UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de São José do Rio Preto

Patrícia Caldato

O uso da Geometria do Táxi no ensino de Análise Combinatória

São José do Rio Preto
2013

Patrícia Caldato

O uso da Geometria do Táxi no ensino de Análise Combinatória

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Profissional - PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientadora: Profª. Drª. Michelle Ferreira Zanchetta Morgado

São José do Rio Preto
2013

Caldato, Patrícia
O uso da Geometria do Táxi no ensino de Análise Combinatória / Patrícia Caldato. - São José do Rio Preto: [s.n.], 2013.
46 f.: il. 25; 30 cm.

Orientadora: Michelle Ferreira Zanchetta Morgado
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Análise Combinatória. 2. Geometria do Táxi. 3. Jogos. 4. Resolução de Problemas. I. Morgado, Michelle Ferreira Zanchetta. II. Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III.Título.

CDU – 519.1

Patrícia Caldato

O uso da Geometria do Táxi no ensino de Análise Combinatória

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Profissional - PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Banca Examinadora

Profª. Drª. Michelle Ferreira Zanchetta Morgado
UNESP – São José do Rio Preto
Orientadora

Profª. Drª. Évelin Meneguesso Barbaresco
UNESP – São José do Rio Preto

Prof. Dr. Renato José de Moura
UFSCAR – São Carlos

São José do Rio Preto
13 de agosto de 2013

Dedico este trabalho

Ao meu filho Rafael, a pessoa mais importante na minha vida e da qual estive tão ausente neste tempo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me carregado em seus braços nos momentos de desânimo.

À minha orientadora Profª. Drª. Michelle Ferreira Zanchetta Morgado pelo apoio, incentivo e dedicação ao meu trabalho, e, principalmente, pela paciência e amizade.

Aos meus queridos pais, José e Carolina, que me ensinaram que os estudos são a maior conquista que se pode ter, ninguém consegue roubar.

Aos meus irmãos, Rose e Renato, que sempre me incentivaram e me ajudaram nas horas mais difíceis.

Ao meu filho, Rafael, amor da minha vida, por todos os dias em que estive ausente ou estudando, pedindo, por favor, abaixa o som, a mamãe quer estudar!

Aos meus amigos de curso, Fábio, Fabrício, Irineu e Marcos, na qual em um gesto tão pequeno e bonito (abraço de urso), não me deixaram desistir.

Aos meus alunos que não mediram esforços para me ajudarem a colocar em práticas minhas atividades.

À direção e funcionários da ETEC de Novo Horizonte.

À minha amiga e irmã, Josiele, pelas caronas, por me fazer sorrir em momentos críticos e por estar sempre ao meu lado.

A todos aqueles que sempre me incentivaram.

Ao Profmat, pela oportunidade.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

“Tudo posso naquele que me fortalece”
Felipenses 4;13

RESUMO

Este trabalho apresenta uma sequência de atividades voltadas ao ensino de Análise Combinatória utilizando a Geometria do Táxi, que é uma geometria capaz de modelar as trajetórias, dos cidadãos e dos veículos que se deslocam entre quarteirões, ao longo dos eixos de ruas e avenidas. Estas atividades foram aplicadas a um grupo de alunos do Ensino Médio, tendo como recurso didático um jogo e usando como metodologia a Resolução de Problemas. A intenção foi proporcionar aulas que fujam daquela velha rotina de uma metodologia tradicional onde somente são envolvidos os recursos como giz, quadro ou livro didático, buscando atrair mais a atenção dos alunos e conectar o ensino de Matemática ao cotidiano deles.

Palavras-chave: Análise Combinatória, Geometria do Táxi, jogos, Resolução de Problemas.

ABSTRACT

This work presented a sequence of activities which aim at teaching of Combinatorial Analysis using the Taxicab Geometry, a geometry that is able of modeling the trajectories, of citizens and vehicles moving on blocks, along the axis of streets and avenues. These activities have been applied to a group of High School students, having as a teaching resource a game and using the Problem Solving methodology. The intention was to purpose lessons to flee that old routine of a traditional methodology where the resources are only involved as chalk, blackboard or textbook, trying to attract more students' attention and connect teaching of Mathematics to them life.

Keywords: Combinatorial Analysis, Taxicab Geometry, games, Problem Solving.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Atualmente podemos notar um grande empenho em solucionar as dificuldades de aprendizagem em Matemática, ligadas a inúmeros problemas, que vão desde o aluno até o professor.

Nesta direção, um fator necessário é investir na formação dos professores, preparando-os adequadamente e reciclando seus conhecimentos. O professor precisa conhecer os conceitos matemáticos e saber como apresentá-los, intervindo de forma adequada e produtiva.

O uso de jogos pedagógicos e de programas computacionais nas aulas têm contribuído na desmistificação de que a Matemática é impossível de se aprender. Uma medida importante para enfrentar as dificuldades de aprendizagem em Matemática é propor uma série de situações didáticas e novas metodologias na relação ensino-aprendizagem.

Um dos assuntos mais difíceis de serem assimilados é Análise Combinatória. Geralmente o conteúdo é dado de forma mecânica, em que muitos alunos somente utilizam as fórmulas prontas, não conseguindo aplicar isso no seu cotidiano.

Mudar esta situação é o que propõe os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN):

> (...) valorizar a matemática como instrumento para compreender o mundo à sua volta e de vê-la como área do conhecimento que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas. Adotam como critérios para seleção dos conteúdos sua relevância social e sua contribuição para o desenvolvimento intelectual do aluno, em cada ciclo (BRASIL, 2002).

Seguindo a proposta anterior, este trabalho utiliza como instrumento de aprendizagem um jogo, como alternativa de ensino prazeroso desse conceito, relacionando-o com o cotidiano do aluno.

O trabalho está organizado em três capítulos.

No primeiro capítulo, descrevemos a parte teórica envolvida nas atividades. Primeiro introduzimos uma maneira diferente de medir distância entre pontos de uma cidade, uma vez que os percursos somente serão possíveis trafegando através de ruas e avenidas. Isso proporciona aos alunos o contato com uma nova geometria, chamada de Geometria do Táxi, diferente daquela mais intuitiva quando se pensa, por exemplo, no plano da lousa e do caderno. Depois, colocamos a ideia básica de Análise Combinatória justificando, em particular, a fórmula de combinação de elementos tomados em um conjunto, contextualizando com o fato de contar quadras necessárias para ir de um lugar a outro.

O segundo capítulo fala sobre a utilização de jogos no ensino de matemática, que parte da reflexão do docente na necessidade de alternativas para motivar e despertar o interesse do aluno. O ato de jogar desenvolve habilidades de raciocínio como organização, atenção e concentração, necessárias à aprendizagem de qualquer assunto em Matemática.

No terceiro capítulo, descrevemos uma sequência didática de atividades que tem como eixo principal um jogo formulado para utilizar os conceitos de Análise Combinatória através da Geometria do Táxi. Isso foi feito utilizando a metodologia de Resolução de Problemas. Como aplicação do jogo, apresentamos aos alunos uma situação-problema comum ao cotidiano deles.

Os recursos foram utilizados de maneira clara, objetiva e dinâmica, produzindo ao final da sequência de atividades resultados satisfatórios da aplicação do conceito de Análise Combinatória no cotidiano.

CAPÍTULO 1

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo vamos descrever os conceitos matemáticos abordados na proposta de atividades desenvolvida neste trabalho.

1.1. GEOMETRIA DO TÁXI

Dados dois objetos em um plano, um caminho entre eles é seguir “por linha reta” de um objeto ao outro. Isto estabelece uma maneira de medir distância entre os objetos em um plano, que é o que chamamos de métrica. Proceder deste modo é o que se estabelece na Geometria Euclidiana. Agora, quando pensamos no plano como se fosse o mapa de uma cidade e os objetos como sendo casas, ir de um objeto a outro nem sempre será seguindo “por linha reta”, mas seguindo o trajeto determinado pelas ruas. Isto estabelece um outro tipo de métrica.

Neste trabalho apresentamos atividades relacionadas a este tipo de métrica particular, pertencente a uma família de espaços métricos criados pelo matemático alemão Hermann Minkowski (1864-1909) e designada por *Taxicab Geometry* (KRAUSE, 1975). Em língua portuguesa, tal geometria tem sido designada por *Geometria do Motorista do Táxi*, ou *Pombalina*, ou *do Táxi*.

O referencial teórico para escrever este trabalho veio da leitura do trabalho de Krause, que é uma tentativa pioneira de sistematizar didaticamente, desenvolver e disseminar um pouco do conteúdo da Geometria do Táxi.

A Geometria do Táxi é uma geometria capaz de modelar as trajetórias, “por linhas quebradas”, dos cidadãos e dos veículos que se deslocam entre quarteirões, ao longo dos eixos de ruas e avenidas, não precisando estar nas intersecções destes, chamada de métrica da soma. A distância não é medida como o vôo de um pássaro, mas como a viagem de um táxi numa cidade, cujas ruas estendem-se vertical e horizontalmente em uma quadra ou malha urbana, que convenientemente pode ser associada ao plano euclidiano.

