CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

DANIEL CÉSAR DE OLIVEIRA

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA SOBRE CADEIAS DE MARKOV

Belo Horizonte
2022

DANIEL CÉSAR DE OLIVEIRA

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA SOBRE CADEIAS DE MARKOV

Dissertação apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de Mestre.

Orientadora:
Camila Ferreira de Souza

Coorientadora:
Jeanne Carmo Amaral

Banca Examinadora:
Éden Santana Campos Amorim
Daniel Ungaretti Borges

Belo Horizonte
2022

Oliveira, Daniel César de

O48s Uma sequência didática sobre cadeias de Markov / Daniel César de Oliveira. – 2022.

74 f.

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Orientadora: Camila Ferreira de Souza.

Coorientadora: Jeanne Carmo Amaral.

Dissertação (mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais.

1. Markov, Processos de – Teses. 2. Matrizes (Matemática) – Teses. 3. Chapman, Equações de – Teses. 4. Kolmogorov, Equações de – Teses. 5. Didática – Metodologia – Teses. 6. Distribuição – Teoria da probabilidade – Teses. I. Souza, Camila Ferreira de. II. Amaral, Jeanne Carmo. III. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. IV. Título.

CDD 519.217

Elaboração da ficha catalográfica pela bibliotecária Jane Marangon Duarte, CRB 6º 1592 / Cefet/MG

DANIEL CÉSAR DE OLIVEIRA

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA SOBRE CADEIAS DE MARKOV

Dissertação apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de Mestre.

APROVADA: 31 de Maio de 2022.

Daniel César Oliveira

Daniel César de Oliveira
(Autor)

Camila Ferreira de Souza
(Orientadora)

Belo Horizonte
2022

Este trabalho é dedicado a minha família, que são a razão do meu viver, aos meus amigos, que são meus momentos de alegria, meus professores, que são minha inspiração e meus colegas de classe, que são minha ajuda.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente aos meus pais, que desde a infância me ensinaram a importância do aprender e aos meus irmãos por sempre me apoiarem na escolha profissional que fiz.

A minha esposa, que além de ser o amor da minha vida e uma maravilhosa mãe para nosso filho, me incentivou e me apoiou a fazer o mestrado e a escrever esse trabalho.

Ao meu filho, que desde o nascimento mudou a minha vida, trazendo uma felicidade imensa para minha vida e um desejo de ser uma pessoa melhor.

As minhas orientadoras Camila Ferreira de Souza e Jeanne Carmo Amaral por toda a ajuda e conhecimento que me proporcionaram, além de toda a paciência que tiveram comigo.

Aos meus colegas de classe por toda a ajuda e pelo apoio dentro e fora do mestrado.

Ao CEFET-MG e todos os professores do PROFMAT por transmitirem o conhecimento com tanta didática e paixão, vocês são exemplos a serem seguidos.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

RESUMO

Este trabalho tem seus estudos baseados nas Cadeias de Markov e Equações de Chapman-Kolmogorov. Para a compreensão do texto temos uma importante revisão de Matriz e Probabilidade nos Apêndices A e B. Estes temas costumam ser abordados na educação básica, normalmente, normalmente no segundo ano do Ensino Médio. Com esses temas revisados, temos o passaporte para entrar nos conceitos básicos de Cadeias de Markov e suas diferentes aplicações. As Cadeias de Markov possuem inúmeras aplicações em economia, genética, matemática e a principal característica delas é que a determinação da probabilidade futura não depende dos eventos passados, apenas do evento presente. O objetivo desse trabalho é trazer para os alunos do segundo ano do Ensino Médio os conceitos básicos de Cadeias de Markov utilizando uma abordagem de Matrizes e Probabilidade já estudada por eles, apresentando aos alunos exemplos interessantes, instigando sua curiosidade, buscando motivá-los durante a aprendizagem e demonstrando como a matemática é útil, necessária e possui uma imensidão de aplicabilidades no mundo a nossa volta. Por fim, com a sugestão de sequência didática, queremos que professores e alunos tenham uma experiência rica e um aprendizado significativo dos conceitos básicos de Cadeias de Markov e Equações de Chapman-Kolmogorov a partir de Matrizes e Probabilidade. A sequência didática possui cinco etapas consecutivas com grau de complexidade crescente, buscando proporcionar aos alunos um aprendizado específico e que eles, por meio de suas habilidades, atinjam novos níveis de aprendizagem.

Palavras-chave: Produto de Matrizes. Probabilidade Condicional. Cadeias de Markov. Equação de Chapman-Kolmogorov. Sequência didática.

ABSTRACT

This work is based on the studies of Markov Chains and Chapman-Kolmogorov Equations. To understand the text in Annexes A and B, there is a relevant review about Matrix and Probability, topics covered in the basic education level, usually in the second year of high school. After the review of those topics, it is possible to approach basic concepts of Markov Chains and their different applications. Markov Chains have numerous applications in economics, genetics, mathematical problems, and their main characteristic is that the determination of future probability does not depend on past probabilities, but it only depends on present probability. The objective of this work is to introduce the basic concepts of Markov Chains to second year high school students using an approach of Matrices and Probability that they are already familiar with, presenting them with interesting examples, instigating their curiosity, seeking to motivate them during the learning process and demonstrating how mathematics is useful, necessary and can be applied in several ways in the world around us. Finally, with the suggestion of a didactic sequence, we want teachers and students to have a rich experience and a significant learning of the basic concepts of Markov Chains and Chapman-Kolmogorov Equations after Matrices and Probability. The didactic sequence has five consecutive stages with an increasing degree of complexity, seeking to provide students with a specific, defined learning process and that they, through their abilities, reach new levels of learning.

Keywords: Product of Matrices. Conditional Probability. Markov Chains. Chapman-Kolmogorov Equation. Didactic Sequence.

LISTA DE ABREVIATURAS

BNCC – Base Nacional Comum Curricular.

CEFET/MG – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais.

PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais.

PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho se dedica a introduzir as Cadeias de Markov, que são uma classe de processos estocásticos ou aleatórios que possuem uma característica peculiar, são processos que “não possuem memória”. Existem várias situações que podem ser modeladas como Cadeias de Markov. Por exemplo controle biológico de plantas, previsões em genética, precipitações pluviométricas, migração populacional, entre vários outros. Devido à sua frequente ocorrência, esses processos têm sido alvo de muitos estudos, obtendo-se assim uma teoria rica que nos permite resolver muitos problemas relacionados.

Sobre as aplicações das Cadeias de Markov NORRIS, (1997, p. xiv) diz:

> “O que as torna importantes é que cadeias de Markov não só modelam muitos fenômenos interessantes, mas também a falta de propriedade de memória possibilita prever como uma cadeia de Markov pode se comportar e calcular probabilidades e valores esperados que quantifiquem esse comportamento.”

O primeiro matemático a estudar Cadeias de Markov foi o matemático russo Andrei A. Markov. Os estudos iniciais envolvendo essas cadeias surgiram em seu trabalho quando ele estudava a probabilidade de ocorrer uma consoante em uma determinada posição de uma palavra qualquer. Para o matemático russo essa probabilidade dependeria apenas da letra anterior ser uma vogal ou consoante. Os primeiros resultados sobre o tema foram publicados em 1906 e atualmente são amplamente utilizados em diversas áreas do conhecimento.

Apesar de Cadeias de Markov ser um tema normalmente apresentado apenas aos alunos do ensino superior, não existem impedimentos lógicos para que seus conceitos básicos não sejam também ensinados no ensino médio. Isso porque, para o entendimento de seus cálculos, o estudante precisa ter um conhecimento em Matrizes e em Probabilidade, assuntos esses que são amplamente abordados a partir do segundo ano do ensino médio. O estudo de Cadeias de Markov fortalece o pensamento matricial e probabilístico nos alunos. Segundo a BNCC, (p. 533 e 546), os alunos do ensino médio devem desenvolver e serem capazes de:

> - (EM13MAT106) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar esse ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).
> - (EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.
> - (EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.

Ao estudarem as Cadeias de Markov, além dos alunos terem a oportunidade de um novo aprendizado, eles podem enxergar a conexão, muita das vezes inesperada, entre matrizes e probabilidade. A aplicação de matrizes e suas operações em outras áreas do conhecimento reforça nos alunos que a matemática está presente em muitas situações da vida, aumentando assim em cada um deles o interesse por esta disciplina. Acreditamos que esses alunos ao perceberem as matrizes e as probabilidades como ferramentas na previsão de situações futuras, influenciando assim na tomada de decisões de vários profissionais, entendem que esses e outros conhecimentos matemáticos são aplicáveis, eficientes e extremamente interessantes. O PCN, (1999, p. 41), enfatiza que os alunos devem aprender a:

> "[...] analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade; [...]."

Esta dissertação tem o objetivo de utilizar da rica teoria de Cadeias de Markov para criar uma sequência didática na qual professores do ensino básico possam ensinar alunos do segundo ano do ensino médio esse processo estocástico utilizando seus conhecimentos prévios em Matrizes e Probabilidade. Utilizamos situações-problema que promovem uma contextualização de forma eficaz nos quais nosso leitor tem uma familiaridade, buscando trazer facilidade na leitura, aproximação entre o conteúdo e a prática e um interesse em resolver situações cotidianas. Acreditamos, assim como cita o PCN, (1997, p. 19), que:

> "[...] O significado da matemática para o aluno resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais disciplinas, entre ela e seu cotidiano e das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos."

Esta dissertação está estruturada da seguinte maneira:

Revisamos Matrizes no Apêndice A e Probabilidade no Apêndice B para que o estudante tenha uma visão geral dos pré requisitos que utilizaremos. Além disso eles contêm referências para materiais mais aprofundados sobre esses temas.

No segundo capítulo iniciamos pelo estudo de processos estocásticos e suas classificações. Após esse início avançamos com os estudos sobre Cadeias de Markov apresentando a sua definição e as suas características: Probabilidade de transição, Matriz de transição, distribuição inicial e vetor estado. Terminamos o capítulo com o estudo das equações de Chapman-Kolmogorov e suas aplicações nos exemplos que permeiam esta dissertação.

Por fim, no terceiro e último capítulo trazemos uma proposta de sequência didática para o aprendizado do conceito de Cadeias de Markov e Equação de Chapman-Kolmogorov utilizando como base conteúdos estudados no segundo ano do ensino médio como Matriz e

Probabilidade. Nessa sequência didática sugerida temos cinco etapas consecutivas, com a proposta de proporcionar aos alunos um aprendizado específico e definido. A partir de situações-problema o objetivo, além de despertar a atenção e a curiosidade dos alunos, é calcular probabilidades futuras utilizando como apoio para tal o site *Matrix Calculator, (http://matrixcalc.org/pt/).*

2 CADEIAS DE MARKOV

Como citado na introdução as Cadeias de Markov são uma classe de processos estocásticos e um processo estocástico é uma família de variáveis aleatórias que evoluem ao longo do tempo. O nosso intuito é estudar Cadeias de Markov, que é um processo estocástico caracterizado pela perda de memória, ou seja, no qual seu estado futuro depende apenas do seu estado presente, não importando seu estado passado.

Iniciaremos esse capítulo pelo estudo de processos estocásticos e suas classificações. Após esse início avançaremos com os estudos sobre Cadeias de Markov apresentando a sua definição e as suas características. Terminaremos o capítulo com o estudo das equações de Chapman-Kolmogorov.

2.1. Processos Estocásticos

Iniciamos com a definição de processos estocásticos.

Definição 2.1:

Processo estocástico é uma família $\{X_t\}_{t \in T}$ de variáveis aleatórias, definidas no mesmo espaço de probabilidade, indexadas pelo conjunto T.

Uma analogia bem interessante que podemos fazer é com o caso de uma função, $f(t)$, que assume um valor bem definido em t. No caso do processo estocástico, o valor, X_t, assumido em t, é aleatório. Chamamos de estado cada valor possível de ser assumido pela variável aleatória X_t e o conjunto de todos os estados possíveis, denotado por E. chamamos de espaço de estados.

Os processos estocásticos podem ser classificados como discretos ou contínuos, dependendo das variáveis aleatórias que o compõem serem discretas ou contínuas. Também podemos classificá-los como processo a tempo discreto ou contínuo, dependendo do conjunto T ser discreto ou contínuo. Focaremos nos processos estocásticos discretos a tempo discreto.

No Apêndice B encontra-se uma pequena revisão de conceitos probabilísticos básicos, em particular, os conceitos de variáveis aleatórias discretas e contínuas.

Podemos citar como exemplos de Processo estocástico, o lançamento de um dado, atendimento de clientes em um supermercado, evolução do índice Ibovespa, nível de importação e exportação da economia brasileira, número de ligações que ocorrem em uma determinada central telefônica, número de ataques de tubarão no verão em determinado local, propagação de epidemias, entre outros. Abaixo, trazemos dois exemplos mais concretos de processos estocásticos.

Exemplo 2.1:

Considere o lançamento de um dado honesto que contenha seis faces numeradas de 1 a 6. Lança-se o dado diversas vezes e observa-se em cada lançamento o número que foi obtido na face superior. Nesse caso podemos definir o processo estocástico discreto a tempo discreto, $\{X_n\}_{n\in N}$, em que X_n associa o resultado do lançamento do dado no n-ésimo lançamento**.**

Exemplo 2.2:

Considere o lançamento de um dado honesto que contenha seis faces numeradas de 1 a 6. Lança-se o dado diversas vezes e observa-se em cada lançamento o número que foi obtido na face superior. Para determinarmos a quantidade de vezes que a face f foi observada até o lançamento n, denotada por Y_n^f, precisamos de um processo acessório que retorna qual face foi sorteada no n-ésimo lançamento, que denotaremos por X_n, conforme exemplo anterior.

Para a contagem das observações da face *f* que foram sorteadas até o lançamento *n*, precisamos contar todos os índices $1 \leq i \leq n$ tais que o resultado de X_i foi *f*. Para isso definimos a indicadora desse evento: a função $1_{\{X_i=f\}}$ retorna 1 caso o evento $\{X_i = f\}$ aconteça e retorna 0 caso o evento $\{X_i = f\}$ não aconteça, ou seja,

$$1_{\{X_i=f\}} = \begin{cases} 1, se\ X_i = f \\ 0, se\ X_i \neq f. \end{cases}$$

Assim,

$$Y_n^f = \sum_{i=1}^{n} 1_{\{X_i=f\}}$$

determina a quantidade de vezes que a face *f* foi sorteada até o n-ésimo lançamento.

2.2. Cadeias de Markov

Dado um processo estocástico a tempo discreto $\{X_n\}_{n\in N}$ com espaço de estados E discreto, finito ou infinito enumerável, consideremos X_0, X_1, $\cdots$, X_{n-1} como "o passado", X_n o presente e X_{n+1}, X_{n+2}, $\cdots$ como "o futuro" do processo em relação ao tempo *n*. Nosso objetivo é estudar um tipo específico desse processo estocástico discreto a tempo discreto, denominado Cadeias de Markov, que possui a propriedade, denominada propriedade de Markov, de que seus valores futuros condicionados ao valor do processo no instante n não dependem de seus valores passados, ou seja, é um processo sem memória.

Definição 2.2 (Cadeia de Markov):

Um processo estocástico $\{X_n\}$ discreto a tempo discreto com espaço de estados E é denominado Cadeia de Markov se:

$$P(X_{n+1} = x_{n+1}|X_n = x_n, \cdots, X_0 = x_0) = P(X_{n+1} = x_{n+1}|X_n = x_n) \qquad (1.1)$$

para quaisquer $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1} \in E$.

A propriedade (1.1) é denominada propriedade de Markov. Ela nos diz basicamente que dado o estado atual, os estados passados não tem influência sobre o estado futuro.

2.2.1 Características das Cadeias de Markov

Em situações que podem ser modeladas por Cadeias de Markov iremos buscar três características que são importantes: probabilidade de transição, distribuição inicial e matriz de transição. Essas características são fundamentais para encontrarmos as propriedades das Cadeias de Markov.

Probabilidade de transição:

A probabilidade $P\left(X_{n+1} = x_j|X_n = x_i\right)$ representa a probabilidade de transição de um estado x_i no tempo n para um estado x_j no tempo $n+1$. Existem processos nos quais as probabilidades de transição variam com o tempo e, portanto, necessitam ser escritas como função do tempo t, mas nessa dissertação não iremos abordar tais processos e consequentemente nossas probabilidades de transição são independentes do tempo. Se a probabilidade de transição de um estado x_i para um estado x_j é independente do tempo, temos uma Cadeia de Markov homogênea ou estacionária.

Definição 2.3:

Seja $\{X_n\}$ uma Cadeia de Markov estacionária com espaço de estados E e sejam $x_i, x_j \in E$. A probabilidade

$$p_{x_i,x_j} = P\left(X_1 = x_j \middle| X_0 = x_i\right), \tag{1.2}$$

é conhecida como a *probabilidade de transição* do estado x_i para o estado x_j.

Observamos que em uma Cadeia de Markov estacionária temos

$$p_{x_i,x_j} = P\left(X_{n+1} = x_j \middle| X_n = x_i\right) \text{ para todo } n \geq 0.$$

Matriz de transição:

Em uma Cadeia de Markov a matriz de transição é a matriz quadrada de ordem m, $P = \left(p_{i,j}\right)_{mxm}$, na qual seus elementos, $p_{i,j}$, são as probabilidades de transição do estado x_i para o estado x_j. A matriz de transição é fundamental, pois atua como uma facilitadora no processo de determinação das probabilidades futuras a partir das probabilidades atuais.

Definição 2.4:

Seja $\{X_n\}$ uma Cadeia de Markov estacionária com espaço de estados $E = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$ finito. A matriz quadrada $P = \left(p_{i,j}\right)_{mxm}$, dada por

$$P = \begin{pmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m,1} & \cdots & p_{m,m} \end{pmatrix}$$

em que $p_{i,j} = p_{x_i,x_j}$ é a probabilidade de transição de x_i para x_j definida em (1.2) é conhecida como *matriz de probabilidade de transição*.

