UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

THIAGO ALAN DA SILVA

LÓGICA MATEMÁTICA: UMA PROPOSTA METODOLÓGICA PARA OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA

JUAZEIRO DO NORTE
2022

THIAGO ALAN DA SILVA

LÓGICA MATEMÁTICA: UMA PROPOSTA METODOLÓGICA PARA OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Dr. Valdir Ferreira de Paula Junior

JUAZEIRO DO NORTE
2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação.
Universidade Federal do Cariri.
Sistema de Bibliotecas

S586l Silva, Thiago Alan da.
Lógica matemática : uma proposta metodológica para olimpíadas de matemática / Thiago Alan da Silva. – 2022.
142 f.: il. color. 30 cm.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Cariri, Centro de Ciências e Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Juazeiro do Norte, 2022.
Orientação: Prof. Dr. Valdir Ferreira de Paula Junior.

1. Lógica matemática. 2. Olimpíadas de matemática. 3. Preparação - OBRL. I. Título.

CDD 511.3

Bibliotecária: Glacinésia Leal Mendonça
CRB 3/ 925

THIAGO ALAN DA SILVA

LÓGICA MATEMÁTICA: UMA PROPOSTA METODOLÓGICA PARA OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 29 de agosto de 2022.

BANCA EXAMINADORA

gov.br Documento assinado digitalmente
VALDIR FERREIRA DE PAULA JUNIOR
Data: 30/09/2022 09:13:13-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Prof. Dr. Valdir Ferreira de Paula Junior
CCT / UFCA

gov.br Documento assinado digitalmente
JOSE TIAGO NOGUEIRA CRUZ
Data: 03/10/2022 22:10:10-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Prof. Dr. José Tiago Nogueira Cruz
CCT / URCA / Externo

gov.br Documento assinado digitalmente
DAVI RIBEIRO DOS SANTOS
Data: 04/10/2022 13:43:39-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Prof. Me. Davi Ribeiro dos Santos
CCT / UVA / Externo

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, que sempre está comigo; a minha mãe que constantemente me auxiliou e deu o suporte necessário e família de modo geral, em especial minha irmã.

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a Deus que sempre me deu forças para prosseguir, sua presença é constante em minha vida.

Agradeço a minha mãe Telma Suely da Silva, que sempre lutou para dar uma vida melhor para seus filhos e está do meu lado todos os dias. A família em geral.

Agradeço aos meus professores que com dedicação e maestria desenvolvem seu trabalho, contribuindo para um mundo melhor com educação de qualidade, em especial, deixo meus agradecimentos ao meu orientador Professor Dr. Valdir Ferreira de Paula Júnior, que teve total paciência comigo e me incentivou a terminar este trabalho.

Ao final, agradeço a todos meus colegas de turma e desejo sucesso para todos, em especial agradeço a Maurício José Nascimento de Macêdo que se prontificou para ajudar na digitação no LaTeX.

“A viagem de mil quilômetros começa com um passo.”

Lao Tzu

RESUMO

A Lógica Matemática é uma área da Matemática que está intrinsecamente ligada ao cotidiano das pessoas, porém sua difusão no ensino básico ainda é bem tímida, em particular no Ensino Fundamental. Já as Olimpíadas estudantis se apresentam como forma de instigar e desafiar os estudantes a testarem seus conhecimentos, dentre elas, destacamos a Olimpíada Brasileira de Raciocínio Lógico - OBRL. Esta competição contempla estudantes de diversas regiões do Brasil, com diferenciados níveis de conhecimento, tendo uma coleção de livros, elaborada pelo professor Artur Ataíde, voltados à preparação para as provas. Já o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT tem dentre suas propostas difundir o ensino de Matemática a partir da estruturação de materiais didáticos, como forma de fortalecer o ensino de Matemática na Educação Básica. Nessa perspectiva, sugere-se a possibilidade de trabalhar a partir de um material voltado à Lógica Matemática, que aborde conceitos básicos desta área da Matemática. Dessa forma, buscamos com esta pesquisa organizar um material didático que aborde conceitos de Lógica Matemática, voltado à preparação para Olimpíadas de Lógica Matemática; destacando conceitos básicos e problemas que sejam solucionados a partir desses conteúdos. Ao fim, esperamos que este estudo contribua positivamente para motivar as pessoas a estudarem Lógica Matemática, bem como serem capazes de utilizar esses conhecimentos em competições matemáticas e no seu cotidiano.

Palavras-chave: Lógica Matemática. Olimpíadas. Preparação.

ABSTRACT

Mathematical Logic is an area of Mathematics that is intrinsically linked to people's daily lives, however, its diffusion in basic education is still very timid, particularly in Elementary School. The student Olympics are presented as a way to instigate and challenge students to test their knowledge, amongst them, we highlight the Brazilian Logical Reasoning Olympiad - OBRL. This competition includes students from different regions of Brazil, with different levels of knowledge, having a collection of books, prepared by Professor Artur Ataíde, aimed at preparing for exams. The Professional Master's in Mathematics in the National Network - PROFMAT has among its proposals to spread the teaching of Mathematics from the structuring of teaching materials, as a way of strengthening the teaching of Mathematics in Basic Education. In this perspective, it is suggested the possibility of working from a material focused on Mathematical Logic, that addresses basic concepts of this area of Mathematics. Thus, With this research, we seek to organize a didactic material that addresses concepts of Mathematical Logic, aimed at preparing for Mathematical Logic Olympiads; highlighting basic concepts and problems that can be solved from these contents. in the end, we hope this study will contribute positively to motivating people to study Mathematical Logic, as well as being able to use this knowledge in mathematical competitions and in their daily lives.

Keywords: Mathematical logic. Olympics. Preparation.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

Sumário

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

O Raciocínio Lógico Matemático é um dos elementos inerentes ao estudo da Matemática que mais se mostra presente na vida das pessoas, estando presente em diversas situações do cotidiano, como por exemplo, em decidir a cor da roupa que usa em uma festa temática (MATTOS, 2012). Por isso, é tido como um recurso indispensável na construção da identidade do indivíduo como parte do meio social, o qual exige do individuo atributos da referida área do conhecimento matemático (MEIRA; DIAS; SPINILLO, 1993).

O ensino de Matemática, como um todo, sofre nos dias atuais pela falta de estímulo e interesse dos estudantes, muitas vezes, por conta da falta das condições mínimas de estrutura. Por conta disso, é comum que se relate baixos resultados no que envolve o desempenho dos estudantes em provas que medem o desempenho na disciplina de Matemática na Educação Básica do Brasil (MACUGLIA; SCHRODER, 2017). Essa realidade também é compartilhada quando se trata do estudo do Raciocínio Lógico Matemático.

Embora se busque melhorar o desempenho e o interesse por parte dos estudantes nesse ramo da matemática, atualmente são bem escassos os projetos que busquem fazer essa inserção na Educação Básica. Particularmente, no Ensino Fundamental II quase não ocorre a difusão desses conhecimentos de forma adequada, muitas vezes sendo repassados de forma indireta pelos professores da disciplina de Matemática. O que provoca uma defasagem de conhecimentos de Lógica Matemática durante os processos formativos: ensino fundamental, médio e superior (ARRUDA, 2022).

Um dos pontos chave na motivação consta em conhecer as origens e aplicações de conceitos, no caso a Lógica Matemática, desde as formas primitivas até suas aplicações no mundo contemporâneo. O que leva à necessidade de buscar formas de instigar os estudantes, de modo a despertar a curiosidade e o desejo de estudar e aplicar esses conhecimentos. Para isso, se faz necessário criar ou propiciar situações que favoreçam estes estímulos, sendo as olimpíadas estudantis uma das ferramentas mais utilizadas (ROCHA et al., 2006).

A Lógica Matemática estando presente em diversas competições matemáticas, como a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. Nesse contexto, podemos destacar a importância da Olimpíada Brasileira de Raciocínio Lógico - OBRL, que traz dentre muitas situações a oportunidade de estudantes de diferentes regiões do Brasil competirem e desafiarem seus limites, em provas que contemplam diferentes níveis de aprendizagem (OBRL, 2022). Tal competição motivou, entre outras coisas, a criação, por parte do professor Artur Ataíde, de uma coleção de livros Raciocínio Lógico voltados para estudantes do Ensino Fundamental e Concurseiros (ATAÍDE, s.d.).

O que cumina com a proposta de conceber materiais didáticos que sirvam de apoio e estímulo ao estudo da Matemática como um todo, sendo inclusive um dos enfoques do Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional - Profmat, uma vez que o programa busca aprimorar a formação dos professores e o ensino de Matemática na Educação Básica. O que nos fez sugerir um material que contemple ferramentas básicas da Lógica Matemática e desafios presentes em Olimpíadas.

Desse modo, o presente trabalho tem como objetivo organizar um material didático que aborde conceitos de Lógica Matemática. Para isso, iremos apresentar o contexto histórico a cerca do desenvolvimento da Lógica Matemática; abordar conceitos e noções básicas de Lógica Matemática; sugerir um passo a passo para uma boa preparação para uma olimpíada de Lógica Matemática; apresentar um conjunto de questões de Lógica Matemática, de diferentes níveis de dificuldade.

Esta pesquisa possui uma abordagem bibliográfica em artigos e livros, como também meio acadêmico. Além disso, é predominantemente descritiva qualitativa, uma vez que busca explicar a relação entre as variáveis sem interferir nelas apenas se limitando a: observá-los, explicá-los, analisá-los e interpretá-los (RAUPP; BEUREN, 2006).

Além da presente introdução este trabalho apresenta no Capítulo 2 o contexto histórico referente ao desenvolvimento da Lógica Matemática.

Já no Capítulo 3, tem-se metodologias ativas, a descrição da OBRL e dicas para uma boa preparação para olimpíadas de Lógica Matemática.

No Capítulo 4, expomos alguns conceitos básicos da Lógica Matemática, como proposições, conectivos e operações lógicas.

O Capítulo 5, são apresentadas questões de Lógica Matemática, que vão desde exercícios resolvidos até desafios.

Ao fim, no Capítulo 6, temos as Considerações Finais, nas quais concluímos que os conceitos de Lógica Matemática devem ser inseridos e trabalhados na Educação Básica, afim de propiciar uma melhor qualidade no desenvolvimento do Raciocínio Lógico Matemático.

Capítulo 2

CENÁRIOS DA LÓGICA E SUA EVOLUÇÃO

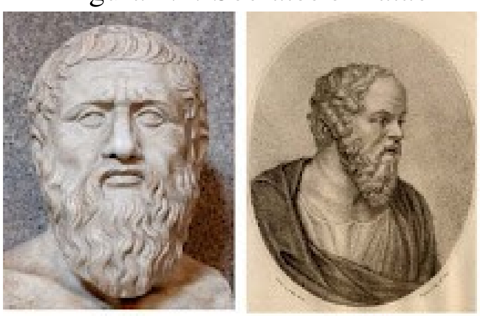
O estudo da Lógica desempenha um papel importante no raciocínio matemático indutivo que é de fundamental importância na formação de muitos profissionais como, por exemplo, de futuros engenheiros, programadores, especialistas militares, etc., pois permite que eles se familiarizem com as direções modernas do desenvolvimento de ensinamentos lógicos, vá além das ambiguidades na Lógica, tomando consciência das ideias lógicas e filosóficas inovadoras do nosso tempo.

Neste capítulo será apresentado de forma sucinta sobre a evolução da Lógica e alguns dos personagens que deixaram seu nome na história da Lógica. Para aprofundamento, ver Margutti (1984), Moreira (2007), Garbi (2006), Garbi e Ciências (2007), Gabbay e Woods (2004), Corcoran (2006), Angelelli (1970), Vernant (1972), Boyer e Merzbach (2019), Flaxman (2008) e Russell (2007).

2.1 Uma Viagem Pelo Tempo

Na lógica, os seguintes períodos históricos podem ser distinguidos: período clássico, período moderno e período contemporâneo, dentro de cada período houve uma espécie de divisão dos pensamentos, com as teorias publicadas dos estudiosos da época.

Figura 2.1: Sócrates e Platão



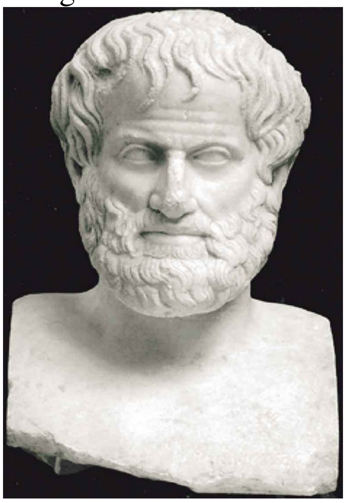
Fonte: Liceufilosofia (2016).

Durante estes três períodos a Lógica passou por grandes revoluções, deste a era de Sócrates ($469-399$ a.C) e Platão ($427-347$ a.C) até os dias atuais.

2.1.1 Período Clássico

A Lógica teve suas raízes na Grécia antiga, na qual se destacaram os filósofos Sócrates e Platão. Mas foi com o filósofo Aristóteles ($384-322$ a.C) que a Lógica ganhou forma e foi sistematizada. Ele introduziu a maior parte das ideias gerais significativas da Lógica, tais como argumento, validade, inferência, etc, e que continuam até hoje com o mesmo significado, podemos assim dizer, que é com Aristóteles o verdadeiro nascimento da Lógica.

Figura 2.2: Aristóteles



Fonte: G1 (2006).

Aristóteles escreveu alguns livros que foram agrupados posteriormente dando origem uma importante obra chamada "Organon"(Instrumento da Ciência), contendo os silogismo e deduções.

Segundo Vernant (1972) silogismo é uma regra de extrair uma conclusão a partir de duas premissas. Os silogismos são construídos com sentenças do tipo:

1− Todo X é Z.

2− Algum X é Z.

3− Todo X é Z.

Um silogismos é o argumento:
Todo homem é mortal.
Sócrates é homem.
Logo, Sócrates é mortal.

Segundo (ANDRADE, 2021) Aristóteles tinha um método científico necessário para a investigação do conhecimento e demonstração científica. O método científico por ele preconizado era:

1− Observação de fenômenos particulares;

2− Intuição dos princípios gerais (universais) a que os mesmos obedecem;

3− Dedução a partir deles das causas dos fenômenos particulares.

Por muito tempo a Lógica clássica era considerada única, todavia, a Lógica Aristotélica tinha suas limitações para o avanço da ciência, foi aí que deu início a Lógica não clássica.

2.1.2 Período Moderno

Este período foi um dos mais abundoso para a matemática em geral, em particular para a Lógica.

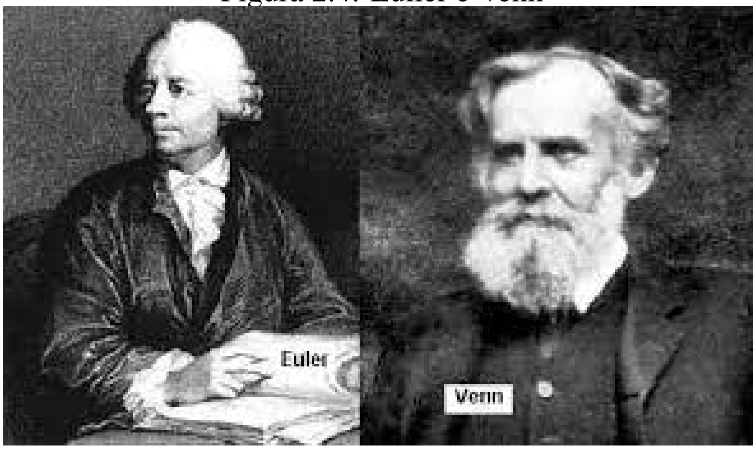
Segundo (DIAS, 1994) o início da lógica moderna dá-se no final do século XVII e o início do século XVIII. Nesse período, Thomas Hobbes forma a ideia de considerar o processo de raciocínio como um processo de acerto de contas. O grande filósofo e matemático francês René Descartes introduziu conceitos como “variável”, “função”, e Gottfried Leibniz introduziu uma designação simbólica de variáveis lógicas, propondo um sistema exato e universal de notação, criando um ambiente conveniente para o surgimento da lógica matemática, ele iniciou o uso de quantificadores e de identidade; "todo A é A"ou "A é A". A Contribuição de Leibniz para o desenvolvimento da Lógica foi muito grande – seu ensino da Monadologia possibilitou falar sobre a multiplicidade de fenômenos no mundo. Porém, boa parte da sua escrita não foi publicada e ficou desconhecida até o início do século XX.

Figura 2.3: Leibniz

Fonte: Wikipédia (2022b).

Ainda temos dois grandes matemáticos que contribuíram nessa época, Euller $(1707-1783)$ e Venn $(1834-1923)$.

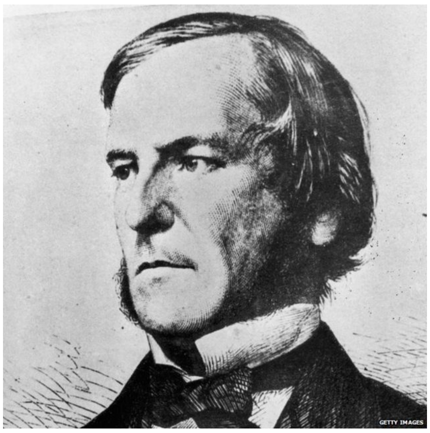
Figura 2.4: Euller e Venn



Fonte: PUC-SP (2004).

O período da álgebra da lógica começa com a publicação em 1847 por George Boole (considerado o fundador da lógica matemática) do livro "The Mathematical Analysis of Logic"(Análise Matemática da Lógica), no qual o autor introduziu o simbolismo algébrico na Lógica para construir cálculos lógicos, considerando o processo de inferência como uma solução de igualdades lógicas, a tabela-verdade deriva do seu trabalho.

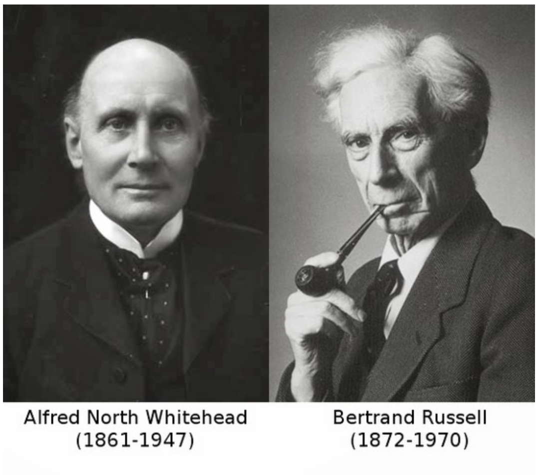
Figura 2.5: Boole



Fonte: Amino (s.d.).

O período de desenvolvimento da lógica como teoria de fundamentação da matemática está associado a situações de crise na matemática na virada do século XIX - início do século XX, o desenvolvimento da construção axiomática de Gottlob Frege do cálculo proposicional, a teoria da quantificação, princípios básicos da semântica lógica e da teoria da justificação lógica da matemática Bertrand Russell $(187 - 1970)$ e Alfred North Whitehead $(1861 - 1947)$ nos "Princípios da Matemática", onde dá os primeiros passos para o chamado período contemporâneo.

Figura 2.6: A. Whitehead e B. Russell



Fonte: Timetoas (s.d.).

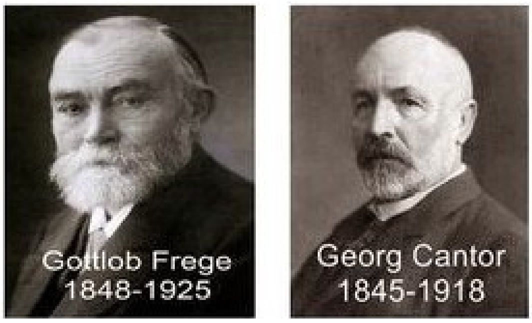
Um dos fundadores da lógica não clássica, o filósofo e lógico russo Nicolai Vasiliev, no final do século XIX apresentou a ideia da possível existência da Lógica sem as leis da contradição e a exclusão do terceiro, chamada de lógica multivalorada, por estudos feitos na metalógica, ou seja, lógica imaginária que não funciona no mundo das coisas reais, em que as regras de combinação de enunciados devem ser determinadas pelo próprio sujeito. Em seu pensamento, Nicolai Vasiliev partiu do fato de que, além da lógica aristotélica, existem outras lógicas, outras operações lógicas (ZANFIR, 2020b). Nasce então o período contemporâneo.

2.1.3 Período Contemporâneo

Este período tem suas raízes nos trabalhos de George Boole. Sua obra "Investigations of the Laws of Thought", publicada em 1854, fazendo um paralelo com a álgebra e o as leis do pensamento De Morgan $(1806 - 1871)$, tornando-se a lógica clássica autônoma, separando da filosofia para torna-se a Lógica Matemática.

Os alemães Fregge $(1848-1925)$ e Cantor $(1845-1918)$ deram fervor à lógica simbólica. Com a ideia de transformar a matemática um ramo da Lógica, deu origem ao paradoxos estudados por Russel e Whithead.

Figura 2.7: Fregge e Cantor



Fonte: I.PINIMG (s.d.).

Neste período temos a expansão e a variação da Lógica, surgindo novos ramos do estudo da Lógica. Século XX, este é o período de desenvolvimento da metalógica, semântica lógica e lógica não clássica associada às atividades da escola Lviv-Varsóvia (BAZHANOV, 2013).

Uma análise nos permite distinguir três áreas no processo de formação da lógica não clássica:

– A emergência de lógicas multivaloradas com crítica ao princípio da ambiguidade e à lei aristotélica de exclusão do terceiro;

– Uma nova interpretação do conteúdo das operações lógicas, em particular, a implicação material e a emergência da lógica intuitiva;

– Visualização de seções de lógica tradicional por meio de não clássicas e criação de novas seções de lógica moderna (modal, lógica relevante da física quântica, etc.).

O surgimento da lógica multivalorada está associado ao nome do lógico polonês Jan Lukasiewicz, que em 1920 em um pequeno artigo considera a lógica trivalorada, onde enunciados podem assumir um dos três valores de verdade possíveis. Um ano depois, o lógico americano Emil Leon Post $(1897 - 1954)$ construiu um sistema de lógica multivalorada.

A lógica multivalorada como ramo da ciência não se limita ao cálculo, mas abrange os problemas gerais de construção e fundamentação do cálculo, suas relações, a atitude em relação à lógica bivalorada, ou seja, abrange estudos teóricos, cujo assunto são cálculos multivalorados.

Um dos lógicos que estudou o sistema lógico de três valores foi Jan Lukasiewicz, que, explorando a natureza dos enunciados modais, chegou à conclusão de que os meios da lógica clássica não são suficientes para avaliar os enunciados modais. Portanto, ele sugere introduzir um terceiro significado da verdade da afirmação como "possível" ou "neutra". No futuro, aparecem os sistemas de três valores de Bochvar, que cria um sistema de lógica de três valores com o objetivo de resolver os paradoxos da lógica matemática tornando as declarações vazias e introduz o valor de verdade da declaração "sem sentido" e Stephen Kleene, que sugere "desconhecido" como o terceiro valor da verdade da afirmação, "Não é importante", "desconhecido falso é verdadeiro".

É interessante que todas as tautologias na lógica de Jan Lukasiewicz são tautologias na lógica clássica, porque se descartarmos o terceiro valor de verdade, todas as operações lógicas coincidirão, mas todas as tautologias da lógica de dois valores não serão tautologias de três valores lógica, porque há um terceiro enunciados de valor de verdade.

Décadas após o desenvolvimento da lógica de três valores, Jan Lukasiewicz desenvolve um sistema de lógica de quatro valores, e logo uma lógica infinita, as ideias das quais ele se conecta com cálculo de probabilidades, considerando o valor da verdade das afirmações como o grau de probabilidade da verdade da afirmação. Em sua lógica de quatro valores, o cientista introduz duas derivadas de verdade de verdadeiro e falso, que são denotadas pelos números

$0, 1, 2, 3$. A lógica de Jan Lukasiewicz pode ser interpretada como "mais perto da verdade"e "mais perto da falha", e os valores 1 e 0 são respectivamente "Verdade"e "falso".

Independentemente de Jan Lukasiewicz e quase simultaneamente com ele, Emil Leon Post, surgiu com considerações puramente formais, assumindo que proposições e funções lógicas assumem valores de verdade com algum conjunto n-valorado, está desenvolvendo seu sistema de multilógica de valor. Emil Post construiu sua lógica significativa como uma generalização de dois valores, e em suas reflexões ele procedeu não do fato de que todas as funções da lógica multivalorada seriam semelhantes no ambíguo, mas da suposição de que para $n = 2$, como um caso especial, obteremos um sistema lógico ambíguo. Ao construir seu sistema, Emil Post introduz duas objeções, a primeira das quais ele chama de cíclica, e a segunda coincide com a negação na lógica clássica, um traço característico é que com $n = 2$ essas objeções coincidem entre si e com a negação da álgebra booleana.

Figura 2.8: Emil Leon Post.

Fonte: Wikipédia (2022a).

Em 1932, o conceito de lógica multivalorada foi generalizado por Reichenbach, que criou um sistema de lógica infinita em que uma afirmação pode assumir um número infinito de valores de verdade. Mais tarde, encontra-se formas de aplicação da lógica multivalorada na física quântica, que foram desenvolvidas por George Birkhoff e Reichenbach. A lógica multivalorada também é usada para resolver os paradoxos da lógica clássica.

Segundo Intuicionismo (2021), a lógica intuitiva é uma dos estudos da lógica matemática não clássica moderna baseada nos princípios da matemática intuitiva. O matemático holandês Luitzen Brouwer é considerado o fundador da matemática intuicionista, que em suas obras chama a atenção para a não universalidade da lei do terceiro excluído, da lei da dupla objeção e da lei da evidência indireta.

De acordo com Brouwer (1913), a matemática pura é uma criação livre da mente e não tem nada a ver com fatos experimentais. Na matemática intuitiva, a intuição é a única fonte da matemática, e o critério para a fidelidade dos conceitos e provas matemáticas é a “compreensão intuitiva”. Luitzen Brouwer expressa pela primeira vez a ideia de criar uma nova lógica, que foi desenvolvida por seu aluno Arend Heyting e criada em 1930, lógica intuitiva usando implicação, conjunção, disjunção, negação com base em 11 axiomas e duas regras de inferência – modus ponens e regras de substituição.

Uma diferença característica entre a lógica intuitiva e a lógica clássica é uma interpretação diferente das operações lógicas. De acordo com Intuicionismo (2021), por exemplo, dizer A ou B, para um intuicionista, equivale a dizer que ou A ou B pode ser provado. Em particular, a lei do terceiro excluído, A ou não A, é rejeitada, pois não se pode assumir que é sempre possível provar ou o enunciado A ou sua negação.

Segundo Zanfir (2020a), a desvantagem da lógica intuitiva é que os intuicionistas não reconhecem a prática humana como fonte da formação de conceitos matemáticos de métodos matemáticos de construção e métodos de prova, argumentando que a intuição é a única fonte da matemática, e "a intuição é o critério da verdade". É importante notar também que, como resultado do repensar da lógica intuitiva, está se formando uma direção moderna de lógica não clássica construtiva.

A visualização de seções da lógica clássica por meio de não clássicas, causa o aparecimento de seções completamente novas da lógica moderna, como lógica modal, relevante, dialética, construtiva, lógica de causalidade, mecânica quântica e similares. Elas são amplamente utilizadas na ciência moderna, porque podem resolver aqueles problemas que os cientistas não são capazes de resolver por meio da lógica clássica. A lógica modal é uma das direções da lógica não clássica moderna, que explora as conexões lógicas de declarações modais conduzindo sua avaliação modal através de conceitos como "necessário", "possível", "provado", "requerido", "permitido", e outros.

> "No pensamento do homem moderno há também"uma síntese do conhecimento sobre os mundos real, possível e impossível, a identificação das modalidades subjetivas e objetivas, a antecipação do fundamento, a imposição ao mundo de regularidades que estão apenas em nossa consciência". Para identificar e superar erros, lacunas, padrões e contradições "arcaicos", desacordos mútuos e mal-entendidos mútuos, o pensamento precisa ser refletido, ou seja, organizado e compreendido, fixado em regras e normas. Lógicos não clássicos que podem descrever consistentemente tudo o que está logicamente conectado podem ajudar a resolver esse problema" (KUSKOVA, 2018).

Existem outras interpretações posteriores da Lógica, que diferem no número de leis usadas nelas e nos métodos de sua justificação. Na maioria das vezes, abandonam as leis clássicas de associatividade e distributividade, que formalizam enunciados complexos construídos usando conectivos lógicos (BAZHANOV, 2013).

Para finalizar esta seção, mais dois grandes nomes da lógica contemporânea, são eles: Alan Turing $(1912 - 1954)$, que foi um dos fundadores da inteligência artificial, trabalhando com a teoria da computação, hoje indispensável para vida humana.

Figura 2.9: Alan Turing

Fonte: Reddit (s.d.).

Alfred Tarski ($1901 - 1983$), considerado um dos maiores lógicos de todos os tempos, na qual produziu axiomas para sistemas dedutivos, algebrização da lógica e na teoria da definibilidade.

Figura 2.10: Tarski

Fonte: Wazniak (2022).

Capítulo 3

APRENDIZAGEM E DESENVOLVIMENTO DE RACIOCÍNIO LÓGICO MATEMÁTICO

Para este diálogo sobre a aprendizagem e o desenvolvimento do raciocínio lógico matemático, apresenta-se alguns autores para explicar como as crianças aprendem e se desenvolvem cognitivamente.

Em Kamii e Joseph (1988) oferece uma síntese de aspectos significativos do trabalho de Montoya (2009) sobre o desenvolvimento cognitivo das crianças desde o nascimento. É importante compreender não apenas como as crianças se desenvolvem, mas também como elas vêm se desenvolvendo ao longo de suas vidas.

De acordo com Kamii e Joseph (1988), Piaget estabeleceu uma distinção entre três tipos de conhecimento: físico, lógico matemático e social. O conhecimento físico é tudo o que as crianças reconhecem pela observação, incluindo as características dos objetos e da realidade externa: se um objeto é redondo ou fino; se ele cai no ar quando derrubado; e se faz barulho quando cai. O conhecimento social envolve convenções construídas pelas pessoas, incluindo a maneira de como se deve agir na sociedade, palavras que não devem ser usadas, datas de festas e feriados e todas as regras da sociedade que as crianças devem aprender por meio da mediação dos adultos. No entanto, todos esses tipos de conhecimento exigem que as crianças adotem estruturas mentais que permitam o reconhecimento das diferenças entre uma coisa e outra e o estabelecimento de relações e conexões. O processo de coordenação de relacionamentos de objetos é um processo interno chamado conhecimento lógico matemático.

> ...quando nos são apresentados uma placa vermelha e uma azul, e notamos a diferença, essa diferença é um exemplo de raciocínio lógico matemático. As placas são realmente passíveis de observação, mas a diferença entre elas não é. A diferença é uma relação criada mentalmente pelo indivíduo que relaciona os dois objetos. A diferença não está em uma placa nem na outra. Se a pessoa não colocasse os objetos dentro dessa relação, para ela não haveria diferença [...] A

> relação em que uma pessoa coloca os objetos é uma decisão pessoal.Kamii e Joseph (1988, p. 14)

Essa discussão sugere que a educação deve oferecer situações que permitam às crianças construir tais estruturas mentais. Tal conhecimento não pode ser transmitido por adultos, mas deve ser construído internamente a partir de uma interação externa.

