ou de mínimo locais. Porém, foi o matemático francês Pierre de Fermat (1601–1665) quem primeiramente manifestou com clareza o método diferencial. Considerando a ideia de Kepler, Fermat estabeleceu um procedimento para determinar os pontos de máximo ou de mínimo:

Se $f(x)$ tem um máximo ou mínimo local em x e se ε é muito pequeno, então o valor de $f(x - \varepsilon) = f(x) = f(x + \varepsilon)$ e, para tornar essa expressão correta, impor que ε

assuma o valor zero. As raízes da equação resultante darão, então, os valores de x para os quais $f(x)$ assume um máximo ou mínimo (EVES, 2004).

Esse método é conhecido como método de Fermat. O método é incompleto, pois ignora que a condição de a derivada de $f(x)$ se anular não é suficiente para que se tenha um máximo ou mínimo local e também não fazia distinção entre valor máximo e valor mínimo. Outra descoberta de Fermat foi um procedimento geral para determinar a tangente por um ponto de uma curva cuja equação cartesiana é dada. O método consistia em achar a subtangente relativa ao ponto de tangência sobre o eixo x e a intersecção da tangente com esse eixo (EVES, 2004).

Fermat usava um procedimento de cálculo algébrico idêntico ao que temos hoje. Mas o utilizava como uma espécie de algoritmo, sem o amparo dos conceitos de função, derivada ou diferencial. Neste sentido, foi um pioneiro e, mais de cem anos depois, Laplace reconheceu isto. Creditou a Fermat a descoberta do cálculo diferencial.

Portanto, diversos matemáticos, em várias épocas distintas, contribuíram para o desenvolvimento de métodos de otimização:

- Newton, Lagrange e Cauchy: a existência dos métodos de otimização pode ser atribuída a eles;

- Newton e Leibnitz: contribuíram com o desenvolvimento dos métodos de cálculo diferencial de otimização;

- Bernoulli, Euler, Lagrange e Weierstrass: deram o fundamento para o cálculo de variações;

- Newton e Cauchy: os problemas de minimização irrestrita foram formulados por meio de seus métodos clássicos;

- Lagrange: os problemas de otimização restritiva começaram pela adição de multiplicadores, esse método ficou conhecido pelo seu nome.

Consideradas contribuições valiosas, foram, no entanto, pequenas para o avanço nas técnicas de otimização e muito pouco progresso foi obtido até mais ou menos a metade do século XX. Com o avanço de novas tecnologias e desenvolvimento de programas e equipamentos computacionais cada vez mais eficientes, houve também um grande avanço na teoria e na prática da otimização, com pesquisas de novos métodos e técnicas (MOREIRA, 2015).

3.2 Aplicações tradicionais e inovadoras

Em matemática, o termo otimização refere-se ao estudo de problemas em que se busca minimizar ou maximizar uma função através da escolha sistemática dos valores de variáveis reais ou inteiras dentro de um conjunto viável.

Uma área da Matemática, destinada à resolução de situações-problema, com muitas aplicações práticas, é a otimização. Os problemas que procuram minimizar ou maximizar uma função numérica de uma ou mais variáveis, as quais estão sujeitas a determinadas restrições, podem ser chamados de problemas de otimização. Tais situações podem ser bastante interessantes aos alunos, estimulando neles a curiosidade e o interesse em resolvê-las, podendo servir como ponto de partida para a explicação de determinados conteúdos ou, até mesmo, para que os conteúdos já apresentados passem a ter significado prático para os estudantes.

Nas próximas seções apresentaremos, sem a pretenção de esgotar nenhuma lista, uma sequência de problemas interessantes que envolvem otimização.

3.2.1 Abelhas e seções hexagonais

Uma das obras iniciais a abordar o tema, com mais sagacidade, foi realizado por Pappus de Alexandria, matemático grego (século IV d.C.) em sua obra intitulada *Mathematicae Collectiones (Coleção Matemática)* ou ainda *Synagoge* (320 d. C.), composta por oito livros (ou volumes).

Figura 3.1: Página de rosto da obra *Mathematicae collectiones de Pappus.*


PAPPI
ALEXANDRINI
MATHEMATICAE
Collectiones.
A FEDERICO
COMMANDINO
VRBINATE
In Latinum Conuersæ, & Commentarijs
Illustratæ.
VENETIIS.
Apud Franciscum de Franciscis Senensem.
M. D. LXXXIX.

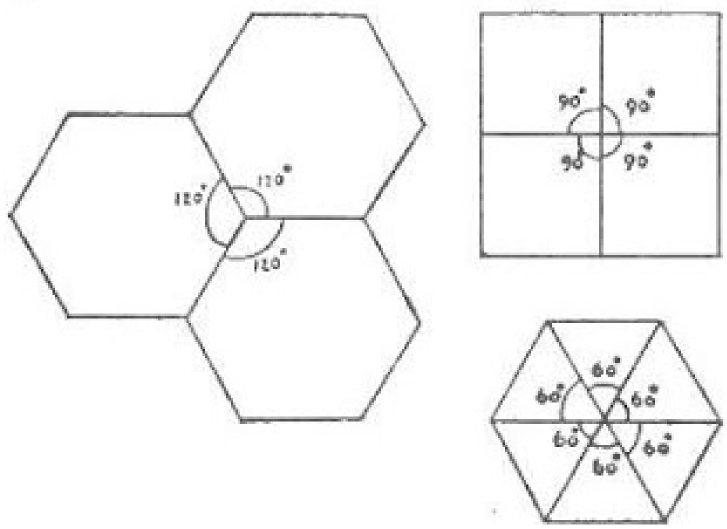
Fonte: https://citacoes.in/autores/pappus-de-alexandria/. Acesso em 10 de fevereiro de 2022.

Eves (2004) relata que no livro V ele discorreu sobre isoperimetria no plano e no espaço e fez uma curiosa observação a respeito da sagacidade das abelhas. Após ter provado que de dois polígonos regulares de mesmo perímetro, o que tem maior número de lados tem maior área, Papus concluiu que as abelhas provavam algum entendimento matemático, ao construírem suas células como prismas com secções hexagonais, em vez de quadradas ou triangulares, que são os únicos modos que se pode fechar o espaço com prismas regulares e iguais sem deixar interstícios, ou seja, são os únicos polígonos regulares que tornam possível a pavimentação de um plano:

- com prismas quadrangulares iguais (ângulo de 90º);
- com prismas triangulares regulares iguais (ângulo de 60º)
- com prismas hexagonais regulares iguais (ângulo de 120º).

Dentre estes polígonos, com perímetro fixo, o hexágono é o que maximiza a área. Desse modo a opção teria sido para maximizar o volume do mel armazenado para uma mesma quantidade de cera utilizada (VASCONCELOS, 2000).

Figura 3.2: As abelhas preferiram o prisma hexagonal por ser o mais econômico.



Fonte: http://abelhasgeometras.blogspot.com. Acesso em 10 de fevereiro de 2022.

3.2.2 Isoperimetria

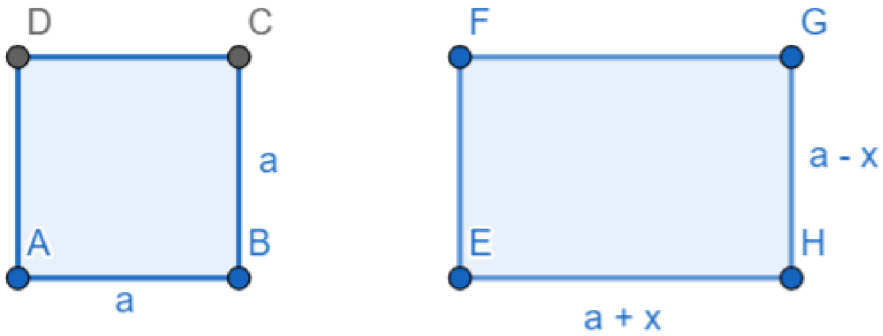
Como o próprio nome diz, problemas isoperimétricos de otimização consistem em calcular máximos ou mínimos de funções relacionadas a polígonos que possuem perímetro fixo. Por exemplo, pode ser provado que de todos os retângulos de um dado perímetro, o quadrado é o que tem a área máxima, e são os primeiros problemas envolvendo máximos e mínimos que são encontrados na geometria euclidiana e envolvem perímetros, áreas e volumes.

Segundo o historiador Dirk Jan Struik (1894-2000), o primeiro problema de máximo que chegou até nós encontra-se no Livro VI de Os Elementos de Euclides (330-275 a.C.), proposição 27, e Problemas isoperimétricos, como o referido acima, foram muito importantes no desenvolvimento da matemática, tendo inclusive uma referência na literatura romana (HERMES; PEREIRA, 2013).

Outro ponto importante da obra de Pappus, já destacada na subseção 2.2.1 , que nos interessa, é a questão da isoperimetria. Em um comentário sobre a obra de Zenodoro (c.200 a.C.) sobre figuras isoperimétricas, que se perdeu, Papus aborda o seguinte problema: "Dentre todos os retângulos de mesmo perímetro, qual o de maior área? A solução de Zenodoro consiste em considerar um quadrado de lado a, perímetro $4a$ e uma família de retângulos de perímetro também igual a $4a$. Os lados de tais retângulos, portanto, são $(a + x)$ e $(a - x)$ para que o perímetro se mantenha constante, veja Figura 3.3.

Fazendo x variar, são obtidas todas as alternativas possíveis.

Figura 3.3: Representação de demonstração de Zenodoro.



Fonte: Construída pelo Autor.

As áreas dos retângulos são $(a - x)(a + x) = a^2 - x^2$. Isso mostra que, exceto para $x = 0$, a área de qualquer dos retângulos é sempre menor do que a área do quadrado, a^2, que é máxima.

3.2.3 Lenda de Dido

É um problema isoperimétrico, porém, devido a sua importância histórica, apresentamos ele em uma subseção separada.

A Lenda de Dido faz parte do Cântico I da "Eneida", obra em que de Virgílio (70-19 a.C.) narra a epopéia de Enéas de Tróia (VIRGÍLIO, 2005). Dido (ou Elisa) era uma princesa fenícia do século IX a.C. da cidade de Tiro, às margens do Mediterrâneo, localizada onde hoje é o Líbano. Seu irmão, o rei Pigmalião, assassinou seu marido, o grande sacerdote Arquebas, para subtrair-lhe seus tesouros. Temendo sua própria morte, Dido então fugiu em um navio com um grande número de seguidores dispostos a fundar uma nova cidade, “Qart Hadash”(Cartago). No lugar escolhido para ser Cartago (norte da África, também às margens do Mediterrâneo, onde hoje é a Tunísia) tentou comprar terras do rei Jarbas, para que pudessem se estabelecer. O acordo feito com o rei foi que só teria em terras o que pudesse abranger com a pele de um boi, ver representação na Figura 3.4. Dido e seu grupo decidiram então cortar a pele em tiras tão finas quanto possível, emendar todas e englobar num semicírculo um terreno beirando o mar. Neste caso, a princesa Dido cortou a pele em pequenas tiras formando larga corda (entre 1000 a 2000 metros) e a dispôs de maneira que cobrisse a maior parte de terreno possível.

Figura 3.4: Princesa Dido e o corte da pele do boi.

Fonte:
https://concursobrasileirodeenredos.blogspot.com/2017/03/enredo-1105-lenda-de-dido.html.
Acesso em 03 de dezembro de 2021.

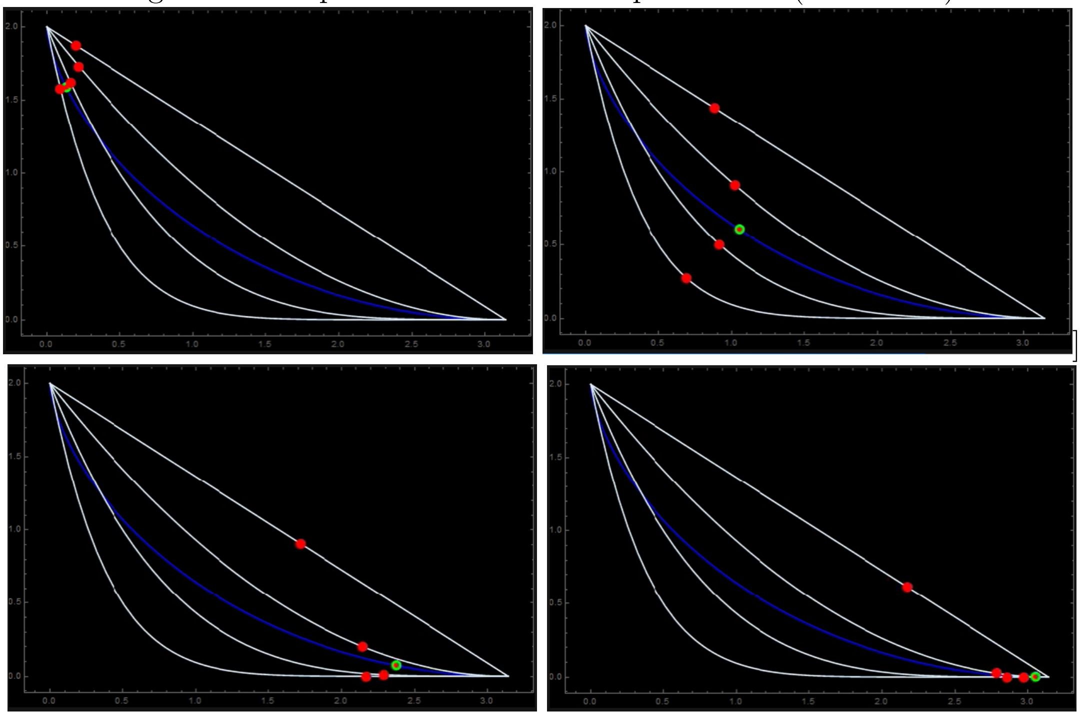
3.2.4 Braquistócrona

Trata-se de um problema extremamente interessante que também envolve otimização. O Problema é denominado Braquistócrona, do grego brakhisto (o mais curto) e chronos (tempo). O problema consiste em encontrar qual a trajetória que uma partícula deve percorrer com o menor tempo possível sendo conhecidos os pontos de saída e chegada, com velocidade inicial nula, sem atrito e sujeita apenas a ação da gravidade.

O problema foi publicado inicialmente na *Acta Eruditorum* de Leipzig, de Junho de 1696. Johann Bernoulli anunciava possuir uma solução e desafiava os cientistas para apresentarem suas soluções para o problema. Em 1697 Leibniz anuncia ter obtido uma solução. Ainda em 1697 foram apresentadas cinco soluções: a do próprio Johann, a do seu irmão Jacob, a de Leibniz, a de L’Hôpital e uma sob anonimato (que seria a de Isaac Newton, como este veio a reconhecer mais tarde).(BUSTILLOS; SASSINE, 2011)

Ao contrário do que nossa intuição possa sugerir, o percurso mais rápido de uma partícula ao longo de uma calha que una dois pontos a diferentes alturas não é uma linha reta. Esse menor tempo é obtido ao percorrer uma linha em forma de ciclóide, como pode ser observado na Figura 3.5 .

Figura 3.5: Experimento sobre a Braquistocróna (curva azul).



Fonte: https://gfycat.com/biodegradableflowery americankestrel. Acesso em 10 de fevereiro de 2022.

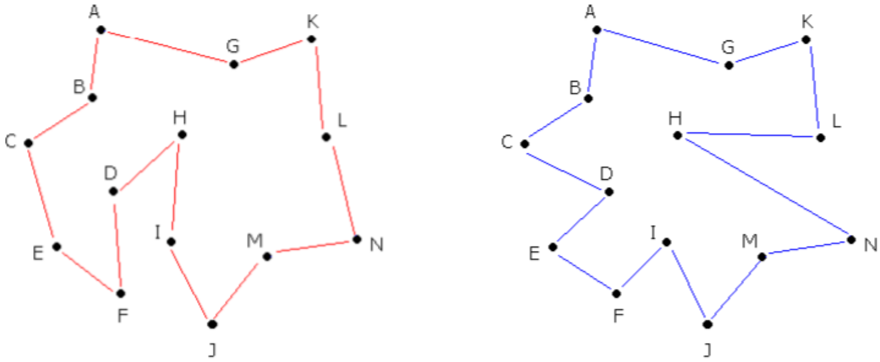
3.2.5 Problema do caixeiro viajante

Suponha que um caixeiro viajante tenha de visitar n cidades diferentes, iniciando e encerrando sua viagem na primeira cidade. Suponha, também, que não importa a ordem com que as cidades são visitadas e que de cada uma delas pode-se ir diretamente a qualquer outra, como visto na Figura 3.6. O problema do caixeiro viajante consiste em descobrir a rota que torna mínima a distância percorrida na viagem total.

O problema do caixeiro é um clássico exemplo de problema de otimização combinatória. A primeira coisa que podemos pensar para resolver esse tipo de problema é reduzí-lo a um problema de enumeração: achamos todas as rotas possíveis e, usando um computador, calculamos o comprimento de cada uma delas e então vemos qual a menor. (É claro que se acharmos todas as rotas estaremos contando-as, daí podermos dizer que estamos reduzindo o problema de otimização a um de enumeração).

A possibilidade de haver um método polinomial para resolver o problema do caixeiro viajante é um dos grandes problemas em aberto da Matemática na medida em

Figura 3.6: Qual o melhor trajeto possível para ligar as cidades?



Fonte:
http://www2.peq.coppe.ufrj.br/Pessoal/Professores/Arge/COQ897/Naturais/aulas_piloto/aula1.pdf.
Acesso em 10 de fevereiro de 2022.

que Steven Cook (1971) e Richard Karp (1972) mostraram que uma grande quantidade de problemas importantes (como é o caso de muitos tipos de problemas de otimização combinatória, o caso do problema da decifragem de senhas criptografadas com processos modernos) podem ser reduzidos, em tempo polinomial, ao problema do caixeiro.

Por conseguinte, se descobrirmos como resolver o problema do caixeiro em tempo polinomial ficaremos sendo capazes de resolver, também em tempo polinomial, uma grande quantidade de outros problemas matemáticos importantes; por outro lado, se um dia alguém provar que é impossível resolver o problema do caixeiro em tempo polinomial no número de cidades, também se terá estabelecido que uma grande quantidade de problemas importantes não tem solução prática. Costuma-se resumir essas propriedades do problema do caixeiro mostrando que ele pertence à categoria dos problemas não-determinísticos polinomiais completos (SILVEIRA, 2000).

3.2.6 Embalagens

Esses problemas são muito importantes para a indústria em geral. Deseja-se, por exemplo, encontrar as dimensões de uma embalagem com quantidade de material fixa (área da embalagem) que maximiza o volume ou encontrar as dimensões de uma embalagem com volume fixo que minimiza a quantidade de material gasto, ou seja, a área. Em geral, muitas empresas buscam embalagens com maior capacidade de armazenamento e baixo custo.

O que se faz é encontrar uma função que modele o que se deseja maximizar ou minimizar e impor a restrição do volume fixo ou da área fixa, ou até mesmo outras restrições de ordens operacionais ou de orçamento, por exemplo.

Após encontrar um modelo e impor as restrições, utiliza-se um algoritmo, que pode ser baseado no uso de derivadas ou não, para obter os pontos ótimos para o problema.

3.2.7 Combustível do avião

Ao abastecer o carro em um posto de combustível, normalmente pode-se "completar´´ o tanque de combustível. Em aeronaves é de outro modo, antes de iniciar o abastecimento da aeronave, diversos cálculos precisam ser feitos para determinar a quantidade necessária. A quantidade de combustível pode alterar a performance do avião e o custo, além de trazer algumas limitações operacionais. Os aviões decolam de tanque cheio apenas quando realizam voos em rotas longas, próximas ao limite máximo da autonomia daquele modelo.

