COLÉGIO PEDRO II

Pró-Reitoria de Pós Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Rodrigo de Melo Machado

UMA PROPOSTA DE ABORDAGEM DE TÓPICOS DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL PARA ALUNOS DO ENSINO MÉDIO À LUZ DA TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

Rio de Janeiro

2022

Rodrigo de Melo Machado

UMA PROPOSTA DE ABORDAGEM DE TÓPICOS DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL PARA ALUNOS DO ENSINO MÉDIO À LUZ DA TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

Dissertação de Mestrado apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós Graduação, Pesquisa, Extensãoe Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Patrícia Erthal de Moraes

Rio de Janeiro

2022

COLÉGIO PEDRO II

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA, EXTENSÃO E CULTURA

BIBLIOTECA PROFESSORA SILVIA BECHER

CATALOGAÇÃO NA FONTE

M149 Machado, Rodrigo de Melo
Uma proposta de abordagem de tópicos do cálculo diferencial e integral para alunos do ensino médio à luz da teoria da aprendizagem significativa / Rodrigo de Melo Machado. – Rio de Janeiro, 2022.
159 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Colégio Pedro II. Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura.
Orientador: Patrícia Erthal de Moraes.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Cálculo diferencial. 3. Cálculo integral. 4. Ensino médio. 5. Teoria da aprendizagem significativa. I. Moraes, Patrícia Erthal de. II. Título.

CDD 510

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária Simone Alves – CRB7 5026

Rodrigo de Melo Machado

UMA PROPOSTA DE ABORDAGEM DE TÓPICOS DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL PARA ALUNOS DO ENSINO MÉDIO À LUZ DA TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró- Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: ___/___/___.

Banca Examinadora:

____

Profa. Dra. Patrícia Erthal de Moraes (Orientadora)
PROFMAT - Colégio Pedro II

____

Prof. Dr. Daniel Felipe Neves Martins
PROFMAT - Colégio Pedro II

____

Prof. Dr. Vinicius Leal do Forte
PROFMAT – UFRRJ

Rio de Janeiro

2022

Este trabalho é dedicado àqueles que sempre me ajudaram e incentivaram, contribuindo direta ou indiretamente para a sua conclusão: família, alunos, amigos e professores. Já dizia Isaac Newton: “Se cheguei até aqui foi porque me apoiei no ombro de gigantes.” De coração, a todos, a minha eterna gratidão.

AGRADECIMENTOS

Sou eternamente grato a Deus, por ter me dado forças para superar todos os obstáculos que me fizeram amadurecer ao longo desse caminho. Sem Ele eu não teria chegado até aqui.

Ao meu pai Austregésilo, minha mãe Angela e minha irmã Luciana, pelo amor e ensinamentos necessários para minha formação intelectual e moral.

À minha esposa Marli e ao meu filho João, pela pela compreensão, apoio em todas as horas, para que eu pudesse realizar esse trabalho, e por entenderem que estive ausente em algumas atividades devido ao tempo dedicado aos estudos.

À Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), pela iniciativa de criação do PROFMAT e pelas parcerias com outras instituições de ensino em todo o país.

Ao PROFMAT, por oferecer um curso tão enriquecedor e ao Colégio Pedro II, por tudo que fez e continua fazendo pelo ensino.

Aos funcionários do PROPGPEC do Colégio Pedro II que me ajudaram direta ou indiretamente durante o mestrado, em especial aos meus eternos professores do PROFMAT/Pedro II, que me auxiliaram com muito empenho e entusiasmo tornando essa jornada mais agradável, pela forma brilhante com que ministraram um excelente curso e por crerem que podemos aprimorar a educação brasileira.

À equipe da biblioteca Professora Silvia Becher, pelo inigualável profissionalismo, paciência e ajuda na formatação desta dissertação.

Aos colegas da turma do PROFMAT/Pedro II de 2019, as suas demonstrações de camaradagem foram fundamentais diante dos desafios do mestrado. Considero-os como uma segunda família.

À minha orientadora, digna de admiração e respeito, Dra. Patrícia Erthal de Moraes, por ter aceitado me guiar nessa dissertação e por todos os momentos em que me auxiliou, mostrando-me os melhores caminhos a serem percorridos. Meus sinceros agradecimentos.

Aos diretores, coordenadores, colegas professores, ex-alunos e alunos das escolas onde leciono, pelo incentivo e principalmente ao meu amigo Professor Me. Jonathas, por sua constante motivação e conversas agradáveis sobre a “rainha das ciências”, a Matemática.

Aos membros da Banca Examinadora, pela contribuição na conclusão deste trabalho e por aceitarem compor à banca, contribuindo para o meu crescimento humano e profissional.

Por fim, gostaria de agradecer a todos que de alguma forma estiveram envolvidos na criação, desenvolvimento e conclusão desta dissertação.

“Se eu tivesse que reduzir toda a psicologia educacional a um único princípio, diria isto: o fato isolado mais importante que informação na aprendizagem é aquilo que o aprendiz já conhece. Descubra o que ele sabe e baseie nisso os seus ensinamentos.”

(David Ausubel)

RESUMO

MACHADO, Rodrigo de Melo. **Uma proposta de abordagem de tópicos do cálculo diferencial e integral para alunos do ensino médio à luz da teoria da aprendizagem significativa.** 2022. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Rio de Janeiro, 2022.

O primeiro contato com o Cálculo Diferencial e Integral desperta muito temor nos alunos concluintes do ensino médio que ingressam na universidade em cursos os quais incluem essa disciplina no primeiro ano de formação. De fato, o índice de reprovação em Cálculo, e, como consequência, a evasão dos cursos são grandes. Vários pesquisadores dedicaram-se ao estudo das causas dessa dificuldade, obtendo diferentes respostas para o problema. Em geral, a explicação mais comum para tal situação é a má formação do aluno. Porém, destaca-se o fato de que muitas vezes a dificuldade está unicamente relacionada ao Cálculo, o que não determina uma má formação geral em matemática. Dada a relevância da compreensão de conceitos do Cálculo para o estudo das ciências em geral, a proposta central deste trabalho é apresentar uma abordagem de alguns de seus tópicos para alunos do ensino médio através de um guia didático, de modo a estabelecer um primeiro contato, ainda que de forma intuitiva, com algumas definições dessa disciplina. As atividades propostas no guia didático foram desenvolvidas na forma de Unidade de Ensino Potencialmente Significativa e embasadas na Teoria da Aprendizagem Significativa, estudada nesta dissertação, que afirma a necessidade de desenvolvimento de conhecimentos prévios, chamados subsunçores, para uma aprendizagem efetiva. A fim de dar suporte à pesquisa são apresentados um histórico sobre o desenvolvimento das ideias centrais do Cálculo Diferencial e Integral e uma breve exposição sobre a educação no Brasil e as principais reformas públicas educacionais. Observa-se que ao longo da história, tópicos do Cálculo fizeram parte do currículo da educação básica. Espera-se que este trabalho encoraje professores a pensar na possibilidade da inserção de ideias do Cálculo nas suas práticas pedagógicas, com o objetivo de desenvolver o raciocínio lógico do aluno, bem como promover a interdisciplinaridade, visto que o Cálculo se insere em diversos contextos e aplicações científicas. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Palavras-chave: cálculo diferencial e integral; teoria da aprendizagem significativa; unidade de ensino potencialmente significativa; ensino médio.

ABSTRACT

MACHADO, Rodrigo de Melo. **A proposed approach to differential and integral calculus topics for high school students in the light of meaningful learning theory.** 2022. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Rio de Janeiro, 2022.

The first contact with Differential and Integral Calculus arouses a lot of fear in high school graduates who enter the university in courses that include this discipline in the first year of training. In fact, the failure rate in Calculus, and, as a consequence, the dropout from the courses are high. Several researchers have dedicated themselves to the study of the causes of this difficulty, obtaining different answers to the problem. In general, the most common explanation for such a situation is poor student training. However, the fact that the difficulty is often solely related to Calculus stands out, which does not determine a general bad training in mathematics. Given the relevance of understanding Calculus concepts for the study of science in general, the central proposal of this work is to present an approach to some of its topics for high school students through a didactic guide, in order to establish a first contact, albeit intuitively, with some definitions of this discipline. The activities proposed in the didactic guide were developed in the form of a Potentially Significant Teaching Unit and based on the Theory of Meaningful Learning, studied in this dissertation, which affirms the need to develop prior knowledge, called subsumers, for effective learning. In order to support the research, a history of the development of the central ideas of the Differential and Integral Calculus and a brief exposition about education in Brazil and the main public educational reforms are presented. It is observed that throughout history, Calculus topics were part of the basic education curriculum. It is hoped that this work will encourage teachers to think about the possibility of inserting ideas from Calculus in their pedagogical practices, with the objective of developing the student's logical reasoning, as well as promoting interdisciplinarity, since Calculus is inserted in different contexts and scientific applications.
The present work was carried out with the support of the Coordination for the Improvement of Higher Education Personnel - Brazil (CAPES) - Financing Code 001.

Keywords: differential and integral calculus; meaningful learning theory; potentially significant teaching unit; high school.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
PG	Progressão Geométrica
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
TAS	Teoria da Aprendizagem Significativa
UFF	Universidade Federal Fluminense
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
MMM	Movimento da Matemática Moderna
PNE	Plano Nacional de Educação
SENAI	Serviço Nacional de Aprendizagem Industrial
UEPS	Unidade de Ensino Potencialmente Significativa
USP	Universidade de São Paulo

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como objetivo a apresentação de um guia didático com sugestões de abordagens das ideias de limite e continuidade de funções, para alunos do ensino médio, livre do excessivo rigor matemático com que a disciplina é estudada no ensino superior. A construção deste guia didático foi baseada em uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa - UEPS (MOREIRA, 2011) onde é apresentada uma sequência didática de atividades cuja metodologia baseia-se na Teoria da Aprendizagem Significativa. Ele é direcionado pricipalmente a professores do ensino médio que gostariam de abordar tais conteúdos em sala de aula ou em projetos de iniciação científica, onde alunos poderiam ter um primeiro contato com tais disciplinas de uma forma mais intuitiva e menos formal.

Ao longo da história, as ideias do Cálculo Diferencial e Integral foram fundamentais para o desenvolvimento das ciências, dando suporte para o entendimento de vários fenômenos da natureza, bem como para o avanço de tecnologias.

Por sua ampla aplicabilidade, os conteúdos do Cálculo são de fundamental importância para diversos cursos de graduação tanto da área de ciências da natureza como da área de humanas como: administração, economia, ciências contábeis.

A despeito da importância da disciplina, a sua taxa de reprovação e a consequente evasão desses cursos são enormes. Neste contexto, torna-se relevante a busca por soluções para amenizar esta transição do ensino básico para o superior.

Rezende (2003) aponta que na Universidade Federal Fluminense-UFF, no período de 1996 a 2000, a variação do índice de alunos não-aprovados já estava entre 45% e 95%, agravando-se quando, especificamente, é o curso de matemática, onde este índice não é inferior a 65%. Em sua tese de doutorado, Barufi (1999) menciona que entre 1990 e 1995 o percentual de reprovação no Cálculo Diferencial e Integral na Universidade de São Paulo - USP oscilou entre 20% e 75%.

Diante desta situação muitos estudos são feitos para identificar uma possível origem do problema. Muitos professores acreditam que a falta de maturidade ou de base em matemática com que o aluno chega à universidade é a principal razão para o insucesso em Cálculo. Por esta razão, muitas universidades adotaram o chamado Cálculo Zero, ou Matemática Básica onde são tratados conteúdos considerados pré-requisitos para a compreensão das ideias do Cálculo, como aponta Rezende (2003, p. 2, 3):

> A partir de 1998 a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 5 não faz mais parte da grade curricular do curso de Arquitetura; e, por último, a disciplina de Matemática Básica, introduzida na grade curricular do curso de Matemática

> / Niterói da UFF a partir do segundo semestre de 1997, tem por objetivo auxiliar e dar um embasamento à disciplina de Cálculo 1. O relato desses dois fatos serve para dar a dimensão exata da gravidade do problema do ensino de Cálculo.

Para Rezende (2003), um levantamento efetuado com base em dados disponíveis relativos ao índice de alunos não-aprovação no período de 1996 a 200 em cursos de Cálculo na UFF, revelam, no entanto, que o problema está muito longe de ser resolvido.

Se seguirmos com esta perspectiva de que a principal justificativa para o insucesso em Cálculo seria a má formação do aluno em matemática básica então esta dificuldade se refleteria também em outras disciplinas, o que, em geral, não ocorre.

Segundo Rezende (2003, p. 13):

> Antes de tudo cabe destacar que a maior parte do território do lugar-matriz das dificuldades de aprendizagem do ensino superior Cálculo encontra-se no ensino básico. A evitação / ausência das ideias e problemas construtores do Cálculo no ensino básico de matemática constitui, efetivamente, o maior obstáculo de natureza epistemológica do ensino de Cálculo, e porque não dizer do próprio ensino de matemática. É incompreensível que o Cálculo, conhecimento tão importante para a construção e evolução do próprio conhecimento matemático, não participe do ensino de matemática. O cálculo é, metaforicamente falando, a espinha dorsal do conhecimento matemático.

O ensino-aprendizagem da matemática tem sido objeto de diversas discussões, desde o ensino fundamental até o ensino superior. A maioria dos alunos costuma ter dificuldade em entender seus conceitos básicos. Muitos deles não encontram sentido ou aplicação do conteúdo abordado em sala de aula. Estas dificuldades não se limitam aos conceitos básicos, visto que os conteúdos desta disciplina estão inter-relacionados e é necessária uma compreensão para a aprendizagem dos tópicos seguintes. Para Ávila (1999) precisamos de uma mudança, principalmente no que diz respeito à linguagem matemática, pois segundo o autor a linguagem não motiva ninguém, mas as ideias, sim.

Assim, com os propósitos de familiarizar alunos do ensino médio com conceitos básicos do Cálculo e de apresentá-los a uma matemática mais moderna e relevante, onde suas habilidades e conhecimentos possam ser mobilizados é que a ideia norteadora desta dissertação foi concebida.

No Capítulo 2, examinamos as origens do Cálculo Integral e Diferencial e o conceito de limite; enfatizando matemáticos importantes e seus respectivos trabalhos que propiciaram o surgimento, desenvolvimento e a formalização do Cálculo. Observa-se que os processos de conceituação e instrumentalização do conceio de limite levaram mais de 2500 anos para serem formalizados e o termo, no sentido moderno, é um produto dos séculos XVIII e XIX. Um fato interessante é que embora, em geral, a sistematização lógica da disciplina de Cálculo nas universidades abordar primeiramente limite, depois o conteúdos de derivada e integral, veremos no decorrer deste trabalho que o registro cronológico é exatamente o contrário.

No Capítulo 3, discutimos as principais reformas relacionadas ao ensino de matemática no ensino médio, destacando a inclusão e exclusão de tópicos de Cálculo em seus respectivos programas e as razões para essas mudanças. O que chama a atenção é que o Cálculo, por diversos períodos, fez parte do currículo da educação básica. Em nome de uma “modernidade”, na década de 1960, ele foi excluido do seu currículo oficial, embora algumas instituições particulares de ensino, de forma isolada, ainda o contemple como disciplina oferecida aos alunos. Porém, em geral, a abordagem ainda é bastante mecanicista.

No Capítulo 4, apresentamos as principais ideias da Teoria da Aprendizagem Significativa – TAS proposta por David Ausubel, sendo esta a base teórica de transmissão de conhecimento que norteou este trabalho. Analisamos o que ela representa para o ensino e o seu significado para a construção e absorção de novos saberes. Segundo a TAS a aprendizagem ocorre significativamente quando novas informações são ancoradas em conceitos que já existem na estrutura cognitiva do aprendiz, os chamados subsunçores. Em suma, o fator que mais afeta a aprendizagem, nesta teoria, é o que o aluno já sabe (MOREIRA, 2006). A Base Nacional Comum Curricular reconhece a importância da aprendizagem significativa, pois acredita que com ela é possível formar o aluno enquanto sujeito ético, reflexivo e humanizado, e também orienta o professor a levar em consideração e valorizar os conhecimentos prévios de seus alunos, mesmo que sejam insatisfatórios, pois através deles são atribuídos significados aos assuntos abordados (BRASIL, 2018).

No Capítulo 5, propomos um guia didático desenvolvido na forma de Unidade de Ensino Potencialmente Significativa - UEPS (MOREIRA, 2011) composto por uma sequência didática de atividades com aplicações de limites e continuidade de funções, com base na Teoria da Aprendizagem Significativa. Nestas atividades foi estudado o conceito de função, visto que é um conteúdo sugerido nas diretrizes curriculares da matemática no ensino fundamental. Nesse sentido, os alunos já possuiam subsunçores para ancorar novos conhecimentos. Nas atividades foram exploradas a manipulação algébrica, a interpretação gráfica e a construção e leitura de quadros e tabelas. Apresentamos diversos exemplos de funções, principalmente os que envolvem funções definidas por várias sentenças.

Acreditamos que este primeiro contato com o conceito de limite e continuidade de forma intuitiva seja um importante subsunçor para alunos que futuramente terão contato com a disciplina de Cálculo. Além de ser uma oportunidade de se trabalhar um conteúdo contemporâneo, moderno, que possui uma abordagem diferente da experiência que em geral estão acostumados com a matemática da sala de aula.

2 DOS INFINITESIMAIS AOS ÉPSILONS E DELTAS

Neste capítulo discutiremos sobre as origens do Cálculo Integral, Cálculo Diferencial e o conceito de limite; destacando matemáticos importantes e seus respectivos trabalhos. Ele foi elaborado com base nas referências de Boyer (1974), Roque e Carvalho (2012), pois os autores utilizam uma linguagem bastante acessível na apresentação dos fatos históricos.

Quando estudamos Cálculo pela primeira vez, geralmente aprendemos seus conceitos em uma ordem diferente em relação ao seu desenvolvimento histórico. Como resultado, geralmente começamos aprendendo sobre limites, posteriormente estudamos a derivada e a integral, ambas apresentadas em termos de limites. No entanto, historicamente, a noção de limite foi, entre estas três, a última a ser formalizada. Depois, tanto a derivada como a integral foram descritas em termos deste conceito.

Ao longo da história, a idéia de limite envolvia ideias vagas, às vezes filosóficas sobre o infinito, números infinitamente pequenos ou infinitamente grandes e com intuições de geometria subjetiva. A sua definição moderna tem menos de 150 anos.

O desenvolvimento do Cálculo pode ser descrito aproximadamente ao longo de uma linha do tempo que passa por três períodos, que designamos: Antecipação, Desenvolvimento e Formalização. No estágio de Antecipação, técnicas usadas por matemáticos envolviam processos infinitos para encontrar áreas sob curvas ou maximizar certas quantidades. No estágio de Desenvolvimento, Newton e Leibniz criaram os fundamentos do Cálculo e reuniram todas essas técnicas sob a égide da derivada e da integral. No entanto, seus métodos nem sempre eram logicamente sólidos, e os matemáticos levaram muito tempo durante o estágio de Formalização para justificá-los e colocar o Cálculo em uma base matemática sólida.

2.1 O Continuum, Infinitesimal e Indivisível

O significado usual da palavra contínuo é "ininterrupto", assim uma entidade contínua, um *continuum*, não tem "lacunas". Em matemática, a palavra é usada no mesmo sentido geral, mas teve de ser aprimorada com definições precisas. Por exemplo, no final do século XVIII, a continuidade de uma função significava que mudanças infinitesimais no valor do argumento induziam mudanças infinitesimais no valor da função. Com o abandono dos infinitesimais no século XIX, essa definição foi substituída por outra que empregava o conceito mais preciso de limite.

Intimamente associado ao conceito de contínuo está o de infinitesimal. Tradicionalmente, uma quantidade infinitesimal é aquela que, embora não necessariamente coincida com zero, é em certo sentido menor do que qualquer quantidade finita. Na teoria dos limites, o termo “infinitesimal” é aplicado a qualquer sequência cujo limite seja zero. Uma magnitude infinitesimal pode ser considerada como o que resta depois que um *continuum* foi submetido a uma análise exaustiva, em outras palavras, como um *continuum* "visto no pequeno". Pode-se dizer, portanto, que um *continuum* é “composto” de magnitudes infinitesimais, suas partes últimas. É neste sentido, por exemplo, que os matemáticos do século XVII sustentavam que as curvas contínuas são "compostas" de linhas retas infinitesimais.

Os infinitesimais têm uma longa história. Eles apareceram precocemente na matemática do filósofo atomista grego Demócrito (450 a.C) para depois serem banidos pelo matemático Eudoxus (350 a.C). Assumindo a forma um tanto obscura de “indivisíveis”, eles reaparecem na matemática do final da Idade Média e mais tarde desempenharam um papel importante no desenvolvimento do Cálculo. Seu duvidoso status lógico levou, no século XIX, ao seu abandono e substituição pelo conceito de limite. Nos últimos anos, no entanto, o conceito de infinitesimal foi refundado de maneira rigorosa.

O problema da incomensurabilidade entre as quantidades deu origem a algumas ideias controversas sobre a natureza do mundo físico, como a doutrina de Demócrito, por volta de 450 a.C, que sugeriu a existência do infinitamente pequeno que constitui o ser das coisas. Demócrito ao calcular o volume de cones e cilindros, usando suas técnicas infinitesimais, por exemplo, chegou à conclusão de que o volume de um cone é um terço do volume do cilindro circunscrito. Para isto, ele comparou a base de um cone com a base de uma pirâmide com infinitos lados e considerou uma infinidade de cortes infinitamente finos paralelos à base.

A teoria do infinitesimal de Demócrito (450 a.C) e seus seguidores foi contestada por outra escola de filosofia influênciada pelas idéias de Parmênides de Eléia (530 a.C), que chamou a atenção para os paradoxos e contradições. A emergência do infinito por meio de quantidades incomensuráveis levou a uma crise que se traduziu em um debate entre duas concepções: a concepção continuísta que considerava o número, o espaço e a matéria divisíveis no infinito; e a concepção atomística que permitiu a existência de elementos primordiais indivisíveis. Em apoio à doutrina da imutabilidade de Parmênides, Zenão formulou seus famosos paradoxos do movimento, que ilustram essa crise.

Os primeiros paradoxos da história do pensamento foram atribuídos a Zenão de Eleia, por volta de 450 a.C, e transmitidos sobretudo pela Física de Aristóteles. Discípulo de Parmênides, Zenão por meio destes paradoxos difundiu a ideia da impossibilidade de movimento, ou de mudança, usando vários raciocínios sofísticos. Entre estes paradoxos existem quatro que são mais conhecidos: o paradoxo de Aquiles e a tartaruga, o paradoxo da dicotomia, o da flecha em voo e o paradoxo do estádio. Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor em sua *Mengenlehre* se dedicou a elucidar os paradoxos de Zenão.

Somente para ilustrar suas ideias, apresentaremos o paradoxo da dicotomia. Zenão nos confronta com a aparente impossibilidade de em um tempo finito superar um número infinito de distâncias. Imagine uma pessoa que precisa atravessar uma sala de um lado para o outro, caminhando em etapas, sempre dividindo as distâncias pela metade, indefinidamente. Assim, antes de chegar à parede oposta, a pessoa precisa chegar ao centro da sala. Após fazer isso, ele deve caminhar metade da metade, ou um quarto da distância, e assim sucessivamente. Desta forma, a pessoa nunca chegará ao outro lado, pois infinitos espaços, mesmo que pequenos, têm que vagar por um tempo aparentemente finito. A dicotomia mostra a impossibilidade de movimento porque, nesse caso, quando algo se move, deve primeiro atingir o estágio intermediário antes de poder alcançar seu objetivo. Não há dúvida de que a pessoa alcançará a parede oposta, dessa forma, Zenão conclui que espaço e tempo não são infinitamente indivisíveis. Os paradoxos de Zenão ilustram a tensão em relação aos fenômenos de movimento e velocidade, e trazem à luz controvérsias internas que geralmente passam despercebidas. Como resultado da dificuldade de entendimento diante desses fenômenos, os gregos desenvolveram o chamado horror ao infinito, que teve consequências importantes na matemática. Esta recebeu uma configuração diferente após Zenão: os elementos de um conjuntos não estão representados com números ou pedras, mas com segmentos de linha. Os pensamentos de Zenão chamaram a atenção de estudiosos a respeito: da descoberta da continuidade; da necessidade de compreender melhor o infinito; das grandezas incomensuráveis uma vez que eram representadas por segmentos de reta.

O conceito de indivisível está ligado, mas deve ser distinguido, do conceito de infinitesimal. Um indivisível é, por definição, algo que não pode ser dividido, o que geralmente é entendido como significando que não possui partes adequadas. Mas estes têm em comum a característica de não serem estendidos. Entidades estendidas como linhas, superfícies e volumes formam uma fonte muito mais rica de “indivisíveis”. Por exemplo, no caso de uma linha reta, tais indivisíveis seriam pontos; no caso de um círculo, linhas retas; e no caso de um cilindro dividido por seções paralelas à sua base, círculos. Em cada caso, o indivisível em questão é infinitesimal no sentido de possuir uma dimensão a menos do que a figura da qual é gerado. Assim uma superfície ou volume podem ser pensados como uma coleção, ou soma, de indivisíveis lineares ou planares, respectivamente. Nesse sentido, nos séculos XVI e XVII os indivisíveis eram usados no cálculo de áreas e volumes de figuras curvilíneas.