Na matriz de probabilidades de transição $P = \left(p_{i,j}\right)$ todos os seus elementos são positivos e a soma dos elementos de cada linha é igual a 1 para todas as suas linhas, ou seja,

$$p_{i,j} \geq 0 \text{ e}$$

$$\sum_{j=1}^{m} p_{i,j} = 1, \qquad para\ todo\ i \in \{1,2, \dots, m\}.$$

Distribuição inicial:

Definição 2.5:

Seja $\{X_n\}$ uma Cadeia de Markov estacionária com espaço de estados E. A função $\pi_0(x)$, com $x \in E$, definida por

$$\pi_0(x) = P(X_0 = x), \qquad \forall\, x \in E$$

é denominada probabilidade inicial da cadeia.

A distribuição de X_0 é denominada distribuição inicial da cadeia e será denotada por um vetor linha de dimensão *m***:**

$$v^{(0)} = [P(X_0 = x_1) \quad \dots \quad P(X_0 = x_m)].$$

Indicaremos por $v^{(n)}$ o *vetor estado* na n-ésima observação, ou seja, se

$E = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$, então

$$v^{(n)} = [P(X_n = x_1) \quad \dots \quad P(X_n = x_m)].$$

No próximo exemplo, veremos que, para encontrar uma configuração da Cadeia de Markov basta conhecermos a distribuição inicial e as probabilidades de transição. Logo após o exemplo demonstraremos que esse resultado vale sempre.

Exemplo 2.3:

Uma pesquisa foi feita em um país para relacionar como o nível de estudo da próxima geração de uma família – nível fundamental, nível médio e nível superior – é influenciada pelo nível de estudo da geração anterior – nível fundamental, médio e superior – e constatou-se que:

- Se os pais possuem nível fundamental, então a probabilidade dos filhos possuírem nível de escolaridade fundamental é de 50%, médio 30% e superior 20%.
- Se os pais possuem nível médio, então a probabilidade dos filhos possuírem nível de escolaridade fundamental é de 30%, médio 30% e superior 40%.
- Se os pais possuem nível superior, então a probabilidade dos filhos possuírem nível de escolaridade fundamental é de 10%, médio 20% e superior 70%.

Sabendo que a geração atual tem ensino superior determine a probabilidade de ocorrer a seguinte sequência: primeira geração ter ensino médio, a segunda geração ter ensino superior e a terceira geração ter ensino fundamental.

Resolução:

Determinando como $\boldsymbol{Estado\ x_1}$ possuir ensino fundamental, $\boldsymbol{Estado\ x_2}$ possuir ensino médio e $\boldsymbol{Estado\ x_3}$ possuir ensino superior podemos escrever nossa matriz de probabilidades de transição

$$P = \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{bmatrix} \rightarrow P = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}7 \end{bmatrix}.$$

Pelo enunciado temos que nessa geração os familiares possuem ensino superior, ou seja, nossa probabilidade inicial, $P(X_0 = x_3) = \pi_0(x_3) = 1$.

Se $P(X_0 = x_3, X_1 = x_2, X_2 = x_3, X_3 = x_1)$ denota a probabilidade da geração atual, $(n = 0)$, ter ensino superior, a primeira geração ter ensino médio, a segunda geração ter ensino superior e a terceira geração ter ensino fundamental, temos que

$$P(X_0 = x_3, X_1 = x_2, X_2 = x_3, X_3 = x_1)$$
$$= P(X_0 = x_3) \cdot P(X_1 = x_2 | X_0 = x_3) \cdot P(X_2 = x_3 | X_0 = x_3, X_1 = x_2)$$
$$. P(X_3 = x_1 | X_0 = x_3, X_1 = x_2, X_2 = x_3).$$

Pela propriedade Markoviana temos:

$$P(X_0 = x_3, X_1 = x_2, X_2 = x_3, X_3 = x_1)$$
$$= P(X_0 = x_3) \cdot P(X_1 = x_2 | X_0 = x_3) \cdot P(X_2 = x_3 | X_1 = x_2) \cdot P(X_3 = x_1 | X_2 = x_3).$$

que pode ser reescrita como

$$\pi_0(x_3) \cdot p_{3,2} \cdot p_{2,3} \cdot p_{3,1}.$$

Pela matriz transição sabemos que $p_{3,2} = 0{,}2$, $p_{2,3} = 0{,}4$ e $p_{3,1} = 0{,}1$, portanto a probabilidade procurada é

$$\pi_0(x_3) \cdot p_{3,2} \cdot p_{2,3} \cdot p_{3,1} = 1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}1 = 0{,}008 = 0{,}8\%.$$

Logo, $P(X_0 = x_3, X_1 = x_2, X_2 = x_3, X_3 = x_1) = 0{,}8\%$.

Um processo Markoviano é totalmente definido pelas suas probabilidades de transição e a distribuição inicial de probabilidades, como mostraremos na proposição a seguir.

Proposição 2.1:

Seja $\{X_n\}$ uma Cadeia de Markov estacionária com espaços de estado E finito. Sabendo a distribuição inicial, $\pi_0(x)$, e as probabilidades de transição, p_{x_i,x_j}, conseguimos definir completamente o processo Markoviano, ou seja,

$$P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_m) = \pi_0(x_0) \cdot p_{x_0,x_1} \cdot p_{x_1,x_2} \cdot p_{x_2,x_3} \cdot \cdots \cdot p_{x_{m-1},x_m},$$

em que $x_i, x_j \in E$ e $n \in N$.

Demonstração:

Aplicando o Teorema do Produto, encontrado no apêndice B temos que

$$P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n)$$
$$= P(X_n = x_n | X_0 = x_0, \cdots, X_{n-1} = x_{n-1}) \cdot P(X_{n-1} = x_{n-1} | X_0 = x_0, \cdots, X_{n-2} = x_{n-2})$$
$$. P(X_{n-2} = x_{n-2} | X_0 = x_0, \cdots, X_{n-3} = x_{n-3}) \cdot \cdots \cdot P(X_1 = x_1 | X_0 = x_0). P(X_0 = x_0).$$

Como estamos em um processo Markoviano e observando que $\pi_0(x_0) = P(X_0 = x_0)$ temos que

$$P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n)$$
$$= p_{x_{n-1},x_n} \cdot p_{x_{n-2},x_{n-1}} \cdot p_{x_{n-3},x_{n-2}} \cdot \cdots \cdot p_{x_0,x_1} \cdot P(X_0 = x_0).$$
$$= \pi_0(x_0) \cdot p_{x_0,x_1} \cdot p_{x_1,x_2} \cdot p_{x_2,x_3} \cdot \cdots \cdot p_{x_{n-1},x_n}. \qquad \blacksquare$$

No próximo exemplo trazemos o vetor estado na n-ésima observação, $v^{(n)}$, obtido pelo produto matricial, $v^{(n)} = v^{(n-1)} \cdot P$. Logo após o exemplo demonstraremos o resultado.

Exemplo 2.4:

Assuma que, após uma consulta aos brasileiros feita pelo IBGE em relação à intenção de votos aos candidatos A e B, as Estatísticas mostraram que, atualmente:

- 35% preferem o candidato A,
- 65% preferem o candidato B,
- a probabilidade de, no mês seguinte, independente de qual ele seja, o eleitor mudar do candidato A para o B é de 40% e
- a probabilidade de, no mês seguinte, independente de qual ele seja, o eleitor mudar do candidato B para o A é de 30%.

Quais são as probabilidades de preferência em cada candidato daqui a dois meses?

Resolução:

Determinaremos como $\boldsymbol{Estado\ x_1}$ a preferência pelo candidato A e $\boldsymbol{Estado\ x_2}$ a preferência pelo candidato B, portanto nossa matriz de probabilidades de transição é

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}.$$

Pelo enunciado temos que o vetor estado inicial é $v^{(0)} = [0{,}35 \quad 0{,}65]$.

Para determinarmos as probabilidades de preferência no primeiro mês podemos utilizar a propriedade Markoviana.

Candidato A:

$$P(X_1 = x_1) = P(X_0 = x_1) \cdot p_{1,1} + P(X_0 = x_2) \cdot p_{2,1}$$

$$= 0{,}35 \cdot 0{,}65 + 0{,}65 \cdot 0{,}3 = 0{,}405.$$

Candidato B:

$$P(X_1 = x_2) = P(X_0 = x_1) \cdot p_{1,2} + P(X_0 = x_2) \cdot p_{2,2}$$

$$= 0{,}35 \cdot 0{,}4 + 0{,}65 \cdot 0{,}7 = 0{,}595.$$

Portanto temos o vetor estado do primeiro mês, $v^{(1)} = [0{,}405 \quad 0{,}595]$.

Se utilizarmos o produto entre o vetor estado inicial, $v^{(0)}$, e a matriz de probabilidades de transição, P, teremos o mesmo resultado:

$$v^{(1)} = v^{(0)} \cdot P,$$

$$[0{,}35 \quad 0{,}65] \cdot \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{bmatrix} = v^{(1)} = [0{,}405 \quad 0{,}595].$$

Para determinarmos as probabilidades de preferência no segundo mês iremos repetir os cálculos anteriores observando a equivalência entre eles.

Candidato A:

$$P(X_2 = x_1) = P(X_1 = x_1) \cdot p_{1,1} + P(X_1 = x_2) \cdot p_{2,1}$$

$$= 0{,}405 \cdot 0{,}65 + 0{,}595 \cdot 0{,}3 \cong 0{,}42.$$

Candidato B:

$$P(X_2 = x_2) = P(X_1 = x_1) \cdot p_{1,2} + P(X_1 = x_2) \cdot p_{2,2}$$

$$= 0{,}405 \cdot 0{,}4 + 0{,}595 \cdot 0{,}7 \cong 0{,}58.$$

Resultando no vetor estado do segundo mês, $v^{(2)} \cong [0{,}42 \quad 0{,}58]$.

Ao utilizarmos o produto entre o vetor estado, $v^{(1)}$, e a matriz de probabilidades de transição, P, tivemos o mesmo resultado

$$v^{(2)} = v^{(1)} \cdot P,$$

$$[0{,}405 \quad 0{,}595] \cdot \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{bmatrix} = v^{(2)} \cong [0{,}42 \quad 0{,}58].$$

Portanto a probabilidade de preferência, no segundo mês, no candidato A é de aproximadamente 42% e no candidato B é de aproximadamente 58%.

Observamos que para determinarmos $v^{(2)}$ foi necessário sabermos somente a *Matriz de Transição*, $P = \left(p_{i,j}\right)$, e o *vetor estado* presente no estado anterior, $v^{(1)}$, pois como sabemos da propriedade Markoviana o estado futuro depende somente do estado atual, independendo do estado passado.

Proposição 2.2:

Seja a *Matriz de Transição*, $P = \left(p_{i,j}\right)$, e o *vetor estado* na n-ésima observação, $v^{(n)}$, então

$$v^{(n)} = v^{(n-1)} \cdot P.$$

Demonstração:

A demonstração será feita usando indução sobre n.

Mostraremos que para $n = 1$ a proposição é verdadeira.

Para $n = 1$ temos $v^{(1)} = [P(X_1 = x_1) \quad ... \quad P(X_1 = x_m)]$. Sendo o vetor estado inicial, $v^{(0)} = [P(X_0 = x_1) \quad ... \quad P(X_0 = x_m)]$, e levando em consideração as probabilidades condicionais, temos:

$$P(X_1 = x_1) = P(X_1 = x_1 | X_0 = x_1) \cdot P(X_0 = x_1) + P(X_1 = x_1 | X_0 = x_2) \cdot P(X_0 = x_2)$$
$$+ \cdots + P(X_1 = x_1 | X_0 = x_m) \cdot P(X_0 = x_m).$$
$$\vdots$$
$$P(X_1 = x_m) = P(X_1 = x_m | X_0 = x_1) \cdot P(X_0 = x_1) + P(X_1 = x_m | X_0 = x_2) \cdot P(X_0 = x_2)$$
$$+ \cdots + P(X_1 = x_m | X_0 = x_m) \cdot P(X_0 = x_m).$$

Em outros termos,

$$P(X_1 = x_1) = p_{1,1} \cdot P(X_0 = x_1) + p_{2,1} \cdot P(X_0 = x_2) + \cdots + p_{m,1} \cdot P(X_0 = x_m).$$
$$\vdots$$
$$P(X_1 = x_m) = p_{1,m} \cdot P(X_0 = x_1) + p_{2,m} \cdot P(X_0 = x_2) + \cdots + p_{m,m} \cdot P(X_0 = x_m).$$

Observamos que cada elemento $P\left(X_1 = x_j\right)$ é obtido do produto do vetor $v^{(0)}$ pela j-ésima coluna de P, ou seja, $v^{(1)}$ é igual ao produto de $v^{(0)}.P$.

$$(P(X_0 = x_1) \quad ... \quad P(X_0 = x_m)) \cdot \begin{pmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m,1} & \cdots & p_{m,m} \end{pmatrix}$$
$$= v^{(1)} = v^{(0)} \cdot P.$$

Supondo que a igualdade seja válida para $n = l$, para $l > 0$, mostraremos que a igualdade continua valendo para $n = l + 1$.

Sendo o vetor estado $v^{(l+1)} = \left[P\left(X_{(l+1)} = x_1\right) \quad ... \quad P\left(X_{(l+1)} = x_m\right)\right]$ e levando em consideração as probabilidades condicionais, temos:

$$P\left(X_{(l+1)} = x_1\right) = P\left(X_{(l+1)} = x_1 | X_l = x_1\right) \cdot P(X_l = x_1) + P\left(X_{(l+1)} = x_1 | X_l = x_2\right) \cdot P(X_l = x_2)$$
$$+ \cdots + P\left(X_{(l+1)} = x_1 | X_l = x_m\right) \cdot P(X_l = x_m).$$
$$\vdots$$

$$P(X_{(l+1)} = x_m) = P(X_{(l+1)} = x_m | X_l = x_1) \cdot P(X_l = x_1) + P(X_{(l+1)} = x_m | X_l = x_2) \cdot P(X_l = x_2) + \cdots + P(X_{(l+1)} = x_m | X_l = x_m) \cdot P(X_l = x_m).$$

Em outros termos,

$$P(X_{(l+1)} = x_1) = p_{1,1} \cdot P(X_l = x_1) + p_{2,1} \cdot P(X_l = x_2) + \cdots + p_{m,1} \cdot P(X_l = x_m).$$

$$\vdots$$

$$P(X_{(l+1)} = x_m) = p_{1,m} \cdot P(X_l = x_1) + p_{2,m} \cdot P(X_l = x_2) + \cdots + p_{m,m} \cdot P(X_l = x_m).$$

Observamos que cada elemento $P(X_{(l+1)} = x_j)$ é obtido do produto do vetor $v^{(l)}$ pela j-ésima coluna de P, ou seja, $v^{(l+1)}$ é igual ao produto de $v^{(l)} \cdot P$.

$$(P(X_l = x_1) \quad \ldots \quad P(X_l = x_m)).\begin{pmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m,1} & \cdots & p_{m,m} \end{pmatrix}$$

$$= v^{(l+1)} = v^{(l)} \cdot P.$$

Portanto, pelo princípio da indução finita

$$v^{(n)} = v^{(n-1)} \cdot P, \forall n \in N. \qquad \blacksquare$$

2.2.2 Equação de Chapman-Kolmogorov

Enquanto a matriz de transição, $P = (p_{i,j})$, nos fornece as probabilidades de transição em um único passo, de X_n para X_{n+1}, as equações de Chapman-Kolmogorov nos fornecem um método para computar a matriz de transição em m passos, de X_n para X_{n+m}.

Sendo ${p_{i,j}}^{(n)}$ a probabilidade de transição do estado x_i para o estado x_j em n passos, ${p_{i,k}}^{(r)}$ a probabilidade de transição do estado x_i para o estado x_k em r passos, com $r \leq n$, e ${p_{k,j}}^{(n-r)}$ a probabilidade de transição do estado x_k para o estado x_j em $(n-r)$ passos. O teorema abaixo, mostra como calcular a probabilidade ${p_{i,j}}^{(n)}$ a partir das probabilidades ${p_{i,k}}^{(r)}$ e ${p_{k,j}}^{(n-r)}$.

Teorema 2.1 (Equação de Chapman-Kolmogorov):

Seja $\{X_n\}$ uma cadeia de Markov, com probabilidades de transição dadas por $p_{i,j}$. Para qualquer par de termos r e n, tais que $0 < r \leq n$ e para todo $x_k \in E$, temos

$$p_{i,j}{}^{(n)} = \sum_{k=1}^{m} p_{i,k}{}^{(r)} \cdot p_{k,j}{}^{(n-r)}$$

em que $E = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$.

Demonstração:

Por definição temos que a probabilidade de transição do estado x_i para o estado x_j em n passos é dada por:

$$p_{i,j}{}^{(n)} = P\big(X_n = x_j | X_0 = x_i\big).$$

Da definição de probabilidade condicional segue que:

$$P\big(X_n = x_j | X_0 = x_i\big) = \frac{P\big(X_n = x_j \cap X_0 = x_i\big)}{P(X_0 = x_i)}.$$

Como $\{X_n = x_j \cap X_0 = x_i\}$ está contido na união de eventos disjuntos, a união dos eventos $X_r = x_k$ para $k = 1, \cdots, m$ e $P(x_k) \geq 0$ então, pelo teorema da probabilidade total, encontrado no apêndice B, podemos afirmar que:

$$\frac{P\big(X_n = x_j \cap X_0 = x_i\big)}{P(X_0 = x_i)} = \sum_{k=1}^{m} \frac{P\big(X_n = x_j \cap X_r = x_k \cap X_0 = x_i\big)}{P(X_0 = x_i)}.$$

Aplicando o teorema do produto, encontrado no apêndice B, temos:

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{P\big(X_n = x_j \cap X_r = x_k \cap X_0 = x_i\big)}{P(X_0 = x_i)}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{P\big(X_n = x_j | X_r = x_k \cap X_0 = x_i\big) \cdot P(X_r = x_k \cap X_0 = x_i)}{P(X_0 = x_i)}.$$

Podemos aplicar a propriedade Markoviana, visto que $r > 0$,

logo:

$$P\big(X_n = x_j | X_r = x_k \cap X_0 = x_i\big) = P\big(X_n = x_j | X_r = x_k\big),$$

e como

$$\frac{P(X_r = x_k \cap X_0 = x_i)}{P(X_0 = x_i)} = P(X_r = x_k | X_0 = x_i)$$

temos então que

$$\sum_{k=1}^{m} P\big(X_n = x_j | X_r = x_k \cap X_0 = x_i\big) \cdot P(X_r = x_k | X_0 = x_i)$$

$$= \sum_{k=1}^{m} P\big(X_n = x_j | X_r = x_k\big) \cdot P(X_r = x_k | X_0 = x_i).$$

Portanto, concluímos que:

$$p_{i,j}{}^{(n)} = \sum_{k=1}^{m} p_{i,k}{}^{(r)} \cdot p_{k,j}{}^{(n-r)}. \qquad \blacksquare$$

A partir da equação de Chapman-Kolmogorov temos uma importante consequência.