Na grande maioria dos casos, o abastecimento é feito apenas de acordo com as características específicas daquele voo, que levam em conta rota, peso a bordo (carga e passageiros) e condições meteorológicas e de tráfego aéreo. Nas companhias aéreas, esse cálculo é feito por um profissional denominado de Despachante Operacional de Voo.

Os aviões a jato precisam decolar com combustível suficiente para cumprir a rota prevista, um reserva de mais 10% do total da viagem e mais o necessário para chegar a um aeroporto de alternativa e o suficiente para outros 30 minutos de voo. A regra evita que um avião fique sem combustível em voo mesmo quando enfrenta problemas climáticos, congestionamento no tráfego aéreo ou quando o aeroporto de destino está fechado (CASAGRANDE, 2020).

De acordo com Casagrande (2020) há três fatores principais que fazem com que os aviões não decolem com combustível além do exigido, são o peso gasta combustível, performance e limitação de peso.

O peso influencia no consumo de combustível. Quanto mais pesado, maior o consumo. Estima-se que a cada 1.000 quilos de combustível desnecessário haja um consumo adicional de 3%. É como se o avião consumisse 30 quilos só para transportar esses 1.000 quilos a mais. A quantidade de combustível utilizada por um avião é calculada em quilos, e não em litros. Isso ocorre porque o volume muda de acordo com a temperatura, que varia de acordo com a altitude do voo.

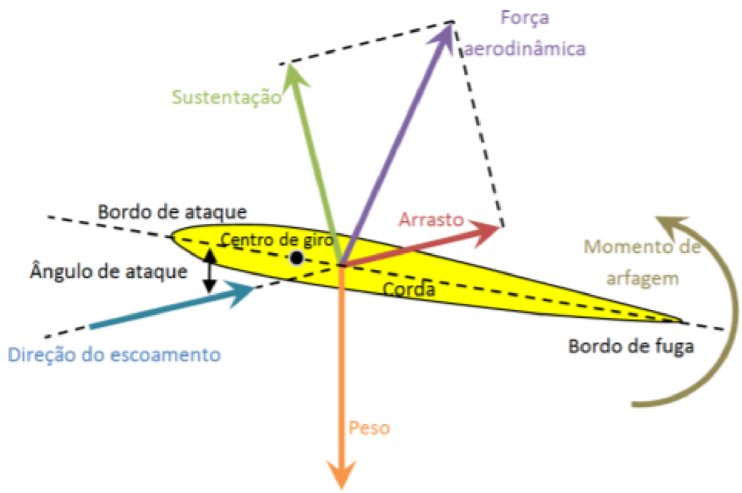
O peso do combustível também pode alterar a performance do avião. Quanto mais pesado, maior a velocidade necessária para decolagem. Isso exige que o avião percorra um comprimento maior de pista para sair do chão. Na hora do pouso, o avião mais pesado demora mais para parar e isto poderia impedir certas aeronaves de realizarem pousos em pistas curtas.

Além dessas questões, as aeronaves contam com um peso máximo de decolagem. O excesso de combustível poderia limitar a quantidade de passageiros ou de carga a ser transportada, justamente o que gera receita para as companhias aéreas.

3.2.8 Aerofólio

Um aerofólio é uma secção bidimensional projetada para provocar variação na direção da velocidade de um fluido. A reação do fluido sobre o aerofólio (ou simplesmente fólio) devido a variação na quantidade de movimento é uma força (ver Lei de Newton), que será decomposta em ângulos normais a direção de seu movimento. Assim como todo corpo imerso em um escoamento está sujeito a forças como mostra a Figura 3.7 do aerofólio em perfil.

Figura 3.7: Diagrama de um aerofólio em perfil sujeito a escoamento.



Fonte: https://repositorio.unb.br/bitstream/10482/9388/1/2011_ThiagoFernandesOliveira.pdf. Acesso em 12 de fevereiro de 2022.

Em aeronaves, o aerofólio é o perfil da asa, definido como uma superfície aerodinâmica que produz reações úteis ao vôo. O uso do aerofólio está nas secções da asa e nas empenagens (profundor e leme). A força de sustentação, arrasto e momento são altamente dependentes do ângulo de ataque. Para grandes ângulos de ataque o aerofólio se submete ao fenômeno do Estol (Stall).

Aerodinamicamente, em carros de passeio, o aerofólio não possui vantagem nenhuma pois estes são projetados e limitados para faixas de velocidade onde não haja influência da força de sustentação na estabilidade do veículo, ou seja, a relação força de sustentação/peso é muito baixa. Portanto sua aplicação é restrita a benefícios estéticos, dando um ar de esportividade e agressividade.

Porém, em carros de alta performance, como na Fórmula 1, a asa "invertida" montada sobre os eixos dianteiro e traseiro geram força de sustentação, mas o sentido desta força gerada é o de empurrar as rodas para o chão. Desta forma, adicionando-se carga aos eixos do carro, a aderência entre pneu e asfalto aumenta. Isto ocorre pois esta aderência é função do coeficiente de atrito entre as partes (mantido constante) e a força normal resultante (aumentada com o efeito do aerofólio). A vantagem da utilização do aerofólio quando comparado a adição de massa é que, pela razão óbvia, diminui-se a relação peso/potência. É percebido esta pressão em circuitos, principalmente em curvas onde que age não obtendo "perda de traseira"se estivesse sem o mesmo (CERBERUS, 2010).

Assim, a posição do aerofólio e o ângulo em que ele atua devem ser calculados com o objetivo de otimizar a aderência do veículo a superfície ou para otimizar a resistência com o fluido, meio onde o objeto está inserido.

3.3 Máximos e mínimos em funções quadráticas

Apesar do público alvo desta dissertação serem alunos e professores do ensino superior em Cálculo, entendemos que os conceitos de otimização devem ser trabalhados também no Ensino Médio. Principalmente porque é um conteúdo interdisciplinar, ou seja, que relaciona conteúdos de várias disciplinas. Os assuntos abordados no ensino de máximos e mínimos auxiliam no desenvolvimento de um raciocínio lógico-dedutivo do discente, portanto, imprescindível na formação do estudante.

Neste contexto, apresentamos uma seção sobre o conteúdo de máximos e mínimos abordado no Ensino Médio. Como os alunos não possuem o conhecimento sobre derivadas de funções e também não estudam métodos numéricos, os problemas de otimização são restritos àqueles que podem ser modelados por funções quadráticas. Porém, isso não diminui a importância do tema e o professor ainda tem a possibilidade de trabalhar com a modelagem de problemas envolvendo outras áreas do saber, principalmente, física, biologia e economia.

De acordo com as Matrizes de Referência para a avaliação SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Brasileira), o aluno do ensino médio deve desenvolver competências e habilidades que o auxiliem, no caso específico da disciplina de Matemática, no desenvolvimento de seu pensamento lógico-matemático (BRASIL, 2018). O Descritor 25, que aponta a habilidade em resolver problemas que envolvam os pontos de máximo ou de mínimo no gráfico de uma função polinomial do 2º grau, explicita a exigência em se trabalhar com conceitos de pontos ótimos. Ainda em Brasil (2018), da atual Base Nacional Comum Curricular (BNCC), é apresentada a competência específica 4, que visa compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.).

Também conjuntamente a BNCC, a competência específica 5 aponta o sobre investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. Observa-se também a habilidade de código EM13MAT503 que assinala investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo Áreas de Superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.

Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem, podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem, sendo potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências essenciais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional (BRASIL, 2018).

Neste contexto, a Otimização se constitui como uma fonte riquíssima de situações onde o professor pode desenvolver os conteúdos e habilidades preconizados na BNCC. Uma abordagem bastante interessante para os alunos do Ensino Médio, para se trabalhar com otimização, é utilizar a desigualdade entre as médias aritmética, geométrica e harmônica. As desigualdades nos fornecem estimativas de máximo e mínimo para alguns problemas bem particulares, onde suas funções são constituídas pelas fórmulas que envolvem essas médias (FONTE, 2013; SILVA, 2019). Porém, como o conteúdo que envolve essas médias pertence ao currículo da matemática financeira, na maioria das vezes os professores não relacionam as desigualdades entre as médias ao cálculo de máximos ou mínimos de funções.

Conforme abordado em livros didáticos do Ensino Médio, uma função quadrática é definida da seguinte forma:

Definição 1. *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se quadrática se existem números reais a, b e c, com $a \neq 0$, tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

É possível mostrar que o gráfico de uma função quadrática é uma cônica chamada "parábola", que tem concavidade para baixo quando o coeficiente $a < 0$ e para cima se $a > 0$.

Considerando a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, alguns livros apresentam a seguinte sequência de cálculos, onde é possível determinar o ponto de máximo, se $a < 0$, mínimo, se $a > 0$, e também das possíveis raízes da função:

Reescrevendo a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ de outra forma, temos:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right).$$

Completando quadrados no interior dos parênteses, obtemos:

$$f(x) = a\left[\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

O trinômio no interior dos parênteses acima formam um quadrado perfeito. Após uma simples manipulação algébrica, chegamos a expressão para $f(x)$:

$$f(x) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right], \tag{3.1}$$

onde: $\Delta = b^2 - 4ac$.

Essa última expressão é denominada forma canônica da função quadrática. Observando a forma canônica, podemos notar que a, $\frac{b}{2a}$, $\frac{\Delta}{4a^2}$ são constantes e apenas x é variável.

Se $a > 0$, então o valor mínimo de $f(x)$ ocorre quando temos o menor valor para

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}.$$

ou seja, quando a expressão $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ se anula. Assim, o valor mínimo de f (se $a > 0$), é obtido quando $x = -\frac{b}{2a}$, que é o valor da abscissa x do vértice da parábola.

O valor mínimo de f é

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(0-\frac{\Delta}{4a^2}\right) = -\frac{\Delta}{4a},$$

que é o valor da ordenada y do vértice da parábola. De maneira inteiramente análoga, podemos mostrar que o ponto de máximo (quando $a < 0$) é obtido para $x = -\frac{b}{2a}$ e, neste caso, $-\frac{\Delta}{4a}$ é o valor máximo de f.

Assim, o vértice da parábola, independentemente se $a > 0$ ou $a < 0$, é o seguinte ponto no plano cartesiano:

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right).$$

Podemos, a partir de uma análise da equação 3.1, obter a fórmula para as raízes da função quadrática, conhecida como fórmula de Báskara. Note que $f(x) = 0$ se, e somente se,

$$\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0.$$

Ou seja, se

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}.$$

Extraindo a raíz quadrada de ambos os lados da equação anterior, e realizando algumas manipulações algébricas, obtemos a seguinte expressão para os valores das raízes x da função quadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Observe que se $\Delta > 0$ então a função f tem 2 raízes, se $\Delta = 0$ então f tem uma única raíz (com multipçicidade 2) e, se $\Delta < 0$, não há raíz real para a função f.

Ao concluírem o Ensino Médio, os alunos devem, portanto, resolver os problemas que envolvam cálculos dos valores máximos e mínimos de funções quadráticas por meio da utilização das fórmulas deduzidas acima para o vértice da parábola.

De acordo com D'Ambrósio e Machado (2014) uma estratégia muito favorável é a via da problematização, da formulação e do equacionamento de problemas, em que um caso especialmente importante para a criação e a exploração de centros de interesse é o dos problemas que envolvem situações de otimização de recursos em diferentes contextos, ou seja, problemas de máximos ou de mínimos, consiste em procurar, em cada problema, não apenas uma solução, mas sim a melhor solução, para minimizar os custos ou maximizar os retornos, por exemplo, pode constituir um atrativo a mais na busca de contextualização dos conteúdos estudados.

Exemplo - Um chacareiro quer construir um galinheiro retangular utilizando uma tela de 100 m de comprimento. Sabe-se que o galinheiro utilizará um muro já construído como um dos lados. Deseja-se obter as dimensões desse galinheiro para que sua área seja máxima.

Solução: Suponhamos que as medidas do galinheiro retangular sejam x e y. Foi fornecido o tamanho da tela, ou seja, é conhecido o perímetro do galinheiro. Portanto, $2x+y = 100$, pois um dos lados do perímetro será o muro. Queremos maximizar a área $A = xy$ do galinheiro.

Como sabemos que $2x + y = 100$, podemos isolar a variável y em função de x e substituir na fórmula da área, obtendo assim uma função apenas da variável x. Portanto, como $y = 100 - 2x$, obtemos:

$$A(x) = x(100 - 2x) = 100x - 2x^2.$$

Sabemos que o ponto de máximo ($a = -2 < 0$) é fornecido pela fórmula $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{100}{2(-2)} = 25$. Sabendo que $x = 25$ m, obtem-se que $y = 50$ m, ou seja, o galinheiro terá o seguinte formato retangular 50mx25m, onde o lado do muro também medirá 50 m.

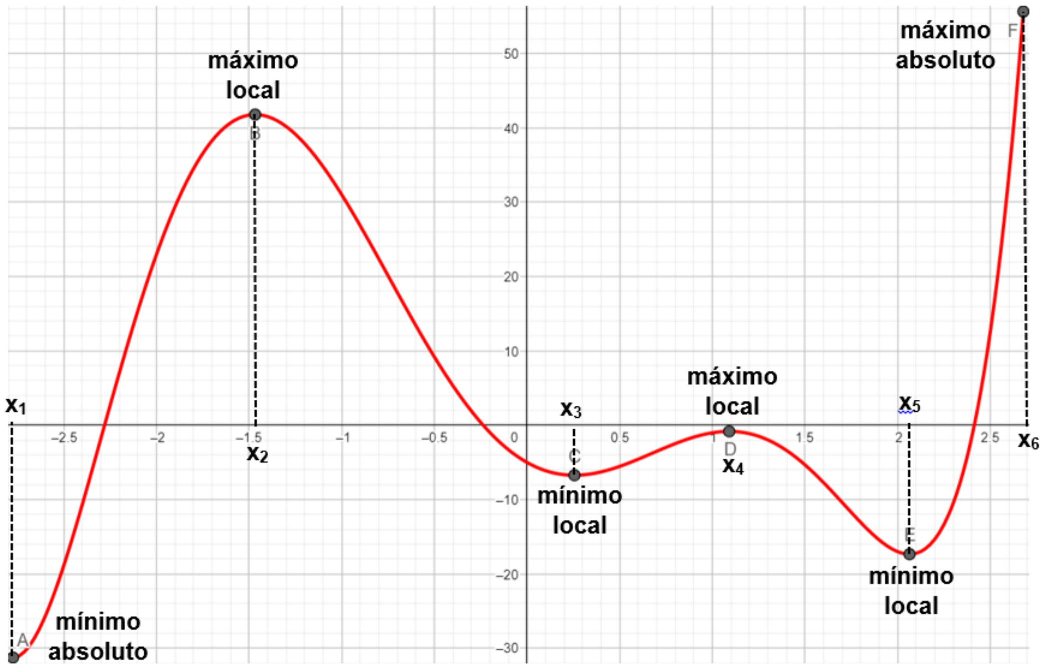
3.4 Máximos e mínimos para funções com uma única variável

Nesta seção queremos apresentar a teoria sobre otimização de funções de uma única variável real. Apresentaremos as definições sobre pontos ótimos locais e globais, como também os critérios de primeira e segunda ordem para obter os ótimos (máximo ou mínimo) locais de uma função.

3.4.1 Elementos da teoria da otimização

Considere o gráfico 3.8, apresentado a seguir:

Figura 3.8: Gráfico da função $f(x) = x^6 + x^5 - 11x^4 - 3x^3 + 30x^2 - 14x - 5$ com domínio $x_1 \leqslant x \leqslant x_6$.



Fonte: Construído pelo Autor.

Note que existe um pequeno intervalo, contendo o ponto x_3 , onde o valor de $f(x_3)$ é o menor valor que f assume nesse intervalo. Algo parecido ocorre nos pontos x_1 e x_5. Observe que para x_2, x_4 e x_6 é possível encontrar intervalos, cada um dos quais contendo esses pontos, tais que os valores de $f(x_2)$, $f(x_4)$ e $f(x_6)$ são os maiores valores que a função assume nesses intervalos. Isto nos motiva a formalizar o que são pontos de máximo e mínimo de uma função, conforme definições a seguir:

Definição 2. *Uma função tem máximo relativo (ou local) em um ponto c de seu domínio, se existe intervalo aberto I, tal que $c \in I$ e $f(x) \leqslant f(c)$ para todo $x \in I$. Neste caso,* *dizemos que $f(c)$ é valor máximo local de f.*

Definição 3. *Uma função tem mínimo relativo (ou local) em um ponto c de seu domínio, se existe intervalo aberto I, tal que $c \in I$ e $f(x) \geqslant f(c)$ para todo $x \in I$. Neste caso, dizemos que $f(c)$ é valor mínimo local de f.*

Podemos nos perguntar se existe um ponto do domínio de f para o qual o valor da função não seja inferior a nenhum outro ponto do domínio ou, analogamente, se existe um ponto do domínio de f para o valor da função, nesse ponto, não seja superior a nenhum outro ponto do domínio. Esses pontos, caso existam, são chamados, respectivamente de, máximo e mínimo global (ou absoluto) da função f. A seguir apresentamos a definição formal dos pontos ótimos globais ou absolutos.

Definição 4. *Uma função $f : D \to \mathbb{R}$ tem máximo absoluto (ou global) em c se $f(x) \leqslant f(c)$ para todo x no domínio D de f. Neste caso, o valor $f(c)$ é chamado valor máximo de f em D.*

Definição 5. *Uma função $f : D \to \mathbb{R}$ tem mínimo absoluto (ou global) em c se $f(x) \geqslant f(c)$ para todo x no domínio D de f. Neste caso, o valor $f(c)$ é chamado valor mínimo de f em D.*

Todo ponto ótimo global é necessariamente local, a recíproca é falsa. Note que uma função pode ter vários pontos ótimos locais e globais. Mesmo que haja mais de um ponto de máximo (mínimo) global, o valor máximo (mínimo) global é único. Dada uma função, não necessariamente ela deve possuir pontos ótimos locais ou globais. Porém, se uma função for contínua num intervalo fechado e limitado, então ela tem que ter máximo e mínimo global, conforme resultado abaixo:

Teorema 3.4.1. *(Weierstrass) Suponha que f é contínua em todo x no intervalo fechado e limitado $[a, b]$. Então f assume um valor mínimo m e um valor máximo M em $[a, b]$, isto é, existem α e β em $[a, b]$, tais que $f(\alpha) = m$ e $f(\beta) = M$ e $m \leqslant f(x) \leqslant M$ para todo x em $[a, b]$.*

Observe que o Teorema de Weierstrass apenas garante a existência de ótimos, no caso globais, porém, não fornece condições que nos auxilie a encontrá-los. A existência só pode ser garantida se a função for contínua e se o domínio for fechado e limitado. Caso o domínio seja um conjunto ilimitado ou aberto em um dos extremos, não se pode garantir a existência de ótimos, mesmo que eles existam. Assim, precisamos entender como identificar candidatos a ótimos e como classificá-los como máximo ou mínimos.

Voltemos ao gráfico 3.8. O domínio da função é o intervalo $[x_1, x_6]$, onde $x_1, x_6 \in \mathbb{R}$ e $x_1 < x_6$. Observe que, no intervalo considerado, o valor da função sofre oscilações, ou seja, cresce e decresce algumas vezes. Considerando o sentido crescente da variável x, existem pontos, no interior do intervalo, onde a função para de decrescer e começa a crescer, por exemplo os pontos x_3 e x_5 (Mínimos Locais). O contrário ocorre nos pontos x_2, x_4 onde a função interrompe o crescimento e começa a decrescer (Máximos Locais). Os extremos do intervalo podem ser analisados a posteriori.