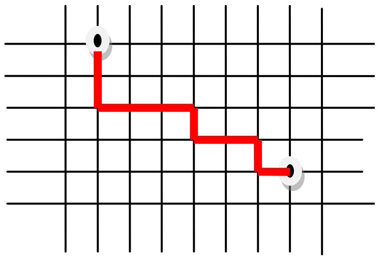


Figura 1: Trajeto na malha urbana

Conforme ressaltado nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), o ensino da matemática deve estar voltado à formação do cidadão:

> (...) um currículo de Matemática deve procurar contribuir, de um lado, para a valorização da pluralidade sociocultural, impedindo o processo de submissão no confronto com outras culturas; de outro, criar condições para que o aluno transcenda um modo de vida restrito a um determinado espaço social e se torne ativo na transformação de seu ambiente.
> A compreensão e a tomada de decisões diante de questões políticas e sociais também dependem da leitura e interpretação de informações complexas, muitas vezes contraditórias, que incluem dados estatísticos e índices divulgados pelos meios de comunicação. Ou seja, para exercer a cidadania, é necessário saber calcular, medir, raciocinar, argumentar, tratar informações estatisticamente, etc. (BRASIL, 1997, p.25).

Por isso utiliza-se cada vez mais os conceitos matemáticos em sua rotina. Assim, apresentar a Geometria do Táxi nas escolas tem a intenção de integrar a Matemática ao cotidiano do aluno. Além disso, confrontado com esta nova geometria, o aluno pode ser levado a perceber que existem outras geometrias além da Euclidiana, possibilitando que tenha despertada a sua curiosidade para novos ambientes matemáticos.

Vamos descrever esta nova geometria, comparando-a com a Geometria Euclidiana.

Na abordagem algébrica da Geometria Euclidiana Plana, os pontos são pares ordenados (x, y), onde x e y são números reais, e as retas são definidas como sendo os conjuntos soluções das equações da forma: $ax + by + c = 0$, com a, b e c números reais e $(a, b) \neq (0,0)$. O plano e seus pontos podem ser visualizados por meio da representação em um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas.

A função distância euclidiana, que denotamos d_e, entre os pontos $A = (x_a, y_a)$ e $B = (x_b, y_b)$ é definida por:

$$d_e(A, B) = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}.$$

Esta é a maneira usual de medir distância entre dois pontos em um plano. Diretamente da definição, podemos ver que a função d_e satisfaz as seguintes propriedades:

i) $d_e(A, A) = 0$.

ii) Se $A \neq B$ então $d_e(A, B) > 0$.

iii) $d_e(A, B) = d_e(B, A)$.

Usando (LIMA, p. 6, exemplo 7), temos

iv) $d_e(A, B) \leq d_e(A, C) + d_e(C, B)$.

Uma função como a distância d_e que satisfaz as propriedades i), ii), iii) e iv) é chamada métrica. A métrica euclidiana é adequada em muitas situações, mas não é apropriada para calcular a distância a ser percorrida entre duas localidades de uma cidade, por exemplo. A menor distância para irmos de uma localidade a outra depende das ruas de possíveis trajetos e, na maioria das vezes, não podemos ir seguindo uma "linha reta" de um ponto a outro.

Na Geometria do Táxi, os pontos e as retas são os mesmos da Geometria Euclidiana. Apenas a função distância, que denotamos por d_t e chamamos de distância do táxi, é definida de modo diferente. Para os pontos $A = (x_a, x_b)$ e $B = (x_b, y_b)$,

$$d_t(A, B) := |x_a - x_b| + |y_a - y_b|.$$

Diretamente da definição, podemos ver que a função d_t satisfaz as seguintes propriedades:

i) $d_t(A, A) = 0$.

ii) Se $A \neq B$ então $d_t(A, B) > 0$.

iii) $d_t(A, B) = d_t(B, A)$.

Usando a definição de módulo, temos $|x + y| \leq |x| + |y|$, $\forall x, y \in R$. Segue que $|x_a - x_b| \leq |x_a - x_c| + |x_c - x_b|$ e $|y_a - y_b| < |y_a - y_c| + |y_c - y_b|$. Portanto, $|x_a - x_b| + |y_a - y_b| \leq |x_a - x_c| + |y_a - y_c| + |x_c - x_b| + |y_c - y_b|$ e, com isto temos

iv) $d_t(A, B) \leq d_t(A, C) + d_t(C, B)$.

Deste modo a função distância do táxi é uma métrica, que também pode ser chamada métrica da soma.

Imagine uma cidade ideal onde as ruas podem ser representadas pelas retas horizontais e verticais de uma malha quadriculada em um plano cartesiano ortogonal e os objetos somente serão considerados na interseção de uma rua vertical com uma horizontal. Nestas condições a Geometria do Táxi é chamada de Geometria Urbana.

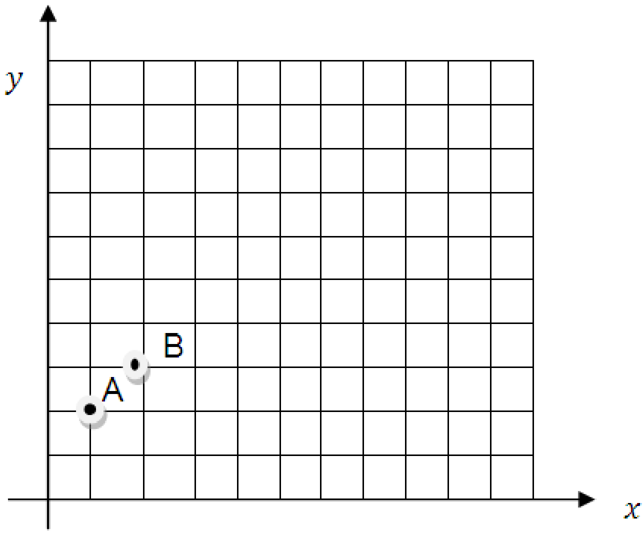


Figura 2: Localização dos pontos A e B na malha quadriculada

Exemplo 1. Fixadas duas ruas e denotadas por x e y, respectivamente, como na figura, o ponto A tem coordenada $(1,2)$, pois está a dois quarteirões de x e a um quarteirão de y, e o ponto B tem coordenada $(2,3)$ pois está a três quarteirões de x e a dois quarteirões de y. Deste modo, a distância euclidiana entre os pontos A e B é $d_e = \sqrt{(1-2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{2}$ e a distância do táxi entre os pontos A e B é $d_t = |1-2| + |2-3| = 2$.

Note que, dados $A = (x_a, x_b)$ e $B = (y_a, y_b)$,

$$(d_e(A,B))^2 = (x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2 \leq (x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2 + 2|x_a - x_b|.|y_a - y_b|$$

$$= (|x_a - x_b| + |y_a - y_b|)^2 = \left(d_t(A,B)\right)^2.$$

Portanto, $d_e(A,B) \leq d_t(A,B)$.

Apesar de ser possível calcular a distância euclidiana e ela ser menor que a distância do táxi, na geometria urbana, ela não é possível de ser efetuada, pois se deve trafegar somente pelas ruas. Isso é o que descreve a Geometria do Táxi.

Deixamos como sugestão um vídeo didático muito interessante que aborda a relação entre estas duas geometrias. Este material, chamado “Vou de Táxi”, faz parte do projeto Matemática Multimídia da UNICAMP e pode ser acessado em www.youtube.com/user/matematicamultimidia .

1.2. ANÁLISE COMBINATÓRIA

Nas atividades que faremos, temos o objetivo de encontrar e descobrir quantos são os trajetos mais curtos entre dois referenciais. Isso envolverá o que chamamos de Análise Combinatória, que é um dos tópicos que a Matemática é dividida, responsável pelo estudo de critérios para a representação da quantidade de possibilidades de acontecer um agrupamento sem que seja preciso desenvolvê-los.

O estudo da Análise Combinatória abrange os seguintes tópicos: Princípio Fundamental da Contagem, Fatorial, Arranjos, Permutação e Combinação.

Entre vários conteúdos, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) destacam o papel importante do raciocínio combinatório na formação dos alunos do Ensino Médio.

> As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidades no Ensino Médio (...) (BRASIL, 1998, p.257).

Quando procuramos resolver problemas de contagem notamos que contar pode ser, muitas vezes, algo trabalhoso. Nestes casos, através de métodos de Análise Combinatória, é possível obter resultados de um modo mais rápido.

Um destes métodos é o Princípio Fundamental da Contagem, que pode ser visto em (IEZZI, p. 307):

Suponhamos que uma ação seja constituída de duas etapas sucessivas. A primeira etapa poder ser realizada de n maneiras distintas. Para cada uma dessas possibilidades, a segunda etapa poder ser realizada de m maneiras distintas. Então, o número de possibilidades de se efetuar a ação completa é dado por $m.n$.