Seja $P^{(n)}$ a matriz formada pelas probabilidades de transição do estado x_i para o estado x_j em n passos, ou seja, $\left[P^{(n)}\right]_{i,j} = p_{i,j}^{(n)}$. Considere ainda a matriz P^n. O próximo corolário nos mostra que essas matrizes são iguais.

Corolário 2.1:

Seja $P = \left(p_{i,j}\right)$ *a matriz de transição* e $P^{(n)}$ a matriz de transição em n passos, então

$$P^{(n)} = P^n.$$

Prova:

A demonstração será feita usando indução sobre n.

Para $n = 1$ temos $P^{(1)} = P^1$, por definição.

Supondo que a igualdade seja válida para $n = l$, para $l > 1$, mostraremos que a igualdade continua valendo para $n = l + 1$.

Fazendo $r = 1$ na equação de Chapman-Kolmogorov temos que cada elemento da matriz $P^{(l+1)}$ se escreve como

$$p_{i,j}{}^{(l+1)} = \sum_{x_k \in E} p_{i,k} \cdot p_{k,j}{}^{(l)}. \tag{1}$$

Calculando o produto de matrizes $P.P^l = P^{l+1}$ e usando a hipótese de indução, ou seja, que $\left[P^{(n)}\right]_{i,j} = p_{i,j}^{(l)}$, temos que o elemento i, j da matriz P^{l+1} é dado por

$$[P^{l+1}]_{i,j} = \sum_{x_k \in E} p_{i,k} \cdot p_{k,j}{}^{(l)}. \tag{2}$$

Logo, de (1) e (2) segue que

$$[P^{l+1}]_{i,j} = p_{i,j}{}^{(l+1)} \text{ para } 1 \leq i, j \leq n,$$

e portanto $P^{l+1} = P^{(l+1)}$.

Portanto, pelo princípio da indução finita

$$P^{n+1} = P^{(n+1)}, \forall n \in N. \qquad \blacksquare$$

Teorema 2.2:

Seja $v^{(0)}$ a distribuição inicial e, P, a matriz de transição de uma Cadeia de Markov, então o vetor estado na n-ésima observação, $v^{(n)}$, pode ser determinado através do produto matricial

$$v^{(n)} = v^{(0)} \cdot P^n.$$

Demonstração:

Segue da Proposição 2.2 que:

$$v^{(n)} = v^{(n-1)} \cdot P.$$

Aplicando o produto matricial de forma recursiva temos:

$$v^{(n)} = v^{(n-2)} \cdot P \cdot P = v^{(n-2)} \cdot P^2,$$

$$v^{(n)} = v^{(n-3)} \cdot P \cdot P \cdot P = v^{(n-3)} \cdot P^3,$$

$$\vdots$$

$$v^{(n)} = v^{(0)} \cdot \underbrace{P \cdot P \cdot \dots \cdot P}_{n\,fatores} = v^{(0)} \cdot P^n.$$

Portanto:

$$v^{(n)} = v^{(0)} \cdot P^n. \qquad \blacksquare$$

Exemplo 2.5 (Continuação do exemplo 2.4)

Iremos utilizar o vetor estado e o produto matricial para determinar no exemplo 2.4 as probabilidades depois de dois meses.

No exemplo 2.4 temos a seguinte *Matriz de Transição*, P:

$$P = \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{2,2} \end{bmatrix} \to P = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}.$$

Sendo o *vetor estado* inicial, $v^{(0)}$:

$$v^{(0)} = [0{,}35 \quad 0{,}65].$$

Aplicando o produto matricial, $v^{(2)} = v^{(0)} \cdot P^2$, temos:

$$v^{(2)} = [0{,}35 \quad 0{,}65] \cdot \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{bmatrix}^2,$$

$$v^{(2)} \cong [0{,}42 \quad 0{,}58].$$

Desta forma determinamos, pelo produto matricial, exatamente o mesmo vetor estado, $v^{(2)}$, do exemplo 2.4, que tínhamos determinado pela aplicação em cada etapa da Cadeia de Markov.

Exemplo 2.6 (Continuação do exemplo 2.3)

Iremos utilizar o vetor estado e o produto matricial para determinar no exemplo 2.3 a probabilidade da quarta geração ter ensino superior sabendo que a geração atual também possui ensino superior.

No exemplo 2.3 temos a seguinte *Matriz de Transição*, P:

$$P = \begin{bmatrix} p_{0,0} & p_{0,1} & p_{0,2} \\ p_{1,0} & p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{2,0} & p_{2,1} & p_{2,2} \end{bmatrix} \rightarrow P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 \\ 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{bmatrix}.$$

Sendo o *vetor estado* inicial, $v^{(0)}$:

$$v^{(0)} = [0 \quad 0 \quad 1].$$

Aplicando o produto matricial, $v^{(4)} = v^{(0)} \cdot P^4$, temos:

$$v^{(4)} = [0 \quad 0 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 \\ 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{bmatrix}^4,$$

$$v^{(4)} \cong [0,24 \quad 0,25 \quad 0,51].$$

Desta forma determinamos, pelo produto matricial, a probabilidade da quarta geração ter ensino superior sabendo que a geração atual também possui ensino superior.

Observação: Para realizarmos as operações de produto entre Matrizes nos exemplos utilizamos o software gratuito disponível na internet, *Matrix Calculator*, localizado na página https://matrixcalc.org/pt/ (acessado 18/05/2021).

3 SUGESTÃO DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Nesta sequência didática sugerida temos cinco etapas consecutivas, sendo a duração de cada etapa a cargo do um, com a proposta de proporcionar aos alunos um aprendizado específico e definido. As etapas possuem grau de complexidade crescente, para que os alunos consigam, através de suas habilidades, atingir novos níveis de aprendizagem.

Em todas as etapas apresentaremos inicialmente os conceitos, explicações e um exemplo resolvido do assunto proposto para que o aluno tenha uma base para compreender os novos conceitos apresentados. Após esse primeiro contato utilizaremos situações-problema para que os alunos, através da análise do problema e da verificação das condições necessárias sejam capazes de entender e aprender os novos conceitos apresentados a ele. A presença do professor em sala de aula como um transmissor de conhecimento, “um explicador”, e como um orientador, “um guia”, é fundamental em todo o processo.

Na primeira etapa, temos o objetivo de apresentar Cadeias de Markov (de forma simplificada), explicitar quem foi Andrei A. Markov, qual o seu pensamento inicial, citar a relação entre Cadeias de Markov, Probabilidade e Matrizes, e desenvolver o conceito de espaço de estados e probabilidades de transição. Na segunda etapa, iremos abordar as características das Cadeias de Markov e quais são as condições para a aplicação das Cadeias de Markov. A partir dos estados e probabilidades de transição (desenvolvidos na etapa anterior) queremos criar as matrizes de transição. Na terceira etapa, com as matrizes de transição criadas o foco é determinar o vetor estado e a distribuição inicial. Na quarta etapa, o objetivo é através dos produtos de matrizes e probabilidades condicionais, calcular probabilidades futuras, para $t = 1$ e $t = 2$. Na quinta e última etapa o objetivo é introduzir a Equação de Chapman-Kolmogorov e com o uso do site *Matrix Calculator, (http://matrixcalc.org/pt/)*, calcular probabilidades futuras, para $t = 10$ e $t = 30$.

Em relação a utilização do site *Matrix Calculator*, a BNCC, (2018, p. 536), incentiva a utilização de recursos tecnológicos como um facilitador na aprendizagem do estudante:

> ”[...] o uso de tecnologias possibilita aos estudantes alternativas de experiências variadas e facilitadoras de aprendizagens que reforçam a capacidade de raciocinar logicamente, formular e testar conjecturas, avaliar a validade de raciocínios e construir argumentações.”

Cada etapa foi dividida em quatro momentos. No primeiro momento os alunos formarão grupos e receberão as instruções do professor. O professor irá entregar a cada grupo uma folha que contém os problemas geradores e os questionamentos da etapa vigente. Com auxílio da folha recebida o professor irá explicar o(s) conteúdo(s) da teoria presente e resolver um exercício, PROBLEMA 1. Desta forma os alunos terão um primeiro contato com o novo conhecimento e um exemplo de resolução aplicada nesse tipo de problema. No segundo momento O professor deve solicitar aos grupos de alunos que, através de sua explicitação do conceito e resolução do exemplo utilize desse conhecimento para resolver o PROBLEMA 2. O professor estará atento às resoluções do problema de cada grupo, sem interferir em sua realização. Em um terceiro momento, após cada grupo resolver e explicitar a resolução do PROBLEMA 2 O professor irá discutir as resoluções explicitadas pelos grupos e irá explicitar sua própria resolução, discutir com os alunos os pontos comuns e as diferenças e através da discussão proposta obter junto com os alunos um conceito único e formas de resoluções eficientes para o problema apresentado. No quarto momento, O professor deve solicitar aos grupos de alunos que, após a resolução e discussão do PROBLEMA 2 resolvam o PROBLEMA 3 e, novamente, abrir para discussão das resoluções, apresentar a sua resolução e após a discussão, entre os grupos, das resoluções explicitadas e a explicação dos conceitos pelO professor, esclarecer as dúvidas que ainda restam e avançar para a próxima etapa. Acreditamos, assim como a BNCC, (2018, p. 529), que:

> "[...] os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados."

Utilizaremos de três problemas geradores: PROBLEMA 1, PROBLEMA 2 e PROBLEMA 3. Nesses problemas iremos trabalhar os conceitos, de forma simplificada, para que o aluno entenda e se sinta confortável para explorá-los. Trabalharemos a prática através da resolução em grupo, do debate entre alunos, entre alunos e professor e de exemplos resolvidos.

Acreditamos que os debates ajudam não somente no aprendizado de um novo conceito, mas também no desenvolvimento da habilidade da comunicação matemática, assim como a BNCC, (2018, p. 529 e p. 530):

> "Após resolverem os problemas matemáticos, os estudantes precisam apresentar e justificar seus resultados, interpretar os resultados dos colegas e interagir com eles. É nesse contexto que a competência de comunicar ganha importância. Nas comunicações, os estudantes devem ser capazes de justificar suas conclusões não apenas com símbolos matemáticos e conectivos lógicos, mas também por meio da

> língua materna, realizando apresentações orais dos resultados e elaborando relatórios, entre outros registros.”

Em cada etapa o aluno receberá uma folha contendo os problemas geradores juntamente com o questionamento a ser trabalhado. O PROBLEMA 1 será usado como exemplo resolvido e os problemas, PROBLEMA 2 e PROBLEMA 3, para a resolução em grupo, o debate e o entendimento/reforço do entendimento do conceito estudado. A cada etapa os questionamentos tendem a ficarem mais complexos, para que esses atinjam novos níveis de aprendizado, exigindo um papel ativo do aluno e do professor em cada etapa.

Os problemas geradores são:

PROBLEMA 1:

Suponha que, em relação ao consumo de dois refrigerantes, A e B, as Estatísticas nos mostram que, atualmente:

- 40% consomem o refrigerante A,
- 60% consomem o refrigerante B,
- a probabilidade de mudar da opção A para B é de 48% e
- a probabilidade de mudar da opção B para A é de 57%.

PROBLEMA 2:

Vamos avaliar o clima em uma região de acordo com três possibilidades (dia quente, dia fresco e dia frio).

Sabendo que ontem foi um dia quente e suponhamos que temos as seguintes probabilidades:

- Se ontem o dia foi quente, hoje a probabilidade de ser novamente um dia quente é de 50%, de ser um dia fresco é de 40% e de ser um dia frio é de 10%,
- Se ontem o dia foi fresco, hoje a probabilidade de ser um dia quente é de 30%, de ser novamente um dia fresco é de 40% e de ser um dia frio é de 30%,
- Se ontem o dia foi frio, hoje a probabilidade de ser um dia quente é de 20%, de ser um dia fresco é de 20% e de ser novamente um dia frio é de 60%,

PROBLEMA 3:

Exemplo 2.4 presente neste trabalho na página 22.

Assuma que, após uma consulta aos brasileiros feita pelo IBGE em relação à intenção de votos aos candidatos A e B, as Estatísticas mostraram que, atualmente:

- 35% preferem o candidato A,
- 65% preferem o candidato B,

- a probabilidade de, no mês seguinte, independente de qual ele seja, o eleitor mudar do candidato A para o B é de 40% e
- a probabilidade de, no mês seguinte, independente de qual ele seja, o eleitor mudar do candidato B para o A é de 30%.

Os questionamentos abordados nos problemas em cada etapa juntamente com o plano de aula são:

a) Determine os estados de probabilidades existentes e as probabilidades de transição (será resolvido na primeira etapa - Plano de aula 1).

b) Determine a Matriz de transição (será resolvido na segunda etapa - Plano de aula 2)

c) Determine as probabilidades iniciais e a distribuição inicial de probabilidades (será resolvido na terceira etapa - Plano de aula 3).

d) Calcule as probabilidades para $t = 1$ e $t = 2$ (será resolvido na quarta etapa - Plano de aula 4).

e) Calcule as probabilidades para $t = 10$ e $t = 30$ (será resolvido na quinta etapa - Plano de aula 5).

Os recursos necessários são quadro branco, pincel e a folha de papel com as atividades propostas. No Plano de aula 5 utilizaremos o site *Matrix Calculator*, *(http://matrixcalc.org/pt/)*, para calcular probabilidades futuras para $t = 10$ e $t = 30$.

3.1. Etapas

Como citamos anteriormente, cada etapa foi dividida em quatro momentos. De forma detalhada esses quatro momentos ocorrerão da seguinte forma:

1º Momento:

1. Solicitar aos alunos que formem grupos de dois a quatro alunos e entregar a folha com as atividades propostas.
2. Desenvolver os conceitos (simplificados) relacionados a essa etapa.

2º Momento:

1. Solicitar aos grupos de alunos que, utilizando do conhecimento aprendido, respondam o questionamento, relacionado a essa etapa, do PROBLEMA 2.
2. Sugerimos que o professor fique atento as resoluções que surgirem de cada grupo, sem interferir em sua realização. Caso seja solicitado para esclarecer alguma dúvida avise-os que após todos os grupos pensarem em uma resolução ocorrerá um debate para a discussão das ideias que surgiram.

3º Momento:

1. Solicitar a um representante de cada grupo de alunos que explicite a resolução do questionamento, relacionado a essa etapa, do PROBLEMA 2.
2. Anote as principais ideias que surgirem e fique atento as diferenças entre as resoluções que surgirem de cada grupo.
3. Explicite sua própria resolução, discuta com os alunos os pontos comuns e as diferenças e através da discussão proposta obtenha junto com os alunos formas de resoluções eficientes para o problema apresentado.

4º Momento:

1. Solicitar aos grupos de alunos que, utilizando do conhecimento aprendido e da discussão ocorrida, respondam o questionamento, relacionado a essa etapa, do PROBLEMA 3.
2. Após as resoluções de cada grupo solicitar a um representante de cada grupo de alunos que explicite a resolução do questionamento, relacionado a essa etapa, do PROBLEMA 3.
3. Anote as principais ideias que surgirem e fique atento as diferenças entre as resoluções que surgirem de cada grupo.

4. Apresentar a sua resolução e, após a discussão entre os grupos das resoluções explicitadas, esclarecer as dúvidas que ainda restam e avançar para a próxima etapa.

Nos planos de aula abaixo sugerimos uma forma do professor trabalhar os quatro momentos em cada etapa.

3.1.1 Primeira etapa

PLANO DE AULA 1

PRÉ-REQUISITO:

Compreender os conceitos de Matriz e Probabilidade desenvolvidos no Ensino Médio. Sugerimos uma revisão desse conceito caso O professor julgue necessário.

PÚBLICO ALVO:

2ª série do Ensino Médio.

RECURSOS:

Quadro branco, pincel e a folha de papel com as atividades propostas.

CONTEÚDO PROPOSTO:

Cadeias de Markov, estados de probabilidade e probabilidade de transição.

OBJETIVO:

Apresentar Cadeias de Markov e um pouco da sua história, citar a relação entre Cadeias de Markov, Probabilidade e Matrizes, e desenvolver o conceito de espaço de estados e probabilidades de transição.

OBJETIVO ESPECÍFICO:

Apresentar e definir o conceito de espaço de estados e probabilidades de transição.

HABILIDADES:

(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.

(EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.

ROTEIRO:

Sugestão de abordagem do conteúdo:

2.1 Desenvolver o conceito (simplificado) de Cadeias de Markov.

Começaremos trabalhando o conceito de Cadeia de Markov e para isso precisamos entender o que é um experimento aleatório. Veremos que a Cadeia de Markov é uma sequência de realizações de experimentos aleatórios, que possui uma propriedade peculiar: a probabilidade de um evento futuro ocorrer, depende apenas do que ocorreu no presente, não dependendo do que aconteceu no passado. Muitas vezes dizemos que as Cadeias de Markov são sequências sem memórias. Sugerimos que o professor trabalhe um exemplo relembrando aos alunos o que é um experimento aleatório e os motivando a pensar em como o problema de saber a evolução de um experimento é interessante.

Utilizaremos como exemplo o lançamento de um dado honesto que contém seis faces numeradas de 1 a 6:

Considere o experimento de lançar o dado e observar o número que foi obtido na face superior. A pergunta a ser feita é: Sabendo qual número foi obtido no n-ésimo lançamento conseguimos determinar qual será o número obtido no próximo lançamento? E a resposta é não. Sabemos que este número está compreendido no conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, mas não podemos determinar qual é este número. Logo, o lançamento de dados é um experimento aleatório pois mesmo que haja um grande número de lançamentos não conseguimos prever os resultados futuros.