2.2 O Período da Antecipação do Cálculo: séculos III a.C e XVII

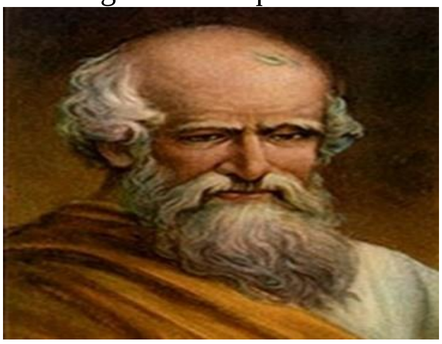
As origens do Cálculo remontam ao mundo grego: os cálculos de áreas e volumes realizados por Arquimedes no século III a.C deram origem ao Cálculo Integral. Outras ideias relativas ao Cálculo só foram surgir 2000 anos após, como por exemplo, os estudos de Fermat, em 1629, que deram origem ao Cálculo Diferencial ao desenvolver um método para encontrar mínimos e máximos. Existem várias causas para este intervalo de tempo entre estes estudos, dentre elas devemos destacar a inexistência de um sistema de numeração adequado, no caso o decimal, bem como o desenvolvimento da álgebra simbólica e da geometria analítica que permitiram o tratamento algébrico, e não geométrico, das curvas, efetuando cálculos de tangentes, máximos e mínimos, entre outros. Tudo isso aconteceu essencialmente no século XVII.

Passaremos agora a destacar alguns matemáticos, e as suas realizações que estão intimamente associadas a noções do Cálculo.

Arquimedes

Arquimedes (287 – 212 a.C), Figura 1, nascido em Siracusa (Itália), foi um matemático e inventor da Grécia antiga. Arquimedes é especialmente importante pela sua descoberta da relação entre o volume de uma esfera e seu cilindro circunscrito. Suas contribuições em geometria a revolucionaram e seus métodos anteciparam o Cálculo Integral. Era um homem prático que inventou uma grande variedade de máquinas, incluindo roldanas. Ele é conhecido pela formulação de um princípio hidrostático (conhecido como princípio de Arquimedes) e um dispositivo para elevar a água, ainda usado, conhecido como parafuso de Arquimedes.

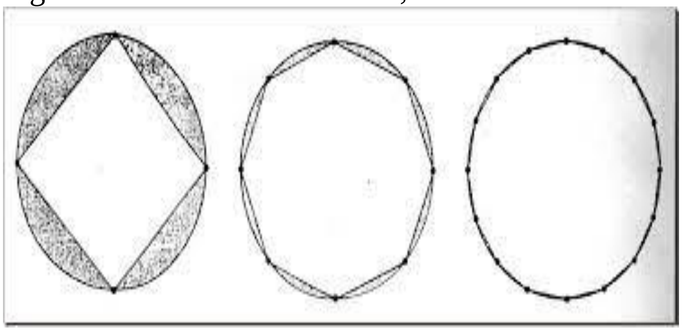
Figura 1 – Arquimedes



Fonte:<http://geniosdaciencia.bioorbis.org/2019/04/arquimedes-de-siracusa.html> . Acesso em 13 de dezembro de 2021.

Um dos problemas que os matemáticos constantemente abordavam era o cálculo de áreas e volumes. Os gregos realizavam, por volta de 200 a.C, cálculos de área de acordo com o método denominado quadratura. Esse método consistia em encontrar um quadrado com a mesma área da figura poligonal cuja área se queria calcular. O grande problema era encontrar a quadratura das figuras curvas. Foi Arquimedes o primeiro a desenvolver um método que ficou conhecido como método da exaustão, Figura 2.

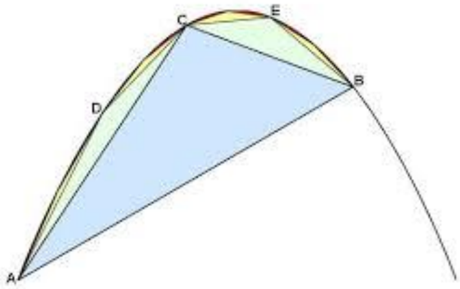
Figura 2 – Método de exaustão, a Medida do Círculo



Fonte:<https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/122615/ISSN2177-5095-2013-03-01-13.pdf?sequence=1&isAllowed=y> . Acesso em 13 de dezembro de 2021.

Usando o método da exaustão, ele calculou a área do segmento parabólico, ou seja a área compeendida entre uma parábola e uma reta passando por dois de seus pontos.
Na figura 17, o segmento parabólico é o determinado pele parábola e pela reta passando por A e por B. Arquimedes deduziu que esta área é igual a $\frac{4}{3}$ da área do triângulo ABC. Para isto ele construiu uma sequência de triângulos começando com o triângulo ABC e continuamente foi adicionando outros triângulos entre os existentes e a parábola para obter novas áreas. A partir deste processo, verificou que a área em questão, deve ser maior ou igual e também, menor ou igual que 4/3 vezes a área de ABC.

Figura 3 – Método de exaustão, a Quadratura da Parábola



Fonte: <https://sites.google.com/site/matematicaeureka/aplicacoes-na-fisica-e-matematica-com-enfase-no-principio-de-arquimedes/a-quadratura-da-parabola> . Acesso em 13 de dezembro de 2021.

Ele, também, usou o método da exaustão para encontrar uma aproximação da área de um círculo. Este, é claro, é um dos primeiros exemplos de integração que levou a valores aproximados para π.

Entre outras "integrações" de Arquimedes estavam o volume e a área da superfície de uma esfera, o volume e a área de um cone, a área da superfície de uma elipse, o volume de qualquer segmento de um parabolóide de revolução e um segmento de um hiperbolóide de revolução.

O método da exaustão consiste em um dos processos essenciais do Cálculo. Arquimedes nunca pensou que as somas tivessem uma infinidade de elementos. O conceito de limite implica levar em consideração o infinito que, mesmo com Arquimedes, sempre foi excluído da matemática grega. No entanto, seu trabalho foi provavelmente o estímulo mais poderoso para o avanço das ideias de limite e infinito. Pode se dizer que Arquimedes inventou o Cálculo Integral e antecipou o desenvolvimento do Cálculo Diferencial. Esses dois Cálculos formam o que é conhecido como Cálculo Infinitesimal, considerado o instrumento mais poderoso já inventado para a exploração matemática do universo físico.

Kepler

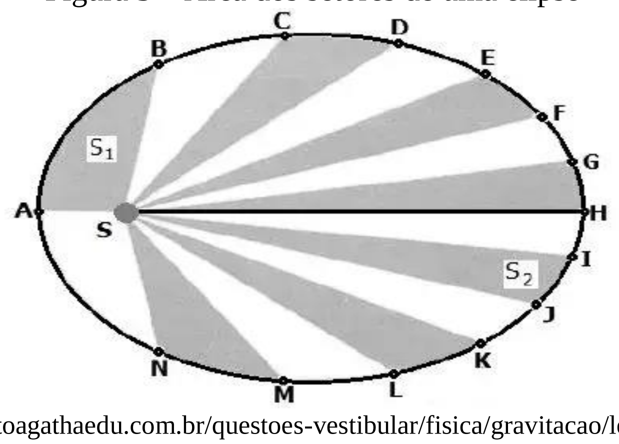
Johannes Kepler (1571-1630), Figura 4, foi um matemático e astrônomo alemão que descobriu que a Terra e os planetas viajam ao redor do Sol em órbitas elípticas. Ele é lembrado principalmente pelas três leis do movimento planetário que levam seu nome, publicadas em 1609 e 1619. Fez um trabalho importante em óptica (1604, 1611), descobriu dois novos poliedros regulares (1619), deu o primeiro tratamento matemático de empacotamento próximo de esferas iguais (levando a uma explicação da forma das células de um favo de mel, 1611), elaborou a primeira prova de como os logaritmos funcionavam (1624) e concebeu um método para encontrar os volumes de sólidos de revolução que pode ser visto como uma contribuição para o desenvolvimento do Cálculo (1615, 1616). Além disso, calculou as tabelas astronômicas mais exatas até então conhecidas, cuja precisão contribuiu para estabelecer a veracidade da astronomia heliocêntrica.

Figura 4 – Johannes Kepler

Fonte:< http://geniosdaciencia.bioorbis.org/2019/05/johannes-kepler.html>. Acesso em 13 de dezembro de 2021.

Em 1612, Kepler interessou-se pelo cálculo do volume dos barris de vinho uma vez que os métodos anteriores para determina-los não eram muito eficazes. Então, estudou os métodos de Arquimedes e desenvolveu cálculos de volumes de sólidos de revolução que não haviam ainda sido estudados. O livro *Stereometria Doliorium Vinariorum* (Medidas de Volumes de Barris) surgiu de seus estudos. Também Kepler, em seu trabalho sobre o movimento planetário, determinou a área dos setores de uma elipse, Figura 5. Seu método consistia em pensar nas áreas como somas de linhas, o que se trata de uma forma rudimentar de integração.

Figura 5 – Área dos setores de uma elipse



Fonte:< https://www.projetoagathaedu.com.br/questoes-vestibular/fisica/gravitacao/leis-de-kepler.php> . Acesso em 13 de dezembro de 2021.

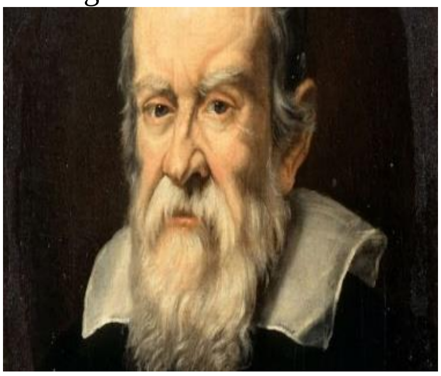
Kepler fez uso abundante de infinitesimais em seus cálculos. Em *Nova Stereometria* de 1615, ele considera as curvas como polígonos infinilaterais e os corpos sólidos como sendo compostos de cones infinitesimais ou discos infinitesimalmente finos. Tais ideias estão de acordo com o uso costumeiro de Kepler de infinitesimais da mesma dimensão das figuras que eles constituem. Nota-se o uso de indivisíveis quando ele tratava, por exemplo, um cone como sendo composto de círculos, e em sua *Astronomia Nova* de 1609, a obra em que afirma suas famosas leis do movimento planetário, ele considera a área de uma elipse como a "soma dos *radii* "desenhado a partir do foco.

Parece ter sido Kepler quem primeiro introduziu a ideia que mais tarde se tornaria um princípio reinante na geometria, o de mudança contínua de um objeto matemático, neste caso, de uma figura geométrica. Em seu *Astronomiae pars Optica* de 1604, Kepler observa que todas as seções cônicas são continuamente deriváveis umas das outras, tanto por meio do movimento focal quanto pela variação do ângulo com o cone do plano de corte.

Galileu

Galileu Galilei (1564-1642), Figura 6, foi um matemático, físico, astrônomo e filósofo italiano. Formulou a lei básica da queda dos corpos, que ele verificou por meio de medições cuidadosas. Construiu um telescópio com o qual estudou as crateras lunares e descobriu quatro luas girando em torno de Júpiter. Fundamentou cientificamente a Teoria Heliocêntrica de Copérnico. Desmitificou lendas, estabeleceu princípios e causou uma renovação na história da Ciência.

Figura 6 – Galileu Galilei



Fonte: <http://geniosdaciencia.bioorbis.org/2019/03/galileu-galilei.html#more >. Acesso em 13 de dezembro de 2021.

A partir do seu interesse pela matemática, surgiram os primeiros estudos sobre indivisíveis. Galileu defendeu uma forma de atomismo matemático. Salviati, seu porta-voz, afirma que a magnitude contínua é composta de indivisíveis, na verdade um número infinito deles. O método, por eles, utilizado para a obtenção dos indivisíveis consiste no ato de dobrar uma linha reta em um círculo. Com isto, Galileu encontra uma aplicação “metafísica” engenhosa da ideia de considerar o círculo como um polígono infinilateral. Quando a linha reta foi dobrada em um círculo, Galileu parece concluir que a linha foi assim transformada em partes indivisíveis, isto é, pontos, que são os vértices do polígono infinilateral.

Cavaliere

Francesco Bonaventura Cavalieri (1598-1647), Figura 7, foi um matemático italiano, aluno de Galileu. Ele desenvolveu o método dos indivisíveis que se tornou uma ferramenta importante para o desenvolvimento do Cálculo Integral. Em 1635, apresentou o Princípio de Cavalieri, que afirma que se dois sólidos têm a mesma altura, e se suas seções transversais tomadas paralelas e a distâncias iguais de suas bases são sempre iguais, então os sólidos têm o mesmo volume. Este Princípio foi um dos trampolins para o desenvolvimento do Cálculo.

Figura 7 – Francesco Bonaventura Cavalieri

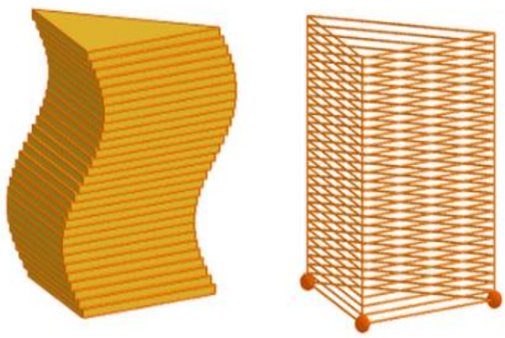
Fonte:< https://www.somatematica.com.br/biografias.php?pag=2> . Acesso em 13 de dezembro de 2021.

A ideia de Cavaliere era que uma superfície podia ser concebida como composta de uma infinidade de linhas paralelas equidistantes e um sólido como composto de planos paralelos equidistantes, sendo as linhas e os planos os indivisíveis da superfície e do sólido, respectivamente. Pode-se perceber que esta ideia é semelhante ao que conhecemos hoje como o processo de integração. Embora Cavalieri em nenhum momento explicita exatamente o que entende pela palavra "indivisível", ele os apresenta como uma ferramenta matemática confiável; na verdade, o “método dos indivisíveis” permanece associado ao seu nome até os dias atuais.

De fato, a essência do método de Cavalieri era o estabelecimento de uma correspondência entre os indivisíveis de duas configurações “semelhantes” e, nos casos que

Cavalieri considera, é evidente que a correspondência é sugerida apenas em bases geométricas, tornando-a bastante independente do número. A própria afirmação do princípio de Cavalieri, Figura 8, incorpora esta ideia: se figuras planas são incluídas entre um par de linhas paralelas, e se suas interceptações em qualquer linha paralela às linhas incluídas estão em uma proporção fixa, então as áreas das figuras são as mesmas. Um princípio análogo vale para sólidos. O método de Cavalieri é basicamente o da redução de dimensão: sólidos são reduzidos a planos com áreas comparáveis e planos a linhas com comprimentos comparáveis. Embora este método seja suficiente para o cálculo de áreas ou volumes, ele não pode ser aplicado para retificar curvas, uma vez que a redução neste caso seria para pontos, e nenhum significado pode ser atribuído à “razão” de dois pontos. Para a retificação, percebeu-se mais tarde que uma curva deve ser considerada como a soma, não de indivisíveis, isto é, pontos, mas de retas infinitesimais, seus microssegmentos.

Figura 8 – O Princípio de Cavaliere

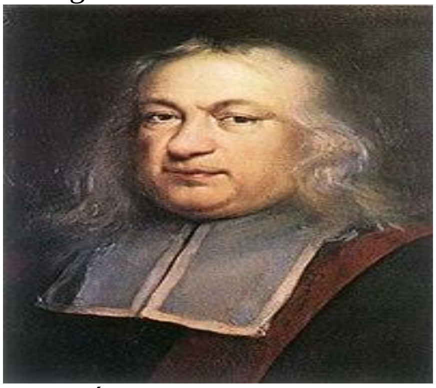


Fonte: <https://www.umlivroaberto.org/BookCloud/Volume_1/master/view/GE504-9.html> . Acesso em 13 de dezembro de 2021.

Fermat

Pierre de Fermat (1607-1665), Figura 9, foi um matemático que contribuiu significativamente para o estudo de uma gama de tópicos matemáticos: fez descobertas importantes para os fundamentos do Cálculo; coinventou a geometria analítica; desenvolveu a teoria da probabilidade em cooperação com Blaise Pascal e fez contribuições magistrais para a teoria dos números, em particular para o chamado Último Teorema de Fermat. O trabalho matemático de Fermat foi comunicado principalmente em cartas a amigos, muitas vezes com pouca ou nenhuma prova de seus teoremas. Embora ele mesmo tenha afirmado ter provado todos os seus resultados aritméticos, poucos registros de suas provas sobreviveram, e muitos matemáticos duvidaram de algumas de suas afirmações, especialmente dada a dificuldade de alguns dos problemas e as ferramentas matemáticas limitadas disponíveis para Fermat.

Figura 9 – Pierre de Fermat



Fonte:< https://pt.wikipedia.org/wiki/Último_teorema_de_Fermat>. Acesso em 13 de dezembro de 2021

Um de seus importantes estudos chamado *Método para determinar Máximos e Mínimos e Tangentes a Linhas Curvas,* publicado em 1629 somente após a sua morte, pode ser considerado a origem do Cálculo Diferencial. Tal método é o que conhecemos hoje como diferenciação, a partir dele também foi possível determinar a tangente a uma curva. Fermat investigou máximos e mínimos de uma curva quando a sua tangente era paralela ao eixo *x*. Ele escreveu a Descartes descrevendo o método essencialmente como é usado hoje, ou seja, encontrar máximos e mínimos, quando a derivada da função era zero. O tratamento de máximos e mínimos de Fermat contém a semente da técnica da “variação infinitesimal”, isto é, a investigação do comportamento de uma função submetendo suas variáveis a pequenas mudanças.

O conceito de infinitesimal surgiu com problemas de caráter geométrico e foi originalmente concebido como pertencendo apenas ao reino da magnitude contínua em oposição ao do número discreto. Mas da álgebra e da geometria analítica dos séculos XVI e XVII surgiu o conceito de número infinitesimal. Esta ideia aparece pela primeira vez nesses trabalhos de Pierre de Fermat.

Fermat também desenvolveu um estudo para o cálculo de áreas sob curvas que é muito semelhante ao que chamamos de integração. Por estas contribuições, para Laplace, ele é o verdadeiro inventor do Cálculo. Acredita-se que seus artigos sobre integrais apareceram antes dos daqueles sobre derivadas. Como Fermat não publicou os seus trabalhos, não obteve, na época, o reconhecimento que merecia.

Concluímos que os problemas motrizes do Cálculo eram os de calcular áreas sob curvas e os de encontrar as suas tangentes. Em ordem cronológica o desenvolvimento do Cálculo ocorreu por meio da integração e diferenciação. O conceito de limites, como conhecemos até hoje, só foi desenvolvido muito tempo depois.

2.3 O Período do Desenvolvimento do Cálculo: século XVII

O período do Desenvolvimento do Cálculo ou da descoberta do Cálculo é frequentemente atribuída a Isaac Newton e Gottfried Leibniz, que desenvolveram seus estudos de forma independente. No entanto, vale ressaltar que, como vimos nas seções anteriores, alguns dos problemas que levaram às ideias centrais do Cálculo foram estudados por alguns matemáticos que viveram antes de Newton e Leibniz.

Embora ambos tenham contribuído para a criação do Cálculo, cada um pensou nos conceitos fundamentais de maneiras muito diferentes. Enquanto Newton considerava as variáveis mudando com o tempo, Leibniz pensava nas variáveis x e y como variando em sequências de valores infinitamente próximos, ele introduziu dx e dy como diferenças entre valores sucessivos dessas sequências e sabia que a razão dy / dx fornecia a tangente, mas não a usou como uma propriedade definidora. Por outro lado, Newton usou as quantidades $\dot{x}$ e $\dot{y}$, que eram velocidades finitas, para calcular a tangente. Nem Leibniz, nem Newton pensaram em termos de funções, mas ambos sempre pensaram em termos de gráficos.

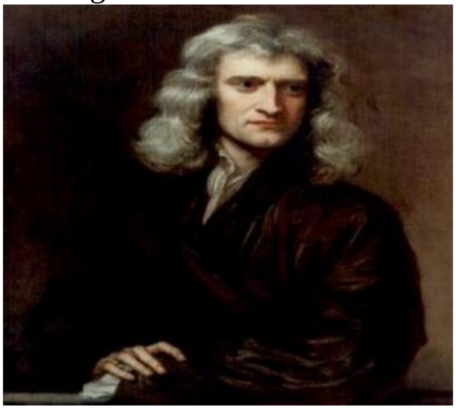
É interessante notar que Leibniz estava muito consciente da importância da boa notação. Newton, por outro lado, escreveu mais para si mesmo, conseqüentemente não tinha a preocupação de padronizar as notações. Isso acabou sendo importante em desenvolvimentos posteriores. A notação de Leibniz era mais adequada para generalizar o Cálculo para variáveis múltiplas e, além disso, destacava o aspecto do operador da derivada e da integral. Como resultado, muito da notação que é usada no Cálculo hoje se deve a Leibniz.

Em seus desenvolvimentos do Cálculo, tanto Newton quanto Leibniz usaram "infinitesimais", uma vez que para seus cálculos era conveniente o uso dessas quantidades. Embora não se pudesse contestar o sucesso das ideias do Cálculo, o uso de infinitesimais incomodava alguns matemáticos da época. Lord Bishop Berkeley, por exemplo, teceu sérias críticas referindo-se aos infinitesimais como "os fantasmas das quantidades que partiram".

Newton

Isaac Newton (1643-1727), Figura 10, foi um físico, astrônomo e matemático. Seus trabalhos sobre a formulação das três leis do movimento levou à lei da gravitação universal e sobre a composição da luz branca conduziram à moderna física óptica. Na matemática ele lançou as bases para o Cálculo Diferencial e Integral.

Figura 10 – Isaac Newton

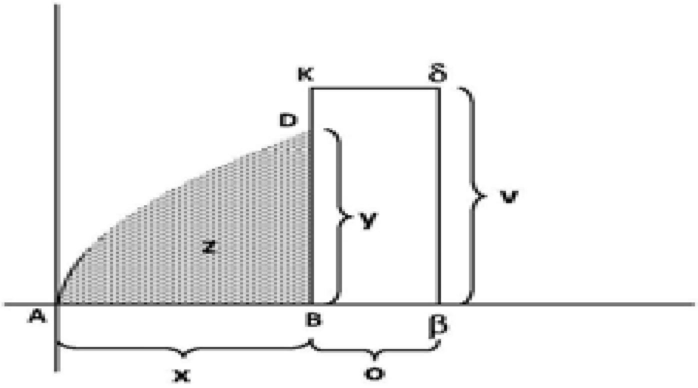


Fonte: <http://geniosdaciencia.bioorbis.org/2019/02/isaac-newton.html#more> . Acesso em 13 de dezembro de 2021

As investigações e reflexões de Newton durante o ano da peste de 1665-66 resultaram na invenção do que ele chamou de "Cálculo de Fluxões", cujos princípios e métodos foram apresentados em três tratados publicados muitos anos depois de terem sido escritos: *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas; Methodus fluxionum et serierum infinitarum*; e *De quadratura curvarum*. Com o intuito de oferecer soluções gerais para a maioria dos problemas do Cálculo conhecidos em sua época, ele formulou regras e procedimentos sistemáticos. Embora muitas dessas regras tenham sido introduzidas ou implementadas por seus predecessores de uma forma ou de outra, ele criou uma estrutura unificada na qual todos os problemas poderiam ser formulados. Para expandir a classe de curvas quadráveis, ou seja, as curvas cuja quadratura poderia ser determinada, o uso de séries infinitas foi uma ferramenta importante. Com Newton, a ideia que diferenciação e integração são operações inversas foi firmemente ancorada se considerarmos o movimento das ordenadas proporcionais ao momento ou a fluxão de uma superfície. A síntese alcançada por Newton foi possível através do uso de simbolismo algébrico e técnicas analíticas. A sua abordagem ao Cálculo baseia-se na concepção do contínuo como sendo gerados pelo movimento.

Em *De Analysi*, Newton introduz uma notação para o “incremento momentâneo” (momento), destinado a representar um momento ou instante de tempo, da abscissa ou da área de uma curva, com a própria abscissa representando o tempo. Este “momento”, efetivamente igual às quantidades infinitesimais previamente introduzidas por Fermat, foi denotado por Newton por *o* no caso da abcissa e por *ov* no caso da área, Figura 11.