Precisamos então entender melhor essa mudança entre intervalos de crescimento e de decrescimento das funções. A ferramenta matemática para estudar o crescimento e decrescimento de funções é a derivada. Através dos Teoremas a seguir, mostraremos como relacionar o sinal da derivada de uma função com o crescimento e decrescimento da função.

Teorema 3.4.2. *(Rolle) Seja $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $a \neq b$, uma função contínua no intervalo limitado e fechado $[a,b]$, e com derivada finita em todos os pontos do seu interior $]a,b[$. Se $f(a) = f(b)$ então existe pelo menos um ponto $\xi \in]a,b[$, tal que $f'(\xi) = 0$.*

Teorema 3.4.3. *(Valor Médio de Lagrange) Seja $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, uma função contínua no intervalo limitado e fechado $[a,b]$ e derivável em (a,b). Então, existe pelo menos um ponto $c \in (a,b)$ tal que*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

Demonstração. Seja

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$$

Devido às hipoteses sobre f resulta que a função g é contínua em $[a,b]$ e derivável em]a,b[. Tem-se ainda que

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}b$$

$$= f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}[(b-a)+a]$$

$$= f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) - f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}a$$

$$= f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}a = g(a).$$

Pelo Teorema de Rolle, temos que existe $c \in (a,b)$ tal que $g'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$. Logo, $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$, ou equivalentemente,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

■

Corolário 3.4.3.1. *Seja $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a,b]$ e derivável em $]a,b[$. Então*

1. $f'(x) < 0, \forall \in]a,b[\iff f$ *é decrescente em* $[a,b]$*;*

2. $f'(x) > 0, \forall \in]a,b[\iff f$ *é crescente em* $[a,b]$*.*

Demonstração. Seja f uma função nas condições do enunciado e tomemos $x, y \in [a,b]$, com $x < y$. Pelo Teorema do Valor Médio existe $c \in]x,y[$ tal que $f(y) - f(x) = (y-x)f'(c)$.

Temos que $f'(c) < 0 \iff f(y) - f(x) < 0$, ou seja, $f(y) < f(x)$. Assim, f é decrescente em $[a,b]$. Temos também que $f'(c) > 0 \iff f(y) - f(x) > 0$, ou seja, $f(y) > f(x)$ e, portanto, f é crescente em $[a,b]$. ■

O resultado do corolário anterior permite-nos, a partir do estudo do sinal da derivada entender quando uma função cresce e quando decresce. Associado a esse resultado, se considerarmos que nas proximidades de um máximo (mínimo) local a função cresce (decresce) a esquerda e volta a decrescer (crescer) a direita desse máximo (mínimo), é suficiente que encontremos essas mudanças nos intervalos de crescimento e decrescimento da função. Os pontos ótimos locais são pontos de mudança do sinal da derivada, de derivada negativa para positiva e vice-versa. Os resultados a seguir nos auxiliam a entender melhor essas afirmações.

Teorema 3.4.4. *(Fermat) Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função com derivada em $a \in D$, onde D é um conjunto aberto, ou seja, apenas com pontos interiores. Se f tem em a um extremo local, então $f'(a) = 0$.*

Demonstração. Suponha que f tem em a um máximo local (o outro caso é análogo). Como $a \in D$, existe $\delta > 0$ tal que $I = (a-\delta, a+\delta) \subset D$ e $f(x) \leqslant f(a)$ para todo $x \in I$. Assim, para $a < x < a + \delta$ temos $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant 0$. Logo,

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant 0.$$

Por outro lado, para $a - \delta < x < a$ temos $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \geqslant 0$. Portanto,

$$f'_-(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geqslant 0.$$

Por hipótese, exite $f'(a)$. Assim, $f'(a) = f'_-(a) = f'_+(a)$. Logo, a única possibilidade é que $f'(a) = 0$. ■

O teorema 3.4.4 nos fornece uma direção para encontrar os possíveis pontos ótimos de uma função derivável f e que são interiores ao domínio de f. Eles devem satisfazer a equação $f'(x) = 0$ e são denominados pontos críticos de f.

Exemplo - Seja $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2$. Queremos encontrar os candidatos a máximo ou mínimo dessa função, ou seja, os pontos críticos de f. Esses pontos são obtidos resolvendo a equação $f'(x) = 0$.

- $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x = 0 \Longleftrightarrow x = 0, x = 1$ e $x = 2$.
- Assim, f tem três pontos críticos. Sabemos que são candidatos a máximo e mínimo, porém ainda não temos condições de classificá-los.

A recíproca do resultado anterior é falsa. Tome como exemplo a função $f(x) = x^3$, que é estritamente crescente. No entanto $f'(0) = 0$. Neste contexto, não podemos afirmar que um ponto crítico de f obrigatoriamente é ótimo da função f.

A partir dos resultados anteriores, enunciamos o Teorema a seguir, que nos permitirá classificar os pontos críticos de uma função como máximo ou mínimo locais.

Teorema 3.4.5. *Seja f uma função derivável numa vizinhança do ponto c tal que $f'(c) = 0$. Se existe $\delta > 0$ tal que:*

(i) $f'(x) > 0$, $\forall x \in]c - \delta, c[$ e $f'(x) < 0$, $\forall x \in]c, c + \delta[$ então $x = c$ é um ponto de máximo local.

(ii) $f'(x) < 0$, $\forall x \in]c - \delta, c[$ e $f'(x) > 0$, $\forall x \in]c, c + \delta[$ então $x = c$ é um ponto de mínimo local.

(iii) $f'(x)$ tem o mesmo sinal em $S =]c - \delta, c[\cup]c, c + \delta[$ então $x = c$ não é extremo local.

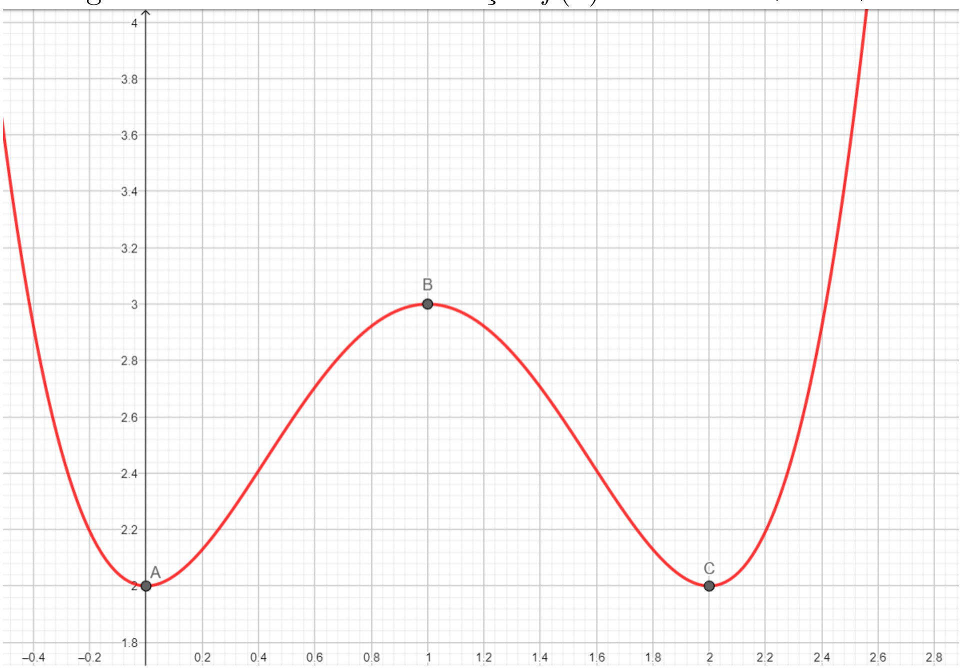
O resultado do Teorema 3.4.5 permite-nos classificar os pontos críticos de uma função através do estudo do sinal da derivada numa vizinhança desse ponto crítico. Assim, temos condições agora de classificar os pontos críticos da função $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2$ que são os pontos $x = 0$, $x = 1$ e $x = 2$. Temos que:

- A derivada é $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x$;
- f é crescente nos intervalos $]0, 1[$ e $]2, \infty[$, pois $f'(x) > 0$ nesses intervalos;
- f é decrescente nos intervalos $] - \infty, 0[$ e $]1, 2[$, pois $f'(x) < 0$ nesses intervalos;
- Assim, $x = 0$ e $x = 2$ são mínimos locais e $x = 1$ é máximo local de f;
- A função f é ilimitada superiormente, pois $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty = \lim_{x\to-\infty} f(x)$. Portanto, não há máximo global;

- f é limitada inferiormente, portanto, um dos mínimos locais deve ser global;
- Como $f(0) = 2 = f(2)$, temos que os dois mínimos locais também são globais.

Abaixo apresentamos o gráfico da função da função $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2$. Nele é possível validar os resultados calculados anteriormente. Ou seja, é possível observar graficamente os pontos críticos de f, é possível verificar também os intervalos de crescimento e que os pontos críticos $x = 0$ e $x = 2$ são mínimos locais e que o ponto $x = 1$ é um máximo local. Observe que a função não é limitada, assim, não há ótimos globais.

Figura 3.9: Gráfico de uma função $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2$.



Fonte: Construído pelo Autor.

Apresentamos agora outro exemplo considerando uma função definida num intervalo limitado e fechado.

Exemplo - Seja $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x}$. Vamos estudar f em relação a máximos e mínimos. Observe que, pelo Teorema de Wierstrass, f tem máximo e mínimo global. Assim, teremos que comparar os valores de f nos máximos e mínimos locais encontrados com os valores de f nos extremos do domínio. Portanto:

- Pontos Críticos - $f'(x) = \dfrac{3x^2 - 1}{3\sqrt[3]{(x^3 - x)^2}} = 0 \iff x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ e $x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$;
- Estudo do Sinal da Derivada (f crescente) - $f'(x) > 0$ se $x \in [-1, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}[$ ou $x \in]\dfrac{\sqrt{3}}{3}, 2]$;

- Estudo do Sinal da Derivada (f decrescente) - $f'(x) < 0$ se $x \in]-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}[$;

- Classificação dos Pontos Críticos - f cresce a esquerda e decresce a direita de $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, então o ponto $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ é máximo local de f;

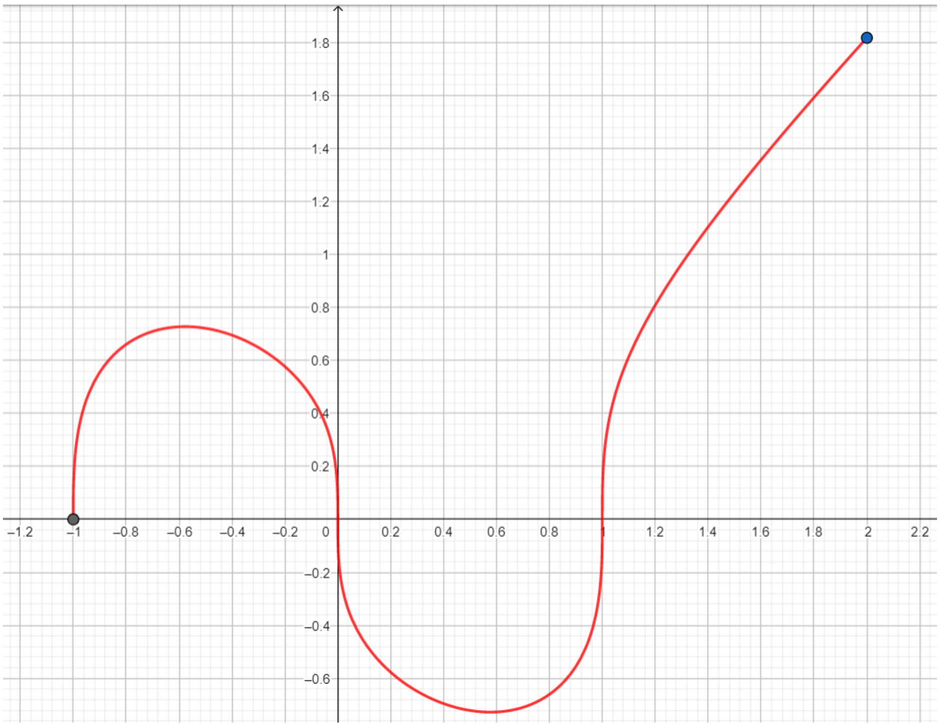
- Classificação dos Pontos Críticos - f decresce a esquerda e cresce a direita de $\frac{\sqrt{3}}{3}$, então o ponto $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ é mínimo local de f;

- Avaliação de f - $f(-1) = 0$, $f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}-1}{3}} =\approx 0,58$, $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{3}}{3}} =\approx -0,58$ e $f(2) = \sqrt[3]{6} \approx 1,82$;

- Ótimos Globais - Temos que $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ é mínimo global de f e $x = 2$ é máximo global de f.

A seguir apresentamos o gráfico 3.10 da função f estudada no exemplo anterior.

Figura 3.10: Gráfico da função $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x}$ com domínio $-1 \leqslant x \leqslant 2$.



Fonte: Construído pelo Autor.

Observe que essa análise é facilitada quando a função derivada de f é uma função onde é possível, através de uma análise, estudar seu sinal, avaliando assim o crescimento e o decrescimento de f. Não é difícil citar exemplos onde a derivada de f é uma função que apresenta extrema dificuldade nessa tarefa, ou seja, é muito difícil através de uma análise estudar o sinal da derivada. Outro ponto negativo é que o critério da avaliação do sinal da derivada não é útil computacionalmente. Em um algoritmo computacional faz-se necessário implementar um critério mais simples.

É mais efetivo realizar avaliações de funções em determinados pontos. Um critério que facilita muito o trabalho de classificar os pontos críticos como máximo ou mínimo local é o chamado critério da derivada segunda. Nele é possível, via avaliação da segunda derivada no ponto crítico, saber se o ponto é de máximo ou mínimo local. Apresentamos abaixo esse critério.

Definição 6. *Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável em D. Se a função f' é derivável em D então diz-se que f é duas vezes derivável em D. A segunda derivada de f é representada por f''.*

Proposição 1. *Seja $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função com derivada segunda contínua em seu domínio e $c \in]a,b[$ um ponto crítico de f, ou seja, $f'(c) = 0$. Então,*

(i) se $f''(c) > 0 \Rightarrow x = c$ é ponto de mínimo local.

(ii) se $f''(c) < 0 \Rightarrow x = c$ é ponto de máximo local.

Demonstração. (i) Suponhamos que $f''(c) > 0$. Como f'' é contínua, existe $\delta > 0$ tal que $f''(x) > 0$ para todo $x \in (c-\delta, c+\delta)$. Assim, temos que f' é crescente em $(c-\delta, c+\delta)$. Dados x, y satisfazendo $c - \delta < x < c < y < c + \delta$, temos que $f'(x) < f'(c) < f'(y)$.

Portanto, como $f'(c) = 0$, temos que $f'(x) < 0$ para $x \in (c-\delta, c)$ e $f'(y) > 0$ para $y \in (c, c+\delta)$. Ou seja, f é decrescente para no intervalo $(c-\delta, c)$ e crescente no intervalo $(c, c+\delta)$. Assim, $x = c$ é um ponto de mínimo local.

(ii) Inteiramente análoga ao item (i).

■

Assim, dada uma função f com segunda derivada contínua, para se encontrar os pontos ótimos de f é suficiente seguir os seguintes passos:

$a)$ Calcular os pontos críticos, ou seja, as raízes de $f'(x) = 0$;

$b)$ Classificar os pontos críticos utilizando o critério da segunda derivada, ou seja, a classificação do ponto crítico como máximo ou mínimo local é dependente do sinal da segunda derivada no ponto crítico.

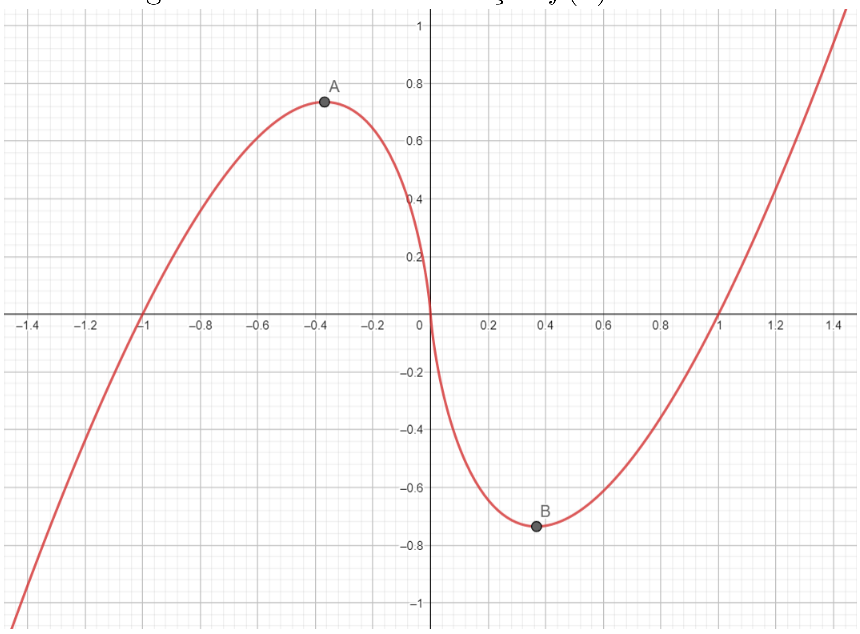
Exemplo - Seja $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x \ln x^2$. Temos que:

a) $f'(x) = \ln x^2 + 2 = 0$. Assim, $2\ln|x| = -2$, e, portanto, $x = {}^{\pm}e^{-1}$. Assim, temos 2 pontos críticos, $x_1 = e^{-1}$ e $x_2 = -e^{-1}$.

b) Temos que $f''(x) = 2/x$. Assim, $f''(e^{-1}) > 0$ e $f''(-e^{-1}) < 0$. Assim, $x_1 = e^{-1}$ é ponto de mínimo local e $x_2 = -e^{-1}$ é ponto de máximo local.

A seguir apresentamos o gráfico 3.11 da função f.

Figura 3.11: Gráfico da função $f(x) = x\ln x^2$.



Fonte: Construído pelo Autor.

Exemplo - Seja $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \operatorname{sen} x + 2\cos x$. Vamos estudar f em relação a máximos e mínimos. Temos que:

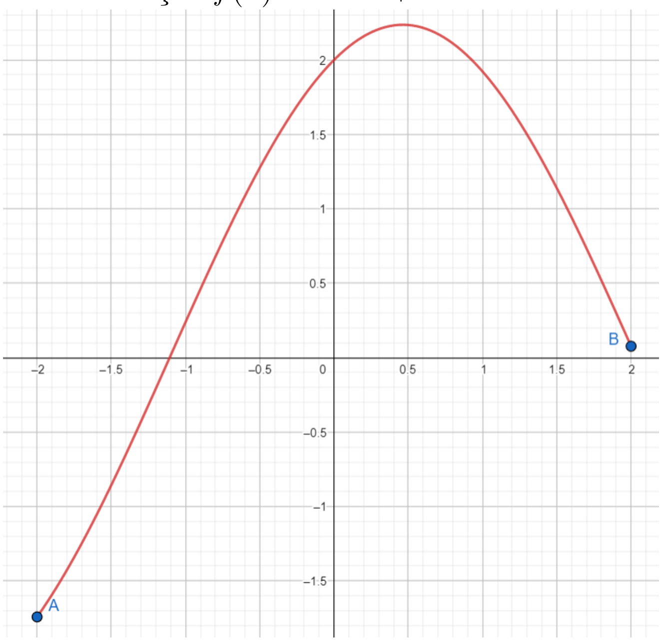
- Pontos Críticos - $f'(x) = \cos x - 2\operatorname{sen} x = 0 \iff x = \operatorname{arctg}(0,5) = 0,46$ rad, para x no intervalo considerado.