O nosso interesse é saber como uma sequência de experimentos aleatórios evoluem de acordo com o tempo. Considere que repetimos esse experimento repetidas vezes. Nesse caso, obteremos uma sequência de experimentos aleatórios e podemos, por exemplo, nos perguntar qual a probabilidade do resultado do trigésimo lançamento ser o número seis. Essa pergunta pode ser respondida em um processo estocástico. Denominamos **processo estocástico** uma sequência de experimentos aleatórios que evoluem de acordo com o tempo. Logo, quando lançamos o dado repetidas vezes e observamos o número obtido na face superior desses lançamentos temos um processo estocástico. Estudaremos um tipo específico de processo estocástico denominado Cadeias de Markov. De uma maneira bem simplificada, podemos dizer que uma Cadeia de Markov é um processo estocástico que possui uma característica de "perda de memória", pois seu estado futuro depende apenas do seu estado presente, não importando seu estado passado.

2.2 Contar uma breve história de Andrei A. Markov e do surgimento de Cadeias de Markov.

Sugestão:

Andrei Andreyevich Markov era russo e nasceu no dia 14 de junho de 1856. Viveu durante 66 anos e morreu dia 20 de julho de 1922. Se em 1878 em St Petersburg e se tornou professor da mesma universidade em 1886. Ele foi o primeiro matemático a estudar Cadeias de Markov. Os estudos iniciais envolvendo essas cadeias surgiram em seu trabalho quando ele estudava a probabilidade de ocorrer uma consoante em uma determinada posição de uma palavra qualquer. Para o matemático russo essa probabilidade dependeria apenas da letra anterior ser uma vogal ou consoante. Os primeiros resultados sobre o tema foram publicados em 1906 e atualmente são amplamente utilizados em diversas áreas do conhecimento.

2.3 Desenvolver o conceito (simplificado) de espaço de estados.

Sugestão:

Estados são os possíveis valores que as variáveis do processo irão assumir e o conjunto desses estados, denotado pela letra E, denominamos de espaço de estados.

Por exemplo: Em um lançamento de um dado honesto que contenha de seis faces numeradas de 1 a 6, os estados possíveis são os números observados na face superior desse dado. Portanto os estados são as faces de numeração $1, 2, 3, 4, 5, 6$ e o espaço de estados, E, é o conjunto desses estados, $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

No PROBLEMA 1:

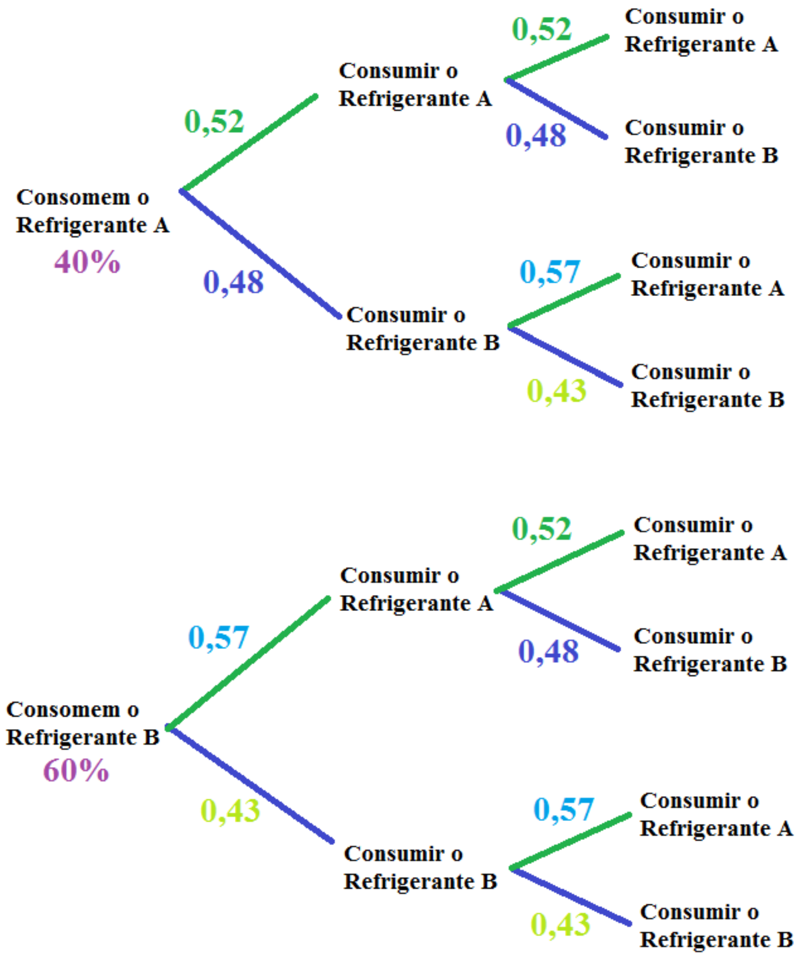
Nesse problema quais são os estados existentes?

Os estados existente são: Refrigerante A e Refrigerante B. Como em um problema podemos ter muitos estados, os nomearemos por x_1, x_2, ... No PROBLEMA 1 temos dois estados, vamos então nomear o estado Refrigerante A como estado x_1 e Refrigerante B como estado x_2.

2.4 Desenvolver o conceito (simplificado) de probabilidades de transição.

Partindo do conhecimento prévio dos alunos sobre probabilidade condicional e diagrama de árvore utilizar o PROBLEMA 1 para construir um diagrama de árvore e mostrar a eles uma primeira noção de probabilidades de transição, que é justamente as probabilidades existentes, a cada “galho”, entre um estado e outro.

Figura 3.1 – Diagrama de árvore do PROBLEMA 1



Fonte: Elaborado pelos autores (2021)

A **probabilidade de transição**, como o nome sugere, é a probabilidade condicional de ir, em um passo, do estado x_i para o estado x_j, com $1 \leq i, j \leq n$, $n \in N$.

No PROBLEMA 1:

O enunciado nos informou que a probabilidade de mudar da opção A, estado x_1, para a opção B, estado x_2, é de 48% e a probabilidade de mudar da opção B, estado x_2, para a opção A, estado x_1, é de 57%, portanto:

- a probabilidade de ir do estado x_1 para o estado x_1 é 52%;
- a probabilidade de ir do estado x_1 para o estado x_2 é 48%;
- a probabilidade de ir do estado x_2 para o estado x_1 é 57%;
- a probabilidade de ir do estado x_2 para o estado x_2 é 43%.

Sugestão de solução do PROBLEMA 2:

Nesse problema quais são os estados existentes?

Os estados existente são: dia quente, dia fresco e dia frio. Temos três estados, então vamos nomeá-los como sendo dia quente como estado x_1, dia fresco como estado x_2 e dia frio como estado x_3.

A probabilidade de transição, como o nome sugere, é a probabilidade condicional de ir, em um passo, do estado x_i para o estado x_j, com $1 \leq i, j \leq n$, $n \in N$.

O enunciado nos informou que:

- Se ontem o dia foi quente, hoje a probabilidade de ser novamente um dia quente é de 50%, de ser um dia fresco é de 40% e de ser um dia frio é de 10%,
- Se ontem o dia foi fresco, hoje a probabilidade de ser um dia quente é de 30%, de ser novamente um dia fresco é de 40% e de ser um dia frio é de 30%,
- Se ontem o dia foi frio, hoje a probabilidade de ser um dia quente é de 20%, de ser um dia fresco é de 20% e de ser novamente um dia frio é de 60%,

Portanto as probabilidades de transição são:

- a probabilidade de ir do estado x_1 para o estado x_1 é 50%;
- a probabilidade de ir do estado x_1 para o estado x_2 é 40%;
- a probabilidade de ir do estado x_1 para o estado x_3 é 10%;
- a probabilidade de ir do estado x_2 para o estado x_1 é 30%;
- a probabilidade de ir do estado x_2 para o estado x_2 é 40%;
- a probabilidade de ir do estado x_2 para o estado x_3 é 30%;
- a probabilidade de ir do estado x_3 para o estado x_1 é 20%;
- a probabilidade de ir do estado x_3 para o estado x_2 é 20%;
- a probabilidade de ir do estado x_3 para o estado x_3 é 60%;

Sugestão de solução do PROBLEMA 3:

Nesse problema quais são os estados existentes?

Os estados existente são: candidato A e candidato B. Temos dois estados, então vamos nomea-los como sendo candidato A como estado x_1 e candidato B como estado x_2.

A probabilidade de transição, como o nome sugere, é a probabilidade condicional de ir, em um passo, do estado x_i para o estado x_j, com $1 \leq i, j \leq n$, $n \in N$.

O enunciado nos informou que:

- a probabilidade de, no mês seguinte, independente de qual ele seja, o eleitor mudar do candidato A para o B é de 40% e
- a probabilidade de, no mês seguinte, independente de qual ele seja, o eleitor mudar do candidato B para o A é de 30%.

Portanto as probabilidades de transição são:

- a probabilidade de ir do estado x_1 para o estado x_1 é 60%;
- a probabilidade de ir do estado x_1 para o estado x_2 é 40%;
- a probabilidade de ir do estado x_2 para o estado x_1 é 30%;
- a probabilidade de ir do estado x_2 para o estado x_2 é 70%.

3.1.2 Segunda etapa

PLANO DE AULA 2

PRÉ-REQUISITO:

Compreender os conceitos de estados, espaço de estados e probabilidades de transição. Sugerimos uma revisão desse conceito caso O professor julgue necessário.

PÚBLICO ALVO:

2ª série do Ensino Médio.

RECURSOS:

Quadro branco, pincel e a folha de papel com as atividades propostas.

CONTEÚDO PROPOSTO:

Características das Cadeias de Markov, condições para a aplicação das Cadeias de Markov e Matriz de transição.

OBJETIVO:

Apresentar as características das Cadeias de Markov, suas condições para aplicação e, a partir dos conceitos de estados, espaço de estados e probabilidades de transição definir o conceito de Matriz de transição.

OBJETIVO ESPECÍFICO:

Apresentar e definir o conceito de Matriz de transição.

HABILIDADES:

(EM13MAT406) Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de softwares que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra.

(EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.

ROTEIRO:

Sugestão de abordagem do conteúdo:

2.5 Determinar (de forma simplificada) as condições e as características de uma Cadeia de Markov.

As condições para um processo aleatório ser modelado por Cadeias de Markov é que esse deve possuir perda de memória, ou seja, a probabilidade de um evento ocorrer no futuro, não depende do que aconteceu no passado, depende apenas do que ocorre no presente.

Na 1ª etapa entendemos os conceitos de estados, espaço de estados e probabilidades de transição, nessa 2ª etapa entenderemos sobre matriz de transição e iremos aprender na 3ª etapa sobre o vetor estado e a distribuição inicial, que são características essenciais para encontrarmos as propriedades markovianas.

2.6 Desenvolver o conceito (simplificado) de matriz de transição.

Sugestão:

A **matriz de transição** é a matriz quadrada de ordem m, $P = (p_{i,j})_{mxm}$, na qual seus elementos, $p_{i,j}$, são as probabilidades de transição do estado x_i para o estado x_j. A matriz de transição é fundamental, pois atua como uma facilitadora no processo de determinação das probabilidades futuras a partir das probabilidades atuais.

Matriz de transição, $P = (p_{i,j})_{mxm}$, é dada por

$$P = \begin{pmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m,1} & \cdots & p_{m,m} \end{pmatrix},$$

em que $p_{i,j} = p_{x_i,x_j}$ é a probabilidade de transição de x_i para x_j.

No PROBLEMA 1:

Qual será a matriz de transição nesse problema?

Definimos na primeira etapa as probabilidades de transição. Escrevendo-as no formato $p_{i,j}$ temos:

- a probabilidade de ir do estado x_1 para o estado x_1 é 52%, $p_{1,1} = 0{,}52$;
- a probabilidade de ir do estado x_1 para o estado x_2 é 48%, $p_{1,2} = 0{,}48$;
- a probabilidade de ir do estado x_2 para o estado x_1 é 57%, $p_{2,1} = 0{,}57$;

- a probabilidade de ir do estado x_2 para o estado x_2 é 43%. $p_{2,2} = 0{,}43$;

Portanto, nossa matriz de transição, $P = \left(p_{i,j}\right)_{2x2}$, será dada por:

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}52 & 0{,}48 \\ 0{,}57 & 0{,}43 \end{pmatrix}.$$

Sugestão de solução do PROBLEMA 2:

Qual será a matriz de transição nesse problema?

Definimos na primeira etapa as probabilidades de transição. Escrevendo-as no formato $p_{i,j}$ temos:

- a probabilidade de ir do estado x_1 para o estado x_1 é 50%, $p_{1,1} = 0{,}5$;
- a probabilidade de ir do estado x_1 para o estado x_2 é 40%, $p_{1,2} = 0{,}4$;
- a probabilidade de ir do estado x_1 para o estado x_3 é 10%, $p_{1,3} = 0{,}1$;
- a probabilidade de ir do estado x_2 para o estado é x_1 30%, $p_{2,1} = 0{,}3$;
- a probabilidade de ir do estado x_2 para o estado x_2 é 40%, $p_{2,2} = 0{,}4$;
- a probabilidade de ir do estado x_2 para o estado x_3 é 30%, $p_{2,3} = 0{,}3$;
- a probabilidade de ir do estado x_3 para o estado x_1 é 20%, $p_{3,1} = 0{,}2$;
- a probabilidade de ir do estado x_3 para o estado x_2 é 20%, $p_{3,2} = 0{,}2$;
- a probabilidade de ir do estado x_3 para o estado x_3 é 60%, $p_{3,3} = 0{,}6$;

Portanto, nossa matriz de transição, $P = \left(p_{i,j}\right)_{3x3}$, será dada por:

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6 \end{pmatrix}.$$

Sugestão de solução do PROBLEMA 3:

Qual será a matriz de transição nesse problema?

Definimos na primeira etapa as probabilidades de transição. Escrevendo-as no formato $p_{i,j}$ temos:

- a probabilidade de ir do estado x_1 para o estado x_1 é 60%, $p_{1,1} = 0{,}6$;
- a probabilidade de ir do estado x_1 para o estado x_2 é 40%, $p_{1,2} = 0{,}4$;
- a probabilidade de ir do estado x_2 para o estado x_1 é 30%, $p_{1,2} = 0{,}3$;
- a probabilidade de ir do estado x_2 para o estado x_2 é 70%, $p_{1,2} = 0{,}7$.

Portanto, nossa matriz de transição, $P = \left(p_{i,j}\right)_{2x2}$, será dada por:

$$P = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}.$$

3.1.3 Terceira etapa

PLANO DE AULA 3

PRÉ-REQUISITO:

Compreender os conceitos de estados, espaço de estados, probabilidades de transição e matriz de transição. Sugerimos uma revisão desse conceito caso O professor julgue necessário.

PÚBLICO ALVO:

2ª série do Ensino Médio.

RECURSOS:

Quadro branco, pincel e a folha de papel com as atividades propostas.

CONTEÚDO PROPOSTO:

Determinar vetor estado e a distribuição inicial.

OBJETIVO:

A partir dos conceitos aprendidos nas etapas anteriores determinar vetor estado e distribuição inicial.

OBJETIVO ESPECÍFICO:

Apresentar e definir o conceito de vetor estado e distribuição inicial.

HABILIDADES:

(EM13MAT106) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar esse ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).

ROTEIRO:

Sugestão de abordagem do conteúdo:

A **distribuição inicial**, ou probabilidade inicial da cadeia, é definida como as probabilidades iniciais dadas no problema. São as probabilidades definidas no tempo zero, X_0, e as denotaremos por $\pi_0(x) = P(X_0 = x)$.

No PROBLEMA 1:

Quais são as probabilidades iniciais nesse problema?

O enunciado nos informou que atualmente (estamos considerando como início do processo, ou seja, X_0) em relação ao consumo de dois refrigerantes, A e B, as estatísticas nos mostram que 40% consomem o refrigerante A, estado x_1 e 60% consomem o refrigerante B, estado x_2.

Podemos definir então as probabilidades iniciais como:

$$P(X_0 = x_1) = \pi_0(x_1) = 0{,}4 \text{ e } P(X_0 = x_2) = \pi_0(x_2) = 0{,}6.$$

A distribuição de X_0 é o *vetor estado inicial* e será denotada por um vetor linha de dimensão *m*:

$$v^{(0)} = [P(X_0 = x_1) \quad \ldots \quad P(X_0 = x_m)].$$

Indicaremos por $v^{(n)}$ o *vetor estado* na n-ésima observação, ou seja, se

$E = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$, então

$$v^{(n)} = [P(X_n = x_1) \quad \ldots \quad P(X_n = x_m)].$$

Observação: Iremos determinar os valores das probabilidades do vetor estado na n-ésima observação na quarta etapa.

No PROBLEMA 1:

Definimos as probabilidades iniciais como:

$$P(X_0 = x_1) = \pi_0(x_1) = 0{,}4 \text{ e } P(X_0 = x_2) = \pi_0(x_2) = 0{,}6.$$

Portanto o vetor estado inicial será:

$$v^{(0)} = [P(X_0 = x_1) \quad P(X_0 = x_2)],$$

$$v^{(0)} = [0{,}4 \quad 0{,}6].$$

Sugestão de solução do PROBLEMA 2:

Quais são as probabilidades iniciais e o vetor estado inicial nesse problema?

O enunciado nos informou que ontem (estamos considerando como início do processo, ou seja, X_0) foi um dia quente.

Podemos definir então as probabilidades iniciais como:

$$P(X_0 = x_1) = \pi_0(x_1) = 1,\ P(X_0 = x_2) = \pi_0(x_2) = 0 \text{ e } P(X_0 = x_3) = \pi_0(x_3) = 0.$$

A distribuição de X_0 é o *vetor estado inicial* e será denotada por um vetor linha de dimensão *m*:

$$v^{(0)} = [P(X_0 = x_1) \quad \ldots \quad P(X_0 = x_m)].$$

Temos então que o vetor estado inicial será:

$$v^{(0)} = [P(X_0 = x_1) \quad P(X_0 = x_2) \quad P(X_0 = x_3)],$$

$$v^{(0)} = [1 \quad 0 \quad 0].$$

Sugestão de solução do PROBLEMA 3:

Quais são as probabilidades iniciais e o vetor estado inicial nesse problema?