Figura 11 – O emprego de procedimentos infinitesimais



Fonte: Tatiana; CARVALHO, J.P. Pitombeira, Tópicos da História da Matemática - Rio de Janeiro: SBM, 2012

Do fato de Newton usar a letra *v* para as ordenadas, pode-se inferir que Newton está pensando na curva como um gráfico de velocidade em relação ao tempo. Ao considerar a linha móvel, ou ordenada, como o momento da área, Newton estabeleceu a generalidade e a relação recíproca entre as operações de diferenciação e integração, mas não havia colocado em uso sistemático. Antes de Newton, a quadratura ou integração repousava em última instância "em algum processo pelo qual triângulos ou retângulos elementares eram somados. O tratamento explícito de Newton da integração como diferenciação inversa foi a chave para o Cálculo Integral.

No *Methodus fluxionum*, Newton irá reformular estes algoritmos na linguagem de fluentes e fluxões, tornando explícita sua concepção de quantidades variáveis como geradas por movimentos, e introduz sua notação característica. Os fluentes para Newton eram quantidades variáveis com o tempo, quantidades que fluem, e a taxa de variação de uma quantidade com o tempo era chamada fluxão.

Newton pensou em uma partícula traçando uma curva com duas linhas móveis que eram as coordenadas *x* e *y*. Os fluentes ou quantidades fluidas eram eles próprios *x* e *y*. A fluxão de um *x* fluente é denotada por $\dot{x}$, e seu momento, ou "incremento infinitamente pequeno acumulado em um tempo infinitamente curto *V*", por $\dot{x}o$. Então, $\dot{x}o$ e $\dot{y}o$ são os incrementos infinitamente pequenos de *x* e *y* respectivamente.

O problema de determinar uma tangente a uma curva é transformado no problema de encontrar a relação entre as fluxões $\dot{x}$ e $\dot{y}$ quando apresentado com uma equação que representa a relação entre os fluentes *x* e *y*. Por exemplo, para encontrar a relação entre os fluxões, no caso do fluente $y = x^n$, Newton primeiro escreve $y + \dot{y}o = (x + \dot{x}o)^n$, expande o lado direito usando o teorema binomial, e divide por *o*. Considerando que *o* é infinitamente pequeno, despreza todos os termos que ainda contêm *o* e obtém $\dot{y} = nx^{n-1}\dot{x}$. O problema deste procedimento é que para a obtenção dessa equação foi necessário fazer a divisão pela quantidade *o*, considerada infinitamente pequena (quase zero).

Com esta notação de fluxão, $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ era a tangente a $f(x, y) = 0$. No tratado de 1666, Newton discute o problema inverso, dada a relação entre x e $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, ou seja, ele determina a inclinação da reta tangente em x. Assim, Newton resolve o problema por antidiferenciação. Como também calculou áreas por antidiferenciação, este trabalho contém a primeira alusão ao *Teorema Fundamental do Cálculo.*

A presença de infinitesimais em seus Cálculo, de certa forma, deixava Newton desconfortável, embora soubesse que não poderia negligenciá-los. Reconhecendo que esse método em si exigia um fundamento e descobrindo que isso escapava à formulação precisa, Newton se concentrou em trabalhar com suas razões, que em geral é um número finito. Se essa proporção for conhecida, as quantidades infinitesimais que a formam podem ser substituídas por quaisquer magnitudes finitas adequadas, como velocidades ou fluxões, com a mesma proporção.

No prefácio do *De quadratura curvarum*, ele observa que não há necessidade de introduzir no método das fluxões qualquer argumento sobre quantidades infinitamente pequenas. Em seu lugar, ele propõe empregar o que chama de método da razão primária e última. Este método, em muitos aspectos uma antecipação do conceito de limite, recebe uma série de alusões no *célebre Principia mathematica philosophiae naturalis* de Newton, de 1687.

Quanto às notações utilizadas, ele, aparentemente, não viu necessidade de introduzir uma notação específica para integração e estabeleceu para representar a diferenciação a notação padrão com ponto, como vimos anteriormente. Como Newton estava constantemente procurando colocar seus métodos analíticos em uma base mais segura, ele apresentou os fundamentos do Cálculo de diferentes maneiras, em momentos diferentes.

O trabalho de Newton sobre Análise com séries infinitas foi escrito em 1669 e distribuído em manuscrito. Não foi publicado até 1711. Similarmente, seu *Método das fluxões e séries infinitas* foi escrito em 1671 e publicado em tradução para o inglês em 1736. O original em latim só foi publicado muito mais tarde. Nestes dois trabalhos Newton calculou a expansão em série para seno e cosseno de x e a expansão para o que era na verdade a função exponencial, embora esta não tenha sido estabelecida até que Euler introduziu a notação atual e^x. As expansões da série para seno e para cosseno, atualmente, são chamadas de série de Taylor ou Maclaurin.

O próximo trabalho matemático de Newton foi *Tractatus de Quadratura Curvarum,* escrito em 1693. Este trabalho contém outra abordagem que envolve o que chamaríamos atualmente de “tomar limites”. Newton chama os incrementos de o, em vez de $\dot{x}o$ e $\dot{y}o$, ou seja, no tempo em que x, fluindo, torna-se $x + o$, a quantidade x^n torna-se $(x+o)^n$. Assim, escreve $y + o = (x+o)^n = x^n + n.x^{n-1}.o + \cdots + n.x.o^{n-1} + o^n$. Ao final, ele deixa o incremento desaparecer ao “tomar limites”.

Pode-se dizer que, em geral, uma das grandes contribuições de Newton ao Cálculo foi a obtenção de um método analítico sistemático que se aplicava a vários tipos de problemas. Newton chegou muito perto da ideia de limite ao se referir aos conceitos de derivada e infinitamente pequeno, no entanto a operação de limite ainda é tida como metafísica.

Leibniz

Gottfried Leibniz (1646-1716), Figura 12, foi um proeminente cientista e filósofo alemão, uma figura importante na história da matemática e filosofia. Sua realização mais notável foi a construção de ideias do Cálculo Diferencial e Integral desenvolvendo uma notação que é a usada ainda hoje. Porém, como a definição de limite ainda não havia sido elaborada, não se relacionava este conceito com a idéia de derivação e de integração.

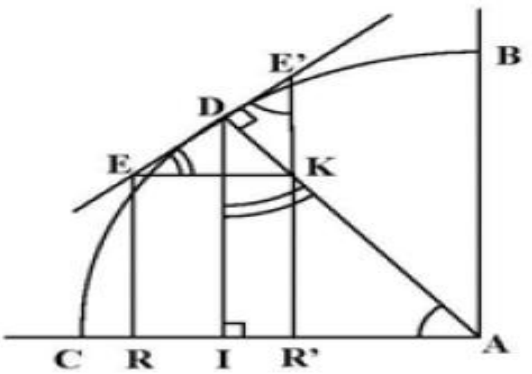
Figura 12 – Gottfried Leibniz

Fonte: <https://biografiadee.com/biografia-de-gottfried-leibniz/> . Acesso em 13 de dezembro de 2021

Pode-se dizer que os ensaios de Leibniz*, Nova Methodus* de 1684 e *De Geometri Recondita* de 1686, representam os nascimentos oficiais dos Cálculos Diferencial e Integral, respectivamente. Em sua abordagem do Cálculo, o uso de infinitesimais desempenha um papel central.

Segundo Leibniz, a sua inspiração para o Cálculo foram tiradas de um estudo de Pascal. Embora a abordagem deste trabalho seja para quadraturas, Leibniz extrai dele o triângulo característico $EE'K$, Figura 13, que é um ideia bem mais geral, que será aplicada por ele em outros estudos. Ele observa que o triângulo EE'K é semelhante ao triângulo ADI, desta forma $\frac{E'K}{EK} = \frac{AI}{DI}$ · Assim, à medida que o ponto K se aproxima do ponto D as medidas de $E'K$ e de EK vão se tornando cada vez menores, porém a razão entre elas se mantém constante. Desta forma, chamando $E'K$ de dy e EK de dx, tem-se $\frac{dy}{dx} = \frac{AI}{DI}$ ·

Figura 13 – Triângulo característico de Leibnitz



Fonte: <https://www.researchgate.net/figure/Figura-2-Triangulo-caracteristico-de-Leibnitz-Para-Leibniz-el-triangulo-EEK-tiene-una_fig1_309398810>. Acesso em 13 de dezembro de 2021

Dada uma curva determinada pelas variáveis correlacionadas *x* e *y*, ele escreveu *dx* e *dy* para diferenças infinitesimais, ou diferenciais, entre os valores de *x* e de *y*, respectivamente; e $\frac{dy}{dx}$ para a razão entre os dois diferenciais, que ele então tomou para representar a inclinação da tangente à curva no ponto correspondente. Desta forma, esta razão não é entendida como um quociente entre duas quantidades infinitamente pequenas, mas sim um resultado de uma operação entre dois diferenciais, a diferenciação. Assim, embora o uso de infinitesimais tenha sido fundamental na abordagem de Leibniz ao Cálculo, ele introduziu o conceito de diferenciação sem mencionar quantidades infinitamente pequenas, quase certamente para evitar dificuldades fundamentais, como por exemplo a divisão de 0 por 0.

Em um de seus primeiros artigos, Figura 14, Leibniz apresenta, sem demonstrar, algumas regras de diferenciação:

$da = 0$ e $d(ax) = adx$, se a for constante*;*

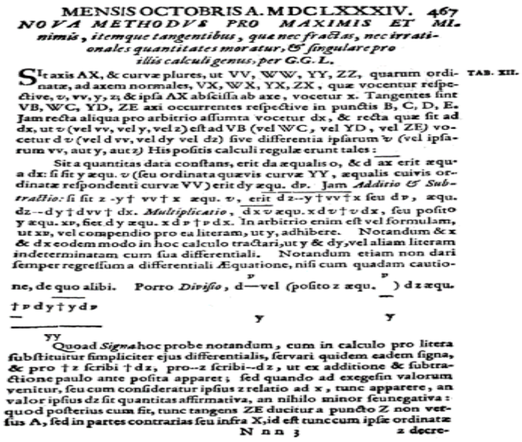
$d(x + y - z) = dx + dy - dz$;

$d(xy) = xdy + ydx;$

$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{-xdy + ydx}{y^2};$

$d(x^p) = px^{p-1}dx,$ também para p fracionário.

Figura 14 – Primeira página do "Nova Methodus pro Maximis et Minimis", Acta Eruditorum, outubro de 1684



MENSIS OCTOBRIS A. MDCLXXXIV. 467

NOVA METHODUS PRO MAXIMIS ET MInimis, itemque tangentibus, quæ nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, & ſingulare pro illis calculi genus, per G.G.L.

Sit axis AX, & curvæ plures, ut VV, WW, YY, ZZ, quarum ordinatæ, ad axem normales, VX, WX, YX, ZX, quæ vocentur reſpective, v, vv, y, z, & ipſa AX abſciſſa ab axe, vocetur x. Tangentes ſint VB, WC, YD, ZE axi occurrentes reſpective in punctis B, C, D, E. Jam recta aliqua pro arbitrio aſſumta vocetur dx, & recta quæ ſit ad dx, ut v (vel vv, vel y, vel z) eſt ad VB (vel WC, vel YD, vel ZE) vocetur dv (vel d vv, vel dy vel dz) ſive differentia ipſarum v (vel ipſarum vv, aut y, aut z) His poſitis calculi regulæ erunt tales: TAB. XII.

Sit a quantitas data conſtans, erit da æqualis o, & d ax erit æqu. a dx: ſi ſit y æqu. v (ſeu ordinata quævis curvæ YY, æqualis cuivis ordinatæ reſpondenti curvæ VV) erit dy æqu. dv. Jam *Additio & Subtractio:* ſi ſit z -y † vv † x æqu. v, erit d z--y † vv † x ſeu dv, æqu. dz--dy † dvv † dx. *Multiplicatio*, dxv æqu. x dv † v dx, ſeu poſito y æqu. xv, fiet dy æqu. x dv † v dx. In arbitrio enim eſt vel formulam, ut xv, vel compendio pro ea literam, ut y, adhibere. Notandum & x & dx eodem modo in hoc calculo tractari, ut y & dy, vel aliam literam indeterminatam cum ſua differentiali. Notandum etiam non dari ſemper regreſſum a differentiali Æquatione, niſi cum quadam cautione, de quo alibi. Porro *Diviſio*, d v/y vel (poſito z æqu. v/y) dz æqu. († v dy † y dv)/yy

Quoad *Signa* hoc probe notandum, cum in calculo pro litera ſubſtituitur ſimpliciter ejus differentialis, ſervari quidem eadem ſigna, & pro † z ſcribi † dz, pro--z ſcribi--dz, ut ex additione & ſubtractione paulo ante poſita apparet; ſed quando ad exegeſin valorum venitur, ſeu cum conſideratur ipſius z relatio ad x, tunc apparere, an valor ipſius dz ſit quantitas affirmativa, an nihilo minor ſeu negativa: quod poſterius cum ſit, tunc tangens ZE ducitur a puncto Z non verſus A, ſed in partes contrarias ſeu infra X, id eſt tunc cum ipſæ ordinatæ

N n n 3 z decre-

Fonte:< https://en.wikipedia.org/wiki/Nova_Methodus_pro_Maximis_et_Minimis#/media/File:Leibniz-Acta-1684-NovaMethodus.png>. Acesso em 13 de dezembro de 2021

Uma também de suas importantes contribuições foi a de considerar o símbolo d como um operador que atua sobre as variáveis, abrindo caminho para a aplicação iterada de *d*, levando a diferenciais de graus maiores: $ddx = d^2x, d^3x = d(d^2x)$, e em geral, $d^{n+1}x = d(d^nx)$. Além disto, com esta notação, se indica a variável à qual se está diferenciando. Leibniz supôs que os diferenciais de primeira ordem, por exemplo *dx* e *dy*, eram incomparavelmente menores ou infinitesimais em relação às quantidades finitas *x* e *y*. O mesmo valendo para as diferenciais de ordem $(n+1)$, $d^{n+1}x$, e as diferenciais de ordem n, d^nx. Ele também assumiu que a enésima potência $(dx)^n$ de um diferencial de primeira ordem era da mesma ordem de magnitude que um diferencial de enésima ordem, d^nx, no sentido de que o quociente $\frac{d^nx}{(dx)^n}$ é uma quantidade finita.

Vamos agora elencar alguns aspectos dos estudos de Newton e de Leibniz sobre o Cálculo. Newton considerou variáveis que mudam com o tempo, pensava *x*, *y* como variando sobre sequências de valores infinitamente próximos. Leibniz introduziu *dx* e *dy* como diferenças entre valores sucessivos dessas sequências.

Para Newton, a integração consistia em encontrar fluentes para uma dada fluxão, então o fato de que integração e diferenciação eram inversas estava implícito. Leibniz usou a integração como uma soma, de forma bastante semelhante a Cavalieri. É claro que nem Leibniz nem Newton pensaram em termos de funções, porém, ambos sempre pensaram em termos de gráficos. A abordagem de Newton era mais cinemática, enquanto a de Leibniz era geométrica.

Leibniz estava muito consciente de que encontrar uma boa notação era de fundamental importância. Newton, por outro lado, escreveu mais para si mesmo e, como consequência, não se preocupava com a notação utilizada. As notações de Leibniz, como por exemplo d e $\int$, utilizadas até hoje, destacou o aspecto do operador que se provou importante em desenvolvimentos posteriores.

A insistência de que os infinitesimais obedecem precisamente às mesmas regras algébricas das quantidades finitas forçou Leibniz e os defensores de seu Cálculo Diferencial a tratar os infinitesimais como se fossem zeros, de modo que, por exemplo, $x + dx$ seja tratado como se fosse o mesmo que x. Isso foi justificado com o fundamento de que os diferenciais devem ser tomados como variáveis, e não como quantidades fixas, diminuindo continuamente até chegar a zero. Considerados apenas no "momento de sua evanescência", não eram, portanto, nem algo nem zeros absolutos.

Newton não era muito favorável a compartilhar seus estudos sobre os métodos dos fluentes, enquanto Leibniz encontrou alunos dedicados e ávidos pelo estudo de diferenciais, e de aprender cálculo integral, transmitindo esse conhecimento a outros.

Newton e Leibniz foram os primeiros a desenvolver algoritmos universalmente aplicáveis, cuja natureza é semelhante aos métodos usados atualmente. Seus estudos foram continuados e difundidos por Jacob Bernoulli e Johann Bernoulli.

2.4 O Período da Formalização do Cálculo: séculos XVIII e XIX

Como as idéias do Cálculo não apresentavam rigor e clareza de definições, foi necessário

buscar esse formalização para esclarecer os conceitos que foram incluídos na nova Análise. Assim, esteve presente no século XVIII essa busca pelo rigor matemático, e prevaleceu ao longo do século XIX, período em que as principais definições da nova Análise foram estabelecidas de acordo com o rigor que hoje conhecemos, incluindo a de limite de função com épsilons e deltas.

Quando George Berkeley(1685-1753), Figura 15, filósofo irlandês (1685-1753), conhecido por sua doutrina idealista subjetiva *"Esse est percipi"* ("To be is to be perceived") publicou seu *Analyst* em 1734 atacando a falta de rigor no Cálculo e contestando a lógica na qual ele se baseava, muito esforço foi feito para ajustar as definições, dando início ao período que aqui chamamos de Formalização do Cálculo. As críticas de Berkeley foram bem fundamentadas e importantes, pois concentraram a atenção dos matemáticos em um esclarecimento lógico acerca do Cálculo, porém levaria mais de 100 anos até que este se tornasse rigoroso.

Berkeley foi um crítico persistente das pressuposições subjacentes à prática matemática de sua época. Seus ataques mais famosos foram direcionados ao Cálculo, mas na verdade seu conflito com os matemáticos foi mais profundo. Sua negação da existência de idéias abstratas entrava em oposição direta com as explicações abstracionistsa de conceitos matemáticos sustentada pela maioria dos matemáticos e filósofos da época.

Inicialmente, Berkeley desprezou aqueles que aderiram ao conceito de infinitesimal, sustentando que seu uso na obtenção de resultados matemáticos é ilusório e, de fato, eliminável.

Mais tarde, porém, ele passou a adotar uma atitude mais tolerante para com os infinitesimais, considerando-os ficções úteis, da mesma maneira que Leibniz. Em *The Analyst,* Berkeley lançou sua crítica mais sustentada e sofisticada aos infinitesimais e à toda a metafísica do Cálculo. O tratado foi escrito com o propósito declarado de defender a teologia contra o ceticismo compartilhado por muitos dos matemáticos e cientistas da época. A defesa da religião por Berkeley se baseava na afirmação de que o raciocínio dos matemáticos a respeito do Cálculo não é menos falho do que o dos teólogos a respeito dos mistérios do divino.

Embora nem o método leibniziano de diferenciais tenha escapado às restrições de Berkeley, os seus argumentos eram dirigidos principalmente ao Cálculo fluxional newtoniano. Típico de suas objeções é que na tentativa de evitar infinitesimais pelo emprego de dispositivos como quantidades evanescentes e razões primárias e últimas, Newton violou de fato a lei da não-contradição, primeiro ao sujeitar uma quantidade a um incremento e, em seguida, definir o incremento como 0(zero), ou seja, negar que um incremento já tenha estado presente.

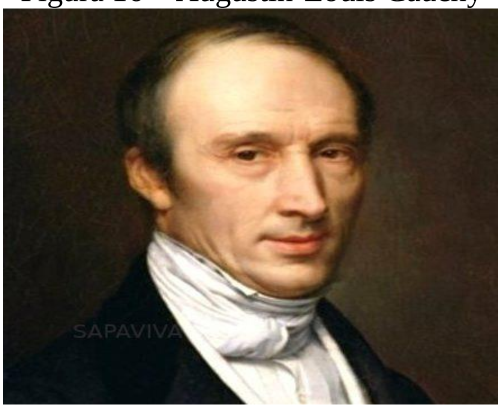
Figura 15 – George Berkeley

Fonte: <https://www.estudantedefilosofia.com.br/filosofos/georgeberkeley.php> . Acesso em 13 de dezembro de 2021

Na tentativa de formalizar as idéias do Cálculo, O matemático francês Jean Le Rond D’Alembert (1717–1783) percebendo quão frágil era a noção de grandezas infinitesimais como fundamento para o Cálculo, tentou substituí-la por uma definição de limites. Ele afirmava que fora dada “maior atenção a aumentar o edifício (da Matemática) do que a iluminar sua entrada, a elevá-lo mais alto do que fortalecer suas fundações”. Ainda assim, alguns matemáticos da época, como Poisson e Cournot, consideravam o conceito de limite não mais do que um substituto tortuoso para o uso de magnitudes infinitesimalmente pequenas, que em qualquer caso tinham uma existência real.

Mais tarde, o matemático francês Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), Figura 16, provou que D’Alembert estava correto. De fato, a pedra angular para o desenvolvimento formal do Cálculo foi fornecida pelas idéias de Cauchy. Ele foi o pioneiro no estudo da Análise, tanto real quanto complexa, e na eoria dos Grupos de Permutação. Pesquisou convergência e divergência de séries infinitas, equações diferenciais, determinantes, probabilidade e física matemática.

Figura 16 – Augustin-Louis Cauchy



Fonte: <https://www.sapaviva.com/augustin-louis-cauchy/ >. Acesso em 13 de dezembro de 2021

Na obra de Cauchy um conceito de limite puramente aritmético, livre de intuição geométrica e temporal, é formulado como quando os valores sucessivamente atribuídos a uma variável aproximam-se indefinidamente de um valor fixo de modo que difiram dele por uma quantidade tão pequena quanto quisermos, aquele valor é chamado limite de todos os outros.Também é apresentado seu conhecido critério para convergência de uma sequência de números reais, a saber: uma sequência (s_n) é convergente se e somente se $s_{n+r} - s_n$ pode ser feita menos em valor absoluto do que qualquer quantidade pré-atribuída para todos r e n suficientemente grande. Cauchy prova a necessidade para a convergência, mas quanto à suficiência da condição apenas observa “quando as várias condições forem satisfeitas, a convergência da série está assegurada”. Ao fazer esta última afirmação, ele está implicitamente apelando para a intuição geométrica.

Em sua obra *Résumé des leçons sur le calcul infinitesimal*, Cauchy demonstra o *Teorema Fundamental do Cálculo* e aborda, de forma mais rigorosa, o Cálculo, apresentando, entre outros resultados, uma definição para a derivada de uma função f em x como o limite do quociente $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ à medida que i se aproxima de zero, que é a atual definição moderna e não geométrica da derivada. Percebendo que este limite, quando existe, tem um valor determinado para cada valor particular de x , ele definiu uma nova função a partir da f, a função derivada de f, que notou $f'(x)$.

A obra de Cauchy representa uma etapa crucial na renúncia pelos matemáticos dos infinitesimais (fixos) e das idéias intuitivas de continuidade e movimento. Mas alguns traços das ideias tradicionais permaneceram nas formulações de Cauchy, como evidenciado pelo uso de expressões como "quantidades variáveis", "quantidades infinitesimais", "aproximar-se indefinidamente", "tão pouco quanto se deseja" e semelhantes.

Como a definição de limites dada por Cauchy ainda apresentava algumas expressões vagas, coube ao matemático alemão Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897), Figura 17, estabelecer estas idéias em bases sólidas, com a devida precisão e rigor tanto almejados pelos matemáticos da época.

Figura 17 – Karl Weirstrass

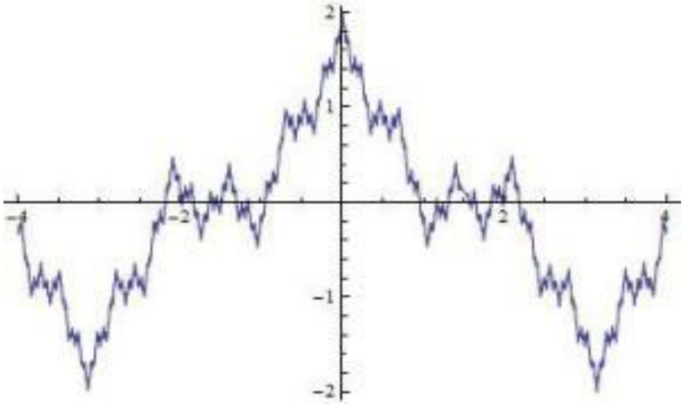
Fonte: <https://www.somatematica.com.br/biograf/weier.php>. Acesso em 13 de dezembro de 2001

Weierstrass tornou-se sinônimo de "pensamento extremamente cuidadoso", por isso, ficou conhecido como o "pai da análise moderna". Neste tema a sua abordagem se dá principalmente nos estudos das funções e das séries, bem como na construção dos números reais, onde estuda aspéctos da sua completude. São inúmeras as suas contribuições para a história da análise, vamos destacar algumas delas.

Por exemplo, é dele a definição de limite de uma função em um ponto x_0, utilizada até hoje: uma função $f(x)$ tem como Limite o valor L no ponto $x = x_0$, se para algum pequeno $\varepsilon > 0$ há um $\delta > 0$, de modo que para todo $0 < | x - x_0 | < \delta$, $| f(x) - L | < \varepsilon$.