> O conhecimento lógico matemático, incluindo número e aritmética, é construído ou "criado" por cada criança de dentro para fora, na interação com o ambiente, ou seja, o conhecimento lógico matemático não é adquirido diretamente do ambiente por internalização, é necessário interagir para que a criança possa construir internamente esse conceito (PIAGET; INHELDER, 1975 apud OLIVEIRA; ROCHA, 2015).

Conforme visto anteriormente, existem alguns tipos de lógicas, dentre as várias opções de informática educacional, a programação de computadores é vista como uma ferramenta diferenciada, que possibilita a interação total da criança com uma máquina que cria "micromundos" que incorporam muitos conhecimentos matemáticos. Segundo Urrea e Papert (2007), o conhecimento matemático é atribuir sentido ao que queremos aprender; dado esse princípio, podemos aprender qualquer coisa.

Dar significado às coisas é se relacionar com elas e criar conexões entre novos elementos usando elementos já construídos em nossas mentes. É uma forma de ampliar novos repertórios de esquemas que tornam nossa capacidade de raciocínio lógico matemático cada vez mais complexa.

3.1 Metodologias Ativas

Com o avanço da tecnologia a forma de trabalhar, estudar e se comunicar mudou consideravelmente, o processo de ensino-aprendizagem passou por reformulação, na qual o professor começou a instigar mais o desenvolvimento das habilidades dos alunos e deixou de ser um mero transmissor de informações, já que informação pode ser encontrada facilmente nessa era digital.

De acordo com TOTVS (2022) as metodologias ativas de aprendizagem são uma técnica pedagógica que se baseia em atividades instrucionais, capazes de engajar os estudantes em, de fato, se tornarem protagonistas no processo de construção do próprio conhecimento.

A seguir algumas metodologias ativas e um breve resumo segundo (TOTVS, 2022).

1. **Gamificação** - Trata-se, essencialmente, de trazer elementos comuns a videogames (como desafios, regras, narrativas e storytelling em geral) para o ensino.

2. **Design thinking** - É o pensamento voltado para o design, e o objetivo é inovar para criar uma solução criativa e eficiente para um problema.

3. **Cultura maker** - Na prática, é apresentação de problemas e recursos para resolvê-los. Os alunos devem criar por si só, as soluções

4. **Aprendizado por problemas** - Permite que os alunos exerçam o aprendizado a partir de desafios.

5. **Estudo de casos** - Os estudantes são expostos a problemas reais, de modo que possam analisá-los por inteiro (como uma situação real) e, entre si, discutir as possibilidades de solucioná-los.

6. **Aprendizado por projetos** - Trata-se de um mecanismo que propõe aos alunos identificarem uma situação que não necessariamente é um problema, mas pode ser melhorada, criando uma solução que segue uma linha de raciocínio, possibilitando o trabalho em equipe.

7. **sala de aula invertida** - O conteúdo é acessado previamente e o tempo da aula é usado para discussões.

8. **Seminários e discussões** - O professor propondo um tema para discussão geral, de modo que os alunos devem se posicionar em relação a ele.

9. **Pesquisas de campo** - É uma pesquisa de campo: fora da sala, sobre qualquer tipo de tema.

10. **Ensino híbrido** - É uma modalidade de aprendizagem que mistura o modelo presencial e a distância.

A aprendizagem é fortalecida quando a participação do aluno é ativa, na qual ele se torna sujeito do seu desenvolvimento, o percentual de aprendizagem é uma consequência direta da ação que é feita, por exemplo, tem-se a pirâmide da aprendizagem de William Glasser.

Figura 3.1: Pirâmide da aprendizagem

Fonte: ABRAFI (2021).

3.1.1 Aprendizagem Baseada em Problemas - Abprob

A metodologia utilizada neste trabalho é a de resolução de problemas, na qual o aluno é protagonista no processo ensino-aprendizagem. Com o método da aprendizagem baseada em problemas o aluno é capaz de construir seu próprio conhecimento por meio de problemas e desafios propostos.

Segundo Barbosa e Moura (2013), esse método de ensino fundamenta-se no uso contextualizado de uma situação problema para o aprendizado autodirigido. Já nos métodos convencionais o objetivo é a transmissão do conhecimento centrada no professor, em conteúdos disciplinares, na ABProb, o aprendizado passa a ser centrado no aluno.

Quadro 3.1: Requisitos para professor e aluno no ensino convencional e na ABProb.

	Ensino convencional	**Abordagem da ABProb**
Professor	Função de especialista ou autoridade formal	Orientador, coaprendiz ou consultor
	Trabalho isolado	Trabalho em equipe
	Transmissor de informação aos alunos	Ensina ao aluno gerenciar sua aprendizagem
	Conteúdo organizado em aula expositiva	Curso organizado em problemas reais
	Trabalho individual por disciplina	Estímulo ao trabalho interdisciplinar
Aluno	Receptores passivos da informação	Valorização do conhecimento prévio
	Trabalho individual isolado	Interação com colegas e professores
	Transcrevem, memorizam e repetem	Função de buscar/construir o conhecimento
	Aprendizagem individualista e competitiva	Aprendizagem em ambiente colaborativo
	Busca resposta certa para sair bem na prova	Busca questionar e equacionar problemas
	Avaliação dentro de conteúdos limitados	Análise e solução ampla de problemas
	Avaliação somativa e só o professor avalia	Aluno e o grupo avaliam contribuições
	Aula baseada em transmissão da informação	Trabalho em grupo para buscar soluções; conhecimento é aplicado em vários contextos; busca da informação com orientação docente

Fonte: Ribeiro (2005) apud Barbosa e Moura (2013).

Agora apresenta-se uma breve descrição de uma importante competição matemática que trabalha e desperta o pensamento lógico matemáticos dos alunos.

3.2 Olimpíada Brasileira de Raciocínio Lógico - OBRL

O projeto de Raciocínio Lógico se inicia por volta do ano 2000 com um embrionário na cidade do Recife, para alunos do Ensino Fundamental I e II com material desenvolvido a partir das experiências em sala de aula, observação da realidade dos alunos do ensino básico e a grande dificuldade na passagem da Educação Fundamental I para Fundamental II. Este projeto tem como culminância a OBRL (Olimpíada Brasileira de Raciocínio Lógico), pensada para alunos do Fundamental I(4° e 5º anos), Fundamental II (6°, 7°, 8° e 9° anos) e Ensino Médio(1ª, 2ª e 3ª séries).

> A Olimpíada Brasileira de Raciocínio Lógico (OBRL) é uma forma de aproximarmos as escolas do desafiante mundo dos jogos e desafios lógicos, os quais, através de várias ferramentas pedagógicas e de uma metodologia direcionada, visam estimular a memória, a criatividade, a destreza e o pensamento lógico-analítico dos alunos, assim como desenvolver sua capacidade de concentração na solução de problemas, seja individualmente, seja em pequenos grupos. A Olimpíada está aberta a todas as escolas da rede pública e da rede particular, sendo de caráter estritamente pedagógico e cultural (OBRL, 2022).

Como forma de organização, ao passo que estimular o gosto pelo Raciocínio Lógico para estudantes do Ensino Fundamental II, de 6º ao 9º anos, como também para concursos públicos, o professor Artur Ataíde deu origem a um projeto composto por quatro livros. Tal coleção, tem como principal norte a Olimpíada Brasileira de Raciocínio Lógico - OBRL, que é realizada anualmente em duas fases, sendo que a primeira delas ocorre na própria escola e a segunda a nível nacional (ATAÍDE, s.d.).

A criação desta coleção de Raciocínio Lógico, exposta na Figura 3.2, surgiu da inexistência no mercado editorial brasileiro de material aplicado à realidade e vivência dos alunos do Ensino básico e concurseiros. Vale destacar que, nesses âmbitos, cada vez mais é necessário pensar, questionar e saber propor soluções para problemas cotidianos.

Figura 3.2: A coleção de Raciocínio Lógico é formada por cinco livros

Fonte: OBRL (2022).

Os dados que serão mencionados foram extraídos dos arquivos da (OBRL, 2022) e (ATAÍDE, s.d.). O professor Autor Artur Ataíde desde cedo, dedicou-se a estudar as ciências exatas e a desenvolver trabalhos relacionados a esta área. Iniciou sua carreira criando e confeccionado experimentos didáticos no Laboratório de Física da UFRPE para o Projeto Graciliano Ramos, que visava capacitar os professores do Interior de Pernambuco. Seu contato direto com o Raciocínio Lógico se oportunizou com projeto do Grupo Avançado de Matemática que tinha por objetivo preparar alunos para Olimpíada Brasileira de Matemática nos anos de 2004 e 2005.

Em 2007 teve a oportunidade de ensinar a disciplina de Raciocínio Lógico em escolas do Recife – PE, para alunos do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental II. No início do ano de 2007 as aulas eram elaboradas em fichas, porém ao final do ano, surgiu o convite para transformar as fichas de aulas em livros. Assim a partir do ano de 2008 foi elaborada a Coleção de Raciocínio Lógico em sua 1ª edição, pela Editora Artus.

Nos anos de 2008 e 2009 foi criado o Primeiro e Segundo Campeonatos de Passatempo, respectivamente, em duas das escolas do Recife – PE. Em 2010 foi criada a Primeira Olimpíada Pernambucana de Raciocínio Lógico (OPRL) com adesão significativa de escolas da rede pública e particular, da Região Metropolitana, Agreste, Mata, Sertão e S. Francisco, e que durou até o ano de 2013, pois neste ano, a (OPRL) contou com a participação de escolas do Estado da Bahia e da Paraíba.

E foi no ano de 2014 que a Comissão de Organização da Olimpíada criou a Olimpíada Brasileira de Raciocínio Lógico (OBRL) em sua primeira edição, com a participação de mais estados. Até 2018 podiam participar da Olimpíada Brasileira de Raciocínio Lógico os alunos do 6º ano ao 9º ano do Ensino Fundamental, sendo dividida em 04 (quatro) níveis e 02 (duas) fases:

- **Nível Alfa** – para alunos do 6º ano do Ensino Fundamental e/ou que utilizam livro alfa.
- **Nível Beta** – para alunos do 7º ano do Ensino Fundamental e/ou que utilizam livro beta.
- **Nível Gama** – para alunos do 8º ano do Ensino Fundamental e/ou que utilizam livro gama.
- **Nível Ômega** – para alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e/ou que utilizam livro ômega.

Foi no ano de 2018, que teve um salto no número de escolas participantes com uma distribuição maior de escolas pelo Brasil. Desde Santa Catarina, Paraná, São Paulo, Rio de Janeiro, Minas Gerais, Bahia, Sergipe, Alagoas, Pernambuco, Rio Grande do Norte e Ceará. No nível I, foram 2496 alunos participantes da primeira fase da Olimpíada, sendo 574 inscritos para fase II, sendo premiados 150 alunos. No nível II, foram 2371 alunos na primeira fase, sendo 531 inscritos para fase II, e tendo sido premiados 154 alunos. No nível III, foram 2263 alunos na primeira fase, sendo 540 inscritos para fase II, e tendo sido premiados 154 alunos. No nível IV, foram 2152 alunos na primeira fase, sendo 513 inscritos para fase II, e tendo sido premiados 156 alunos. Assim, foram premiados 614 alunos para um universo de 9282 alunos participantes deste certame, tendo participado da segunda fase 2.158 alunos na disputa por medalhas. Dados do site da OBRL (OBRL, 2022).

Os primeiros lugares gerais de cada nível foram de diferentes escolas e localidades: No nível I, o primeiro lugar geral foi de uma aluna do Colégio Pedro II (unidade Centro) do estado do Rio de Janeiro – RJ com nota 31,5. No nível II, o primeiro lugar geral foi de uma aluna do Colégio Diocesano da cidade de Caruaru do estado de Pernambuco com nota 32,0. No nível III, o primeiro lugar geral foi de um aluno do Colégio Master Bezerra de Fortaleza do estado do Ceará com nota 36,0 (aproveitamento de 100%) desempate com três outros alunos no primeiro critério: tempo de prova. No nível IV, o primeiro lugar geral foi de um aluno do **Colégio Paraíso da cidade de Juazeiro do Norte do estado do Ceará** com nota 36,0 (aproveitamento de 100%) desempate com dezesseis outros alunos no primeiro critério: tempo de prova.

A Comissão da Olimpíada Brasileira de Raciocínio Lógico (OBRL) na sua quinta edição resolveu realizar dois ajustes após publicação do Edital: primeiro, ampliou o número de medalhistas a fim de atender a porcentagem alvo de 1% dos alunos participantes da Olimpíada do respectivo nível agraciados com medalha de ouro, 2% de alunos agraciados com medalha de prata e 3% dos alunos agraciados com medalha de bronze, perfazendo um total de 614 medalhas confeccionadas para o evento de premiação; segundo ponto, atualização da logomarca da Olimpíada com repaginação do sítio oficial e das medalhas de premiação.

Quanto à logomarca, foi contratada agência de comunicação (OSLO Comunicação), onde o premiado artista amazonense André Sena, especificamente para desenvolver nova identidade visual, remetendo às faces de um cubo mágico, arcos entrelaçados que também induzem a ideia das olimpíadas e recortes de questões de lógica.

Figura 3.3: Logomarca

OBRL

Fonte: OBRL (2022).

A medalha foi pensada a partir da face homenageada da primeira matemática mulher, que se tem registro na história: Hypatia de Alexandria, que filha do matemático Theon, esteve a frente do seu tempo na discussão de diversos temas (BOYER; MERZBACH, 2019). Em uma das faces da medalha, contemplamos fragmento da sequência de Fibbonacci, a fim de lembrar uma sequência histórica que remete ao número de ouro.

Figura 3.4: Frente e Verso da Medalha da V OBRL 2018.

Fonte: OBRL (s.d.a).

A comissão da Olimpíada Brasileira de Raciocínio Lógico está sobre atual presidência do Professor Autor Artur Ataíde, vivenciando sua VIII Edição no ano de 2022 para alunos do Ensino Fundamental I e II e Ensino Médio da rede pública e particular, cada escola pode inscrever suas equipes, sendo um professor responsável por cada equipe.

E para este ano, fará uma homenagem ao matemático Newton da Costa, no dia 27 de julho de 2022, a comissão da OBRL teve a oportunidade de homenagear pessoalmente o professor Newton da Costa, que empresta sua face para um dos lados da medalha da OBRL. Da Costa é reconhecido principalmente pela formulação da lógica paraconsistente, um tipo de lógica distinta da lógica clássica. A lógica paraconsistente põe em xeque o princípio da não contradição, segundo o qual duas afirmações contraditórias não podem ser verdadeiras ao mesmo tempo (WIKIPEDIA, 2022).

Figura 3.5: Newton da Costa

Fonte: OBRL (s.d.b).

A OBRL estabelece um marco nas Olimpíadas de Conhecimento que não contam com aporte de recursos financeiros do Estado Federal, nem suporte exclusivo de instituição superior de Ensino, sendo projeto de vanguarda idealizado por professores de matemática e física dos ensinos fundamental e médio que acreditam na transformação de um país pelo conhecimento em uma área transversal a diversos saberes: raciocínio lógico, suas competências e habilidades desenvolvidas (OBRL, 2022).

3.3 Como se Preparar para Olimpíadas de Matemática

Nesta seção fala-se sucintamente de como se preparar para uma olimpíada de matemática, para aqueles que estão iniciando no mundo das olimpíadas, saibam que os primeiros passos são os mais importantes. Foram utilizadas as referências Devigili e Brandl (2019), Ataíde (s.d.), Diego (2019), Fernández e Oliveira (2010), Moreira (2007), Mega e Watanabe (1988), Morgado (2008), Polya (1978), Tao (2013), Mega (2009), Shine (2009) e Barros (2003), que podem servir de base para o leitor.

3.3.1 Primeiros Passos

Os passos descritos a seguir é uma sequência sugerida por (DIEGO, 2019), não necessariamente nesta ordem, na qual ajudará o aluno a ter um bom desempenho em competições olímpicas e na sua trajetória estudantil.

3.3.1.1 Utilize Bem o Tempo

Quantidade não é qualidade! Esta frase cai bem neste contexto. Muitas pessoas acham que para serem aprovadas em determinada avaliação precisam estudar horas e horas por dia, mas o que adianta passar horas estudando se o conteúdo não é assimilado. Alguns alunos falam que passaram dias estudando e não conseguiram aprender determinada matéria. O fato é, deve-se ter foco na hora que está estudando. Uma dica: mas vale 1 hora de estudo intenso do que várias horas de estudos com distrações. Foque no hoje, para conquistar e realizar o sonho de amanhã.

O ideal é escolher um melhor horário de estudo, isto varia de pessoa para pessoa, tem gente que prefere estudar na madrugada por conta do silêncio, outros preferem estudar durante o dia, de qualquer forma é preciso reservar um horário para estudo.

3.3.1.2 Repetir e Repetir

Outro fato importante é a não desistência após o erro, pois **É Errando Que Se Aprende**. É comum a frustração após um erro, mas deve-se aprender com os erros, levantar a cabeça e seguir em frente. Estudar matemática é uma atividade ativa, precisa pensar, fazer rascunho, escrever e repetir este processo por várias e várias vezes. **Repetir, Repetir, ... Repetir**, até minimizar os erros.

Para se preparar para olimpíadas o aluno precisa ser um atleta. No futebol e em outros esportes, para chegar a um alto nível, o atleta precisa treinar muito, ou seja, repetir o processo várias vezes. Na matemática não é diferente, para ser um atleta dos números o discente precisa ter disciplina e perseverança. E, Repetir, Repetir e ... Repetir, afim de ficar cada vez mais distante do erro.

3.3.2 Motivação

É comum pensarem que matemática é só para gênios, que nunca vai conseguir ser um "fera"em matemática. Porém, engana-se quem pensa desta forma, pois a matemática pode ser estudada por todos, basta querer e ter foco. Alguns assuntos são complexos e difíceis de aprender, pois as vezes envolve um alto nível de abstração. Por outro lado, a persistência leva a vitória, "os esforçados vão longe".

Para ser bem sucedidos em determinada área, deve-se ser muito bom nela. Aí que entra a motivação, algo que gosta é comum praticar sem grande esforço, por isso a importância de escolher bem uma determinada área ou determinado assunto. A escolha do ambiente de estudo, música para relaxar e uns "boletos para pagar", são boas motivações para estudar. Música libera hormônios do prazer, então sempre que puder, ouça uma boa música.

Desafios são ótimos motivadores, pois gera uma sensação de competição e ao mesmo tempo de prazer quando consegui-se resolvê-los. Ele ativa o psicológico de uma forma que estimula a pensar horas e horas e com uma vontade imensa de encontrar a solução ou ganhar aquela competição. Portanto, se desafie, estabeleça metas a serem cumpridas.

3.3.3 Como Resolver Problemas

Um passo importante é uma boa interpretação do problema, caso seja apresentado em linguagem natural transformá-lo em linguagem matemática (simbólica). Para isto, deve-se ter bem definido onde se quer chegar ou o que se quer provar, isto é, uma boa noção de Lógica, assunto este que será estudado no próximo capítulo.

Segundo Fernández e Oliveira (2010), uma das coisas que distingue a matemática das demais ciências naturais é o fato de que um tema de matemática é discutido utilizando-se a lógica pura e, por conta disso, uma proposição em matemática, uma vez comprovada sua veracidade, é aceita como verdade irrefutável e permanecerá assim através dos séculos.

Por isso a importância das demonstrações na matemática, pois aquela afirmação comprovada será utilizadas quantas vezes forem necessário para provar ou refutar outra afirmação. A demonstração é essencial para entender profundamente a teoria que está sendo exposta, sendo assim, deve-se tentar provar ou pelo menos entender a justificativa para tal afirmação.

Um fato que ajuda na resolução de um problema matemático é a partição dele, ou seja, fazer alguns casos particulares ou tentar interpretar o problema de outra forma, retirando algumas hipóteses iniciais, para se familiarizar com o problema, até ganha confiança e conhecimento para fazer o caso geral.

Outra dica importante, esta em relação a prova como um todo, é começar resolvendo as questões mais fácies, fazendo uma breve leitura inicial da prova, isto lhes dará confiança para enfrentar os próximos problemas.

3.3.4 Qual Material Estudar

Um bom material faz toda a diferença, pois ele dará suporte teórico e técnico, então a escolha do material é essencial.

O conhecimento da Lógica é crucial para aqueles que almejam participar de competições olímpicas, a Lógica está presente em tudo, a matemática é uma ciência lógica, então nas olimpíadas de matemática é natural aparecer o termo Lógica. Esta é a motivação deste trabalho.

3.3.4.1 Lista de Olimpíadas e de Material para Estudo

As competições olímpicas de matemática vêm ganhando cada vez mais espaço, um bom material para preparação é crucial. Hoje temos muitas fontes, boas e ruins, basta saber filtrar bem o conteúdo.

Geralmente as olimpíadas cobram estas áreas:

1. Teoria dos Números;
2. Combinatória;
3. Álgebra;
4. Geometria.

A seguir uma pequena lista de onde encontrar material para início de estudo e de olimpíadas.

1. Portal da Matemática - (para quem está iniciando é um bom lugar);
2. Site da Obmep - (lá encontram-se todas as provas das edições anteriores com gabarito);
3. Site da OBRL - (lá encontra-se material de Lógica em geral);
4. Poti: polo olímpico de treinamento intensivo - (para quem já tem uma boa base);
5. PIC: programa de iniciação cientifica - (ótimo para quem deseja adentrar no mundo da pesquisa matemática, lá encontra-se um equipe de professores para auxiliar nos primeiros passos da pesquisa. Podem participar deste programa alunos medalhistas na Obmep).
6. Clubes matemáticos - (lá encontram-se desafios diários e uma mini competição entre seus participantes);
7. Obmepeiros - (questões comentadas e suporte para os atletas olímpicos);
8. NOIC: Núcleo Olímpico de Incentivo ao Conhecimento - (pode-se encontrar guias de estudo, cursos teóricos, simulados, entre outros. A fim de auxiliar os estudantes na organização de seus calendários e mantê-los atualizados sobre as competições de nível nacional e internacional)

9. Youtube - (bastante vídeos com soluções comentadas).

Quadro 3.2: Algumas Competições Nacional de Matemática.

Competição	**Sigla**	**Onde Encontrar Material**
Olimpíada Brasileira de Raciocínio Lógico	OBRL	Site da OBRL, Site NOIC, Youtube, ...
Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas e Privadas	OBMEP	Site da OBMEP, Portal da Matemática, Clubes Matemáticos, Obmepeiros, Site NOIC, Youtube, ...
Olimpíada Brasileira de Matemática	OBM	Site da OBM, Poti, Portal da Matemática, PIC, Site NOIC, Youtube, ...
Canguru de Matemática	-	Site Canguru de Matemática, Youtube, ...
Copa Multilaser de Matemática	-	Site Multilaser de Matemática, NOIC, Youtube, ...
Olimpíada Internacional Matemática Sem Fronteiras	OIMSF	Site da OIMSF, Clubes Matemáticos, Youtube, ...
Torneio Meninas na Matemática	TM^2	Site TM^2, Poti, Youtube, ...
Olimpíada de Matemática dos Institutos Federais	OMIF	Site da OMIF, Youtube, ...
Olimpíada Portuguesa de Matemática	OPM	Site da OPM, Youtube, ...
Olimpíada Brasileira de Informática	OBI	Site da OBI, Site NOIC, Youtube, ...

Fonte: Autor.

3.4 Estrutura Básica da Matemática

Antes de iniciar o estudo sobre noções de Lógica será apresentado algumas ferramentas importantes na matemática e uma breve explicação sobre.

3.4.1 Parte I

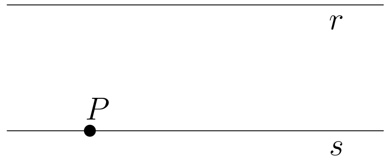
Segundo Aristóteles, a Matemática é uma ciência dedutiva que baseia-se em três conceitos primitivos: os axiomas, as hipóteses e as definições (IMPA, 2022).

Axioma ou postulado é uma sentença que não precisa ser provada, uma verdade inquestionável, é a parte inicial (ideia) para a construção de uma teoria, ou seja, o ponto de partida para um conjunto de regras e argumentos.

Existem alguns axiomas famosos na matemática, um deles é o postulado de Euclides que diz:

"Através de um ponto fora de uma reta passa uma, e somente uma, reta a qual é paralela à reta dada"(ÁVILA, 2001).

Figura 3.6: Retas Paralelas



Fonte: O autor.

Hipótese é um enunciado com status de formulação provisória, com intenções de ser posteriormente demonstrado ou refutado. É comum um resultado matemático ter mais de uma hipótese. É importante saber que ao modificar uma hipótese, pode gerar outro resultado.

Por exemplo, no famoso teorema de Pitágoras:

"Num triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos"

Perceba que a hipótese dada é que o triângulo precisa ser retângulo, porém se a hipótese for mudada não se pode garantir o resultado.

Definição é um texto que explica o significado de um termo (uma palavra, uma ideia abstrata ou um conjunto de símbolos). Assim, uma definição não pode ser classificada como verdadeira ou falsa.

De acordo com Dormolen e Zaslavsky (2003), temos alguns critérios para uma definição ser considerada adequada, são eles:

1. O **critério de hierarquia**, no qual um conceito novo pode descrever um caso especial de um conceito mais geral. Por exemplo, a definição de quadrado isola um tipo especial de quadrilátero.

2. O **critério de existência** ou boa definição, no qual deve-se garantir a existência de pelo menos um exemplo do conceito que está sendo definido. Por exemplo, a Definição 4.2.1 que diz:

   "Chama-se de proposição ou sentença qualquer afirmação referente a um conjunto de palavras ou símbolos que pode ser julgada como verdadeira ou falsa de maneira exclusiva, exprimem um pensamento de sentido completo."

Observação 3.4.1. *Tem-se também as chamadas* **propriedades***, elas representam um atributo de determinado objeto x, de estudo. Dizemos que x goza de uma propriedade. Não é adequado dizer que x satisfaz a uma propriedade.*

Por exemplo, as propriedades comutativa e distributiva da multiplicação.

$A + B = B + A$ (**comutativa)**
e
$A(B + C) = AB + AC$ (**distributiva)**

3.4.2 Parte II

Teorema é uma afirmação que foi provada a partir de outros resultados já conhecidos (por exemplo, os axiomas ou outros teoremas). A prova ou demonstração é a justificativa que aquele resultado é verdadeiro.

Observação 3.4.2. *Uma afirmação que não foi demonstrada é chamada de conjectura.*

Veja um exemplo de cada.

Exemplo 3.4.1. *Teorema dos números primos que diz:*

"Existem infinitos números primos"

Exemplo 3.4.2. *A* **conjectura de Goldbach***, proposta pelo matemático prussiano Christian Goldbach, é um dos problemas mais antigos não resolvidos da matemática. Ela diz que:*

"Todo número par maior do 2 pode ser representado pela soma de dois números primos"

Por exemplo,
$4 = 2 + 2; 6 = 3 + 3; 8 = 3 + 5; 10 = 5 + 5$, ...

Os teoremas são bastante usados na matemática, podendo serem chamados por outros nomes, a depender do "peso"da afirmação. Segundo (FILHO, 2009), os teoremas podem ser chamados de:

1. **Proposição:** geralmente usa-se essa palavra para denotar um teorema que não é principal e tem importância limitada no contexto;

2. **Lema:** é um teorema auxiliar ou introdutório, utilizado na demonstração de outro teorema que lhe sucede;

3. **Corolário:** é um teorema deduzido de outro que acabou de ser provado.

A seguinte ordem:

lema $\Rightarrow$ teorema $\Rightarrow$ corolário.

Bem, agora será apresentado os conceitos inicias de Lógica.

"A viagem de mil quilômetros começa com um passo".
- Lao Tzu

Capítulo 4

NOÇÕES DE LÓGICA

Neste capítulo apresenta-se os conceitos básicos da Lógica Formal, para melhor leitura e entendimento usaremos apenas o termo "Lógica", que será equivalente aos termos Raciocínio Lógico ou Lógica Matemática. A Lógica aqui trabalhada será a Lógica de Predicados ou chamada de Lógica Proposicional.

Ela se faz presente em várias áreas do conhecimento, desde uma simples conversa entre amigos a uma tomada de decisão após determinada pesquisa realizada. Na Matemática e em outras ciências, a estrutura básica das teorias e aplicações, está diretamente ligada a uma sequência lógica de argumentos, na qual tal argumentação deve ser válida para sustentar alguma afirmação. Cada vez mais a Lógica está sendo inserida em exames de concursos, olimpíadas em geral e no dia a dia. Será apresentado alguns conceitos importantes, como lógica intuitiva, proposição, negação, conectivos lógicos, implicação, equivalência, sentenças abertas, quantificadores e apresentar exercícios resolvidos.

4.1 Lógica

É comum ouvir as pessoas falarem que usaram o Raciocínio Lógico para resolver ou solucionar determinada situação. Diante disso pretende-se discutir sobre lógica intuitiva e lógica formal. O ponto de partida é discutir a seguinte pergunta: o que é Lógica?

A Lógica é um sistema formal que estabelece um processo de argumentação válida. Existem vários tipos de sistemas lógicos, porém discutiremos a Lógica Clássica ou Lógica Proposicional. Historicamente, atribui-se ao filósofo grego Aristóteles (384 a.C – 322 a.C) os primeiros tratados sobre Lógica. A matemática possui uma linguagem precisa e sem dupla interpretação, nela a Lógica desempenha um papel fundamental, pois é a partir da Lógica que podemos verificar a validade ou não de um argumento, a veracidade, ou a falsidade de um raciocínio.

É comum confundi Lógica Formal com Lógica Informal. Segundo Groarke (1996), o primeiro uso do termo “Lógica Informal” ocorre no último capítulo do livro de Gilbert

Ryle, Dilemmas (1954) Ryle (2015). Afinal, o que é Lógica Informal? Em Blair e Johnson (1987) define Lógica Informal como "um ramo da lógica cuja tarefa é desenvolver padrões não-formais, critérios, procedimentos para análise, interpretação, avaliação, crítica e construção da argumentação no discurso cotidiano". Ou seja, pode-se dizer que Lógica Informal seja a do senso comum/crítico. Por exemplo, se alguém falou que tem 40 pessoas com guarda-chuva na rua, então o senso crítico dirá que está chovendo ou vai chover.

O fato é: está chovendo ou não está chovendo?

Dependendo da localidade, pode-se chegar a conclusões diferentes, pode ser chuva ou pode ser sol. Não se pode afirmar, não temos certeza, mas o senso crítico diz que está chovendo.

A Lógica Formal será estudada logo mais a seguir, mas diga-se que seja o entendimento de expressões e validades de argumentos ou sistemas formais que contêm um conjunto de regras e símbolos e o raciocínio dentro desses sistemas fornecerá resultados válidos desde que se sigam as regras definidas (QUA; REASONING, 1991). Por exemplo: Se uma pessoa nasceu na cidade de Juazeiro do Norte, então podemos afirmar que tal pessoa nasceu no Ceará. Por outro lado, a volta nem sempre é verdadeira. Dizer que uma pessoa nasceu no Ceará não implica necessariamente que ela tenha nascido em Juazeiro do Norte. Tal exemplo é conhecido como implicação se ... então ..., que leva o nome de condicional, assunto que será estudado na Subseção 4.4.5.