O enunciado nos informou que atualmente, (estamos considerando como início do processo, ou seja, X_0), em relação à intenção de votos aos candidatos A e B, as estatísticas mostraram que 35% preferem o candidato A, estado x_1, e 65% preferem o candidato B, estado x_2.

Podemos definir então as probabilidades iniciais como:

$$P(X_0 = x_1) = \pi_0(x_1) = 0{,}35 \text{ e } P(X_0 = x_2) = \pi_0(x_2) = 0{,}65.$$

A distribuição de X_0 é o *vetor estado inicial* e será denotada por um vetor linha de dimensão *m*:

$$v^{(0)} = [P(X_0 = x_1) \quad \dots \quad P(X_0 = x_m)].$$

Temos então que o vetor estado inicial será:

$$v^{(0)} = [P(X_0 = x_1) \quad P(X_0 = x_1)],$$

$$v^{(0)} = [0{,}35 \quad 0{,}65].$$

3.1.4 Quarta etapa

PLANO DE AULA 4

PRÉ-REQUISITO:

Compreender os conceitos de estados, espaço de estados, probabilidades de transição e matriz de transição, distribuição inicial e vetor estado. Sugerimos uma revisão desse conceito caso O professor julgue necessário.

PÚBLICO ALVO:

2ª série do Ensino Médio.

RECURSOS:

Quadro branco, pincel e a folha de papel com as atividades propostas.

CONTEÚDO PROPOSTO:

Utilizando Cadeias de Markov calcular as probabilidades futuras.

OBJETIVO:

A partir dos conceitos aprendidos nas etapas anteriores e através dos produtos de matrizes e probabilidades condicionais calcular probabilidades futuras.

OBJETIVO ESPECÍFICO:

Através da distribuição inicial e matriz de transição calcular probabilidades futuras, para $t = 1$ e $t = 2$, através do produto do vetor estado inicial pela matriz de transição.

HABILIDADES:

(EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.

ROTEIRO:

Sugestão de abordagem do conteúdo:

Determinaremos, de forma empírica, a Proposição 2.2 que diz:

Seja a *Matriz de Transição*, $P = \left(p_{i,j}\right)$, e o *vetor estado* na n-ésima observação, $v^{(n)}$, então $v^{(n)} = v^{(n-1)}.P$.

No PROBLEMA 1:

Sabemos que a matriz de transição, $P = \left(p_{i,j}\right)_{2x2}$, é dada por:

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}52 & 0{,}48 \\ 0{,}57 & 0{,}43 \end{pmatrix}.$$

Definimos as probabilidades iniciais como:

$$P(X_0 = x_1) = \pi_0(x_1) = 0{,}4 \text{ e } P(X_0 = x_2) = \pi_0(x_2) = 0{,}6.$$

E o vetor estado inicial sendo:

$$v^{(0)} = [0{,}4 \quad 0{,}6].$$

Para determinarmos as probabilidades de consumo, para $t = 1$, podemos utilizar a probabilidade condicional.

Refrigerante A, estado x_1:

$$P(X_1 = x_1) = P(X_0 = x_1) \cdot p_{1,1} + P(X_0 = x_2) \cdot p_{2,1}$$
$$= 0{,}4 \cdot 0{,}52 + 0{,}6 \cdot 0{,}57 = 0{,}55.$$

Refrigerante B, estado x_2:

$$P(X_1 = x_2) = P(X_0 = x_1) \cdot p_{1,2} + P(X_0 = x_2) \cdot p_{2,2}$$
$$= 0{,}4 \cdot 0{,}48 + 0{,}6 \cdot 0{,}43 = 0{,}45.$$

Portanto temos o vetor estado para $t = 1$, $v^{(1)} = [0{,}55 \quad 0{,}45]$.

Se utilizarmos o produto entre o vetor estado inicial, $v^{(0)}$, e a matriz de probabilidades de transição, P, teremos o mesmo resultado:

$$v^{(1)} = v^{(0)} \cdot P,$$

$$[0{,}4 \quad 0{,}6] \cdot \begin{bmatrix} 0{,}52 & 0{,}48 \\ 0{,}57 & 0{,}43 \end{bmatrix} = v^{(1)} = [0{,}55 \quad 0{,}45].$$

Portanto a probabilidade de consumo, para $t = 1$, do Refrigerante A é de 55% e do Refrigerante B é de 45%.

Para determinarmos as probabilidades de consumo para $t = 2$ iremos repetir os cálculos anteriores observando a equivalência entre eles.

Refrigerante A, estado x_1:

$$P(X_2 = x_1) = P(X_1 = x_1) \cdot p_{1,1} + P(X_1 = x_2) \cdot p_{2,1}$$

$$= 0{,}55 \cdot 0{,}52 + 0{,}45 \cdot 0{,}57 \cong 0{,}54.$$

Refrigerante B, estado x_2:

$$P(X_2 = x_2) = P(X_1 = x_1) \cdot p_{1,2} + P(X_1 = x_2) \cdot p_{2,2}$$

$$= 0{,}55 \cdot 0{,}48 + 0{,}45 \cdot 0{,}43 \cong 0{,}46.$$

Resultando no vetor estado do segundo mês, $v^{(2)} \cong [0{,}54 \quad 0{,}46]$.

Ao utilizarmos o produto entre o vetor estado, $v^{(1)}$, e a matriz de probabilidades de transição, P, tivemos o mesmo resultado

$$v^{(2)} = v^{(1)} \cdot P,$$

$$[0{,}55 \quad 0{,}45] \cdot \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{bmatrix} = v^{(2)} \cong [0{,}54 \quad 0{,}46].$$

Portanto a probabilidade de consumo, para $t = 2$, do Refrigerante A é de aproximadamente 54% e do Refrigerante B é de aproximadamente 46%.

Observamos que para determinarmos $v^{(2)}$ foi necessário sabermos somente a *Matriz de Transição*, $P = \left(p_{i,j}\right)$, e o *vetor estado* presente no estado anterior, $v^{(1)}$, pois como sabemos da propriedade Markoviana o estado futuro depende somente do estado atual, independendo do estado passado.

De acordo com as nossas observações temos, de forma empírica, que $v^{(n)} = v^{(n-1)} \cdot P$. Para provar de fato esta proposição devemos utilizar do Princípio da indução finita.

Observação: Não iremos provar utilizando Princípio da indução finita, pois não faz parte do nosso objetivo, mas sugerimos aO professor que demonstre, utilizando esse princípio, para os alunos mais interessados.

Sugestão de solução do PROBLEMA 2:

Sabemos que a matriz de transição, $P = \left(p_{i,j}\right)_{3x3}$, é dada por:

$$P = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 & 0,1 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

Definimos as probabilidades iniciais como:

$P(X_0 = x_1) = \pi_0(x_1) = 1$, $P(X_0 = x_2) = \pi_0(x_2) = 0$ e $P(X_0 = x_3) = \pi_0(x_3) = 0$.

E o vetor estado inicial sendo:

$$v^{(0)} = [1 \quad 0 \quad 0].$$

Para determinarmos as probabilidades do clima, no dia 1, podemos utilizar a probabilidade condicional.

Dia quente, estado x_1:

$$P(X_1 = x_1) = P(X_0 = x_1) \cdot p_{1,1} + P(X_0 = x_2) \cdot p_{2,1} + P(X_0 = x_3) \cdot p_{3,1}$$
$$= 1 \cdot 0,5 + 0 \cdot 0,3 + 0 \cdot 0,2 = 0,5.$$

Dia fresco, estado x_2:

$$P(X_1 = x_2) = P(X_0 = x_1) \cdot p_{1,2} + P(X_0 = x_2) \cdot p_{2,2} + P(X_0 = x_3) \cdot p_{3,2}$$
$$= 1 \cdot 0,4 + 0 \cdot 0,4 + 0 \cdot 0,2 = 0,4.$$

Dia frio, estado x_3:

$$P(X_1 = x_2) = P(X_0 = x_1) \cdot p_{1,3} + P(X_0 = x_2) \cdot p_{2,3} + P(X_0 = x_3) \cdot p_{3,3}$$
$$= 1 \cdot 0,1 + 0 \cdot 0,3 + 0 \cdot 0,6 = 0,1.$$

Portanto temos o vetor estado no dia 1, $v^{(1)} = [0,5 \quad 0,4 \quad 0,1]$.

Se utilizarmos o produto entre o vetor estado inicial, $v^{(0)}$, e a matriz de probabilidades de transição, P, teremos o mesmo resultado:

$$v^{(1)} = v^{(0)} \cdot P,$$

$$[1 \quad 0 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} 0,5 & 0,4 & 0,1 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \end{bmatrix} = v^{(1)} = [0,5 \quad 0,4 \quad 0,1].$$

Portanto a probabilidade do clima, no dia 1, de dia quente é de 50%, de dia fresco é de 40% e de dia frio é de 10%.

Para determinarmos as probabilidades do clima no dia 2 iremos repetir os cálculos anteriores observando a equivalência entre eles.

Dia quente, estado x_1:

$$P(X_2 = x_1) = P(X_1 = x_1) \cdot p_{1,1} + P(X_1 = x_2) \cdot p_{2,1} + P(X_1 = x_3) \cdot p_{3,1}$$
$$= 0,5 \cdot 0,5 + 0,4 \cdot 0,3 + 0,1 \cdot 0,2 = 0,39.$$

Dia fresco, estado x_2:

$$P(X_2 = x_2) = P(X_1 = x_1) \cdot p_{1,2} + P(X_1 = x_2) \cdot p_{2,2} + P(X_1 = x_3) \cdot p_{3,2}$$
$$= 0{,}5 \cdot 0{,}4 + 0{,}4 \cdot 0{,}4 + 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}38.$$

Dia frio, estado x_3:

$$P(X_2 = x_2) = P(X_1 = x_1) \cdot p_{1,3} + P(X_1 = x_2) \cdot p_{2,3} + P(X_1 = x_3) \cdot p_{3,3}$$
$$= 0{,}5 \cdot 0{,}1 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 + 0{,}1 \cdot 0{,}6 = 0{,}23.$$

Resultando no vetor estado no dia 2, $v^{(2)} = [0{,}39 \quad 0{,}38 \quad 0{,}23]$.

Ao utilizarmos o produto entre o vetor estado, $v^{(1)}$, e a matriz de probabilidades de transição, P, tivemos o mesmo resultado

$$v^{(2)} = v^{(1)} \cdot P,$$

$$[0{,}5 \quad 0{,}4 \quad 0{,}1] \cdot \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6 \end{bmatrix} = v^{(2)} = [0{,}39 \quad 0{,}38 \quad 0{,}23].$$

Portanto a probabilidade do clima, no dia 2, de dia quente é de 39%, de dia fresco é de 38% e de dia frio é de 23%.

Sugestão de solução do PROBLEMA 3:

Sabemos que a matriz de transição, $P = \left(p_{i,j}\right)_{2x2}$, é dada por:

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}.$$

Definimos as probabilidades iniciais como:

$$P(X_0 = x_1) = \pi_0(x_1) = 0{,}35 \text{ e } P(X_0 = x_2) = \pi_0(x_2) = 0{,}65.$$

E o vetor estado inicial sendo:

$$v^{(0)} = [0{,}35 \quad 0{,}65].$$

Utilizando da Proposição 2.2, $v^{(n)} = v^{(n-1)} \cdot P$, temos:

$$v^{(1)} = v^{(0)} \cdot P,$$

$$[0{,}35 \quad 0{,}65] \cdot \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{bmatrix} = v^{(1)} = [0{,}405 \quad 0{,}595].$$

Portanto a probabilidade de preferência, no primeiro mês, no candidato A é de 40,5% e no candidato B é de 59,5%.

$$v^{(2)} = v^{(1)} \cdot P,$$

$$[0{,}405 \quad 0{,}595] \cdot \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{bmatrix} = v^{(2)} \cong [0{,}42 \quad 0{,}58].$$

Portanto a probabilidade de preferência, no segundo mês, no candidato A é de aproximadamente 42% e no candidato B é de aproximadamente 58%.

3.1.5 Quinta etapa

PLANO DE AULA 5

PRÉ-REQUISITO:

Compreender os conceitos de estados, espaço de estados, probabilidades de transição e matriz de transição, distribuição inicial, vetor estado e cálculo de probabilidades futuras. Sugerimos uma revisão desse conceito caso O professor julgue necessário.

PÚBLICO ALVO:

2ª série do Ensino Médio.

RECURSOS:

Quadro branco, pincel, software gratuito disponível na internet, *Matrix Calculator*, localizado na página https://matrixcalc.org/pt/, e a folha de papel com as atividades propostas.

CONTEÚDO PROPOSTO:

Utilizando da potência da matriz de transição calcular as probabilidades futuras.

OBJETIVO:

A partir dos conceitos aprendidos nas etapas anteriores e através dos produtos de matrizes e probabilidades condicionais calcular probabilidades futuras.

OBJETIVO ESPECÍFICO:

Através da distribuição inicial e a potência da matriz de transição calcular probabilidades futuras para $t = 10$ e $t = 30$ através do produto do vetor estado inicial pela potência da matriz de transição.

HABILIDADES:

(EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.

ROTEIRO:

Sugestão de abordagem do conteúdo:

A partir da equação de Chapman-Kolmogorov, que determina as probabilidades de transição em n passos, $p_{i,j}^{(n)}$, temos uma importante consequência.

Seja $P^{(n)}$ a matriz formada pelas probabilidades de transição do estado x_i para o estado x_j em n passos, ou seja, $\left[P^{(n)}\right]_{i,j} = p_{i,j}^{(n)}$. Considere ainda a matriz P^n, temos que $P^{(n)} = P^n$, ou seja, a matriz de transição em n passos, $P^{(n)}$, é dada pela potência n da matriz de transição, P^n.

A partir desta consequência, ao fazermos o produto do vetor estado inicial pela potência da matriz de transição temos o teorema 2.2 que diz:

Teorema 2.2:

Seja $v^{(0)}$ a distribuição inicial e, P, a matriz de transição de uma Cadeia de Markov, então o vetor estado na n-ésima observação, $v^{(n)}$, pode ser determinado através do produto matricial

$$v^{(n)} = v^{(0)} \cdot P^n.$$

Portanto para calcularmos as probabilidades futuras para $t = 10$ e $t = 30$, como gostaríamos, basta calcularmos:

$$v^{(10)} = v^{(0)} \cdot P^{10}, \text{ para } t = 10 \text{ e}$$

$$v^{(30)} = v^{(0)} \cdot P^{30}, \text{ para } t = 30.$$

No PROBLEMA 1:

Sabemos que a matriz de transição, $P = \left(p_{i,j}\right)_{2x2}$, é dada por:

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}52 & 0{,}48 \\ 0{,}57 & 0{,}43 \end{pmatrix}.$$

Definimos as probabilidades iniciais como:

$$P(X_0 = x_1) = \pi_0(x_1) = 0{,}4 \text{ e } P(X_0 = x_2) = \pi_0(x_2) = 0{,}6.$$

E o vetor estado inicial sendo:

$$v^{(0)} = [0{,}4 \quad 0{,}6].$$

Para determinarmos as probabilidades de consumo, para $t = 10$, utilizaremos do teorema 2.2, logo temos:

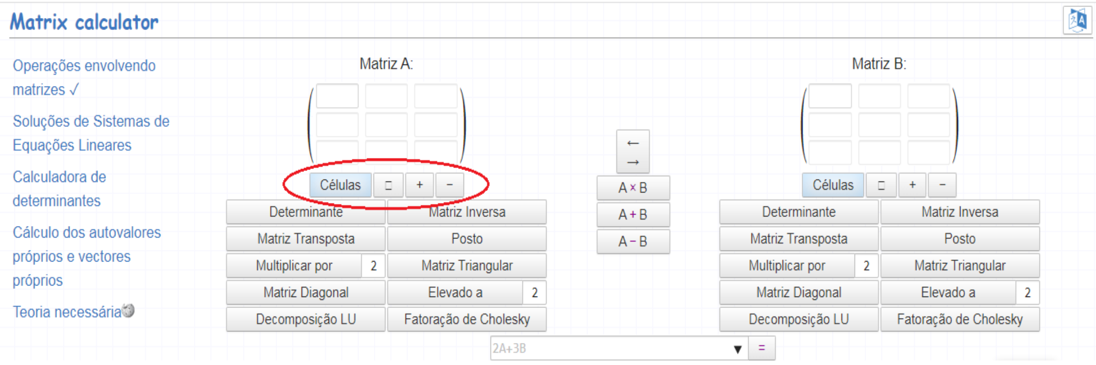
$$v^{(10)} = v^{(0)} \cdot P^{10},$$

$$v^{(10)} = [0{,}4 \quad 0{,}6] \cdot \begin{bmatrix} 0{,}52 & 0{,}48 \\ 0{,}57 & 0{,}43 \end{bmatrix}^{10}.$$

Para calcular $\begin{bmatrix} 0{,}52 & 0{,}48 \\ 0{,}57 & 0{,}43 \end{bmatrix}^{10}$ iremos utilizar Matrix Calculator, (*http://matrixcalc.org/pt/*), da seguinte forma:

1º. Iremos determinar quantas linhas e colunas possui nossa matriz quadrada, P_{nxn}, clicando no botão de + (para aumentar a quantidade de linhas e colunas) ou – (para diminuir a quantidade de linhas e colunas).