Seja A um conjunto com n elementos. Desejamos fazer uma escolha de p elementos entre os n elementos, sem nos importar com a ordem deles. Pensemos em cada escolha como sendo uma caixa. Assim, temos que colocar um elemento de A em cada caixa.

caixa 1	caixa 2	caixa 3	...	caixa p

Para a caixa 1 temos n possíveis elementos a serem colocados. Escolha um elemento. Sobram $(n-1)$ elementos para serem escolhidos para se colocar na caixa 2. Procedendo desta maneira temos, para cada caixa, as possibilidades distribuídas como segue:

caixa 1	caixa 2	caixa 3	...	caixa p
n	$n-1$	$n-2$		$n-(p-1)$

Pelo Princípio Fundamental da Contagem temos que o número de possibilidades de fazer estas escolhas é

$$n.(n-1).(n-2)\ldots\big(n-(p-1)\big).$$

Sendo n um número natural, denotemos por $n!$ o produto dos n números consecutivos de 1 até n, ou seja,

$$n! = 1.2.3.4.\ldots.(n-2).(n-1).n.$$

Com esta notação, o número de possibilidades pode ser escrito na forma $\frac{n!}{(n-p)!}$.

Deixando as caixas fixas, a ordem em que fazemos a escolha determina possibilidades diferentes. Como não estamos interessados na ordem, mas escolher simplesmente p elementos de A, temos que eliminar as possibilidades que contém os mesmos elementos. Para isto, basta dividir o número obtido pelo número de posições que podemos colocar cada caixa.

Seguindo o mesmo raciocínio, temos p caixas para estarem na primeira posição, $(p-1)$ caixas para estarem na segunda posição e, procedendo deste modo, sobra somente uma caixa para estar na última posição.

posição 1	posição 2	posição 3	...	posição p
p	$p-1$	$p-2$		1

Assim, o número de posições que podemos colocar cada caixa é

$$p.(p-1).(p-2). \dots .1 = p!$$

e, portanto, o número de possibilidades de escolha de p elementos entre os n elementos sem ter a ordem como fator de distinção é $\frac{n!}{p!(n-p)!}$.

O número $\frac{n!}{p!(n-p)!}$ é chamado de **combinação** dos n elementos de A, tomados de p a p, e denotado por C_p^n.

Quando buscamos o número de trajetos mínimos entre referenciais na Geometria Urbana, estamos interessados na combinação de elementos do conjunto das quadras.

Exemplo 2. Vamos supor que entre as localidades A e B na figura abaixo, o menor trajeto deve ser percorrido através de oito quadras, sendo duas horizontais e seis verticais.

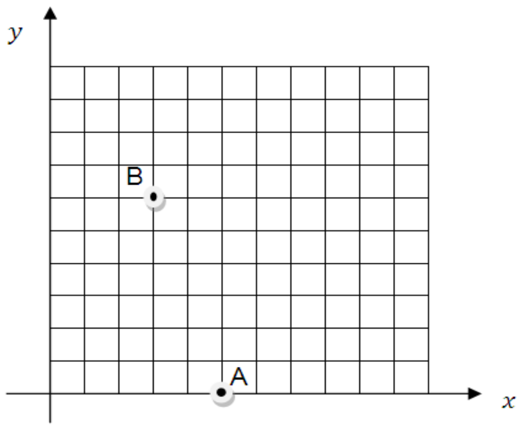


Figura 3: Localização dos pontos A e B na malha quadriculada

Representa-se cada quadra horizontal por H e cada quadra vertical por V. Temos como exemplo as soluções: HVVVVVHV e VHVVVHVV.

Notemos que a solução é uma sequência com 8 posições, onde em cada uma delas é colocada uma quadra. Como temos 8 quadras para distribuir, para a primeira posição temos 8 possibilidades, para a segunda temos 7 possibilidades (pois usamos uma quadra na primeira), para a terceira temos 6 possibilidades (pois usamos uma quadra na primeira e uma quadra na segunda) e, assim, até ter uma única possibilidade de quadra para a oitava posição.

Pelo Princípio Fundamental da Contagem temos 8! possibilidades para obter sequências de quadras com 8 posições.

As quadras percorridas são diferentes, mas estamos interessados somente na posição delas. Assim, as seis quadras verticais são consideradas as mesmas. Porém, no cálculo anterior, a sequência VVVVVV foi contada como se as seis quadras verticais fossem diferentes (total de 6!). O mesmo ocorreu com as duas quadras horizontais, que no cálculo anterior a sequência HH foi contada 2! vezes. Assim, basta dividir o número anterior 8! pelos números 6! e 2!. Note que, como vimos, isto é fazer a combinação dos 8 elementos, tomados 6 a 6 (ou tomados 2 a 2).

Logo, entre as localidades A e B, o número de trajetos através de 8 quadras sendo 6 verticais e 2 horizontais é dado por: C_6^8 ou C_2^8.

De modo geral, se, entre as localidades A e B, o menor trajeto deve ser percorrido através de n quadras, sendo p horizontais e q verticais, então o número de trajetos mínimos diferentes é dado por:

$$C_p^n = \frac{n!}{p!q!}, \text{ onde } n = p + q$$

Observamos que a distância do táxi de A a B dá a menor número de quadras a serem percorridas entre estes dois referenciais. Isto segue diretamente da propriedade iv) de métrica.

Agora para efetuarmos os cálculos da quantidade de trajetos mínimos entre as localidades A e B, tendo como pontos obrigatórios de passagem $A_1, \ldots, A_n$, nesta ordem, devemos proceder da seguinte maneira:

Calcular o número de trajetos mínimos entre A e A_1, A_1 e $A_2, \ldots, A_n$ e B, denotados por $m_1, \ldots, m_n, m_{(n+1)}$, respectivamente.

Usando o Princípio Fundamental da Contagem, o número desejado é:

$$m_1. \ldots . m_n . m_{(n+1)}.$$

Exemplo 3. Observe o exemplo:

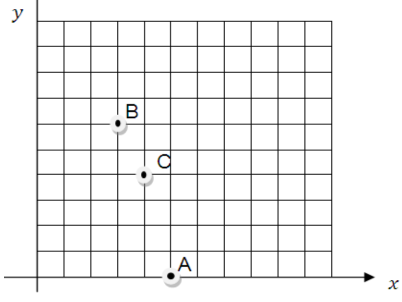


Figura 4: Localização dos pontos A, B e C na malha quadriculada

A quantidade de trajetos mínimos entre A e B, passando por C, envolve a quantidade trajetos mínimos entre A e C e a quantidade trajetos mínimos entre C e B, da seguinte maneira:

$$C_4^5.C_2^3 = \frac{5!}{4!\,1!}.\frac{3!}{2!\,1!} = 5.3 = 15.$$

CAPÍTULO 2

JOGOS NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Um dos principais motivos para a utilização de jogos no ensino de Matemática parte da reflexão do docente na necessidade de alternativas para motivar e despertar o interesse do aluno.

> (...) a noção de jogo aplicado à educação desenvolveu-se com lentidão e penetrou, tardiamente, no universo escolar, sendo sistematizada com atraso. No entanto, introduziu transformações decisivas... Materializando a ideia de aprender divertindo-se (...) (SCHWARTZ,1966).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), em relação à inserção de jogos no ensino de Matemática, pontuam que estes:

> (...) constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução de problemas e busca de soluções. (BRASIL, 1998, p.46).

E ainda:

> Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações-problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações; possibilitam a construção de uma atitude positiva perante os erros, uma vez que as situações sucedem-se rapidamente e podem ser corrigidas de forma natural, no decorrer da ação, sem deixar marcas negativas. (BRASIL,1998, p. 46).

Porém, é necessário que os jogos sejam escolhidos e trabalhados com o intuito de fazer o aluno ultrapassar a fase da mera tentativa e erro, ou de jogar apenas pela diversão, não deixando-o participar da atividade de qualquer jeito, devendo ser traçados objetivos a serem cumpridos, metas a alcançar e regras gerais que deverão ser cumpridas.

Nem todo jogo é um material pedagógico. Em geral, o elemento que separa um jogo pedagógico de outro de caráter apenas lúdico é que

> (...) jogos pedagógicos são desenvolvidos com a intenção explícita de provocar uma aprendizagem significativa, estimular a construção de um novo conhecimento e, principalmente, despertar o desenvolvimento de uma habilidade operatória, uma aptidão que possibilita a compreensão e a intervenção do individuo nos fenômenos sociais e culturais e que o ajude a construir conexões (ANTUNES, 2002).

Outro motivo para que os jogos sejam introduzidos nas aulas de Matemática é a possibilidade de diminuir os bloqueios apresentados por muitos de nossos alunos, que se sentem incapacitados para aprendê-la. A proposta de um jogo em sala de aula é muito importante para o desenvolvimento social, pois muitos alunos têm vergonha de perguntar sobre determinados conteúdos e de expressar suas dúvidas.

O interesse do aluno passou a ser a força que comanda o processo da aprendizagem, suas experiências e descobertas a grande alavanca do seu progresso e o professor um gerador de situações estimuladoras e eficazes.

No trabalho com jogos, é possível fazer com que o aluno tenha uma atuação consciente e intencional, o aluno é levado – por si próprio ou por meio de intervenção do professor – a rever sua produção e atitudes, sempre tendo como fim, modificar o que é negativo na realização da atividade como um todo.