4.1.1 Lógica de Forma Intuitiva

Nesta subseção apresenta-se alguns problemas (enigmas) que pode ser resolvidos utilizando apenas noções intuitivas de raciocínio lógico, ou seja, não se faz necessário o formalismo lógico. Tais questões são de extrema importância para que o professor possa incentivar seus alunos ao estudo da lógica matemática. Alguns dos problemas foram tirados do site portal da Obmep (IMPA, 2022), do livro A Beginner's Guideto Mathematical Logic (Um guia para iniciantes em lógica matemática) (SMULLYAN, 2014) e de (Enigmas, Desafios, Paradoxos e outros divertimentos lógicos e matemáticos) (BARROS, 2003).

Exemplo 4.1.1. (Portal da Obmep) *João mente nas terças, quintas e sábados e no resto dos dias fala a verdade. Um dia, Pedro encontra João:*

Pedro: Que dia é hoje?

João: Sábado.

Pedro: Que dia será amanhã?

João: Quarta-feira.

Que dia da semana Pedro encontrou João?

Solução: Observe que João mentiu, pois o dia depois de sábado nunca será quarta. Isso significa que os amigos se encontram na terça-feira, na quinta-feira ou no sábado. Caso eles tivessem se encontradona terça-feira, João estaria falando a verdade na segunda resposta. Caso eles tivessem se encontrado no sábado, João estaria falando a verdade na primeira resposta. Portanto, eles se encontraram na quinta-feira.

Exemplo 4.1.2. (OBM) *Pedro e Maria formam um estranho casal. Pedro mente às quartas, quintas e sextas-feiras, dizendo a verdade no resto da semana. Maria mente aos domingos, segundas e terças-feiras, dizendo a verdade no resto da semana. Certo dia, ambos dizem: "Amanhã é dia de mentir". Que dia foi este?*

Solução: Os únicos dias em que Pedro pode falar essa frase são terça ou sexta. Para Maria, os únicos dias em que é possível falar tal frase são sábado ou terça. Portanto, o dia mencionado na questão foi uma terça-feira.

Exemplo 4.1.3. (Portal da Obmep) *Três amigas encontram-se em uma festa. O vestido de uma delas é azul, o de outra é preto, e o da terceira é branco. Elas calçam pares de sapatos destas mesmas três cores, mas somente Ana está com vestido e sapatos de mesma cor. Por outro lado, nem o vestido nem os sapatos de Júlia são brancos, ao passo que Marisa está com sapatos azuis. Descreva a cor do vestido de cada uma das moças.*

Solução: Como os sapatos de Marisa eram azuis e nem o vestido nem os sapatos de Júlia eram brancos, conclui-se que os sapatos de Júlia eram pretos e, portanto, os sapatos de Ana eram brancos. O vestido de Ana era branco, pois ela era a única que usava vestido e sapatos da mesma cor; consequentemente, o vestido de Júlia era azul e o de Marisa era preto.

Exemplo 4.1.4. (Adaptado da Olimpíada de Matemática de Goiás) *Na ilha de Anchúria, há três tipos de pessoas: Os heróis que sempre falam a verdade, os ladrões que sempre mentem e as pessoas comuns que às vezes mentem e às vezes falam a verdade. Certa vez, um viajante chegou à ilha e encontrou-se com três moradores: Arnaldo (A),Bernaldo (B) e Cernaldo (C), tendo escutado deles as seguintes frases:*

A: Eu sou uma pessoa comum.

B: Arnaldo diz a verdade.

C: Eu não sou uma pessoa comum.

Sabendo que dentre essas pessoas há uma de cada tipo, quem é o herói e quem é o ladrão?

Solução: Se Arnaldo estiver falando a verdade, então Bernaldo também está e nenhum deles pode ser o ladrão. Neste caso, o ladrão seria Cernaldo que, dizendo não ser uma pessoa comum, estaria também falando a verdade, o que é uma contradição. Consequentemente, Arnaldo deve estar mentindo. Assim, Bernaldo também está mentindo e Cernaldo tem que ser o herói, o que é compatível com sua afirmação. Neste caso, como Arnaldo está mentindo, ele não é uma pessoa comum e nem herói. Logo, deve ser ladrão. Em resumo, Cernaldo é o herói, Arnaldo é o ladrão e Bernaldo é uma pessoa comum.

Exemplo 4.1.5. (Adaptado da Olimpíada de Matemática de Goiás) *Considere as mesmas hipóteses do exemplo Anterior, porém, com o seguinte diálogo:*

A: Cernaldo é um ladrão.

B: Arnaldo é um herói.

C: Eu sou uma pessoa comum.
Sabendo que há uma pessoa de cada tipo, quem é o herói e quem é o ladrão?

Solução: Veja que Cernaldo não pode ser o herói, pois um herói nunca falaria que é uma pessoa comum. Temos,então, de analisar dois casos:

- Se Cernaldo for uma pessoa comum, então Arnaldo estará mentindo e será o ladrão. Porém Bernaldo também estará mentindo, e isto impede que ele seja um herói. Contradição!

- Se Cernaldo for um ladrão: já sabemos que este é o caso verdadeiro, pois já concluímos que o caso anterior gera uma contradição. Agora, supondo que Arnaldo seja uma pessoa comum, por exclusão Bernaldo deve ser o herói e Bernaldo estará mentindo. Mas isso é uma nova contradição!

Portanto, concluímos que Arnaldo é o herói, Bernaldo é a pessoa comum e Cernaldo é o ladrão.

Exemplo 4.1.6. (Adaptado da Olimpíada de Matemática de Goiás) *Desta vez, o viajante encontrou-se com quatro pessoas, que por simplicidade denotaremos P, Q, R, S, e nenhuma delas é uma pessoa comum. As frases por elas proferidas foram as seguintes: P, R e Q são ambos heróis ou ambos ladrões.*
Q: S é um ladrão.
R: P é um ladrão.
S: R é um herói e Q é um ladrão.
Quem são heróis e quem são os ladrões?

Solução: Vamos começar supondo que S falou a verdade. Sob esta hipótese, R fala a verdade, portanto P é ladrão. Como consequência, R e Q são de tipos diferentes. Por outro lado, de acordo com S, Q é um ladrão. Logo, R é um herói. Como estas classificações concordam com as afirmações feitas por cada um, são conclusões verdadeiras.

Exemplo 4.1.7. (Olimpíada de Matemática de Goiás, 2018) *Cinco amigos, Arnaldo, Bernaldo, Cernaldo, Dernaldo e Ronaldo estão usando bonés que têm a parte de cima branca ou preta, mas tais que a parte de baixo é igual em todos eles. Dessa forma, cada um pode ver a cor dos bonés dos outros, mas não pode ver a cor de seu próprio boné. Diante disso, eles fazem os comentários a seguir:*
Arnaldo: Eu vejo trêsbonés pretos e um branco.
Bernaldo: Eu vejo quatro bonés brancos.
Cernaldo: Eu vejo um boné preto e três brancos.
Dernaldo: Eu vejo quatro bonés pretos.
Sabendo-se que quem estava usando boné preto falou a verdade e quem estava usando boné branco mentiu, qual é a cor do boné de cada um dos amigos?

Solução: inicialmente, note que cada pessoa enxerga os bonés dos amigos mas não enxerga o próprio boné, logo, ele enxerga 4 dos 5 bonés.

Suponha que Arnaldo esteja falando a verdade, isto é, que ele esteja de boné preto. Desta forma, temos um conjunto com 4 bonés pretos (4 verdades) e 1 boné branco (1 mentira). Mas isto é uma contradição, pois Bernaldo e Cernaldo deveriam ter mentido, já que disseram que existe mais que 1 boné branco. Portanto, Arnaldo está mentindo, logo está de boné branco.

Agora, suponha que Bernaldo esteja dizendo a verdade, de forma que ele está de boné preto e todos os outros de bonés brancos. Isto significa que cada colega vê 1 boné preto e 3 bonés brancos, logo, Cernaldo deveria estar dizendo a verdade, o que resulta em uma nova contradição. Portanto, Bernaldo também está mentindo, e está de boné branco.

Por sua vez, se Cernaldo está dizendo a verdade, então ele está de boné preto e, pela fala de Dernaldo, este deve estar de boné branco. Resta, pois, o boné preto para Ronaldo. Se, por outro lado, Cernaldo está mentindo, então ele está de boné branco, daí Dernaldo também está mentindo e deve estar de boné branco. Para decidir a cor do boné de Ronaldo, devemos analisar as falas dos colegas. Se Ronaldo está de boné branco, então teríamos 5 bonés brancos e isto implicaria que Bernaldo está dizendo a verdade, o que não é possível. Assim, Ronaldo está de boné preto, e isto significa que Arnaldo está dizendo a verdade, o que também não é possível. Portanto, esta opção não pode ocorrer. Segue que Cernaldo está dizendo a verdade. Assim, concluímos que:

- Arnaldo mentiu. Portanto, Arnaldo está usando boné branco.
- Bernaldo mentiu. Portanto, Bernaldo está usando boné branco.
- Cernaldo disse a verdade. Logo, ele está usando boné preto.
- Dernaldo está de boné branco e Ronaldo está de boné preto.

Exemplo 4.1.8. (Livro Engimas e Desafios) *Um valente guerreiro foi feito de prisioneiro de guerra por uma temível tribo do deserto, tendo sido condenado à morte. O chefe da tribo deu-lhe o direito de fazer uma última declaração. Se afirmasse algo verdadeiro, seria morto por envenenamento. Se afirmasse algo falso, seria enforcado. O prisioneiro, após refletir um pouco, fez uma declaração que o livrou da morte. O que ele disse?*

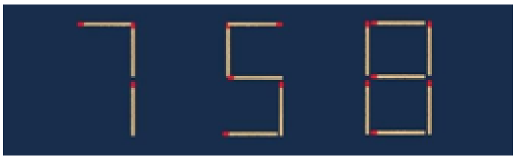
Solução: O prisioneiro afirmou: SEREI ENFORCADO!

Desta forma, o chefe da tribo não poderia matá-lo por envenenamento, pois isso tornaria sua afirmação falsa, e, neste caso, sua morte teria que ser por enforcamento. Por outro lado, o chefe também não poderia enforcá-lo, pois se assim fizesse a afirmação do prisioneiro se tornaria verdadeira, e, portanto, o chefe, para cumprir sua palavra teria que matá-lo por envenenamento, o que, como vimos, também não é possível. Logo o chefe da tribo, não tendo como cumprir sua palavra, teve que libertá-lo.

Exemplo 4.1.9. *Dada a sequência* $2, 10, 12, 16, 17, 18, 19, ...$ *qual o próximo número da sequência?*

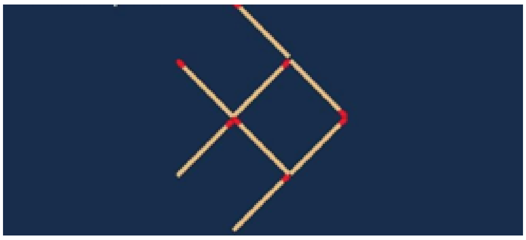
Solução: Perceba que a escrita dos números começa com a letra D. 2(dois), 10(dez), 12(doze), 16(dezesseis), 17(dezessete), 18(dezoito) e 19(dezenove). Logo, o próximo número da sequência é 200(duzentos), pois entre 20 e 199 nenhum número tem sua escrita começando com a letra D.

Exemplo 4.1.10. (Todamateria) *O número* 758 *está escrito com palitos conforme ilustra a imagem. Mova apenas dois palitos e transforme esse número em seu dobro.*

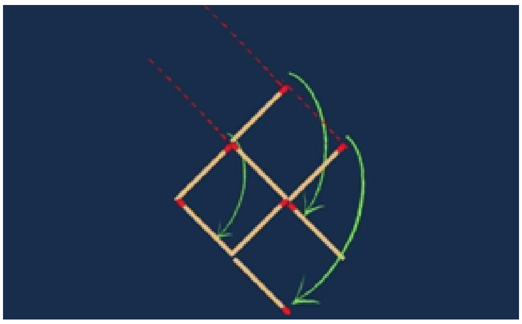


Solução: Devemos retirar um palito do número 7 e outro palito do número 8, conforme mostra a imagem a seguir.

Exemplo 4.1.11. (Todamateria) *Mova três palitos e faça o peixe nadar para o lado oposto.*



Solução: A movimentação que deve ser feita está na figura a seguir.



Exemplo 4.1.12. (FGV/Pref. de Salvador-BA) *Alice, Bruno, Carlos e Denise são as quatro primeiras pessoas de uma fila, não necessariamente nesta ordem. João olha para os quatro e afirma:*

- *Bruno e Carlos estão em posições consecutivas na fila;*
- *Alice está entre Bruno e Carlos na fila.*

Entretanto, as duas afirmações de João são falsas. Sabe-se que Bruno é o terceiro da fila. O segundo da fila é

a) *Alice.*

b) *Bruno.*

c) *Carlos.*

d) *Denise.*

e) *João.*

Solução: Como Bruno é o terceiro da fila e não está em posição consecutiva de Carlos, Carlos só pode ser o primeiro da fila. Alice então, só pode ser a última, pois não está entre Bruno e Carlos. Com isso, a segunda da fila só pode ser Denise.

4.2 Proposição

Proposição é o termo central da lógica, essencial para estruturação e entendimento dos argumentos lógicos. Nesta seção definiremos os conceitos básicos de proposição e os tipos de proposições.

Definição 4.2.1. *Chama-se de proposição ou sentença qualquer afirmação referente a um conjunto de palavras ou símbolos que pode ser julgada como verdadeira ou falsa de maneira exclusiva, exprimem um pensamento de sentido completo.*

Segundo Filho (2002), os termos verdadeiro (V) e falso (F) são chamados de valores lógicos da proposição. Por este motivo dizemos que a lógica matemática ou proposicional é uma lógica bivalente, com as seguintes características:

A) Sendo oração, tem sujeito e predicado;

B) É afirmativa declarativa (não é exclamativa e nem interrogativa;

C) Tem um, e somente um, dos dois valores lógicos, por este motivo temos os princípios (ou axioma) da lógica, são eles;

C.1) **Axioma do Princípio da Não Contradição –** Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ou mesmo tempo.

C.2) **Axioma do Princípio do Terceiro Excluído –** Toda proposição ou é verdadeira ou é falsa (isto é, verifica-se sempre um destes casos e nunca um terceiro).

Exemplo 4.2.1. *São exemplos de proposições:*

a) Fortaleza é a capital do Ceará.

b) PROFMAT é um Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

c) O Vasco foi eleito o melhor time do 2021.

d) $7 \neq 4$.

e) Todo quadrado é um quadrilátero.

f) $5 = 6$.

Observação 4.2.1. *Note que o valor lógico das proposições (a, b, d, e) é verdade (V) e das proposições (c, f) é falso (F)*

Exemplo 4.2.2. (Livro Edgard Filho - Adaptada) *Qual o valor lógico (V ou F) das proposições a seguir?*

a) $(5 + x)^2 = 5^2 + x^2$.

b) *a diagonal de um quadrado é maior que o lado.*

c) 15 *é um número primo.*

d) 16 *é um quadrado perfeito.*

Solução:

a) Falsa, pois $(5 + x)^2 = 25 + 10x + x^2$.

b) Verdadeira, pelo teorema de Pitágoras temos que a diagonal (d) de um quadrado de lado (ℓ) é $d = \ell\sqrt{2}$.

c) Falsa, pois os divisores de 15 são: 1, 3, 5 e 15.

d) Verdadeira, pois $\sqrt{16} = 4$.

Agora alguns exemplos que não são proposições:

Exemplo 4.2.3. *Não são proposições:*

1. *Que belo é o por do Sol em Juazeiro do Norte! (Exclamativa)*

2. *Onde você mora? (Interrogativa)*

3. *Leve o jornal para seu pai. (Imperativa)*

4. *Tomara que você seja aprovado no concurso. (Optativas)*

5. $x + 5 = 7$. *(Sentenças abertas)*

6. Trabalho digno desse senhor. (Sem verbo)

As proposições podem ser classificadas em simples e compostas.

Definição 4.2.2. *Chama-se proposição simples aquela que não contêm nenhuma outra como parte integrante de si mesma.*

As proposições simples também são chamadas de atômicas e elas serão indicadas por letras minúsculas p, q, r, s, etc.

Exemplo 4.2.4. *São exemplos de proposições simples:*

- p : *ano bissexto é aquele que tem 366 dias;*
- q : *o planeta terra é o menor planeta do sistema solar;*
- r : *2 é ímpar.*

- p : ano bissexto é aquele que tem 366 dias;
- q : o planeta terra é o menor planeta do sistema solar;
- r : 2 é ímpar.

Agora a definição de proposição composta.

Definição 4.2.3. *Chama-se proposição composta aquela formada pela combinação de duas ou mais proposições simples.*

Observação 4.2.2. *As proposições compostas também são chamadas de moleculares.*

As proposições compostas serão denotadas por letras maiúsculas P, Q, R, S, etc.

Exemplo 4.2.5. *São exemplos de proposições compostas:*

- P : 5 é ímpar e 10 é par.
- Q : Marcos é alto ou Emanuel é estudante.
- R : Se Thiago é professor, então ele sabe tocar bateria.
- S : Um número é par se e somente se for divisível por 2.

Mais alguns exemplos de proposições.

Exemplo 4.2.6. *Determine quais são proposições ou não e explique sua resposta.*

a) *O curso de licenciatura em matemática é um excelente curso.*

b) *Quem precisa de dinheiro?*

c) *Atenção ao atravessar a rua!*

d) *A população do país de Portugal é uma nação bastante acolhedora.*

Solução:

a) É uma proposição, pois temos uma frase declarativa. Note que tal proposição é simples.

b) Não é uma proposição, pois temos uma frase interrogativa ao invés de declarativa.

c) Não é uma proposição, pois temos uma frase exclamativa ao invés de declarativa.

d) É uma proposição, pois temos uma frase declarativa. Note que tal proposição é simples

Exemplo 4.2.7. (Livro raciocínio lógico - volume gama) *Dadas as proposições a seguir, identifique as simples e as compostas.*

a) *Aristóteles elevou a lógica à categoria de ciência.*

b) *Carlos é médico.*

c) *Pedro disse a verdade para Maria e Maria disse a verdade para Marcos.*

d) *Fernanda gosta de almoçar ou jantar fora aos domingos.*

e) *Rebeca tem carteira de motorista.*

Solução:

a) Na ausência de conectivo lógico temos uma proposição simples (atômica).

b) Na ausência de conectivo lógico temos uma proposição simples (atômica).

c) Na presença de um conectivo lógico temos uma proposição composta (molécula).

d) Na presença de um conectivo lógico temos uma proposição composta (molécula).

e) Na ausência de conectivo lógico temos uma proposição simples (atômica).

4.3 Conectivos e Tabela Verdade

Nesta seção apresenta-se os conectivos lógicos com seus respectivos símbolos. Também o conceito de negação de uma proposições simples, bem como algumas traduções simbólicas e tabelas.

Definição 4.3.1. *Chamam-se de conectivos palavras ou símbolos usados para formar novas proposições a partir de proposições dadas.*

Os conectivos fundamentais da Lógica Matemática são:

Tabela 4.1: Símbolos dos conectivos

Conectivo	Símbolo	Nome
Não, não é verdade	$\sim$ ou $\neg$	negação ou modificador
e	$\wedge$	conjunção
ou	$\vee$	disjunção
ou, ... ou	$\veebar$	disjunção exclusiva
se... então	$\rightarrow$	condicional
se e somente se	$\leftrightarrow$	bicondicional

Fonte: Autor

4.3.1 Negação e Tradução Simbólica

A partir de uma proposição p pode-se construir outra, denominada de negação de p, indicada pelo símbolo $\sim p$.

Definição 4.3.2. *Chama-se de negação de uma proposição* p*, indicada por "não* p*" com notação (*$\sim p$ *ou* $\neg p$*), a proposição que tem valor lógico oposto de* p*. Isto é,* $\sim p$ *é verdadeira quando* p *é falsa e* $\sim p$ *é falsa quando* p *for verdadeira.*

Tal definição está resumida na Tabela 4.2 a seguir, chamada de tabela verdade.

Tabela 4.2: Tabela verdade da negação

p	$\sim p$
V	F
F	V

Fonte: Autor

Pode negar uma proposição usando não, não é verdade que ou é falso que, veja alguns exemplos de negação.

Exemplo 4.3.1. *Seja a proposição* p : *matemática é fácil, sua negação é:* $\sim p$: *matemática não é fácil.*

Exemplo 4.3.2. *Sendo a proposição* p : *Já fui medalhista na olimpíada de raciocínio lógico, então sua negação é:* $\sim p$: *Não é verdade que já fui medalhista na olimpíada de raciocínio lógico.*

Exemplo 4.3.3. *Dada a proposição* p : *O Vasco é o melhor time do mundo, sua negação é:* $\sim p$: *É falso que o Vasco é o melhor time do mundo.*

A negação da negação é a própria proposição: $\sim(\sim p) = p$.

Exemplo 4.3.4. *Considere a proposição:* p : *Carlos é professor.*

Sua negação é: p : *Carlos não é professor;*
A negação da negação é: $\sim(\sim p)$: *Carlos é professor.*

Observação 4.3.1. *A Tradução simbólica é a habilidade de fazer a tradução da linguagem natural para linguagem simbólica ou vice e versa.*

Dadas as proposições simples p e q pode-se formar novas proposições com o uso dos conectivos, conforme tabela a seguir:

Tabela 4.3: Tradução simbólica

a negação de p	$\sim p$	não p
a conjunção de p e q	$p \wedge q$	p e q
a disjunção de p e q	$p \vee q$	p ou q
a condicional de p e q	$p \rightarrow q$	se p então q
a bicondicional	$p \leftrightarrow q$	p se e somente se q

Fonte: Autor

Exemplo 4.3.5. *Dada as proposições:*

p : *Pitágoras é filosofo;*

q : *Newton é professor.*

Então as traduções da linguagem simbólica para a linguagem natural são:

a) $\sim p$: *Pitágoras não é filosofo.*
ou
Não é verdade que Pitágoras é filosofo.
b) $p \wedge \sim q$: *Pitágoras é filosofo e Newton não é professor.*
ou
Pitágoras é filosofo e é falso que Newton é professor.

Exemplo 4.3.6. (Livro raciocínio lógico - volume gama - adaptada) *Considere as proposições Simples:*

p : *25 é um número par;*

q : *é primo;*

r : *é positivo.*

Pode-se compor agora inúmeras proposições compostas a partir destas três iniciais e apresentar sua tradução simbólica, conforme mostra a seguir:

a. "O número 25 *é número par e não é primo e é negativo".*

$$(p \wedge \sim q \wedge \sim r).$$

b. "Se o número 25 *não é número par então é primo e não é positivo".*

$$(\sim p \rightarrow q \wedge \sim r).$$

c. "O número 25 *não é número par e não é primo e é positivo".*

$$(\sim p \wedge \sim q \ \wedge r).$$

d. "O número 25 *é número par se e somente se é primo e não é positivo".*

$$(p \leftrightarrow q \wedge \sim r).$$

e. "Se o número 25 *é número par então é primo e não é positivo".*

$$(p \rightarrow q \wedge \sim r).$$

f. "O número 25 *não é número par e é primo e não é positivo".*

$$(\sim p \ \wedge q \wedge \sim r).$$

g. "Se o número 25 *não é número par então é primo e não é positivo".*

$$(\sim p \rightarrow q \wedge \sim r).$$

h. "O número 25 *é número par e não é primo ou é positivo".*

$$(p \wedge \sim q \ \wedge r).$$

i. "O número 25 *não é número par e é primo se e somente se é positivo".*

$$(\sim p \ \wedge q \leftrightarrow r).$$

j. "O número 25 não é número par e é primo e é positivo".

$$(\sim p \ \wedge q \ \wedge r).$$

k. "Se o número 25 não é número par então não é primo e é positivo".

$$(\sim p \rightarrow \sim q \ \wedge r).$$

l. "O número 25 é número par se e somente se não é primo e é positivo".

$$(p \leftrightarrow \sim q \ \wedge r).$$

Exemplo 4.3.7. (Livro raciocínio lógico - volume gama) *Sejam 3 proposições simples "r", "s" e "t", onde cada uma é representada por:*

r : *Caetano Veloso canta Chuvas de verão.*
s : *Fafá de Belém canta Foi assim.*
t : *Tom Jobim canta Wave.*

Para as alternativas abaixo faça a tradução da linguagem simbólica, para a linguagem natural das sentenças:

a) $\sim s$.

b) $\sim s \wedge t$.

c) $\sim (\sim r)$.

d) $\sim (s \rightarrow \sim t)$.

e) $\sim t \leftrightarrow r$.

Solução:

a) Fafá de Belém não canta Foi assim.

b) Fafá de Belém não canta Foi assim e Tom Jobim canta Wave.

c) Não é verdade que Caetano Veloso não canta Chuvas de verão.

d) Não é verdade que se Fafá de Belém canta Foi assim então Tom Jobim não canta Wave.

e) Tom Jobim não canta Wave se e somente se Caetano Veloso canta Chuvas de verão.

Exemplo 4.3.8. (Livro raciocínio lógico - volume gama - adaptada) *Sejam as proposições p : João é alto, q : Guilherme é baixo. Traduzir para a linguagem simbólica as seguintes proposições compostas:*

a) *Se João é alto, então João é alto ou Guilherme é baixo.*

b) *Se João é alto, então João é alto e Guilherme é baixo.*

c) *Se João é alto ou Guilherme é baixo, então Guilherme é baixo.*

d) *Se João é alto ou Guilherme é baixo, então João é alto e Guilherme é baixo.*

e) *Se João é alto ou João não é alto, então Guilherme é baixo.*

Solução:

a) $p \to p \vee q$

b) $p \to p \wedge q$

c) $p \vee q \to q$

d) $p \vee q \to p \wedge q$

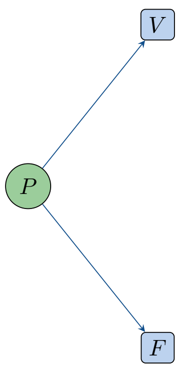
e) $p \vee \sim p \to q$

4.3.2 Tabela Verdade

Decorre do princípio do terceiro excluído, visto no Axioma C2, que toda proposição admite somente dois valores lógicos: Verdadeiro (V) ou falso (F). Para se estudar quando uma proposição é verdadeira ou falsa, uma ferramenta poderosa é a Tabela Verdade. Para entender a construção de tal tabela, vamos começa estudando o caso de uma proposição simples.

Para uma proposição simples, decorre do princípio do terceiro excluído, que toda proposição simples p é verdadeira ou falsa, isto é, seu valor lógico não pode ser um terceiro valor. Pode-se representar tal fato em uma arvore de possibilidade, conforme Figura 4.1.

Figura 4.1: Árvore de possibilidades do valor lógico de uma proposição



Fonte: Autor

Em lógica matemática é usual representar tal arvore pela Tabela 4.4. A determinação do valor lógico de uma proposição composta necessita do conhecimento dos valores lógicos das proposições simples componentes e do conectivo a ser empregado.

Tabela 4.4: Valores lógico de uma proposição.

P
V
F

Fonte: Autor

Com duas proposições simples p e q, podemos ter as seguintes combinações para seus valores, conforme a Tabela 4.5, (ver o princípio da página 14 de Edgar Filho) (FILHO, 2002). A partir das proposições simples podemos obter a tabela verdade da composta. Para aplicar o princípio do terceiro excluído na determinação do valor lógico da proposição composta, recorre-se a um dispositivo chamado de tabela verdade. Vejamos como representar os valores das proposições na Tabela 4.5:

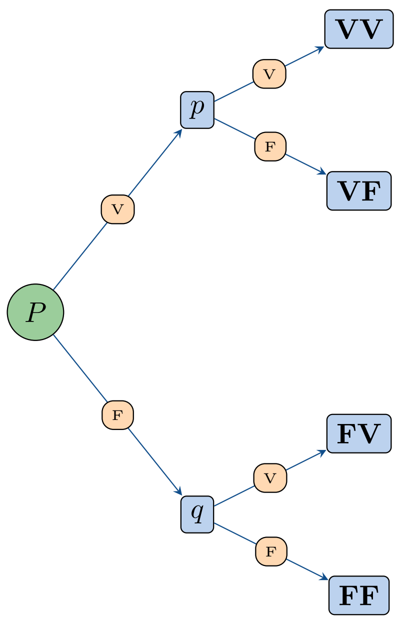
Tabela 4.5: Tabela verdade com o valor lógico de duas proposições.

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Fonte: Autor

Agora, apresenta-se em forma de arvore as possibilidades.

Figura 4.2: Árvore de possibilidades do valor lógico de duas proposições



Fonte: Autor

O diagrama da Figura 4.2 apresenta todas as combinações para os valores lógicos de duas proposições simples, se alternando os valores V e F de dois em dois para a primeira p e de um em um para segunda proposição q, gerando as combinações VV, VF, FV e FF.

4.4 Operações Lógicas com Proposições

Nesta seção será conceituado o cálculo proposicional, ou seja, utilizar os conectivos lógicos apresentados na seção anterior para formar proposições compostas e encontrar seu valor lógico através da tabela verdade.

Tais operações são de suma importância para Lógica, com elas podemos verificar a validade de um argumento. Por exemplo, as operações lógicas com os conectivos são essenciais nas demonstrações matemáticas em suas variadas formas (direta, contraposição, redução ao absurdo, por indução...), para um melhor entendimento sobre o assunto, recomenda-se o livro Iniciação à Matemática (FERNÁNDEZ; OLIVEIRA, 2010). Os exemplos aqui apresentados foram selecionados das referências Filho (2002), IMPA (2022), Barros (2003), Fernández e Oliveira (2010), Ataíde (2019) e Murakami e Iezzi (1985), outros foram de autoria própria.

4.4.1 Cálculo Proposicional

Na aritmética trabalhamos com algumas operações como adição, subtração, multiplicação etc. Na lógica iremos fazer operações que denotamos por cálculo proposicional, utilizando as proposições simples e combiná-las com os conectivos "e", "ou", "se ... então" e "se e somente se" para formar novas proposições, chamadas de proposições compostas.

Conhecendo-se os valores lógicos de duas proposições simples p e q, vamos entender como os conectivos podem influenciar no valor lógico de uma proposição composta.

4.4.2 Conjunção (e) / ($\wedge$)

Definição 4.4.1. *Dadas as proposições p e q a proposição "p e q" ($p \wedge q$) é verdade (V) quando as proposições p e q são ambas verdade e falsa(F) nos demais casos.*

Tabela 4.6: Tabela verdade da conjunção.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Fonte: Autor.

Isto é: V $\wedge$ V = V, V $\wedge$ F = F, F $\wedge$ V = F, F $\wedge$ F = F.