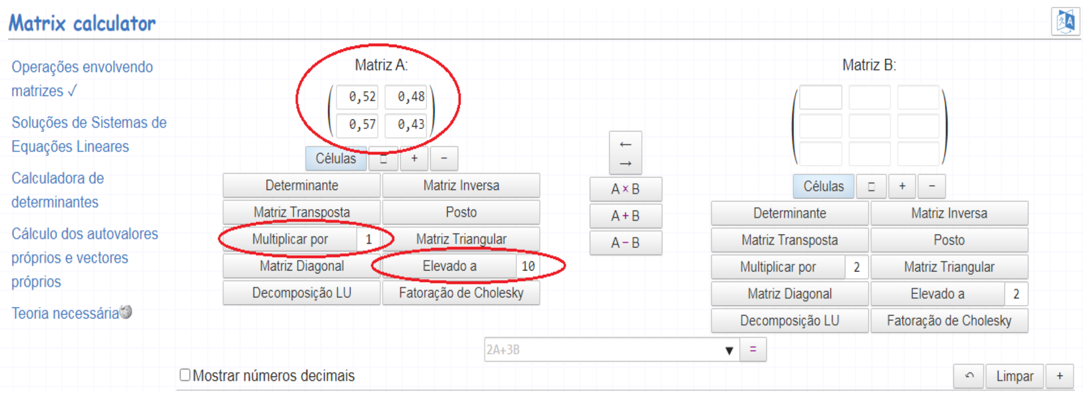
Figura 3.2 – Alterando quantidade de linhas e colunas no Matrix Calculator



Fonte: Site Matrix Calculator (Acessado 10/2021)

2º. Iremos preencher nas células os valores da matriz de transição $P = \begin{bmatrix} 0{,}52 & 0{,}48 \\ 0{,}57 & 0{,}43 \end{bmatrix}$ e determinar a multiplicação e a potência que queremos. No nosso problema queremos multiplicação por 1 e elevado a 10.

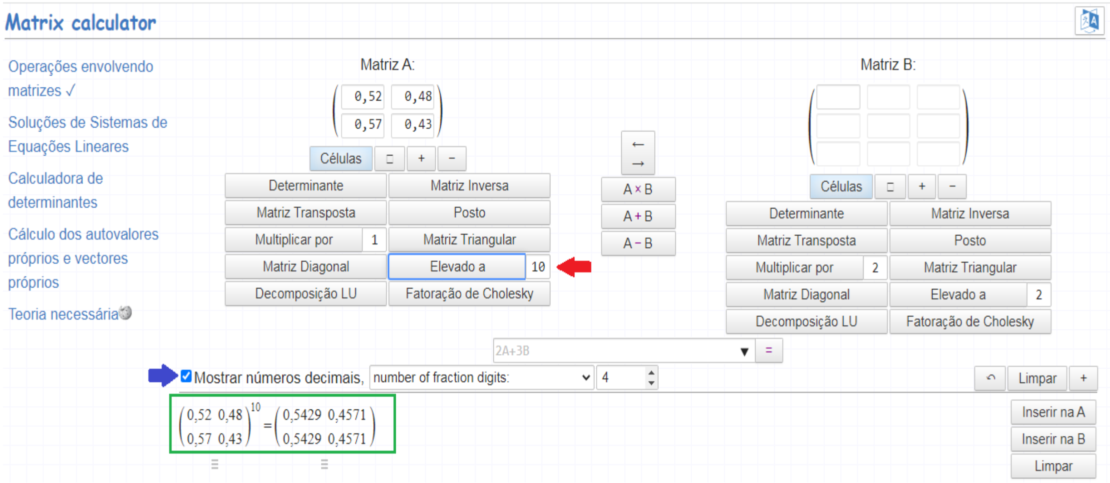
Figura 3.3 – Preenchendo as células da Matriz no Matrix Calculator



Fonte: Site Matrix Calculator (Acessado 10/2021)

3º. Vamos primeiro selecionar ■***Mostrar números decimais***, escolher 4 casas decimais e clicar no botão **Elevado a 10** para determinarmos P^{10}.

Figura 3.4 – Determinando os elementos da matriz P^{10} no Matrix Calculator



Fonte: Site Matrix Calculator (Acessado 10/2021)

Determinada nossa potência da matriz de transição $P^{10} = \begin{bmatrix} 0,52 & 0,48 \\ 0,57 & 0,43 \end{bmatrix}^{10} \cong \begin{bmatrix} 0,5429 & 0,4571 \\ 0,5429 & 0,4571 \end{bmatrix}$ podemos calcular nosso vetor estado para $t = 10$, $v^{(10)}$:

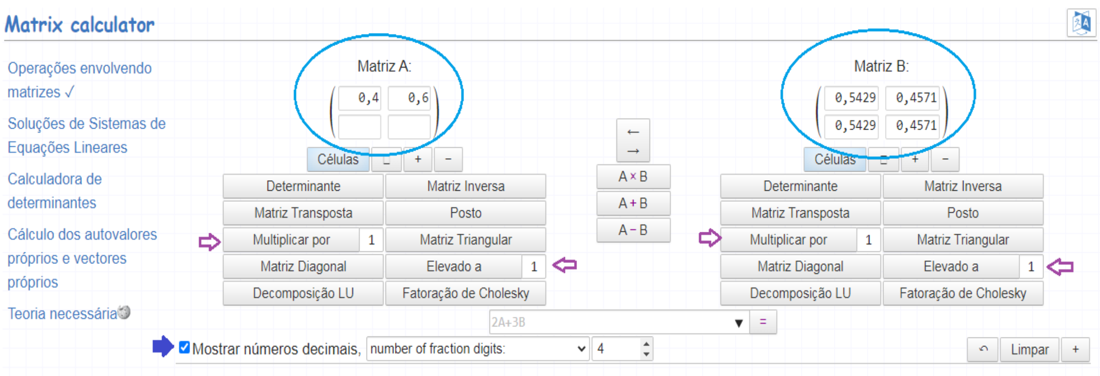
$$v^{(10)} \cong [0,4 \quad 0,6] \cdot \begin{bmatrix} 0,5429 & 0,4571 \\ 0,5429 & 0,4571 \end{bmatrix}.$$

Para fazer esse produto usaremos novamente o site *Matrix Calculator*, com os seguintes passos:

1º. Preencher nas células os valores das matrizes, deixando vazia as células do vetor estado inicial que não possuem os respectivos valores e respeitando a ordem no produto destas matrizes.

Deixamos selecionado ■***Mostrar números decimais*** com 4 casas decimais e determinar a multiplicação e a potência que queremos.

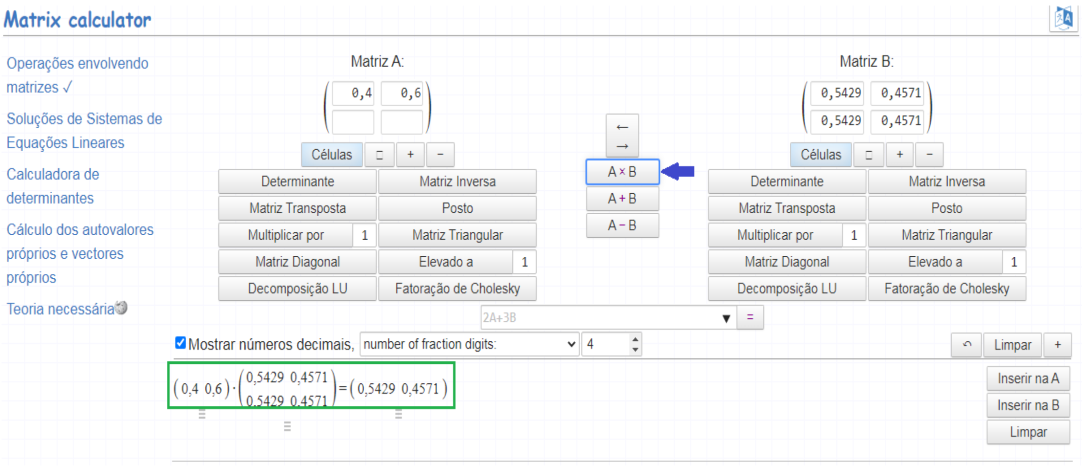
Figura 3.5 – Condições para o produto das matrizes no Matrix Calculator



Fonte: Site Matrix Calculator (Acessado 11/2021)

2º. Clicando em $\boldsymbol{AxB}$ calculamos o produto da matriz A pela matriz B, determinando assim nosso vetor estado para $t = 10$, $v^{(10)}$.

Figura 3.6 – Determinando $v^{(10)}$ do PROBLEMA 1 no Matrix Calculator



Fonte: Site Matrix Calculator (Acessado 11/2021)

Portanto nosso vetor estado para $t = 10$, $v^{(10)}$ é:

$$[0{,}4 \quad 0{,}6] \cdot \begin{bmatrix} 0{,}5429 & 0{,}4571 \\ 0{,}5429 & 0{,}4571 \end{bmatrix} = v^{(10)} \cong [0{,}5429 \quad 0{,}4571].$$

Portanto a probabilidade de consumo, para $t = 10$, do Refrigerante A é aproximadamente de 54,29% e do Refrigerante B é aproximadamente de 45,71%.

Agora que criamos certa intimidade com o Matrix Calculator vamos calcular as probabilidades de consumo dos refrigerantes A e B para $t = 30$ preenchendo todos os dados de uma só vez com os seguintes passos:

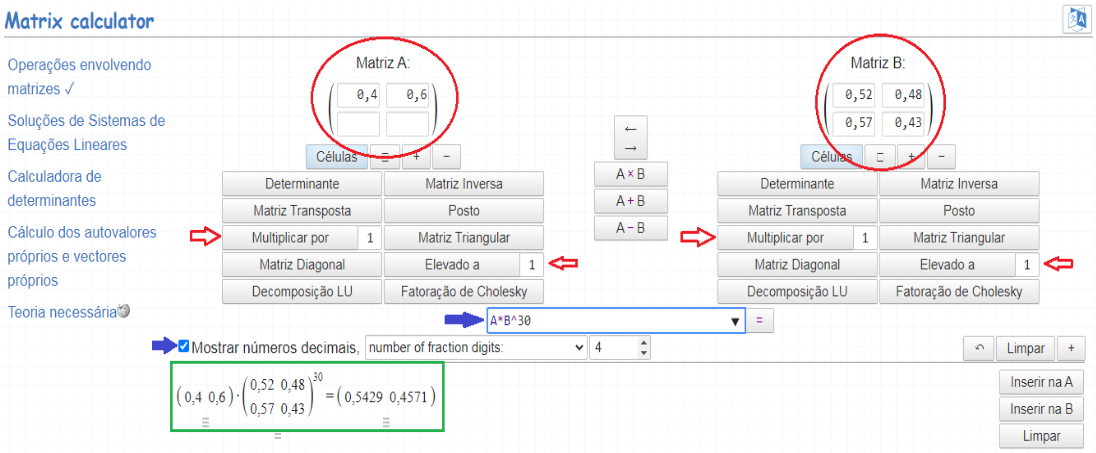
1º. Iremos determinar quantas linhas e colunas possui nossa matriz quadrada, P_{nxn},

2º. Iremos preencher nas células os valores do vetor estado inicial, $v^{(0)}$, deixando vazia as células que não possuem os respectivos valores, e da matriz de transição $P = \begin{bmatrix} 0{,}52 & 0{,}48 \\ 0{,}57 & 0{,}43 \end{bmatrix}$ e determinar a multiplicação e a potência que queremos.

3º. Vamos primeiro selecionar ■***Mostrar números decimais***, escolher 4 casas decimais

4º. Iremos preencher o campo para operações com a operação que queremos realizar $\boldsymbol{AxB^{30}}$**,** que é escrita como $\boldsymbol{A * B\text{^}30}$**,** e apertar o **enter**,

Figura 3.7 – Determinando $v^{(30)}$ do PROBLEMA 1 no Matrix Calculator



Fonte: Site Matrix Calculator (Acessado 11/2021)

Portanto nosso vetor estado para $t = 30$, $v^{(30)}$ é:

$$v^{(30)} \cong [0{,}5429 \quad 0{,}4571].$$

Portanto a probabilidade de consumo, para $t = 30$, do Refrigerante A é aproximadamente de 54,29% e do Refrigerante B é aproximadamente de 45,71%.

Sugestão de solução do PROBLEMA 2:

Sabemos que a matriz de transição, $P = (p_{i,j})_{3x3}$, é dada por:

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

Definimos as probabilidades iniciais como:

$$P(X_0 = x_1) = \pi_0(x_1) = 1,\ P(X_0 = x_2) = \pi_0(x_2) = 0 \text{ e } P(X_0 = x_3) = \pi_0(x_3) = 0.$$

E o vetor estado inicial sendo:

$$v^{(0)} = [1 \quad 0 \quad 0]$$

Para determinarmos as probabilidades do clima, no dia a 10, utilizaremos do teorema 2.2, logo temos:

$$v^{(10)} = v^{(0)} \cdot P^{10},$$

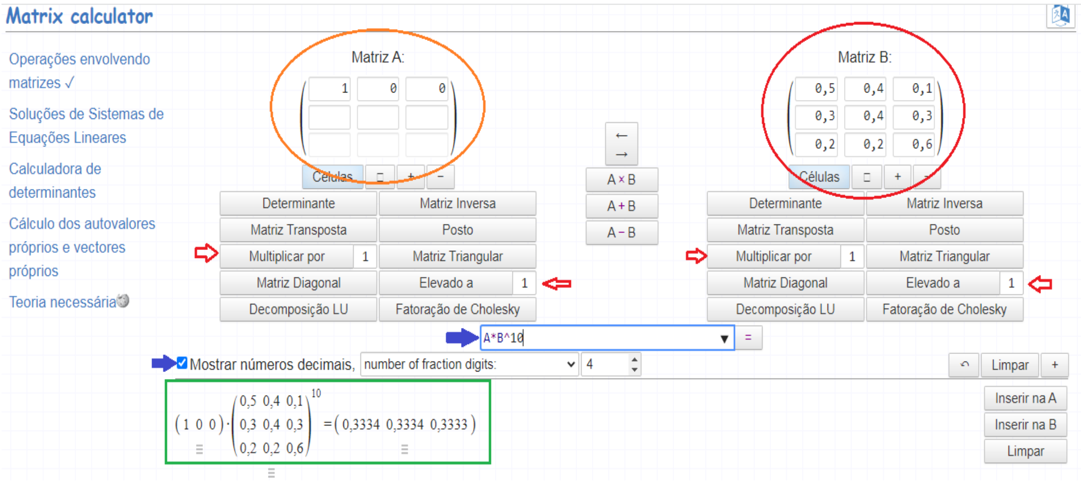
Vamos calcular as probabilidades do dia estar quente, fresco e frio no dia 10 preenchendo todos os dados de uma só vez com os seguintes passos:

1º. Iremos determinar quantas linhas e colunas possui nossa matriz quadrada, P_{nxn}, 2º. Iremos preencher nas células os valores do vetor estado inicial, $v^{(0)} = [1 \quad 0 \quad 0]$, deixando vazia as células que não possuem os respectivos valores, e da matriz de transição $P = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6 \end{bmatrix}$ e determinar a multiplicação e a potência que queremos.

3º. Vamos primeiro selecionar ■***Mostrar números decimais***, escolher 4 casas decimais

4º. Iremos preencher o campo para operações com a operação que queremos realizar $\boldsymbol{AxB^{10}}$**,** que é escrita como $\boldsymbol{A * B}$**^10,** e apertar o **enter**,

Figura 3.8 – Determinando $v^{(10)}$ do PROBLEMA 2 no Matrix Calculator



Fonte: Site Matrix Calculator (Acessado 11/2021)

Portanto nosso vetor estado no dia 10, $v^{(10)}$ é:

$$v^{(10)} \cong [0{,}3334 \quad 0{,}3334 \quad 0{,}3333].$$

Portanto a probabilidade do clima, no dia 10, de dia quente é de 33,34%, de dia fresco é de 33,34% e de dia frio é de 33,33%.

Para o cálculo das probabilidades do dia estar quente, fresco e frio no dia 30 seguiremos os mesmos passos utilizados anteriormente e encontraremos como resultado:

Vetor estado no dia 30, $v^{(30)}$ é:

$$v^{(30)} \cong [0{,}3333 \quad 0{,}3333 \quad 0{,}3333].$$

Portanto a probabilidade do clima, no dia 2, de dia quente é de 33,33%, de dia fresco é de 33,33% e de dia frio é de 33,33%.

Sugestão de solução do PROBLEMA 3:

Sabemos que a matriz de transição, $P = (p_{i,j})_{2x2}$, é dada por:

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}.$$

Definimos as probabilidades iniciais como:

$$P(X_0 = x_1) = \pi_0(x_1) = 0{,}35 \text{ e } P(X_0 = x_2) = \pi_0(x_2) = 0{,}65.$$

E o vetor estado inicial sendo:

$$v^{(0)} = [0{,}35 \quad 0{,}65].$$

Para determinarmos as probabilidades de preferência, no décimo mês, utilizaremos do teorema 2.2, logo temos:

$$v^{(10)} = v^{(0)} \cdot P^{10},$$

Vamos calcular essas probabilidades de preferência no candidato A e no candidato B através do *Matrix Calculator*.

$$v^{(10)} = [0{,}35 \quad 0{,}65] \cdot \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{bmatrix}^{10}$$

$$v^{(10)} = [0{,}4286 \quad 0{,}5714].$$

Portanto a probabilidade de preferência, no décimo mês, no candidato A é de 42,86% e no candidato B é de 57,14%.

Para calcular as probabilidades de preferência, no trigésimo mês, repetiremos o processo anterior:

$$v^{(30)} = v^{(0)} \cdot P^{30}.$$

Através do uso do *Matrix Calculator* temos:

$$v^{(30)} = [0{,}35 \quad 0{,}65] \cdot \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{bmatrix}^{30}$$

$$v^{(30)} = [0{,}4286 \quad 0{,}5714].$$

Portanto a probabilidade de preferência, no trigésimo mês, no candidato A é de 42,86% e no candidato B é de 57,14%.

Nesta última aula, um fato que chama atenção é que as probabilidades para $t = 10$ e $t = 30$ possuem praticamente o mesmo valor. Isso ocorre porque as Cadeias de Markov estão convergindo para o que chamamos de medida estacionária. Essa ocorrência não é uma coincidência, dependendo da distribuição inicial e da matriz de transição, por causa da perda de memória, depois de um longo tempo de evolução do processo ela acaba esquecendo as condições iniciais convergindo então para o mesmo resultado.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho caminhamos sobre um pequeno trecho desta imensa estrada dos Processos Estocásticos, em especial nas Cadeias de Markov. Sabemos que ainda há muito a aprender sobre o tema, mas o pouco que experimentamos desse sabor nos dá vontade de procurar mais sobre esse assunto tão rico, interdisciplinar, aplicável e maravilhoso.