- Classificação do Ponto Crítico - $f''(x) = -\operatorname{sen} x - 2\cos x$ e $f''(0,46) < 0$, assim $x = \operatorname{arctg}(0,5)$ é ponto de máximo local;

- Ótimos Globais - $f(-2) \approx -1,74$, $f(2) \approx 0,08$ e $f(\operatorname{arctg} 0,5) \approx 2,24$, assim $x = -2$ é mínimo global de f e $x = \operatorname{arctg} 0,5$ é máximo global de f.

A seguir apresentamos o gráfico 3.12 da função $f(x) = \operatorname{sen} x + 2\cos x$ com domínio $-2 \leqslant x \leqslant 2$.

Figura 3.12: Gráfico da função $f(x) = \operatorname{sen} x + 2\cos x$ com domínio $-2 \leqslant x \leqslant 2$.



Fonte: Construído pelo Autor.

4 Proposta de ensino

Já vimos que o conceito educacional Sala de Aula Invertida é uma modalidade de ensino que consiste em inverter o uso da sala em relação à forma convencional. Ou seja: comumente, os estudantes assistem às aulas na escola e, salvo os trabalhos em grupo, fazem os deveres sozinhos em casa. E moderada nas ideias dessa metodologia ativa de aprendizagem, apresenta-se neste capítulo a explanação para a disposição de uma proposta de ensino. Para orientar em relação a esta metodologia, nos fundamentamos nas propostas de Bergmann e Sams (2016).

São descritas as atividades elaboradas para compor uma proposta de ensino, ajustadas nos princípios da metodologia da Sala de Aula Invertida, para o ensino de máximos e mínimos de funções reais de uma variável, que tem como alvo os estudantes da disciplina de Cálculo I de cursos superiores, principalmente da área de exatas. A idealização da proposta de ensino emergiu pela necessidade do professor pesquisador em tornar as aulas menos expositivas e, assim, promover maior participação dos estudantes no que está sendo desenvolvido, na qual o estudante se torna o protagonista do ensino dentro da sala de aula, e o professor um orientador ou mediador do conhecimento. Que neste âmbito as aulas sejam mais dinâmicas, produtivas e participativas.

Por esse propósito, elaboramos uma proposta dividida em 5 fases: Estímulo, Domínio, Prática, Desafio e Fixação. As fases permanecem interligadas entre si. A seguir, descrevemos, os intenções da seleção de cada uma delas e como elas se estabelecem para a composição da proposta de ensino.

Fase 1 - Estímulo

Fase da proposta em que torna os modos que possibilitam a motivação do estudante para estimular o aprendizado. Uma leitura iniciando o tema em um livro ou outro material de apoio é imprescindível para uma ampla ativação do interesse dos estudantes. Com a intenção de levar o estudante a envolver-se nas atividade propostas e adquirir conhecimentos iniciais relacionados ao tema a ser estudado, de modo mais atrativo, elaboramos a fase de estímulo, na qual são realizadas atividades e questionamentos que farão com que o estudante se envolva e adquira, na prática, conhecimentos prévios, relacionados ao tema a ser estudado, de maneira mais envolvente e menos convencional.

Destaca-se que esta fase, mesmo estando diretamente ligada a próxima, já traz um pouco da particularidade da Sala de Aula Invertida, em que o estudante será motivado a aprender antes de efetivamente ser ensinado a ele algum tema. Em nossa proposta, incentivamos os alunos a realizarem indagações e argumentações, e aplicamos jogos e atividades lúdicas em todas as aulas de estímulo (motivação). Também nesta fase, como forma de registro, os estudantes preenchem algumas folhas que denominamos de "Registro de Estudo por Tópicos"(Apêndice **??**). Nesse registro é sugerido aos estudantes que realizem comentários, observações, dúvidas, ou qualquer outra forma de registro que desejam fazer em relação ao conteúdo estudado no módulo semanal. Estas também tem como objetivo servir de resumo dos conteúdos estudados. As folhas de "Registro de Estudo por Tópicos"podem ser examinadas ao final do módulo para servirem de objetos de avaliação.

Fase 2 - Domínio

É nesta fase em que, de fato, a metodologia da Sala de Aula Invertida ajusta-se à pratica. Sendo o objetivo desta fase, por meio de material *online* ou extra sala, aqui que optou-se, pelas videoaulas, em que os estudantes possam adquirir o conhecimento prévio dos temas a serem estudados também em sala de aula. Na passagem da fase anterior para esta, os estudantes recebem (via grupo da disciplina no mensageiro eletrônico WhatsApp ou através de uma mensagem de e-mail do Google Sala de Aula) videoaulas sobre o conteúdo a ser explorado no módulo. O uso do aplicativo WhatsApp pode auxiliar os alunos a manterem contato extraclasse e de discutirem algumas ideias, e seu uso pode ser incluído para acentuar o uso de tecnologias para o ensino.

As videoaulas, apresentadas entre as fases 1 e 2, deverão ser vistas pelos estudantes fora do horário de aula, talvez até fora do ambiente escolar, para que adquiram familiaridade com os conceitos e teorias que serão debatidos em sala de aula com o professor. Deste modo, a fase denominada "Domínio", é dividida em dois estágios:

- Os estudantes acompanham as videoaulas e se preparam para compreender, se empenhar nas particularidades e analisar incertezas sobre os conceitos e temas a serem atendidos;

- Com o professor, em sala de aula, são debatidos os conceitos e outros temas que foram visualizados pelos estudantes nas videoaulas, e anotado nos registros, resolvendo exercícios, esclarecendo as especificidades e reparando as dificuldades sobre o conteúdo.

As videoaulas, sejam de elaboração particular ou de terceiros, necessitam que sejam claras e diretas e,se possível, com curta duração, isto é, de aproximadamente, 12 minutos. Após a disponibilização dos vídeos aos estudantes, os mesmos deverão assistir, fazer registros, e principalmente pausar e revê-las na ocasião que for adequado a eles. Este aspecto daria liberdade aos estudantes e apoiaria o professor quando no ponto de pôr em pratica os temas, visto que almeja-se que os estudantes já adquiriram os conhecimentos passados a partir das videoaulas. Aqui o professor abandona que seja o "detentor do conhecimento"e verifica-se como "condutor e facilitador", debatendo com os estudantes o material *on-line*, consumando o conteúdo, tirando dúvidas e resolvendo exercícios com a assistência dos estudantes, em que a avaliação do estudante poderá ser através da observação da demonstração no envolvimento da realização da atividade proposta. Completando a aula com a partilha de lista de exercícios para os grupos de estudantes, já formados, para apresentarem suas resoluções na próxima fase.

Fase 3 - Prática
A realização desta fase, inicia-se com os grupos dos estudantes divididos na fase anterior, em que foram oferecidas algumas atividades e problemas para que fossem resolvidos e explanados em sala de aula aos demais colegas da turma. Tendo como incorporação da metodologia da Sala de Aula Invertida, nesta fase, o professor oportuniza que os próprios estudantes resolvam e apresentem suas atividades em grupo e para o grupo, permitindo assim que expressem suas diversas formas e técnicas de resolução, assim propiciado a interação entre os alunos, permitindo o ensino de maneira mútua e entrosada. A avaliação poderá ser através da observação no envolvimento da exposição da resolução dos exercícios da atividade proposta.

Fase 4 - Desafio
Nesta fase o professor prepara a lista de exercícios e propõe a aplicação como desafios, para que cada grupo de estudantes procurem resolver e explanar aos demais colegas da turma. Desafios elaborados pelo professor, disponibilizados através do mensageiro eletrônico, o aplicativo Whatsapp, momento ainda fora da sala de aula. É possível que o professor desenvolva um vídeo para expor o desafio, a fim de esclarecer os objetivos para cada grupo. Assim, os estudantes resolvem os desafios em momento extraclasse e em sala de aula, apresentam e explanam para a turma, detalhando os passos que utilizaram para alcançar a resolução dos problemas a eles indicados. Os desafios podem ser problemas que envolvam o tema que está sendo estudado, de forma que exijam um raciocínio específico nos objetivos de aprendizagem daquele determinado conteúdo, sendo que, o envolvimento na resolução do desafio pode ser avaliado pelo professor.

Fase 5 - Fixação
Momento que esperava-se propor atividades diversificadas, que propiciassem a exploração de noções, conceitos e desafios que até então não haviam sido explorados. Logo, para fins de encerramento, propõe-se aos estudantes uma atividade que complemente as demais fases. Temos a disposição o uso de tecnologias de informação e comunicação, jogos,

modelagem, aplicativos, história da matemática, entre outras, para a execução em sala de aula, sobre os conceitos e tratados nas aulas anteriores. Esta atividade faz com que a metodologia seja ainda mais atrativa aos estudantes, iniciando e finalizando o módulo com diversos processos lúdicos que englobam os conceitos estudados.
Outro ponto que merece atenção desta fase e que os estudantes recebem, em horário extraclasse e também através do grupo do WhatsApp, o link para realização das atividades *online*. Estes contém exercícios (entre duas ou três questões objetivas) realizados através de plataforma de perguntas, na proposta sugere-se o *kahoot*, disponível em < https://kahoot.it/ >, sendo um item do processo avaliativo de cada estudante. Podem ser realizados por eles com consulta aos seus materiais e exibe, ao seu final, a nota obtida. O prazo para sua conclusão é o início do próximo módulo, onde todas as etapas iniciam novamente. Vale ressaltar que, para avaliação destes estudantes, serão considerados a realização do "Registro de Estudo por Tópicos"na fase , o envolvimento da resolução das listas de exercícios e suas apresentações em cada fase, os trabalhos *online* (desenvolvidos na última fase) e uma prova que baseava-se em todos os conteúdos trabalhados ao final dos 4 módulos de aplicação. Obviamente, a proposta não estabelece obrigatoriamente os critérios de avaliação, ficando este a cargo do professor.

Nas seções que seguem, estão descritas as atividades em cada etapa da proposta de ensino mediada pela estratégia Sala de Aula Invertida, separadas por conteúdo em seus quatro módulos.

4.1 Modelo da proposta de ensino

4.1.1 Módulo 1: Introdução à otimização

Objeto de aprendizagem: Valores extremos relativos ou absolutos (locais e globais) em determinado intervalo de uma função.

Objetivo de ensino: Determinar os valores extremos relativos ou absolutos (locais e globais) em determinado intervalo de uma função.

Fase 1: Estímulo

i. Propor aos estudantes o seguinte contexto: Suponhamos que uma pessoa tenha uma loja e ele precise comprar 2 produtos com preços dependendo, de forma decrescente, da quantidade comprada. O lucro do lojista depende da quantidade vendida e dos preços de cada um dos 2 produtos. O lojista terá que fazer um balanceamento entre as quantidades compradas dos 2 produtos para se ter um lucro máximo. Perceba que esta pessoa esta fazendo otimização. Otimizar é o processo de encontrar a melhor solução para um problema, encontrando valores ótimos (máximos ou mínimos). Outros exemplos em que se pode utilizar a otimização: estabelecer o lucro máximo de uma loja, indicar a área máxima para uma construção, estabelecer o volume máximo alcançado para um reservatório, decidir a quantidade mínima de revestimento que deve ser usado para cobrir uma parede, optar pela distância mínima entre dois locais ou deliberar o menor tempo para uma viagem.

ii. Para buscar despertar o tema otimização, aproveitar a história de "A lenda de Dido", encontrado em < https://youtu.be/SSaOcnmYt6I > como motivação para associarem pontos de valores extremos. No vídeo é apresentada a história da fazendeira Elisa que comprou tela para fazer um cercado para as ovelhas na sua fazenda e na busca para encontrar o melhor formato para o cercado ela acaba conhecendo a princesa Dido. As duas descobrem que possuem algumas coisas em comum.

iii. Este é o ponto notável considerado na metodologia Sala de Aula Invertida, o material de estudo fora da sala de aula, que será enviado aos estudantes, através do grupo no mensageiro eletrônico WhatsApp, as seguintes videoaulas para assistirem extraclasse. Lembrá-los de fazerem anotações no registro de tópicos de estudo para a próxima fase;

(a) **Introdução à otimização**
< https://youtu.be/5S5n_xrI2To >
Esta videoaula trata-se de um problema no qual tem-se uma função determinada por $C(B) = B^2 - 200B + 10010$ para o custo associado ao número de bananas de uma loja, em que se busca o menor custo relativo ao número de bananas.

(b) **Otimização - Exercício**
< https://youtu.be/m4Rj6KZx_Xs >
Apresenta o problema em que um fabricante produz x toneladas de um certo produto. O preço de venda é de p reais, definido por uma função afim na variável x, por tonelada do produto e o custo de produção, também em função de x, é definido pela função $C(x) = 5 + 15x + x^2/6$. Qual é o valor de x para que o lucro seja máximo? Qual é o lucro máximo?

(c) **Aplicação de Derivadas: Otimização**
< https://youtu.be/8KWDPI5M6ho >
Ao aprender a encontrar os pontos de máximo e de mínimo de funções, passa-se a aplicar esse aprendizado na otimização, encontrando a melhor alternativa para algumas situações. Nessa videoaula é resolvido alguns casos clássicos de

otimização.

(d) **Aplicações de Derivadas**
< https://youtu.be/VtlihEQlAVk >
Nesta videoaula apresenta-se uma aplicação do uso de derivadas na Economia. Uma empresa sabe a relação entre o preço de venda de um produto, em função da quantidade x, e do custo de produção, também em função da quantidade. Deseja-se obter a função Lucro e calcular o lucro máximo dessa empresa. Essa função lucro é obtida pela diferença entre a função Receita (o quanto se arrecadada) e a função Custo (o quanto se gasta). É importante determinar qual deve ser a quantidade produzida para se ter o maior lucro e qual é o valor desse lucro ótimo.

Fase 2: Domínio

i. Discussão e dúvidas sobre as videoaulas enviadas aos estudantes na fase anterior;

ii. Rápida formalização matemática do que foi visto nas videoaulas (definição, teoremas, elementos, resolução, propriedades, etc);

iii. Elaboração do mapa conceitual pela turma sobre conceitos estudados;

iv. Resolução da lista de exercícios I (apêndice A)

v. Distribuição da lista de exercícios II (apêndice B) para apresentação dos grupos na próxima fase;

Fase 3: Prática

i. Apresentação pelos grupos da lista de exercícios II (B) propostos na fase anterior;

ii. Enviar aos alunos, através do grupo no WhatsApp, o desafio do primeiro módulo com os problemas (Apêndice C) para os grupos resolverem e apresentarem na próxima fase;

Fase 4: Desafio

i. Apresentação pelos grupos das resoluções dos desafios (Apêndice C) que cada grupo recebeu;

ii. Resolução coletiva de problemas em sala de aula (Apêndice D);

Fase 5: Fixação

i. Atividade avaliativa: Pelo Kahoot através do link < https://create.kahoot.it/share/otimizacao/ef2f6bbc-6b54-4e95-93b5-4c186b57691b > para a avaliação online (AVA1) do primeiro módulo.

4.1.2 Módulo 2: Máximos, mínimos, perímetro, área e volume

Objeto de aprendizagem: Análise de funções usando a derivada de primeira ordem de forma a encontrar os seus pontos extremos

Objetivo de ensino: Identificar se um ponto localizado no interior do domínio da função, é ponto de extremo (máximo ou mínimo) local ou global.

Fase 1: Estímulo

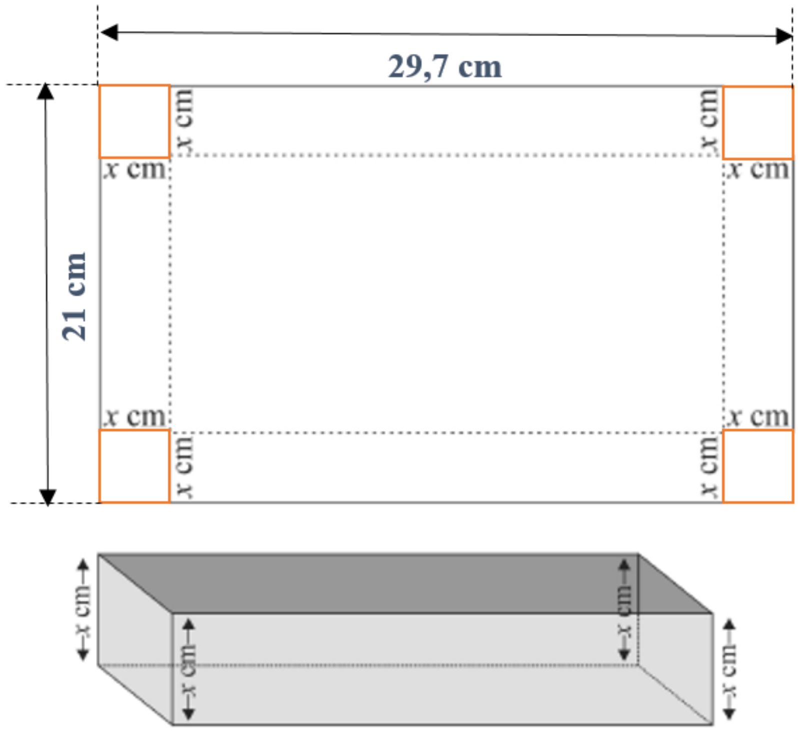
i. Questionar os alunos sobre o que já sabem sobre função crescente e decrescente, recordando que uma função é crescente quando, aumentando-se os valores atribuídos ao domínio, os valores do contradomínio ficam cada vez maiores; caso contrário, a função é decrescente. Estimular os alunos a darem exemplos de funções crescentes e decrescentes.

ii. Abordar os estudantes sobre a seguinte situação problema: Se você estiver construindo uma caixa com um pedaço plano de papel A4, como você maximiza o volume desta caixa? Propor a construção com o uso de papel de tamanho A4, onde cada estudante terá que construir uma caixa que possua o maior volume possível. Apresenta-se aos estudantes a figura 4.1 em que mostra o papel A4 com dimensões de 21 centímetros por 29,7 centímetros, no qual realiza-se o corte a fim de construir uma caixa.

    Como queremos que essa caixa tenha o volume máximo, então, cada estudante realiza um corte de tamanho de um quadrado de lado x distinto, em cada vértice da folha de papel para que possamos fazer a nossa caixa. Ao dobrarmos, temos as medidas da caixa em função do tamanho x escolhido, os estudantes informam as medidas do valor de x escolhido e o valor do volume encontrado, pode-se construir uma tabela para comparar os valores.