Sendo,

$$\mathrm{V}(p \wedge q) = \mathrm{V}(p) \wedge \mathrm{V}(q).$$

Observação 4.4.1. *Denotamos (V_p) como sendo o valor lógico da proposição p.*

Veja alguns exemplos:

Exemplo 4.4.1. *Sejam p e q duas proposições simples definidas por:*

$$p : 8 < 10.$$

e

$$q : \textit{ Fortaleza é a capital do Ceará.}$$

Então,

$$p \wedge q : \; 8 < 10 \textit{ e Fortaleza é a capital do Ceará (V),}$$

pois

$$V(p \wedge q) = V(p) \wedge V(q) = V \wedge V = V.$$

Exemplo 4.4.2. *Considere a sentença:*

$$S : \textit{ Matemática é interessante e jogar futebol é legal.}$$

Traduzindo para linguagem simbólica temos:

$$p : \textit{ Matemática é interessante.}$$

$$q : \textit{ jogar futebol é legal.}$$

Perceba que a sentença "S" só será verdade quando p e q forem ambas verdades, isto é,

$$S = p \wedge q = V(S) = V(p \wedge q) = V(p) \wedge V(q) = V \wedge V = V.$$

4.4.3 Disjunção Inclusiva (ou) / ($\vee$)

Definição 4.4.2. *Dadas as proposições p e q a proposição "p ou q" $(p \vee q)$ é verdade (V) quando pelo menos uma das proposições for verdade e falsa (F) quando as duas forem falsas.*

O valor lógico da disjunção inclusiva (podendo chamar apenas de disjunção) de duas proposições é definido pela tabela verdade:

Tabela 4.7: Tabela verdade da disjunção.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Fonte: Autor.

Isto é:

$$\text{V} \vee \text{V} = \text{V}, \text{V} \vee \text{F} = \text{V}, \text{F} \vee \text{V} = \text{V}, \text{F} \vee \text{F} = \text{F}.$$

Portanto,

$$\text{V}(p \vee q) = \text{V}(p) \vee \text{V}(q).$$

Exemplo 4.4.3. *Sejam as proposições:*

$$p : 4 \textit{ é ímpar}.$$

$$q : 7 > 1.$$

Então de acordo com a Tabela 4.7 o valor lógico da proposição composta p ou q é:

$$V(p \vee q) = V.$$

De fato, os valores lógicos de p e q são:

$$V(p) = F \textit{ e } V(q) = V,$$

e falso (F) com verdade (V) na disjunção é igual a verdade (V).

4.4.4 Disjunção Exclusiva (ou... ou) / ($\veebar$)

Na linguagem comum a palavra “ou” tem dois sentidos. Analisemos as proposições a seguir:

p : Valdir é professor ou médico.

q : Valdir nasceu no estado do Piauí ou no estado do Ceará.

Note que, na proposição p, Valdir pode ser professor, Valdir pode ser médico e Valdir pode ser professor e médico, logo ambas podem serem verdadeiras (V), caracterizando uma disjunção inclusiva, que aceita ambas como verdade.

Já na proposição q, Valdir só pode ter nascido no Piauí ou no Ceará, ou seja, apenas uma das proposições é verdadeira (V), caracterizando uma disjunção exclusiva.

Definição 4.4.3. *Chama-se disjunção exclusiva de duas proposições* $(p \veebar q)$*, que se lê: "ou* p *ou* q*" ou "*p *ou* q*", mas não ambos, cujo valor lógico é verdade(V) quando apenas uma das proposições é verdade(V) e falsa(F) quando ambas são verdades ou ambas são falsas.*

Resumindo,

Tabela 4.8: Tabela verdade da disjunção exclusiva.

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Fonte: Autor.

Isto é:

$$\mathrm{V} \veebar \mathrm{V} = \mathrm{F}, \mathrm{V} \veebar \mathrm{F} = \mathrm{V}, \mathrm{F} \veebar \mathrm{V} = \mathrm{V}, \mathrm{F} \veebar \mathrm{F} = \mathrm{F}.$$

Portanto,

$$\mathrm{V}(p \veebar q) = \mathrm{V}(p) \veebar \mathrm{V}(q).$$

Exemplo 4.4.4. *Dadas as proposições:*

$$p : 2 > 5.$$

$$q : 2 < 5.$$

Observe que 2 *não pode ser maior do que* 5 *e menor do que* 5*, daí, o valor lógico de*

$$V(p \veebar q) = V.$$

De fato, como a proposição p *é verdadeira (V) e a proposição* q *é falsa (F), ou seja,* $V(p) = V$ *e* $V(q) = F$*, então pela Tabela 4.8 da disjunção exclusiva temos*

$$V \veebar F = V.$$

4.4.5 Condicional (se ... então) / $(\rightarrow)$

Antes de iniciar o conceito de condicional, veja a seguinte situação: Maria disse que se não chover, então ela vai à praia. Sabendo que choveu naquele dia, então Maria não foi à praia? Bem, no senso comum uma resposta pertinente é que Maria não foi á praia, porém do ponto de vista lógico nada se pode afirmar, ou seja, Maria pode ter ido ou não à praia. A seguir a definição formal e alguns exemplos.

Definição 4.4.4. *Dadas as proposições* p *e* q*, a proposição "se* p *então* q*"* $(p \rightarrow q)$ *tem valor lógico falso (F) quando* p *é verdadeira e* q *é falsa e é verdade(V) nos demais casos.*

A condicional de duas proposições "$p \rightarrow q$", também pode se lê das seguintes maneiras:

a) p é condição suficiente para q.

b) q é condição necessária para p.

c) p somente se q.

d) q, se p.

Na condicional $p \rightarrow q$, p é o antecedente, q é o consequente e o símbolo $\rightarrow$ é chamado de símbolo de implicação. Resumindo,

Tabela 4.9: Tabela verdade da condicional.

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Fonte: Autor.

Isto é:

$$\mathrm{V} \rightarrow \mathrm{V} = \mathrm{V}, \mathrm{V} \rightarrow \mathrm{F} = \mathrm{F}, \mathrm{F} \rightarrow \mathrm{V} = \mathrm{V}, \mathrm{F} \rightarrow \mathrm{F} = \mathrm{V}.$$

Portanto,

$$\mathrm{V}(p \rightarrow q) = \mathrm{V}(p) \rightarrow \mathrm{V}(q).$$

Observação 4.4.2. *uma condicional é verdadeira sempre que o seu antecedente é uma proposição falsa.*

Exemplo 4.4.5. *Se p é falsa, qualquer conclusão podemos tirar para q. Por exemplo, supusermos que o triângulo tem 5 lados, então podemos concluir que $7 = 1$ e que a água do mar é doce. Ou seja, se p é falso, tudo é válido, como nos ditados populares: "Se você é o dono do WhatsApp então eu sou o Neymar".*

Observação 4.4.3. *Podemos ter proposições absurdas, tais como: "Se $7 = 2$ então a lua é de morango", "Se a terra é plana então $2 + 2 = 4$", que apesar de serem verdadeiras, de acordo com as regras de lógica estabelecidas, não tem nenhum sentido prático.*

Exemplo 4.4.6. *Entendendo melhor o significado das condições "necessária" e "suficiente". "Se o galo canta então está vivo"*

i) *O galo cantar é condição suficiente para ele estar vivo, ou seja, é suficiente o galo cantar para garantirmos que ele está vivo.*

ii) *O galo estar vivo é condição necessária para ele cantar, ou seja, é necessário que ele esteja vivo para que possa cantar.*

Exemplo 4.4.7. *Alguns casos de condicional:*

i) $p : \pi$ *é um número real – valor lógico (V).*

q : *Galois morreu em duelo – valor lógico (V).*

Daí,

$p \to q$: *Se* π *é um número real, então Galois morreu em duelo – valor lógico (V).*

$$V(p \to q) = V(p) \to V(q) = V \to V = V.$$

ii) p : *o ano de 2022 tem 365 dias - valor lógico (V)*

q : *a terra é plana - valor lógico (F).*

assim,

$p \to q$: *Se o ano de 2022 tem 365 dias, então a terra é plana - valor lógico (F)*

$$V(p \to q) = V(p) \to V(q) = V \to F = F.$$

iii) p : *Pitágoras escreveu o romance a bela e a fera - valor lógico (F).*

q : *o mês de janeiro tem 31 dias - valor lógico (V).*

Logo,

$p \to q$: *Se Pitágoras escreveu o romance a bela e a fera,*

então o mês de janeiro tem 31 dias - valor lógico (V).

$$V(p \to q) = V(p) \to V(q) = F \to V = V.$$

iv) p : *Pitágoras nasceu no Ceará – valor lógico (F).*

q : *o ano tem 10 meses – valor lógico (F).*

portanto,

$p \to q$: *Se Pitágoras nasceu no Ceará, então o ano tem 10 meses – valor lógico (V).*

$$V(p \to q) = V(p) \to V(q) = F \to F = F.$$

Partindo da condicional $p \to q$ podemos obter as seguintes proposições:

✓ $q \to p$ é a sua recíproca - o valor lógico da recíproca nem sempre é (V).

✓ $\sim q \to \sim p$ é a sua contrapositiva – valor lógico da contrapositiva é igual ao valor lógico da "implicação" $p \to q$.

Veja a tabela:

Tabela 4.10: Tabela verdade da recíproca e da contrapositiva.

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$\sim q \to \sim p$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

Fonte: Autor.

Exemplo 4.4.8. *Dada a condicional:*

"Se 10 é par então 10 é divisível por 2", temos
a recíproca: "Se 10 é divisível por 2, então 10 é par;"
a contrapositiva: "Se 10 não é divisível por 2 então 10 não é par".

Exemplo 4.4.9. *Dada a condicional:*

"Se A é um quadrado, então A tem quatro lados", temos
a recíproca: "Se A tem quatro lados então A é um quadrado"
a contrapositiva: "Se A não tem quatro lados então A não é um quadrado".

Observe que no Exemplo 4.4.8, a recíproca é verdadeira e a contrapositiva também, por outro lado, no Exemplo 4.4.9 a recíproca é falsa e a contrapositiva é verdadeira.

4.4.6 Bicondicional (se e somente se) / ($\leftrightarrow$)

Na Subseção 4.4.5 foi visto o conceito de condicional, na qual aparecem as condições de necessidade ou de suficiência. A bicondicional é uma condicional onde a recíproca é verdadeira, ou seja, se vale a ida também vale a volta.

Definição 4.4.5. *Dadas as proposições p e q a proposição "p se e somente se q" $(p \leftrightarrow q)$ é verdade (V) quando p e q tiverem os mesmos valores lógico e falsa (F) nos demais casos.*

A bicondicional de duas proposições "$p \leftrightarrow q$", também pode se lê das seguintes maneiras

a) p é condição necessária e suficiente para q.

b) q é condição necessária e suficiente para p.

Resumindo,

Tabela 4.11: Tabela verdade da bicondicional.

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Fonte: Autor.

Isto é:

$$\mathrm{V} \leftrightarrow \mathrm{V} = \mathrm{V}, \mathrm{V} \leftrightarrow \mathrm{F} = \mathrm{F}, \mathrm{F} \leftrightarrow \mathrm{V} = \mathrm{F}, \mathrm{F} \leftrightarrow \mathrm{F} = \mathrm{V}.$$

Portanto,

$$\mathrm{V}(p \leftrightarrow q) = \mathrm{V}(p) \leftrightarrow \mathrm{V}(q).$$

Observações:

1) A bicondicional pode ser interpretada como a conjunção de duas condicionais, a saber,

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p).$$

Conforme podemos demonstrar na tabela verdade:

Tabela 4.12: Tabela verdade da conjunção de duas condicionais.

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Fonte: Autor.

2) É comum em Matemática, definições dadas por condicionais, por exemplo: um triângulo é retângulo se tem um ângulo reto. Porém, deve-se entender que a definição é uma bicondicional. A saber, "ABC é um triângulo retângulo se e somente se ABC têm um ângulo reto".

Exemplo 4.4.10. *Dadas as proposições:*

$$p : 7 \text{ é ímpar (V)}$$
$$q : 8 \text{ é divisível por } 2 \text{ (V)}$$

assim,

$$p \leftrightarrow q : 7 \textit{ é ímpar se e somente se } 8 \textit{ é divisível por } 2 \textit{ (V)}$$

$$V(p \leftrightarrow q) = V(p) \leftrightarrow V(q) = V \leftrightarrow V = V.$$

Exemplo 4.4.11. *Dadas as proposições:*

$$p : \textit{ Alemanha fica na Europa (V).}$$
$$q : \sqrt{10} = 4 \textit{ (F)}$$

temos,

$$P \leftrightarrow q : \textit{Alemanha fica na Europa se e somente se } \sqrt{10} = 4 \textit{ (F).}$$

$$V(p \leftrightarrow q) = V(p) \leftrightarrow V(q) = V \leftrightarrow F = F.$$

4.4.6.1 Exemplos de Revisão

Exemplo 4.4.12. (Livro raciocínio lógico - volume gama - adaptada) *Veja as duas proposições abaixo:*

$$p = \textit{Fernando tem carteira de motorista (V)}$$
$$q = \textit{Fernando é menor (F)}$$

Levando em consideração que para se ter carteira de motorista é preciso ser maior de idade e ter acima de 18 *anos, a afirmativa* q *está falsa (F) e a afirmativa* p *está verdadeira (V). Com base nas informações acima determine as verdadeiras com (V) e as falsas com (F):*

1. *"Fernando não tem carteira de motorista"*

2. *"Fernando não é menor"*

3. *"Fernando tem carteira de motorista" e "Fernando é menor"*

4. *"Fernando tem carteira de motorista" ou "Fernando é menor"*

5. *"Fernando não tem carteira de motorista" e "Fernando é menor"*

6. *"Fernando não tem carteira de motorista" ou "Fernando é menor"*

7. *"Fernando tem carteira de motorista" ou "Fernando não é menor"*

8. *"Fernando tem carteira de motorista" e "Fernando não é menor"*

9. *Se "Fernando não tem carteira de motorista" então "Fernando é menor"*

10. *Se "Fernando tem carteira de motorista" então "Fernando é menor"*

11. *"Fernando tem carteira de motorista" é equivalente a "Fernando é menor"*

Solução:

1. (não p) (F).
2. (não q) (V).
3. (p e q) (F).
4. (p ou q) (V).
5. (não $((p)$ e $q)$ (F).
6. (não (p) ou q (F).
7. (p ou não (q)) (V).
8. (p e não (q)) (V).
9. (não $(p) \rightarrow q$) (V).
10. ($p \rightarrow q$) (F).
11. ($p \leftrightarrow q$) (F).

Exemplo 4.4.13. (Livro raciocínio lógico - volume gama) *Sabendo que as proposições "a" e "b" são verdadeiras e as proposições "c" e "d" são falsas, determine o valor lógico de cada molécula (proposição composta) que aparece abaixo, as verdadeiras com (V) e as falsas com (F), considerando o conectivo lógico que aparece em cada molécula.*

a) $(a \wedge b) \leftrightarrow (c \vee d)$

b) $(a \rightarrow c) \leftrightarrow (b \rightarrow d)$

Solução:

$$\text{a)}\ \ (a \wedge b) \leftrightarrow (c \vee d) = \text{(F)}$$

$$\text{V} \leftrightarrow \text{F} = \text{F}$$

A molécula $(a \wedge b)$ é verdadeira (V), para os dois átomos verdadeiros (V) com o conectivo "e". Para a molécula $(c \vee d)$ teremos valor lógico falso (F), para os dois átomos (proposições simples) falsos (F) com o conectivo "ou". Assim para a molécula $(a \wedge b) \leftrightarrow (c \vee d)$, onde o primeiro termo antes do conectivo "Se e somente se" $(\leftrightarrow)$ é verdadeiro (V) e o segundo termo, depois do conectivo "Se e somente se" $(\rightarrow)$ é falso (F), teremos a molécula $(a \wedge b) \leftrightarrow (c \vee d)$ falsa (F), pois os átomos que compõem a molécula têm valores lógicos diferentes.

$$\text{b)}\ \ (a \to c) \leftrightarrow (b \to d) = \text{(V)}.$$

$$\text{F} \leftrightarrow \text{F = V}.$$

A molécula $(a \to c)$ é falsa (F), para o primeiro átomo verdadeiro (V) e o segundo átomo que compõe a molécula falso (F) na presença do conectivo "Se...então". Para a molécula $(b \to d)$ também teremos a molécula falsa (F) fazendo a mesma análise da molécula anterior. Assim para a molécula $(a \to c) \leftrightarrow (b \to d)$, onde o primeiro termo antes do conectivo "Se e somente se" ($\leftrightarrow$) é falso (F) e o segundo termo, depois do conectivo "Se e somente se" ($\leftrightarrow$) também é falso (F), teremos a molécula $(a \to c) \leftrightarrow (b \to d)$ verdadeira (V).

Exemplo 4.4.14. (Livro raciocínio lógico - volume gama - adaptada) *Sobre composição de proposição, suponha duas proposições:*

1. A = Fernando tem carteira de motorista (V).

2. B = Fernando é menor (F).

Levando em consideração que para se ter carteira de motorista é preciso ser maior de idade e ter acima de 18 anos, a afirmativa B está falsa (F) e a afirmativa A está verdadeira (V). Com base nas informações acima determine o valor lógico individual de cada átomo que aparece nas moléculas abaixo e de acordo com o conectivo lógico que aparece em cada molécula, determine o valor lógico da molécula, as verdadeiras com (V) e as falsas com (F).

a) Se (Fernando tem carteira de motorista) então (Fernando não é menor).

b) Se (Fernando não tem carteira de motorista) então (Fernando não é menor).

c) (Fernando não tem carteira de motorista) ou (Fernando é menor).

d) (Fernando tem carteira de motorista) e (Fernando não é menor).

e) (Fernando não tem carteira de motorista) se e somente se (Fernando é menor).

Solução:

a) Se (Fernando tem carteira de motorista) então (Fernando não é menor)

$$\text{(V)} \to \text{(V)} = \text{(V)}.$$

b) Se (Fernando não tem carteira de motorista) então (Fernando não é menor)

$$\text{(F)} \to \text{(V)} = \text{(V)}.$$

c) (Fernando não tem carteira de motorista) ou (Fernando é menor)

$$\text{(F)} \vee \text{(F)} = \text{(F)}.$$

d) (Fernando tem carteira de motorista) e (Fernando não é menor)

$$(\text{V}) \wedge (\text{V}) = (\text{V}).$$

e) (Fernando não tem carteira de motorista) se e somente se (Fernando é menor

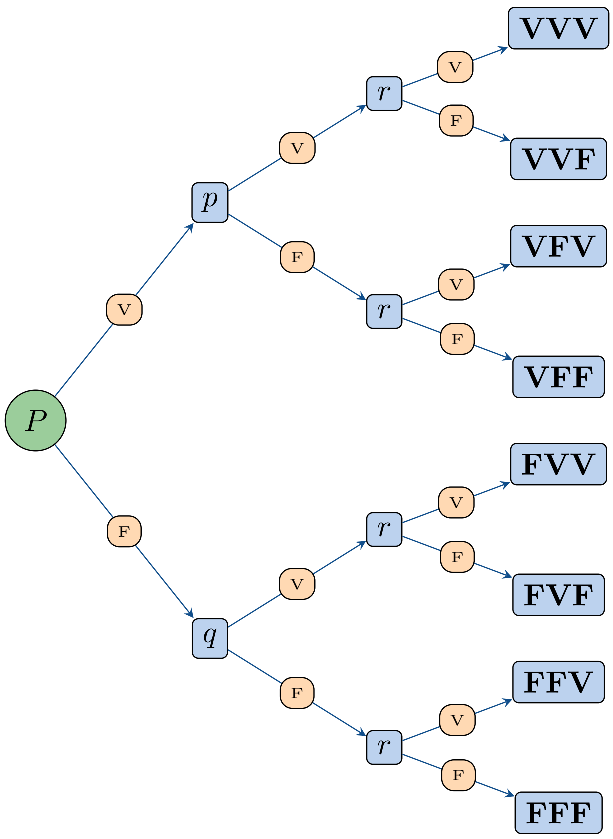
$$(F) \leftrightarrow (\text{F}) = (\text{V}).$$

4.4.7 Construção de Tabelas Verdade

Nesta seção se apresentará uma forma de construir a tabela verdade. Para tal, precisa-se saber a quantidade de linhas e a variação dos valores lógicos (V e F) de cada proposição simples.

Cada proposição simples p tem dois possíveis valores, V ou F, que se excluem, conforme visto na Definição 4.2.1. Assim, a quantidade de linhas de uma tabela verdade depende diretamente da quantidade de proposições simples, veja o seguinte esquema com as proposições p, q e r:

Figura 4.3: Árvore de possibilidades de valores lógicos.



Fonte: Autor.

Observe que ilustra todos os possíveis valores lógico para três proposições simples, se alternando, os valores V e F, de quatro em quatro para a sentença p, de dois em dois para a sentença q e de um em um para a sentença r, obtendo oito combinações: VVV, VVF, VFV, VFF, FVV, FVF, FFV e FFF. Assim, as únicas possíveis atribuições de valores lógicos a p, q e r são:

Tabela 4.13: Tabela verdade para três proposições.

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

Fonte: Autor.

O seguinte teorema estabelece uma relação entre a quantidade de proposições com a quantidade de linhas da tabela verdade. A seguir apresentá-se o teorema e duas demonstrações para tal resultado.

Teorema 4.4.1. *A tabela verdade de uma proposição composta com n proposições simples componentes contém 2^n linhas.*

Demonstração 1: Cada proposição simples p tem dois valores lógicos, V ou F, que se excluem. Assim, para n proposições simples $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ há tantas possibilidades quantos são os arranjos n a n dos dois elementos V e F, isto é, $A_{2,n} = 2^n$, conforme os cálculos de combinatória.

Demonstração 2: Por indução sobre n. Seja $S(n)$ o número de linhas da tabela verdade de uma proposição composta por n proposições simples.

Para $n = 1$, a tabela verdade é formada pelos valores lógicos V e F; logo, tem $2 = 2^1$ linhas. Para $n = 2$ e $n = 3$, o número de linhas são $4 = 2^2$ e $8 = 2^3$, respectivamente. Assim,o teorema é válido nestes casos. Suponhamos que $S(n) = 2^n$ para algum n natural maior ou igual a 3 (hipóteses de indução). Seja $P = P(p_1, p_2, \ldots, p_n, p_{n+1})$ uma proposição composta com $n + 1$ proposições simples. Devemos mostrar que a tabela verdade de P possui 2^{n+1} linhas.

Por hipótese de indução as proposições $p_1, p_2, \ldots, p_n$ tem 2^n linhas. Pelo princípio do terceiro excluído temos que V(p_{n+1}) = V ou V(p_{n+1}) = F. Assim, temos 2^n linhas quando combinarmos as disposições de $p_1, p_2, \ldots, p_n$ com V(p_{n+1}) = V e mais 2^n linhas para o valor lógico F. Logo,

$$S(n + 1) = 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}.$$

Portanto, a hipótese de indução é satisfeita e vale para todo n natural.

Exemplo 4.4.15. *Construa a tabela verdade da proposição $P(p, q, r) = (p\vee \sim r) \to (q\wedge \sim r)$.*

Solução: Note que, devemos ter 8 linhas na tabela, pois temos três proposições e $2^3 = 8$. Também precisamos encontrar os valores lógicos de $(p\vee \sim r)$ e $(q\wedge \sim r)$, assim vamos encontrar primeiro a tabela e preencher os valores lógicos das proposições simples.

Tabela 4.14: Tabela verdade de $(p\vee \sim r) \rightarrow (q\wedge \sim r)$.

p	q	r	$\sim r$	$p \vee \sim r$	$q \wedge \sim r$	$(p \vee \sim r) \rightarrow (q \wedge \sim r)$
V	V	V	F			
V	V	F	V			
V	F	V	F			
V	F	F	V			
F	V	V	F			
F	V	F	V			
F	F	V	F			
F	F	F	V			

Fonte: Autor.

Agora que já temos a tabela e o conhecimento prévio dos conectivos, vamos completar com os valores lógicos correspondente para cada entrada da tabela.

Tabela 4.15: Tabela verdade de $(p \vee \sim r) \rightarrow (q \wedge \sim r)$.

p	q	r	$\sim r$	$p \vee \sim r$	$q \wedge \sim r$	$(p \vee \sim r) \rightarrow (q \wedge \sim r)$
V	V	V	F	V	F	F
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	F	F	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	F	F	V
F	F	F	V	V	F	F

Fonte: Autor.

4.5 Tautologias, Contradições e Contingências

A tabela verdade é composta por valores lógicos V e F, através desses valores podemos dar significado as chamadas (tautologia, contradição e contingência). Veja agora a importância desses termos e a ligação deles com os valores lógicos das proposições

Definição 4.5.1. *Uma Tautologia é uma proposição composta cujo seus valores lógicos são todos verdades, ou seja, a última coluna da tabela é composta somente por V.*

Exemplo 4.5.1. *A proposição "$\sim (q\wedge \sim q)$", chamada de princípio da não contradição, é uma tautologia. De fato,*

Tabela 4.16: Tabela da tautologia de $\sim (q \wedge \sim q)$.

q	$\sim q$	$q \wedge \sim q$	$\sim (q \wedge \sim q)$
V	F	F	V
F	V	F	V

Fonte: Autor.

Definição 4.5.2. *Uma Contradição é uma proposição composta cujo valor lógico é falso para quaisquer que sejam os valores lógicos das proposições componentes. As contradições são também chamadas proposições contraválidas ou proposições logicamente falsas.*

Exemplo 4.5.2. *A proposição $(p \ \vee q) \wedge (\sim p \wedge \sim q)$ é uma contradição. De fato, construindo a tabela verdade verifica-se tal afirmação.*

Tabela 4.17: Tabela da contradição $(p \vee q) \wedge (\sim p \wedge \sim q)$.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$(p \vee q)$	$(\sim p \wedge \sim q)$	$(p \vee q) \wedge (\sim p \wedge \sim q)$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	V	F

Fonte: Autor.

Definição 4.5.3. *Uma Contingência é uma proposição composta cujo valor lógico da tabela configura V e F, aparecendo cada um pelo menos uma vez.*

Exemplo 4.5.3. *Dada a proposição $p \ \vee q \rightarrow p$ é uma contingência conforme mostra a tabela.*

Tabela 4.18: Tabela da contingência $(p \rightarrow q \rightarrow p)$.

p	q	$p \rightarrow q$	$p \rightarrow q \rightarrow p$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	F

Fonte: Autor.

Veja mais dois exemplos:

Exemplo 4.5.4. (Livro raciocínio lógico - volume gama - adaptada) *Na construção de tabelas verdades o número de linhas é determinado pelo número de proposições simples (átomos). Dado "P" e "Q" proposições compostas, indique o número de linhas correspondentes que uma tabela deverá terem sua construção, se tivermos na molécula "P" 4 átomos e na molécula "Q" 6 átomos.*

Solução: *Para termos o número de linhas de uma tabela verdade devemos usar a expressão: $L = 2^n$, onde "n" é o número de átomos de nossa molécula.*

Então teremos:
Na molécula "P", $n = 4$, $L = 2^4 = 16$ linhas;
Na molécula "Q", $n = 6$, $L = 2^6 = 64$ linhas.

Exemplo 4.5.5. (Livro raciocínio lógico - volume gama) *Chama-se tautologia toda proposição que é sempre verdadeira, independente da verdade dos termos que a compõem. Verifique se a proposição*

$$t : [i \to (i \ \vee q)],$$

é uma tautologia preenchendo sua tabela verdade.

Solução: Para os dois átomos i e q existem 4 possibilidades de valores lógicos para qualquer molécula derivada deles. São eles: VV, VF, FV e FF. Nosso quadro deverá, então, ser marcado da seguinte maneira:

Tabela 4.19: Tautologia.

p	q	$(i \vee q)$	$[i \to (i \vee q)]$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	V

Fonte: Autor.

A proposição composta $t : [i \to (i \vee q)]$ é uma tautologia, pois, em sua tabela verdade verificamos que sua molécula que está na última coluna é sempre verdadeira, independente da verdade dos termos que a compõem.

4.6 Implicação e Equivalência

Nesta seção se estudará os conceitos de implicação e equivalência. Tais conceitos são imprescindíveis para a matemática, pois com eles tem-se uma base forte para as demonstrações seguindo o rigor necessário para comprovar uma afirmação.

4.6.1 Implicação Lógica

Definição 4.6.1. *Diz-se que uma proposição P implica logicamente ou, simplesmente, implica uma proposição Q, notação ($P \Rightarrow Q$), se Q é verdadeira (V) sempre que P for verdadeira (V).*

Decorre da definição que $P \Rightarrow Q$ significa que a condicional $P \to Q$ é uma tautologia, isto é, $P \to Q \Leftrightarrow$ V.

De fato, se temos $P \Rightarrow Q$, então não ocorre a situação V(P) = V e V(Q) = F, único caso que a condicional é falsa.

Observação 4.6.1. *Existe uma diferença entre os símbolos ($\Rightarrow$ e $\rightarrow$), vejamos:*

($\rightarrow$) Indica uma operação lógica.

($\Rightarrow$) Significa que a condicional $P \rightarrow Q$ é tautológica. Não ocorrendo V(P) = V e V(Q) = F.

Na Matemática alguns teoremas são da forma $P \Rightarrow Q$, ou seja, uma condicional $P \rightarrow Q$ tautológica, onde denotamos P (hipótese) e Q (tese). Portanto, se $P \rightarrow Q$ é um teorema, então se $Q \rightarrow P$ é verdade, temos que a chamada recíproca do teorema é verdadeira; nem sempre a recíproca será verdade. Já para contrapositiva, temos: Se $P \rightarrow Q$ é um teorema, $\sim Q \rightarrow \sim P$ é um teorema, isto é, podemos "olhar" para qualquer um dos casos pois são equivalentes. Se V($P \rightarrow Q$) = V, vale V($\sim Q \rightarrow \sim P$) = V.

É bastante comum utilizar estes artifícios na demonstração de alguns teoremas na Matemática. Veja alguns exemplos:

Exemplo 4.6.1. (UFBA - a lógica na matemática - adaptada)

a) *O pássaro canta $\Rightarrow$ o pássaro está vivo.*

A recíproca nem sempre é verdade. O pássaro está vivo não obriga ele a cantar.

b) *x é par $\Rightarrow$ x é divisível por 2.*

Neste caso a recíproca é verdadeira. O fato de um número ser divisível por 2, implica que este número é par.

c) *x é um número primo $\Rightarrow$ $x = 2$ ou x é ímpar.*

A recíproca não vale. O fato de o número ser 2 ou ímpar não quer dizer que tal número seja primo. Por exemplo, 15 é ímpar, mas não é primo, pois $15 = 3 \times 5$.

Exemplo 4.6.2. (UFBA - a lógica na matemática - adaptada) *Escreva a recíproca e a contrapositiva da proposição, e verifique se a recíproca é verdadeira.*

"Se o triângulo ABC é retângulo em A então o triângulo tem dois ângulos agudos B e C".

Solução: *Recíproca: Se o triângulo tem dois ângulos B e C agudos, então é retângulo A. Recíproca falsa, pois o triângulo pode ter três ângulos agudos.*

Contrapositiva: Os ângulos B e C do triângulo não são agudos, então o triângulo ABC não é retângulo em A.

4.6.2 Equivalência Lógica

Uma ferramenta bastante utilizada na matemática é reescrever expressões de forma que seja conveniente para tal contexto, ou seja, escrever uma expressão equivalente a outra, sendo assim, pode-se manipular algumas expressões de modo que seu resultado não se altere. Por exemplo, $1 = 5^0 = (x + 2)^2 - x^2 - 4x - 3$.