Segundo Smole, o uso de jogos é uma das formas de relacionar a capacidade de agir com segurança e eficácia diante do novo, fazendo inferências, estabelecendo relações, elaborando estratégias, mobilizando os conhecimentos que se tem para elaborar estratégias de ações apropriadas ao problema.

E para Antunes existem quatro elementos que justificam e condicionam a aplicação de jogos:

- Capacidade de se construir em um fator de auto-estima do aluno: propor desafios intrigantes e estimulantes.
- Condições psicológicas favoráveis: instrumento de inserção e desafios em grupo.
- Condições ambientais: espaço arejado, onde os alunos se sintam confortáveis.
- Fundamentos técnicos: o aluno deve ser estimulado a buscar seus próprios métodos

Em muitas situações de jogos, os alunos não percebem as diversas possibilidades de resolução. Analisá-las, amplia o olhar sobre o objeto, dando mais dimensão para enfrentar situações problema.

Os jogos trabalhados em sala de aula são classificados em três tipos:

- **Jogos estratégicos**, onde são trabalhadas as habilidades que compõem o raciocínio lógico. Com eles, os alunos lêem as regras e buscam caminho para atingirem o objetivo final, utilizando estratégias para isso;

- **Jogos de treinamento**, os quais são utilizados quando o professor percebe que alguns alunos precisam de reforço num determinado conteúdo e quer substituir as cansativas listas de exercícios. Neles, quase sempre o fator sorte exerce um papel preponderante e interfere nos resultados finais;

- **Jogos geométricos**, que têm como objetivo desenvolver a habilidade de observação e o pensamento lógico. Com eles conseguimos trabalhar figuras geométricas, semelhança de figuras, ângulos e polígonos.

O jogo que será apresentado no capítulo seguinte se caracteriza como um jogo de estratégia, condicionado a atividades antecedentes de treinamento.

Ressaltando a importância dos jogos de estratégia como recurso didático, está presente o seguinte argumento:

> Nos jogos de estratégia (busca de procedimentos) para ganhar parte-se da realização de exemplos práticos (não da repetição de modelos de procedimentos criados por outros) que levam ao desenvolvimento de habilidades específicas para a resolução de problemas e os modos típicos de pensamento matemático (BRASIL,1998, p.47).

CAPÍTULO 3

SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Buscando desenvolver nos alunos habilidades e estratégias que lhes proporcionem adquirir conhecimento por si mesmos, e não apenas absorvam e reproduzam o conhecimento pronto, formulamos atividades utilizando a metodologia de Resolução de Problemas. A partir desta metodologia, pretendemos desenvolver uma postura crítica diante de uma situação.

Estas atividades abordam o conceito de combinação através da Geometria do Táxi, utilizando como recurso um jogo. Durante a prática do jogo, cada estratégia desencadeia uma série de perguntas como:

> Essa é a única jogada possível? Se houver outra alternativa, qual escolher e por que escolher esta ou aquela? Terminando o problema ou a jogada, quais os erros e por que foram cometidos? Ainda é possível resolver o problema ou vencer o jogo, se forem mudados os dados ou regras? (BORIN, 2007).

Na tentativa de corrigir jogadas erradas, os alunos se organizam, controlando seu comportamento segundo basicamente as mesmas regras determinadas por Polya para resolução de problemas.

> - leitura atenta das regras do jogo para compreender o que é permitido e possível;
> - levantamento dos dados e formulação de hipóteses;
> - execução da hipótese escolhida a partir da hipótese inicial;
> - avaliação da hipótese, isto é, a verificação da eficiência da jogada para alcançar a vitória (Borin, 2007).

Algumas técnicas de Resolução de Problemas aparecem naturalmente durante os jogos, que segundo Borin, vale destacar: tentativa e erro, redução a um problema mais simples, representação de desenhos, gráficos ou tabelas e analogia a problemas semelhantes, as quais são partes integrantes do jogo que será apresentado a seguir.

A grande essência está em saber problematizar, criar uma situação-problema onde haja clareza de objetivos a serem alcançados.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), para o Ensino Médio, na sua versão PCN_{+}, traz:

> (...) a resolução de problemas é a peça central para o ensino de matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando

> o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios. (BRASIL, 2002, p. 112).

Nossa proposta de utilização de jogos está baseada na perspectiva de Resolução de Problemas, que se baseia na proposição de situação-problema, que segundo Smole, são situações que não possuem solução evidente e que exigem que o resolvedor combine seus conhecimentos e se decida pela forma de usá-los em busca da solução.

A perspectiva metodológica da Resolução de Problemas caracteriza-se por uma postura diante dos obstáculos, sendo um exercício contínuo de desenvolvimento do senso crítico e da criatividade.

Inicialmente descreveremos o jogo criado sobre o conteúdo mencionado. Em seguida, apresentaremos o modo como estas atividades foram desenvolvidas em sala de aula.

3.1. JOGO: “PARA DESAFIAR É PRECISO CONHECER”

O jogo produzido neste trabalho é um jogo de estratégia, condicionado a algumas atividades de treinamento. O jogo chamado “Para desafiar é preciso conhecer”, tem a seguinte descrição:

Jogo: “Para desafiar é preciso conhecer”

Número de participantes: duas pessoas ou dois grupos.

Componentes: 1 tabuleiro quadriculado 12 x 8, 4 pinos coloridos, 1 ampulheta cujo tempo é de 2 minutos e 2 blocos de rascunho.

Objetivo do jogo: Pontuar mais que o adversário acertando o número de caminhos mais curtos entre o ponto de partida e o ponto de chegada passando pelo ponto obrigatório de passagem definido pelo adversário.

Antes de iniciar o jogo, deve ser estabelecido o ponto de partida e o de chegada, em dois vértices opostos do tabuleiro, colocando um pino em cada vértice. Além disso, fica a critério dos jogadores decidir quem irá iniciar o jogo e o número de jogadas que cada participante terá direito.

Regras do jogo
1. Os caminhos a serem traçados entre o ponto de partida e o de chegada deverão respeitar as linhas que dividem o tabuleiro em quadriláteros.
2. Na vez de cada jogador, o adversário irá definir um ponto de passagem obrigatório, colocando um pino no cruzamento de duas linhas do tabuleiro.
3. Uma vez definido o ponto de passagem obrigatório, o jogador terá dois minutos para calcular o número de caminhos mais curtos que ligam o ponto de partida ao ponto de chegada passando pelo ponto de passagem obrigatório.
4. A cada jogada, os dois times devem estar atentos, pois, se o adversário ou o jogador errar os cálculos, não somará nenhum ponto nesta rodada.
5. Não é permitido colocar o ponto de passagem obrigatório em alguma posição já utilizada.
6. Acertando o número total de caminhos mais curtos o jogador converterá este número em pontos. Caso contrário, não marcará nenhum ponto e passará a vez ao adversário.
7. Ao final das jogadas, vence aquele que efetuar mais pontos.

Tabela 1: Descrição do jogo: “Para desafiar é preciso conhecer"

Este jogo foi baseado em um material, chamado “Geometria do Táxi - Contagem”, que faz parte do projeto Matemática Multimídia da UNICAMP.

O modelo do tabuleiro pode ser visto no Anexo 1.

3.2. DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES

Uma grande preocupação atual é que grande parte dos alunos não consegue aplicar o conhecimento matemático adquirido nas aulas tradicionais em problemas do cotidiano. Em particular, o uso de Análise Combinatória pelos alunos se restringe simplesmente ao uso das fórmulas aprendidas, que por não saberem a essência da teoria, muitas vezes fazem mau uso delas.

Com o objetivo de mudar esta situação, elaboramos atividades que façam o aluno compreender este assunto sem a aplicação de fórmulas, de uma maneira interativa e contextualizada no cotidiano.

PÚBLICO ALVO

Segundo a Proposta Curricular do Estado de São Paulo, *Análise Combinatória* é parte integrante do segundo ano do Ensino Médio. Assim, esta proposta de atividades pode ser aplicada tanto aos alunos do segundo ano quanto do terceiro ano do Ensino Médio.

As atividades foram aplicadas em alunos do terceiro ano do Ensino Médio, da ETEC *Professora Marinês Teodoro de Freitas Almeida*, que é uma escola técnica estadual, localizada no centro de Novo Horizonte. A escola possui 240 alunos do Ensino Médio e 240 alunos de cursos técnicos. Os alunos que a frequentam ingressam por um processo seletivo.

A turma era composta por 40 alunos, onde, em média, compareceram 20 alunos por atividade.

A escolha desta turma aconteceu pelo motivo que, quando revisaram Análise Combinatória para as provas de ingresso nas universidades e faculdades, não tiveram o cuidado de observar e descobrir como utilizar o conceito de combinação, apenas memorizaram a fórmula. Então sugerimos através de um jogo, resgatar este conteúdo dado no segundo ano do Ensino Médio, fazendo com que eles entendessem a obtenção da fórmula, adquirindo raciocínio combinatório, sem reprodução.