Weierstrass também formulou a definição familiar de função contínua : uma função $f(x)$ é contínua em a se para qualquer $\varepsilon > 0$ há um $\delta > 0$ tal que $| f(x) - f(a) | < \varepsilon$ para todo x tal que $| x - a | < \delta$. Nos seus estudos das séries apresenta a definição de convergência uniforme. Para a construção dos números reais, mostra distinção entre supremo e máximo (ou ínfimo e mínimo), além de definir, por exemplo, números irracionais como limites de séries convergentes. Em uma palestra, exibi uma função contínua que não possui derivada em nenhum ponto, a chamada Função de Weierstrass, Figura 18, resultado este que causou grande espanto, uma vez que se acreditava que funções contínuas eram diferenciáveis exceto em alguns pontos.

Figura 18 – Função de Weierstrass



Fonte:< https://lusoacademia.org/tag/funcao-de-weierstrass/>. Acesso em 13 de dezembro de 2021

Este movimento em busca do rigor, apontados aqui pelas idéias de Cauchy e Weierstrass, fez com que se procurasse alternativas para definições mais sólidas em relação à abordagem dos infinitésimos, que foram alvos de críticas por conta de inconsistências lógicas. Neste contexto, o conceito de limite de uma função foi apresentado de forma coerente e sólida, a partir daí, passou a dar fundamentos e suporte ao Cálculo. Por exemplo, as definições de derivada e de integral foram reformuladas em termos de limites.

Ao colocar o Cálculo em uma base lógica, os matemáticos foram mais capazes de compreender e estender seus resultados, bem como de chegar a um acordo com alguns dos aspectos mais sutis da teoria. O desenvolvimento posterior do Cálculo já estava em uma forma mais sofisticada.

3 UM RECORTE DA EDUCAÇÃO NO BRASIL ATÉ 1961 E AS INSERÇÕES DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NA EDUCAÇÃO BÁSICA NESTES CONTEXTOS

Neste capítulo, discutiremos as principais reformas públicas da educação brasileira, dando ênfase ao ensino de matemática, destacando a inclusão e exclusão de tópicos do Cálculo em seus respectivos programas. Para isso será apresentado um estudo de como se deu o desenvolvimento da educação no Brasil, desde o período colonial até a década de 1961. A escolha por este cronograma se explica pelo fato de institucionalmente configurar a data que a partir da qual o Cálculo deixa de fazer parte do currículo regular das instituições públicas de educação básica.

3.1 A Educação Jesuítica e as Aulas-régias – Período Colonial e Imperial

Segundo Almeida (2014) quando analisamos a história da educação no Brasil é imprescindível considerar a educação católica, em específico, a participação jesuítica no processo de educação brasileira, já que ela está intrinsecamente atrelada a essa prática, sendo responsável pela educação dos habitantes de nosso país no período colonial. Os jesuítas foram responsáveis pela educação e reorganização cultural dos povos indígenas que aprenderam forçadamente novas práticas e normas sociais distintas das que eles seguiam e acreditavam.

A educação jesuítica teve início em 1549 com a Companhia de Jesus, representante da igreja católica, fundada por Inácio de Loyola em um contexto de reação da igreja católica à Reforma Protestante. Sendo a protagonista do início de nossa história educacional, a Companhia de Jesus teve a hegemonia do ensino brasileiro até 1759, quando então os padres jesuítas foram expulsos de Portugal e de suas colônias.

No Brasil a educação dita escolar deu-se com o estabelecimento de um colégio jesuíta no Rio de Janeiro em 1573, onde mestres jesuítas defenderam uma educação com concepção humanística clássica por cerca de 200 anos. Nessa fase da missão jesuíta no Brasil, a Companhia de Jesus começou a desenvolver um currículo que seria implementado em todos os colégios da Ordem no mundo, conhecido como *Ratio atque Instituto Studiorum Societatis Iesu.* Promulgado em 1599, este currículo fundamentava-se por um método padronizado, responsável pela sistematização do ensino, sendo o primeiro sistema organizado de educação católica que previa um currículo único para os estudos, dividido em graus, propondo uma educação integral do homem e pressupondo o domínio das técnicas elementares de leitura, escrita e cálculo (ALMEIDA, 2014).

Conforme Miorim (1998), a *Ratio Studiorum* foi descrita como o código educacional máximo da Companhia de Jesus. Nessa proposta, na parte equivalente ao atual ensino médio, defendia-se uma educação baseada exclusivamente nas humanidades clássicas, cujas disciplinas eram retóricas, humanidades e gramática. As ciências naturais, especialmente a matemática, eram reservadas apenas para estudos superiores. Mesmo nesses graus superiores desenvolvidos em filosofia e ciências ou artes, a matemática era pouco contemplada. Aqui no Brasil, foram implantados quatro níveis consecutivos e propedêuticos: curso elementar; as humanidades; as artes; e teologia. Ao introduzir no Brasil tal conjunto de diretrizes básicas, a educação jesuíta possibilitou uma estrutura intensamente regulada, seguindo um processo catequético com base em uma forma coerente e em um sistema de aprendizagem que foi eficaz para a época. Conforme Rocha (2010), os jesuítas nos deixaram um legado de colégios em rede, um método pedagógico e um currículo comum.

Segundo Miorim (1998), embora o processo de colonização tenha servido aos índios como ferramenta de imposição cultural, é indiscutível que os jesuítas foram os primeiros educadores brasileiros. Porém, com pouco mais de dois séculos de permanência no Brasil foram expulsos de todos os reinos de Portugal, pois suas ideias já não respondiam às necessidades econômicas e políticas da época.

O Marquês de Pombal, primeiro-ministro de Portugal de 1750-1777, foi o responsável pela expulsão dos jesuítas, tirando o comando da educação das mãos destes e passando para as mãos do Estado. Com a chamada Reforma Pombalina criavam-se as aulas régias ou avulsas de Latim, Grego, Filosofia e Retórica, que deveriam suprir as disciplinas antes oferecidas nos extintos colégios jesuítas. Criou-se, também, a figura do “Diretor Geral dos Estudos”, para nomear e fiscalizar a ação dos professores.

A partir de 1772, as aulas régias passaram a substituir o colégio jesuíta. Eram aulas independentes e isoladas com professor único, uma não se articulando com a outra. Sua criação marcou o surgimento da educação pública oficial e laica, pois até então a educação formal em todos os níveis estava sob o controle da Igreja. Porém, na realidade, o que se observou é que a educação popular foi abandonada, uma vez que este sistema de ensino, gerenciado pelo Estado, servia a uns poucos. Em geral era reservado à elite, como uma forma de educar com todos os princípios necessários para que aqueles que o usufruíssem pudessem ocupar cargos importantes nos mais diversos setores responsáveis pelo futuro fortalecimento de Portugal.

A Reforma Pombalina foi importante para a nova reorganização de Portugal, ela criou um sistema educacional, modificou as práticas pedagógicas existentes, mas, no Brasil, com o passar dos anos o sistema educacional não se organizou, permanecendo em estado precário. As consequências do desmantelamento da organização educacional jesuíta e o fracasso da não implementação de um novo projeto educacional foram graves, pois as escolas com cursos graduados não foram estabelecidas até 1776, ou seja, dezessete anos após a expulsão dos jesuítas. Novas mudanças educacionais no Brasil foram possíveis, de fato, a partir de 1808 com a chegada da família real (MIORIM, 1998.)

Uma tentativa de mudança no sistema educacional foi a criação do Colégio Pedro II em 1837. A instituição foi a primeira escola pública do estado do Rio de Janeiro com um currículo que previa a promoção por série e não por disciplina. No tocante à matemática, as disciplinas de álgebra, aritmética e geometria ocupavam todas as oito séries do curso, conforme Miorim (1998).

3.2 A Reforma Benjamin Constant – Primeira República

Segundo Spina (2002), em 8 de novembro de 1890, o então ministro Benjamin Constant emitiu um decreto que significava uma reforma fundamental do sistema educacional aplicada ao Distrito Federal. Com este decreto, algumas disciplinas tradicionais foram eliminadas e outras integradas ao ensino secundário, que deveria ocorrer dentro de sete anos, com o objetivo de introduzir uma formação mais científica em detrimento da formação literária da época. Entre as disciplinas introduzidas, o estudo do Cálculo Diferencial e Integral destaca-se como disciplina do terceiro ano de ensino. Apesar de sua introdução no ensino secundário, esta disciplina não teve muito sucesso devido ao seu caráter extremamente formal, centrado principalmente no estudo da mecânica geral. Como relata Euclides Roxo: “O estudo do Cálculo não teve ligação com o resto do curso onde a ideia de função não foi desenvolvida e foi feita de um ponto de vista excessivamente formalístico, tornou-se inútil e contraproducente.” Apesar de se restringir à capital da República, esta reforma serviu de inspiração para outras que vieram a ocorrer em Estados e Municípios. No entanto, por motivos práticos tal reforma não obteve êxito, sofrendo ao longo dos anos alterações no seu plano original. Dessa forma, o Cálculo foi retirado dos programas de ensino em 1900. O Brasil ficou nessa situação por muito tempo, sem passar por outra reforma educacional que fosse significativa para a matemática.

Ainda no período referente à Primeira República, em 1927, o diretor do Colégio Pedro II, professor Euclides Roxo, inspirado nas ideias e nas discussões do mundo sobre a matemática da época, propôs uma mudança no seu currículo de ensino. A alteração foi feita com a aprovação de um decreto que unificou as aulas de matemática no ensino secundário de modo que as disciplinas álgebra, aritmética e geometria fossem estudadas em conjuntos e não mais separadamente. Tendo em conta o prestígio do Colégio Pedro II, este modelo serviria de exemplo para todas as escolas secundárias da época (SOARES, DASSIE, ROCHA, 2004).

3.3 A Reforma Francisco Campos - Governo Provisório (Era Vargas)

A Reforma Francisco Campos de 1931, realizada no início da era Vargas (1930-1945) proposta pelo Ministro da Educação e Saúde Francisco Campos, trata-se da da primeira reforma educacional de caráter nacional. Foi elaborada pela articulação com as ideias do governo de Getúlio Vargas e seu projeto político ideológico implementado durante a ditadura do Estado Novo (MORAES, 2000).

Tal Reforma caracterizou-se por conferir à cultura escolar do ensino secundário uma estrutura orgânica no plano jurídico, percebida por seus regulamentos voltados à superação do regime de cursinhos e exames parcelados que eram comuns durante a Primeira República (PILETTI, 1987). Para desenvolver e aprimorar o sistema de ensino da época foram propostas transformações no sistema de Ensino Superior, decretos n.º 19.851 e 19.852 de 11 de abril de 1931, no sistema de Ensino Secundário decreto n.º 19.890 de 18 de abril de 1931, e no sistema de Ensino Comercial, decreto n.º 20.158 de 30 de junho de 1931. Estes decretos iam ao encontro dos anseios da sociedade, que se sentia insatisfeita com os retrocessos do país, especialmente no setor da Educação que se traduzia na elevada taxa de analfabetismo e na falta de mão-de- obra qualificada.

Algumas das medidas da Reforma Francisco Campos incluíram a criação do Conselho Nacional de Educação e a organização do ensino secundário e comercial. O último deveria oferecer formação em todos os principais setores dessa atividade e desenvolver todo um sistema de hábitos, atitudes e comportamentos. Também por meio dessa Reforma, Francisco Campos organizou o Ensino Secundário, que atualmente corresponde aos anos finais do ensino fundamental e ao ensino médio, em dois ciclos de cinco e dois anos. O primeiro ciclo era chamado Fundamental e o segundo, Complementar que era orientado para as diferentes oportunidades de carreira universitária. O Fundamental atendia à formação básica geral, enquanto os complementares previam cursos com conteúdo pré-escolar nas modalidades pré-jurídico, pré-médico e pré-engenharia. Também estabeleceu o currículo seriado e a frequência obrigatória.

A lei de 1931 propunha a criação de um sistema nacional de inspeção do ensino secundário, a ser realizado por uma rede de inspetores regionais. As universidades também ganharam um novo rumo, voltado para a pesquisa, a mediação cultural e uma maior autonomia administrativa e pedagógica (MORAES, 1992). Todas as escolas secundárias oficiais foram igualadas ao Colégio Pedro II por meio de inspeção federal. Essa opção foi dada às escolas privadas que se organizassem de acordo com o decreto e ficassem sujeitas à mesma fiscalização. No que diz respeito ao ensino de línguas estrangeiras, a reforma introduziu alterações no conteúdo e deu maior ênfase ao estudo das chamadas línguas modernas - francês, inglês e alemão, que prevaleceu sobre o latim.

A reforma Francisco Campos homogeneizou a cultura escolar do então ensino secundário brasileiro ao estabelecer oficialmente procedimentos administrativos e didático-pedagógicos para todos os ginásios do território nacional. Nela observa-se o estilo minucioso de Francisco Campos, já que tudo foi regulamentado detalhadamente e controlado pelo governo federal (MORAES, 1992). Toda essa centralização visava também suplantar o regime de cursinhos e exames parcelados, bem como a diversidade de ginásios, que foi uma característica marcante durante a Primeira República.

Sobre o ensino da matemática, as mudanças foram influenciadas pelas ideias do professor Euclides Roxo, que na época era diretor do Colégio Pedro II. A matemática passou a ser ensinada em todas as séries do currículo e conteúdos como teoria dos conjuntos e tópicos de Cálculo foram introduzidos em todas as séries do ensino secundário. A proposta de ensino da matemática consistia em unir os seus diversos ramos (aritmética, álgebra, geometria e trigonometria) e combiná-los em uma única disciplina. Todo o currículo de matemática seria norteado pelo conceito de Função, introduzido inicialmente de forma intuitiva para ser aprofundado ao longo dos anos escolares (SOARES, DASSIE, ROCHA, 2004).

Como foi observado, pela reforma o Cálculo faria parte do programa da quinta série do fundamental e se aprofundaria no programa de pré-engenharia. Noções de Cálculo também estariam presentes no Pré-médico (BRASIL, 1931 *apud* OTONE E SILVA, 2006).

Infelizmente, a implementação de todas essas ideias inovadoras, em particular, do ensino de Cálculo, não tiveram muito sucesso, já que muitos professores sentiram dificuldades de trabalhar a matemática de forma diferente do que estavam acostumados. A falta de livros didáticos que tratassem dos assuntos conforme sugeridos e de cursos de formação continuada para professores foram agravantes para o fracasso da sua implementação. Segundo Spina (2002), a maioria dos professores continuou a trabalhar de forma estanque e excessivamente rigorosa com o conteúdo.

3.4 A Reforma Capanema – Estado Novo (Era Vargas)

Ainda na Era Vargas, em 1942, foi proposta outra reforma pelo então ministro da Educação e Saúde, Gustavo Capanema. Essa reforma foi moldada pela articulação das ideias nacionalistas de Getúlio Vargas e seu projeto político ideológico implementado durante o Estado Novo (MENEZES, 2001).

Em 1934, Gustavo Capanema, ainda no governo Vargas, assumiu o Ministério da Educação e Saúde. No mesmo ano, uma nova constituição foi promulgada pela Assembleia Constituinte. A Carta Magna, no que trata da educação, afirma que o ensino primário deveria ser obrigatório e gratuito, atribui ao Estado a função de fiscalizar e regular as instituições de ensino públicas e privadas, fixa as taxas mínimas do orçamento anual para aplicação na Educação e prevê a definição do PNE, Plano Nacional de Educação (SAVIANI, 2007).

Segundo Menezes (2001), de todas as áreas do projeto educacional, a educação secundária seria aquela em que o Ministério de Capanema deixaria sua marca mais profunda e duradoura. O sistema de ensino proposto pelo ministro correspondia à divisão econômica e social do trabalho. A educação deveria, portanto, servir ao desenvolvimento de habilidades e mentalidades de acordo com os diferentes papéis atribuídos às diferentes classes ou categorias sociais. Teríamos a educação superior, a educação secundária, a educação primária, ensino profissionalizante e a educação para mulheres.

No contexto dos ideais do governo Vargas, Capanema propõe com mais clareza instrumentos para ampliar a influência do governo no campo da educação: a educação moral e cívica fecha o ciclo da educação individual e coletiva, e por meio dela se formam cidadãos, incutindo neles não só as valiosas virtudes pessoais, mas também as grandes virtudes coletivas que compõem o espírito das nacionalidades: disciplina, consciência, resignação diante das adversidades nacionais, clareza de intenções, rapidez de ação e entusiasmo patriótico. Desta forma, a preocupação com a moral, a cidadania e a responsabilidade conduzem aos objetivos propostos pelo Estado Novo, ou seja, a valorização da autoimagem brasileira e a construção de uma identidade nacional, no campo da educação. Nesse período, o Ministério da Educação também aprovou a criação de diversos órgãos, como o Serviço Nacional de Aprendizagem Industrial (SENAI), o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP) e o Serviço Nacional de Radiodifusão Educacional (MENEZES, 2001).

Capanema deu início a uma nova mudança no campo da educação, por meio das Leis Orgânicas da Educação, que estruturavam o ensino propedêutico em Primário e Secundário, e também o ensino Técnico-profissionalizante: industrial, comercial, normal e agrícola. Desta vez, pretendeu-se criar duas alternativas para os alunos após o ensino Primário: encaminhamento para o ensino Superior através do ensino Secundário ou orientação para o mercado de trabalho através do ensino técnico-profissional

A Lei Orgânica do Ensino Secundário, Decreto-Lei n.º 4.244 de 1942, alterou a organização do currículo do ensino secundário, dividindo-o em dois ciclos, o Ginasial (quatro anos de duração) e o Colegial (três anos de duração) que compreendia dois cursos paralelos, o curso Clássico e o curso Científico.

A principal diferença entre o curso Clássico e o curso Científico era que o primeiro era dirigido a alunos que desejavam cursar o ensino superior na área de humanas, o segundo àqueles que optavam pelas ciências naturais.

Ribeiro (2006) realizou um estudo onde foram comparados os conteúdos de matemática nos livros didáticos do curso Clássico e do Científico. No que se refere ao estudo do Cálculo, observou-se que este é apresentado no terceiro ano do curso Científico do Colegial e na terceira série do curso Clássico do Colegial, incluindo o ensino de derivadas e aplicações com problemas de máximos e mínimos. Até pela natureza dos cursos, o que se constata é que embora a presença do Cálculo ser expressiva no Clássico, ela se dá de forma mais aprofundada no Científico, como pode-se observar nos quadros 1 e 2 abaixo. Segundo Spina (2002), após a análise de diversos livros didáticos da época, chegou-se à conclusão de que, apesar de todas as discussões sobre o tema, prevalece a abordagem rigorosa, linear e formal, bem como sua completa separação dos demais conteúdos.

Quadro 1 – Conteúdos de Matemática nos livros didáticos do curso Clássico

CURSO CLÁSSICO
Noção de função de variável real
Noção de limite e de continuidade
Derivada: definição, interpretação geométrica e cinemática
Cálculo das derivadas
Derivadas de funções elementares
Aplicações das derivadas à determinação dos máximos e mínimos e ao estudo da variação de algumas funções simples

Fonte: O autor, 2022.

Quadro 2 – Conteúdos de Matemática nos livros didáticos do curso Científico

CURSO CIENTÍFICO
Função de variável real,
Continuidade; pontos de descontinuidade; descontinuidade de uma função racional
Derivada: definição, interpretação geométrica e cinemática
Cálculo das derivadas
Derivadas de funções elementares
Aplicações das derivadas à determinação dos máximos e mínimos e ao estudo da variação de algumas funções simples.
Estudo das Séries Numéricas
Equações diferenciais, ordinárias e de derivadas parciais; equações diferenciais ordinárias lineares de coeficientes constantes

Fonte: O autor, 2022.

3.5 Lei de Diretrizes e Bases

A próxima mudança significativa na Educação Secundária começou a ser discutida em 1946, quando a quarta Constituição da República Brasileira foi publicada após o fim da ditadura de Vargas. Nesta Constituição, coube à União estabelecer as diretrizes e os fundamentos da educação nacional. Nos anos seguintes, a proposta da Lei de Diretrizes e Bases (LDB) para o sistema nacional de Educação foi amplamente discutida, emendada e aprovada em 1961.

A partir dessa LDB houve uma nova reestruturação curricular que dividiu o sistema educacional em: Primário (4 anos), Ginasial (4 anos), Colegial (3 anos) e Superior. Ambos o Ginasial e o Colegial compreendiam o ensino secundário e o ensino técnico-profissional. Naquela época, os diversos poderes do governo tinham alguma abertura concedida pelo Ministério da Educação, que facultava a cada Estado Federal elaborar seu próprio programa de ensino, ou seja, cada um destes agora está livre para gerir seu sistema educacional. Com a flexibilização do currículo escolar, desaparece o ensino do Cálculo na escola secundária, salvo em algumas escolas isoladas, situação que perdura até hoje.

No início da década de 1960, os currículos de matemática passaram a vivenciar um movimento de transformações relevantes em nível internacional, provocando mudanças na prática em sala de aula e a inclusão de novos conteúdos na matemática da Educação Básica, o que prejudicou muito o ensino de Cálculo e Geometria, por exemplo. Diversos debates sobre a necessidade de renovação do ensino da matemática nos diferentes níveis de ensino envolveram professores, educadores e outras disciplinas educacionais no Brasil e em diversos países, como EUA, França, Japão, URSS, Holanda, Inglaterra, Argentina, Bélgica, Portugal e muitos outros (SOARES; DASSIE; ROCHA, 2004). Este movimento ficou conhecido como Movimento da Matemática Moderna (MMM), que tem sido objeto de vários estudos de pesquisadores que investigam mudanças na disciplina matemática (PINTO, 2005).

Em 1959, durante o III Congresso Nacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro, surgiram as primeiras discussões sobre tais "modernizações". A ideia partiu do professor Osvaldo Sangiorgi, de São Paulo (MIORIM, 1998). De acordo com Miorim (1998) o Movimento da Matemática Moderna (MMM) teve como objetivo aproximar a matemática ensinada na escola básica daquela a ser explorada. Esperava-se que os alunos que saíssem da escola acompanhassem os desenvolvimentos tecnológicos da sociedade. O principal objetivo do movimento era introduzir tópicos recém-estabelecidos em matemática nos currículos da educação básica, unir os ramos da matemática e mudar as práticas de ensino tradicionais, enfatizando o rigor e o formalismo na apresentação dos conteúdos. Deste modo, a axiomatização, as estruturas algébricas e a lógica dos conjuntos são exaltadas.

Os defensores do movimento, que chamaremos de Modernistas, sugeriram temas, como: Teoria dos Conjuntos; conceitos de Grupo, Anel e Corpo; Espaços Vetoriais; Matrizes; Álgebra Booleana; conceitos de Cálculo Diferencial e Integral e Estatística. Em termos de prática em sala de aula, o objetivo era focar na compreensão das estruturas ao invés de memorizar as técnicas, e unir os ramos da Matemática por meio da linguagem dos Conjuntos (MIORIM, 1998).

Segundo Pinto (2005), no Brasil o Movimento se espalhou principalmente por meio de convenções, comunicados à imprensa e livros didáticos. Dentre as ações desenvolvidas pelos grupos, destacamos a realização de cursos, seminários e palestras. Grupos de pesquisa foram criados, entre as décadas de 1960 e 1970, em algumas regiões do país para desenvolver programas e melhorar o corpo docente. Esses grupos tinham professores de todos os níveis de ensino. Dentre as ações desenvolvidas pelos grupos, destacamos a realização de cursos, a elaboração de livros didáticos, seminários e palestras. Tais ações favoreceram a disseminação da MMM pelo país.

No entanto, ocorreram alguns problemas e distorções na aplicação das ideias do MMM. De um lado a excessiva preocupação com o rigor na apresentação dos conteúdos e o despreparo dos professores e, de outro, a LDB de 1961, que deu espaço livre para o desenvolvimento dos currículos e causou graves prejuízos nas salas de aula para o ensino da Geometria e do Cálculo ou mesmo o abandono destes tópicos devido às dificuldades enfrentadas pelos professores em abordá-los. De acordo com Ávila (1991) não haveria espaço para tanto conteúdo nos programas, pois o rigor e o formalismo exigiam o ensino da Teoria dos Conjuntos e muitos detalhes axiomáticos. Nessa concepção o ensino do Cálculo demandaria um estudo detalhado de números reais, o que necessitava de tempo, o que seria, portanto, impraticável.

Parece contraditório que um movimento que pretendia modernizar a matemática, articulando o conteúdo veiculado em sala de aula com o do desenvolvimento tecnológico, deixasse de fora o estudo do Cálculo com aplicações importantes em uma ampla variedade de campos científicos.

Após um período da introdução da Matemática Moderna, não foram percebidas melhoras significativas no ensino e aprendizagem da matemática. Com isso, as críticas que o acompanhavam desde o seu início assumiam proporções cada vez maiores. Com o reconhecimento do fracasso por Modernistas, como até mesmo pelo professor Sangiorgi, o MMM vai findando no Brasil na década de 1970. Vale ressaltar, no entanto, que o movimento gerou consequências que ainda podemos observar hoje, como a falta do Cálculo nos programas de educação básica (SOARES; DASSIE; ROCHA, 2004).