Definição 4.6.2. *Dadas as proposições P e Q, dizemos que P é equivalente a Q, notação ($P \Leftrightarrow Q$), quando P e Q têm tabelas verdades iguais, isto é, quando a bicondicional ($P \leftrightarrow Q$) é tautológica.*

As seguintes informações são importantes na estruturação das equivalências lógicas:

a) Os símbolos ($\leftrightarrow$ e $\Leftrightarrow$) são distintos.
$\leftrightarrow$ indica uma operação lógica.
$\Leftrightarrow$ Indica que $P \leftrightarrow Q$ é uma tautologia.

b) Todo teorema cujo o recíproco é verdadeiro, é uma equivalência.

$$\text{Hipótese} \Leftrightarrow \text{Tese.}$$

As equivalências a seguir podem ser facilmente verificadas com o uso das tabelas verdade. A seguir a verificação de um, e os demais ficam como divertimento para o leitor.

a) $\sim (\sim p) \Leftrightarrow p$

b) $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

c) $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$

d) $p \wedge \sim p \Leftrightarrow$ F

e) $p \vee p \Leftrightarrow$ V;

f) $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$

g) $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$

h) $\sim (p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$

Exemplo 4.6.3. *Verifique se a equivalência*

$$\sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q.$$

é verdadeira.

Para verificar se uma equivalência é verdadeira, basta saber se suas implicações são verdades, para tanto, vamos utilizar a tabela verdade:

Tabela 4.20: Tabela de equivalência de duas proposições.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim (p \vee q)$	$\sim p \wedge \sim q$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	V	V

Fonte: Autor.

Portanto, analisando as duas últimas colunas da tabela, temos que a equivalência em questão é verdadeira.

4.7 Sentenças Abertas e Quantificadores

A teoria matemática ultrapassa as barreiras do cálculo proposicional, necessitando de sentenças abertas para reformular hipóteses, tais sentenças utilizam-se dos quantificadores que junto com os conectivos lógicos estudados na Seção 4.4 pode-se fazer operações lógicas. Nesta seção será estudado os conceitos básicos de sentenças e quantificadores, para melhor compreensão ver Filho (2002), Murakami e Iezzi (1985), Nolt e Rohatyn (1991) e (GUERREIRO et al., 2022).

4.7.1 Sentenças Abertas

Expressões do tipo:

a) $Y + 5 = 10$ b) $Z > 5$ c) $X^2 = 3X$

São expressões que o valor lógico depende do valor atribuído à variável de cada expressão. Em relação os itens (a, b, c) anteriores, temos:

a) É verdadeira se $y = 5$ e falsa para qualquer outro valor.

b) Falsa para z menor ou igual a 5 e verdadeira nos demais casos.

c) Verdadeira para $x = 0$ ou $x = 3$ e falsa nos demais casos.

Expressões desse tipo são chamadas de sentenças abertas, na qual será definida a seguir.

Definição 4.7.1. *Uma sentença aberta em um conjunto A é uma expressão $p(x)$ tal que, para cada a pertencente ao conjunto A, ou $p(a)$ é falsa (F) ou $p(a)$ é verdadeira (V). Tal sentença também é chamada de função proposicional.*

Observação 4.7.1. *Uma sentença aberta não é uma proposição. Entretanto, podemos transformar numa proposição de duas maneiras:*

a) Atribuir valor às variáveis.

b) Utilizar quantificadores.

Observação 4.7.2. *O conjunto A chama-se Universo ou domínio da varável x.*

Observação 4.7.3. *Dizer que p(a) é verdadeira equivale a dizer que a satisfaz a sentença p(x).*

Definição 4.7.2. *O conjunto-verdade de uma sentença aberta $p(x)$ em um conjunto A é o conjunto de todos os elementos $a \in A$ tais que $p(a)$ é uma proposição verdadeira. Indicaremos por V_p. Simbolicamente, temos:*

$$V_p = \{a | a \in A \wedge p(a) \text{ é } V\} \text{ ou } V_p = \{a \in A | p(a)\}.$$

Observação 4.7.4. *o conjunto-verdade Vp de uma sentença aberta $p(x)$ em A é sempre um subconjunto do conjunto A.*

Exemplo 4.7.1. *Para a sentença aberta "$x + 5 > 9$" em $\mathbb{N}$ (conjuntos dos números naturais). O conjunto verdade é:*

$$V_p = \{x|x \in \mathbb{N} \wedge x + 5 > 9\} = \{5, 6, 7, \ldots\}.$$

Exemplo 4.7.2. *Seja a sentença aberta "$x + 3 < 2$ em $\mathbb{N}$, o conjunto verdade é:*

$$V_p = \{x|x \in \mathbb{N} \wedge x + 3 < 2\} = \varnothing.$$

Na Seção 4.4 foi apresentado as operações lógicas, tais operações se estendem para as sentenças abertas. Dadas as sentenças $p(x)$ e $q(x)$, obtemos novas sentenças:

1. $p(x)$
2. $P(x) \wedge q(x)$
3. $P(x) \vee q(x)$
4. $P(x) \rightarrow q(x)$
5. $P(x) \leftrightarrow q(x)$

Bastando encontrar seu conjunto verdade $V_p = V$ e seguir o mesmo processo das proposições compostas utilizando os valores lógicos. Vejamos alguns exemplos adaptados de

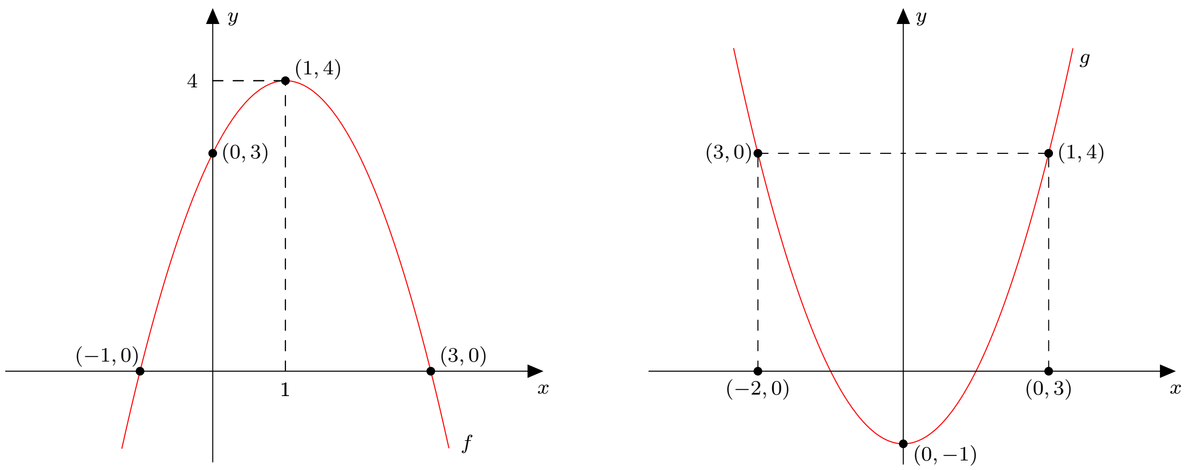
Exemplo 4.7.3. (Negação) (Adaptada - Lógica Matemática - Edgard Filho) $P(x) : x+1 = 1$, *logo* $V_p = \{0\}$.

$\sim p(x) : x + 1 \neq 1$, $V_{\sim p} \neq \{0\}$.

Perceba que $V_{\sim p} = A - V_p$ (conjunto universo menos o conjunto verdade).

Exemplo 4.7.4. (Conjunção) - (UFV - Minicurso: Sentenças Abertas e Quantificadores) *Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ e $g(x) = x^2 - 1$.*

Figura 4.4: Gráficos das funções f e g, Exemplo 4.7.4.



Fonte: Guerreiro et al. (2022).

Considere as sentenças abertas

$$p(x) : f(x) \geq 0 \text{ e } q(x) : g(x) \geq 0.$$

Determine $p(x) \wedge q(x)$.

Solução: Observe que

$$V_p = \{x \in \mathbb{R}; -1 \leq x \leq 3\}$$

e

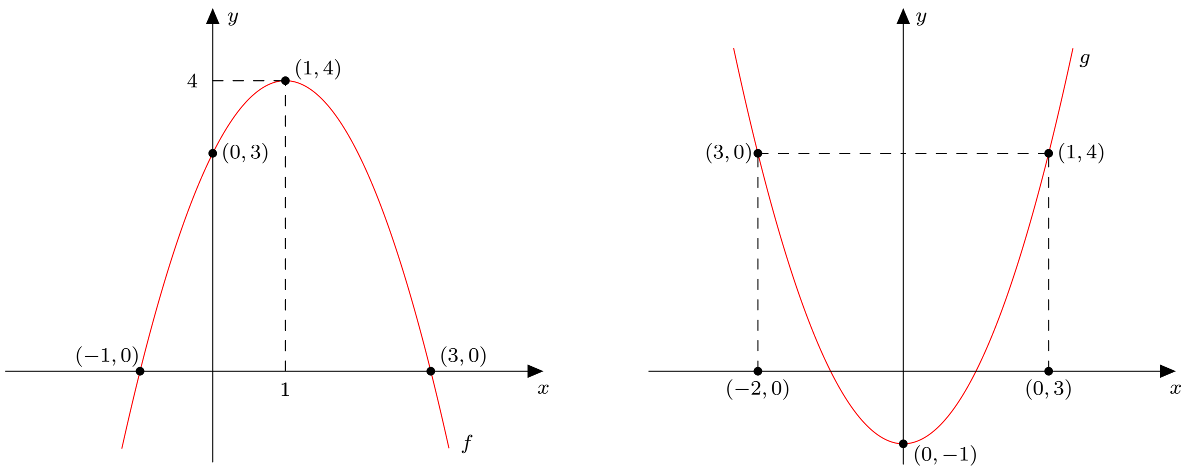
$$V_q = \{x \in \mathbb{R}; x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1\}.$$

Portanto, fazendo a interseção entre os dois conjuntos verdade, temos:

$$V_{p\wedge q} = V_p \cap V_q = \{x \in \mathbb{R}; 1 \leq x \leq 3\}.$$

Exemplo 4.7.5. (Disjunção) - (UFV - Minicurso: Sentenças Abertas e Quantificadores) *Sejam* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definidas por* $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ *e* $g(x) = x^2 - 1$.

Figura 4.5: Gráficos das funções f e g, Exemplo 4.7.5.



Fonte: Guerreiro et al. (2022).

Considere as sentenças abertas

$$p(x) : f(x) \leq 0 \text{ e } q(x) : g(x) \leq 0.$$

Determine $p(x) \vee q(x)$.

Solução: Observe que

$$V_p = \{x \in \mathbb{R}; x \leq -1 \text{ ou } x \geq 3\}$$

e

$$V_q = \{x \in \mathbb{R}; -1 \leq x \leq 1\}.$$

Portanto, fazendo a união desses intervalos obtemos o seguinte conjunto verdade.

$$V_{p \vee q} = V_p \cup V_q = \{x \in \mathbb{R}; x \leq 1 \text{ ou } x \geq 3\}.$$

Exemplo 4.7.6. (Condicional) (UFV - Minicurso: Sentenças Abertas e Quantificadores) *Sejam as sentenças abertas em* $\mathbb{N}$*:*

$$p(x) : x|12(x \textit{ divide } 12), \quad q(x) : x|45(x \textit{ divide } 45).$$

Temos

$$\begin{aligned}
& V_{p \to q} = \{a \in \mathbb{N} \mid a \mid 12\}^{\complement} \cup \{b \in \mathbb{N} \mid b|45\} \\
\Rightarrow \; & V_{p \to q} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}^{\complement} \cup \{1, 3, 5, 9, 15, 45\} \\
\Rightarrow \; & V_{p \to q} = \mathbb{N} \setminus \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} \cup \{1, 3, 5, 9, 15, 45\} \\
\Rightarrow \; & V_{p \to q} = \mathbb{N} \setminus \{2, 4, 6, 12\}
\end{aligned}$$

Exemplo 4.7.7. (Bicondicional) (UFV - Minicurso: Sentenças Abertas e Quantificadores)

Sejam as sentenças abertas em $\mathbb{N}$*:*

$$p(x) : x|6, \;\; q(x) : x|15.$$

Para calcular $V_{p\leftrightarrow q}$*, considere*

$$V_p^{\complement} \cup V_q = \{1,2,3,6\}^{\complement} \cup \{1,3,5,15\} = \mathbb{N} \setminus \{2,6\}$$
$$V_q^{\complement} \cup V_p = \{1,3,5,15\}^{\complement} \cup \{1,2,3,6\} = \mathbb{N} \setminus \{5,15\}$$

Portanto,

$$(V_p^{\complement} \cup V_q) \cap (V_q^{\complement} \cup V_p) = [\mathbb{N} \setminus \{2,6\}] \cap [\mathbb{N} \setminus \{5,15\}] = \mathbb{N} \setminus \{2,5,6,15\}$$

4.7.2 Quantificadores

As sentenças abertas podem transformar-se em proposições, para tanto, devemos encontrar um conjunto verdade para cada variável livre e indicar quais elementos desse conjunto satisfazem as condições determinadas pela sentença aberta. Dois quantificadores são bastante usados, são: existe ($\exists$) e para todo ($\forall$).

a) $\exists$ lê-se: "existe", "existe pelo menos um", "existe um".

b) $\forall$ lê-se: "qualquer que seja", "para todo", "para cada".

4.7.2.1 Quantificador Universal

Seja $p(x)$ uma sentença aberta em um conjunto não vazio A e seja V_p o seu conjunto verdade, isto é:

$$\{x | x \in A \wedge p(x)\}.$$

Quando $V_p = A$, podemos afirmar que para todo elemento x de A, $p(x)$ é verdadeira. Em notação matemática, escrever-se:

(i) $(\forall x \in A)(p(x))$.

(ii) $x \in A, p(x)$.

(iii) $\forall x \in A : p(x)$.

Veja como transformar as sentenças abertas em proposições.

De acordo com (GUERREIRO et al., 2022), dada uma sentença aberta $p(x)$ em um conjunto A, o símbolo $\forall$, referido à variável x, representa uma operação lógica que transforma a sentença aberta $p(x)$ numa proposição, verdadeira ou falsa, conforme exprime ou não uma condição universal no conjunto A.

Exemplo 4.7.8. *A expressão* $(\forall x)(x + 1 = 7)$ *que se lê:*

"qualquer que seja o número x*, temos* $x + 1 = 7$*" (Falsa).*

Perceba que o emprego do quantificador universal $(\forall)$ *torna a sentença aberta em uma proposição.*

Exemplo 4.7.9. (UFV - Minicurso: Sentenças Abertas e Quantificadores) *A expressão*

$$(\forall)(x \textit{ é mortal.})$$

é uma proposição verdadeira no universo H *dos seres humanos.*

4.7.2.2 Quantificador Existencial

Seja $p(x)$ uma sentença aberta em um conjunto não vazio e seja V_p o seu conjunto verdade, isto é,

$$V_p = \{x | x \in A \wedge p(x)\}.$$

Quando $V_p \neq \varnothing$, então, pelo menos um elemento do conjunto A satisfaz a sentença aberta $p(x)$, e poderás afirmar que "existe pelo menos um x em A tal que $p(x)$ é verdadeira".

Matematicamente, expressa-se isto por:

(i) $(\exists x \in A)(p(x))$;

(ii) $\exists x \in A, p(x)$.

(iii) $\exists x \in A : p(x)$.

Bem, agora será utilizado o quantificador existencial para transformar sentenças abertas em proposições.

Segundo (GUERREIRO et al., 2022), dada uma sentença aberta $p(x)$ em um conjunto A, o simbolo $\exists$, referido à variável x, representa uma operação lógica, que transforma uma sentença aberta numa proposição, verdadeira ou falsa, conforme $p(x)$ exprime ou não uma condição possível no conjunto A.

Exemplo 4.7.10. (UFV - Minicurso: Sentenças Abertas e Quantificadores) *A expressão*

$$(\exists)(x \textit{ vive na Lua}),$$

é uma proposição falsa no universo H *dos seres humanos. De fato, não existe ser humano que viva na Lua.*

Exemplo 4.7.11. *A expressão*

$$(\exists)(x + 1 = 7) \textit{ que se lê:}$$

"existe um número x tal que $x + 1 = 7$".

É uma proposição verdadeira. De fato, vai existir um x, no qual $x + 1 = 7$, a saber, $x = 6$.

Observação 4.7.5. *Algumas vezes usamos outro quantificador: $\exists!$, que se lê: "existe um único", "existe um e um só", "existe só um".*

Exemplo 4.7.12. *A expressão*

$$(\exists!x)(x + 1 = 7).$$

"Existe um único x tal que $x + 1 = 7$". Perceba que essa proposição é verdadeira. De fato, $x = 6$ é o único que satisfaz a igualdade.

Exemplo 4.7.13. *Dadas os pontos $A = (0, 3)$ e $B = (1, 5)$ existe uma única reta que os contém. Esta reta é dada por*

$$y = 2x + 3.$$

É uma proposição verdadeira, onde se emprega o uso do quantificador $\exists!$. De fato, só existe uma única reta que passa por dois pontos distintos (ver Fernández e Oliveira (2010)).

4.8 Negação de Proposições

Vimos na Subseção 4.3.1 negação de uma proposição simples.

Nesta seção, nossa base de estudo será a negação das proposições compostas e a negação dos quantificadores. Por exemplo, a negação da proposição: "se João é bonito, então Maria estuda."

Será apresentado na Subseção 4.8.3 como negar uma condicional.

4.8.1 Negação de uma conjunção

Na Subseção 4.6.2, item c, foi apresentada a seguinte equivalência:

$$\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q.$$

Desta forma, pode-se estabelecer que a negação de $p \wedge q$ é a proposição $\sim p \vee \sim q$. Conforme a Tabela Verdade.

Tabela 4.21: Negação da conjunção

p	q	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$\sim p \vee \sim q$
V	V	V	F	F
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

Fonte: Autor.

Exemplo 4.8.1. *Dada a proposição:*

"Paulo é alto e Maria é bonita".

Então a negação dessa proposição composta é dada por:

"Paulo não é alto ou Maria não é bonita".

4.8.2 Negação de uma disjunção

Tendo em vista que a equivalência:

$$\sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q.$$

é verdadeira. Então a negação de $p \vee q$ é a proposição $\sim p \wedge \sim q$, conforme a Tabela 4.22, a seguir.

Tabela 4.22: Negação da disjunção

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim (p \vee q)$	$\sim p \wedge \sim q$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	V	V

Fonte: Autor.

Exemplo 4.8.2. *Seja a proposição:*

"Paulo é alto ou Maria é bonita".

Então a negação dessa proposição composta é dada por:

"Paulo não é alto e Maria não é bonita".

4.8.3 Negação da condicional

Voltando a proposição do início desta seção: qual a negação da proposição "se João é bonito, então Maria estuda?"

A equivalência

$$\sim (p \rightarrow q) \leftrightarrow p \wedge \sim q.$$

é verdadeira, conforme apresenta-se na tabela seguir:

Tabela 4.23: Negação da condicional

p	q	$p \to q$	$\sim (p \to q)$	$p \wedge \sim q$
V	V	V	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	F
F	F	V	F	F

Fonte: Autor.

Assim, a negação de $p \to q$ é a proposição $p \wedge \sim q$.
Respondendo a pergunta, a negação é:

"João é bonito e Maria não estuda".

4.8.4 Negação da bicondicional

A negação de $(p \leftrightarrow q)$ é a proposição

$$(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge \ q),$$

conforme pode-se demonstrar nas Tabelas Verdade, a seguir:

Tabela 4.24: Negação da bicondicional

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \wedge \sim \ q$	$\sim p \ \wedge q$	$(p \wedge \sim q) \vee (\sim \ p \wedge \ q)$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	F	V
F	V	F	F	V	V
F	F	V	F	F	F

Fonte: Autor.

Tabela 4.25: Negação da bicondicional: resultado.

p	q	$p \leftrightarrow q$	$\sim (p \leftrightarrow q)$	$p \wedge \sim \ q$	$\sim p \ \wedge q$	$(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \ \wedge \ q)$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	V	F	V
F	V	F	V	F	V	V
F	F	V	F	F	F	F

Fonte: Autor.

Exemplo 4.8.3. *Seja a proposição:*

"Paulo é alto se, e somente se Maria é bonita".

Então a negação dessa proposição composta é dada por:

"Paulo é alto e Maria não é bonita ou Paulo não é alto e Maria é bonita".

4.8.5 Negação de proposições quantificadas

A negação de $(\forall x)(p(x))$ é $(\exists x)(\sim p(x))$ e a negação de $(\exists x)(p(x))$ é $(\forall x)(\sim p(x))$
A seguir, dois exemplos com a linguagem simbólica.

Exemplo 4.8.4. *Sentença:* $(\forall x)(x + 3 = 5)$.
Negação: $(\exists x)(x + 3 \neq 5)$.

Exemplo 4.8.5. *Sentença:* $(\exists x)\left(\frac{1}{x} \in \mathbb{R}\right)$.
Negação: $(\forall x)\left(\frac{1}{x} \notin \mathbb{R}\right)$.

Agora apresenta-se dois exemplos com a linguagem natural.

Exemplo 4.8.6. *A negação da proposição: "Todo aluno da turma A é bem comportado" é;*
"Existe pelo menos um aluno da turma A que não é comportado".

Exemplo 4.8.7. *A negação da proposição: "Existe pelo menos um aluno da turma A que usa óculos" é;*
"Qualquer que seja o aluno da turma A ele não usa óculos".

Capítulo 5

QUESTÕES DE LÓGICA MATEMÁTICA

Este capítulo apresentará aplicações dos assuntos vistos no capítulo anterior, utilizando questões resolvidas e propostas, para melhor fixar a teoria. Recomenda-se ao leitor, que tentem resolver as questões antes de vislumbrar a resposta. Para ideias de como resolver um problema ver as referências Polya (1978), Tao (2013), Shine (2009), Mega e Watanabe (1988) e Diego (2019). As questões aqui apresentadas, foram selecionadas das provas da OBRL, provas de concursos e de olimpíadas de matemática em geral, que podem ser encontradas nas referências, Smullyan (2014), Filho (2002), OBRL (2022), IMPA (2022), Barros (2003), Fernández e Oliveira (2010) Ataíde (2019), Morgado (2008), Torrente (2014), Murakami e Iezzi (1985) e Fajardo (2017). O gabarito dos exercícios propostos encontra-se nos anexos deste trabalho.

5.1 Exercícios Resolvidos

5.1.1 Lógica de forma Intuitiva

1. (Todamateria) Descubra a lógica e complete o próximo elemento:

a) $1, 3, 5, 7, \_\_$

b) $2, 4, 8, 16, 32, 64, \_\_$

c) $0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, \_\_$

d) $4, 16, 36, 64, \_\_$

e) $1, 1, 2, 3, 5, 8, \_\_$

Solução:

a) 9. Sequência de números ímpares.

b) 128. Sequência baseada na multiplicação por 2

$$(2 \times 2 = 4; 4 \times 2 = 8; 8 \times 2 = 16; \ldots; 64 \times 2 = 128).$$

c) 49. Sequência baseada na soma em uma outra sequência de números ímpares

$$(+1, +3, +5, +7, +9, +11, +13).$$

d) 100. Sequência de quadrados de números pares

$$(22, 42, 62, 82, 102).$$

e) 13. Sequência baseada na soma dos dois elementos anteriores: 1 (primeiro elemento), 1 (segundo elemento),

$$1 + 1 = 2, 1 + 2 = 3, 2 + 3 = 5, 3 + 5 = 8, 5 + 8 = 13.$$

2. **(UERJ)** Em um sistema de codificação, AB representa os algarismos do dia do nascimento de uma pessoa e CD os algarismos de seu mês de nascimento. Nesse sistema, a data trinta de julho, por exemplo, corresponderia a:

$$A = 3, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad D = 7.$$

Admita uma pessoa cuja data de nascimento obedeça à seguinte condição:

$$A + B + C + D = 20.$$

O mês de nascimento dessa pessoa é:

a) agosto

b) setembro

c) outubro

d) novembro

Solução: Alternativa correta: b) setembro.

Note que as somas dos algarismos relativos aos dias do mês, variam de 1 a 11.

$$\begin{aligned}
01 &= 0 + 1 = 1 \\
02 &= 0 + 2 = 2 \\
\vdots & \qquad \vdots \\
29 &= 2 + 9 = 11 \text{ (é a maior soma)} \\
30 &= 3 + 0 = 3 \\
31 &= 3 + 1 = 4
\end{aligned}$$

Já a soma dos algarismos relativos ao mês, varia de 1 a 9.

$$\begin{aligned}
\text{janeiro:} \quad 01 &= 0+1=1 \\
\text{fevereiro:} \quad 02 &= 0+2=2 \\
&\vdots \\
\text{setembro:} \quad 09 &= 0+9=9 \text{ (é a maior soma)} \\
\text{outubro:} \quad 10 &= 1+0=1 \\
\text{novembro:} \quad 11 &= 1+1=2 \\
\text{dezembro:} \quad 12 &= 1+2=3
\end{aligned}$$

Sendo assim, observamos que $11 + 9 = 20$, que são os valores máximos da soma. Portanto, essa combinação é a única possível para a resolução da questão. Desta forma, a soma do mês igual a 9 é o mês de setembro.

3. (FGV/TRT-SC) Alguns consideram que a cidade de Florianópolis foi fundada no dia 23 de março de 1726, que caiu em um sábado. Após 90 dias, no dia 21 de junho, a data assinalou o início do inverno, quando a noite é a mais longa do ano. Esse dia caiu em uma:

a) segunda-feira

b) terça-feira

c) quarta-feira

d) quinta-feira

e) sexta-feira

Solução: sexta-feira.

Como entre um sábado e outro temos o intervalo de 7 dias, vamos dividir os 90 por 7 para saber quantas semanas teremos nesse intervalo. O resultado dessa divisão é 12 semanas e sobram 6 dias. Contando seis dias a partir de sábado, temos a sexta feira.

4. (FGV/ TJ-AM) Dona Maria tem quatro filhos: Francisco, Paulo, Raimundo e Sebastião. A esse respeito, sabe-se que:

I. Sebastião é mais velho que Raimundo.

II. Francisco é mais novo que Paulo.

III. Paulo é mais velho que Raimundo.

Assim, é obrigatoriamente verdadeiro que:

a) Paulo é o mais velho.

b) Raimundo é o mais novo.

c) Francisco é o mais novo.

d) Raimundo não é o mais novo.

e) Sebastião não é o mais novo.

Solução: Sebastião não é o mais novo.

Considerando as informações, temos:

Sebastião $>$ Raimundo $\Rightarrow$ Sebastião não é o mais novo e Raimundo não é o mais velho.

Francisco $<$ Paulo $\Rightarrow$ Paulo não é o mais novo e Francisco não é o mais velho.

Paulo $>$ Raimundo $\Rightarrow$ Paulo não é o mais novo e Raimundo não é o mais velho.

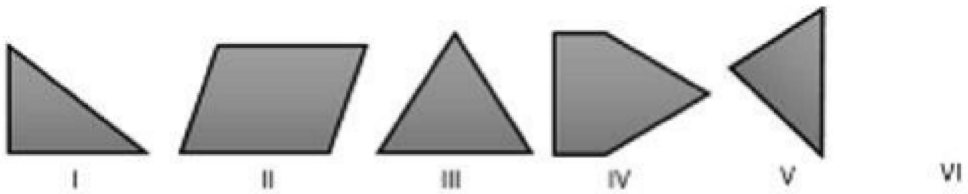
Sabemos que Paulo não é o mais novo, mas não podemos afirmar que é o mais velho. Assim, a alternativa “a” não é obrigatoriamente verdadeira.

O mesmo podemos dizer das opções b e c, pois sabemos que Raimundo e Francisco não são os mais velhos, mas não podemos afirmar que são os mais novos.

Portanto, a única opção que é obrigatoriamente verdadeira é que Sebastião não é o mais novo.

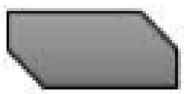
5. (IPEFAE 2021) Observando a sequência de figuras a seguir, pode se afirmar que a próxima (a sexta figura) será:

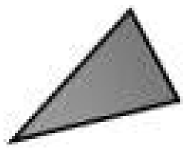
Figura 5.1: Polígonos.

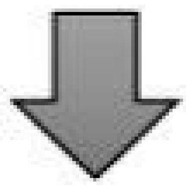


Fonte: IPEFAE (2021).

a) 

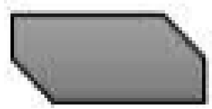
b) 

c) 

d) 

Solução:

Figura 5.2: Polígonos: Solução.



Fonte: IPEFAE (2021).

Note que, na sequência, temos:

I. Um triângulo. Três lados.
II. Um paralelogramo. Quatro lados.
III. Um triângulo. Três lados.
IV. Um pentágono. Cinco lados.
V. Um triângulo. Três lados.

Após um triângulo, aparece uma figura com mais um lado: 4 lados, 5 lados, $\ldots$, ou seja, temos a seguinte sequência em relação a quantidade de lados das figuras $(3, 4, 3, 5, 3, 6, \ldots)$.

Desta forma, a sexta figura deve possuir 6 lados para seguir a sequência, sendo a opção b.

5.1.2 Noções da Lógica Formal e Tradução Simbólica

1. (UPENET – Prefeitura de Paulista – PE – 2014) Considerando o alfabeto com 26 letras, assinale a alternativa cuja letra substitui o ponto de interrogação e completa CORRETAMENTE a sequência

B A C B D C E D F E ?

a) D b) E c) F d) G e) H

Solução: A sucessão é formada por duas sequências uma com as posições ímpares das letras e outra com as posições pares das letras. Vejamos as sequências abaixo:

Com as posições ímpares: B A C B D C E D F E ?

Com as posições pares: B A C B D C E D F E ?

A letra que substitui corretamente a interrogação está na sequência de letras com as posições ímpares e continuando a sequência B, C, D, E , F, teremos como resposta a letra G! Letra “D”.

2. (Livro raciocínio lógico - volume gama) Sejam as frases abaixo proposições que admitem valores lógicos, indique quanto à proposições simples (Átomo) ou proposições compostas (Molécula).

a) Aristóteles elevou a lógica à categoria de ciência.
b) Ricardo é médico ou enfermeiro.
c) Nestor disse a verdade para Pedro.
d) Fernanda gosta de almoçar ou jantar fora aos domingos.
e) Mariana tem carteira de motorista.

Solução:

a) Na ausência de conectivo lógico temos uma proposição simples (Átomo)

b) Na ausência de conectivo lógico temos uma proposição simples (Átomo)

c) Na presença de um conectivo lógico temos uma proposição composta (Molécula)

d) Na presença de um conectivo lógico temos uma proposição composta (Molécula)

e) Na ausência de conectivo lógico temos uma proposição simples (Átomo)

3. (Livro raciocínio lógico - volume gama) Para as sentenças abaixo determine as que são proposições ou não e explique sua resposta.

a) O jardineiro Paulo é feliz com seu trabalho.

b) Quem precisa de neve para esquiar?

c) Atenção ao atravessar a rua!

d) A população do país de Portugal é uma nação bastante acolhedora.

Solução:

a) É uma proposição, pois temos uma frase declarativa.

b) Não é uma proposição, pois temos uma frase interrogativa ao invés de declarativa.

c) Não é uma proposição, pois temos uma frase exclamativa ao invés de declarativa.

d) É uma proposição, pois temos uma frase declarativa.

4. (**STF 2008 [CESPE]**) Considere as seguintes proposições lógicas representadas pelas letras P, Q, R e S:

P : Nesse país o direito é respeitado.

Q : O país é próspero.

R : O cidadão se sente seguro.

S : Todos os trabalhadores têm emprego.

Considere também que os símbolos "$\wedge$" "$\vee$" "$\rightarrow$" e "$\neg$" representem os conectivos lógicos "ou", "e", "se ... então" e "não", respectivamente. Com base nessas informações, julgue os itens seguintes.