    Para verificar qual seria o volume máximo, sem adentrar em cálculos, pode se utilizar a calculadora gráfica do aplicativo GeoGebra em < https://www.geogebra.org/classic >. A função que modela o volume, em função de x, é dada por $V(x) = x(21 - 2x)(29,7 - 2x)$. O valor de x ótimo é $x = 4,04$, encontrado pela opção de localizar os extremos da função pelo aplicativo, encontra-se o ponto e

Figura 4.1: Folha de papel A4 e sua caixa



Fonte: Fonte: Adaptação de Prova CESPE - 2017 - SEDF - Professor de Educação Básica - Matemática

observa-se que se diminuirmos um pouco de 4,04 o volume diminui e se aumentarmos pouco mais do que 4,04 ele também diminui, ou seja o máximo valor se dá em 4,04.

iii. Enviar aos estudantes, através do grupo no WhatsApp, as videoaulas para assistirem extraclasse. Lembrá-los de fazerem anotações no registro de tópicos de estudo;

(a) **Teorema de Weierstrass**
< https://youtu.be/9kWEyKV0E70 >
Nesta videoaula é apresentado o teorema de Weierstrass no qual diz que se uma função é contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então a função tem um máximo e um mínimo nesse intervalo. Percebe-se intuitivamente que este resultado é verdadeiro: quando uma função é contínua, você pode desenhar seu gráfico sem tirar o lápis do papel, então deve atingir um ponto mais alto e um ponto mais baixo nesse intervalo.

(b) **Introdução a pontos de valores extremos e derivadas**
< https://youtu.be/Ir4cZNfyZ70 >
Nesta videoaula é apresentado os pontos máximos e mínimos de uma função e discutimos sua a relação entre derivadas e valores extremos de uma função.

(c) **Teorema de Fermat**
< https://youtu.be/uXHV1gOZhIc >
Nesta videoaula é apresentado o Teorema de Fermat e alguns problemas de otimização com áreas e volumes a partir dos pontos críticos advindos do teorema de Fermat que trata da primeira derivada.

(d) **Aplicação de Derivadas: Otimização**
< https://youtu.be/8KWDPI5M6ho >
Ao aprender a encontrar os pontos de máximo e de mínimo de funções, passa-se a aplicar esse aprendizado na otimização, encontrando a melhor alternativa para algumas situações. Nessa videoaula é resolvido alguns casos clássicos de otimização.

(e) **Exercícios de otimização passo a passo**
< https://youtu.be/Pup_Rr4DSV8 >
Esta Videoaula apresenta dois problemas de otimização, no primeiro veremos como encontrar a caixa retangular de maior volume possível e no segundo problema estudaremos quando giramos um triângulo retângulo em torno de um dos seus catetos, qual o cone de maior volume que se pode formar?

Fase 2: Domínio

i. Discussão e dúvidas sobre as videoaulas enviadas aos estudantes na fase anterior;

ii. Rápida formalização matemática do que foi visto (definição, teoremas, elementos, resolução e propriedades, etc);

iii. Elaboração do mapa conceitual: Desenvolvimento da continuação do mapa conceitual sobre pontos extremos;

iv. Resolução da lista de exercícios IV (Apêndice E) e distribuição da lista de exercícios V (Apêndice F) para apresentação dos grupos na próxima fase;

Fase 3: Prática

i. Apresentação pelos grupos da lista de exercícios V (Apêndice F) propostos na última fase;

ii. Enviar aos alunos, através do grupo no mensageiro eletrônico WhatsApp, o desafio do segundo módulo com os problemas (Apêndice G) para os grupos resolverem e apresentarem na próxima fase;

Fase 4: Desafio

i. Apresentação pelos grupos das resoluções dos desafios (Apêndice G) que cada grupo recebeu;

ii. Resolução coletiva de problemas em sala de aula (Apêndice H);

Fase 5: Fixação

i. Atividade avaliativa: Pelo Kahoot através do link < https://create.kahoot.it/share/ava2-maximos-minimos-perimetro-area-e-volume/acad6297-e508-411a-9cfa-ac7a85a8ec54 > para a avaliação online (AVA2) do segundo módulo.

4.1.3 Módulo 3: Máximos, mínimos, posição, velocidade e aceleração

Objeto de aprendizagem: Valores de ponto de extremo (máximo ou mínimo) local ou global e esboço de curva.

Objetivo de ensino: Identificar se um ponto localizado no interior do domínio da função, é ponto de extremo (máximo ou mínimo) local ou global.

Fase 1: Estímulo

i. Questionamento aos estudantes para associarem pontos extremos, com as atividades a seguir:

(a) Um número positivo x que é somado com seu inverso. O menor valor possível dessa soma é obtido minimizando $f(x) = x + \frac{1}{x}$, com x no intervalo $(0, \infty)$.

(b) Dois números não negativos x e y têm uma soma igual a 10. O maior produto possível desses dois números é obtido maximizando $f(x) = x(10 - x)$ com x no intervalo $[0, 10]$.

(c) Um retângulo no plano xy tem um vértice na origem, um vértice adjacente no ponto $(x, 0)$ e um terceiro vértice no segmento de reta de $(0, 4)$ a $(3, 0)$. A maior área possível do retângulo é obtida maximizando $A(x) = x(-\frac{4}{3}x + 4)$ com x no intervalo $[0, 3]$.

(d) Uma caixinha aberta no topo é construída com uma cartolina medindo 20 por 32 centímetros cortando-se fora quadrados iguais de lado medindo x centímetros dos quatro cantos e dobrando-se os lados. O maior volume possível da caixinha é obtido maximizando $V(x) = x(20 - 2x)(32 - 2x)$ com x no intervalo $[0, 10]$.

ii. Enviar aos estudantes, através do grupo no WhatsApp, as videoaulas para assistirem extraclasse. Lembrá-los de fazerem anotações no registro de tópicos de estudo;

(a) **Otimização: soma de quadrados**
< https://youtu.be/WleJiCP9TbQ >
Esta videoaula ensina qual é o valor mínimo de $x^2 + y^2$, dado que $xy = -16$.

(b) **Aplicação de Derivadas: Otimização**
< https://youtu.be/8KWDPI5M6ho >
Exercício sobre Caminho mais Rápido (trigonometria)
Exercício sobre Função e menor distância até a origem
Ao aprender a encontrar os pontos de máximo e de mínimo de funções, passa-se a aplicar esse aprendizado na otimização, encontrando a melhor alternativa para algumas situações. Nessa videoaula é resolvido alguns casos clássicos de otimização.

(c) **Máximos e Mínimos (por Derivada) Problemas de Otimização**
< https://youtu.be/zw5SDDhkw34 >
Exercício sobre alcançar certo ponto o mais rápido possível, ou seja, pela minimização do tempo.

(d) **Cálculo - Máximos e mínimos, problema de otimização**
<https://youtu.be/dImoh2KrdMw >
Nesta videoaula procura-se a maior área retangular que será possível, com 1000 m de cerca, sendo que um dos lados deste retângulo não utiliza a cerca.

Fase 2: Domínio

i. Discussão e dúvidas sobre as videoaulas enviadas aos estudantes na fase anterior;

ii. Rápida formalização matemática do que foi visto (definição, teoremas, elementos, resolução e propriedades, etc);

iii. Elaboração do mapa conceitual: Elaboração do mapa conceitual sobre pontos críticos:

iv. Resolução da lista de exercícios VI (Apêndice I) e distribuição da lista de exercícios VII (Apêndice J) para apresentação dos grupos na próxima fase;

Fase 3: Prática

i. Apresentação pelos grupos (lista de exercícios VII do Apêndice J na última fase);

ii. Enviar aos alunos, através do grupo no WhatsApp, o desafio do terceiro módulo com os problemas (Apêndice K) para os grupos resolverem e apresentarem na próxima fase;

Fase 4: Desafio

i. Apresentação pelos grupos das resoluções dos problemas do desafio (Apêndice K) que cada grupo recebeu;

ii. Resolução coletiva de problemas em sala de aula da lista de exercícios (Apêndice L);

Fase 5: Fixação

i. Utilizar o aplicativo Geogebra como motivação para associarem máximo e mínimo com a noção de derivadas; para fixação e prática dos conteúdos vistos nas fases anteriores;

ii. Atividade avaliativa: pelo Kahoot através do link (https://create.kahoot.it/share/ava3-maximos-minimos-numeros-e-distancias-entre-pontos/de354082-8f03-4262-bb9a-60fc036b16bb) para a avaliação online (AVA3) do terceiro módulo.

4.1.4 Módulo 4: Máximos, mínimos, números e distâncias entre pontos

Objeto de aprendizagem: Valores extremos relativos ou absolutos (locais e globais) em determinado intervalo de uma função do movimento retilíneo e Aceleração máxima

Objetivo de ensino: utilizar as ferramentas do Cálculo, para analisar mais profundamente o movimento retilíneo.

Fase 1: Estímulo

i. Questionamento aos estudantes para associarem pontos extremos, com as atividades a seguir:

(a) As funções velocidade $v(t)$ e posição $s(t)$ de uma partícula em movimento retilíneo estão relacionadas pela equação $s(t) = v(t).t$, e as funções aceleração $a(t)$ e velocidade $v(t)$ estão relacionadas pela equação $v(t) = a(t).t$.

(b) Suponha que uma partícula se mova ao longo do eixo s com função posição $s(t) = 7t - 2t^2$. No instante $t = 3$, a posição da partícula é 3, sua velocidade é -5, sua velocidade escalar é 5 e sua aceleração é -4.

(c) Uma partícula em movimento retilíneo está aumentando a velocidade se os sinais de sua velocidade e aceleração são iguais e diminuindo a velocidade se os sinais são opostos.

(d) Suponha que uma partícula se mova ao longo do eixo s com função posição $s(t) = t^4 - 24t^2$ ao longo do intervalo $t \geq 0$. A partícula desacelera no intervalo de tempo definido por $2 < t < 2\sqrt{3}$.

ii. Enviar aos estudantes, através do grupo no WhatsApp, as videoaulas para assistirem extraclasse. Lembrá-los de fazerem anotações no registro de tópicos de estudo;

(a) **Exemplo de movimento retilíneo: aceleração máxima**
< https://youtu.be/If6Gh7CeZ04 >
Esta videoaula ensina que a velocidade de uma partícula que se move ao longo do eixo x é dada por $v(t) = -t^3 + 6t^2 + 2t$ Sal a analisa para obter o instante no qual a aceleração da partícula atinge seu valor máximo.

(b) **Problema de Otimização com retângulo inscrito em um semicírculo**
< https://youtu.be/yW99vePbg3s >
Nesta videoaula determina-se as dimensões do retângulo com área máxima que pode ser inscrito em um semicírculo de raio $r = 3$.

(c) **Derivada: Aplicações de Derivadas — Máximo e Mínimo - Exercício Resolvido**
< https://youtu.be/Y6k5S8VyjHo >
Videoaula em que se resolve o problema sobre um retângulo que deve ser inscrito em uma semicircunferência de raio 2. Buscando a maior área que o retângulo pode ter e quais são suas dimensões. Este problema está relacionado com máximos e mínimos de funções e se enquadra na teoria das Aplicações de Derivadas.

Fase 2: Domínio

i. Discussão e dúvidas sobre as videoaulas enviadas aos estudantes na fase anterior;

ii. Rápida formalização matemática do que foi visto (definição, teoremas, elementos, resolução e propriedades, etc);

iii. Elaboração do mapa conceitual: Elaboração do mapa conceitual sobre pontos críticos:

iv. Resolução de atividades da lista de Exercícios X (Apêndice M) e distribuição de exercícios XI (Apêndice N) para apresentação dos grupos na próxima fase;

Fase 3: Prática

i. Apresentação pelos grupos (lista de exercícios XI do Apêndice N na fase anterior);

ii. Enviar aos alunos, através do grupo no WhatsApp, o desafio do terceiro módulo com os problemas (Apêndice N) para os grupos resolverem e apresentarem na próxima fase;

Fase 4: Desafio

i. Apresentação pelos grupos das resoluções dos problemas do desafio (Apêndice O) que cada grupo recebeu;

ii. Resolução coletiva de problemas em sala de aula da lista de exercícios (Apêndice P);

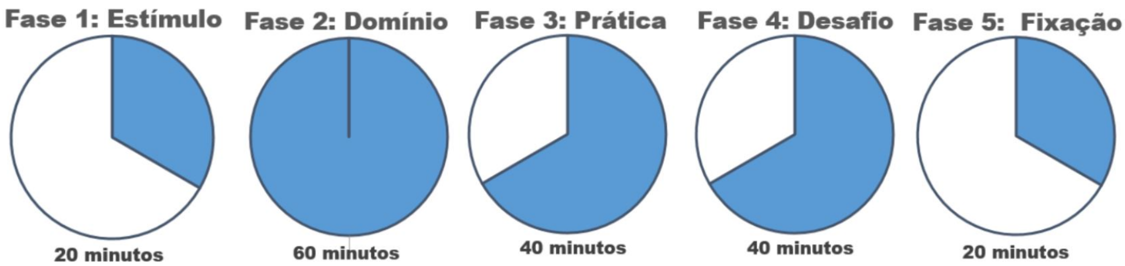
Fase 5: Fixação

i. Utilizar o aplicativo Geogebra como motivação para associarem máximo e mínimo com a noção de derivadas; para fixação e prática dos conteúdos vistos nas fases anteriores;

ii. Atividade avaliativa: Kahoot, Disponibilizar link (https://create.kahoot.it/share/ava4-maximos-minimos-posicao-velocidade-e-aceleracao/014f3e77-da2d-4c4d-a652-8e5665cf b274) para a avaliação online (AVA4) do quarto módulo.

O tempo de duração de cada fase depende do nível de exigência que se propõe, atentando-se para o uso do tempo fora da sala de aula para estudos e resolução de exercícios, sugere-se o tempo destinado na tabela ?? em sala de aula, ao qual o professor poderá adaptar conforme as necessidades.

Figura 4.2: Duração de tempo de cada fase em cada módulo



Fonte: Construída pelo Autor

5 Considerações finais

Esta dissertação sugere o propósito de como trabalhar com as metodologias ativas com destaque para a sala de aula invertida, por acreditar numa educação que possa favorecer o protagonismo do aluno e torná-lo ativo durante o processo de ensino e aprendizagem. Assim realizou-se a investigação em periódicos encontrados em plataformas na internet e livros que despontam sobre o tema, para que este trabalho possa representar um referencial teórico conceitual para o ensino do conteúdo máximos e mínimos de funções de uma variável apoiado na metodologia ativa sala de aula invertida para que os estudantes de Cálculo diferencial e integral tenham a aprendizagem em resolução de problemas de otimização (máximos e mínimos de funções de uma variável). Contudo, sabe-se que se pode deparar com algumas adversidades, pois nem tudo que se encontra na teoria pode ser aplicado na prática, considerando os diversos contextos da educação. Como também nem sempre podemos aplicar da mesma forma um mesmo conteúdo.

Enquanto educador-pesquisador acredito no valor dessa quantidade de experiências pela demanda de investigação e na incumbência realizada com embasamento da sincronia na obtenção de referências para o ensino e a aprendizagem, o que se fez imprescindível o estudo da literatura sobre as metodologias ativas, em destaque um delineamento de livros e documentos encontrados na internet sobre a metodologia sala de aula invertida e sobre a história e aplicação de máximos e mínimos, e conceitos de Cálculo de função de uma variável.

Sabe-se que grande parte dos professores ainda desconhecem o uso em maior ou menor proporção de estratégias de ensino, ainda que o façam, muitas vezes, não possuem a clareza de seus fundamentos, ou mesmo dos significados que elas poderão ter sobre a aprendizagem dos estudantes, temos que a elaboração e futuro aperfeiçoamento da proposta baseada na teoria da metodologia ativa Sala de Aula Invertida, adaptada para o ensino superior e envolvendo especificamente os tópicos de máximos e mínimos de funções de uma variável, ressalta o importante papel que professor exerce ao trabalhar com as metodologias ativas em sala de aula, oferecendo a possibilidade de transformação das práticas educacionais no ambiente escolar.

O alcance desse trabalho pode atingir o aparecimento da pretensão em que se possibilita transformar as ações como professor, mas é primordial uma reflexão constante dos procedimentos competentes, em que é permitido assumir novas orientações se perceber que não é a mais apropriada a direção adotada. Menciona-se ainda, que uma nova percepção de responsabilidade nos estudantes pertinente à aprendizagem é uma busca a ser alcançada, para que o ato de estudar seja pela satisfação de aprender, pelo abrir os olhos à percepção de responsabilidade do estudante.

O desafio constituirá preparar para o futuro a execução da proposta de ensino baseada nas metodologias ativas de aprendizagem de sala de aula invertida, dando suporte para aos professores aplicadores. Percebe-se que professores necessitam se dedicar a conhecer os referenciais pedagógicos que amparam o modelo de metodologias inovadoras e buscar experiências relatadas em sua área. Assim, podem prever o enfrentamento profissional que viverão durante o processo, bem como ampliar o leque de alternativas metodológicas às quais recorrer conforme a experiência for acontecendo.

Complementando, que devido a adversidades na elaboração da proposta, impediu que as videoaulas pudessem ter sido feitas pelo autor desta pesquisa, que poderiam contribuir para a elaboração de um material didático, que derivasse da proposta de ensino desta pesquisa e pudesse orientar de melhor futuras aplicações ou adaptações da proposta de ensino.

Ressalta-se que por ser uma proposta que demanda um período significativamente maior que o normalmente disponibilizado em disciplinas da matriz curricular, sugere-se a aplicação em cursos de extensão ou outros, para que a metodologia atinja os resultados esperados.

Apesar dessas dificuldades, acredita-se que a abordagem da sala de aula invertida com o auxílio da tecnologia desenvolve um ambiente de sala de aula mais colaborativo em que os estudantes se tornem sujeitos ativos no processo de construção do objeto de conhecimento estudado com os temas de seu cotidiano. Acreditamos também que os materiais, instruções, videoaulas e questionários que elaboradas possuem características potencialmente significativas para a aprendizagem dos estudantes, pois aliar o uso da tecnologia ao ensino de conteúdos de Cálculo pode despertar sua curiosidade e interesse para o ensino.

Finalmente, admite-se que a metodologia Sala de Aula Invertida inclui-se como a nova tendência na educação, onde a inovação pedagógica está na aptidão e empenho do professor em reconhecer a sua individualidade como professor e aprimorar aptidões renovadas ao desempenhar o compromisso de orientador da aprendizagem, assim, compete destacar que a contribuição do PROFMAT para a desenvolvimento deste mestrando é muito significativa, ampliando a desenvoltura com distintos aspectos da Matemática, gerando reflexões, tanto sobre os formatos de ensino e aprendizagem, tanto sobre a compreensão de conteúdo matemático marcante à prática docente. Mostrando também que o ensino de cálculo em cursos superiores exige uma postura inovadora devido à necessidade de ampliar a pesquisa nesse campo emergente, independentemente das dificuldades encontradas na vivência em sala de aula.

Bibliografia

ALMEIDA, M. E. B. **Integração de currículo e tecnologias: a emergência de web currículo** . Anais do XV Endipe –Encontro Nacional de Didática e Prática de Ensino. Belo Horizonte: UFMG, 2010.

ANTON, H. **Cálculo** (tradução: Claus Ivo Doering). Volume I – 10. ed. – Porto Alegre: Bookman, 2014.

BACICH, L.; HOLANDA, L. **Aprendizagem Baseada em Projetos: desafios da sala de aula em tempos de BNCC**. Revista Educatrix, ano 8, n 14, 2018. Disponível em : < https://lilianbacich.com/2019/01/16/aprendizagem-baseada-em-projetos-desafios-da-sala-de-aula-em-tempos-de-bncc/ > Acesso em: 17 de semtembro de 2021.

BACICH, L.; MORAN, J. (Orgs.). **Metodologias ativas para uma educação inovadora: uma abordagem teórico-prática**. Porto Alegre: Penso, 2018. e-Pub.

BACICH, L.; NETO, A. T.; DE MELLO TREVISANI, F. **Ensino híbrido: personalização e tecnologia na educação**. Penso Editora, 2015.