Ao longo deste capítulo procurou-se fazer um recorte da educação no Brasil desde o período colonial até a LDB de 1961. Cada uma das reformas da educacionais apresentadas traduzia o momento histórico, político e social da época. No tocante ao nosso objeto de estudo que é a inserção do ensino do Cálculo na educação básica percebe-se que este conteúdo fez parte do currículo escolar em vários momentos apresentados. No entanto, a partir de 1961, oficialmente, ele é retirado da grade curricular.

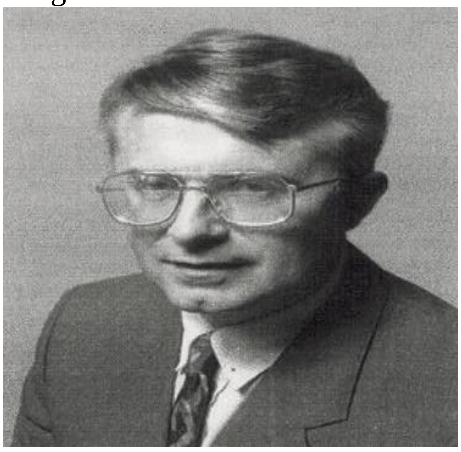
Algumas outras leis foram elaboradas a partir da lei de diretrizes e bases de 1961, LDB/61, como a LDB/71 e a LDB/96. Mais recentemente, de 2013 a 2017, uma nova proposta foi estudada para ser para ser aplicada aos três últimos anos de escolaridade, denominada “Reforma do Ensino Médio”. A ideia é que até 2021, ela esteja implementada em todas as escolas brasileiras, públicas ou privadas, que ofereçam o ensino médio. A partir dessa reforma, alguns conteúdos serão oferecidos como matérias eletivas. Pensamos que seria uma oportunidade de oferecer conteúdos relevantes do Cálculo a alunos do ensino médio, usando para isto uma abordagem adequada às suas faixas etária e aos seus conhecimentos prévios.

4 A TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA NA TRANSMISSÃO DO CONHECIMENTO

Muito se fala em “aprendizagem significativa”. Profissionais da educação há tempos utilizam essa expressão para se referir ao que os estudantes devem alcançar durante o processo de ensino/aprendizagem e como um caminho significativo deve ser percorrido para esse fim. Mas qual é a origem desta expressão tão utilizada, e o que se entende por aprendizagem significativa? Esta importante construção é a ideia central de toda uma teoria que a explica e lhe dá sentido, uma referência teórica cujos fundamentos básicos são muito pouco conhecidos.

O objetivo deste capítulo é, portanto, apresentar um breve relato da Teoria da Aprendizagem Significativa proposta por David Ausubel a fim de caracterizá-la e explicá-la no contexto inicial. Posteriormente, é mostrado um significado dela que está mais de acordo com o momento atual. Ao longo do texto serão apresentados os possíveis benefícios da aprendizagem significativa e como esta perspectiva teórica implica na prática educativa, propondo um modelo para a alcançar. Uma vez esclarecido o significado atribuído atualmente a esta construção, serão tratados, finalmente, os erros e mitos que foram gerados sobre ela.

Figura 19 – David Paul Ausubel



Fonte: <https://novaescola.org.br/conteudo/262/david-ausubel-e-a-aprendizagem-significativa> . Acesso em 13 de dezembro de 2021.

David Paul Ausubel (1918-2008) foi um psicólogo americano nascido em Nova York. Desde a década de 1960, sua contribuição mais importante para o campo da psicologia educacional, ciências cognitivas e educação científica foi o desenvolvimento de uma teoria que tornasse significativo o processo de aprendizagem e transmissão do conhecimento. Entende-se como significativo tudo que faz referência a conhecimentos prévios. Ausubel estudou na Universidade da Pensilvânia e se formou com louvor em 1939 com o diploma de bacharel em psicologia. Mais tarde frequentou a Middlesex University School of Medicine em 1943, onde completou um estágio rotativo no Gouveneur Hospital no Lower East Side de Manhattan. Depois de completar o serviço militar no Departamento de Saúde Pública dos Estados Unidos, Ausubel recebeu seu mestrado e doutorado em psicologia do desenvolvimento pela Universidade de Columbia em 1950. Ao longo da vida, ocupou vários cargos de ensino em várias faculdades de educação.

Em 1973, Ausubel se aposentou da vida acadêmica e se dedicou à prática psiquiátrica. Em sua prática, publicou muitos livros e artigos em revistas de psiquiatria e psicologia. Em 1976, recebeu o Prêmio Thorndike da American Psychological Association por sua "Contribuição Psicológica Extraordinária para a Educação". Em 1994, Ausubel, aos 75 anos, aposentou-se da carreira e dedicou-se a escrever e publicar livros.

4.1 A Teoria da Aprendizagem Significativa

A teoria da Aprendizagem Significativa concebida por David P. Ausubel em 1963, publicada em The Psychology of Meaningful Verbal Learning e por ele aprimorada em 1968 e 2003, foi desenvolvida como um modelo de ensino/aprendizagem num contexto em que a teoria comportamentalista era dominante. Ausubel compreende que o mecanismo de aprendizagem humana, por excelência, para ampliar e preservar o conhecimento, é uma aprendizagem receptiva significativa, tanto na sala de aula como na vida cotidiana.

Pode-se dizer que a Aprendizagem Significativa consiste em uma teoria psicológica da aprendizagem na sala de aula, uma vez que visa dar conta dos mecanismos através dos quais a aquisição e retenção dos grandes corpos de significados que são tratados na escola se realiza. É uma teoria psicológica porque se preocupa com os processos internos que os indivíduos põem em jogo para gerar os seus conhecimentos. Também uma teoria de aprendizagem porque é esse o seu objetivo, uma vez que aborda os aspectos que asseguram a aquisição, assimilação e retenção do conteúdo que a escola oferece, de modo a representar um significado para aos alunos (MOREIRA, 1999).

Para Ausubel (1968 *apud* MOREIRA; MASINI, 1982), a aprendizagem e retenção significativas baseadas na recepção, ou seja, quando o aprendiz recebe a informação em sua forma final, são relevantes uma vez que consistem nos mecanismos humanos "por excelência" para adquirir e armazenar a imensa quantidade de ideias e informações que constituem qualquer campo do conhecimento.

Segundo Ausubel (1968 *apud* MOREIRA; MASINI, 1982), a eficácia da Aprendizagem

Significativa baseia-se nas suas duas características principais: o seu caráter não arbitrário e a sua substancialidade (não literalidade). Substantividade significa que o conteúdo aprendido poderá ser usado em diferentes contextos pelo indivíduo, que saberá explica-lo com suas próprias palavras. A relação entre o conteúdo a ser aprendido e a estrutura cognitiva não é alterada quando outros símbolos diferentes, mas equivalentes, são usados. A não arbitrariedade se dá quando existe uma relação lógica e explícita entre o novo item a ser aprendido e os já existentes na estrutura cognitiva do indivíduo. Esta é a construção essencial da teoria que Ausubel postulou; segundo ele, os estudantes não começam a sua aprendizagem do zero, ou seja, como mentes em branco, mas trazem saberes que devidamente explicitados e manipulados são utilizados para melhorar o próprio processo de aprendizagem e para torna-lo significativo. Existe assim uma interação entre estes novos conteúdos e elementos relevantes presentes na estrutura cognitiva, que são chamados subsunçores. A presença de ideias, conceitos ou propostas inclusivas, claras e disponíveis na mente do aprendiz é o que dá sentido a este novo conteúdo nesta interação, o que também resulta na transformação dos subsunçores na sua estrutura cognitiva, que assim se tornam progressivamente mais diferenciados, elaborados e estáveis.

A aprendizagem significativa pode se dar de três maneiras: por meio da subordinação, da superordenação ou do modo combinatório. A aprendizagem subordinada ocorre quando a nova ideia é uma especificação de algo que já se sabe. A aprendizagem superordenada ocorre quando uma nova ideia é mais abrangente do que uma ou um conjunto de ideias já existente. A combinatória acontece quando a nova ideia não está hierarquicamente acima nem abaixo da já existente na estrutura cognitiva à qual ela se relacionou de forma não-arbitrária e lógica. Segundo Ausubel, o estudante aprende, quando aprende de forma significativa, com aquilo que já sabe. Desta ideia deriva o mais famoso aforismo Ausubeliano: “o fator isolado mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já sabe. Averigue isso e ensine-o de acordo”. Nesta perspectiva, portanto, o aprendiz é o protagonista do evento educacional (MOREIRA, 2013).

Para Moreira (2006) a realização de uma aprendizagem significativa pressupõe e exige duas condições essenciais:

- Atitude de aprendizagem potencialmente significativa do aprendiz, ou seja, uma predisposição para aprender de uma forma significativa.
- Apresentação de material potencialmente significativo. Isto requer que o material tenha um significado lógico, ou seja, esteja potencialmente

> relacionado à estrutura cognitiva do aprendiz, de forma substantiva e não arbitrária e existam ideias de ancoragem ou subsunçores adequados, no assunto que permitam a interação com o novo material que é apresentado.

Figura 20 – Tirinha “Aprendizagem Significativa”

Fonte:<http://anacrisostimo.blogspot.com/2014/11/papel-do-professor.html>. Acesso em 13 de dezembro de 2021.

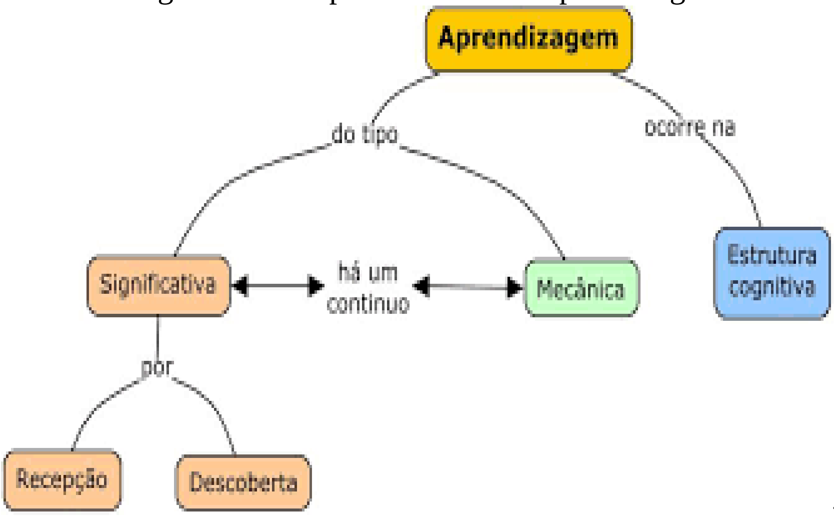
Mesmo com a predisposição para aprender e a utilização de material logicamente significativo, não há aprendizagem significativa se os subsunçores que servem de âncora para a nova informação não estiverem presentes na estrutura cognitiva. Portanto, a variável independente mais importante para que a aprendizagem significativa ocorra é a estrutura cognitiva do indivíduo (MOREIRA, 2013).

A partir de uma abordagem Ausubeliana, a organização hierárquica atribuída à estrutura cognitiva deriva de dois princípios essenciais que justificam o seu funcionamento: diferenciação progressiva e reconciliação integradora. Quando os subsunçores são manipulados corretamente, estes se tornam mais importantes, ricos e refinados. Este processo é chamado uma diferenciação progressiva. A reconciliação integradora é caracterizada pela reorganização ou eliminação das diferenças por meio de posições superordenadas. Neste processo de aprendizagem ao mesmo tempo que está a diferenciar progressivamente a sua estrutura cognitiva, está também a fazer uma reconciliação integrativa. Desta forma se trata de um processo de construção progressiva de significados e conceitualizações, razão pela qual esta abordagem é enquadrada sob o paradigma construtivista (MOREIRA, 2013).

Em contraste com a aprendizagem significativa, Ausubel vê a aprendizagem mecânica como um processo em que não há interação entre o novo conteúdo e a estrutura cognitiva do aprendiz ou, se houver, é arbitrária e literal. Acredita-se que quando isto acontece é porque não existem elementos de ancoragem claros e relevantes ou porque não há predisposição para aprender de forma significativa por parte do estudante. O resultado final deste processo é uma aprendizagem repetitiva desprovida de significado (MOREIRA,2013).

Observe que tanto a aprendizagem por descoberta, onde os alunos têm acesso aos seus conhecimentos a partir das suas próprias explorações, como a aprendizagem receptiva, na qual o aprendiz "recebe" a informação ou o conhecimento em sua forma final, podem ser mecânicas ou significativas. Assim, é um pressuposto falso afirmar que a descoberta ou reconstrução do conhecimento conduz a uma aprendizagem significativa, tal como é errado considerar que uma estratégia baseada na mera exposição ou seja, a aprendizagem por recepção, não pode ser significativa. Ambos os modos podem ser significativos, uma vez que esta condição depende de como a nova informação é assimilada e armazenada na estrutura cognitiva. Ausubel compreende que surgiu uma confusão entre duas dimensões diferentes do processo de aprendizagem: pela recepção/ descoberta e pela aprendizagem mecânica/significativa (MOREIRA, 2013).

Figura 21 – Mapa conceitual da aprendizagem



Fonte:< https://educere.bruc.com.br/arquivo/pdf2017/24179_12230.pdf >. Acesso em 13 de dezembro de 2021.

A Teoria da Aprendizagem Significativa recebeu várias contribuições, principalmente de Joseph Novak, Helen Hanesian, D. Bob Gowin e Marco Antônio Moreira. A sua conceitualização inicial ainda é válida, porém muitas investigações têm sido feitas ao longo dos anos o que tornou este período bastante profícuo em relação às pesquisas nesta área, que a enriqueceram e tornaram a sua aplicação ao contexto atual mais eficaz e produtiva.

Segundo Moreira (2013), Novak entende que a aprendizagem significativa é baseada na integração construtiva de pensamento, sentimento e ação, o que leva à valorização humana. Este autor dá assim um caráter humanista ao termo, pois tem em conta a importante influência da experiência emocional no processo que conduz ao desenvolvimento de uma aprendizagem significativa.

Para Gowin (1981 *apud* MOREIRA, 2013), a aprendizagem significativa é um processo em que os significados são partilhados. Para ele, o ensino é consumado quando o significado do material apreendido é exatamente aquele que o professor pretende para os seus alunos. A contribuição essencial de Gowin é o estabelecimento de uma interação triádica entre professor/estudante/materiais curriculares destinados à partilha de significados, sem os quais não haveria aprendizagem significativa. Além disso, Gowin delimita as responsabilidades dos diferentes atores no processo de aprendizagem.

Na sua proposta, Ausubel enfatiza a importância da interação entre novos conhecimentos e conhecimentos anteriores para que a aprendizagem tenha lugar de forma significativa, porém não aprofunda o processo em si. Na busca de respostas, os conceitos de modelo e esquema mental, propostos por Gérard Vergnaud, foram incorporados para compreender e explicar os processos cognitivos que levam à atribuição de significado. Face a novas informações fornecidas em situações relativamente familiares, a mente humana recorre a esquemas de assimilação que assumem uma organização invariante do comportamento. Estes esquemas funcionam na memória a longo prazo e representam a bagagem cognitiva do indivíduo. São representações que proporcionam estabilidade. Quando a situação é nova para o indivíduo, estes esquemas não funcionam, não são suficientes para a explicar, tendo de recorrer à construção de um modelo mental, uma representação que é executada na memória de trabalho para explicar o que é novo. Os modelos mentais caracterizam-se pelo fato de fornecerem ao sujeito um poder explicativo e preditivo, permitindo a apreensão desta nova situação. Desta forma estabelecem uma interação dialética, de modo que quando construímos um modelo mental, recorremos aos esquemas que já existem na estrutura cognitiva e estes, uma vez estabilizados, dão origem a uma organização invariável do comportamento por domínio, o que significa um novo, mais rico, mais amplo e mais estruturado esquema de assimilação. Desta forma podemos explicar a reestruturação cognitiva que leva a uma aprendizagem significativa (MOREIRA, 2013).

Para Vergnaud (1982 *apu*d MOREIRA, 2004), o conhecimento está organizado em campos conceituais cujo domínio pelo aprendiz tem lugar durante um período de tempo prolongado. Um campo conceitual é, acima de tudo, um conjunto de situações problemáticas que, para as controlar e dominar, é exigido o domínio de vários conceitos de natureza diferente. À medida que se avança no domínio de um campo conceitual, precisa-se de novas concepções e assim o desenvolvimento cognitivo do indivíduo vai se construindo. No entanto, esta trajetória é lenta, progressiva, não linear, com rupturas e continuidades.

Desta forma, os novos conhecimentos são introduzidos através de situações problemas e são elas que dão sentido aos conceitos, mas para dominá-los, o sujeito precisa de conhecimentos prévios. Este conhecimento prévio será aprofundado de acordo com as situações em que é utilizado. Esta é a interação que caracteriza a aprendizagem significativa, mas numa perspectiva progressiva e complexa, cabendo ao do professor promover as situações que conduzem a uma aprendizagem eficaz (MOREIRA, 2006).

As idéias de Vergnaud sobre o papel do conhecimento prévio como percursor de novos conhecimentos e sobre as continuidades e rupturas na construção do conhecimento, parecem ter muito a ver com a teoria da aprendizagem significativa. Os novos conhecimentos citados por Ausubel seriam as novas situações de Vergnaud, os conhecimentos pré-existentes (subsunçores) seriam conceitos em construção, a interação (relação dialética) entre eles resultaria numa aprendizagem significativa, de uma forma progressiva (MOREIRA, 2013).

Segundo Maturana (2001), para explicar como se dá o processo de aprendizagem é necessário compreender que o ser humano é um sistema autopoiético, ou seja, um ser que tende a conservar a sua própria organização, sofrendo alterações internas destinadas a compensar os distúrbios externos. Assim pode-se pensar o aprendiz como um sistema autopoiético, com o professor e os materiais educativos a atuarem como agentes perturbadores. É o aprendiz na sua estrutura que determina as suas alterações face a tais perturbações. Os conhecimentos prévios dos alunos serão as suas explicações frente ao novo, que são reformulações de experiência, dadas em formas de linguagens.

A aprendizagem significativa tem lugar, então, no domínio das interações perturbadoras que geram mudanças de estado, ou seja, mudanças estruturais sem alterar a organização autopoiética, mantendo a identidade. Nesta perspectiva, considera-se que é o sujeito, como sistema autopoiético, que determina o significado da sua aprendizagem, mantendo sempre a organização cognitiva. Esta interpretação é consistente com a proposta original de Ausubel de que a predisposição para aprender é uma das duas condições essenciais para uma aprendizagem significativa. O outro é o conhecimento prévio (MOREIRA, 2013).

A aprendizagem significativa tem o valor da mudança, porque reconstrói os esquemas cognitivos do aprendiz e envolve a produção e aplicação desse conhecimento para aquele que o constrói. Quando aprendemos de forma significativa, a informação que assimilamos é retida por mais tempo; por outro lado, quando a aprendizagem for unicamente mecânica, a possibilidade de utilização é a reprodutiva e, possivelmente num curto período de tempo, o que se “aprendeu” é logo esquecido (MOREIRA; MASINI, 1982).

Ausubel (1978 *apud* MOREIRA, 2006) também considera, em sua teoria, a possibilidade de esquecimento, ao qual ele denomina "assimilação obliteradora", que consiste na dissociabilidade de conhecimentos recém aprendidos em relação aos conhecimentos ancorados. Quando um subsunçor não é utilizado com frequência ocorre um esquecimento, que é um processo natural do funcionamento cognitivo, porém se tratando de uma aprendizagem significativa quando for necessária a sua reutilização ele será rapidamente reaprendido.

A aprendizagem significativa favorece a aquisição de novos conhecimentos que podem estar relacionados com conhecimentos anteriormente assimilados, uma vez que estes atuarão como subsunçores ou ideias-âncora para os novos conceitos, que serão mais facilmente compreendidos e retidos, uma vez que são construídos sobre elementos claros e estáveis da estrutura cognitiva. Desta forma, encoraja-se a reestruturação dos esquemas de assimilação, entendida da perspectiva de Vergnaud, e a incorporação de novas informações que nesta interação são armazenadas na memória a longo prazo (MOREIRA, 2013).

Um dos fatores internos necessários para que ocorra a aprendizagem significativa é a disposição do aluno para alcançá-la. Assim, a aprendizagem significativa é também um processo pessoal, uma vez que o significado atribuído à nova informação depende dos recursos cognitivos que o aprendiz ativa, e idiossincrático, uma vez que envolve a tomada de decisões e delimita as responsabilidades do aluno e do professor. Independente de quão potencialmente significativa é a nova informação (um conceito ou uma proposição, por exemplo), se a intenção do sujeito for apenas a de memorizá-la de maneira arbitrária e literal, a aprendizagem só poderá ser mecânica (MOREIRA, 2013).

4.2 A Prática do Ensino na Perspectiva da Teoria da Aprendizagem Significativa

Como foi visto na seção anterior, a Teoria da Aprendizagem Significativa é uma teoria psicológica da aprendizagem na sala de aula, que trata da aquisição de corpos de conhecimento organizados que são ali tratados. O trabalho que fazemos como professores é precisamente o de apresentar conteúdos estruturados para a aprendizagem. Esta teoria fornece respostas a muitas das questões que os professores se colocam há muito tempo, o que, analisado à luz dos seus pressupostos fundamentais, permite dar-lhes sentido e antecipar algumas soluções (MOREIRA, 2013).

Neste sentido, são fortes as críticas de Ausubel sobre a forma linear como os livros são organizados, a sua rejeição é manifesta porque a considera radicalmente contrária à própria essência de uma aprendizagem significativa. Para ele, a habitual relação temática não tem em conta o grau de abstração, generalização e inclusão dos diferentes tópicos e conceitos, o que é incompatível com a lógica interna das próprias disciplinas e incongruente com uma aprendizagem significativa. Nestes materiais não existem uma organização hierárquica global que explore as relações e interconexões entre diferentes tópicos, e mesmo a reiteração é evitada como negativa. Considera-se que é o próprio aprendiz que terá de estabelecer estas relações individualmente e por conta própria. Estas formas de ensino são totalmente contrárias aos postulados Ausubelianos.

A fim de auxiliar os professores a facilitar uma aprendizagem significativa, Ausubel postulou quatro princípios programáticos: diferenciação progressiva, reconciliação integrativa, organização sequencial e consolidação. Os dois primeiros são princípios definidores de aprendizagem significativa aplicados às tarefas de organização e planejamento; os outros dois são derivações naturais dos mesmos (MOREIRA; MASINI, 1982).

A diferenciação progressiva é o processo característico da aprendizagem subordinada significativa que ocorre quando um conceito mais geral e inclusivo é introduzido em primeiro lugar e, posteriormente, este é progressivamente diferenciado em suas especificidades. Assim, temos um subsunçor mais abrangente e inclusivo que engloba o novo conceito ou conteúdo. Isto significa planejar o ensino do mais geral para o mais específico, do global para o particular (MOREIRA, 2009).

Quando se trata de ideias que são novas para os estudantes, o processo de discriminação em relação às já existentes é mais complexo. Neste caso, estamos tratando da reconciliação integrativa que consiste num processo da dinâmica da estrutura cognitiva que ocorre simultaneamente a diferenciação progressiva, e tem a finalidade de eliminar diferenças aparentes, resolver inconsistências, integrar significados e fazer superordenações entre os conceitos A ideia central da reconciliação integrativa é a reorganização cognitiva entre ideias, conceitos ou proposições, já estáveis na estrutura cognitiva do aprendiz, para facilitação e ressignificação dos conceitos por meio de relações hierárquicas significativas (MOREIRA, 2013).

Derivados dos princípios programáticos acima referidos, passamos agora à organização sequencial. De acordo com isto, é necessário respeitar as relações naturais de dependência do conteúdo. Assim, o conteúdo anteriormente apresentado desempenha o papel de apoio organizador do que será apresentado a seguir; desta forma, atua como facilitador, justificando assim a importância de uma organização curricular em sequência (MOREIRA, 2009).

O princípio final que afeta a programação é a consolidação. Não se refere ao domínio mecânico como um pré-requisito, mas sublinha a necessidade de repetição e execução de tarefas, como exercícios ou resoluções de situações-problemas, em diferentes contextos e em diferentes momentos, para a generalização e internalização efetiva do que foi aprendido. Uma aprendizagem significativa envolve muitas etapas, é um processo lento (MOREIRA, 2009).

Outro fator que torna o aprendizado significativo mais fluente é a linguagem. Um discurso prolixo por parte do professor muitas das vezes faz com que o aluno perca a vontade em aprender. O ideal é aprimorá-lo gradativamente à medida que o aprendiz for dominando suas formas refinadas (MOREIRA, 2013).