1. A proposição "Nesse país o direito é respeitado, mas o cidadão não se sente seguro" pode ser representada simbolicamente por $P \wedge (\neg R)$.
2. A proposição "Se o país é próspero, então todos os trabalhadores têm emprego" pode ser representada simbolicamente por $Q \rightarrow R$.
3. A proposição "O país ser próspero e todos os trabalhadores terem emprego é uma consequência de, nesse país, o direito ser respeitado" pode ser representada simbolicamente por $(Q \wedge R) \rightarrow P$.

Solução:

1. A palavra "mas" tem uma função análoga da palavra "e", assim, o item está correto.
2. Está correto.
3. Se (nesse pais, o direito é respeitado), então ((o país é próspero) e (todos os trabalhadores têm emprego) $P \rightarrow (Q \wedge S)$.

Item errado.

Gabarito: Certo, certo e errado.

5.1.3 Conectivos Lógicos, Proposições Simples e Compostas

1. (**TRT 1a Região 2008 [CESPE]**) Proposições são sentenças que podem ser julgadas como verdadeiras — V — ou falsas — F —, mas não se admitem os julgamentos V e F simultaneamente. As letras maiúsculas do alfabeto, A, B, C etc., são freqüentemente utilizadas para representar proposições simples e, por isso, são denominadas letras proposicionais. Alguns símbolos lógicos utilizados para construir proposições compostas são:

"$\neg$" (não) – usado para negar uma proposição;

"$\wedge$" (e) – usado para fazer a conjunção de proposições;

"$\vee$" (ou) – usado para fazer a disjunção de proposições;

"$\rightarrow$ (implicação) – usado para relacionar condicionalmente as proposições, isto é, "$A \rightarrow B$" significa "se então A ";

A proposição "$\neg A$ tem o valor lógico contrário ao de A;

A proposição "$A \vee B$" terá valor lógico F quando A e B forem F, caso contrário será sempre V;

A proposição "$A \wedge B$" terá valor lógico V quando A e B forem V, caso contrário será sempre F;

A proposição "$A \rightarrow B$" terá valor lógico F quando A for V e B for F, caso contrário será sempre .

Considerando as definições apresentadas no texto anterior, as letras proporcionadas adequadas e a proposição "Nem Antônio é desembargador nem Jonas é juiz", assinale a opção correspondente à simbolização correta dessa proposição.

a) $\neg(A \wedge B)$.

b) $(\neg A) \vee (\neg B)$.

c) $(\neg A) \wedge (\neg B)$.

d) $(\neg A) \rightarrow B$.

e) $\neg[A \vee (\neg B)]$.

Solução: Reescrevendo a frase, sem prejuízo para o seu sentido: (Antônio não é desembargador) e (Jonas não é juiz). Cujas proposições podem ser separadas em $\neg A$: Antônio não é desembargador; $\neg B$: Jonas não é juiz. Então, representando-se as proposições acima em símbolos, têm-se:

$$(\neg A) \wedge (\neg B).$$

Letra C.

2. (Vunesp/TJ-SP) Sabendo que é verdadeira a afirmação "Todos os alunos de Fulano foram aprovados no concurso", então é necessariamente verdade:

a) Fulano não foi aprovado no concurso.

b) Se Roberto não é aluno de Fulano, então ele não foi aprovado no concurso.

c) Fulano foi aprovado no concurso.

d) Se Carlos não foi aprovado no concurso, então ele não é aluno de Fulano.

e) Se Elvis foi aprovado no concurso, então ele é aluno de Fulano.

Solução: Alternativa correta: d) Se Carlos não foi aprovado no concurso, então ele não é aluno de Fulano.

Vamos analisar cada afirmação:

As letras a e c indicam informações sobre Fulano. Contudo, a informação que temos é sobre os alunos de Fulano, e, portanto, não podemos afirmar nada a respeito de Fulano.

A letra b fala sobre Roberto. Como ele não é aluno de Fulano, também não podemos afirmar se é verdade.

A letra d fala que Carlos não foi aprovado. Como todos os alunos de Fulano foram aprovados, logo, ele não pode ser aluno de Fulano. Assim, essa alternativa é necessariamente verdadeira.

Por fim, a letra d também não está correta, pois não nos foi informado que só os alunos de Fulano que foram aprovados.

5.1.4 Tautologia, Contradição e Contingência

1. (FUNDATEC - 2022 - Prefeitura de Viamão - RS - Médico Clínico Geral) A proposição composta que representa uma tautologia é a que está indicada na alternativa:

Alternativas

a) $(\sim p \wedge q) \vee \sim p$

b) $\sim (p \wedge q) \vee \sim p$

c) $\sim ((p \wedge q) \rightarrow p)$

d) $(p \wedge q) \rightarrow p$

e) $(p \wedge q) \leftrightarrow \sim p$

Solução: Vamos construir a tabela verdade das proposições e verificar quais delas é composta apenas pelo valor lógico verdade.

Tabela 5.1: Proposições p, q e $\sim p$.

p	q	$\sim p$	$p \wedge q$	$\sim p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$(\sim p \wedge q) \vee \sim p$	$\sim (p \wedge q) \vee \sim p$	$\sim (p \wedge q) \rightarrow p$	$(p \wedge q) \rightarrow p$	$(p \wedge q) \leftrightarrow \sim p$
V	V	F	V	F	F	F	F	V	V	F
V	F	F	F	F	V	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	V	V	V	F	V	F
F	F	V	F	F	V	V	V	F	V	F

Fonte: FUNDATEC (2022).

Assim, a proposição composta que tem todos os seus valores lógicos como verdade é: $(p \wedge q) \rightarrow p$, letra D.

2. (INSS 2016). Para quaisquer proposições p e q, com valores lógicos quaisquer, a condicional $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ será, sempre, uma tautologia.

a) Certo b) Errado

Solução: Dizemos que uma fórmula proposicional é uma tautologia quando é verdadeira para todas as opções. Vamos então montar a tabela verdade e analisar todos os casos:

Tabela 5.2: Proposições p, q e $q \Rightarrow p$.

p	q	$q \Rightarrow p$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	F	V
F	F	V	V

Fonte: INSS (2016).

Veja que em todos os casos possíveis temos que $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ é uma verdade. Portanto, a resposta correta é letra A.

3. (Livro raciocínio lógico - volume gama) Sobre os conceitos de Tautologia, Contradição e Contingência, é correto o que se afirma:

a) Contradição é toda a proposição em que a última coluna da tabela da verdade é composta somente pelo valor lógico V.

b) Tautologia é toda a proposição em que a última coluna da tabela da verdade é composta somente pelo valor lógico F.

c) A negação de uma proposição tautológica é uma contradição.

d) Contingência é toda a proposição em que a última coluna da tabela da verdade é composta pelos valores V e F, cada um duas vezes obrigatoriamente.

e) A proposição $p \rightarrow \sim p$ é um caso de tautologia

Resposta:

a) Falso. A última coluna é composta somente por F.

b) Falso. A última coluna é composta somente por V.

c) Verdade.

d) Falso. Não necessariamente duas vezes. O correto é pelo menos UMA vez cada valor lógico (V ou F).

e) Falso. Se V(P) = V, então V($p \rightarrow \sim p$) = F e se V(P) = F, então V($p \rightarrow \sim p$) = V.

5.1.5 Negação de Proposições

1. (FGV/TCE-SE) Considere a afirmação: “Se hoje é sábado, amanhã não trabalharei.” A negação dessa afirmação é:

a) Hoje é sábado e amanhã trabalharei.

b) Hoje não é sábado e amanhã trabalharei.

c) Hoje não é sábado ou amanhã trabalharei.

d) Se hoje não é sábado, amanhã trabalharei.

e) Se hoje não é sábado, amanhã não trabalharei.

Solução: Hoje é sábado e amanhã trabalharei. A questão apresenta uma proposição condicional do tipo “Se..., então”, apesar do conectivo "então"não aparecer explícito na frase.

Neste tipo de proposição, podemos apenas assegurar que quando a frase entre o se e o então for verdadeira, a frase depois do então também será verdadeira. Isso pode ser resumido na tabela-verdade das proposições condicionais indicadas abaixo, onde consideramos p : “hoje é sábado” e q : “amanhã não trabalharei”.

Tabela 5.3: Proposições p, q e $p \to q$.

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	V	V

Fonte: FGV/TCE-SE (s.d.)

Queremos a negação da afirmação, ou seja, a proposição falsa. Pela tabela, observamos que a proposição falsa ocorre quando o p é verdadeiro e o q é falso.

Portanto, vamos escrever a negação de q que é: amanhã trabalharei.

Então a negação da frase é: Hoje é sábado e amanhã trabalharei. Ou seja,

$$\sim (p \to q) = (p \wedge \sim q).$$

2. **(Livro raciocínio lógico - volume gama - adaptada)** A negação da sentença “se você estudou lógica então você acertará esta questão” é:

a) se você não acertar esta questão, então você não estudou lógica;

b) você não estudou lógica e acertará esta questão.

c) se você estudou lógica, então não acertará esta questão;

d) você estudou lógica e não acertará esta questão;

e) você não estudou lógica e não acertará esta questão.

Solução: Queremos encontrar uma frase equivalente a negação da condicional. Como $(p \to q) \leftrightarrow (\sim p \wedge q)$, temos que:

$$\sim (p \to q) \leftrightarrow \sim (\sim p \vee q) = (p \wedge \sim q).$$

Considerando,

p : Você estudou lógica. q : Você acertará essa questão.

Portanto,

$(p \wedge \sim q)$: Você estudou lógica e não acertará essa questão. Letra D.

3. **(TJ SP – Vunesp 2017)** Uma negação lógica para a afirmação “João é rico, ou Maria é pobre” é:

(A) João é rico, e Maria não é pobre.

(B) João não é rico, ou Maria não é pobre.

(C) Se João não é rico, então Maria não é pobre.

(D) Se João é rico, então Maria é pobre.

(E) João não é rico, e Maria não é pobre.

Solução: Sejam:

$P =$ João é rico.

$Q =$ Maria é pobre.

Temos que:

$$\sim (P \wedge Q) = \sim P \wedge \sim Q.$$

Negações de P e Q:

$\sim P =$ João não é rico.

$\sim Q =$ Maria não é pobre.

Conclusão:

$\sim P \wedge \sim Q =$ João não é rico E Maria não é pobre.

Resposta: E

4. (TRT 11 – FCC 2017) A frase que corresponde à negação lógica da afirmação: Se o número de docinhos encomendados não foi o suficiente, então a festa não acabou bem, é

a) Se o número de docinhos encomendados foi o suficiente, então a festa acabou bem.

b) O número de docinhos encomendados não foi o suficiente e a festa acabou bem.

c) Se a festa não acabou bem, então o número de docinhos encomendados não foi o suficiente.

d) Se a festa acabou bem, então o número de docinhos encomendados foi o suficiente.

e) O número de docinhos encomendados foi o suficiente e a festa não acabou bem.

Solução: : Sejam:

$P =$ o número de docinhos encomendados não foi o suficiente $Q =$ a festa não acabou bem A frase pode ser representada como $P \Rightarrow Q$. Recordando a sua negação:

$$\sim (P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \sim Q.$$

$P \wedge \sim Q =$ o número de docinhos encomendados não foi o suficiente e a festa acabou bem.

Resposta: B

5.2 Exercícios Propostos

5.2.1 Noções da Lógica Formal e Tradução Simbólica

1. (OBRL 2016) Uma proposição é uma frase afirmativa que pode ser avaliada como verdadeira (V) ou falsa (F), mas não se admitem, para a proposição, ambas as interpretações. Considerando as informações apresentadas acima, julgue os itens subsequentes Considere as seguintes proposições.

I. As palavras acentuadas na antepenúltima sílaba chamam-se paroxítonas.

II. $\sqrt[3]{27} = 3$ e $\left(\dfrac{\sqrt{100}}{\sqrt{25}} = 2\right)$.

III. $(79 - 86 = -7) \to (-5 - 19 \neq -24)$.

IV. O sujeito oculto ou implícito ocorre quando está presente na oração.

V. Existem dois tipos de proposições, as simples e as compostas.

Entre essas proposições, há exatamente duas com interpretação F (falsa). Determine estas duas proposições falsas.

A) I e II **B)** I e IV **C)** III e V **D)** II e IV **E)** I e V

2. (OBRL 2016) Na lógica sentencial, denomina-se proposição uma frase que pode ser julgada como verdadeira (V) ou falsa (F), mas não, como ambas. Assim, frases como "O seu tipo sanguíneo é B+?" e "Será que é hoje o nascimento do bebê" não são proposições porque a primeira é pergunta e a segunda gera dúvida, não podendo assim, ser nem V nem F. As proposições são representadas simbolicamente por letras maiúsculas do alfabeto −A, B, C etc. Uma proposição da forma "A ou B" é F se A e B forem F, caso contrário é V; e uma proposição da forma "Se A então B" é F se A for V e B for F, caso contrário é V. Considerando as informações contidas no texto acima, julgue o item subsequente. Na lista de frases apresentadas a seguir, há exatamente três proposições.

- Se chover hoje então não poderá lavar o carro.
- Paloma vai à praia se e somente se Fonseca levar o protetor solar.
- Será que teremos segundo turno nas eleições 2016?
- Dobre o lençol da cama agora.
- A Fatoração é um dos métodos para identificar se um número é um quadrado perfeito.

Em qual ou quais dos itens acima estão as duas frases que NÃO são proposições?

A) I e IV **B)** II e III **C)** III e V **D)** III e IV **E)** III e V

3. (OBRL 2015) Observe atentamente as alternativas a seguir e determine o que se pede:

I. A representação "$\sim(\sim$A)", refere-se a uma negação.

II. No estudos dos conectivos lógicos, 1ª proposição (V) e 2ª proposição (F), na presença da implicação "Se...então", o valor lógico da proposição composta é falso.

III. Na tradução simbólica, sendo P $=$ Jonas é lindo, sua negação simbólica seria "$\rightarrow$ P".

IV. De acordo com o Princípio do Terceiro Excluído, uma proposição só pode ter 3 valores verdades.

Quantas sentenças são FALSAS?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

4. (OBRL 2014) Uma proposição é uma sentença afirmativa ou negativa que pode ser julgada como verdadeira (V) ou falsa (F), mas não como ambas. Nesse sentido utilize como referência as frases a seguir:

I. $\dfrac{3}{4} \neq \dfrac{6}{8}$.

II. Todo paralelogramo é um retângulo?

III. 10% de 10% de 5 é igual a $0,05$.

IV. $3^2 + 3^2 \neq 6$.

V. Claro que o quociente da divisão de 1 por 16 é igual a $0{,}0625$!

Assinale a única alternativa correta em relação a quantidade de proposições referente aos itens acima:

A) Nenhuma. **C)** Apenas duas. **E)** Quatro.

B) Apenas uma. **D)** Apenas três.

5. (OBRL 2014) Uma proposição é uma afirmação que pode ser julgada como verdadeira (V) ou falsa (F), mas não como ambas. As proposições são usualmente simbolizadas por letras maiúsculas do alfabeto, como, por exemplo, P, Q, R etc. A partir desses conceitos, julgue o próximo item.

I. O Brasil na copa de 2014 empatou com o México em 0×0 na segunda rodada da 1ª fase.

II. Qual o país que sediará a copa do mundo em 2018?

III. O Brasil perdeu da Holanda de 2×0 pela disputa do 3º lugar na copa do mundo de 2014.

IV. Vamos Brasil rumo ao Hexa!

Assinale a alternativa cujos itens acima representam proposições:

A) I e II　**B)** I e III　**C)** II e III　**D)** II e IV　**E)** III e IV

6. (OBRL 2014) Julgue os itens a seguir. Considere a seguinte lista de sentenças:

I. Qual é o seu nome?

II. Adriana, você vai para o exterior nessas férias?

III. Que jogador fenomenal!

IV. Pedro é marceneiro e Francisco é pedreiro.

V. Bom dia!

Nessa situação, é correto afirmar que entre as sentenças acima, apenas uma delas é uma proposição em:

A) I　**B)** II　**C)** III　**D)** IV　**E)** V

7. (FCC – ICMS – SP) Considere as seguintes frases:

I. Ele foi o melhor jogador do mundo em 2005.

II. $\dfrac{x+y}{5}$ é um número inteiro.

III. João da Silva foi o Secretário da Fazenda do Estado de São Paulo em 2000.

É verdade que APENAS

A) I e II são sentenças abertas.

B) I e III são sentenças abertas.

C) II e III são sentenças abertas.

D) I é uma sentença aberta.

E) II é uma sentença aberta.

8. (CESPE – BB) Na lista de frases apresentadas a seguir, há exatamente três proposições.

I. “A frase dentro destas aspas é uma mentira”.

II. A expressão $X + Y$ é positiva.

III. O valor de $4 + 3 = -7$.

IV. Pelé marcou dez gols para a seleção brasileira.

V. O que é isto?

( ) Certo ( ) Errado

9. **(CESPE)** A sequência de frases a seguir contém exatamente duas proposições.

I. A sede do TRT/ES localiza-se no município de Cariacica.
II. Por que existem juízes substitutos?
III. Ele é um advogado talentoso.

( ) Certo ( ) Errado

10. **(Livro raciocínio lógico - volume gama)** Na sequência de frases abaixo, há três proposições.

I. Quantos tribunais regionais do trabalho há na região Sudeste do Brasil?
II. O TRT/ES lançou edital para preenchimento de 200 vagas.
III. Se o candidato estudar muito, então ele será aprovado no concurso do TRT/ES.
IV. Indivíduo com 50 anos de idade ou mais não poderá se inscrever no concurso do TRT/ES.

( ) Certo ( ) Errado

11. **(UEPA – PC – PA – 2013)** Considere as proposições seguintes:

P: Paulo apresentar uma queixa

Q: o Delegado investigará

R: Ricardo será preso

A linguagem simbólica da proposição composta "Não é o caso em que, se Paulo apresentar uma queixa, então, o delegado investigará e Ricardo será preso" é:

A) $\sim [P \leftrightarrow (Q \wedge R)]$

B) $\sim [P \rightarrow (Q \wedge R)]$

C) $\sim [P \vee (Q \wedge R)]$

D) $\sim [P \wedge (Q \vee R)]$

E) $\sim [P \rightarrow (Q \vee R)$

12. **(PONTUA – TER – SC – 2011)** Sejam as seguintes proposições P: Marcos é alto, Q: Marcos é elegante. Dada a seguinte proposição:

Não é verdade que Marcos é baixo ou elegante.

Assinale a alternativa abaixo que traduz de maneira CORRETA a proposição acima para a linguagem simbólica:

A) $\sim P \wedge \sim Q$

B) $P \vee (\sim P \wedge Q)$

C) $\sim (\sim P \vee Q)$

D) $\sim (\sim P \vee \sim Q)$

5.2.2 Conectivos Lógicos, Proposições Simples e Compostas

1. (OBRL 2016) Uma proposição é uma frase afirmativa que pode ser avaliada como verdadeira (V) ou falsa (F), mas não se admitem, para a proposição, ambas as interpretações. Considerando as informações apresentadas acima, julgue os itens subsequentes. Considere as seguintes proposições.

I. A palavra "telégrafo" é proparoxítona.

II. $(17 - 9 = 8) \wedge (7 - 12 = 6)$

III. Ou a porta USB é a melhor ou a porta HDMI é a melhor.

IV. $(39 : 3 = 13) \wedge (17 + 13 = 30)$

V. Tocantins é um estado da região centro oeste.

Entre essas proposições, há exatamente duas com interpretação F (falsa). Determine estas duas proposições falsas.

A) I e II **B)** II e IV **C)** II e V **D)** II, III **E)** III e V

2. (OBRL 2014) A sentença "Não é verdade que nas eleições 2014 para presidente, Dilma Rousseff (PT) conquistou 11 capitais e a candidata Marina Silva (PSB) não conquistou 5 capitais" é representada corretamente pela expressão simbólica.

A) $(\sim P \wedge Q)$

B) $\sim (\sim P \wedge \sim Q)$

C) $(\sim P \vee Q)$

D) $\sim (\sim P \vee \sim Q)$

E) $\sim (P \wedge \sim Q)$

3. (OBRL 2014) Ao empregar os símbolos A, B e C para as proposições simples "André é vegetariano", "André é carnívoro" e "André é onívoro" respectivamente, analise a frase abaixo: "André é onívoro ou não é carnívoro e não é vegetariano" É correto simbolizar a proposição composta acima por:

A) $((\sim C \wedge \sim B) \vee \ A)$

B) $\sim ((\sim C \vee \sim B) \wedge \sim A)$

C) $((C \wedge \sim B) \vee \ A)$

D) $((C \vee \sim B) \wedge \sim A)$

E) $((C \vee \sim B) \wedge \sim A$

4. (OBRL 2014) Considere que as letras "R" e "S" representam proposições simples e os símbolos $\wedge$ e $\vee$, são operadores lógicos e significam "e" e "ou" respectivamente e que através deles novas proposições são construídas, as chamadas proposições compostas. Na presença do operador lógico "e" ($\wedge$), para uma proposição composta ser (V) verdadeira, ele exige que as duas proposições simples que o compõem também sejam (V) verdadeiras. Com o operador lógico "ou" ($\vee$) para uma proposição composta ser (V) verdadeira, precisamos ter pelo menos uma das duas proposições simples (V) verdadeiras. Considere que a proposição simples "R" é verdadeira e que a proposição simples "S" é falsa e analise as seguintes proposições compostas abaixo:

- R $\wedge$ S
- R $\wedge$ S
- (R $\vee$ S)
- (R $\wedge$ S)

Quantas dessas proposições compostas são verdadeiras?

A) Nenhuma.

B) Apenas uma.

C) Apenas duas.

D) Apenas três.

E) Quatro

5. **(OBRL 2014)** Dadas às proposições lógicas simples: A, B, C, e D, com os seguintes valores lógicos: V, F, V, V com V indicando que a proposição é verdadeira e F, indicando que é falsa. Observe as três proposições compostas abaixo:

[($\sim$ B $\leftrightarrow$ C)], [($\sim$ A $\rightarrow$ D)], [($\sim$ A $\vee$ B) $\rightarrow$ (C $\wedge$ D)]

Os valores lógicos obtidos das seguintes proposições compostas são respectivamente:

A) V, F, F

B) V, V, V

C) V, F, V

D) F, F, V

E) F, V, F

6. **(VUNESP – PC – SP – Delegado de Polícia – 2014)** Os conectivos ou operadores lógicos são palavras (da linguagem comum) ou símbolos (da linguagem formal) utilizados para conectar proposições de acordo com regras formais preestabelecidas. Assinale a alternativa que apresenta exemplos de conjunção, negação e implicação, respectivamente.

A) $\sim P, P \vee Q, P \wedge Q$

B) $P \wedge Q, \sim P, P \rightarrow Q$

C) $P \rightarrow Q, P \vee Q, \sim P$

D) $P \vee P, P \to Q, \sim Q$

E) $P \vee Q, \sim Q, P \vee Q$

7. (CESPE – CADE – 2014) Considerando os conectivos lógicos usuais e que as letras maiúsculas representem proposições lógicas simples, julgue o item seguinte acerca da lógica proposicional. A sentença "Os candidatos aprovados e nomeados estarão subordinados ao Regime Jurídico Único dos Servidores Civis da União, das Autarquias e das Fundações Públicas Federais" é uma proposição lógica composta.

( ) Certo ( ) Errado

8. (IBFC – SEPLAG – MG – 2013) Se o valor lógico de uma proposição P é verdadeiro e o valor lógico de uma proposição Q é falso, então é correto afirmar que:

A) o Condicional entre P e Q, nessa ordem, é verdade.

B) a Conjunção entre P e Q, nessa ordem, é verdade.

C) a Disjunção entre P e Q, nessa ordem é verdade.

D) o Bicondicional entre P e Q, nessa ordem, é verdade.

9. (CESPE – PC – DF – 2013) Considerando que P e Q representem proposições conhecidas e que V e F representem, respectivamente, os valores verdadeiro e falso, julgue o próximo item. Se P for (F) e $P \vee Q$ for (V), então Q é (V).

( ) Certo ( ) Errado

10. (IBFC – EBSERH – 2013) Se o valor lógico de uma proposição p é verdadeiro e o valor lógico de uma proposição q é falso então o valor lógico da proposição composta $[(p \to q) \vee \sim p] \wedge \sim q$ é:

A) Falso e verdadeiro

B) Verdadeiro

C) Falso

D) Inconclusivo

11. (CESGRANRIO – PETROBRÁS) Sabendo que as proposições p e q são verdadeiras e que as proposições r e s são falsas, assinale a opção que apresenta valor lógico falso nas proposições abaixo.

A) $\sim r \to p \wedge q$

B) $(r \to s) \wedge (p \wedge q)$

C) $(s \leftrightarrow r) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$

D) $\sim ((r \to p) \vee (s \leftrightarrow q))$

E) $r \to q \leftrightarrow (\sim p \leftrightarrow r)$

12. (ESAF – APOFP – SEFAZ – SP) Assinale a opção verdadeira.

A) $3 = 4$ e $3 + 4 = 9$

B) Se $3 = 3$, então $5 + 4 = 9$

C) Se $3 = 4$, então $3 + 4 = 9$

D) $3 = 4$ ou $3 + 4 = 9$

E) $3 = 3$ se e somente se $3 + 4 = 9$

5.2.3 Tautologia, Contradição e Contingência

1. (OBRL 2016) Considere as afirmações abaixo.

I. 8 é o número de linhas de uma tabela-verdade, que possui 4 proposições simples.

II. A proposição é verdadeira.

Se P e Q são proposições, então a proposição "$\sim [\sim Q \vee (P\vee \rightarrow Q)]$" é uma tautologia. É verdade o que se afirma APENAS em:

A) I **B)** II **C)** III **D)** I e II **E)** II e III

2. (OBRL 2016) Assinale a proposição que satisfaz a tabela-verdade seguinte:

Tabela 5.4: Proposições A, B e $\sim A$.

A	B	$\sim A$	?
V	V	F	V
V	F	F	V
F	V	V	V
F	F	V	F

Fonte: OBRL (2016).

A) $A \wedge B$ **B)** $\sim A \vee B$ **C)** $\sim A \rightarrow B$ **D)** $B \rightarrow\sim A$ **E)** $A \leftrightarrow B$

3. (OBRL 2014) Considere que cada pessoa cujo nome está indicado na tabela abaixo exerça apenas uma profissão. Se a célula que é o cruzamento de uma linha com uma coluna apresenta o valor V, então a pessoa correspondente àquela linha exerce a profissão correspondente àquela coluna; se o valor for F, então a pessoa correspondente à linha não exerce a profissão correspondente àquela coluna. Assim, de acordo com a tabela, Barbara é cardiologista, Bianca não é dentista nem Bruno é pneumologista.

Tabela 5.5: Problema dentista, pneumonologista e cardiologista.

NOME	DENTISTA	PNEUMOLOGISTA	CARDIOLOGISTA
BRUNO		F	
BARBARA			V
BIANCA	F		

Fonte: OBRL (2014).

Considerando as informações e a tabela apresentadas acima, é correto afirmar que:

A) "Bianca não é cardiologista" é uma proposição simples V.

B) "Bruno não é dentista" é uma proposição simples V.

C) "Bianca não é cardiologista" é uma frase que não é proposição.

D) "Bruno não é dentista" é uma proposição simples F.

E) "Bianca não é cardiologista" é uma frase imperativa.

4. (OBRL 2014) Na construção de tabelas verdades o número de linhas de uma tabela verdade será determinado pelo número de proposições simples que aparecerem em uma proposição composta. Considerando uma proposição composta "A" com 3 átomos, uma composta "B" com 5 átomos e outra composta "C" com 4 átomos, indique o número de linhas de suas respectivas tabelas verdades e marque a única alternativa correta.

A) A terá 3 linhas, B terá 5 linhas e C terá 4 linhas.

B) A terá 9 linhas, B terá 32 linhas e C terá 12 linhas.

C) A terá 8 linhas, B terá 32 linhas e C terá 24 linhas.

D) A terá 9 linhas, B terá 15 linhas e C terá 32 linhas.

E) A terá 8 linhas, B terá 32 linhas e C terá 16 linhas.

5. (IBFC – EBSERH – 2013) Se o valor lógico de uma proposição P é verdadeira e o valor lógico de uma proposição Q é falsa, podemos afirmar que:

A) A Conjunção entre as duas é verdadeira.

B) P Condicional Q é verdadeira

C) P Bicondicional Q é falsa.

D) A Disjunção entre as duas é falsa.

6. (CESPE – TCE – RO – 2013) A tabela abaixo corresponde ao início da construção da tabela-verdade da proposição S, composta das proposições simples P, Q e R. Julgue os itens seguintes a respeito da tabela-verdade de S.

Tabela 5.6: Proposições P, Q, R e S.

P	Q	R	S
V	V	V	
V	V	F	
V	F	V	
V	F	F	
F	V	V	
F	V	F	
F	F	V	
F	F	F	

Fonte: CESPE – TCE – RO (2013).

Se $S = Q \leftrightarrow (P \vee R)$, a coluna correspondente à proposição S, depois de preenchida a tabela-verdade, mostrará, de cima para baixo e nesta mesma ordem, os seguintes elementos: V, F, F, F, V, V, F, V.

( ) Certo ( ) Errado

7. (CESPE – STJ) O julgamento de uma proposição composta depende do julgamento que se faz de suas proposições componentes mais simples. Por exemplo, considerando-se todos os possíveis julgamentos, ou valorações, V ou F das proposições simples A e B, tem-se a seguinte tabela-verdade para as proposições compostas indicadas.

Tabela 5.7: Proposições A, B e $\sim A$.

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$\sim A$	$A \rightarrow B$
V	V	V	V	F	V
V	F	F	V		F
F	V	F	V	V	V
F	F	F	F		V

Fonte: CESPE – STJ (s.d.).

A proposição "Se 9 for par e 10 for ímpar, então $10 < 9$" é uma proposição valorada como F.

( ) Certo ( ) Errado

8. (CESPE – SEFAZ – ES) Considerando os símbolos lógicos $\sim$ (negação), $\wedge$ (conjunção), $\vee$ (disjunção), $\rightarrow$ (condicional) e as proposições

$S : (p\wedge \sim q) \vee (p \wedge r) \rightarrow q \vee r;$

$T : ((p\wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge r)) \wedge (\sim q\wedge \sim r),$

Julgue o item que se segue: As tabelas-verdade de S e de T possuem cada uma, 16 linhas.

( ) Certo ( ) Errado

9. **(CESPE – MEC – 2014)** Considerando a proposição P: "Nos processos seletivos, se o candidato for pós-graduado ou souber falar inglês, mas apresentar deficiências em língua portuguesa, essas deficiências não serão toleradas", julgue os itens seguintes acerca da lógica sentencial. A tabela verdade associada à proposição P possui mais de 20 linhas.

( ) Certo ( ) Errado

10. **(STJ)** Considerando-se os possíveis valores lógicos V e F para as proposições A e B, complete as colunas da tabela abaixo e verifique se a ultima coluna da tabela abaixo é correspondente a proposição $[A \vee (\sim B)] \rightarrow [\sim (A \vee B)]$.

Tabela 5.8: Proposições A e B.

A	B	$\sim B$	$(A \vee \sim B)$	$(A \vee B)$	$\sim (A \vee B)$	$[A \vee (\sim B)] \rightarrow [\sim (A \vee B)]$
V	V					F
V	F					F
F	V					V
F	F					V

Fonte: STJ (s.d.).