BARUFI, M. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de cálculo diferencial e integral**. Tese de Doutorado. Faculdade de Educação. Universidade de São Paulo, 1999

BENNATON, J. F. **Fermat e o início da história dos problemas de otimização**. 2017. Disponível em: < https://sites.google.com/site/profflaviocipparrone/prof-jocelyn > Acesso em: 05 de novembro de 2021.

BERGMANN, J.; SAMS, A. **Sala de aula invertida: uma metodologia ativa de aprendizagem**. Rio de Janeiro: LTC, v. 114, 2016.

BONWELL, C. C.; EISON, J. A. **Active Learning: Creating Excitement in the Classroom**. ERIC Digest. 1991. Disponível em: < https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED34 0272.pdf >. Acesso em: 12 de setembro de 2021.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U C., **História da matemática**. Editora Blucher, 2019.

BRASIL, **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília. 2017. 595 p. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 01 de fevereiro de 2022.

BUSTILLOS, O. V.; SASSINE, A. **A Magia da Curva Cicloide: Braquistócrona e Tautócrona**. São Paulo: Scortecci Editora, 2011.

CAMARGO, F.; DAROS, T. **A sala de aula inovadora: estratégias pedagógicas para fomentar o aprendizado ativo**. Penso Editora, 2018.

CASAGRANDE, V. **Por que os aviões raramente decolam com tanque cheio de combustível?**. economia.uol.com.br. [S.I.] 2020. Disponível em: < https://economia.uol .com.br/todos-a-bordo/2020/11/26/aviao-abastecimento-tanque-cheio.htm. > Acesso em: 03 de novembro de 2021.

CECY, C.; OLIVEIRA, G. A. de; COSTA, E. M. de M. B. (Org). **Metodologias Ativas: aplicações e vivências em Educação Farmacêutica**. Brasília: ABENFARBIO, 2013.

CERBERUS, A. **Aerofólio - útil ou perigoso?** 2010. < Disponível em: https://andrece rberus.wordpress.com/category/mecanica/materias-tecnicas/page/7/ >. Acesso em: 05 de novembro de 2021.

CERVO, A.; BERVIAN, P. da S. R. **Metodologia Científica**. 6 ed. São Paulo, SP: Pearson Prentice Hall, 2007.

CORTELAZZO, A. L; FIALA, D. A. de S., JUNIOR, D. P., PANISSON, L., RODRIGUES, M. R. J. B. **Metodologias Ativas e personalizadas de aprendizagem**. Alta Books Editora, 2019.

D'AMBROSIO, U.; MACHADO, N. J. **Ensino de matemática**. Summus Editorial, 2014.

D'AMBRÓSIO, U. **Matemática, ensino e educação: uma proposta global**. Temas Debates, São Paulo, 1991.

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática: da teoria à prática**. Editora Papirus, 1996.

DANTE, L. R. **Matemática: contextos e aplicações**. Volume 1, 2ª ed. São Paulo: Ática, 2013.

DOLAN, E. L.; COLLINS, J. P. **We must teach more effectively: here are four ways to get started**. Molecular biology of the cell, v. 26, n. 12, p. 2151-2155, 2015. Disponível em: < https://doi.org/10.1091/mbc.E13-11-0675>. Acesso em: 12 de setembro de 2021.

EVES, H., **Introdução à História da Matemática**. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

FERREIRA, B. da S. **Problemas de máximos e mínimos**. Dissertação de mestrado em Matemática para Professores, Universidade de Lisboa. Faculdade de Ciências, 2012. Dispon´vel em: < https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/9202/1/ulfc104486_tm_Belmiro _Ferreira.p
df >. Acesso em: 09 de março de 2022.

FONSECA, M.; GOMES, P. **Invertendo a sala de aula invertida: pesquisa de Stanford mostra que apresentar um assunto de forma prática é mais efetivo doque começar com aula expositiva**. 2013. Disponível em : < https://porvir.org/invertendo-sala-de-aula-invertida/ > Acesso em: 18 de setembro de 2021.

FONTE, A. C. **Médias, Desigualdades e Problemas de Otimização**. Dissertação de mestrado. Universidade Federal Rural de Pernambuco. 2019. Disponível em: < http://www
.tede2.ufrpe.br:8080/tede2/bitstream/tede2/6691/2/Andre%20Costa%0
da%20Fonte.pdf > Acesso em: 10 de fevereiro de 2022.

FREIRE, P. **Pedagogia da Autonomia: saberes necessários à prática educativa**. 25º ed. São Paulo, SP: Paz e Terra, 1996.

FREIRE, A. M. A. **Paulo Freire: sua vida, sua obra**. Educação em Revista, v. 2, n. 1, p. 2-13, 2001.

GLASSER, W. **Counseling with choice theory: The new reality therapy**. Harper Collins, 2001.

GUEDES, Karine de Lima. **A aprendizagem baseada em problemas na percepção dos estudantes e professores do curso de Administração**. 2014. 77 f. Dissertação (Mestrado em Administração) - Universidade do Grande Rio "Prof. José de Souza Herdy", Rio de Janeiro, 2014. Disponível em: https://tede.unigranrio.edu.br/handle/tede/237previ
ew-link0. Acesso em: 10 de fevereiro de 2022.

GUIDORIZZI, H. L., **Um curso de cálculo**. Vol. 1. 6º edição. Grupo Gen-LTC, 2018.

HERMES, A. P.; PEREIRA, J. C. P.. **Máximos e mínimos na geometria euclidiana: uma abordagem histórica**. Revista Eletrônica Paulista de Matemática, p. 1-17, 2013. Disponível em: < https://repositorio.unesp.br/handle/11449/122659 > Acesso em: 03 de novembro de 2021.

KHAN, S. **Um mundo, uma escola**. Editora Intrinseca, 2013.

KUHN, T. S. **A Revolução Copernicana: A Astronomia Planetária no Desenvolvimento do Pensamento Ocidental**. Tradução Marília Costa Fontes. Lisboa: Edições 70, 1957.

MAZUR, E. **Peer Instruction: a revolução da aprendizagem ativa**. Penso Editora, 2015.

MICHAEL, J. **Where's the evidence that active learning works?**. Advances in physiology education, 2006.

MORA, F. M. **Neuroeducación. Sólo se Puede Aprender Aquello Que se Ama**. Madrid: Aliança Editorial, 2013.

MORAN, J. **Autonomia e colaboração em um mundo digital**. Revista Educatrix, n. 7, p. 52-37, 2014.

MORAN, J. **Metodologias ativas para uma aprendizagem mais profunda**. In: BACICH, Lilian. MORAN, José (Orgs.). Metodologias ativas para uma educação inovadora: uma abordagem téorico-prática. Porto Alegre: Penso, 2018.

MOREIRA, F. R., **Otimização Robusta Multiobjetivo para o Projeto de Sistemas em Engenharia**. Tese de Doutorado. Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânia. Universidade Federal de Uberlândia. 2015. Disponível em: < https://repositorio
.ufu.br/handle/123456789/14770 >. Acesso em: 08 de fevereiro de 2022.

MOREIRA, R. C. **Ensino da matemática na perspectiva das metodologias ativas: um estudo sobre a sala de aula invertida**. 2018. Disponível em : < https://tede.ufam.
edu.br/handle/tede/6283 > Acesso em: 11 de janeiro de 2022

MOULY, G. J. **Psicologia Educacional**. Trad. Dante Moreira Leite. 3ª edição. São Paulo: Pioneira,1970.

NÓVOA, A.; AMANTE, L. **Em busca da Liberdade. A pedagogia universitária do nosso tempo**. REDU. Revista de Docência Universitária, v. 13, n. 1, p.

21-34, 2015.

OLIVEIRA, M. **Como fazer pesquisa qualitativa**. 7 ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2013.

PIAGET, J. **A Epistemologia Genética e a Pesquisa Psicológica**. Rio de Janeiro: Freitas Bastos, 1974.

REZENDE, W. **O ensino de cálculo: dificuldades de natureza epistemológica**. Tese de Doutorado. Faculdade de Educação. Universidade de São Paulo, 2003.

ROSA, C. de M.; ALVARENGA, K. B.; SANTOS, F. F. T. dos. Desempenho acadêmico em cálculo diferencial e integral: um estudo de caso. **Revista Internacional de Educação Superior**, v. 5, p. e019023, 2019. Disponível em: < https://doi.org/10.20396/riesup.v5i0.86
53091 > Acesso em: 15 de julho de 2021.

SAVIANI, D. **Escola e democracia**. 32º edição. São Paulo: Cortez, 1994.

SESTÁKOVÁ, J. **Peer Instruction and Students' Understanding of Physics**. 2013. Disponível em :< https://kdf.mff.cuni.cz/lide/sestakova/Peer_Instruction_and_Stu
dents_Understanding_of_Physics_WDS_2013.pdf >. Acesso em: 11 de janeiro de 2022.

SILVA-SOUZA, J. A. **Uso do celular em sala de aula: otimizando práticas de leitura e estudo dos gêneros textuais**. SILEL. n. I, v. 3, 2013. Disponível em : < http://www.ileel.ufu.br/anaisdosilel/wp-content/uploads/2014/04/silel2013_1925.p
df >.Acesso em: 17 de setembro de 2021.

SILVA, M. F. T. **Medias, Desigualdade das Médias e a Resolução de Problemas**. Dissertação de mestrado. Universidade Federal do Espírito Santo. 2019. Disponível em: < http://repositorio.ufes.br/bitstream/10/11161/1/tese_13295_Dissertacao%20Marian
a%20Freitas.pdf >. Acesso em: 10 de fevereiro de 2022.

SILVEIRA. J. F. P. **Problema do Caixeiro Viajante.** Notas de aula. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. 2000. Disponível em: < http://www.mat.ufrgs.br/ portosil/caixeiro.html >. Acesso em: 12 de fevereiro de 2022.

SOUZA, P. R.; ANDRADE, M. C. F. **Modelos de rotação do ensino híbrido: estações de trabalho e sala de aula invertida**. Revista E-Tech: Tecnologias para Competitividade Industrial-ISSN-1983-1838, v. 9, n. 1, p. 03-16, 2016.

SOUZA, S. C.; DOURADO, L. **Aprendizagem baseada em problemas (ABP): um método de aprendizagem inovador para o ensino educativo**. Holos, v. 5, p. 182-200, 2015. Disponível em : < https://www2.ifrn.edu.br/ojs/index.php/HOLOS/article/view/2880 > Acesso em: 17 de semtembro de 2021.

SOUZA, P. R.; ANDRADE, M. do C. F. **Modelos de rotação do ensino híbrido: estações de trabalho e sala de aula invertida**. Revista E-Tech: Tecnologias para Competitividade Industrial-ISSN-1983-1838, v. 9, n. 1, p. 03-16, 2016. Disponível em : < https://etech.sc.senai.br/edicao01/article/view/773 > Acesso em: 10 de dezembro de 2021.

STEWART, J. **Cálculo**. Volume I. São Paulo. Cengage Learning, 2013.

VALENTE, J. A. **Blended learning e as mudanças no ensino superior: a proposta da sala invertida**. Educar em Revista, Curitiba, Brasil, Edição Especial, n.4, p.79-97, 2014.

VASCONCELOS, A. C., **Abelhas: A matemática dos alvéolos**, Nov. 2000. Disponível em: < http://www.apacame.org.br/mensagemdoce/59/artigo.htm >. Acesso em: 10 de fevereiro de 2022.

VIDAL, E. **Ensino à Distancia vs Ensino Tradicional**. Universidade Fernando Pessoa Porto, 2002. Disponível em:< http://homepage.ufp.pt/lmbg/monografias/evidal_mono.pdf. < Acesso em 10 de fevereiro de 2022.

VIGNOCHI, C. M.; BENETTI, C. da S.; MACHADO, C. L. B.; MANFROI, W. C. **Considerações sobre aprendizagem baseada em problemas na educação em saúde**. Revista HCPA. Porto Alegre. Vol. 29, n. 1 (2009), p. 45-50, 2009. Disponível em : < https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/157866 > Acesso em: 12 de semtembro de 2021.

VIRGíLIO, P. **Eneida** (Tradução de Manuel Odorico Mendes). 2005. Disponível em: < http://www.ebooksbrasil.org/eLibris/eneida.html>. Acesso em: 10 de fevereiro de 2022.

VALERIO, M.; MOREIRA, L. O. R. M.; BRAZ, B. C.; NASCIMENTO, W. J. do, **A sala de aula invertida na universidade pública Brasileira: evidências da prática em uma licenciatura em ciências exatas**. Revista Thema, 2019. Dispobnível em: < https://periodicos.ifsul.edu.br/index.php/thema/article/view/1159 >. Acesso em: 09 de março de 2022.

ZAINUDDIN, Z.; HALILI, S. H. **Flipped classroom research and trends from diferente fields of study**. International Review of Research in Open and Distributed Learning, v.17, n.3, p.313-340, 2016.

A Exercícios I

1. A companhia α Ltda produz determinado produto e vende-o a um preço unitário de R$ 13,00 . Estima-se que o custo total c para produzir e vender q unidades é dado por $c = q^3 - 3q^2 + 4q + 2$. Supondo que toda a produção seja absorvida pelo mercado consumidor, que quantidade deverá ser produzida para se ter lucro máximo?

2. Determinado produto é produzido e vendido a um preço unitário p. O preço de venda não é constante, mas varia em função da quantidade q demandada pelo mercado, de acordo com a equação $p = \sqrt{20 - q}$, $0 \leq q \leq 20$. Admita que, para produzir e, vender uma unidade do produto, a empresa gasta em média $R\$3,50$. Que quantidade deverá ser produzida para que o lucro seja máximo?

3. A companhia γ Ltda. produz um determinado produto e vende-o com um lucro total dado por $L(q) = -q^3 + 12q^2 + 60q - 4$, em que q representa a quantidade produzida. Determine o lucro máximo e a produção que maximiza o lucro.

4. O lucro de uma empresa pela venda diária de x peças, é dado pela função: $L(x) = -x^2 + 14x - 40$. Quantas peças devem ser vendidas diariamente para que o lucro seja máximo?

5. Uma pequena empresa compra sua matéria prima ao custo de $R\$\ 15,00$ a unidade. Estima-se que, se cada unidade produzida for vendida por x reais, os consumidores comprarão 1225–x^2 unidades por mês. Assim:

   (a) Estabeleça a função que fornece o lucro mensal da empresa.

   (b) Qual o preço de venda maximizará o lucro?

   (c) Quantas unidades serão vendidas ao preço que maximiza o lucro? Qual o valor do lucro máximo?

6. Considere a função custo total representada por $C = 3x^2 + 2x + 108$ para $x > 0$. Assim, determine qual o nível de produção que minimiza o custo total médio?

Referências:

STEWART, J. *Cálculo. Volume I. São Paulo. Cengage Learning, 2013.*

ANTON, H. Cálculo. Volume I – 10. ed. – Porto Alegre: Bookman, 2014.

B Exercícios II

1. *A companhia* β *Ltda. produz determinado artigo e vende-o a um preço unitário de R\$* $230,00$*. Estima-se que o custo total para produzir mensalmente* x *unidades seja dado por* $= x3–3x^2 + 4x + 2$*, com* x *¿ 0. Supondo que toda a produção seja absorvida pelo mercado consumidor, que quantidade deverá ser produzida mensalmente para se ter lucro máximo? Qual o valor do lucro máximo?*

2. *Uma forma líquida de penicilina fabricada por uma firma farmacêutica é vendida a granel a um preço de R\$* 200 *por unidade. Se o custo total de produção para* x *unidades for* $C(x) = 500000 + 80x + 0,003x^2$ *e se a capacidade de produção da firma for de, no máximo,* 30000 *unidades em um tempo especificado, quantas unidades de penicilina devem ser fabricadas e vendidas naquele tempo para maximizar o lucro?*

3. *Uma companhia explora minério de níquel. Se a companhia extrair* x *toneladas de minério, pode vendê-lo a* $p = 2250,25x$ *dólares por tonelada. Encontre as funções receita e receita marginal. Qual é o nível de produção que fornece a maior receita?*

4. *Um produtor de fertilizante constata que, se produzir* x *unidades de fertilizante, pode vender seu produto a* $p = 3000,1x$ *dólares por unidade. O custo total de produção (em dólares) de* x *unidades é* $C(x) = 15.000 + 125x + 0,025x^2$*. Se a capacidade de produção da empresa for de, no máximo,* 1.000 *unidades de fertilizante num intervalo de tempo especificado, quantas unidades deveriam ser manufaturadas e vendidas nesse intervalo de tempo para maximizar o lucro?*

5. *(a) Uma indústria química vende ácido sulfúrico a granel a R\$* 100 *por unidade. Se o custo de produção total diário em dólares para* x *unidades for* $C(x) = 100.000 + 50x + 0,0025x^2$ *e se a capacidade de produção diária for de, no máximo,* 7.000 *unidades;*

   (a) *quantas unidades de ácido sulfúrico devem ser fabricadas e vendidas diariamente para maximizar o lucro?*

   (b) *Usando análise marginal, aproxime o efeito sobre o lucro causado por um aumento de* 7.000 *para* 7.001 *unidades na produção diária.*

6. *Uma firma determina que* x *unidades de seu produto podem ser vendidas diariamente a* p *dólares a unidade, onde* $x = 1.000 - p$ *O custo de produção de* x *unidades diárias é*

$C(x) = 3.000 + 20x$;

(a) *Encontre a função receita* $R(x)$ *e a função lucro* $P(x)$..

(b) *Supondo que a capacidade máxima de produção é de* 500 *unidades por dia, determine quantas unidades a companhia deve produzir e vender por dia para maximizar seu lucro.*

(c) *Encontre o lucro máximo.*

(d) *Qual é o preço unitário a ser cobrado para obter o lucro máximo?*

7. *Em um certo processo de fabricação química, o peso diário* y *de produção defeituosa depende do peso* x *de toda a produção, deacordo com a fórmula empírica* $y = 0,01x + 0,00003x^2$ *onde* x *e* y *estão em quilos. Se o lucro for* 100 *por kg do produto químico sem defeito e a perda for de $20 por kg de produto químico defeituoso produzido, quantos quilos do produto devem ser produzidos diariamente para maximizar o lucro diário total?*

Referências:

STEWART, J. Cálculo. Volume I. São Paulo. Cengage Learning, 2013.

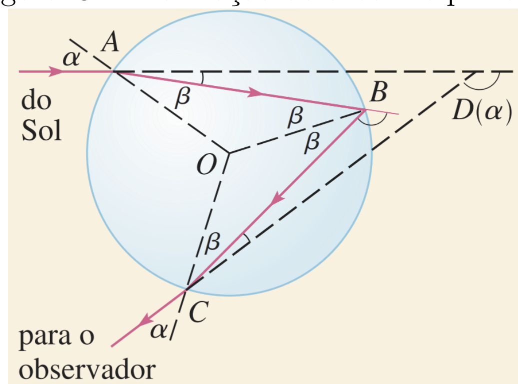
ANTON, H. Cálculo. Volume I – 10. ed. – Porto Alegre: Bookman, 2014.

C Desafio I: O cálculo do arco-íris

O arco-íris é o fenômeno que resulta da dispersão da luz do Sol em gotas de chuva suspensas na atmosfera. Ele tem fascinado a humanidade desde os tempos antigos e tem inspirado tentativas de explicação científica desde a época de Aristóteles. Neste projeto, usaremos as ideias de Descartes e de Newton para explicar a forma, a localização e as cores do arco-íris.