DURAÇÃO DAS ATIVIDADES

As atividades foram realizadas em um horário alternativo ao horário de aula, distribuídas em cinco seções, sendo três de trinta minutos e duas de aproximadamente sessenta minutos, das quais foram aplicadas pela professora da turma, que neste caso é a mestranda autora.

CONHECIMENTO PRÉVIO

Apesar das atividades serem recomendadas a alunos que já viram o conceito de contagem através de Análise Combinatória, sua realização não exige nenhum conhecimento prévio. O importante é que ao final da atividade o aluno perceba que as estratégias utilizadas envolviam este conceito.

APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES

Ao levar o jogo para a sala de aula, os alunos ficaram empolgados e ansiosos para jogar, inicialmente leram as regras.

Neste momento pudemos observar que algumas regras não estavam de acordo, ou seja, não estavam adequadas. Então juntos, reorganizamos as regras, das quais já foram devidamente apresentadas.

A classe se dividiu em grupos, onde um grupo enfrentou o outro.

Estabeleceram a largada como (0,0) e o ponto final sendo (12,8). O adversário colocou o ponto de passagem obrigatório sem muito pensar, então ao se defrontar com tantas possibilidades de trajetos, os alunos ficaram confusos.

O jogador começou a desenhar todas as possibilidades de caminhos que havia naquela malha quadriculada. No final do tempo determinado pelo jogo, eles não conseguiram desenhar todos, precisavam buscar outra estratégia, da qual naquele momento parecia estar muito distante.

Perguntas das quais foram empregadas durante esta situação:

- o tempo disponível para cada jogada é suficiente?
- como saber se o caminho traçado é um caminho mais curto entre os referenciais?
- existe outra possibilidade em descobrir os caminhos sem desenhá-los?

Diante destas perguntas, pudemos observar que os alunos não conseguiriam jogar de acordo com as regras do jogo, portanto finalizamos a atividade com aproximadamente 30 minutos.

Então foi proposto aos alunos que fizessem mais algumas atividades antes de jogar novamente, para que suas técnicas fossem aprimoradas.

3.2.1. ATIVIDADES EXTRAS: TREINAMENTO.

Dentre as dificuldades apresentadas, notamos que o tamanho do tabuleiro foi o principal obstáculo à construção de estratégias. Deste modo, propomos atividades que indutivamente levem o aluno a entender como se deve proceder. Essas atividades foram divididas em 2 encontros, um de sessenta minutos e outra de 30 minutos.

1º ENCONTRO

Material: papel quadriculado, 1 ficha de instrução, 2 fichas a serem preenchidas pelos alunos e uma televisão (ou computador) .

Objetivo: obter o tamanho de um menor trajeto entre dois referenciais e calcular a quantidade deles.

Duração: 60 minutos

Cada aluno recebeu um papel quadriculado do seguinte tamanho:

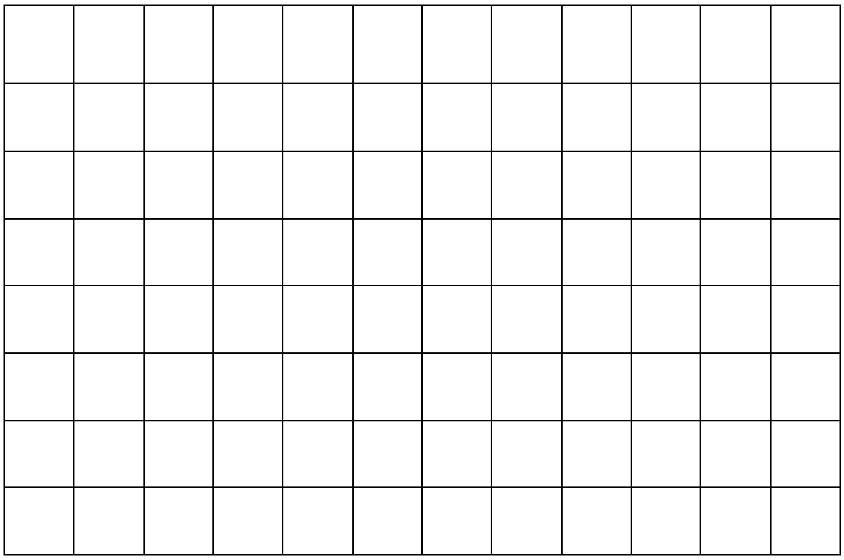


Figura 5: Malha quadriculada

Receberam uma ficha contendo as instruções do que devia ser feito.

Ficha de instrução 1
1 – Desenhe um quadrilátero 1x1, tendo como vértices opostos (0,0) e (1,1). Trace os possíveis menores caminhos tendo como ponto inicial (0,0) e ponto final (1,1).
2 – Desenhe um quadrilátero 1x2, tendo como vértices opostos (0,0) e (1,2). Trace os possíveis menores caminhos tendo como ponto inicial (0,0) e ponto final (1,2).
3 – Desenhe um quadrilátero 2x1, tendo como vértices opostos (0,0) e (2,1). Trace os possíveis menores caminhos tendo como ponto inicial (0,0) e ponto final (2,1).
4 – Desenhe um quadrilátero 2x2, tendo como vértices opostos (0,0) e (2,2). Trace os possíveis menores caminhos tendo como ponto inicial (0,0) e ponto final (2,2).
5 – Desenhe um quadrilátero 3x2, tendo como vértices opostos (0,0) e (3,2). Trace os possíveis menores caminhos tendo como ponto inicial (0,0) e ponto final (3,2).

Tabela 2: Ficha de instrução

Modelo de construção no quadriculado.

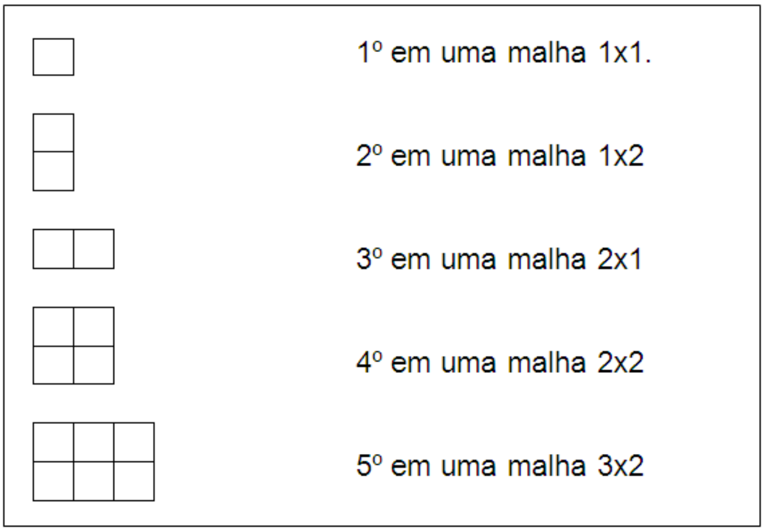


Figura 6: Modelo de construção no quadriculado

Os alunos perceberam que um menor caminho poderia ser encontrado através do quadrilátero cujos vértices opostos eram os pontos de saída e de chegada, concluindo que o tamanho desse menor caminho era a metade do perímetro do quadrilátero.

A professora então os questionou com as seguintes perguntas:

- por que esse é um menor caminho? - existem outros?

Em seguida, os alunos receberam a ficha abaixo, que deveria ser preenchida para cada item da instrução anterior. Cada aresta dos quadrados do papel quadriculado foi chamada de quadra.

Instruções	Menor número de quadras para ir do ponto inicial ao ponto final (menor caminho).	Números de menores caminhos
1		
2		
3		
4		
5		

Tabela 3: Ficha para ser preenchida seguindo a Tabela 1

Deste modo, todos os participantes tentaram encontrar os menores caminhos, contando as quadras percorridas. Alguns tentaram fazer de cabeça e aí contaram duas vezes o mesmo caminho, outros foram desenhando os caminhos, que conseguiram encontrar facilmente para as malhas menores e com um pouco mais de dificuldade na malha maior.

Depois disso, a professora pediu para que eles descrevessem cada percurso obtido em cada instrução na ficha anterior usando a representação:

H: quadra horizontal e V: quadra vertical

Assim, cada caminho poderia ser representado por um anagrama usando H e V, com as seguintes regras:

- a quantidade de letras no anagrama é a quantidade de quadras que dão o menor caminho. - As letras H e V serão distribuídas seguindo a sequência de quadras determinada por cada menor caminho encontrado, começando do ponto inicial e terminando no ponto final.

Os dados obtidos foram anotados por cada aluno na seguinte ficha:

Instruções	Anagrama dos menores caminhos
1	
2	
3	
4	
5	

Tabela 4: Ficha para ser preenchida especificando os caminhos

Depois de preenchida esta última tabela, a professora os questionou a pensar qual a relação entre a quantidade de menores caminhos e a posição das letras V e H no anagrama, através de algumas perguntas:

- para cada linha da ficha anterior, o que aconteceu com a quantidade de letras V e H em cada anagrama?
- se sabemos a quantidade mínima de quadras a ser percorrida do ponto inicial ao ponto final, podemos somente utilizando anagramas encontrar o número de menores caminhos?