5.2.4 Implicação e Equivalência

1. **(OBRL – 2021)** Dizer que a afirmação:

TODA PROPOSIÇÃO COMPOSTA NA PRESENÇA DE UMA CONJUNÇÃO "E" SERÁ VALORADA COMO VERDADEIRA.

É falsa, do ponto de vista lógico, equivale a dizer que a seguinte afirmação é verdadeira:

a) Nenhuma proposição composta na presença de uma conjunção "e" será valorada como verdadeira.

b) Pelo menos uma será valorada como verdadeira, mas não será uma proposição composta na presença de uma conjunção "e".

c) Nenhuma conjunção "e" será valorada como verdadeira na presença de uma proposição composta.

d) Toda não-proposição composta na presença de uma conjunção "e" não será valorada como verdadeira.

e) Pelo menos uma proposição composta na presença de uma conjunção "e" não será valorada como verdadeira

2. (OBRL – 2021) Um professor deu a seguinte declaração em uma entrevista:

"SE VOCÊ ESTUDAR E TIVER MAIS CERTEZAS DO QUE DÚVIDAS, ENTÃO SAIBA QUE, QUEM TEM CERTEZA DEMAIS, FREQUENTEMENTE ESTÁ ENGANADO"

Uma proposição logicamente equivalente à do professor é:

a) Se quem tem certezas demais, frequentemente está enganado, então estudando terá mais certezas do que dúvidas.

b) Se você estudar e não tiver mais certezas do que dúvidas, então saiba que, quem tem certezas demais, frequentemente não estará enganado.

c) Se quem tem certezas demais, frequentemente não está enganado, então estudando não terá mais certezas do que dúvidas.

d) Você estuda e tem menos certezas do que dúvidas, e quem têm certezas demais, frequentemente está enganado.

e) Ou você estuda para ter mais certezas do que dúvidas, ou frequentemente está enganado.

3. (OBRL – 2021) Em certa olimpíada as provas são realizadas em equipes e cada uma com seu respectivo nome, são eles: Mestres da Lógica Clássica, Aprendizes de Aristóteles, Discípulos de Newton da Costa e Prodígios da Lógica Paraconsistente. Abaixo temos algumas afirmações, são elas:

- Todos os Mestres da Lógica Clássica são Aprendizes de Aristóteles;
- Todos os Discípulos de Newton da Costa são Aprendizes de Aristóteles;
- Todos os Prodígios da Lógica Paraconsistente são Mestres da Lógica Clássica;
- Todos os Discípulos de Newton da Costa são Prodígios da Lógica Paraconsistente.

Sobre as equipes desta olimpíada, é correto afirmar que:

a) Todos os Prodígios da Lógica Paraconsistente são Aprendizes de Aristóteles e são Discípulos de Newton da Costa.

b) Todos os Mestres da Lógica Clássica são Prodígios da Lógica Paraconsistente e alguns Mestres da Lógica Clássica podem não ser Discípulos de Newton da Costa.

c) Todos os Discípulos de Newton da Costa são Mestres da Lógica Clássica e são Aprendizes de Aristóteles.

d) Todos os Aprendizes de Aristóteles são Discípulos de Newton da Costa e são Prodígios da Lógica Paraconsistente.

e) Todos os Mestres da Lógica Clássica são Discípulos de Newton da Costa e são Prodígios da Lógica Paraconsistente.

5.2.5 Quantificadores e Negação

1. **(IBFC - 2017 - SEDUC-MT - Professor de Educação Básica - Ciências Físicas e Biológicas)** De acordo com a lógica proposicional, a negação da frase “O advogado não foi convincente e a petição foi cancelada”.

   a) Se o advogado foi convincente, então a petição não foi cancelada.

   b) Se o advogado não foi convincente, então a petição não foi cancelada.

   c) O advogado não foi convincente se, e somente se, a petição não foi cancelada.

   d) Se a petição não foi cancelada, então o advogado foi convincente.

   e) Se a petição foi cancelada, então o advogado não foi convincente.

2. **(OBMEP - 2022)** Admita que sejam válidas ambas as seguintes sentenças:

   - Pinóquio sempre mente;
   - Pinóquio diz: “Todos os meus chapéus são verdes”.

   Podemos concluir dessas duas sentenças que:

   a) Pinóquio tem pelo menos um chapéu.

   b) Pinóquio tem apenas um chapéu verde.

   c) Pinóquio não tem chapéu.

   d) Pinóquio tem pelo menos um chapéu verde.

   e) Pinóquio não tem chapéus verdes.

3. **(Auxiliar de Enfermagem, PRODESP, ZAMBINI, 2010)** A negação da proposição “todas as questões da prova são difíceis” é:

   a) Algumas questões das provas são difíceis.

   b) Existe questões difíceis.

   c) Nenhuma questão da prova é difícil.

   d) Algumas questões da prova não são difíceis.

   e) Nenhuma questão da prova é difícil.

5.3 Exercícios de Aplicação

5.3.1 Noções da Lógica formal e Tradução Simbólica

1. **(OBRL 2018)** Define-se sentença (proposição) como qualquer oração que tenha “sujeito” (o termo a respeito do qual se declara alguma coisa) e “predicado” (o que se declara sobre

o sujeito), e este precisa admitir um dos dois valores lógicos existentes: Verdadeiro (V) ou Falso (F). Na relação que segue há sentenças:

I. Tomara que neve hoje.
II. Quantos anos você tem?
III. Obedeça agora.
IV. Jucelino Kubitschek foi Presidente do Brasil!
V. Os bombeiros são corajosos.
VI. O sedentarismo não é saudável.

De acordo com a definição dada, é correto afirmar que, da relação acima, são sentenças APENAS os itens:

A) I, III e V **C)** III, V e VI **E)** V e VI
B) II, III e V **D)** IV e VI

2. **(OBRL 2016)** Na lógica sentencial, denomina-se proposição uma frase que pode ser julgada como verdadeira (V) ou falsa (F), mas não, como ambas. Assim, frases como "Quando a prova estará pronta?" e "Será que vou encontrar meu príncipe encantado" não são proposições porque a primeira é pergunta e a segunda gera dúvida, não podendo assim, ser nem V nem F. As proposições são representadas simbolicamente por letras maiúsculas do alfabeto — P, Q, R etc. Uma proposição da forma "P ou Q" é F se P e Q forem F, caso contrário é V; e uma proposição da forma "Se Q então R" é F se Q for V e R for F, caso contrário é V. Considerando as informações contidas no texto acima, julgue o item subsequente. Na lista de frases apresentadas a seguir, há exatamente três frases que NÃO são proposições.

I. Se o dentista faltar hoje então serei atendido apenas no próximo mês.
II. Será que Beatriz prefere viajar pelo litoral?
III. Ficou linda a mini miss universo!
IV. O computador funcionará muito bem se e somente se souber formatá-lo.
V. Terminem ainda hoje o serviço.

Em quais dos itens acima estão as duas frases que são proposições?

A) I e IV **B)** II e III **C)** II e V **D)** III e IV **E)** I e V

3. **(OBRL 2017)** Entendendo o uso dos conectivos lógicos, podemos traduzir proposições compostas para uma linguagem simbólica através da lógica sentencial. Se uma proposição corresponde a uma frase declarativa de sentido completo, qual a opção que melhor representa a frase: "Não é verdade que se o raciocínio logico ajuda no pensar, a matemática não é ruim". Obs. ($\neg$) simbolo da negação.

A) $\neg a \vee b$ **C)** $\neg(a \rightarrow \neg b)$ **E)** $\neg a \rightarrow b$

B) $\neg a \rightarrow b$ **D)** $(b \wedge a) \rightarrow b$

4. **(OBRL 2016)** Na lógica sentencial, denomina-se proposição uma frase que pode ser julgada como verdadeira (V) ou falsa (F), mas não, como ambas. Assim, frases como "Quando irá chover?" e "Estou em dúvida se esta laranja é azeda" não são proposições porque a primeira é pergunta e a segunda não pode ser nem V nem F. As proposições são representadas simbolicamente por letras maiúsculas do alfabeto — A, B, C etc. Uma proposição da forma "A ou B" é F se A e B forem F, caso contrário é V; e uma proposição da forma "Se A então B" é F se A for V e B for F, caso contrário é V. Considerando as informações contidas no texto acima, julgue o item subsequente. Na lista de frases apresentadas a seguir, há exatamente duas proposições.

I. Vamos para praia imediatamente!

II. Adriana é Engenheira e Orlando é Fisioterapeuta.

III. Será que a primavera ocorrerá antes do inverno?

IV. Faça seu dever corretamente.

V. Axioma é uma verdade que é incontestável.

Em qual ou quais dos itens acima estão as duas proposições?

A) I, II e III **B)** II e III **C)** III e V **D)** II, IV e V **E)** II e V

5. **(OBRL 2015)** Observe atentamente as alternativas abaixo e determine o que se pede: Na frase "João é alto", temos um exemplo de uma proposição composta. Sendo $A = 8$ é par, logo $\sim (\sim A) = 8$ não é par.

Sendo "A ou B" uma proposição composta na presença do conectivo "ou", ela será verdadeira apenas quando a proposição simples "A" for verdadeira "V" e a proposição simples "B" for falsa "F". De acordo com a Lei da Funcionalidade determinamos primeiro o valor lógico da proposição composta, para então determinar o valor lógico das proposições simples constituintes. Quantas sentenças são FALSAS?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

6. **(OBRL 2014)** Uma proposição de uma linguagem é uma expressão de tal linguagem que pode ser classificada como verdadeira ou falsa. Com base nessa definição, analise as seguintes expressões:

I. $4 + 6 < 11$

II. Que horas são?

III. Feche a porta do avião.

IV. As baleias são animais mamíferos.

V. 33 é divisível por 13.

É correto afirmar que são proposições APENAS as expressões:

A) I, III e IV. **B)** II e V. **C)** II e IV. **D)** I, IV e V. **E)** II, III e V.

7. (OBRL 2014) Considere que as letras "a", "b" e "c" representam proposições simples e os símbolos $\sim$, $\wedge$ e $\vee$ são operadores lógicos e significam "não", "e" e "ou" respectivamente e através deles novas proposições são construídas, as chamadas proposições compostas. Na presença do operador lógico "e" ($\wedge$), para uma proposição composta ser (V) verdadeira, ele exige que as duas proposições simples que o compõem também sejam (V) verdadeiras. Com o operador lógico "ou" ($\vee$) para uma proposição composta ser (V) verdadeira, precisamos ter pelo menos uma das duas proposições simples (V) verdadeiras. Na lógica proposicional a expressão do raciocínio por meio de proposições são avaliadas (valoradas) como verdadeiras (V) ou falsas (F), mas nunca ambos.

Considere as afirmações abaixo:

I. A raiz de 1024 é igual a 32.

II. $-3^3 = -27 \vee 3^{-3} = -27$.

III. Se "P" é a proposição "A argentina é a melhor seleção do mundo", então a proposição "$\sim$(P)" será igual a "A argentina não é a melhor seleção do mundo".

É verdade o que se afirma APENAS em:

A) I

B) II

C) III

D) I e II

E) I e III

8. (BB – CESPE) Há duas proposições no seguinte conjunto de sentenças:

I. O BB foi criado em 1980.

II. Faça seu trabalho corretamente.

III. Manuela tem mais de 40 anos de idade.

( ) Certo ( ) Errado

9. (TRT 17ª Região) Na sequência de frases abaixo há três proposições.

I. Quantos tribunais regionais do trabalho há na região Sudeste do Brasil?

II. O TRT/ES lançou edital para preenchimento de 200 vagas.

III. Se o candidato estudar muito, então ele será aprovado no concurso do TRT/ES.

IV. Indivíduo com 50 anos de idade ou mais não poderá se inscrever no concurso do TRT/ES.

( ) Certo ( ) Errado

10. (CESPE – Banco do Brasil) A frase — "Quanto subiu o percentual de mulheres assalariadas nos últimos 10 anos?" não pode ser considerada uma proposição.

( ) Certo ( ) Errado

11. (SEGER) Na lista de afirmações abaixo, há exatamente 3 proposições.

I. Mariana mora em Piúma.

II. Em Vila Velha, visite o Convento da Penha.

III. A expressão algébrica $x + y$ é positiva.

IV. Se Joana é economista, então ela não entende de políticas públicas.

V. A SEGER oferece 220 vagas em concurso público.

( ) Certo ( ) Errado

12. (FCC – TCE – PB) Sabe-se que sentenças são orações com sujeito (o termo a respeito do qual se declara algo) e predicado (o que se declara sobre o sujeito). Na relação seguinte há expressões e sentenças:

1. Três mais nove é igual a doze.
2. Pelé é brasileiro.
3. O jogador de futebol.
4. A idade de Maria.
5. A metade de um número.
6. O triplo de 15 é maior do que 10.

É correto afirmar que, na relação dada, são sentenças apenas os itens de números:

A) 1, 2 e 6. **B)** 1, 2, 5 e 6. **C)** 2, 3 e 4. **D)** 2, 3, 4 e 5. **E)** 3, 4 e 5.

13. **(FCC – TRF)** Sabe-se que sentenças são orações com sujeito (o termo a respeito do qual se declara algo) e predicado (o que se declara sobre o sujeito). Na relação seguinte há expressões e sentenças:

1. A terça parte de um número.
2. Jasão é elegante.
3. Mente sã em corpo são.
4. Dois mais dois são 5.
5. Evite o fumo.
6. Trinta e dois centésimos.

É correto afirmar que, na relação dada, são sentenças APENAS os itens de números:

A) 1, 4 e 6 **B)** 2, 4 e 5 **C)** 2, 3 e 5 **D)** 3 e 5 **E)** 2 e 4

14. Considere as sentenças a seguir:

I. Faça a prova ou vá para casa!
II. Se a taxa de juros sobe, então o poder de compra diminui.
III. Qual a tua idade?

É CORRETO afirmar que:

A) apenas II não é uma proposição.
B) apenas I e III não são proposições.
C) apenas I e III são proposições
D) I, II e III não são proposições.
E) I, II e III são proposições

15. **(FCC – PM – Bahia)** Define-se sentença como qualquer oração que tem sujeito (o termo a respeito do qual se declara alguma coisa) e predicado (o que se declara sobre o sujeito). Na relação que segue há expressões e sentenças:

1. Tomara que chova.
2. Que horas são?
3. Três vezes dois são cinco.
4. Quarenta e dois detentos.
5. Policiais são confiáveis.
6. Exercícios físicos são saudáveis.

De acordo com a definição dada, é correto afirmar que, dos itens da relação acima, são sentenças APENAS os de números:

A) 1, 3 e 5 **B)** 2, 3 e 5 **C)** 3, 5 e 6 **D)** 4 e 6 **E)** 5 e 6

5.3.2 Conectivos Lógicos, Proposições Simples e Compostas

1. (OBRL 2016) Os conectivos ou operadores lógicos são palavras (da linguagem comum) ou símbolos (da linguagem formal) utilizados para conectar proposições de acordo com regras formais preestabelecidas. Assinale a alternativa que apresenta exemplos de disjunção, implicação e negação, respectivamente.

A) $\sim P; P \vee Q; P \wedge Q$

B) $P \wedge Q; P \rightarrow Q; \sim P$

C) $P \vee Q; P \wedge Q; \sim P$

D) $P \rightarrow Q; P \wedge Q; \sim Q$

E) $P \vee Q; P \rightarrow Q; \sim Q$

2. (OBRL 2018) O valor lógico de uma proposição composta será determinado não só pelo valor lógico de cada proposição simples que o compõe, mas também do conectivo lógico que aparecer. Para cada conectivo lógico que estiver presente em uma proposição composta, poderemos a chamar de:

a) Conjunções: $a \wedge b$ (lê-se: a e b)

b) Disjunção Inclusiva: $a \vee b$ (lê-se: a ou b)

c) Implicação ou Condicional: $a \rightarrow b$ (lê-se: se a então b)

d) Equivalência ou Bicondicional: $a \leftrightarrow b$ (lê – se: a se, e somente se, b)

Quando utilizamos o conectivo lógico "se...então" chamado de implicação, ligando duas proposições simples e distintas quaisquer, representadas pelas letras "β" e "Ω", formamos uma proposição composta Ψ. Determine a alternativa INCORRETA na presença da implicação:

A) Quando β for verdadeiro e Ω for falso, Ψ será uma proposição falsa.

B) Quando β e Ω forem proposições falsas, Ψ será uma proposição verdadeira.

C) Quando β for falso e Ω for verdadeiro, Ψ será uma proposição verdadeira.

D) Quando β e Ω forem proposições verdadeiras, Ψ será uma proposição verdadeira.

E) Quando β for falso e Ω for verdadeiro, Ψ será uma proposição falsa.

3. (OBRL 2016) Uma proposição é uma frase afirmativa que pode ser avaliada como verdadeira (V) ou falsa (F), mas não se admitem, para a proposição, ambas as interpretações. Considerando as informações apresentadas acima, julgue os itens subsequentes. Considere as seguintes proposições.

I. Na separação silábica de “ANSEIO” temos 4 sílabas.

II. $(11 - 18 = -7) \rightarrow (25 - 19 \neq 6)$

III. Ou (7 é primo) ou $(-13 < -15)$

IV. 125 é um quadrado perfeito.

V. Palavras que se encaixam ao lado de um substantivo e expressam qualidade são chamadas de adjetivo.

Entre essas proposições, há exatamente duas com interpretação V (verdadeiras). Determine estas duas proposições verdadeiras.

A) I e II

B) II e IV

C) III e V

D) I e III

E) I e V

4. (OBRL 2014) Considere as afirmações abaixo.

I. O número de linhas de uma tabela-verdade é sempre um número ímpar.

II. A proposição “$(1 < -1) \leftrightarrow (8 - 3 = 5)$” é verdadeira.

III. A proposição “Se 8 é primo então 8 é par” é verdadeira.

É verdade o que se afirma APENAS em:

A) I **B)** II **C)** III **D)** I e II **E)** I e III

5. (Livro raciocínio lógico - volume gama - adaptada) Sejam P e Q duas proposições simples e distintas qualquer, então analisando as alternativas identifique aquela que garanti uma proposição composta verdadeira na presença de uma conjunção “e”:

A) Quando P for verdadeira e Q for falsa a proposição composta será verdadeira.

B) Quando P for falsa e Q for verdadeira a proposição composta será verdadeira.

C) Quando P for falsa e Q for falsa a proposição composta será verdadeira.

D) Quando P for verdadeira e Q for verdadeira a proposição composta será falsa.

E) Quando P for verdadeira e Q for verdadeira a proposição composta será verdadeira.

6. (Livro raciocínio lógico - volume gama - adaptada) Quando acrescentamos o conectivo lógico “ou” chamado de disjunção, ligando duas proposições simples e distintas qualquer representadas pelas letras “R” e “S”, formamos uma proposição composta. Determine a alternativa correta na presença da disjunção inclusiva:

A) Quando R for verdadeira e S for falsa a proposição composta será falsa.

B) Quando R for falsa e S for verdadeira a proposição composta será falsa.

C) Quando R for falsa e S for falsa a proposição composta será verdadeira.

D) Quando R for falsa e S for falsa a proposição composta será falsa.

E) Quando R for verdadeira e S for verdadeira a proposição composta será falsa.

7. **(Livro raciocínio lógico - volume gama - adaptada)** Implicação é como é chamada a proposição composta que possui o "Se...então" como conectivo lógico. A letra "P" irá representar nossa proposição composta, veja:

P = "Se R então S"

Nesta proposição chamaremos o R de (condição) e o S de (conclusão), sem esquecer-se de admitir R $\neq$ S. Nestas condições, assinale a única correta:

A) P será verdadeira somente se a condição for falsa, independentemente de a conclusão ser verdadeira ou falsa.

B) P será falsa sempre que a conclusão for verdadeira, independentemente de a condição ser verdadeira ou falsa.

C) P será verdadeira somente se R e S tiverem valores lógicos iguais, ou seja, R e S ambas verdadeiras ou então ambas falsas.

D) P será falsa somente quando a condição e a conclusão tiverem valores lógicos opostos, ou seja, R verdadeira com S falsa ou R falsa com S verdadeira.

E) P será falsa somente quando a conclusão for falsa

8. Determine a proposição composta abaixo que é a única verdadeira:

A) 7 é par e 2 é par.

B) 7 é ímpar e 2 é ímpar.

C) 7 é par e 2 é ímpar.

D) 7 é ímpar e 2 é par.

E) 7 e 2 são pares.

9. Qual das alternativas abaixo é uma posições composta falsa?

A) 17 é ímpar ou 9 é ímpar.

B) 17 é par ou 9 é ímpar.

C) 17 é par ou 9 é par.

D) $17 \geq 9$.

E) $17 \leq 9$.

10. Qual das alternativas abaixo na presença de uma disjunção exclusiva é uma posições composta verdadeira?

A) Ou 34 é ímpar ou $7 > 20$.

B) Ou 34 é par ou 7 é ímpar.

C) Ou 34 é inteiro ou $7 < 20$.

D) Ou $34 > 40$ ou 7 é par.

E) Ou 34 é ímpar ou 7 é inteiro.

5.3.3 Tautologia, Contradição e Contingência

1. **(OBRL 2016)** Assinale qual a proposição que satisfaz a tabela-verdade seguinte:

Tabela 5.9: Proposições A, B, $\sim A$ e $\sim B$.

A	B	$\sim A$	$\sim B$	$?$
V	V	F	F	V
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

Fonte: OBRL (2016).

A) $A \wedge \sim B$

B) $(A \vee \sim A) \rightarrow B$

C) $\sim A \wedge (B \vee \sim B)$

D) $\sim B \rightarrow (A \vee \sim A)$

E) $A \rightarrow B$

2. Considere as afirmações abaixo.

I. A proposição $(\sqrt{2025} < 50) \rightarrow (4^3 = 81)$ é falsa.

II. Se R e S são proposições simples, então a proposição composta $[\sim S \rightarrow (R \vee \sim R)]$ é uma tautologia.

III. Para construir uma tabela verdade através de uma proposição composta que possui 5 proposições simples, será necessário que ela tenha 16 linhas.

É verdade o que se afirma APENAS em:

A) I **B)** I, II e III **C)** II **D)** I e II **E)** II e III

3. **(OBRL 2014)** Considere que cada pessoa cujo nome está indicado na tabela abaixo exerça apenas uma profissão. Se a célula que é o cruzamento de uma linha com uma coluna apresenta o valor V, então a pessoa correspondente àquela linha exerce a profissão correspondente àquela coluna; se o valor for F, então a pessoa correspondente à linha não exerce a profissão correspondente àquela coluna. Assim, de acordo com a tabela, Barbara é cardiologista, Bianca não é dentista nem Bruno é pneumologista.

Tabela 5.10: Problema envolvendo o dentista, pneumonologista e cardiologista.

NOME	DENTISTA	PNEUMOLOGISTA	CARDIOLOGISTA
BRUNO		F	
BARBARA			V
BIANCA	F		

Fonte: OBRL (2014).

Considerando as informações e a tabela apresentadas acima, é correto afirmar que:

A) "Bruno não é dentista ou Bianca é cardiologista" é uma proposição composta V.

B) "Se Bruno é dentista então Bianca é cardiologista" é uma proposição composta V.

C) "Bruno é dentista e Bianca é cardiologista" é uma proposição composta V.

D) "Bruno não é dentista e Bianca é cardiologista" é uma proposição composta V.

E) "Bruno é dentista ou Bianca é cardiologista" é uma proposição composta V.

4. **(OBRL 2014)** Na construção de tabelas verdades o número de linhas de uma tabela verdade será determinado pelo número de proposições simples que aparecerem em uma proposição composta. Considerando uma proposição composta "P" com 3 átomos e uma composta "Q" com 6 átomos, indique o número de linhas de suas respectivas tabelas verdades e marque a única alternativa correta.

A) P terá 3 linhas, Q terá 5 linhas.

B) P terá 9 linhas, Q terá 32 linhas.

C) P terá 8 linhas, Q terá 64 linhas.

D) P terá 9 linhas, Q terá 128 linhas.

E) P terá 9 linhas, Q terá 64 linhas.

5. **(CESPE – TRT – BA)** Se A, B, C e D forem proposições simples e distintas, então o número de linhas da tabela-verdade da proposição $(A \to B) \leftrightarrow (C \to D)$ será superior a 15.

( ) Certo ( ) Errado

6. **(VUNESP – PC – SP – 2013)** Sobre as tabelas de verdade dos conectivos de disjunção (inclusiva), conjunção e implicação (material), assinale a alternativa correta.

A) As conjunções só são falsas quando ambos os conjuntos são falsos.

B) Não existe implicação falsa com antecedente verdadeiro.

C) As disjunções são falsas quando algum dos disjuntos é falso.

D) Só há um caso em que as implicações são verdadeiras.

E) As implicações são verdadeiras quando o antecedente é falso.

7. (CESPE – STF) Caso as colunas em branco na tabela abaixo sejam corretamente preenchidas, a última coluna desta tabela corresponderá à expressão $[P \wedge (\sim Q)] \vee [Q \rightarrow P]$.

Tabela 5.11: Proposições P, Q e $\sim Q$.

P	Q	$\sim Q$	$[P \wedge (\sim Q)]$	$[Q \rightarrow P]$	
V	V				V
V	F				V
F	V				F
F	F				V

Fonte: CESPE - STF (s.d.).

( ) Certo ( ) Errado

8. (CESPE – TRT – RN) Se a expressão lógica envolvendo R e T for: $(R \wedge T) \vee (\sim R)$. A tabela verdade correspondente será a seguinte.

Tabela 5.12: Expressão lógica envolvendo as proposições R e T.

R	T	$(R \wedge T) \vee (\sim R)$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Fonte: CESPE - TRT - RN (s.d.).

( ) Certo ( ) Errado

9. (CESPE – TRT – RN) Se a expressão lógica envolvendo R e T for: $(R \rightarrow T) \leftrightarrow R$. A tabela verdade correspondente será a seguinte.

Tabela 5.13: Proposições R e T.

R	T	$(R \rightarrow T) \leftrightarrow R$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	F

Fonte: CESPE - TRT - RN (s.d.).

( ) Certo ( ) Errado

10. (CESPE – TER – MS – 2013) Na tabela acima, são apresentadas as colunas iniciais da tabela verdade correspondentes às proposições P, Q e R.

Tabela 5.14: Operação envolvendo as proposições P, Q e R.

P	Q	R	$[R \rightarrow (Q \vee P)]$
V	V	V	
F	V	V	
V	F	V	
F	F	V	
V	V	F	
F	V	F	
V	F	F	
F	F	F	

Fonte: CESPE – TER – MS (2013).

Nesse caso, a última coluna da tabela verdade correspondente à proposição lógica $[R \rightarrow (Q \vee P)]$ será:

A)	**B)**	**C)**	**D)**	**E)**
V	V	V	F	F
V	F	V	F	V
F	V	V	V	F
F	V	F	V	F
F	V	V	V	V
V	F	V	F	F
V	F	V	V	F
F	F	V	F	F

5.3.4 Problemas com conectivos: e; ou; se,... então; e se, e somente se

1. (ANEEL/ESAF) Surfo ou estudo. Fumo ou não surfo. Velejo ou não estudo. Ora, não velejo. Assim,

A) estudo e fumo

B) não fumo e surfo

C) não velejo e não fumo

D) estudo e não fumo

E) fumo e surfo

2. **(ESAF)** Maria tem três carros: um Gol, um Corsa e um Fiesta. Um dos carros é branco, o outro é preto, e o outro é azul. Sabe-se que:

   - Ou o Gol é branco, ou o Fiesta é branco;
   - Ou o Gol é preto, ou o Corsa é azul;
   - Ou o Fiesta é azul, ou o Corsa é azul;
   - Ou o Corsa é preto ou o Fiesta é preto.

   Portanto, as cores do Gol, do Corsa e do Fiesta são, respectivamente:

   A) branco, preto, azul

   B) preto, azul, branco

   C) azul, branco, preto

   D) preto, branco, azul

   E) branco, azul, preto

3. **(ESAF)** De três irmãos – José, Adriano e Caio – sabe-se que ou José é o mais velho, ou Adriano é o mais moço. Sabe-se, também, que ou Adriano é o mais velho, ou Caio é o mais velho. Então o mais velho e o mais moço dos três irmãos são, respectivamente:

   A) Caio e José

   B) Caio e Adriano

   C) Adriano e Caio

   D) Adriano e José

   E) José e Adriano

4. **(Livro raciocínio lógico - volume gama - adaptada)** Se Ana é altruísta então Bruna é benevolente. Se Bruna é benevolente então Cláudia é conservadora. Sabe-se que Cláudia não é conservadora. Nestas condições, pode-se concluir que:

   A) Ana não é benevolente

   B) Bruna não é altruísta

   C) Ana não é conservadora

   D) Cláudia não é altruísta

   E) Ana não é altruísta

5. **(ESAF)** Se Carlos é mais alto do que Paulo, logo Ana é mais alta que Maria. Se Ana é mais alta que Maria, João é mais alto do que Carlos. Ora, Carlos é mais alto do que Paulo. Logo:

A) Ana é mais alta do que Maria, e João é mais alto do que Carlos.

B) Carlos é mais alto do que Maria, e Paulo é mais alto do que João.

C) João é mais alto do que Paulo, e Paulo é mais alto do que Carlos.

D) Ana não é mais alta do que Maria, ou Paulo é mais alto do que Carlos.

E) Carlos é mais alto do que João, ou Paulo é mais alto do que Carlos.

6. **(ESAF)** Se Ana não é advogada, então Sandra é secretária. Se Ana é advogada, então Paula não é professora. Ora Paula é professora. Portanto:

A) Ana é advogada

B) Sandra é secretária

C) Ana é advogada, ou Paula não é professora

D) Ana é advogada e Paula é professora

E) Ana não é advogada e Sandra é secretária

7. **(Livro raciocínio lógico - volume gama - adaptada)** André é inocente ou Beto é inocente. Se Beto é inocente, então Caio é culpado. Caio é inocente se e somente se Denis é culpado. Ora, Denis é culpado. Logo:

A) Caio e Beto são inocentes

B) André e Caio são inocentes

C) André e Beto são inocentes

D) Caio e Denis são culpados

E) André e Denis são culpados

8. **(ESAF/AFC)** Se Lara não fala Italiano, então Ana fala Alemão. Se Lara fala Italiano, então ou Ching fala chinês ou Débora fala dinamarquês. Se Débora fala dinamarquês, Elton fala espanhol. Mas Elton fala espanhol se e somente se não for verdade que Francisco não fala francês. Ora, Francisco não fala francês e Ching não fala chinês. Logo:

A) Lara não fala italiano e Débora não fala dinamarquês

B) Ching não fala chinês e Débora fala dinamarquês

C) Francisco não fala francês e Elton fala espanhol

D) Ana não fala alemão ou Lara fala italiano

E) Ana fala alemão e Débora fala dinamarquês

9. **(AFC/ESAF)** Se Carina é amiga de Carol, então Carmem é cunhada de Carol. Carmem não é cunhada de Carol. Se Carina não é cunhada de Carol, então Carina é amiga de Carol. Logo,

A) Carina é cunhada de Carmem e é amiga de Carol.

B) Carina não é amiga de Carol ou não é cunhada de Carmem.

C) Carina é amiga de Carol ou não é cunhada de Carol.

D) Carina é amiga de Carmem e é amiga de Carol.

E) Carina é amiga de Carol e não é cunhada de Carmem.