Agradecemos imensamente a Andrei A. Markov por, em seu trabalho, buscar a probabilidade de ocorrer uma consoante em uma determinada posição de uma palavra qualquer e a partir daí criar essa teoria que tem como característica principal a “falta de memória” e que possui inúmeras aplicações em diversas áreas do conhecimento.

Aprender, mesmo que pouco, sobre processos estocásticos e suas classificações, sobre Cadeias de Markov e suas Características, sobre a Equação de Chapman-Kolmogorov e sua importante consequência nos tornaram, além de mais felizes, melhores matemáticos e professores e devido a esses motivos recomendamos a todos os colegas professores de matemática que aprendam, mesmo que superficialmente, sobre esses temas tão interessantes.

Nosso intuito foi apresentar aos professores o conteúdo para criarem uma boa base conceitual e uma sequência didática na qual esperamos que os alunos do segundo ano do ensino médio possam aprender, a partir de uma linguagem simples, mas reveladora, sobre os principais elementos da Cadeia de Markov, entender e perceber a beleza da interdisciplinaridade entre Matriz e Probabilidade e Cadeia de Markov e utilizar da tecnologia e do conhecimento aprendido para calcular probabilidades futuras.

Esperamos ter contribuído, mesmo que de forma pontual, para o ensino de matemática no ensino médio ao trazer esse tema complexo, Cadeias de Markov, ensinado de uma forma simples e interdisciplinar com os conhecimentos prévios dos alunos sobre Matriz e Probabilidade.

REFERÊNCIAS

ATUNCAR, G.S. **Conceitos Básicos d Processos Estocásticos**. 2011. 83 f. Universidade Federal de Minas Gerais.

BIASI, H.; DOMENECH, M. **Ferramenta de Software para o auxílio ao processo de Ensino-Aprendizagem de Métodos Estocásticos**. Unoesc Ciência ACET, Joaçaba, v. 3, n. 1, p. 37-46, 2012.

BRASIL. Ministério da Educação, **Base Nacional Comum Curricular: Educação é a base**. Brasília: MEC, 2020.

BRASIL. Ministério da Educação, **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio**. Brasília: MEC, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio**. Brasília: MEC. 1999.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Rio de Janeiro: DPA. 2000.

BRITTO, M.A. **Matrizes: Propostas de aplicação no ensino médio**. 2014. 94 f. Dissertação (Mestrado). Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora.

CASTRO, Diogo M. S. **Cadeias de Markov: Uma aplicação para o ensino de matrizes e probabilidades.** 2015. 59 f. Dissertação (Mestrado). Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Universidade Federal de Alagoas. Maceió.

COSTA, Fábio S. **Cadeias de Markov regulares: Uma abordagem para alunos e professores do ensino médio.** 2017. 100 f. Dissertação (Mestrado). Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Universidade Federal do Amazonas. Manaus.

COSTA, C. S.; MARQUES, R. M. S. **Cadeias de Markov: Um tema com aplicações interessantes e possibilidades interdisciplinares na educação básica.** Temas& Conexões, 2015 - cp2.g12.br

DELATORRE, Hugo T. **Aplicações das Cadeias de Markov no ensino médio.** 2016. 66 f. Dissertação (Mestrado). Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Universidade Estadual Paulista. Presidente Prudente.

FERNANDES, Pedro. **Introdução aos Processos Estocásticos**. 1ª Edição. Rio de Janeiro, IMPA, 2014.

GERHARDT, Tatiana E. & SILVEIRA, Deise T. **Método de pesquisa.** Universidade Aberta do Brasil – UAB/UFRGS e pelo Curso de Graduação Tecnológica – Planejamento e Gestão para o Desenvolvimento Rural da SEAD/UFRGS. – Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009.

GONÇALVES, J. P. **Reflexões sobre os processos de ensino/aprendizagem de Matemática baseados no software educativo FORMEL**. Revista Brasileira de Informática na Educação,v.12, n. 2, 2004.

GOOGLE FINANÇAS (2021). Recuperado em 26 de Outubro, 2021, de https://www.google.com/finance/quote/WEGE3:BVMF?sa=X&ved=2ahUKEwin9vq2-ejzAhVOpJUCHbWIDmEQ3ecFegQIDxAe&window=6M /

HOWARD, A.; RORRES, C. **Álgebra Linear com Aplicações**, 8.ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

HASHIOKA, Jean A. S. **Modelo de precificação de ativo por Cadeias de Markov.** 2018. 63 f. Dissertação (Mestrado). Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Universidade Estadual Paulista. São José do Rio Preto.

IEZZI, G.; HAZZAN, S. **Fundamentos de Matemática Elementar 4**. (7ª Ed.) São Paulo: Saraiva, 2004.

JÚNIOR, Ademir A. S. **Aplicação das Cadeias de Markov no estudo do controle biológico da planta aquática: *Eichhornia azurea*.** 2014. 64 f. Dissertação (Mestrado). Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Universidade Federal de Goiás. Jataí.

JÚNIOR, Fernando L. S. **Cadeias de Markov e o jogo *Monopoly*.** 2016. 112 f. Dissertação (Mestrado). Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Universidade Federal do ABC. Santo André.

JÚNIOR, Fernando S. R. **Cadeias de Markov no estudo de probabilidade no ensino médio.** 2019. 56 f. Dissertação (Mestrado). Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Universidade Federal do Piauí. Teresina.

JÚNIOR, Gilberto P. S. **Cadeias de Markov: Uma proposta de ensino e aprendizagem.** 2014. 71 f. Dissertação (Mestrado). Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia. Vitória da Conquista.

LANDIM, Cláudio. **Otimização Estocástica**. 1ª Edição. Rio de Janeiro, IMPA, 1991.

MAGELA, Mateus M. **Teoria básica das Cadeias de Markov.** 2015. 112 f. Dissertação (Mestrado). Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Universidade Federal do Espírito Santo. Vitória.

MANOEL, Marcelo R. **Cadeias de Markov: Uma abordagem voltada para o ensino médio.** 2016. 69 f. Dissertação (Mestrado). Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Universidade Estadual de Campinas. Campinas.

MARCHESINI, André L. S. **Probabilidade e Cadeias de Markov: Uma proposta para os ensinos fundamental e médio.** 2017. 95 f. Dissertação (Mestrado). Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Universidade Federal do ABC. Santo André.

MATRIX CALCULATOR. Disponível em: <https://matrixcalc.org/pt/>. Acesso em: 18 de maio de 2021.

MELO, Otávio A. R. **Cadeias de Markov no ensino médio.** 2019. 73 f. Dissertação (Mestrado). Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Universidade Federal do Recôncavo da Bahia. Cruz das Almas.

MEDEIROS, Sérgio S. **Cadeias de Markov ocultas.** 2017. 83 f. Dissertação (Mestrado). Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Universidade Federal do ABC. Santo André.

MORGADO, A. C. O., CARVALHO,J. B. P., CARVALHO, P. C. P., FERNANDEZ, P. **Análise Combinatória e Probabilidade**. 9ª Edição. Brasil, SBM, 2006.

NASCIMENTO, Thiago E. A. **Cadeias de Markov absorventes: Uma aplicação para o ensino médio.** 2019. 92 f. Dissertação (Mestrado). Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Universidade Federal da Bahia. Salvador.

NETO, Ávido S. B. **Cadeias de Markov no ensino médio.** 2013. 47 f. Dissertação (Mestrado). Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Universidade Federal de Sergipe. São Cristóvão.

NORRIS, J. R.; ***Markov Chains***, Cambridge University Press, New York, 1997.

OLIVEIRA, José C. F. **Noções de diagramas dirigidos, Cadeias de Markov e as buscas no Google.** 2014. 90 f. Dissertação (Mestrado). Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Universidade Federal de Sergipe. São Cristóvão.

PACHECO, Priscila G. **Análise de variação de preços utilizando Cadeias de Markov e Lógica Fuzzy.** 2019. 74 f. Dissertação (Mestrado). Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Universidade Federal de Mato Grosso. Cuiabá.

PEREIRA, Lázaro S. **Matrizes de Markov: O teorema de Perron-Frobenius; PageRank e outras aplicações.** 2019. 70 f. Dissertação (Mestrado). Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Universidade Federal de Brasília. Brasília.

PROFMAT, 2020. [Data de Consulta 11 de Abril de 2021]. Disponível em: https://www.profmat-sbm.org.br/organizacao/apresentacao/

PSCHEIDT, Fabio. **Aplicações das Cadeias de Markov na previsão de precipitações pluviométricas.** 2020. 48 f. Dissertação (Mestrado). Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Universidade Federal de Mato Grosso. Cuiabá.

RAMOS, Yuri T. A. C. **Aplicações de Cadeias de Markov no ensino médio.** 2017. 53 f. Dissertação (Mestrado). Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Universidade Estadual de Campinas. Campinas.

RIBEIRO, Thaís S. G. **Processos de Markov discretos: exemplos voltados para o ensino médio.** 2017. 74 f. Dissertação (Mestrado). Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Universidade Estadual Paulista. Bauru.

RODRIGUES, Welton C. **Cadeias de Markov: Uma aula para alunos do ensino médio.** 2013. 45 f. Dissertação (Mestrado). Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Universidade Federal de Juiz de Fora. Juiz de Fora.

ROLLA, Leonardo T. **introdução a Probabilidade**. 2021.

SILVA, Carlos E. V. **Aplicações de Álgebra Linear nas Cadeias de Markov.** 2013. 42 f. Dissertação (Mestrado). Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Universidade Federal de Goiás. Goiânia.

SILVA, Filipe C. A. **Cadeias de Markov – Uma sequência didática para o ensino médio.** 2020. 54 f. Dissertação (Mestrado). Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Universidade Federal de Lavras.

SULLIVAN, M. **Finite Mathematics: An Applied Aproach**. Chicago State University: John Wiley & Sons, Inc., 2013.

WERNER, Camila. **Variáveis aleatórias e Cadeias de Markov: O problema de completar um álbum de figurinhas e uma proposta de aplicação no ensino médio.** 2020. 99 f. Dissertação (Mestrado). Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Universidade Federal de Santa Catarina. Blumenau.

APÊNDICE A - MATRIZ

Para o entendimento e cálculos em Cadeias de Markov é imprescindível que o estudante tenha uma base sólida no que se referem as Matrizes e suas operações, principalmente na operação de multiplicação de matrizes. Em Cadeias de Markov trabalhamos com a Matriz de transição, matriz esta que possui as probabilidades de transição de um estado para o outro, na equação de Chapman-Kolmogorov utilizamos a operação de multiplicação entre matrizes para definirmos matrizes de transição em n passos determinando assim a transição de um estado x_i para um estado x_j.

As Matrizes possuem muitas aplicações, assim como cita BRITTO (2014, p. 7):

> "[...] o tema é muito abrangente e rico, podendo ser relacionado a inúmeras áreas do conhecimento humano, como administração, economia, biologia, computação e física, podendo ser uma ferramenta útil para as atividades interdisciplinares. Notamos ser possível explorar o conceito de matriz, sua representação, suas operações, propriedades e definições através de problemas contextualizados."

A matriz é muito utilizada, a fim de facilitar a resolução de problemas, para a organização de dados tabulares. As informações das matrizes são dispostas organizadamente em linhas e colunas. O conjunto das matrizes é munido das operações de adição, subtração e produto, além de elemento neutro e inverso, formando assim uma estrutura matemática que possibilita sua aplicação em campos diversos dessa área de conhecimento.

As matrizes são muito úteis para representar transformações lineares. Essencialmente, se trabalhamos com funções de R^n em R^m então uma classe de funções bastante simples e muito útil é a das transformações lineares. Assim como no cálculo de uma variável aprendemos como usar a derivada para aproximar uma função na vizinhança de um ponto, no cálculo de várias variáveis temos que se uma função é diferenciável então seu comportamento perto de um ponto é bem aproximado por uma transformação linear.

As aplicações das matrizes são encontradas em muitos campos científicos. Citando algumas delas. Em Física são usadas em ramos como mecânica clássica, eletromagnetismo, ótica, descrição do movimento de corpos rígidos. Em probabilidade e estatística temos as matrizes estocásticas que são usadas para descrever conjuntos de probabilidades. Em computação as matrizes são usadas em algoritmos de rankeamento de páginas, resolução de imagens, computação gráfica, entre outros. E como citado no início do capítulo as matrizes são bastante utilizadas no uso e entendimento de Cadeias de Markov.

Esse capítulo foi baseado na referência [OLIVEIRA, José C. F, p.15 a p.23]. O leitor interessado em mais detalhes pode consultar esta referência citada. Iremos nos ater ao aprendizado de Matriz necessário e suficiente para esta dissertação.

5.1.1 Definição de Matriz

Definição 5.1: Dados m e n dois números naturais e não nulos denominamos Matriz de tamanho mxn a tabela M formada por m linhas e n colunas cujos elementos são números reais a_{ij},

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Dizemos que a_{ij} ou $[A]_{ij}$ é o elemento ou a entrada na posição i, j da matriz. A matriz M pode ser representada por $M = \left[a_{ij}\right]_{mxn}$ ou $M = \left(a_{ij}\right)_{mxn}$.

Exemplo 5.1:

A Matriz *M*, de tamanho *2x3* abaixo é formada por *2* linhas e *3* colunas, que possui os elementos: $a_{11} = 6,\ a_{12} = 1,\ a_{13} = 9,\ a_{21} = 0, a_{22} = 12\ e\ a_{23} = 4$.

$$M = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 9 \\ 0 & 12 & 4 \end{bmatrix}.$$

5.1.2 Matrizes Especiais

Há matrizes que por serem mais utilizadas nessa teoria recebem um nome especial.

Matriz Linha

São as matrizes de tamanho $1xn$, ou seja, matrizes que possuem uma única linha,

$$L = [a_{11} \quad \cdots \quad a_{1n}].$$

Exemplo 5.2:

$$L = [5 \quad 8 \quad -41 \quad 15 \quad 7].$$

Matriz Coluna

São as matrizes de tamanho $mx1$, ou seja, matrizes que possuem uma única coluna,

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}.$$

Exemplo 5.3:

$$C = \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Matriz Quadrada de ordem n

São as matrizes de tamanho nxn, ou seja, matrizes que possuem iguais as quantidades de linhas e colunas,

$$Q = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Chama-se de **diagonal principal** de uma matriz quadrada de ordem n o conjunto dos elementos que têm os dois índices iguais, ou seja, $\{a_{ij} | i = j\} = \{a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}\}$.

Chama-se de **diagonal secundária** de uma matriz quadrada de ordem n o conjunto dos elementos que têm a soma dos índices iguais a $n+1$, ou seja, $\{a_{ij} | i + j = n + 1\} = \{a_{1n}, a_{2,n-1}, \cdots, a_{n1}\}$.

Exemplo 5.4:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}7 \end{bmatrix}$$

A matriz de ordem n, I_n, tal que todos os elementos da diagonal principal iguais a 1 e os todos os outros elementos são nulos é chamada de matriz identidade.

Exemplo 5.5:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5.1.3 Operações com Matrizes

Igualdade

Definição 5.2: Duas matrizes $A = (a_{ij})_{mxn}$ e $B = (b_{ij})_{mxn}$ são iguais quando $a_{ij} = b_{ij}$ para $i = 1,2,3, \cdots, m$ e $j = 1,2,3, \cdots, n$, ou seja, duas matrizes são iguais se possuem mesmo tamanho e apresentam todos os elementos correspondentes iguais.

Exemplo 5.6:

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} x^2 & 6 & 8 \\ 10 & 5 & y \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 8 \\ 10 & 5 & 12 \end{bmatrix}$. Determine todos os valores de x e y para que $A = B$.

Resolução:

De acordo com a nossa definição para as matrizes A e B serem iguais todos os elementos correspondentes devem ser iguais, portanto:

$$a_{11} = b_{11} \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3;$$
$$a_{12} = b_{12} = 6;$$
$$a_{13} = b_{13} = 8;$$
$$a_{21} = b_{21} = 10;$$
$$a_{22} = b_{22} = 5;$$
$$a_{23} = b_{23} \rightarrow y = 12.$$

Portanto se $x = 3$ ou $x = -3$ e $y = 12$, temos que $A = B$.

Adição

Definição 5.3: Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})_{mxn}$ e $B = (b_{ij})_{mxn}$ a $soma\ A + B$ é a matriz $C = (c_{ij})_{mxn}$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para todo i e todo j, ou seja, a soma de duas matrizes A e B, de mesmo tamanho, é uma matriz C, de mesmo tamanho, em que cada elemento é a soma dos elementos correspondentes em A e B.

Exemplo 5.7:

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$, encontre $A + B$.

Resolução:

Considere $C = A + B$, da definição dada acima temos que:

$$c_{11} = a_{11} + b_{11} =\rightarrow c_{11} = 1 + 4 \rightarrow c_{11} = 5;$$
$$c_{12} = a_{12} + b_{12} \rightarrow c_{12} = 2 + 1 \rightarrow c_{12} = 3;$$
$$c_{13} = a_{13} + b_{13} \rightarrow c_{13} = 3 + 1 \rightarrow c_{13} = 4;$$
$$c_{21} = a_{21} + b_{21} \rightarrow c_{21} = 4 + 3 \rightarrow c_{21} = 7;$$
$$c_{22} = a_{22} + b_{22} \rightarrow c_{22} = 5 + 0 \rightarrow c_{22} = 5;$$
$$c_{23} = a_{23} + b_{23} \rightarrow c_{23} = 6 + 6 \rightarrow c_{23} = 12.$$

De forma prática:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix},$$
$$C = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 7 & 5 & 12 \end{bmatrix}.$$

Oposta

Definição 5.4: Dada a matriz $A = (a_{ij})_{mxn}$ chama-se $oposta\ de\ A$ a matriz A' tal que $A + A' = 0$.

Exemplo 5.8:

Determine a oposta da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$.

Resolução:

A matriz oposta, A', da matriz A é tal que $A + A' = 0$, ou seja, $A' = -A$. Portanto para determinarmos a matriz oposta da matriz *A* basta determinarmos a matriz –*A*, invertendo os sinais de todos os elementos a_{ij} da matriz *A*.

$$A' = -A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & -6 \end{bmatrix}.$$

Diferença

Definição 5.5: Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})_{mxn}$ e $B = (b_{ij})_{mxn}$ chama-se $diferença\ A - B$ a matriz soma de A com a oposta de B.