Portanto, concluíram que encontrar o número de menores caminhos era encontrar todas as possibilidades de anagramas com as letras H e V, na qual o número de letras envolvidas era a quantidade mínima de quadras para ir do ponto inicial ao ponto final.

Para que os alunos entendam como encontrar essa quantidade mínima de quadras, a professor passou para eles um vídeo, que falava a respeito de como trafegar em uma cidade pensada como uma malha quadriculada. De uma maneira divertida, foi apresentada aos alunos uma nova geometria, chamada de Geometria do Táxi, que garantia que quantidade mínima de quadras para ir do ponto inicial ao ponto final era, de fato, a metade do perímetro do quadrilátero desenhado no início da atividade.

Este vídeo, chamado "Vou de Táxi", pode ser acessado em www.youtube.com/watch?v=m12RKnmLbXY.

Neste dia compareceram 23 alunos. Seguem os dados a respeito do desempenho dos alunos:

Instrução	Número de alunos que acertaram a quantidade de caminhos.	Número de alunos que erraram a quantidade de caminhos.
1	23	0
2	22	1
3	22	1
4	18	5
5	15	8

Tabela 5: Resultados obtidos na primeira atividade

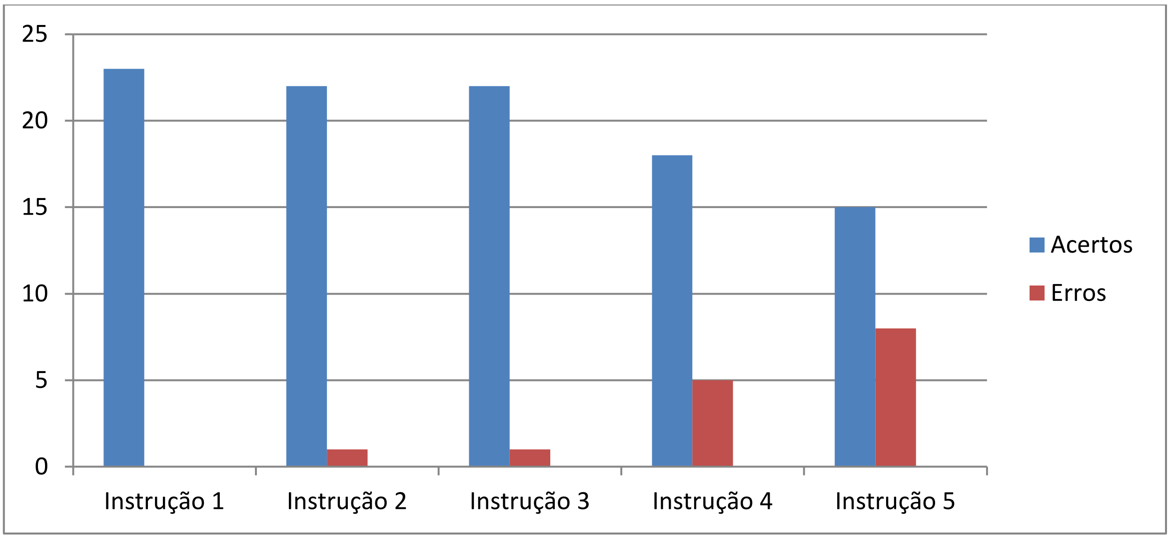


Figura 7: Gráfico referente à quantidade de erros e acertos dos alunos na primeira atividade

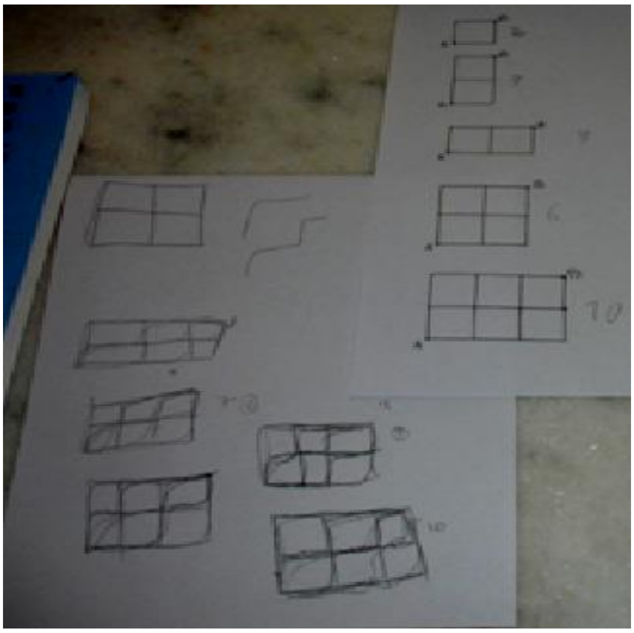


Figura 8: Material de rascunho dos alunos

Motivos dos erros
- falta de atenção ao ler as instruções.
- não fizeram todos os possíveis desenhos (ou anagramas).
- muitos começaram desenhar um por cima do outro e se confundiram ao contar a quantidade de caminhos.

2º ENCONTRO

Material: papel quadriculado, 1 ficha de instrução e 1 ficha a ser preenchida.

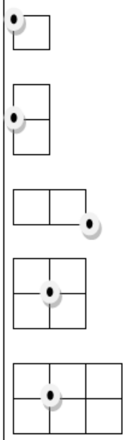
Objetivo: calcular a quantidade de menores trajetos entre dois referenciais, tendo que passar por um terceiro ponto.

Duração: 30 minutos

O próximo passo foi entregar aos alunos um novo papel quadriculado (nas mesmas dimensões anteriores: 12 X 8) e a seguinte ficha de instrução:

Ficha de instrução 2
1 – No quadrilátero 1x1, tendo como vértices opostos (0,0) e (1,1), ache os possíveis menores caminhos tendo como ponto inicial (0,0), passando pelo ponto (0,1) e ponto final (1,1).
2 – No quadrilátero 1x2, tendo como vértices opostos (0,0) e (1,2), ache os possíveis menores caminhos tendo como ponto inicial (0,0), passando pelo ponto (0,1) e ponto final (1,2).
3 – No quadrilátero 2x1, tendo como vértices opostos (0,0) e (2,1), ache os possíveis menores caminhos tendo como ponto inicial (0,0), passando pelo ponto (2,0) e ponto final (2,1).
4 – No quadrilátero 2x2, tendo como vértices opostos (0,0) e (2,2), ache os possíveis menores caminhos tendo como ponto inicial (0,0), passando pelo ponto (1,1) e ponto final (2,2).
5 – No quadrilátero 3x2, tendo como vértices opostos (0,0) e (3,2), ache os possíveis menores caminhos tendo como ponto inicial (0,0), passando pelo ponto (1,1) e ponto final (3,2).

Tabela 6: Ficha de instrução



1º em uma malha 1x1, com ponto fixado (0,1)

2º em uma malha 1x2, com ponto fixado (0,1)

3º em uma malha 2x1, com ponto fixado (0,2).

4º em uma malha 2x2, com ponto fixado (1,1).

5º em uma malha 3x2, com ponto fixado (1,1).

Figura 9: Modelo de construção no quadriculado

Os dados foram preenchidos em uma nova ficha, descrita abaixo:

Instruções	Número de menores caminhos para ir do ponto inicial, passando pelo ponto fixado, ao ponto final.
1	
2	
3	
4	
5	

Tabela 7: Ficha a ser preenchida de acordo com a Tabela 6

Com a atividade desenvolvida no primeiro encontro, esta atividade se tornou mais fácil. A maioria calculou o número de menores caminhos em duas etapas: uma considerando como ponto inicial o próprio ponto inicial dado e como ponto final o ponto intermediário fixado e outra considerando como ponto inicial o ponto intermediário fixado e como ponto final o próprio ponto final dado, ambas desenvolvidas como na fase anterior.

Depois disso, surgiu a seguinte dúvida:

Como relacionar os dois números calculados?

Para não dar a resposta, a professora sugeriu que pensassem na seguinte situação:

Fixe um menor caminho da primeira etapa. Neste caso, o número total de menores caminhos é exatamente a quantidade de menores caminhos da segunda etapa. Então, para cada menor caminho fixado na primeira etapa, temos essa mesma quantidade. O que estamos fazendo com esse raciocínio: somando ou multiplicando as quantidades?

Neste dia compareceram 20 alunos. Seguem os dados referentes às respostas dos alunos.