10. **(Auditor Fiscal/SEFAZ/MG)** Se André é culpado, então Bruno é inocente. Se André é inocente, então Bruno é culpado. Se André é culpado, então Leo é inocente. Se André é inocente, então Leo é culpado. Se Bruno é inocente, então Leo é culpado. Logo, André, Bruno e Leo são, respectivamente:

A) Culpado, culpado, culpado.

B) Inocente, inocente, culpado.

C) Inocente, culpado, inocente.

D) Inocente, culpado, culpado.

E) Culpado, culpado, inocente.

11. **(AFC/96)** Se Beto briga com Glória, então Glória vai ao cinema. Se Glória vai ao cinema, então Carla fica em casa. Se Carla fica em casa, então Raul briga com Carla. Ora, Raul não briga com Carla. Logo,

A) Carla não fica em casa e Beto não briga com Glória.

B) Carla fica em casa e Glória vai ao cinema.

C) Carla não fica em casa e Glória vai ao cinema.

D) Glória vai ao cinema e Beto briga com Glória.

E) Glória não vai ao cinema e Beto briga com Glória.

12. **(Livro raciocínio lógico - volume gama - adaptada)** João é louco ou doido. Ora João não é doido, logo:

A) João não é louco;

B) João é doido e louco;

C) O louco do João é doido;

D) João é louco;

E) João não é louco ou doido;

13. **(Livro raciocínio lógico - volume gama - adaptada)** CCC só tem uma cueca e só come bucho ou é professor. Ora, CCC não é professor, logo,

A) só tem uma cueca e não é professor,

B) tem mais de uma cueca e come bucho;

C) não tem uma cueca e é professor;

D) não tem uma cueca e não come bucho;

E) come bucho e é professor;

14. Raulino está machucado ou não que jogar. Mas Raulino quer jogar. Logo,

A) Raulino não está machucado nem quer jogar;

B) Raulino não quer jogar nem está machucado;

C) Raulino não está machucado e quer jogar;

D) Raulino está machucado e não quer jogar;

E) Raulino está machucado e quer jogar.

15. Louize nasceu e brilhou ou fugiu. Ora, Louize não fugiu, logo Louize,

A) nasceu e não brilhou;

B) não nasceu mas brilhou;

C) brilhou se, e só se, nasceu;

D) nasceu, brilhou e fugiu;

E) nasceu e brilhou;

16. **(FCC 2010)** Paloma fez as seguintes declarações:

- "Sou inteligente e não trabalho."
- "Se não tiro férias, então trabalho."

Supondo que as duas declarações sejam verdadeiras, é FALSO (F) concluir que Paloma:

A) é inteligente

B) tira férias

C) trabalha

D) não trabalha e tira férias

E) trabalha ou é inteligente

17. **(Livro raciocínio lógico - volume gama - adaptada)** Se João toca piano, então Lucas acorda cedo e Cristina não consegue estudar. Mas Cristina consegue estudar. Segue-se logicamente que:

A) Lucas acorda cedo.

B) Lucas não acorda cedo.

C) João toca piano.

D) João não toca piano.

E) Cristina não consegue estudar

5.3.5 Implicação e Equivalência

1. **(OBRL – 2021)** Três pais, Vilson, Rodrigo e Jonas, juntamente com suas esposas, sentaram-se, lado a lado, em um teatro, para assistir à premiação de seus filhos na OBRL. Um deles é cearense, outro é capixaba, e outro gaúcho. Sabe-se, também, que um é militar, outro é médico e outro é professor. Nenhum deles sentou-se ao lado da esposa, e nenhuma pessoa sentou-se ao lado de outra do mesmo sexo. As esposas chamam-se, não necessariamente nesta ordem, Cláudia, Raquel e Thereza. O médico sentou-se em um dos dois lugares do meio, ficando mais próximo de Cláudia do que de Vilson ou do que do gaúcho. O cearense está sentado em uma das pontas, e a esposa do professor está sentada à sua direita. Rodrigo está sentado entre Thereza, que está à sua esquerda, e Raquel. Assinale a afirmativa correta:

a) Jonas é casado com Raquel e é gaúcho

b) Vilson é cearense e casado com Thereza

c) Rodrigo é militar e casado com Claudia

d) Vilson é casado com Thereza e Jonas é casado com Claudia

e) Rodrigo é professor e casado com Raquel

2. **(OBRL – 2021)** Sejam as declarações:

- Se tenho mais de 18 anos, então posso dirigir.
- Se posso dirigir, então não vou a pé para a universidade.

Ora, se vou a pé para a universidade, podemos concluir que:

a) Eu sou pobre, mas tenho mais de 18 anos.

b) Eu sou rico, mas sou pão duro.

c) Eu não tenho mais de 18 anos e gosto de ir a pé para a universidade.

d) Eu não posso dirigir e não vou a pé para a universidade.

e) Eu não tenho mais de 18 anos e não posso dirigir.

5.3.6 Quantificadores e Negação

1. **(FGV - 2019 - MPE-RJ - Analista do Ministério Público - Administrativa)** Considere a sentença: "Se não estou cansado, então vejo televisão ou vou ao cinema". A negação lógica dessa sentença é:

   a) Se estou cansado, então não vejo televisão e não vou ao cinema.

   b) Se estou cansado, então vejo televisão ou vou ao cinema.

   c) Se não vejo televisão e não vou ao cinema, então estou cansado.

   d) Não estou cansado e não vejo televisão e não vou ao cinema.

   e) Estou cansado ou vejo televisão ou vou ao cinema.

2. **(OBRL – 2014)** Proposições são sentenças que podem ser julgadas como verdadeiras - V - ou falsas - F -, de forma que um julgamento exclui o outro,e são simbolizadas por letras maiúsculas, como P, Q, R etc. Novas proposições podem ser construídas usando-se símbolos especiais e parênteses. Uma expressão da forma $P \vee Q$ é uma proposição que se lê: "P ou Q", e é F quando P e Q são F; caso contrário, é V. Uma expressão da forma $P \wedge Q$, que se lê "P e Q", é V quando P e Q são V; caso contrário, é F. A forma $\neg P$ simboliza a negação da proposição P e tem valores lógicos contrários a P. Um argumento lógico válido é uma sequência de proposições em que algumas são chamadas premissas e são verdadeiras por hipótese, e as demais são chamadas conclusões e são verdadeiras por consequência das premissas. Considerando que cada proposição lógica simples seja representada por uma letra maiúscula e utilizando os símbolos usuais para os conectivos lógicos, responda o que se pede.

   A sentença "Não é verdade que nas eleições 2014 para presidente, Dilma Rousseff (PT) conquistou 11 capitais e a candidata Marina Silva (PSB) não conquistou 5 capitais" é representada corretamente pela expressão simbólica.

   a) $(\sim P \ \wedge Q)$

   b) $\sim (\sim P \wedge \sim Q)$

   c) $(\sim P \ \vee Q)$

   d) $\sim (\sim P \vee \sim Q)$

   e) $\sim (P \wedge \sim Q)$

5.4 Desafios

5.4.1 Parte I

1. **(OBRL 2018)** No estudo do Raciocínio Lógico, em particular na lógica sentencial, uma proposição é toda frase declarativa com sentido completo, que exprima um, dos dois valores

lógicos existentes: Verdadeiro (V) ou Falso (F). Tal frase jamais pode exprimir os dois valores lógicos (verdadeiro ou falso) simultaneamente. Exemplos:

- Tóquio é a capital do Japão.
- 20 + 21 = 41.
- Fernando é médico e é torcedor do Brasil.
- Se Pedro não é alto então não é jogador de basquete.

Então, na lista de frases apresentadas, as proposições são:

I. Vá para casa agora!
II. Você quer sorvete?
III. Allan é torcedor do Sport Club do Recife.
IV. Pedrinho é o cara!
V. Gabriel tirou nota 10,00 na prova de Matemática.

A) I, II e IV **B)** II e V **C)** III e IV **D)** III e V **E)** II, III e IV

2. (ANPAD) Seja dado o seguinte argumento:

"Se ele tem muitos amigos, ele os respeita como indivíduos. Se os respeita como indivíduos, então ele não pode esperar que todos eles se comportem da mesma maneira. Ele tem muitos amigos. Portanto, não espera que todos eles se comportem da mesma maneira."

Considerem-se as letras sentenciais: A: Ele tem muitos amigos; R: Ele respeita seus amigos como indivíduos e E: Ele espera que todos os amigos se comportem da mesma maneira. Então, qual das seguintes alternativas representa uma formalização horizontal desse argumento?

A) $A \rightarrow R$, $R \rightarrow \sim E$, $A \vdash \sim E$.

B) $A \rightarrow R$, $\sim E \rightarrow R$, $A \vdash \sim E$.

C) $R \rightarrow A$, $R \rightarrow \sim E$, $A \vdash \sim E$

D) $R \rightarrow A$, $R \rightarrow \sim E$, $A \vdash E$.

E) $\sim E$, $R \rightarrow \sim E$, $A \vdash R$.

3. (UESPI – PC – PI – 2014) Assinale, dentre as alternativas a seguir, aquela que NÃO caracteriza uma proposição.

A) $10^7 - 1$ é divisível por 5.

B) Sócrates é estudioso.

C) $3 - 1 > 1$.

D) $\sqrt{8} < 4$ e $3 < \sqrt{8}$.

E) Este é um número primo.

5.4.2 Parte II

1. **(CESPE – TRT – BA)** Julgue o item seguinte, a respeito dos conceitos básicos de lógica e tautologia. A proposição “Se 2 for ímpar, então 13 será divisível por 2” é valorada como (F).

   ( ) Certo ( ) Errado

2. **(IBFC – SEDS – MG – 2014)** Se o valor lógico de uma proposição é falso e o valor lógico de outra proposição é verdade, então o valor lógico do condicional entre eles, nessa ordem, é:

   A) verdadeiro
   B) falso
   C) falso ou verdadeiro
   D) impossível de determinar

3. **(VUNESP – FUNDUNESP – 2014)** Sabe – se que o valor lógico da afirmação “Se Márcia faz aniversário hoje, então Dario fará aniversário amanhã” é falsidade. Dessa forma, é verdade que:

   A) Dario fará aniversário amanhã.
   B) Márcia não faz aniversário hoje.
   C) Márcia não faz aniversário hoje e Dario não fará aniversário amanhã.
   D) Dario fará aniversário amanhã ou Márcia não faz aniversário hoje.
   E) Se Dario não fará aniversário amanhã, então Márcia faz aniversário hoje.

4. **(CESPE – TJ – SE – 2014)** Julgue os itens que se seguem, relacionados à lógica proposicional. A sentença “O reitor declarou estar contente com as políticas relacionadas à educação superior adotadas pelo governo de seu país e com os rumos atuais do movimento estudantil” é uma proposição lógica simples.

   ( ) Certo ( ) Errado

5.4.3 Parte III

1. **(OBRL 2014)** Considere que cada pessoa cujo nome está indicado na tabela abaixo exerça apenas uma profissão. Se a célula que é o cruzamento de uma linha com uma coluna apresenta o valor V, então a pessoa correspondente àquela linha exerce a profissão correspondente àquela coluna; se o valor for F, então a pessoa correspondente à linha não exerce a profissão correspondente àquela coluna. Assim, de acordo com a tabela, Ângela é Advogada, Esther não é professora nem Andreza é médica.

Tabela 5.15: Problema do advogado, professor e médica.

NOME	ADVOGADO	PROFESSOR	MÉDICA
ANDREZA			F
ANGELA	V		
ESTHER	F		

Fonte OBRL (2014).

Considerando as informações e a tabela apresentadas acima, é correto afirmar que:

A) "Esther não é médica" é uma proposição simples V.

B) "Andreza não é advogada" é uma proposição composta.

C) "Esther não é médica" é uma frase que não é proposição.

D) "Andreza não é advogada" é uma proposição simples F.

E) "Esther não é médica" é uma frase imperativa.

2. **(CESPE – TEM – 2013)** A tabela abaixo corresponde ao início da construção da tabela-verdade da proposição S, composta das proposições simples P, Q e R. Julgue os itens seguintes a respeito da tabela-verdade de S.

Tabela 5.16: Tabela propisções P, Q e R.

P	Q	R	S
V	V	V	
V	V	F	
V	F	V	
V	F	F	
F	V	V	
F	V	F	
F	F	V	
F	F	F	

Fonte: CESPE – TEM (2013).

Se $S = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$, então a última coluna da tabela-verdade de S conterá, de cima para baixo e na ordem em que aparecem, os seguintes elementos: V, F, V, V, F, V, F e F.

( ) Certo ( ) Errado

5.4.4 Parte IV

1. **(ESAF)** Maria é magra ou Bernardo é barrigudo. Se Lúcia é linda, então César não é careca. Se Bernardo é barrigudo, então César é careca. Ora, Lúcia é linda. Logo:

   A) Maria é magra e Bernardo não é barrigudo

   B) Bernardo é barrigudo ou César é careca

   C) César é careca e Maria é magra

   D) Maria não é magra e Bernardo é barrigudo

   E) Lúcia é linda e César é careca

2. **(AFC)** Se Carlos é mais velho do que Pedro, então Maria e Júlia têm a mesma idade. Se Maria e Júlia têm a mesma idade, então João é mais moço do que Pedro. Se João é mais moço do que Pedro, então Carlos é mais velho do que Maria. Ora, Carlos não é mais velho do que Maria. Então,

   A) Carlos não é mais velho do que Júlia, e João é mais moço do que Pedro.

   B) Carlos é mais velho do que Pedro, e Maria e Júlia têm a mesma idade.

   C) Carlos e João são mais moços do que Pedro.

   D) Carlos é mais velho do que Pedro, e João é mais moço do que Pedro.

   E) Carlos não é mais velho do que Pedro, e Maria e Júlia não têm a mesma idade.

3. **(FCC-TJ)** Se Rasputin não tivesse existido, Lênin também não existiria. Lênin existiu. Logo,

   A) Lênin e Rasputin não existiram.

   B) Lênin não existiu.

   C) Rasputin existiu.

   D) Rasputin não existiu.

   E) Lênin existi.

Capítulo 6

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Depois da realização do presente estudo fica evidente a necessidade de se estabelecer condições para o estudo da Lógica Matemática, em especial, no Ensino Fundamental II e no ramo dos concursos públicos. Para tal, evidencia-se a Lógica Matemática como área do conhecimento em evolução ao longo da história tendo reflexo no desenvolvimento da Matemática, tendo um caráter desafiador no âmbito das olimpíadas de Lógica Matemática.

Nesta pesquisa, inicialmente, fica evidenciada a importância de entender o percurso histórico subjacente a construção e desenvolvimento da Lógica Matemática, desde o período clássico até os tempos modernos. Assim, se mostrando como um ramo do conhecimento que se difundiu ao longo da história e impactou positivamente na construção das bases lógicas da humanidade, inclusive em áreas do conhecimento como as ciências da computação, em particular na programação.

Por outro lado, ressalta-se a pouca difusão do Raciocínio Lógico Matemático na Educação Básica Brasileira, em especial, no Ensino Fundamental II, uma vez que não ocorre um isentivo aos alunos para tal estudo nessa etapa de ensino. Uma das formas de estabelecer a inserção dessa temática se dar por meio do estudo para concursos públicos e para olimpíadas, em especial a Olimpíada Brasileira de Raciocínio Lógico - OBRL.

A OBRL como competição Matemática, bastante concorrida, exige dedicação e boa preparação. Para isso, é necessária uma boa base de Lógica, sendo importante se estabelecer um passo que utilize de forma adequada o tempo de estudo, estabelecendo uma rotina de resolução de problemas e, claro um bom material de estudo. Este último item traz o destaque para a coleção de quatro livros do professor Artur Ataíde, aplicada à realidade e vivência de alunos do Ensino Fundamental II e concurseiros.

Desse modo, podemos inferir que para o bom desenvolvimento das habilidades é necessário que se estude materiais que tragam desde problemas resolvidos até desafios. Assim, como forma de contribuição didática, esta pesquisa oferece uma sequência estruturada de exercícios que aborda problemas que envolvem desde a lógica intuitiva até o estudo de quantificadores, além de apresentar por meio de exemplos e dicas de estudo de Raciocínio Lógico Matemático.

Ao fim, espera-se que este trabalho possa contribuir positivamente na vida de estudantes da Educação Básica e concurseiros, servindo de base e estimulador da Lógica Matemática. Além disso, espera-se que sirva como forma de difusão da área do conhecimento matemático, de modo a estimular cada vez mais interesse das pessoas, dada a sua importância no mundo contemporâneo.

REFERÊNCIAS

ABRAFI. **Novos tempos da educação abrem espaço para metodologias inovadoras de ensino**. Jovem Pan, 2021. Disponível em: <https://www.abrafi.org.br/index.php/site/noticias/ver/4349>. Acesso em: 23/09/2022.

AMINO. **George Boole**. s.d. Disponível em: <https://aminoapps.com/c/tudo-sobre-ciencia/page/blog/george-boole/d3m8_za0ibum7rVawPRjJn4exV2LpDbkxVX>. Acesso em: 03/09/2022.

ANDRADE, J. T. Dissertação (Mestrado), **Uma abordagem ao raciocínio lógico no contexto dos concursos**. Juazeiro do Norte: Universidade Federal do Cariri, Centro de Ciências e Tecnologia, Programa de Pós Graduação em Matemâtica em Rede Nacional, 2021. 154 p.

ANGELELLI, I. The techniques of disputation in the history of logic. **The Journal of Philosophy**, JSTOR, v. 67, n. 20, p. 800–815, 1970.

ARRUDA, M. E. F. **O Racioncínio Lógico Matemático do Ensino Fundamental ao Ensino Superior: um material de apoio aos estudantes que almejam cargos públicos**. Dissertação (B.S. thesis), 2022.

ATAÍDE, A. **Raciocínio Lógico: Volume Gama**. 6. ed. Recife: OBRL Editora, 2019. 180 p.

ATAÍDE, A. **Descubra como ser um bom solucionador de problemas e se tornar um prodígio da Lógica**. s.d. Disponível em: <https://logicaparagenios.kpages.online/nova-pagina-328475>. Acesso em: 14-08-2022.

ÁVILA, G. Euclides, geometria e fundamentos. **Revista do professor de matemática**, v. 45, 2001.

BARBOSA, E. F.; MOURA, D. G. de. Metodologias ativas de aprendizagem na educação profissional e tecnológica. **Boletim Técnico do Senac**, v. 39, n. 2, p. 48–67, 2013.

BARROS, D. d. Enigmas, desafios, paradoxos e outros divertimentos lógicos e matemáticos. **Araçatuba, SP: Novas Conquistas São Paulo Editora**, 2003.

BAZHANOV, V. The"rut"effect in russian logic and university philosophy. **Bulletin of the Russian Humanitarian Scientific Foundation,(1)**, p. 66–72, 2013.

BLAIR, J. A.; JOHNSON, R. H. The current state of informal logic. **Informal Logic**, v. 9, n. 2, 1987.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da matemática**. [S.l.]: Editora Blucher, 2019.

BROUWER, L. E. J. Intuitionism and formalism. **Bulletin of the American Mathematical Society**, American Mathematical Society, v. 20, n. 2, p. 81–96, 1913.

CORCORAN, J. Schemata: the concept of schema in the history of logic. **Bulletin of Symbolic Logic**, Cambridge University Press, v. 12, n. 2, p. 219–240, 2006.

DEVIGILI, G.; BRANDL, E. Círculos matemáticos. **Anais da Mostra Nacional de Iniciação Científica e Tecnológica Interdisciplinar (MICTI)-e-ISSN 2316-7165**, v. 1, n. 12, 2019.

DIAS, C. M. C. Escorço histórico da lógica matemática. **Revista Acadêmica: ciências agrárias e ambientais**, Curitiba, 1994.

DIEGO, M. Quem quer ser um medalhista? como se tornar um super atleta dos números. 2019.

DORMOLEN, J. V.; ZASLAVSKY, O. The many facets of a definition: The case of periodicity. **The Journal of Mathematical Behavior**, Elsevier, v. 22, n. 1, p. 91–106, 2003.

FAJARDO, R. A. S. **Lógica Matemática**. 1. ed. São Paulo: EDUSP, 2017.

FERNÁNDEZ, A. J. C.; OLIVEIRA, K. I. M. **Iniciação a Matemática: um curso com problemas e soluções**. [S.l.]: Rio de Janeiro: SBM, 2010.

FILHO, D. D. M. **Manual de Redação Matemática, com um dicionário etimológico-explicativo de palavras usadas na Matemática e um capítulo especial sobre como escrever uma dissertação**. [S.l.]: Campina Grande-PB: Fabrica de Ensino, 2009.

FILHO, E. de A. **Iniciação à lógica matemática**. [S.l.]: NBL Editora, 2002.

FLAXMAN, G. Gilles deleuze, filósofo do futuro. **ETD-Educação Temática Digital**, MISC, v. 9, n. esp., p. 1–14, 2008.

G1. **Busto da era romana revela nariz curvado de Aristóteles**. 2006. Disponível em: <https://g1.globo.com/Noticias/Ciencia/0,,AA1323607-5603,00-BUSTO+DA+ERA+ROMANA+REVELA+NARIZ+CURVADO+DE+ARISTOTELES.html>. Acesso em: 03/09/2022.

GABBAY, D. M.; WOODS, J. H. **Handbook of the History of Logic**. [S.l.]: Elsevier North-Holland, 2004. v. 2009.

GARBI, G. G. **A rainha das ciências**. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2006.

GARBI, G. G.; CIÊNCIAS, A. R. das. Um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática. **São Paulo: Editora Livraria da Física**, 2007.

GROARKE, L. Informal logic. **Stanford Encyclopedia Philosophy**, 1996.

GUERREIRO, M. et al. **Minicurso: Sentenças Abertas e Quantificadores.** Viçosa: Projeto de Extensão: Lógica Matemática, Aprendizagem e cidadania. Universidade Federal de Viçosa - UFV, Centro de Ciências Exatas e Tecnologias, Departamento de Matemática, 2022.

IMPA. **Potal OBMEP (Brasil)**. 2022. Disponível em: <https://portaldaobmep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=153&tipo=7>. Acesso em: 05 de agoto de 2022.

INTUICIONISMO. **Intuicionismo**. 2021. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Intuicionismo>. Acesso em: 15 de agosto de 2022.

I.PINIMG. s.d. Disponível em: <https://i.pinimg.com/564x/ce/1a/ad/ce1aad738037a1d93a2c6ff66372638f.jpg>. Acesso em: 03/09/2022.

KAMII, C.; JOSEPH, L. Teaching place value and double-column addition. **The Arithmetic Teacher**, National Council of Teachers of Mathematics, v. 35, n. 6, p. 48–52, 1988.

KUSKOVA, S. The problem of normative acts of consciousness. **Human World: The Normative Dimension-5**, p. 44–50, 2018.

LICEUFILOSOFIA. **Socrátes e Platão**. 2016. Disponível em: <http://www.liceufilosofia.com.br/2016/08/socrates-platao-e-aristoteles.html>. Acesso em: 03/09/2022.

MACUGLIA, G.; SCHRODER, N. Conexão entre matemática e ciências: o desenvolvimento do pensamento lógico-matemático no nível inicial de escolaridade. FESPM, 2017.

MARGUTTI, P. R. A conceitografia de frege: uma revolução na história da lógica. **Kriterion Revista de Filosofia, Belo Horizonte**, v. 25, n. 72, p. 5–34, 1984.

MATTOS, S. de. Odesenvolvimento do raciocínio lógico matemático: possíveis articulações afetiva. 2012.

MEGA, É. **Olimpíadas Brasileiras de Matemática 1ª a 8ª-problemas e resolução/Élio Mega, Renate Watanabe,-**. [S.l.]: Rio de Janeiro: SBM, 2009.

MEGA, É.; WATANABE, R. Olimpíadas brasileiras de matemática, 1ª à 8ª. **São Paulo: Núcleo**, 1988.

MEIRA, L. d. L.; DIAS, M. d. G.; SPINILLO, A. G. Raciocínio lógico-matemático: aprendizagem e desenvolvimento. **Temas em Psicologia**, Sociedade Brasileira de Psicologia, v. 1, n. 1, p. 113–127, 1993.

MONTOYA, A. O. D. **Teoria da aprendizagem na obra de Jean Piaget**. [S.l.]: UNESP, 2009. v. 10.

MOREIRA, A. G. S. d. C. **Elementos de história da lógica.** Dissertação (Mestrado), 2007.

MORGADO, A. C. **Raciocínio Lógico-Quantitativo**. [S.l.]: Elsevier Brasil, 2008.

MURAKAMI, C.; IEZZI, C. **Fundamentos de matemática elementar: conjuntos e funções**. [S.l.]: São Paulo: Atual, 1985.

NOLT, J.; ROHATYN, D. **Lógica. Traduçao de Mineko Yamashita**. [S.l.]: São Paulo: McGraw-Hill, 1991.

OBRL. 2022. Disponível em: <https://www.obrl.com.br/>. Acesso em: 12-08-2022.

OBRL. s.d. Disponível em: <http://www.obrl.com.br/obrl2018/RELAT\%C3\%93RIO\%20DA\%20OBRL\%20-\%202018.pdf>. Acesso em: 03/09/2022.

OBRL. **Newton Costa**. Olimpíada Brasileira Raciocínio Lógico, s.d. Disponível em: <https://m.facebook.com/Olimpiadabrasileiraraciociniologico/posts>. Acesso em: 03/09/2022.

OLIVEIRA, P. A. d.; ROCHA, A. J. d. O. **Raciocínio lógico, conceitos e estabelecimento de Parâmetros para a aprendizagem matemática**. 2015.

PIAGET, J.; INHELDER, B. A gênese das estruturas lógicas elementares (a. cabral, trad.). **Rio de Janeiro, RJ: Zahar.(Original publicado em 1959)**, 1975.

POLYA, G. A arte de resolver problemas. **Rio de Janeiro: interciência**, v. 2, p. 12, 1978.

PUC-SP. **Noções de Lógica Matemática**. 2004. Disponível em: <https://www.pucsp.br/~logica/Conjuntos.htm>. Acesso em: 03/09/2022.

QUA, P. O. F. R.; REASONING, F. On mathematics as sense-making: An informal attack on the unfortunate divorce of formal and informal mathematics. **Informal reasoning and education**, Routledge, p. 311, 1991.

RAUPP, F. M.; BEUREN, I. M. Metodologia da pesquisa aplicável às ciências. **Como elaborar trabalhos monográficos em contabilidade: teoria e prática**, São Paulo: Atlas, p. 76–97, 2006.

REDDIT. **Alan Turing**. s.d. Disponível em: <https://www.reddit.com/r/ColorizedHistory/comments/9ibeh0/alan_turing_23_june_1912_7_june_1954_the/>. Acesso em: 03/09/2022.

RIBEIRO, L. R. d. C. A aprendizagem baseada em problemas (pbl): uma implementação na educação em engenharia na voz dos atores. Universidade Federal de São Carlos, 2005.

ROCHA, Â. M. et al. Olimpíada de ciências e matemática. **Encontro Gaúcho de Educação Matemática**, v. 9, 2006.

RUSSELL, B. **Introdu < o ^ filosofia matem‡ tica**. [S.l.]: Zahar, 2007.

RYLE, G. **Dilemmas: The tarner lectures 1953**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2015.

SHINE, C. Y. aulas de matemática olímpica. **Rio de Janeiro, SBM**, 2009.

SMULLYAN, R. M. **A Beginner's Guide to Mathematical Logic**. [S.l.]: Courier Corporation, 2014.

TAO, T. Como resolver problemas matemáticos: uma perspectiva pessoal. **Traduçao de Paulo Ventura. Rio de Janeiro: SBM**, 2013.

TIMETOAS. **Historia y evolución de la teoría de autómatas y lenguajes formales**. s.d. Disponível em: <https://www.timetoast.com/timelines/historia-y-evolucion-de-la-teoria-de-automatas-y-lenguajes-formales-0aab9413-733b-\4ac5-b64b-013ea5c98466>. Acesso em: 03/09/2022.

TORRENTE, C. R. **Raciocínio Lógico Para Concursos**. [S.l.]: Clube de Autores, 2014.

TOTVS. **Metodologias ativas de aprendizagem: o que são e 13 tipos**. 2022. Disponível em: <https://www.totvs.com/blog/instituicao-de-ensino/metodologias-ativas-de-aprendizagem/>. Acesso em: 23-09-2022.

URREA, C.; PAPERT, S. **MIT Media Lab**. [S.l.]: Recuperado el, 2007.

VERNANT, J.-P. **As origens do pensamento grego**. [S.l.]: Difusão Européia do Livro, 1972.

WAZNIAK. **Biografia Tarski, Alfred**. 2022. Disponível em: <https://wazniak.mimuw.edu.pl/index.php?title=Biografia_Tarski,_Alfred>. Acesso em: 03/09/2022.

WIKIPÉDIA. **Emil Leon Post**. 2022. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Emil_Leon_Post>. Acesso em: 03/09/2022.

WIKIPÉDIA. **Gottfried Wilhelm Leibniz**. 2022. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Gottfried_Wilhelm_Leibniz>. Acesso em: 03/09/2022.

WIKIPEDIA. **Newton da Costa**. 2022. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Newton_da_Costa>. Acesso em: 15 de agosto de 2022.

ZANFIR, L. N. Análisis histórico y filosófico del desarrollo de direcciones no clásicas de lógica moderna. **Revista Universidad y Sociedad**, Editorial"Universo Sur", v. 12, n. 2, p. 82–86, 2020.

ZANFIR, L. N. Historical and philosophical analysis of the development of non-classical directions of modern logic. **Universidad y Sociedad**, v. 12, n. 2, p. 82–86, 2020.

Anexo A

ANEXOS

A.1 Gabarito dos Exercícios Propostos do Capítulo 5

Seção 5.2

Subseção 5.2.1

1. B	4. D	7. A	10. CERTO
2. D	5. D	8. ERRADO	11. B
3. D	6. D	9. ERRADO	12. C

Subseção 5.2.2

1.	4. B	7. ERRADO	10. C
2. E	5. B	8. C	11. D
3. D	6. B	9. CERTO	

Subseção 5.2.3

1. B	4. E	7. ERRADO	10. CERTO
2. C	5. C	8. ERRADO	
3. E	6. ERRADO	9. ERRADO	

Seção 5.3

Subseção 5.3.1

1. E	5. D	9. CERTO	13. B
2. A	6. D	10. CERTO	14. B
3. C	7. D	11. CERTO	15. C
4. E	8. CERTO	12. A	

Subseção 5.3.2

1. E	4. C	7. E	10. E
2. E	5. E	8. D	
3. C	6. D	9. C	

Subseção 5.3.3

1. D	4. C	7. CERTO	10. C
2. D	5. CERTO	8. CERTO	
3. E	6. E	9. ERRADO	

Subseção 5.3.4

1. E	5. A	9. B	13. A	17. D
2. E	6. B	10. D	14. E	
3. B	7. B	11. A	15. E	
4. E	8. A	12. D	16. C	

Subseção 5.3.5

1. E	2. C	3. C

Subseção 5.3.6

1. B	2. A	3. D

Seção 5.2

Subseção 5.4.1

1. D	2. A	3. E

Subseção 5.4.2

1. ERRADO	3. E
2. A	4. ERRADO

Subseção 5.4.3

1. ANULADA	2. ERRADO

Subseção 5.4.4

1. A	2. E	3. C

Subseção 5.4.5

1. B
2. E

Subseção 5.4.6

1. D
2. E