1. *A figura C.1 mostra um raio de luz entrando numa gota d'água esférica por A. Parte da luz é refletida, mas a reta AB mostra a trajetória da parte que entra na gota. Observe que a luz é refratada em direção à reta normal AO e, de fato, a Lei de Snell afirma que $sen(\alpha) = k \cdot sen(\beta)$, em que α é o ângulo de incidência, β é o ângulo de refração e $k \approx \frac{4}{3}$ o índice de refração para a água. Em B, uma parte da luz passa através da gota e é refratada para o ar, mas a reta BC mostra a parte que é refletida. (O ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão.) Quando o raio alcança C, parte dele é refletido, mas, por ora, estamos mais interessados na parte que deixa a gota d'água em C.*

Figura C.1: Formação do arco-íris principal



Fonte: STEWART, J. Cálculo. Volume I. São Paulo. Cengage Learning, 2013.

Note que ele é refratado para longe da reta normal. O ângulo de desvio $D(\alpha)$ é a quantidade de rotação no sentido horário sofrida pelo raio que passa por esse processo de três etapas. Logo,

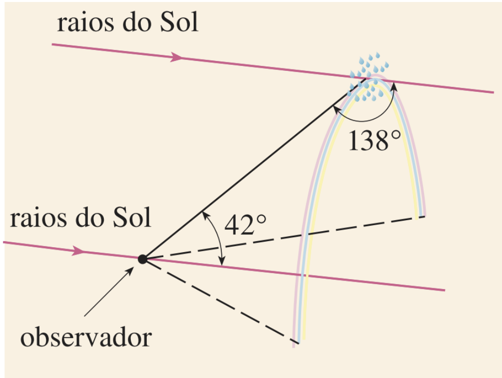
$$D(\alpha) = (\alpha - \beta) + (\pi - 2\beta) + (\alpha - \beta) = \pi + 2\alpha - 4\beta$$

Mostre que o valor mínimo do desvio é $D(x) \approx 138°$ e ocorre quando $\alpha \approx 59,4°$.

O significado do desvio mínimo é que, quando $\alpha \approx 59,4°$, temos $D'(\alpha) \approx 0$; logo,

$\delta D/\delta\alpha \approx 0$. Isso significa que muitos raios com $\alpha \approx 59,4°$ são desviados aproximadamente pela mesma quantidade. É essa concentração de raios vindos das proximidades da direção de desvio mínimo que cria a luminosidade do arco-íris primário. A figura C.2 mostra que o ângulo de elevação a partir do observador até o ponto mais alto sobre o arco-íris é $180° - 138° = 42°$. (Esse ângulo é chamado ângulo do arco-íris.)

Figura C.2: Ângulo do arco-íris



Fonte: STEWART, J. Cálculo. Volume I. São Paulo. Cengage Learning, 2013.

2. *O Problema 1 explica a localização do arco-íris principal, mas como explicar as cores? A luz do Sol é formada por um espectro de comprimentos de onda, partindo do vermelho e passando pelo laranja, amarelo, verde, azul, índigo e violeta. Como Newton havia descoberto em seus experimentos com prismas em 1666, o índice de refração é diferente para cada cor. (Este efeito é denominado dispersão.) Para a luz vermelha, o índice de refração é $k \approx 1,3318$, enquanto para a luz violeta, é $k \approx 1,3435$. Repetindo os cálculos do Problema 1 para esses valores de k, mostre que o ângulo do arco-íris é cerca de $42,3°$ para o arco vermelho e $40,6°$ para o arco violeta. Assim, o arco-íris consiste realmente em sete arcos individuais correspondentes às sete cores.*

3. *Talvez você já tenha visto um arco-íris secundário mais fraco acima do primeiro. Isso resulta da parte do raio que entra em uma gota de chuva e é refratada em A, refletida duas vezes (em B e C), e refratada quando deixa a gota em D (veja a figura C.3).*

   Fonte: STEWART, J. Cálculo. Volume I. São Paulo. Cengage Learning, 2013.

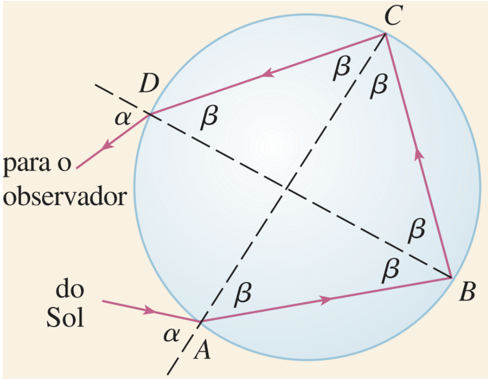
   Dessa vez, o ângulo de desvio $D(\alpha)$ é o ângulo total da rotação no sentido anti-horário que o raio sofre nesse processo de quatro etapas. Mostre que

$$D(\alpha) = 2\alpha - 6\beta + 2\pi$$

   e $D(\alpha)$ tem um valor mínimo quando

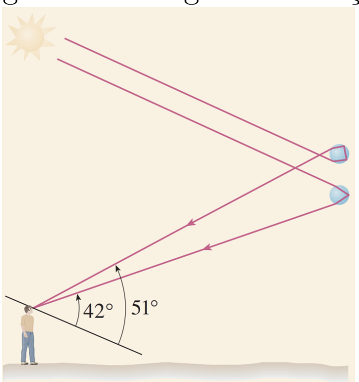
$$cos\alpha = \sqrt{\frac{k^2 - 1}{8}}$$

Figura C.3: Formação do arco-íris secundário



Usando $k = \frac{4}{3}$, mostre que o desvio mínimo é cerca de $129°$, e assim o ângulo do arco-íris para o arco-íris secundário é cerca de $51°$, conforme se vê na figura C.4.

Figura C.4: Ângulo de rotação



Fonte: STEWART, J. Cálculo. Volume I. São Paulo. Cengage Learning, 2013.

4. *Mostre que as cores no arco-íris secundário aparecem na ordem inversa daquela do primário.*

Figura C.5: Formação do arco-íris principal

Fonte: http://ograndedialogo.blogspot.com/2016/09/genesis-genesis-estudo-041-parte-36.html.

Referência:

STEWART, J. Cálculo. Volume I. São Paulo. Cengage Learning, 2013.

D Exercícios III

1. *Entre* $0\ °C$ *e* $30\ °C$, *o volume* V *(em centímetros cúbicos) de* $1\ kg$ *de água a uma temperatura* T *é aproximadamente dado pela fórmula*

$$V = 999,87 - 0,06426T + 0,0085043T^2 - 0,0000679T^3$$

Encontre a temperatura na qual a água tem sua densidade máxima.

2. *Um objeto de massa* m *é arrastado ao longo de um plano horizontal por uma força agindo ao longo de uma corda atada ao objeto. Se a corda faz um ângulo* θ *com o plano, então a intensidade da força é*

$$F = \frac{\mu m g}{\mu sen\theta + cos\theta}$$

onde μ *é uma constante positiva chamada coeficiente de atrito e onde* $0 \leq \theta \leq \pi/2$. *Mostre que* F *é minimizada quando* $tg\theta = \mu$.

3. *Um modelo para o preço médio norte-americano para o açúcar refinado entre 1993 e 2003 é dado pela função*

$$S(t) = -0,00003237t^5 + 0,0009037t^4 - 0,008956t^3 + 0,03629t^2 - 0,04458t + 0,4074$$

onde t *é medido em anos desde agosto de 1993. Estime os instantes nos quais o açúcar esteve mais barato e mais caro entre 1993 e 2003.*

4. *Quando um objeto estranho se aloja na traqueia, forçando uma pessoa a tossir, o diafragma empurra-o para cima, causando um aumento na pressão dos pulmões. Isso é acompanhado por uma contração da traqueia, fazendo um canal mais estreito por onde passa o ar expelido. Para uma dada quantidade de ar escapar em um tempo fixo, é preciso que ele se mova mais rápido através do tubo mais estreito do que no mais largo. Quanto maior for a velocidade da corrente de ar, maior a força sobre o objeto estranho. O uso de raios X mostra que o raio do tubo circular da traqueia se contrai para cerca de* $2/3$ *de seu raio normal durante a tosse. De acordo com o modelo matemático para a tosse, a velocidade* v *está relacionada ao raio* r *da traqueia pela equação*

$$v(r) = k(r_0 - r)r^2$$

$$\frac{1}{2}r_0 \leq r \leq r_0$$

em que k *é uma constante e* r_0 *raio normal da traqueia. A restrição sobre* r *deve-se ao fato de que as paredes da traqueia endurecem sob pressão, evitando uma contração maior que* $\frac{1}{2}r_0$ *(de outra forma, a pessoa ficaria sufocada).*

(a) Determine o valor de r *no intervalo* $[\frac{1}{2}r_0, r_0]$ *no qual* v *tenha um máximo absoluto. Como isso se compara com a evidência experimental?*

(b) Qual é o valor máximo absoluto de v *no intervalo?*

(c) Esboce o gráfico de v *no intervalo* $[0, r_0]$ *.*

Referências:

STEWART, J. Cálculo. Volume I. São Paulo. Cengage Learning, 2013.

ANTON, H. Cálculo. Volume I – 10. ed. – Porto Alegre: Bookman, 2014.

E Exercícios IV

1. *Considere o seguinte problema: uma caixa sem tampa deve ser construída a partir de um pedaço quadrado de papelão, com* 3 *metros de largura, cortando fora um quadrado de cada um dos quatro cantos e dobrando para cima os lados. Encontre o maior volume que essa caixa poderá ter.*

    (a) *Faça vários diagramas para ilustrar a situação, algumas caixas baixas com bases grandes e outras altas com base pequena. Encontre os volumes de várias dessas caixas. Parece existir um volume máximo? Se a resposta for sim, estime-o.*

    (b) *Faça um diagrama ilustrando a situação geral. Introduza uma notação e marque no diagrama seus símbolos.*

    (c) *Escreva uma expressão para o volume.*

    (d) *Use a informação dada para escrever uma equação que relacione as variáveis.*

    (e) *Use a parte 1d para escrever o volume como uma função de uma só variável.*

    (f) *Acabe de resolver o problema e compare sua resposta com sua estimativa da parte 1a*

2. *Um fazendeiro com* 300 *m de cerca quer cercar uma área retangular e então dividi-la em quatro partes com cercas paralelas a um lado do retângulo. Qual é a maior área total possível das quatro partes?*

    (a) *Faça vários diagramas ilustrando a situação, alguns com divisões rasas e largas e alguns com divisões profundas e estreitas. Encontre as áreas totais dessas configurações. Parece que existe uma área máxima? Se a resposta for sim, estime-a.*

    (b) *Faça um diagrama ilustrando a situação geral. Introduza uma notação e marque no diagrama seus símbolos.*

    (c) *Escreva uma expressão para a área total.*

    (d) *Use a informação dada para escrever uma equação que relacione as variáveis.*

    (e) *Use a parte 2d para escrever a área total como uma função de uma variável.*

    (f) *Acabe de resolver o problema e compare sua resposta com sua estimativa da parte 2a.*

Referências:

STEWART, J. Cálculo. Volume I. São Paulo. Cengage Learning, 2013.

ANTON, H. Cálculo. Volume I – 10. ed. – Porto Alegre: Bookman, 2014.

F Exercícios V

1. *Encontre as dimensões de um retângulo com perímetro de* 100 m *cuja área seja a maior possível.*
2. *Encontre as dimensões de um retângulo com área de* 1000 m^2 *cujo perímetro seja o menor possível.*
3. *Uma caixa com uma base quadrada e sem tampa tem volume de* 32000 cm^3*. Encontre as dimensões da caixa que minimizam a quantidade de material usado.*
4. *Se* 1200 cm^2 *de material estiverem disponíveis para fazer uma caixa com uma base quadrada e sem tampa, encontre o maior volume possível da caixa.*
5. *Uma caixa com uma base quadrada e sem tampa tem volume de* 32000 cm^3*. Encontre as dimensões da caixa que minimizam a quantidade de material usado.*
6. *Uma lata cilíndrica é feita para receber um 1 litro de óleo. Encontre as dimensões que minimizarão o custo do metal para produzir a lata.*

Referências:

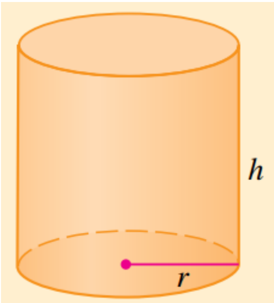
STEWART, J. Cálculo. Volume I. São Paulo. Cengage Learning, 2013.

ANTON, H. Cálculo. Volume I – 10. ed. – Porto Alegre: Bookman, 2014.

G Desafio II: A forma de uma lata

Neste desafio examinaremos a forma mais econômica para uma lata. Primeiro interpretamos isso como se o volume V de uma lata cilíndrica fosse dado e precisássemos achar a altura h e o raio r que minimizasse no custo do metal para fazer a lata (veja a figura G.1).

Figura G.1: Representação da lata

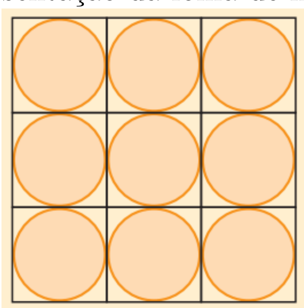


Fonte: STEWART, J. Cálculo. Volume I. São Paulo. Cengage Learning, 2013.

Se desprezarmos qualquer perda de metal no processo de manufatura, então o problema seria minimizar a área da superfície do cilindro. Resolvendo esse problema no Exercício 6 da lista de exercícios V (apendice F, descobrimos que $h = 2r$, isto é, a altura deve ser igual ao diâmetro. Porém, se você olhar seu armário ou um supermercado com uma régua, descobrirá que a altura é geralmente maior que o diâmetro, e a razão h/r varia de 2 até cerca 3,8. Vamos ver se conseguimos explicar este fenômeno.

1. *O material para fazer as latas é cortado de folhas de metal.*

Figura G.2: Representação da folha de metal em quadrados



Fonte: STEWART, J. Cálculo. Volume I. São Paulo. Cengage Learning, 2013.

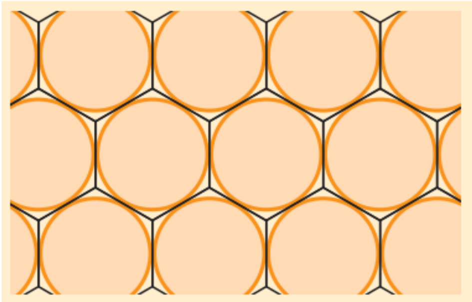
Os lados cilíndricos são formados dobrando-se retângulos; esses retângulos são cortados da folha com uma pequena ou nenhuma perda. Mas se os discos do topo e da base forem cortados de quadrados de lado $2r$ (como na figura G.2), isso leva a uma considerável perda de metal, que pode ser reciclado, mas que tem um pequeno ou nenhum valor para quem fabrica as latas.

Se for esse o caso, mostre que a quantidade de metal usada é minimizada quando

$$\frac{h}{r} = \frac{8}{\pi} \approx 2,55 \tag{G.1}$$

2. *Uma maneira mais eficiente de obter os discos é dividir a folha de metal em hexágonos e cortar as tampas e bases circulares dos hexágonos (veja a figura G.3).*

Figura G.3: Representação da folha de metal em hexágonos



Fonte: STEWART, J. Cálculo. Volume I. São Paulo. Cengage Learning, 2013.

Mostre que se for adotada essa estratégia, então

$$\frac{h}{r} = \frac{4}{\pi} \approx 2,21 \tag{G.2}$$

3. *Os valores de h/r que encontramos nos Problemas 1 e 2 estão muito próximos daqueles que realmente ocorrem nas prateleiras do supermercado, mas eles ainda não levam em conta tudo. Se examinarmos mais de perto uma lata, veremos que a tampa e a base são formadas de discos com raio maior que aqueles que são dobrados sobre as extremidades da lata. Se permitíssemos isso, aumentaríamos h/r. Mais significativamente, além do custo do metal, devemos incorporar o custo de manufatura da lata. Vamos supor que a maior parte da despesa esteja em ligar os lados às bordas para formar as latas. Se cortássemos os discos dos hexágonos como no Problema 2, então o custo total seria proporcional a*

$$4\sqrt{3}r^3 + 2\pi rh + k(4\pi r + h) \tag{G.3}$$

onde k é o inverso do comprimento que pode ser ligado ao custo por uma unidade de área de metal. Mostre que essa expressão é minimizada quando

$$\frac{\sqrt[3]{V}}{k} = \sqrt[3]{\frac{\pi h}{r}} \cdot \frac{2\pi - h/r}{\pi h/r - 4\sqrt{3}} \tag{G.4}$$

4. *Desenhe* $\sqrt[3]{V}/k$ *como uma função de* $x = h/r$ *e use seu gráfico para argumentar que quando uma lata é grande ou a junção é barata, deveríamos fazer* h/r *aproximadamente 2,21 (como no Problema 2). Mas quando a lata é pequena ou a junção é cara,* h/r *deve ser substancialmente maior.*

5. *Nossa análise mostra que as latas grandes devem ser quase quadradas, mas as latas pequenas devem ser altas e estreitas. Examine as formas relativas das latas em um supermercado. Nossa conclusão é de forma geral verdadeira na prática? Há exceções? Você pode apontar as razões de latas pequenas não serem sempre altas e estreitas?*

Referência:

STEWART, J. Cálculo. Volume I. São Paulo. Cengage Learning, 2013.

H Exercícios VI

1. *Um contêiner para estocagem retangular com uma tampa aberta deve ter um volume de* 10 m^3. *O comprimento de sua base é o dobro da largura. O material para a base custa R$ 10 por metro quadrado. O material para os lados custa R$ 6 por metro quadrado. Encontre o custo dos materiais para o mais barato desses contêineres.*

2. *Faça o Exercício 1 supondo que o contêiner tenha uma tampa feita do mesmo material usado nos lados*

3. *Um fazendeiro tem* 1200 m *de cerca e quer cercar um campo retangular que está na margem de um rio reto. Ele não precisa de cerca ao longo do rio. Quais são as dimensões do campo que tem maior área?*

4. *Um fazendeiro quer cercar uma área de* 15000 m^2 *em um campo retangular e então dividi-lo ao meio com uma cerca paralela a um dos lados do retângulo. Como fazer isso de forma que minimize o custo da cerca?*

5. *Devemos projetar um jardim de área retangular e protegido por uma cerca. Qual é a maior área possível de tal jardim se dispusermos de apenas* 100 m *lineares de cerca?*

6. *Uma caixinha aberta no topo deve ser feita com uma folha de papelão medindo* 16 cm *por* 30 cm, *cortando-se fora quadrados iguais dos quatro cantos e dobrando-se os lados. Qual é o tamanho dos quadrados para se obter uma caixa com o maior volume?*

Referências:
STEWART, J. Cálculo. Volume I. São Paulo. Cengage Learning, 2013.
ANTON, H. Cálculo. Volume I – 10. ed. – Porto Alegre: Bookman, 2014.

I Exercícios VII

1. *Considere o seguinte problema: encontre dois números cuja soma seja 23 e cujo produto seja máximo.*
   (a) *Faça uma tabela de valores, tal que a soma dos números nas duas primeiras colunas seja sempre 23. Com base na evidência mostrada em sua tabela, estime a resposta para o problema.*
   (b) *Use o cálculo para resolver o problema e compare com sua resposta da parte 1a.*
2. *Encontre dois números cuja diferença seja* 100 *e cujo produto seja mínimo.*
3. *Encontre dois números positivos cujo produto seja* 100 *e cuja soma seja mínima.*
4. *A soma de dois números positivos é* 16. *Qual é o menor valor possível para a soma de seus quadrados?*
5. *Encontre um número no intervalo* $[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$ *tal que a soma do número com seu recíproco seja*
   (a) *a menor possível*
   (b) *a maior possível*
6. *Como escolher dois números não negativos tais que sua soma seja 1 e a soma de seus quadrados seja*
   (a) *a maior possível?*
   (b) *a menor possível?*

Referências:
STEWART, J. Cálculo. Volume I. São Paulo. Cengage Learning, 2013.
ANTON, H. Cálculo. Volume I – 10. ed. – Porto Alegre: Bookman, 2014.