Exemplo 5.9:

Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$, encontre $A - B$.

Resolução:

Para determinarmos a diferença entre as matrizes *A* e *B* devemos somar a matriz *A* com a oposta da matriz *B*. Portanto inicialmente iremos determinar a oposta da matriz *B*, $B' = -B$, e faremos a soma das matrizes *A* e oposta de *B* determinando assim a matriz C de mesmo tamanho das matrizes operadas.

A matriz oposta de B é:

$$B' = -B = \begin{bmatrix} -4 & -1 & -1 \\ -3 & -0 & -6 \end{bmatrix}.$$

A soma das matrizes A e oposta de B resultará na matriz C:

$$C = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -1 & -1 \\ -3 & -0 & -6 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

De forma prática fazemos diretamente a diferença entre os elementos correspondentes:

$$C = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Produto de um escalar por matriz

Definição 5.6: Dado um número real k e uma matriz $A = (a_{ij})_{mxn}$ chama-se $produto\ k \cdot A$ a matriz $B = (b_{ij})_{mxn}$ tal que $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$ para todo i e todo j, ou seja, multiplicar uma matriz A por um número k é construir uma matriz B formada pelas multiplicações entre os elementos de A por k.

Exemplo 5.10:

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, enconte a matriz $3A$.

Resolução:

A matriz resultante C será uma matriz de mesmo tamanho da matriz A na qual cada elemento de sua matriz, c_{ij}, será formado pelo produto entre a constante $k = 3$ e o elemento correspondente a_{ij}. Portanto:

$$c_{11} = 3 \cdot a_{11} \to c_{11} = 3 \cdot 10 \to c_{11} = 30;$$
$$c_{12} = 3 \cdot a_{12} \to c_{12} = 3 \cdot 2 \to c_{12} = 6;$$
$$c_{13} = 3 \cdot a_{13} \to c_{13} = 3 \cdot 3 \to c_{13} = 9;$$
$$c_{21} = 3 \cdot a_{21} \to c_{21} = 3 \cdot 4 \to c_{21} = 12;$$
$$c_{22} = 3 \cdot a_{22} \to c_{22} = 3 \cdot 5 \to c_{22} = 15;$$
$$c_{23} = 3 \cdot a_{23} \to c_{23} = 3 \cdot 6 \to c_{23} = 18.$$

Logo,

$$C = \begin{bmatrix} 30 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \end{bmatrix}.$$

Produto de matrizes

Definição 5.7: O produto de duas matrizes, tais que o número de colunas da primeira matriz é igual ao número de linhas da segunda matriz, $A = (a_{ij})_{mxp}$ e $B = (b_{jk})_{pxn}$ é definido pela matriz $A.B = C = (c_{ij})_{mxn}$.

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{ip} \cdot b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

para todo $i = 1,2,3, \cdots, m$ e $j = 1,2,3, \cdots, n$.

De forma simplificada podemos afirmar que cada elemento, c_{ij}, da matriz resultante C é formado pela soma dos produtos dos elementos da linha da matriz A pelos elementos da coluna da matriz B.

Exemplo 5.11:

Se $A = [5 \quad 7]$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, determine a matriz $A \cdot B$.

Resolução:

Iremos determinar cada elemento da matriz C:

$$c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} \to c_{11} = 5 \cdot 1 + 7 \cdot 3 \to c_{11} = 26;$$

$$c_{12} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \to c_{12} = 5 \cdot 2 + 7 \cdot 4 \to c_{12} = 38.$$

Portanto a matriz C resultante será:

$$C = \begin{bmatrix} 26 & 38 \end{bmatrix}.$$

Utilizando nossa forma simplificada da determinação do produto de matrizes temos:

$$C = A \cdot B,$$

sendo $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

O elemento c_{11} será formado pela soma ordenada dos produtos do primeiro elemento da primeira linha de A, a_{11}, com o primeiro elemento da primeira coluna de B, b_{11}, e do segundo elemento da primeira linha de A, a_{12}, com o segundo elemento da primeira coluna de B, b_{21}.

O elemento c_{12} será formado pela soma ordenada dos produtos do primeiro elemento da primeira linha de A, a_{11}, com o primeiro elemento da segunda coluna de B, b_{12}, e do segundo elemento da primeira linha de A, a_{12}, com o segundo elemento da segunda coluna de B, b_{22}, logo:

$$C = \begin{bmatrix} 5 \cdot 1 + 7 \cdot 3 & 5 \cdot 2 + 7 \cdot 4 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 26 & 38 \end{bmatrix}.$$

Potências de uma matriz

Definição 5.8: Sendo A uma matriz quadrada de $ordem\, n$ e um número inteiro não negativo k definimos as potências inteiras não-negativas de A por:

$$A^0 = I_n \text{ e } A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot \cdots \cdot A}_{k\ vezes}, \text{ para } k > 0.$$

Exemplo 5.12:

Sendo a matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, determine a matriz B^3.

Resolução:

Inicialmente iremos determinar a matriz B^2 através do produto entre as matrizes B e B:

$$B^2 = B \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 4 \end{bmatrix},$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}.$$

Tendo em mãos a matriz B^2 iremos determinar a matriz B^3 através do produto entre as matrizes B^2 e B, portanto:

$$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},$$

$$B^3 = \begin{bmatrix} 7 \cdot 1 + 10 \cdot 3 & 7 \cdot 2 + 10 \cdot 4 \\ 15 \cdot 1 + 22 \cdot 3 & 15 \cdot 2 + 22 \cdot 4 \end{bmatrix},$$

$$B^3 = \begin{bmatrix} 37 & 54 \\ 81 & 118 \end{bmatrix}.$$

APÊNDICE B – PROBABILIDADE

Assim como Matrizes, a Probabilidade e suas operações, principalmente Probabilidade Condicional, Teorema do Produto, Teorema da Probabilidade Total e Teorema de Bayes, são fundamentais para o entendimento e os cálculos em Cadeias de Markov pois são a base desse conhecimento. De acordo com a BNCC, (2020, p. 276):

> A incerteza e o tratamento de dados são estudados na unidade temática Probabilidade e estatística. Ela propõe a abordagem de conceitos, fatos e procedimentos presentes em muitas situações-problema da vida cotidiana, das ciências e da tecnologia. Assim, todos os cidadãos precisam desenvolver habilidades para coletar, organizar, representar, interpretar e analisar dados em uma variedade de contextos, de maneira a fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões adequadas. Isso inclui raciocinar e utilizar conceitos, representações e índices estatísticos para descrever, explicar e predizer fenômenos.

Consideramos que o ensino de Probabilidade é um ensino extremamente importante para a formação crítica dos nossos alunos do ensino médio que, conscientes ou não, precisarão tomar decisões probabilísticas ao longo de suas vidas. Para sermos capazes de utilizarmos de suas ferramentas, precisamos aprendê-lo e a escola pode e deve trazer esse conhecimento aos estudantes que por ela passam.

Esse capítulo foi baseado na referência [MORGADO, A. C. O (...), p.118 a p.151]. O leitor interessado em mais detalhes pode consultar esta referência.

5.2.1 Definição de Probabilidade

Um experimento é determinístico quando repetido várias vezes sob as mesmas condicões conduzem ao mesmo resultado. Nos experimentos aleatórios, os resultados não podem ser previsto com certeza, mesmo que haja um grande número de repetições do mesmo. A Probabilidade é o ramo da matemática que desenvolve toda a teoria para os estudos dos experimentos aleatórios.

Apresentaremos alguns conceitos que serão úteis para desenvolvermos a teoria. Chamamos de espaço amostral o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. Ele será representado pela letra grega Ω. Os subconjuntos de Ω são denominados eventos e representados por letras maiúsculas $A, B, \dots$. O conjunto vazio, que representa um resultado impossível de ocorrer será representado por $\emptyset$.

Definiremos a função probabilidade P, que atribui aos eventos do espaço amostral um valor numérico e satisfaz as condições abaixo.

Definição 5.9:

Uma função P definida para todos os eventos de Ω é denominada uma probabilidade se:

- $0 \leq P(A) \leq 1$, para todo evento $A \subset \Omega$;
- $P(\Omega) = 1$;
- Se A e B são eventos disjuntos então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

É fácil verificar que, se um experimento aleatório possui as características:

- A união de todos os n possíveis resultados desse experimento (eventos elementares), sendo n finito, é o espaço amostral Ω.
- Os eventos elementares são igualmente prováveis.
- Todo evento A é uma união de m eventos elementares em que $m \leq n$,

então a probabilidade de um evento A ocorrer, dada por $P(A)$, é

$$P(A) = \frac{número\ de\ casos\ farováveis}{número\ de\ casos\ possíveis} = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)} = \frac{m}{n}.$$

Então a função acima satisfaz as condições da Definição 5.9 e, portanto, representa uma probabilidade.

Exemplo 5.13:

Joga-se um dado de seis faces e é observado o número mostrado em sua face de cima. O Espaço Amostral, Ω, é o conjunto dos resultados possíveis do experimento, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\#\Omega = 6$.

O evento $A = \{O\ resultado\ do\ experimento\ é\ um\ número\ ímpar\}$ é dado por $A = \{\ 1, 3, 5\}$, $\#A = 3$ e a probabilidade de ocorrer o evento A é dada por

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Proposição 5.1: Sejam A, B eventos de um experimento aleatório e P uma função probabilidade. Então

- $P(A^C) = 1 - P(A)$.
- Se $A \subset B$ então $P(A) = P(B) - P(B - A)$.
- Se $A \subset B$ então $P(A) \leq P(B)$.
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- Se $A_1, A_2, \cdots, A_n$ são eventos, então

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) - P(A_1 \cap A_2) - \cdots$$

$$-P(A_{n-1} \cap A_n) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n).$$

A demonstração da proposição acima segue direto da definição de Probabilidade.

5.2.2 Espaços de Probabilidade

Sobre o mesmo espaço amostral é possível definir diversas probabilidades. O *Espaço de Probabilidades* é definido pelo par (Ω, P), sendo Ω o espaço amostral (conjunto de eventos elementares) e P uma probabilidade definida sobre os subconjuntos (eventos) de Ω, de um experimento aleatório.

Exemplo 5.14:

Uma moeda é lançada duas vezes e observamos o número de caras obtidas. Representando cara e coroa com as letras K e C. Podemos tomar o seguinte espaço amostral: $\Omega_1 = \{(K,K),(K,C),(C,K),(C,C)\}$ e como P_1 a probabilidade que determina todos os eventos elementares de Ω_1 igualmente prováveis. Como estamos observando no experimento o número de caras, poderíamos formar como espaço amostral o conjunto $\Omega_2 = \{0,1,2\}$ correspondente a observar 0 caras, 1 cara ou 2 caras. Como definimos P_2?

Resolução:

Deveríamos definir P_2 da seguinte forma: $P_2(0) = \frac{1}{4}$, $P_2(1) = \frac{1}{2}$ e $P_2(2) = \frac{1}{4}$.

5.2.3 Probabilidades condicionais

Definição 5.10:

Dados dois eventos A e B, a probabilidade condicional de A dado que B ocorreu é representada por $P(A|\mathrm{B})$ e dada por

$$P(A|\mathrm{B}) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0.$$

A equação pode ser reescrita como:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|\mathrm{B}).$$

Propriedades básicas da noção de probabilidade condicional:

Proposição 5.2: Seja B *um evento* tal que $P(B) > 0$, então

- $P(\emptyset|\mathrm{B}) = 0$, $P(\Omega|\mathrm{B}) = 1$ e $0 \leq P(A|\mathrm{B}) \leq 1$.

- Se A e D são eventos tais que $A \cap D = \emptyset$, então

$$P\big((A \cup D)|\mathrm{B}\big) = P(A|\mathrm{B}) + P(D|\mathrm{B}).$$

Proposição 5.3 (Teorema do Produto): Sejam $A_1, A_2, \cdots, A_n$ eventos tais que $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \neq 0$, então a probabilidade da interseção desses eventos, $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$, é dada por:

$$P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P\big(A_3|(A_1 \cap A_2)\big) \cdot \cdots \cdot P\big(A_n|(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})\big).$$

Exemplo 5.15:

Em uma sala de aula há 50 alunos, sendo 30 mulheres e 20 homens. Das mulheres, 22 falam espanhol e dos homens, 12 falam espanhol. Escolhendo-se um aluno ao acaso dessa sala e sabendo que esse aluno fala espanhol, qual é a probabilidade de que seja mulher?

Resolução:

Considere os eventos: $E = \{o\ aluno\ escolhido\ fala\ espanhol\}$ e $M = \{o\ aluno\ escolhido\ \text{é}\ uma\ mulher\}$.

Temos então:

$$P(E) = \frac{22 + 12}{50} = \frac{34}{50},$$

$$P(E \cap M) = \frac{22}{50}.$$

Portanto

$$P(M|\mathrm{E}) = \frac{P(M \cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{22}{50}}{\frac{34}{50}} = \frac{22}{34}.$$

Observamos que:

$$P(M|\mathrm{E}) = \frac{22}{34} = \frac{\#M \cap E}{\#E}.$$

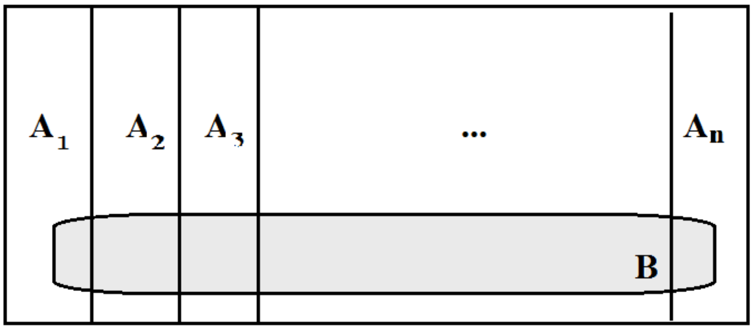
Proposição 5.4 (Teorema da Probabilidade total):

Se B é um evento contido numa união de eventos disjuntos $A_1, A_2, \cdots, A_n$ e $P(A_1) > 0$, $P(A_2) > 0$, $\cdots$ e $P(A_n) > 0$ então

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B|A_n).$$

A figura a seguir ilustra a situação do problema:

Figura 5.1 – Situação-problema



Fonte: Elaborada pelos autores (2021)

- **Proposição 5.5 (Teorema de Bayes):**

Nas condições das Proposições 5.2, 5.3 e 5.4, se $P(B) > 0$, então, para $i = 1, 2, 3, \cdots, n$, temos:

$$P(A_i|\text{B}) = \frac{P(A_i).P(B|A_i)}{P(A_1)\cdot P(B|A_1) + P(A_2)\cdot P(B|A_2) + \cdots + P(A_n)\cdot P(B|A_n)}.$$

Exemplo 5.16:

No mês de Março a probabilidade de chover em um determinado dia é de 0,4. O Cruzeiro ganha um jogo em dia de chuva com probabilidade de 0,7 e em um dia sem chuva com probabilidade de 0,5. Sabendo-se que o Cruzeiro ganhou o jogo naquele dia de Março, qual a probabilidade de ter chovido naquele dia?

Resolução:

Utilizando o Teorema de Bayes temos:

$$P(choveu|\text{ganhou}) = \frac{P(choveu)\cdot P(ganhou|\text{choveu})}{P(choveu)\cdot P(ganhou|\text{choveu}) + P(não\ choveu)\cdot P(ganhou|\text{não choveu})},$$

$$P(choveu|\text{ganhou}) = \frac{0{,}4\cdot 0{,}7}{0{,}4\cdot 0{,}7 + 0{,}6\cdot 0{,}5} = \frac{0{,}28}{0{,}58} = \frac{14}{29},$$

$$P(choveu|\text{ganhou}) \sim 48\%.$$

5.2.4 Variável aleatória

De uma forma simples, podemos dizer que uma variável aleatória é um característico numérico de um experimento aleatório. Por exemplo, ao lançarmos sucessivamente duas moedas, o espaço amostral pode ser descrito como $\Omega = \{(K,K),(K,C),(C,K),(C,C)\}$, em que K e C representam respectivamente os resultados cara e coroa. O número de coroas observadas nos dois lançamentos é um característico numérico do experimento. Se definirmos X como o número de coroas observadas, vemos que X pode assumir os valores 0, 1, 2 de acordo com o resultado do experimento. Veremos que X representa uma variável aleatória.

5.3.1 Definição de Variável Aleatória

Considere uma função que associa a cada resultado ω do espaço amostral Ω um número real, ou seja, uma função

$$X: \Omega \to R,$$

$$X: \omega \to X_{(\omega)}.$$

Funções desse tipo são essenciais dentro da teoria de probabilidade. Dentre essas funções, destacaremos aquelas para os quais os conjuntos do tipo $\{\omega \in \Omega: X_{(\omega)} \leq x\}$ para todo $x \in R$, são eventos aleatórios, ou seja, são eventos para os quais é possível associar uma probabilidade. Essas funções são conhecidas como variáveis aleatórias como mostra a definição a seguir.

Definição 5.11:

Uma variável aleatória X em um Espaço de Probabilidade (Ω, P) é uma função real definida no espaço Ω tal que o conjunto $\{\omega \in \Omega: X_{(\omega)} \leq x\}$ é um evento aleatório para todo $x \in R$.

Por exemplo, lançando um dado e observando a face superior temos $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e podemos definir nesse caso, $X_{(\omega)} = \omega$.

5.3.2 Variáveis Aleatórias Discretas e Contínuas

Se uma variável aleatória X, assume valores num conjunto enumerável, ela é denominada de *variável aleatória discreta*. Por outro lado, ela será denominada de *variável aleatória contínua*, se seu conjunto de valores é qualquer intervalo dos números reais, ou seja, se ela pode assumir valores em um conjunto não enumerável.

Como exemplos de variáveis aleatórias discretas, podemos citar o lançamento de um dado de seis faces, o número de carros que passam por um pedágio, o número de nascimentos em um dia. Como exemplos de variáveis aleatórias contínuas temos o resultado do lançamento de martelo nas Olimpíadas, valores da corrente elétrica em um cabo de energia, flutuações da temperatura.