Instrução	Número de alunos que acertaram a quantidade de caminhos.	Número de alunos que erraram a quantidade de caminhos.
1	20	0
2	18	2
3	18	2
4	15	5
5	10	10

Tabela 8: Resultados obtidos na segunda atividade

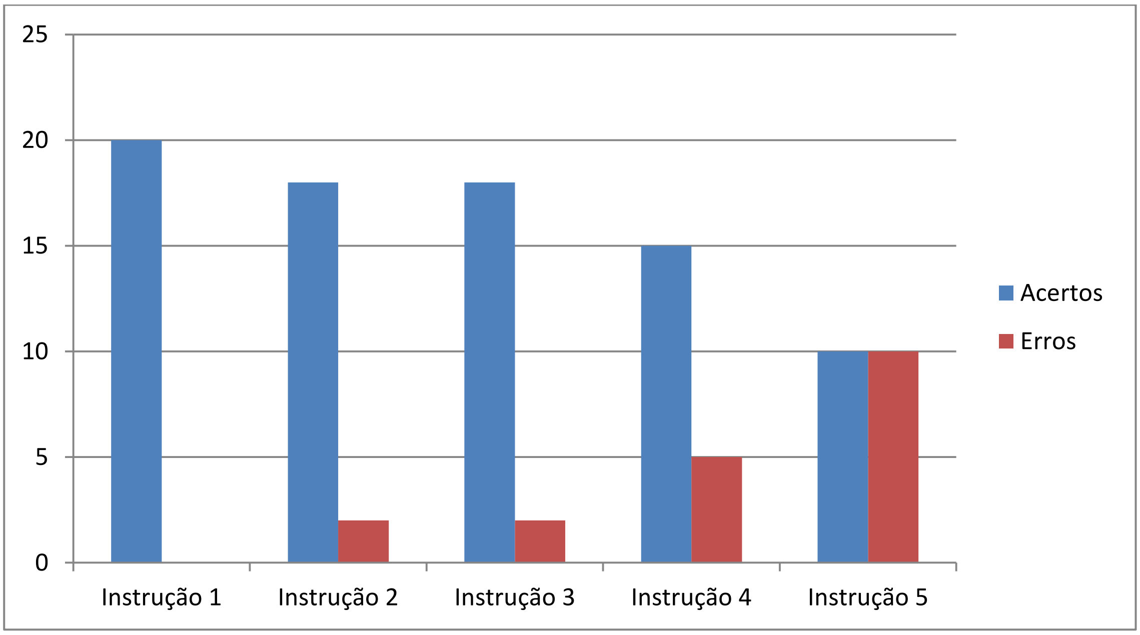


Figura 10: Gráfico referente à quantidade de erros e acertos dos alunos na segunda atividade

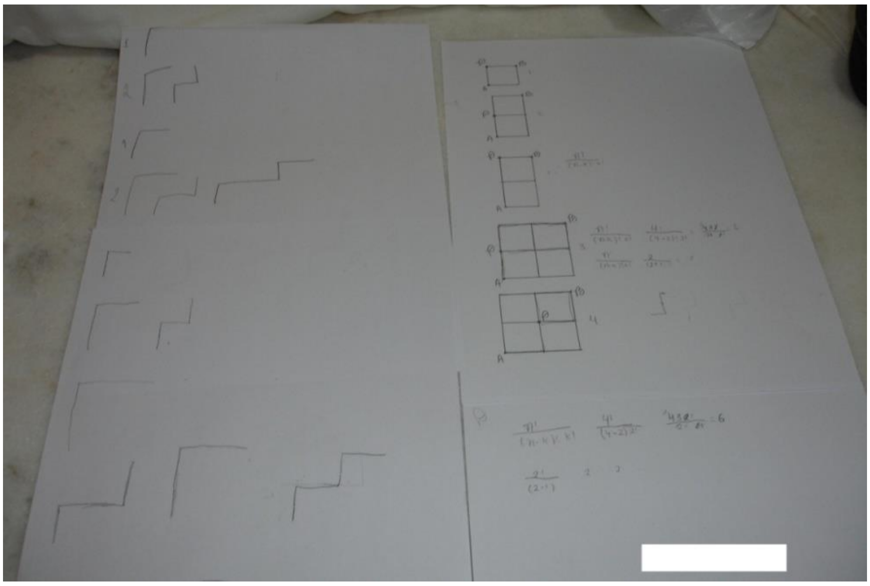


Figura 11: Material de rascunho dos alunos

Motivos dos erros

- Falta de atenção ao ler as instruções.
- Alguns esqueceram de passar pelo ponto obrigatório.
- Alguns passaram pelo ponto obrigatório, mas não fizeram o menor caminho.
- Alguns somaram ao invés de multiplicar os resultados encontrados nas duas etapas.

3.2.2. APLICAÇÃO DO JOGO

Esta atividade teve duração de aproximadamente 60 minutos. Neste dia compareceram 20 alunos, que foram divididos em 4 grupos de 5 alunos, chamados de grupo A, grupo B, grupo C e grupo D. Um campeonato foi estabelecido com a seguinte ordem de partidas, obtida por sorteio:

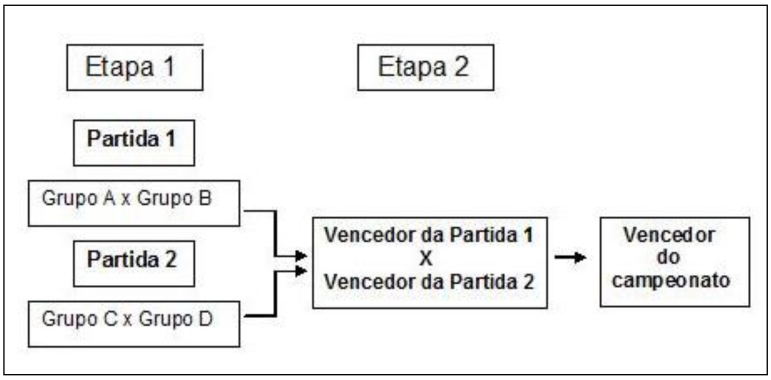


Figura 12: Disposição das etapas do jogo

As regras são as estabelecidas no início do capítulo, agora sempre fixada a cada partida o número de 3 jogadas para cada grupo.

Inicialmente lemos as regras, retiramos possíveis dúvidas, como o fato de uma equipe equivocadamente errar cálculos, etc.

Após o primeiro contato com o jogo e a ansiedade pela vitória, os alunos começaram a levantar dados e possibilidades que pudessem influenciar as suas jogadas e as jogadas dos adversários.

Tendo feito as atividades anteriores, os alunos tiveram certa facilidade para jogar de acordo com as regras. A grande dificuldade foi o tempo para calcular os caminhos em questão.

Este campeonato teve o seguinte resultado:

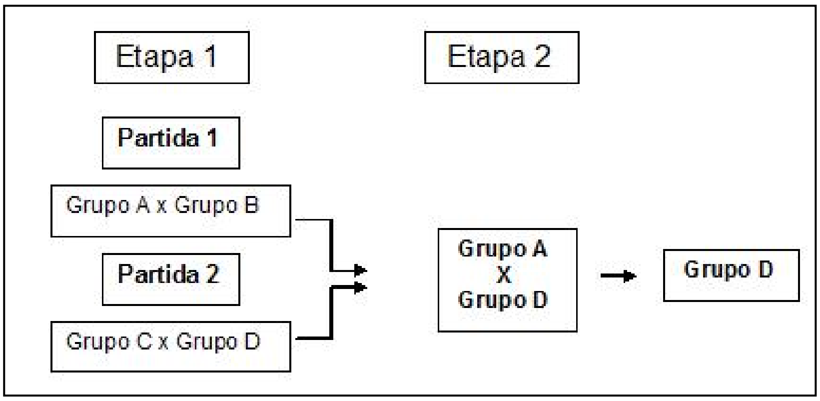


Figura 13: Disposição das vitórias de cada etapa

Outra possibilidade

Após os alunos aprenderem, relacionarem o conteúdo matemático focado em questão, podemos retirar do jogo a escolha, por parte do adversário, do ponto obrigatório pela possibilidade do fator sorte: o aluno troca a escolha do ponto obrigatório pela sorte, ou seja, lança dois dados especiais, um dodecaedro e um octaedro, e as faces que estes dados mostrarem serão as coordenadas do ponto obrigatório. Isso torna o jogo mais dinâmico.

3.2.3. UMA SITUAÇÃO-PROBLEMA COMO APLICAÇÃO DO JOGO

Neste momento queremos mostrar como o jogo aplicado como instrumento de ensino influencia na resolução de uma situação-problema do nosso cotidiano. Após terem colocado as ideias de Análise Combinatória no jogo, resolver este problema, no qual eles se deparam todos os dias, ficou muito mais fácil.

Esta atividade teve duração de aproximadamente 30 minutos. Neste dia compareceram os mesmos 20 alunos da atividade anterior.

Em um tabuleiro quadriculado 12 X 8, foi imaginado como uma cidade onde cada linha (horizontal ou vertical) representava uma rua. Foram distribuídos neste tabuleiro pontos, nos cruzamentos destas ruas, representando algumas casas e uma pizzaria.