Para possibilitar uma aprendizagem significativa é necessário que o material utilizado seja potencialmente significativo, isto é, seja relacionável de maneira não-arbitrária e não-literal a uma estrutura cognitiva apropriada e relevante. Entre estas ferramentas merece destaque os mapas conceituais. Estes foram desenvolvidos na década de 70 pelo pesquisador norte-americano Joseph Novak com base na proposta de Ausubel. São diagramas que mostram relações entre ideias ou entre palavras que utilizamos para representar conceitos, não classificando-as, mas ordenando-as de maneira organizada, relacionando-as. O mapeamento conceitual é uma técnica muito flexível e em razão disso pode ser usado em diversas situações, para diferentes finalidades: instrumento de análise do currículo, técnica didática, recurso de aprendizagem, meio de avaliação. Como instrumentos didáticos, os mapas conceituais podem ser usados para mostrar as relações hierárquicas entre os conteúdos que estão sendo ensinados em uma aula, uma unidade de estudo ou um curso inteiro (MOREIRA, 2013).

A aprendizagem é facilitada quando o conteúdo é apresentado de uma forma convenientemente organizada e segue uma sequência lógica e psicológica apropriada. É oportuno delimitar intenções e conteúdos de aprendizagem numa progressão contínua que respeite os níveis de inclusividade, abstração e generalidade. Isto implica determinar as relações de superordenação-subordinação, antecedente-consequente que os núcleos de informação têm uns com os outros. Os conteúdos escolares devem ser apresentados sob a forma de sistemas conceituais (esquemas de conhecimento) organizados, inter-relacionados e hierárquicos, e não de tópicos isolados e não ordenados. A ativação dos conhecimentos e experiências anteriores do aprendiz na sua estrutura cognitiva facilitará processos de aprendizagem significativos de novos materiais de estudo. O estabelecimento de "pontes cognitivas", conceitos e ideias gerais que ligam a estrutura cognitiva ao material a aprender, pode orientar o aprendiz a detectar as ideias fundamentais, a organizá-las e a interpretá-las de forma significativa. O conteúdo assim aprendido, por recepção ou descoberta, será mais estável, menos vulnerável ao esquecimento e permitirá a transferência da aprendizagem, especialmente quando se tratar de conceitos gerais e integrados. Uma vez que o estudante no seu processo de aprendizagem, e através de certos mecanismos de autorregulação, pode controlar eficazmente o ritmo, sequência e profundidade do seu comportamento e processos de estudo, uma das principais tarefas do professor é estimular a motivação e participação ativa do sujeito para aumentar o significado potencial dos materiais acadêmicos (MOREIRA, 2009).

Moreira (2013) propõe um modelo de organização do ensino coerente com a Teoria da Aprendizagem Significativa, que ajuda a planejar o ensino e a lidar com o trabalho diário em sala de aula. Neste modelo, a primeira tarefa de um professor é determinar a estrutura conceitual e proposicional do que deve ser ensinado. Recordemos que se o que se deseja é uma aprendizagem significativa então deve se evitar organizações lineares de conteúdos e explorar relações naturais de dependência dos diferentes conteúdos, que normalmente são apresentados isoladamente e em diferentes disciplinas, tornando muito difícil para os estudantes estabelecer estas relações e interações por si próprios.

Uma segunda responsabilidade pedagógica consiste em identificar quais os conceitos subsumidos que são relevantes para a aprendizagem de novos conteúdos e organizá-los sequencialmente. Este passo possui uma importância vital pois é decisivo na atribuição de significados. Cabendo aos professores saber quais os conceitos que podem funcionar como âncoras para a nova informação que será fornecida os seus alunos (MOREIRA, 2013).

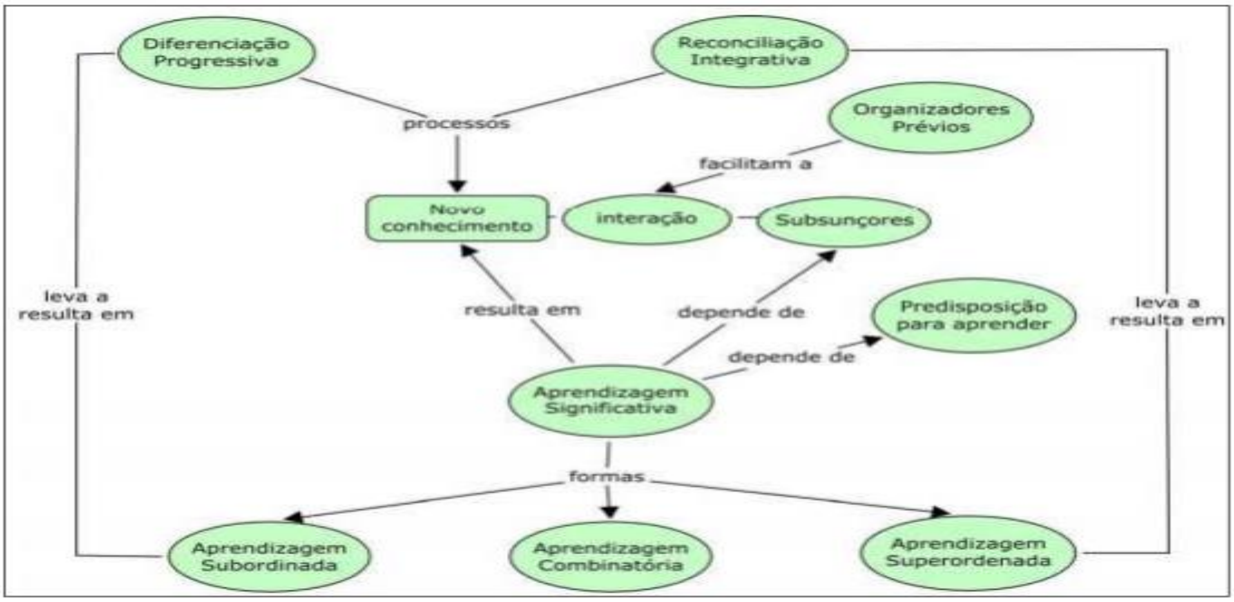
De acordo com Moreira (2013), conhecer a estrutura cognitiva conceitual do estudante é de igual importância. O ensino deve ser planejado conhecendo-se, a priori, os subsunçores relevantes existem na estrutura cognitiva dos estudantes. Caso não estejam presentes cabe ao educador fornecer ajuda e lançar mão de organizadores prévios adequados, que são materiais introdutórios apresentados antes do novo conteúdo. Estes organizadores fornecem subsídios quando os alunos não têm os subsunçores adequados para apreender novas ideias. Eles funcionam como uma ponte entre o que o aprendiz já sabe e o que ele deve saber para que ocorra a aprendizagem significativa.

A implementação do ensino constitui a fase seguinte, ou seja, o roteiro ou conjunto de orientações a serem desenvolvidas na sala de aula. Isto deve ter em conta a estrutura cognitiva conceitual previamente identificada do aprendiz. Obviamente, a avaliação também está presente neste modelo. No contexto da aprendizagem significativa, ela tem como objetivo avaliar a compreensão, captação de significados, capacidade de transferência do conhecimento em situações não-conhecidas, não-rotineiras. A relevância da avaliação para o professor reside na importância de (re)orientar o processo de aprendizagem tal como ele ocorre, a fim de, se necessário, corrigi-lo e clarificá-lo. Ressalta-se que a avaliação da aprendizagem significativa não pode ser apenas somativa (final); também deve ser formativa (ao longo do processo) e recursiva (aproveitando o erro), possibilitando que o aluno faça novamente as tarefas de aprendizagem. A avaliação baseada apenas em respostas corretas carregadas de medidores é behaviorista. Avaliar não significa medir. (MOREIRA,2013).

A Figura abaixo apresenta um mapa conceitual sobre alguns conceitos básicos da teoria ausubeliana, retirados de Moreira, Buchweitz, (1993).

Figura 22 – Mapa Conceitual sobre alguns conceitos básicos da teoria ausubeliana

Figura 2 – Alguns conceitos básicos da teoria de Ausubel



Fonte: Moreira, Buchweitz, 1993, p. 43.

Fonte: Moreira, Buchweitz, (1993).

4.3 Aprendizagem Significativa: Erros e Mitos

Nesta seção elencaremos algumas confusões existentes em torno do que se entende por aprendizagem significativa, o que mostra que os seus fundamentos são pouco conhecidos. Ainda que se busque uma prática educacional mais próxima da realidade do aluno, isto não garante, nem necessariamente proporciona uma aprendizagem significativa. A sua utilização foi banalizada, uma vez que, em geral, todos procuramos "proporcionar uma aprendizagem significativa para os nossos estudantes" e, em muitos casos, o seu significado, os fundamentos teóricos que a sustentam e a sua evolução são desconhecidos. Por esta razão, e tendo em conta que é um ponto de referência que consideramos poderoso para a sala de aula, qualquer esforço para clarifica-la será relevante. A fim de delimitar corretamente o seu significado e de o aplicar de forma mais consistente com a teoria que a sustenta, é pertinente enfatizar o que seria uma "não aprendizagem significativa".

Não é possível desenvolver uma aprendizagem significativa sem uma atitude de aprendizagem significativa; sem ela, a aprendizagem que tem lugar será repetitiva e mecânica. Assim, não é gerada uma aprendizagem significativa se as ideias de ancoragem relevantes não estiverem presentes na estrutura cognitiva do aprendiz. É um requisito indispensável sem o qual não há forma de ligar novas informações à informação existente na mente do sujeito que a recebe.

A aprendizagem significativa não acontece instantaneamente, mas requer uma troca de significados e esta transformação pode ser longa.

Aprendizagem significativa não é necessariamente aprendizagem correta; enquanto houver uma conexão não arbitrária e substantiva entre as novas informações e os subsunçores relevantes, ocorre uma aprendizagem significativa, porém pode acontecer que a nova informação não esteja correta do ponto de vista científico, por exemplo.

A aprendizagem significativa não é meramente a utilização de materiais potencialmente significativos, como mapas de conceitos e/ou diagramas em V; não se pode confundir o processo em si com ferramentas que possam facilitá-lo. O que é interessante é o processo mental que tem lugar quando se trabalha com estes instrumentos metacognitivos que favorecem a atribuição de significados e a conceitualização.

Não há aprendizagem significativa sem a troca e negociação de significados entre os diferentes protagonistas do evento educacional. Tal interação pessoal é o que determina a sua realização e, para tal, deve considerar-se que o conhecimento tem um caráter social, sendo apenas possível através da mediação semiótica, que pressupõe uma maneira relativamente simples de relação entre sujeitos e as coisas do mundo, necessariamente mediada.

A aprendizagem significativa não é uma linguagem, ou seja, não é simplesmente um modo específico de comunicação aluno/professor, mas é materializada através do modo de falar e abordar o que se deseja transmitir, isto determina o intercâmbio e a negociação de significados.

A aprendizagem significativa não só ocorre quando os estudantes se divertem ao aprender e, de fato, não há provas que uma abordagem lúdica, ainda que desejável, proporcione uma aprendizagem significativa. O objetivo do ensino não é o de entreter os estudantes, mas assegurar que estes aprendam de forma eficaz e significativa.

Um outro mito é que a aprendizagem significativa ocorre quando o conteúdo é adaptado aos interesses dos alunos, o que nos leva a considerar que o que está fora do interesse dos alunos não deve ser ensinado. Obviamente, o professor deve interessar os alunos pelo o que devem aprender de forma significativa e deve também gerar as condições para que isso aconteça.

Também não é verdade que a aprendizagem significativa ocorre quando o estudante quer aprender. É uma condição necessária, como afirma Ausubel, mas não é suficiente. A presença de subsunçores relevantes na estrutura cognitiva dos estudantes é outra condição essencial.

Uma aprendizagem significativa não pressupõe que o aprendiz descubra por si próprio o que aprende, não é aprendizagem pela descoberta. Vamos insistir que não aprendemos de forma significativa apenas o que é descoberto, nem sempre quando algo é descoberto é aprendido de forma significativa.

A aprendizagem significativa, por definição, deve ser transferível para novas situações e contextos, mas de uma forma autônoma e produtiva pelo aprendiz.

Acrescentemos mais um mal-entendido que precisa de ser considerado. A aprendizagem significativa também requer estudo, exercícios, prática, mas sempre com negociação de significados. Aqueles que acreditam que pode ser alcançada por puro ativismo, que é o que acontece quando os estudantes realizam exercícios sem sentido, repetitivos ou reprodutivos, que apenas geram aprendizagem mecânica, estão a iludir-se (MOREIRA, 2006).

Pelo que foi exposto nas seções anteriores, acreditamos que embora a aprendizagem significativa seja um tema proposto na década de 60, ele vem se enriquecendo com estudos de pesquisadores e continua, ainda hoje, atual. O seu princípio fundamental de que o conhecimento prévio é a variável isolada que mais influencia a aquisição significativa de novos conhecimentos não pode ser ignorado e deixa claro que esta teoria não pode ser tomada como superada.

A contribuição da Teoria da Aprendizagem Significativa é dupla: por um lado, fornece uma justificação consistente que nos permite compreender o processo de cognição, e, por outro lado, fornece diretrizes concretas de ação na sala de aula que orientam o que os professores precisam saber e saber fazer se querem que os seus alunos aprendam de forma significativa.

Supondo que um rio seja a estrutura cognitiva do aprendiz, o novo conhecimento é como um aumento no volume de água de um dos seus afluentes. No aprendizado mecânico, ocorre a rejeição do volume de água no afluente, conhecimento que se fixa por um tempo, porque logo após o seu uso nas avaliações, a afluente seca, ou seja, perde-se e esse conhecimento é completamente esquecido, mais rápido do que uma" assimilação obliteradora".

Pensando no tema desta dissertação e constatando a dificuldade que a maioria dos alunos encontra em um primeiro curso de Cálculo na universidade, somos levados a nos questionar se existem na estrutura cognitiva dos alunos os subsunçores necessários para este assunto ou mesmo se estes se encontram estáveis. Desta forma, acreditamos que uma introdução ao Cálculo no ensino médio, ainda que de forma intuitiva seria um subsunçor relevante para a aprendizagem desta disciplina.

5 UNIDADE DE ENSINO POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVA: UMA

ABORDAGEM ÀS IDEIAS DE LIMITE E CONTINUIDADE DE FUNÇÃO PARA ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Neste capítulo será apresentada uma proposta de guia didático voltado para professores do Ensino Médio que desejam desenvolver as ideias de Limites e Continuidade de Função em suas salas de aula. O objetivo desta proposta é apresentar noções básicas destes conteúdos pois consideramos que muitos conceitos matemáticos apresentados para os alunos ao longo de sua formação na educação escolar são permeados pelas ideias de limites e continuidade, como por exemplo, a definição de número irracional, em particular, o número π e o número e; a área de um círculo; a função exponencial e logarítmica; o logaritmo natural e o decimal; a soma de uma PG infinita, entre outros.

O guia didático sugerido se propõe a trabalhar as ideias de limite e continuidade de funções, através de algumas aplicações na vida cotidiana, onde estudou-se a possibilidade de realizar aprendizagem significativa por meio da resolução de situações-problema, livre do excessivo rigor matemático com que o assunto é estudado nas universidades. Assim, constituiria um primeiro contato com estas ideias, que podem ser importantes subsunçores para um estudo mais aprofundado do Cálculo.

Com vista na aprendizagem significativa, este material didático deve ser potencialmente significativo, por isso, propõe-se a construção de uma sequência didática de atividades que visa atuar como um instrumento facilitador da aprendizagem significativa, não mecânica, ou seja, uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa - UEPS (MOREIRA, 2011).

As atividades desta UEPS foram concebidas e desenvolvidas de acordo com uma lógica sequencial de compartilhamento e desenvolvimento de conhecimento, estrategicamente alinhada aos princípios da BNCC ao propor situações-problema cada vez mais desafiadoras e complexas. Isso visa dar mais significado ao processo de ensino, ao mesmo tempo em que aumenta o engajamento dos alunos nas atividades pedagógicas.

Ressaltamos a importância do aspecto qualitativo da análise de situações-problema, em detrimento do aspecto quantitativo, o qual se baseia em repetição de problemas modelo. Consideramos que a quantidade de questões a serem trabalhadas não é decisiva para uma compreensão adequada do tema, mas sim o modo como elas são exploradas em classe, garantindo uma abordagem que favoreça um aprendizado consciente e efetivo.

Além das situações-problema mencionadas acima, são aplicadas diversas ferramentas pedagógicas para alcançar resultados significativos em termos de aprendizagem significativa dos conteúdos abordados e da metodologia utilizada como, por exemplo, participação dos alunos, avaliação diagnóstica, mapa conceitual e avaliação final.

5.1 Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS)

Um exemplo de material potencialmente significativo é uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS). De acordo com Moreira (2011), as UEPS são sequências instrucionais fundamentadas teoricamente, voltadas para a aprendizagem significativa, não mecânica. Por meio de investigações realizadas pelos alunos no ambiente escolar, uma UEPS, aplicada em sala de aula, deve estimular e desenvolver a aprendizagem de conceitos científicos permitindo a reconstrução de significados, decorrente do questionamento tanto do aluno quanto do professor, reconstruindo argumentos, comunicando-os e validando-os junto ao grupo escolar e criando novas questões para reflexões posteriores. Quando a escola se torna um lugar de investigação, os sujeitos integrados a esse processo constroem saberes, criam um ambiente de diálogo, e os valores que moldam o ser humano são fortalecidos, proporcionando um lugar para o exercício pleno da cidadania.

As UEPS são unidades que possibilitam uma aprendizagem significativa sobre temas específicos. As atividades que a compõem são elaboradas em dificuldade crescente e visam mobilizar e desafiar os alunos de modo que o conhecimento prévio se apresente como elemento fundamental. Desta forma, uma UEPS se baseia em atividades que proporcionam não apenas a investigação de um novo conceito, mas também a reflexão e a discussão mediada pelo professor

Alguns aspectos sequenciais devem ser considerados na construção de uma UEPS: definição do tema específico; sugestões de situações nas quais o aluno possa expressar seus conhecimentos prévios; apresentações de situações-problema à nível introdutório sobre o tema a ser tratado; apresentações dos aspectos gerais do conhecimento a ser transmitido (diferenciação progressiva) começando pelos mais gerais, com uma visão do todo; retomada dos aspectos mais gerais e estruturantes em uma nova apresentação, de maior nível de complexidade; objetivando completar a unidade, retomar as características mais relevantes do conteúdo em questão, numa perspectiva integradora, a níveis mais elevados de complexidade (reconciliação integrativa); avaliação da aprendizagem; avaliação da UEPS (MOREIRA, 2011).

Com essas diretrizes em mente e em busca de uma aprendizagem significativa, optou-se por desenvolver uma UEPS como alternativa ao método tradicional de ensino, cujo planejamento é descrito na próxima seção.

5.1.1 Capacidades e Habilidades da BNCC a Serem Desenvolvidas Durante a Aplicação da

UEPS

Durante o desenvolvimento desta UEPS, busca-se garantir que os alunos relacionem observações empíricas do mundo real a representações (gráficos, tabelas, figuras e esquemas) e associem essas representações a uma atividade matemática (conceitos e propriedades), fazendo induções e conjecturas. Assim, espera-se que eles desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações. A dedução de algumas propriedades foram estimuladas. Deseja-se que eles desenvolvam a habilidade de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. Procura-se, nas atividades, o aprimoramento do letramento matemático que assegura ao aluno reconhecer que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo, notando o caráter de jogo intelectual da matemática como um aspecto que contribui para o desenvolvimento do pensamento lógico e crítico, estimula a investigação e pode ser extremamente prazeroso.

5.2 A UEPS: Introdução às Ideias de Limite e Continuidade de Função

A UEPS que apresentaremos consiste em uma sequência de atividades que foram elaboradas a partir do conhecimento prévio do aluno, estabelecendo conexões cognitivas necessárias para possibilitar uma aprendizagem mais significativa. Foram selecionadas situações-problema com aplicações das ideias de limites e continuidade de função. À medida que o conteúdo avançava, gradativamente introduzia -se novos questionamentos que gostaríamos de inspirar no aluno.

Em algumas situações, foram utilizadas questões consideradas mecânicas, mas que visavam reforçar o conhecimento prévio, de modo que o conteúdo que iria ser trabalhado fosse assentado em uma base sólida. Outras objetivavam estruturar o conhecimento desejado quando o mesmo não estava presente na estrutura cognitiva do aluno ou havia sido esquecido. Cada atividade abordou o conteúdo de ensino de maneira sequencial. Quando necessário, os temas tratados na atividade anterior eram retomados, ampliando a abrangência do conteúdo dentro do conceito explorado.

Inicialmente, foram elaboradas atividades com o objetivo de diagnosticar e identificar conhecimentos prévios e dificuldades dos alunos sobre funções. A linguagem de funções, a leitura de gráficos e tabelas foram os subsunçores utilizados na sequência didática. As resoluções das situações-problema serão realizadas pelos alunos com a orientação direta do professor. Neste processo cabe ao professor fazer as adaptações e reorganizações dos elementos do conteúdo da sequência didática, utilizando os subsunçores adequados e respeitando os princípios da diferenciação progressiva, reconciliação integradora e consolidações intermediárias constantes do conteúdo, sempre antes que os novos conceitos fossem introduzidos.

A partir desse planejamento, foram definidas as etapas da UEPS, aqui denominadas fases, sendo a primeira a apresentação da UEPS e a última, a avaliação da UEPS.

Para cada fase, sempre que necessário, serão apresentados os objetivos, as atividades e uma sugestão de exposição teórica do professor referente ao assunto tratado na fase em questão.

Para o desenvolvimento de cada fase, a dinâmica sugerida é que os alunos desenvolvam as atividades em pequenos grupos, incentivando com isto o compartilhamento de conhecimentos. Os grupos registrariam as suas respostas e apresentariam as suas estratégias de soluções para a turma e para o professor, que atuaria como mediador. Seria importante que o grupo entregasse ao professor este registro para uma futura análise de resultados.

Com estas diretrizes foi desenvolvido este guia didático, que apresentará as fases mencionadas nas próximas seções.

5.2.1 Fase1: Apresentação da UEPS aos Estudantes

Objetivo geral: Definir o tema específico a ser abordado e identificar seus aspectos declarativos e procedimentais aceitos no contexto do conteúdo em que este tema será inserido.
Objetivo específico: Apresentar o propósito da UEPS aos alunos, mostrando a importância da aprendizagem das ideias de Limites e Continuidade de Função, as suas aplicações para a compreensão de situações presentes no cotidiano.

5.2.2 Fase 2: Atividade Individual; Avaliação Diagnóstica

Objetivo Geral: Identificar o conhecimento prévio dos discentes na resolução de situações-problema que os conduza a externaliza-lo no contexto da disciplina que está sendo ministrada.
Objetivo específico: Identificar o conhecimento prévio dos discentes na resolução de situações-problema que envolvam o conteúdo de funções.
Atividade: Resolução de uma lista de exercícios envolvendo noções básicas de funções. Um exemplo de avaliação diagnóstica encontra-se no apêndice B.

5.2.3 Fase 3: Atividade Colaborativa; Apresentação de Situações-Problema a Um Nível Introdutório

Objetivo Geral: propor situações-problema a um nível introdutório, tendo em conta os conhecimentos prévios dos alunos, de forma que os prepare para a iniciação dos conhecimentos a serem transmitidos (declarativos ou procedimentais). Sem ainda a conceituação dos temas que serão abordados na UEPS, essas situações-problema já podem conter ideias do foco temático. Elas podem atuar como organizadores prévios, funcionando como uma ponte entre o que o aluno já sabe e o que será transmitido.
Objetivo específico: O objetivo dessas atividades é produzir conhecimento prévio necessário para a introdução das ideias de limite, limite lateral e continuidade de funções.
Atividade: Resolução de duas situações-problema, através da análise gráfica, dos quadros e algébrica.

QUESTÃO 5.3.1: Considere a função f definida por $f(x) = x^2 - x + 2$ para todo x real.

a) O quadro abaixo relaciona alguns valores de x às suas imagens, $f(x)$. Usando uma calculadora, preencha o quadro abaixo com os valores obtidos para $f(x)$. Observe que, na primeira coluna do quadro, os valores de x representam uma aproximação do número 2 realizada à sua esquerda, ou seja, por valores menores que 2. Já na terceira coluna os valores de x representam uma aproximação à direita de 2, ou seja, por valores maiores que 2.