J Exercícios VIII

1. *Encontre o ponto sobre a parábola* $y^2 = 2x$ *mais próximo de* $(1, 4)$.

2. *Qual é a distância vertical máxima entre a reta* $y = x + 2$ *e a parábola* $y = x^2$ *para* $-1 \leq x \leq 2$ *?*

3. *Qual é a distância vertical mínima entre as parábolas* $y = x^2 + 1$ *e* $y = x - x^2$

4. *Encontre o ponto sobre a reta* $y = 2x + 30$ *que está mais próximo da origem.*

5. *Encontre o ponto sobre a curva* $y = \sqrt{x}$ *que está mais próximo do ponto* $(3, 0)$.

6. *Encontre os pontos sobre a elipse* $4x^2 + y^2 = 4$ *que estão mais distantes do ponto* $(1, 0)$.

Referências:

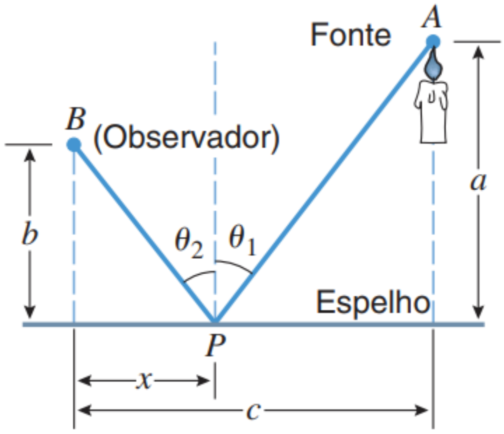
STEWART, J. Cálculo. Volume I. São Paulo. Cengage Learning, 2013.

ANTON, H. Cálculo. Volume I – 10. ed. – Porto Alegre: Bookman, 2014.

K Desafio III: Fermat e óptica

1. *O Princípio de Fermat na óptica afirma que a luz, viajando de um ponto para outro, segue aquele caminho para o qual o tempo total no percurso é mínimo. Em um meio uniforme, os caminhos de "tempo mínimo" e de "menor distância" vêm a ser iguais; assim, a luz, se não obstruída, viaja em linha reta. Suponha que tenhamos uma fonte de luz, um espelho plano e um observador em um meio uniforme. Se um raio de luz deixa a fonte, bate em um espelho e vai até o observador, então sua trajetória consiste em dois segmentos de reta, conforme mostra a Figura K.1. De acordo com o princípio de Fermat, a trajetória é tal que o tempo t gasto no percurso é mínimo ou, como o meio é uniforme, a trajetória será tal que a distância total percorrida de A a P a B será a menor possível. Supondo que o mínimo ocorre quando $dt/dx = 0$, mostre que o raio de luz irá atingir o espelho em um ponto P, tal que o "ângulo de incidência" θ_1 será igual ao "ângulo de reflexão" θ_2.*

Figura K.1: Representação da trajetória do raio de luz



]

Fonte: ANTON, H. Cálculo (tradução: Claus Ivo Doering). Volume I – 10. ed. – Porto Alegre: Bookman, 2014.

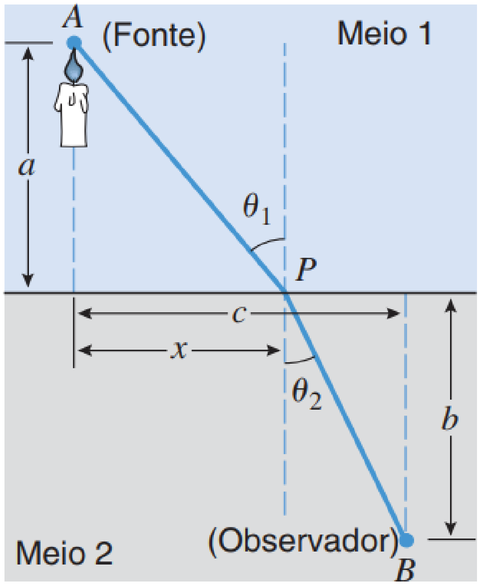
2. *O princípio de Fermat também explica por que um raio de luz que passa entre ar e água se inclina (refração). Imagine dois meios uniformes (como água e ar) e um raio de luz viajando de uma fonte A em um meio para um observador B em outro meio (Figura K.2). Sabe-se que a luz viaja a uma velocidade constante em um meio uniforme, porém mais vagarosamente em um meio mais denso (como a água) do que em um menos denso (como*

o ar). Consequentemente, o percurso de menor tempo entre A e B não é necessariamente uma reta, mas uma reta quebrada de A para P e para B, permitindo que a luz leve vantagem de sua maior velocidade no meio menos denso. A Lei de Refração de Snell afirma que a trajetória do raio de luz é tal que

$$\frac{sen\theta_1}{v_1} = \frac{sen\theta_2}{v_2} \tag{K.1}$$

onde v_1 *é a velocidade da luz no primeiro meio,* v_2*, no segundo e* θ_1 *e* θ_2 *são os ângulos mostrados na Figura K.2. Mostre que isso segue da hipótese de que o caminho de tempo mínimo ocorre quando* $dt/dx = 0$.

Figura K.2: Representação da trajetória do raio de luz entre dois meios distintos



]

Fonte: ANTON, H. Cálculo (tradução: Claus Ivo Doering). Volume I – 10. ed. – Porto Alegre: Bookman, 2014.

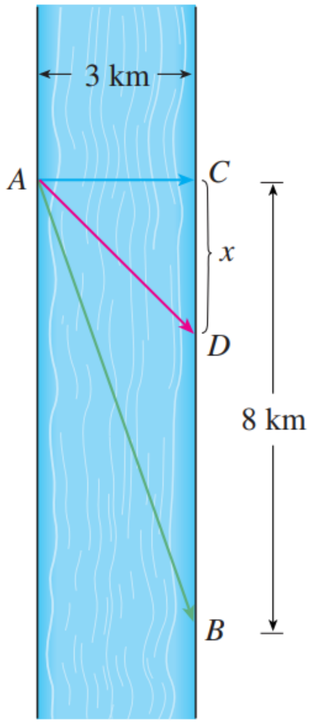
Referência:

ANTON, H. Cálculo. Volume I – 10. ed. – Porto Alegre: Bookman, 2014.

L Exercícios IX

1. *Um homem lança seu bote em um ponto A na margem de um rio reto, com uma largura de 3 km, e deseja atingir tão rápido quanto possível um ponto B na outra margem, 8 km rio abaixo (veja a Figura L.1). Ele pode dirigir seu barco diretamente para o ponto C e então seguir andando para B, ou rumar diretamente para B, ou remar para algum ponto D entre C e B e então andar até B. Se ele pode remar a 6 km/h e andar a 8 km/h, onde ele deveria aportar para atingir B o mais rápido possível? (Estamos supondo que a velocidade da água seja desprezível comparada com a velocidade na qual o homem rema.)*

Figura L.1: Rio



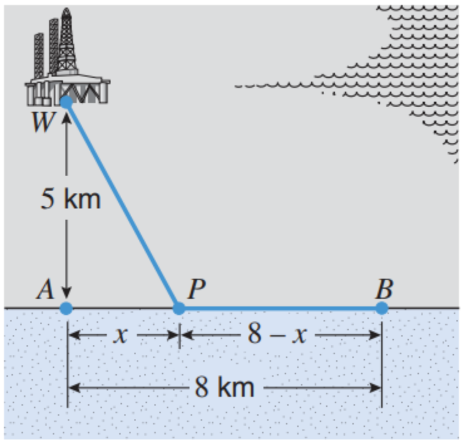
Fonte: STEWART, J. Cálculo. Volume I. São Paulo. Cengage Learning, 2013.

2. *Resolva o problema no Exercício 1 se o rio tiver 5 km de largura e o ponto B estiver somente a 5 km de A rio abaixo.*

3. *A Figura L.2 mostra um poço de petróleo no mar em um ponto W a 5 km do ponto A mais próximo de uma praia reta. O petróleo é bombeado de W até um ponto B na praia*

a 8 km de A da seguinte forma: de W até um ponto P na praia entre A e B através de uma tubulação colocada sob a água, e de P até B através de uma tubulação colocada ao longo da praia. Se o custo em dólares para colocar a tubulação for de \$1.000.000/*km sob a água e de* \$500.000/*km por terra, onde deve estar localizado P para minimizar o custo de colocar a tubulação? Fonte: ANTON, H. Cálculo (tradução: Claus Ivo Doering). Volume*

Figura L.2: Representação do movimentação do petróleo em tubulação

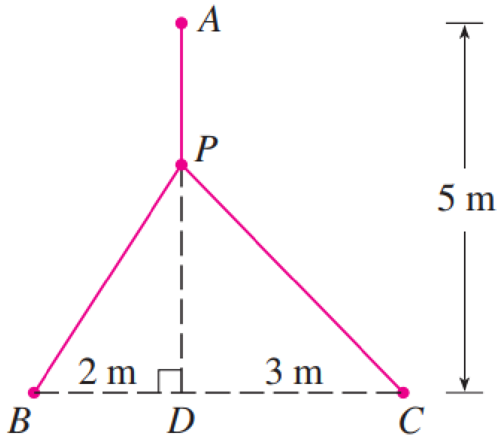


]

I – 10. ed. – Porto Alegre: Bookman, 2014.

4. *Um ponto P precisa ser localizado em algum ponto sobre a reta AD de forma que o comprimento total L de fios ligando P aos pontos A, B e C seja minimizado (veja a figura L.3). Expresse L como uma função de e use os gráficos de L e para estimar o valor mínimo de L*

Figura L.3: Representado os fios entre os pontos



Fonte: STEWART, J. Cálculo. Volume I. São Paulo. Cengage Learning, 2013.

Referências:

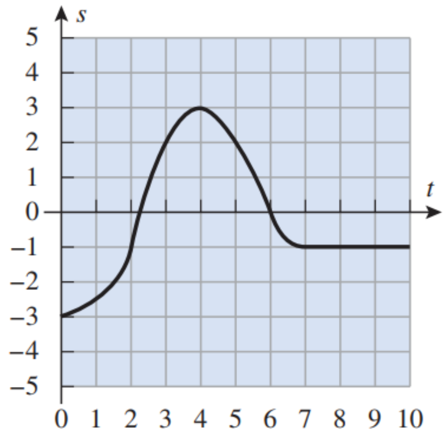
STEWART, J. Cálculo. Volume I. São Paulo. Cengage Learning, 2013.

ANTON, H. Cálculo. Volume I – 10. ed. – Porto Alegre: Bookman, 2014.

M Exercícios X

1. *A Figura M.1 mostra a curva posição versus tempo para uma partícula em movimento em um eixo s.*

   Figura M.1: Posição versus tempo de uma partícula

   ]

   Fonte: ANTON, H. Cálculo (tradução: Claus Ivo Doering). Volume I – 10. ed. – Porto Alegre: Bookman, 2014.

   Descreva em palavras como varia a posição da partícula em relação ao tempo.

2. *Seja* $s(t) = t^3 - 6t^2$ *a função posição de uma partícula movendo-se ao longo de um eixo s, onde s está em metros, enquanto t é dado em segundos. Encontre as funções velocidade e velocidade escalar e mostre os gráficos da posição, da velocidade e da velocidade escalar versus tempo.*

3. *Seja* $s(t) = t^3 - 6t^2$ *a função posição de uma partícula movendo-se ao longo de um eixo s, onde s está em metros e t, em segundos. Encontre a função aceleração instantâ- nea* $a(t)$ *e mostre o gráfico da aceleração versus o tempo.*

4. *Nos exercícios 2 e 3, encontramos as curvas velocidade versus tempo e aceleração versus tempo para uma partícula com função posição* $s(t) = t^3 - 6t^2$. *Use essas curvas para determinar quando a partícula está aumentando e diminuindo sua velocidade e confirme se seus resultados estão consistentes com a curva da velocidade escalar versus tempo obtida no exercício 2*

5. *Use a curva posição versus tempo da Figura M.1 para determinar quando a partícula do Exercício 1 está aumentando e quando está diminuindo a velocidade.*

6. *Suponha que* $s(t) = 2t^3 - 21t^2 + 60t + 3$ *seja a função posição de uma partícula movendo-se ao longo do eixo s. Analise o movimento da partícula com* $t \geq 0$.

Referências:

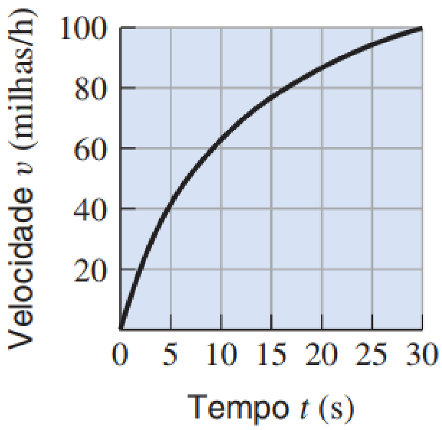
STEWART, J. Cálculo. Volume I. São Paulo. Cengage Learning, 2013.

ANTON, H. Cálculo. Volume I – 10. ed. – Porto Alegre: Bookman, 2014.

N Exercícios XI

1. *A figura N.1 mostra o gráfico velocidade versus tempo em um teste.*

Figura N.1: Velocidade versus tempo de uma partícula



]

Fonte: ANTON, H. Cálculo (tradução: Claus Ivo Doering). Volume I – 10. ed. – Porto Alegre: Bookman, 2014. Dados da Car and Driver Magazine, dezembro 2010.

Usando esse gráfico, estime:

(a) *A aceleração a 60 milhas por hora (em pés por segundo ao quadrado, lembrando que 1 milha/h/s = 1,467 pés/s^2).*

(b) *O instante em que ocorre a aceleração máxima.*

2. *Seja* $s(t) = 5t^2 - 22t$ *a função posição de uma partícula movendo-se ao longo de um eixo coordenado, sendo s em metros e t em segundos.*

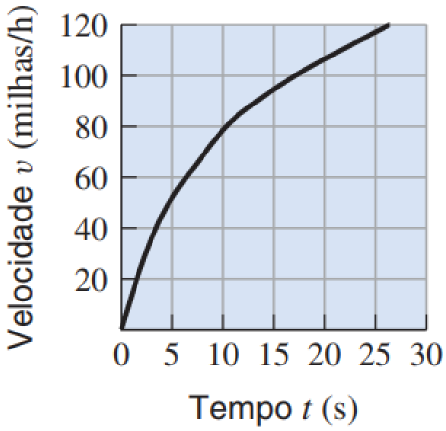
(a) *Encontre a velocidade escalar máxima da partícula no intervalo* $1 \leq t \leq 3$.

(b) *No intervalo do item 2a, quando a partícula está mais longe da origem? Qual é sua posição nesse instante?*

3. *Seja* $s = 100/(t2 + 12)$ *a função posição de uma partícula que se move ao longo de uma reta coordenada, onde s está em metros e t está em segundos. Encontre a velocidade escalar má- xima da partícula para* $t \geqslant 0$ *e o sentido do movimento dela quando está com velocidade escalar máxima.*

4. A figura N.2 mostra o gráfico velocidade versus tempo em um teste.

Figura N.2: Posição versus tempo de uma partícula



]

Fonte: ANTON, H. Cálculo (tradução: Claus Ivo Doering). Volume I – 10. ed. – Porto Alegre: Bookman, 2014. Dados da Car and Driver Magazine, março 2011.

Usando esse gráfico, estime:

(a) A aceleração a 60 milhas por hora (em pés por segundo ao quadrado, lembrando que 1 milha/h/s = 1,467 pés/s^2).

(b) O instante em que ocorre a aceleração máxima.

Referências:

STEWART, J. Cálculo. Volume I. São Paulo. Cengage Learning, 2013.

ANTON, H. Cálculo. Volume I – 10. ed. – Porto Alegre: Bookman, 2014.

O Desafio VI

1. *Um time de beisebol joga em um estádio com capacidade para 55 000 espectadores. Com o preço do ingresso a R\$ 10, a média de público tem sido de 27 000. Quando os ingressos abaixaram para R\$ 8, a média de público subiu para 33 000.*

   (a) *Encontre a função demanda, supondo que ela seja linear.*

   (b) *Qual deveria ser o preço dos ingressos para maximizar a receita?*

2. *Durante os meses de verão, Terry faz e vende colares na praia. No verão passado, ele vendeu os colares por R\$ 10 cada e suas vendas eram em média de 20 por dia. Quando ele aumentou o preço R\$ 1, descobriu que a média diminuiu em duas vendas por dia.*

   (a) *Encontre a função de demanda, supondo que ela seja linear.*

   (b) *Se o material de cada colar custa a Terry R\$ 6, qual deveria ser o preço da venda para maximizar seu lucro.*

3. *Um fabricante tem vendido 1000 aparelhos de televisão de tela plana por semana, a 450 cada. Uma pesquisa de mercado indica que para cada R\$ 10 de desconto oferecido ao comprador, o número de aparelhos vendidos aumenta 100 por semana.*

   (a) *Encontre a função demanda.*

   (b) *Que desconto a companhia deveria oferecer ao comprador para maximizar sua receita?*

   (c) *Se sua função custo semanal for $C(x) = 68000 + 150x$, como o fabricante deveria escolher o tamanho do desconto para maximizar seu lucro?*

4. *O gerente de um complexo de apartamentos com 100 unidades sabe, a partir da experiência, que todas as unidades estarão ocupadas se o aluguel for R\$ 800 por mês. Uma pesquisa de mercado sugere que, em média, uma unidade adicional permanecerá vazia para cada R\$ 10 de aumento no aluguel. Qual o aluguel que o gerente deveria cobrar para maximizar a receita?*

Referências:

STEWART, J. Cálculo. Volume I. São Paulo. Cengage Learning, 2013.

ANTON, H. Cálculo. Volume I – 10. ed. – Porto Alegre: Bookman, 2014.

P Exercícios XII

1. *Encontre a área do maior retângulo que pode ser inscrito em um semicírculo de raio r.*
2. *Encontre as dimensões do retângulo com a maior área que pode ser inscrito em um círculo de raio r.*
3. *Encontre a área do maior trapézio que pode ser inscrito num círculo com raio 1 e cuja base é o diâmetro do círculo.*
4. *Encontre as dimensões do triângulo isósceles de maior área que pode ser inscrito em um círculo de raio r.*
5. *Encontre a área do maior retângulo que pode ser inscrito em um triângulo retângulo com catetos de comprimentos 3 e 4 cm, se dois lados do retângulo estiverem sobre os catetos.*

Referências:

STEWART, J. Cálculo. Volume I. São Paulo. Cengage Learning, 2013.

ANTON, H. Cálculo. Volume I – 10. ed. – Porto Alegre: Bookman, 2014.

FOLHA DE ANOTAÇÕES CORNELL	**Nome:** ____ **Aula:** __________________________ **Tópico:** ____________________________ **Data:** ________/ _____/ _________ **Período** _______
PERGUNTAS	***ANOTAÇÕES***

RESUMO: Escreva 4 ou mais sentenças descrevendo o que você aprendeu destas anotações.

____

____

____

____

____