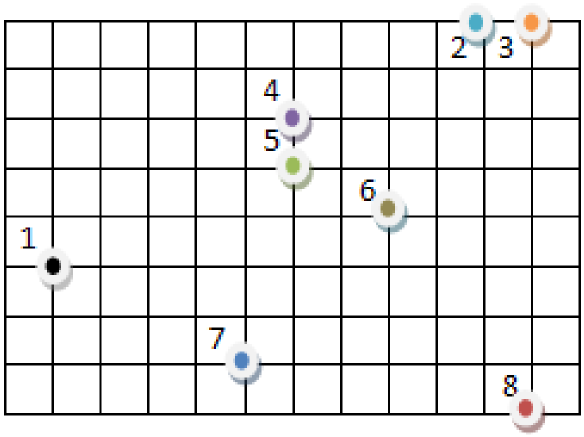


Figura 14: Mapa da Cidade Fictícia

Casa David 2

Casa Renan 3

Casa João 4

Cada Leonardo 5

Pizzaria Mamma 6

Casa Matheus 8

Casa Vitor 7

Casa José 1

Situação-problema: Em plenas férias, José resolveu reunir alguns amigos na sua casa. Telefonou para convidar os seguintes amigos: David, João, Leonardo, Matheus, Renan e Vitor. Para chegar à casa de José todos devem percorrer o menor trajeto possível (o menor número de quadras), economizando tempo e energia.

Ficha de Perguntas
1 - Para chegar à casa de José, qual é o menor trajeto que o Renan deve fazer e quantas possibilidades há para fazer este percurso? Resposta: 2 - Mas como ele é amigo do David e moram na mesma rua passará por lá. Mudará alguma coisa em relação ao menor trajeto e o número de trajetos? Resposta: 3 - Se o Renan tiver compromisso, o David irá sozinho. Agora, quantas são as possibilidades de menor caminho para ele? Resposta: 4 – Se Renan e David tiverem que passar pela casa do Leonardo, onde o João os aguarda, será que eles vão ter que andar mais ou menos? Terão mais opções de caminhos? Resposta: 5 - A partir da casa do Leonardo, quantos caminhos eles podem fazer? Resposta: 6 - Enquanto os aguarda, José ligou para Matheus (que ainda não tinha saído de casa) e pediu para ele passar na Pizzaria Mamma para comprar duas pizzas e um refrigerante de 2 litros. O caminho dele ficou maior? Quantas possibilidades eles têm de trajetos agora? Resposta:

Tabela 9: Ficha a ser preenchida relativa à situação-problema

Cada aluno recebeu uma ficha como descrita anteriormente, uma folha com o mapa da cidade fictícia e uma folha para rascunho. Na própria ficha, eles escreveram suas respostas e entregaram à professora. Os alunos puderam se comunicar e trocar ideias. Nesta última atividade 90% dos alunos acertaram todas as respostas.

Gabarito
1 – 15 quarteirões – 3003 possibilidades.
2 – Não – 2002 trajetos.
3 – 2002.
4 – Andarão o mesmo número de quarteirões – 735 possibilidades.
5 – 21 menores caminhos.
6 – Sim – 280 possibilidades.

Tabela 10: Gabarito da ficha relativa à situação-problema

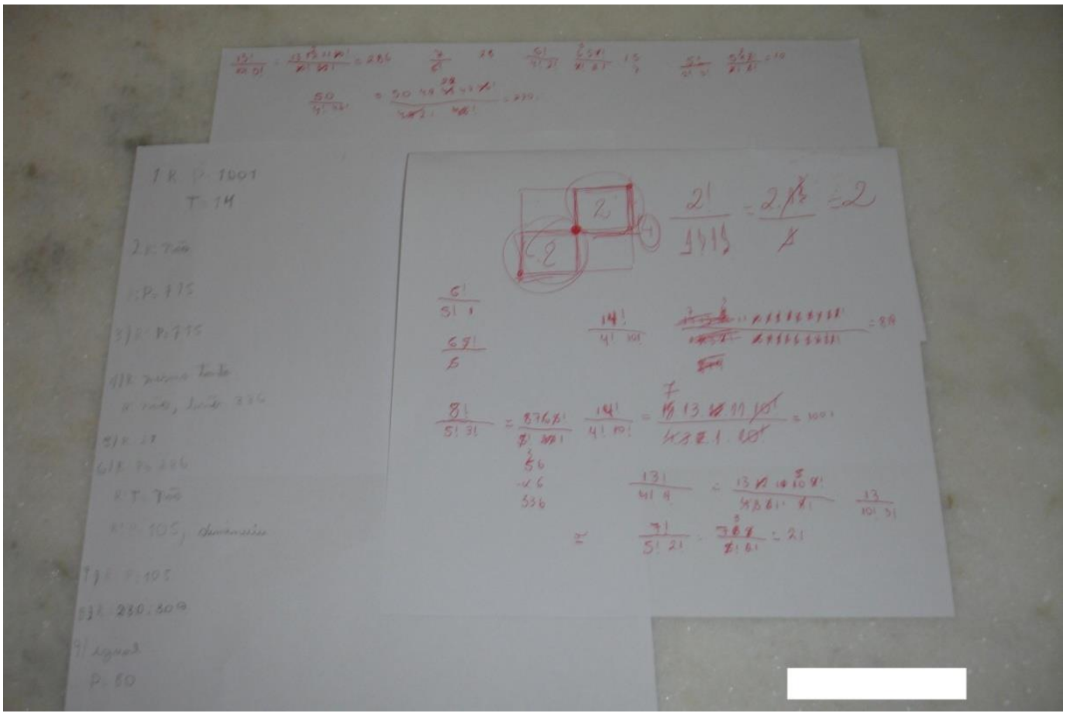


Figura 15: Material de rascunho dos alunos.

3.3. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Terminadas as atividades, foi relatado aos alunos que nas estratégias aprendidas e aplicadas no jogo, eles estavam usando o conceito de análise combinatória, demonstrando que em cada cálculo podíamos ter usado a fórmula aprendida nas aulas tradicionais.

É gratificante ver os participantes planejarem suas jogadas, fazerem cálculos, utilizarem uma matéria considerada difícil em aulas tradicionais.

O fato importante é que podemos levar o aluno a entender e aplicar a análise combinatória sem a utilização de fórmulas, através de atividades que chamem a atenção deles, atividades das quais eles sintam o prazer de aprender e que são tão evidenciadas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais.

Os ótimos resultados apresentados na atividade da situação-problema foram possíveis graças a sequência de atividades.

Em suma, conseguimos através das atividades relacionar um conteúdo de Matemática de alta dificuldade para os alunos com o cotidiano deles, de maneira prazerosa e, segundo os resultados obtidos, constatamos o aprendizado do mesmo, o que nos indica que o trabalho alcançou o seu objetivo.

Espera-se que este trabalho possa ser desenvolvido por outro professor, para facilitar a aprendizagem do aluno, podendo acrescentar novas ideias.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANTUNES, C. **Jogos para a estimulação das múltiplas inteligências**. 10ª Ed – Petrópolis, RJ: Vozes, 2002.

BARICHELLO, L. **Geometria do Táxi – Contagem.** L. Barichello, S. Costa, C. I. Rodrigues. Matemática Multimídia. UNICAMP. Disponível em: <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1247>.Acesso em: 09/01/2013.

BICUDO, M. A. V. **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas**. São Paulo: UNESP, 1999.

BRASIL. Ministério da Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Ensino Médio. Brasília: Mec, 1999. 364p.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCN +)**. Brasília, MEC, 2007. 144 p. Disponível em: <http://lastro.ufsc.br/files/2010/05/pchumanas.pdf>. Acesso em: 09/03/2013.

BORIN, J. **Jogos e Resolução de Problemas: uma estratégia para as aulas de matemática.** 6ª Ed. – São Paulo: IME-USP, 2007.

FIRER, M. **Vou de Táxi.** M. Firer, C. I. Rodrigues. Matemática Multimídia. UNICAMP. Disponível em: <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1191>. Acesso em: 09/01/2013.

GALEGO, J. P. **A utilização dos jogos como recurso didático no ensino-aprendizagem da matemática.** Unesp: Bauru, 2007. Disponível em: <http://www.fc.unesp.br/upload/pedagogia/TCC%20Julia%20Perruchetti%20-%20Final.pdf>. Acesso em: 24/01/2013.

IEZZI, G. et al. **Matemática: 2ª série. 2º grau.** 6ª Ed. São Paulo: Atual Editora, 1979.

KRAUSE, E. F. **Taxicab Geometry.** New York: Dover, 1986.

LIMA, E. l. **Espaços métricos.** Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

MACEDO, L. **Aprender com Jogos e Situações-Problemas**. Porto Alegre: ARTMED, 2000.

MORAES, M. C. **O Paradigma Educacional Emergente**. 11ª Ed. – Campinas, SP: Papirus, 2005.

MORGADO, A. C. **Análise combinatória e probabilidade/** A. C. Morgado, J. B. P de Carvalho, P. C. P. Carvalho, P. Fernadez. 9ª Ed. – Rio de Janeiro: SBM, 1991.

PERRENOUD, P. **Dez novas competências para ensinar: convite à viagem.** Porto Alegre: ARTMES, 2000.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático.** Rio de Janeiro: Interciência, 1977.

SCHWARTZ, Laurent. **Théorie des Distributions**. Editora Hermann, Paris (1966).

SMOLE, K. S. **Jogos de matemática: de 1º a 3º/** Smole, K. S., Dinis, M. I., Pessoa, N., Ishihara, C. Porto Alegre: ARTMED, 2008.

ANEXO 1: TABULEIRO DO JOGO