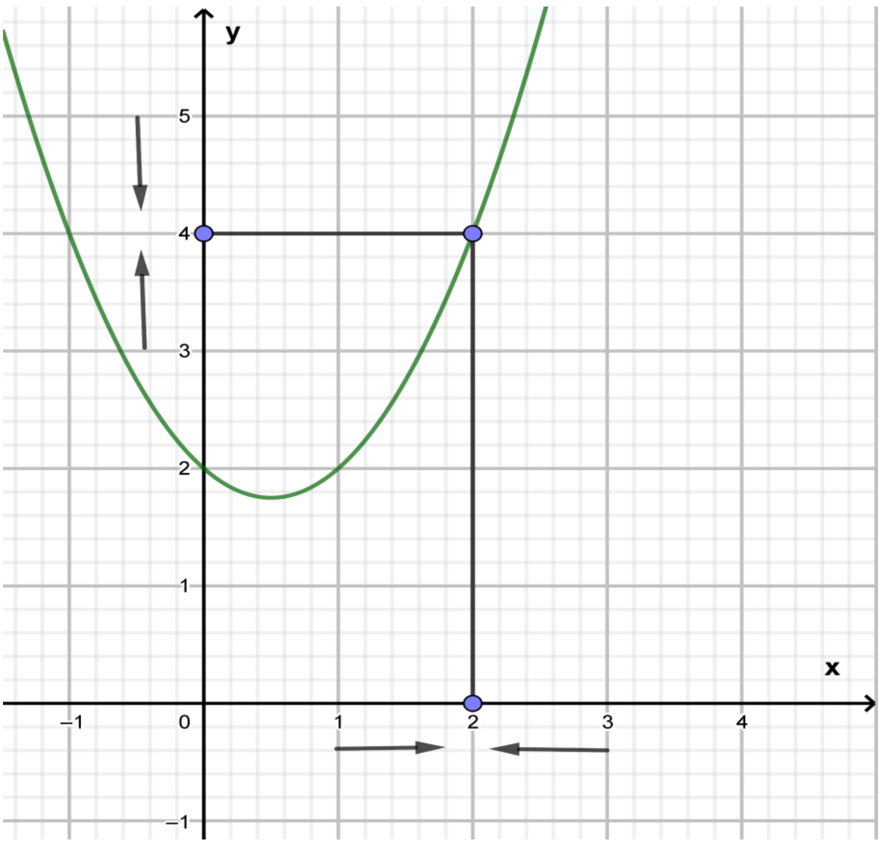
Quadro 3 – Questão 5.3.1 letra a); Fase 3

x	$f\,(x)$	x	$f(x)$
1		3	
1,5		2,5	
1,8		2,2	
1,9		2,1	
1,95		2,05	
1,99		2,01	
1,995		2,005	
1,999		2,001	

Fonte: O autor, 2022.

b) Observe o gráfico da função f abaixo:

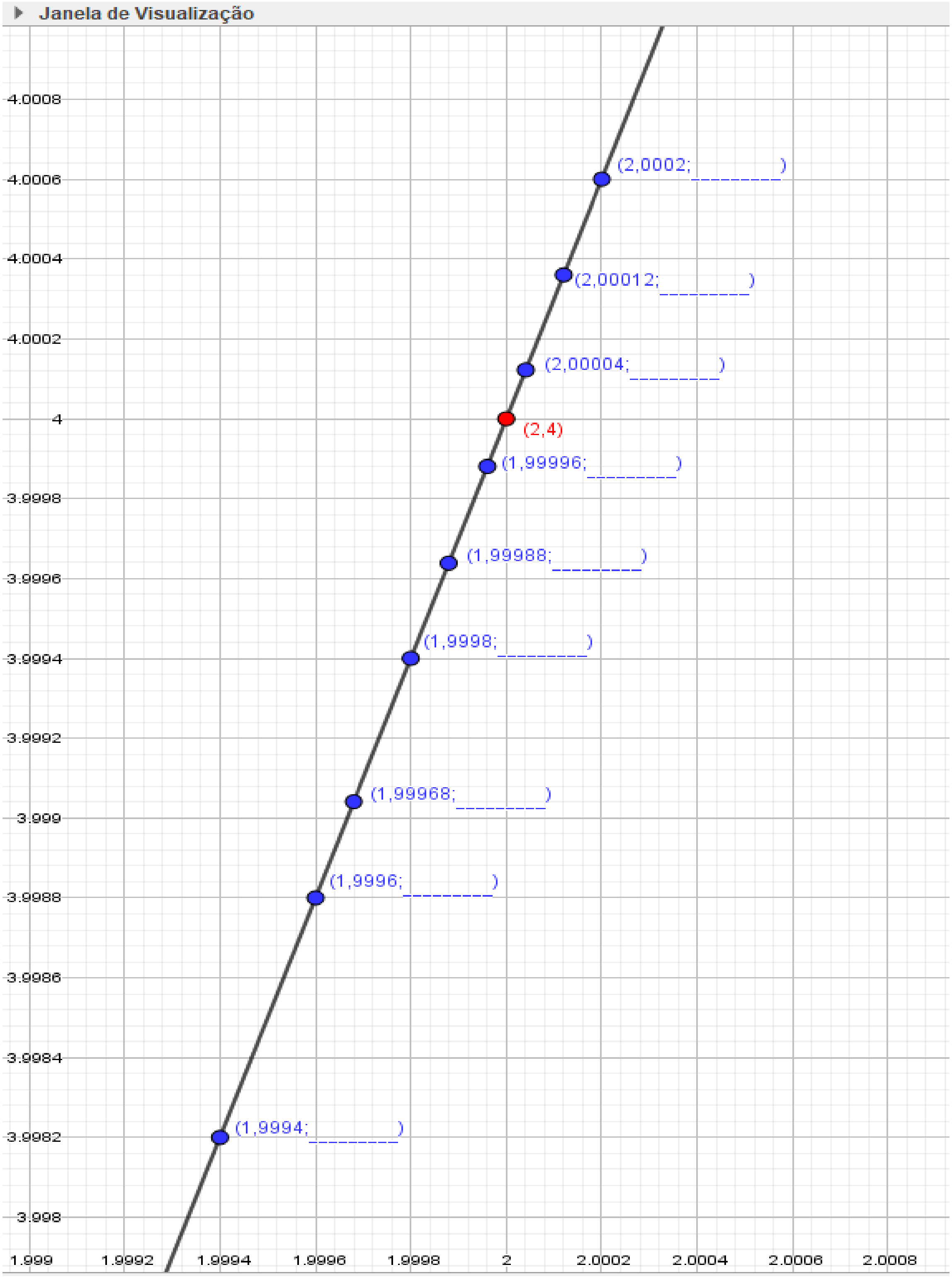
Gráfico 1 – Gráfico da função $f(x)$; Questão 5.3.1 da Fase 3



Fonte: O autor, 2022.

Fazendo um “zoom” em torno do ponto $(2{,}4)$ obtemos a configuração a seguir. Os valores do eixo vertical estão aproximados. Preencha os valores de "y" nos pares ordenados destacados, de acordo com o gráfico abaixo.

Gráfico 2 – "zoom" em torno do ponto $(2{,}4)$ da função $f(x)$; Questão 5.3.1 da Fase 3



Fonte: O autor, 2022.

c) Preenchendo o quadro, item (a), e os valores das ordenadas nos pares ordenados, item (b), o que você observa com os valores encontrados para $f(x)$? Os valores encontrados ficam próximos a qual número?
d) De acordo com o gráfico, se tivermos x igual a 2, que valor a função f assumirá?
e) Podemos encontrar o valor que a função intenciona alcançar quando x se aproxima de 2 por simples substituição na expressão de f?
f) De uma forma muito informal, podemos dizer que uma função é contínua quando seu gráfico não contém saltos nem buracos; ou seja quando é possível contornar o gráfico com um lápis, da esquerda para a direita sem tirar o lápis do contorno. Se em algum ponto do contorno do gráfico, você tirar o lápis e recomeçar em outro lugar então dizemos que ocorre uma descontinuidade no valor de x associado a este ponto. Com estas informações, diga se a função f é contínua?

QUESTÃO 5.3.2: Em uma empresa, a função f , que representa o custo para a fabricação de um determinado produto, em relação à sua quantidade produzida x, é definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x & se \quad 0 \leq x \leq 10 \\ 0,9 \cdot x & se \quad x > 10 \end{cases}$$

a) Como na questão 5.3.1, com o uso da calculadora, preencha o quadro a seguir. Observe que os valores de x aproximam-se de $x = 10$ pela esquerda e pela direita.

Quadro 4 – Questão 5.3.2 letra a); Fase 3

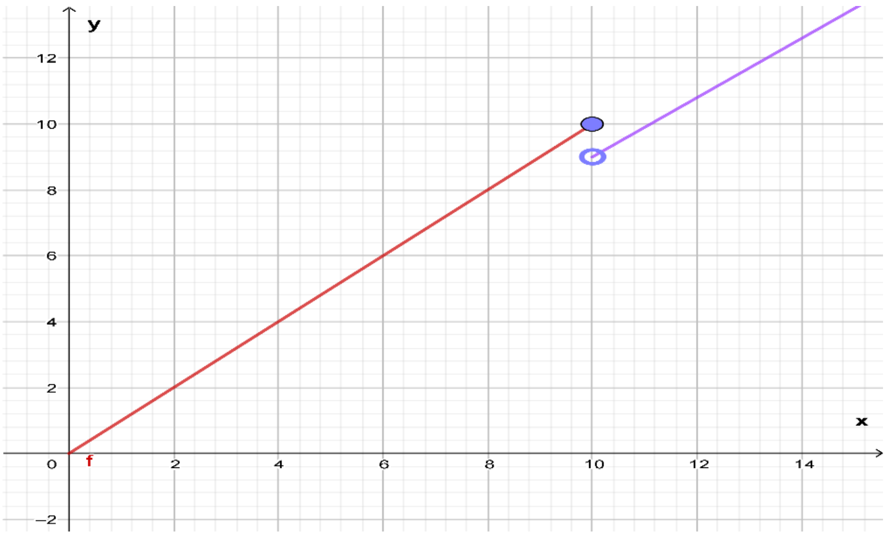
x	$f(x)$	x	$f(x)$
9		11	
9,5		10,5	
9,8		10,2	
9,9		10,1	
9,95		10,05	
9,99		10,01	
9,995		10,005	
9,999		10,001	

Fonte: O autor, 2022.

O que acontece com os valores de $f(x)$, quando x se aproxima de 10 pela esquerda e pela direita, ou seja, numa vizinhança de $x = 10$?

b) Agora observe o gráfico abaixo da função. É perceptível que a função dá um salto em $x = 10$. Por que isto acontece?

Gráfico 3 – Gráfico da função $f(x)$; Questão 5.3.2 da Fase 3



Fonte: O autor, 2022.

b) Qual o valor de $f(10)$?
c) A função f é contínua em $x = 10$?

5.2.4 Fase 4: Atividade Colaborativa; Ideia de Limite e Limites Laterais

Objetivo Geral: Apresentar os conhecimentos a serem transmitidos/aprendidos, tendo em conta a diferenciação progressiva, ou seja, partindo de aspectos mais gerais e inclusivos, realizando um primeiro olhar para o todo, do que é mais importante, para depois, abordar aspectos mais específico do conteúdo a ser ensinado.
Objetivo específico: O objetivo dessa etapa é introduzir a ideia de limite, limites laterais, continuidade com base no que foi examinado nas fases anteriores.
Atividade: Após a exposição teórica, os alunos serão instruídos a resolverem três situações-problema por meio de análise gráfica, do quadro e algébrica das funções utilizadas em cada atividade.

EXPOSIÇÃO TEÓRICA DO(A) PROFESSOR(A): Definição informal de limite de uma função

Para entender a noção de limite de uma função, vamos tomar a função f, apresentada na questão 5.3.1 definida por $f(x) = x^2 - x + 2$ para todo x real. Observamos que os valores da função f se aproxima de 4, quando x se aproxima de 2 pela esquerda (valores menores que 2) ou pela direita (valores maiores que 2). Nesse caso dizemos que o limite da função f quando x tende a 2 é igual a 4. Escrevemos: $\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} x^2 - x + 2 = 4$. O estudo do limite de uma função envolve estudar o comportamento (ou a tendência) dos valores da função em torno de um determinado valor de x, ou seja, numa vizinhança deste ponto. Simbolicamente, após o que foi visto, temos:

Quadro 5 – Simbolos de Limite

O limite de uma função	$\lim f(x)$
Descreve o comportamento da função conforme a entrada	x
Aproxima	$\to$
De um valor particular	c

Fonte: O autor, 2022.

Para o limite de uma função não estamos interessados no valor que ela assume no ponto x, mas no valor que tende a atingir. Na verdade, a função pode até não estar definida neste ponto x. Em última análise, o que nos interessa são os valores da função próximos ao ponto x, aqui no exemplo, próximo a $x = 2$. Para indicar o valor que f se aproxima quando x se aproxima de 2 pela esquerda, escrevemos $\lim_{x \to 2^-} f(x)$. Para indicar o valor que f se aproxima quando x se aproxima de 2 pela direita, escrevemos $\lim_{x \to 2^+} f(x)$. Estes limites são chamados de limites laterais, que podem ser limite lateral à esquerda ou limite lateral à direita.

Observamos pelo gráfico e pelo quadro da questão 5.3.1 que se nos aproximarmos pela esquerda e pela direita de $x = 2$ chegamos ao mesmo valor, ou seja: $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2} f(x) = 4$.

QUESTÃO 5.4.1: Vamos considerar a função f, utilizada na questão 5.3.2 definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x & se \quad 0 \leq x \leq 10 \\ 0{,}9 \cdot x & se \quad x > 10 \end{cases}$$

Com base nas observações no gráfico, no quadro e algébrica da questão 5.3.2, responda:

a) Qual o valor de $\lim_{x \to 10^-} f(x)$?

b) Qual o valor de $\lim_{x \to 10^+} f(x)$?

EXPOSIÇÃO TEÓRICA DO PROFESSOR(A): Existência do limite de uma função em um ponto

Na questão 5.4.1, vimos que os limites laterais não coincidem. Quando isto acontecer, dizemos que o limite não existirá naquele ponto analisado. Ou seja, dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende para c existe e é um número real L, $\lim_{x \to c} f(x) = L$, se e somente se ambos os limites laterais existirem e forem iguais ao mesmo número L: $\lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^-} f(x) = L$. Vale observar que o limite de uma função, quando existir, é um número real.

Concluímos, dessa forma, que para a função f da questão 5.4.1 não existe o limite de $f(x)$ quando x tende a 10, uma vez que os limites laterais são distintos neste ponto.

QUESTÃO 5.4.2: A função de produção f, que associa o número total de unidades produzidas de um determinado bem em relação à quantidade x de matéria-prima, em quilogramas, utilizada para sua fabricação, é definida por:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}, \text{ para todo } x > 0 \text{ real e } x \neq 2$$

a) Usando uma calculadora, preencha o quadro abaixo que contém valores de x próximos a 2.

Quadro 6 – Questão 5.4.2 letra a); Fase 4

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1		3	
1,5		2,5	
1,8		2,2	
1,9		2,1	
1,95		2,05	
1,99		2,01	
1,995		2,005	
1,999		2,001	

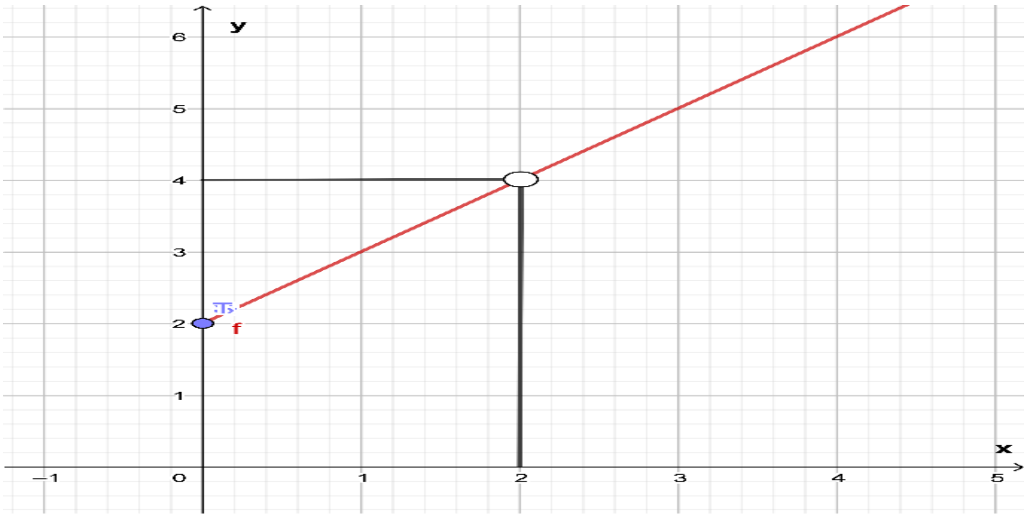
Fonte: O autor, 2022.

b) Com base no quadro acima, avalie o comportamento da função f na vizinhança de $x = 2$. Responda: Os limites laterais à esquerda e à direita de $x = 2$ são iguais?

c) Existe o limite de $f(x)$ quando x se aproxima de 2, faça a análise algébrica, do quadro e gráfica? Se existir, qual é esse valor?

d) Agora considere o esboço do gráfico da função f. Por que o gráfico tem um "buraco" quando x é igual a 2?

Gráfico 4 – Gráfico da função $f(x)$; Questão 5.4.2 da Fase 4



Fonte: O autor, 2022.

e) A função f é contínua no ponto $x = 2$?

EXPOSIÇÃO TEÓRICA DO(A) PROFESSOR(A):Indeterminação matemática

Quando substituímos $x = 2,$ na lei da função, obtemos a indeterminação $\frac{0}{0}\cdot$ Assim, não podemos encontrar o limite da função quando x se aproxima de 2 por simples substituição. No entanto, pelo gráfico e pela tabela, podemos perceber que a função se aproxima do valor 4 à medida que x se aproxima à direita e à esquerda de $x = 2$. Vamos explicar porque isto ocorre reescrevendo a funçãof de uma forma correspondente à primeira. Por fatoração: $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)\cdot(x+2)}{(x-2)} = x + 2$, $x \neq 2$. Desse modo, quando a função se expressa nesta nova forma, podemos usar a substituição para encontrar o limite, e assim obter o valor 4 como resultado. Assim, $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4$. Observe que embora a função não esteja definida em $x = 2$, o limite da função existe quando x se aproxima de 2.

QUESTÃO 5.4.3: Dada a função f, definida por $f(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ para todo x real, $x > 0$ e $x \neq 4$.

a) Usando uma calculadora, preencha o quadro abaixo para analisar o comportamento dessa função numa vizinhança de $x = 4$.

Quadro 7 – Questão 5.4.3 letra a); Fase 4

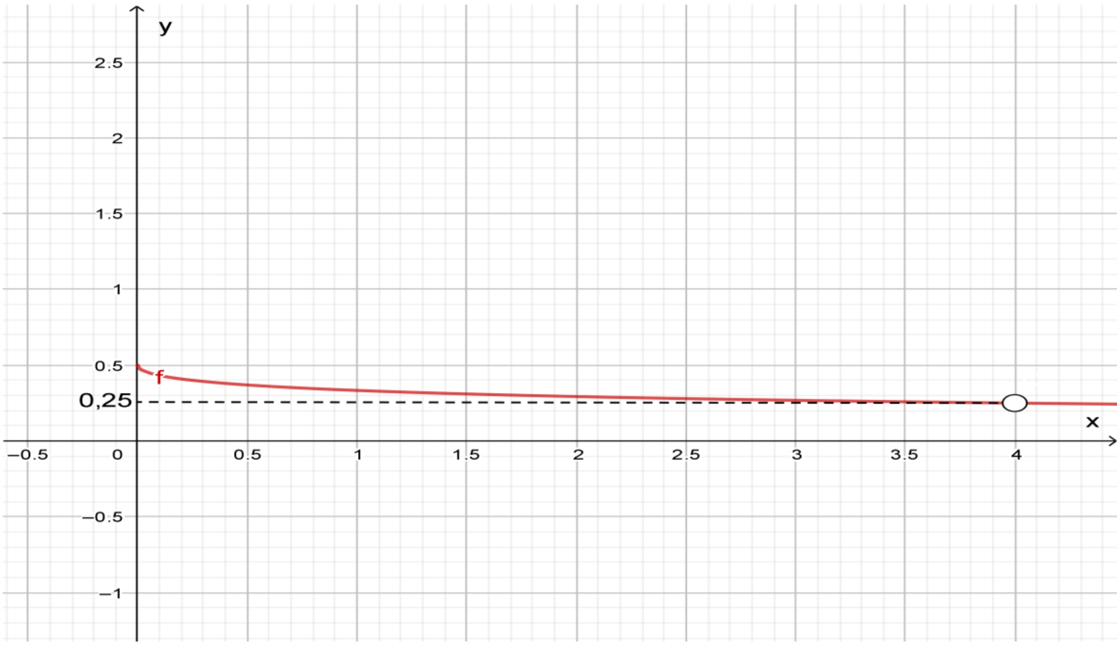
x	$f(x)$	x	$f(x)$
3,9		4,1	
3,99		4,01	
3,999		4,001	
3,9999		4,0001	
3,99999		4,00001	
3,999999		4,000001	
3,9999999		4,0000001	
3,99999999		4,00000001	

Fonte: O autor, 2022.

b) Aproximando-se pela esquerda e pela direita de $x = 4$, responda: existe o limite da função em $x = 4$?

c) Agora considere o esboço do gráfico da função f abaixo. Por que o gráfico tem um "buraco" quando x vale 4

Gráfico 5 – Gráfico da função $f(x)$; Questão 5.4.3 da Fase 4



Fonte: O autor, 2022.

d) Encontre, algebricamente, o valor de: $\lim\limits_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

e) A função f é contínua no ponto x = 4?

EXPOSIÇÃO ORAL DO PROFESSOR: Indeterminação matemática

Pensar em fatorar pela diferença entre dois quadrados também não é uma boa opção. Então, vamos tentar a multiplicação pelo conjugado da parte onde ocorre o radical. Mas o que é conjugado? Conjugado é a mesma expressão, mas com a operação oposta. Assim, o conjugado de $\sqrt{x} - 2$ seria $\sqrt{x} + 2$. Então, vamos tentar multiplicar e dividir por esse valor para não alterar a função. Observe: $\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}$. O conjugado tem a mesma expressão, mas uma operação oposta. Colocar o conjugado sobre si próprio é como multiplicar por 1. Após as primeiras orientações, descobrimos que a multiplicação por 1 não altera o valor fracionário. Veja como esse truque de multiplicar e dividir pelo conjugado nos ajuda a encontrar o limite. Obtemos uma função equivalente se considerarmos x diferente de 4. Deve-se lembrar que estamos interessados no valor limite, o que acontece nas proximidades do ponto, isto é, nas proximidades de 4. Então: $\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \frac{(x-4)}{(x-4)\cdot(\sqrt{x}+2)}$. Observe que obtemos a expressão no numerador e denominador, $(x - 4)$. Se considerarmos x diferente de 4, podemos simplificar porque $\frac{(x-4)}{(x-4)} = 1$. Temos então a seguinte função para calcular o limite: $\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \frac{(x-4)}{(x-4)\cdot(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x}+2}$. Então, queremos encontrar: $\lim_{x \to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2}$. Agora podemos avaliar a função com substituição porque se substituirmos x por 4, obtemos $\frac{1}{4}$.

Logo: $\lim_{x \to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}$. Como vimos anteriormente, os métodos mais comuns de encontrar o limite de uma função quando há um limite são: substituição, quando é possível avaliar a função substituindo o valor de x; fatoração, quando não é possível avaliar a função por substituição, mas a expressão do numerador permite a fatoração; e multiplicação pelo conjugado, exibido para expressões que contêm um radical. Neste ponto, já temos uma boa ideia de como encontrar o limite de uma função. É importante lembrar, entretanto, que se a função tem um limite, se x tende para um certo ponto c próximo a ele, a função tende para o mesmo valor L, ou seja, ela tende a assumir o mesmo valor no gráfico.

5.2.5 Fase 5: Atividade Colaborativa; Ideia de Limites Infinitos e Assíntotas

Objetivo específico: entender os significados de limites infinitos e de assíntotas.

QUESTÃO 5.5.1: Considere a função f definida por $f(x) = \frac{2x}{x-3}$ para todo x real e $x \neq 3$.

a) Usando uma calculadora, preencha o quadro abaixo para analisar o comportamento dessa função numa vizinhança de $x = 3$, aproximando-se pela sua esquerda e pela sua direita.

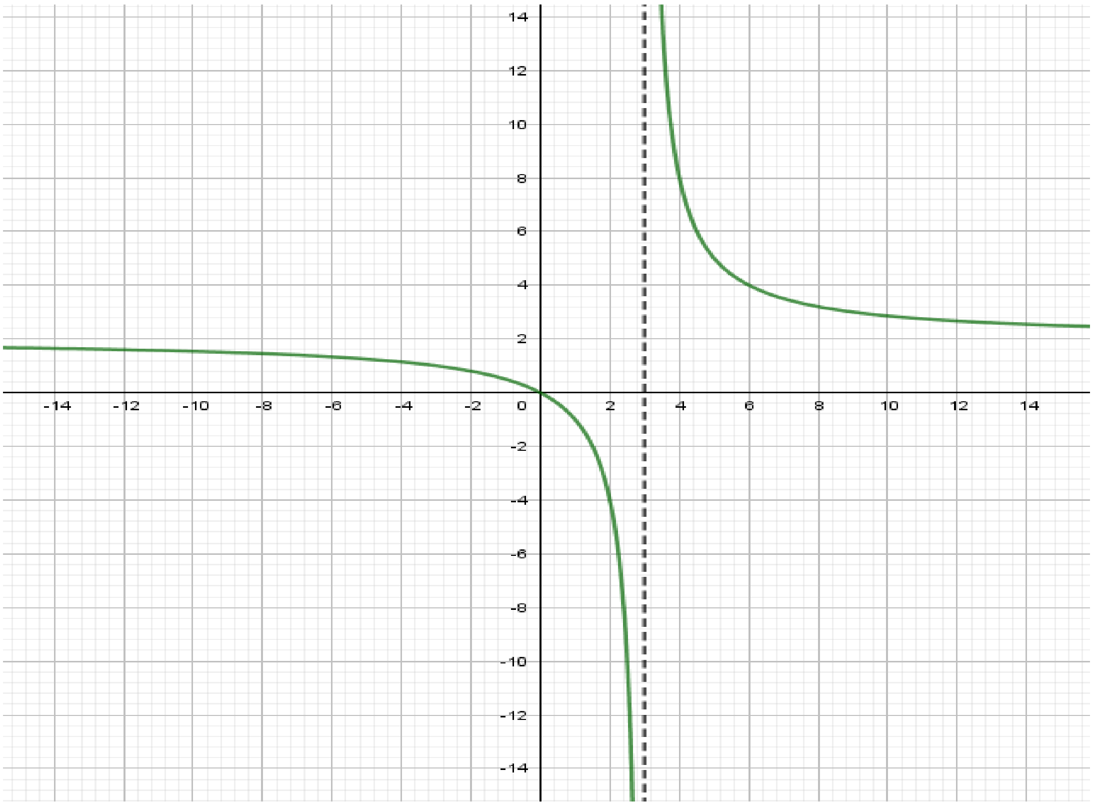
Quadro 8 – Questão 5.5.1 letra a); Fase 5

x	$f(x)$	x	$f(x)$
3,5		2,5	
3,4		2,6	
3,3		2,7	
3,2		2,8	
3,1		2,9	
3,05		2,95	
3,01		2,98	
3,0001		2,9999	

Fonte: O autor, 2022.

a) Observe agora o gráfico de f.

Gráfico 6 – Gráfico da função $f(x)$; Questão 5.5.1 da Fase 5



Fonte: O autor, 2022.

Com base na análise do quadro, gráfica e algébrica, o que você observa sobre os valores da função f à medida que x se aproxima do valor 3 pela direita e pela esquerda?

b) A função f é contínua em $x = 3$?

EXPOSIÇÃO TEÓRICA DO(A) PROFESSOR(A): Valor indefinido; Assíntota Vertical

Pela tabela e pelo gráfico observamos que à medida que nos aproximamos de $x = 3$ pela esquerda, os valores da função f são negativos e vão ficando cada vez menores. Quando nos aproximamos pela direita, os valores são positivos e se tornam cada vez maiores. Para expressar esta situação em linguagem matemática dizemos que $\lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty$ (menos infinito) e que $\lim_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$ (mais infinito). Note que é apenas uma maneira de se expressar pois sabemos que o limite de uma função, quando existe, é um número real. A situação que surgiu neste momento é diferente das observadas nas questões 5.4.1 e 5.4.2. Observe que se substituirmos $x = 3$ na lei da função, obteremos $\frac{6}{0}$, o que não é uma indeterminação matemática, é um valor indefinido. Desse modo, não precisaremos encontrar outra maneira de escrever a função que corresponde à primeira, como fizemos nas questões citadas. Este fato acontece sempre que na lei da função obtivermos um número diferente de zero dividido por zero. No plano cartesiano, este fato indica que existe uma reta paralela ao eixo y passando, no caso, pelo ponto (3,0), tal que à medida que os valores de x se aproximam de 3, o gráfico de f se aproxima cada vez mais da reta, sem nunca a intersectar. Esta reta é denominada assíntota vertical ao gráfico da função.

Em geral quando $\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty$ então o gráfico de f possui uma assíntota vertical passando pelo ponto $(c, 0)$, ou seja, à medida que os valores de x se aproximam de $x = c$ tem-se que o gráfico da f se aproxima desta reta vertical, paralela ao eixo y, sem nunca a intersectar.

QUESTÃO 5.5.2: Um governo estipula que o custo de remoção $f(x)$, em milhões de reais, de x% dos metais pesados que contaminam uma reserva de água doce é dado pela seguinte expressão: $f(x) = \frac{120}{100-x}$, para todo $0 < x < 100$. Considere o gráfico da função f:

Gráfico 7 – Gráfico da função $f(x)$; Questão 5.5.2 da Fase 5

Fonte: O autor, 2022.

a) Qual é o custo para eliminar metade dos metais pesados dessa reserva?

b) Qual é o percentual de reservas não poluídas quando o custo é de 280 000 000 reais?

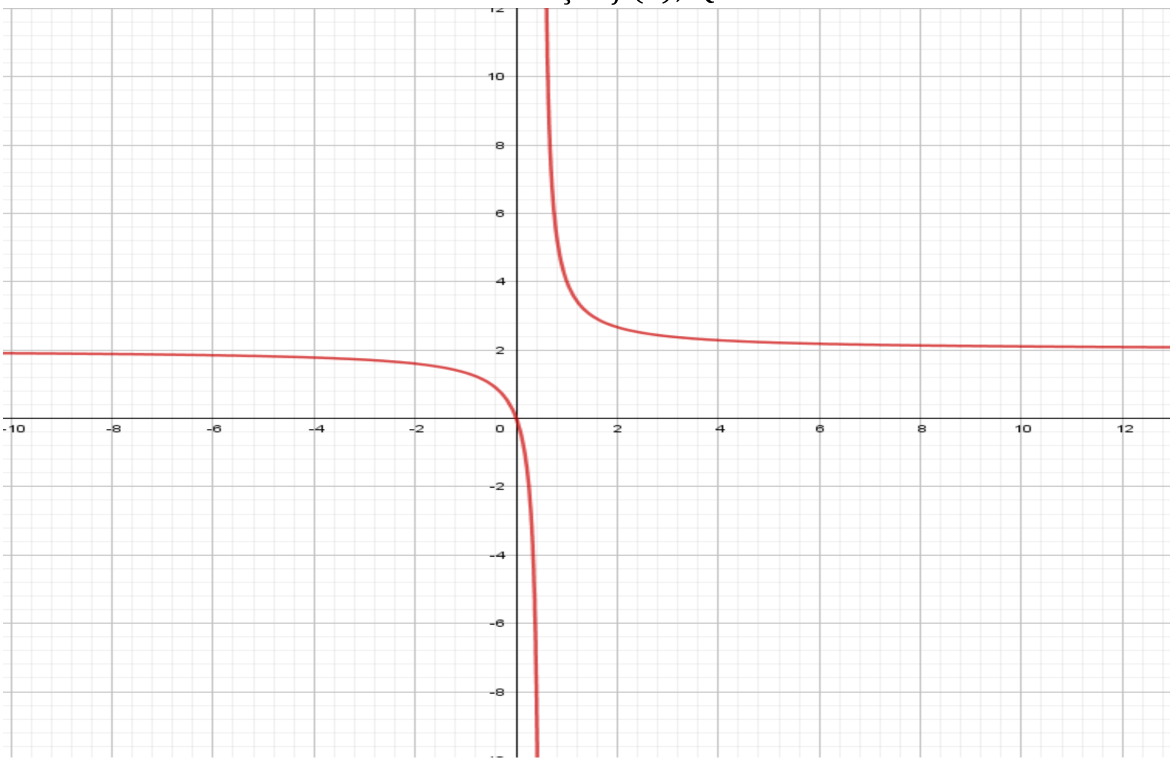
c) Calcule: $\lim_{x \to 100^-} f(x)$.

d) Descreva a assíntota ao gráfico de f.

e) Avalie o comportamento da função f conforme nos aproximamos de 100 a partir da esquerda e responda se faz sentido econômico esvaziar completamente a reserva.

QUESTÃO 5.5.3: Vamos estudar a função f dada por $f(x) = \frac{4x}{2x-1}$, $x \neq \frac{1}{2}$, cujo gráfico é dado abaixo:

Gráfico 8 – Gráfico da função $f(x)$; Questão 5.5.3 da Fase 5



Fonte: O autor, 2022.

a) Usando uma calculadora, preencha o quadro abaixo com os valores $f(x)$ associados. Observe que na primeira coluna os valores de x são positivos e estão cada vez maiores e na terceira coluna, os valores são negativos cada vez menores.

Quadro 9 – Questão 5.5.3 letra a); Fase 5

x	$f(x)$	x	$f(x)$
10 000		- 10 000	
10 000 000		- 10 000 000	
100 000 000		- 100 000 000	
100 000 000 000		- 100 000 000 000	
100 000 000 000 000		- 100 000 000 000 000	

Fonte: O autor, 2022.

b) Responda, para que número os valores $f(x)$ se aproximam, quando x tende a ser muito grande?

c) E para valores negativos de x, para que número os valores $f(x)$ se aproximam quando x tende a ser muito pequeno?

d) Observamos que o gráfico possui uma assíntota vertical. Descreva esta assíntota.

e) Você percebe a existência de uma assíntota horizontal (uma reta horizontal imaginária que delimita a aproximação de uma função no gráfico à medida que ela cresce ou decresce)?

f) A função f é contínua em $x = \frac{1}{2}$?

EXPOSIÇÃO TEÓRICA DO PROFESSOR(A): Valor indefinido; Assíntota Horizontal; Método para o cálculo de Limite quando o Limite envolve uma função f que é o quociente entre duas funções polinomiais, p(x) e q(x), tendendo ao infinito.

No item a) da questão 5.5.3, estudamos o comportamento da função f à medida que os valores de x são positivos e vão se tornando muito grandes. Para expressar esta situação a respeito de x usamos a seguinte notação: $x \to +\infty$ (x tende a mais infinito). E no item b), os valores de x são negativos e vão se tornando muito pequenos. Notamos então: $x \to -\infty$ (x tende a menos infinito).

Quando os valores de uma função f se aproximam cada vez mais de um determinado número L, à medida que $x \to +\infty$, dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a mais infinito é L, e escrevemos $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$. Analogamente, quando os valores de uma função f se aproximam cada vez mais de um determinado número L', à medida que $x \to -\infty$, dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a menos infinito é L', e escrevemos $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L'$. No exemplo da questão 5.5.3, temos $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x}{2x-1} = 2$ e $\lim_{x \to -\infty} \frac{4x}{2x-1} = 2$. Observando o gráfico de f notamos que existe uma reta paralela ao eixo x passando pelo ponto (0,2) para a qual a curva que representa o gráfico se aproxima à medida que "x tende a mais ou menos infinito", sem nunca a intersectar. Esta reta é chamada assíntota horizontal para f. Portanto, podemos concluir que: Quando $\lim_{x \to c} f(x) = +\infty \ ou \ -\infty$, a função f terá uma assíntota vertical em x = c; e quando $\lim_{x \to \infty} f(x) = d \ ou \ \lim_{x \to -\infty} f(x) = d$ existe, então f(x) tem uma assíntota horizontal em y = d.

Vamos apresentar um método para o cálculo este tipo de limite, ou seja, quando o limite envolve uma função f que é o quociente entre duas funções polinomiais: $p(x)$ e $q(x)$. Isto é,

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

Sejam a e b os coeficientes dominantes de $p(x)$ e $q(x)$, respectivamente.

(i) Se o grau de $p(x)$ e de $q(x)$ são iguais então

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a}{b},$$

No caso da função $f(x) = \frac{4x}{2x-1}$:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{4x}{2x - 1} = \frac{4}{2} = 2$$

(ii) Se o grau de $p(x)$ é maior que o de $q(x)$ então:

- se o grau de $p(x)$ for par e $a > 0$: $\lim_{x \to -\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = +\infty$. Porém se $a < 0$: $\lim_{x \to -\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = -\infty$.
- se o grau de $p(x)$ for ímpar e $a > 0$ então $\lim_{x \to -\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = -\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = +\infty$. Caso $a < 0$ então $\lim_{x \to -\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = +\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = -\infty$.

(iii) se o grau de $p(x)$ é menor que o de $q(x)$ então:

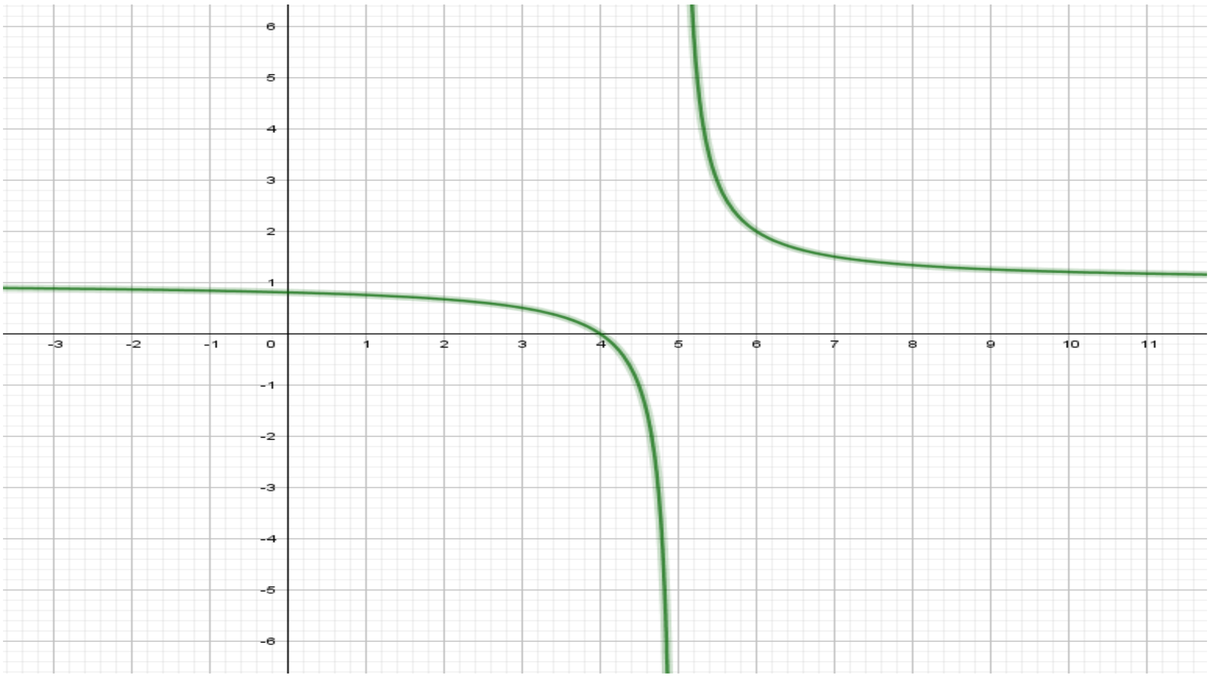
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = 0,$$

QUESTÃO 5.5.4: Agora vamos considerar a função f, a seguir:

$$f(x) = \frac{x-5}{x-4}\text{, para todo } x \text{ real } e\ x \neq 4$$

Observe o esboço do gráfico da função f (x) abaixo:

Gráfico 9 – Gráfico da função $f(x)$; Questão 5.5.4 da Fase 5



Fonte: O autor, 2022.

a) Usando uma calculadora, complete os quadros abaixo. No primeiro, os valores de x se aproximam de 4 pela esquerda (coluna 1) e pela direita (coluna 3). No segundo quadro, os valores de x vão crescendo (coluna 1) ou vão se tornando cada vez menores (coluna 3).

Quadro 10 – Questão 5.5.4 letra a); Fase 5

x	$f(x)$	x	$f(x)$
4,5		3,5	
4,4		3,6	
4,3		3,7	
4,2		3,8	
4,1		3,9	
4,05		3,95	
4,01		3,98	
4,0001		3,9999	

Fonte: O autor, 2022.

Quadro 11 – Questão 5.5.4 letra a); Fase 5

x	$f(x)$	x	$f(x)$
10 000		- 10 000	
10 000 000		- 10 000 000	
100 000 000		- 100 000 000	
100 000 000 000		- 100 000 000 000	

Fonte: O autor, 2022.

b) Observando os quadros preenchidos e o gráfico de f, determine:

$i)$ $\lim_{x\to 4^-} f(x)$

$ii)$ $\lim_{x\to 4^+} f(x)$

$iii)$ $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

$iiii)$ $\lim_{x\to -\infty} f(x)$

c) Existe $\lim_{x\to 4} f(x)$?

d) Existe $\lim_{x\to \infty} f(x)$?

e) Calcule algebricamente o $\lim_{x\to \infty} f(x)$.

f) A partir do gráfico, nota-se que f possui uma assíntota vertical e uma horizontal. Descreva estas assíntotas.

QUESTÃO 5.5.5: Uma montadora de computadores descobre que um funcionário após x dias de treinamento monta $m(x)$ computadores por dia, onde:

$$m(x) = \frac{20x^2}{x^2 + x + 5}$$

a) Usando uma calculadora, complete o quadro abaixo:

Quadro 12 – Questão 5.5.5 letra a); Fase 5

x	$m(x)$
10	
20	
50	
90	
100	
200	
1000	

Fonte: O autor, 2022.

b) Observe o gráfico de m:

Gráfico 10 – Gráfico da função $m(x)$; Questão 5.5.5 da Fase 5

Fonte: O autor, 2022.

Com base no quadro, no gráfico e na análise algébrica, determine $\lim_{x \to +\infty} m(x)$.

c) Com base no significado da lei da função m, interprete a resposta do item b).

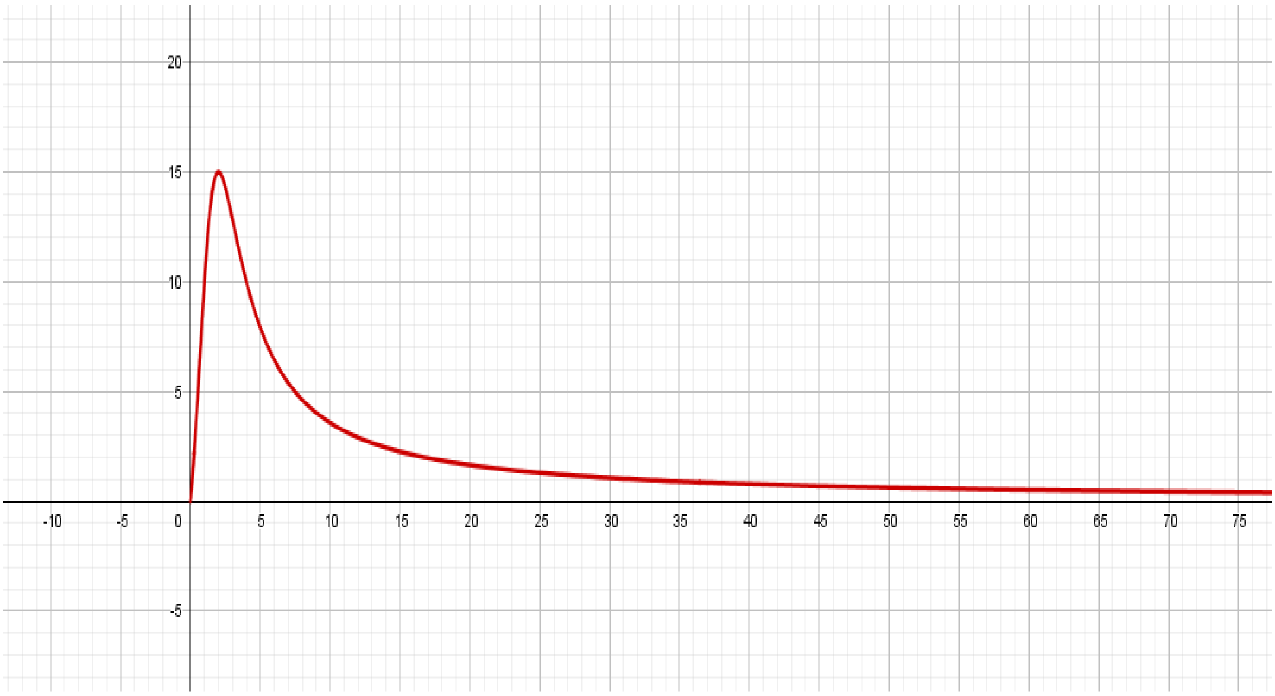
d) Faria sentido esta montadora almejar uma produção diária de 21 computadores por funcionário?

QUESTÃO 5.5.6: Numa pequena cidade, observou-se que a função f, que representa o número de pessoas infectadas por uma doença em função do número de dias x a partir do início dos contágios, é modelada pela expressão:

$$f(x) = \frac{30x}{x^2 - 2x + 4}$$

Observe o gráfico de f:

Gráfico 11 – Gráfico da função $f(x)$; Questão 5.5.6 da Fase 5



Fonte: O autor, 2022.

a) Preencha o quadro abaixo, usando uma calculadora, e avalie o que acontece quando o número de dias x vai aumentando.

Quadro 13 – Questão 5.5.6 letra a); Fase 5

x	$f(x)$
10	
20	
50	
90	
100	

Fonte: O autor, 2022.

b) Qual o $\lim_{x\to+\infty} f(x)$? Encontre o resultado algebricamente.

c) Com base no enunciado da questão, interprete a sua resposta ao item b).

5.2.6 Fase 6: Atividade Colaborativa; Ideia de Continuidade de Uma Função

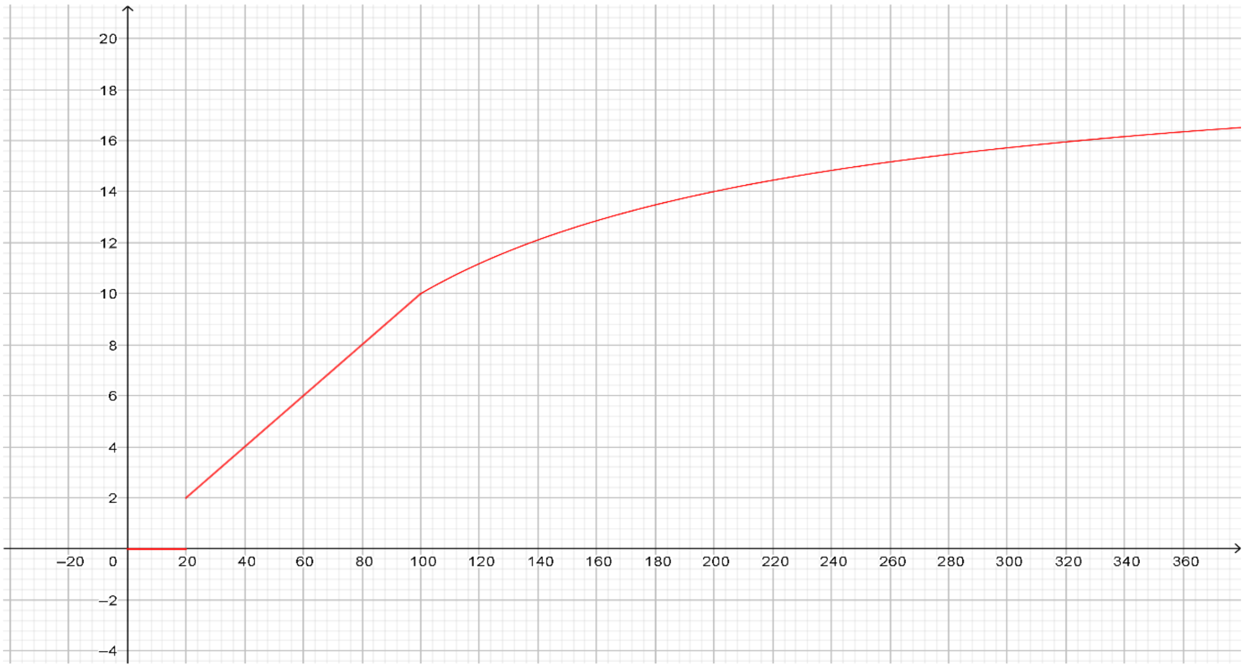
Objetivo específico: Aprofundar a ideia de continuidade.

QUESTÃO 5.6.1: O custo mensal f de uma família com a assinatura de um determinado canal de TV a cabo depende do tempo $x,$ em horas, que os moradores assistem a esse canal, por mês. Este valor é modelado por:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 20 \\ 0{,}1x, & 20 \leq x \leq 100 \\ \dfrac{40x - 1000}{2x + 100}, & x > 100 \end{cases}$$

Observe o esboço do gráfico da função f a seguir:

Gráfico 12 – Gráfico da função $f(x)$; Questão 5.6.1 da Fase 6



Fonte: O autor, 2022.

a) Analise o gráfico e determine se a função f é contínua em $x = 20$ e em $x = 100$.

b) Os limites: $\lim_{x\to 20} f(x)$ e $\lim_{x\to 100} f(x)$ existem? Para responder calcule: $\lim_{x\to 20^-} f(x)$, $\lim_{x\to 20^+} f(x)$, $\lim_{x\to 100^-} f(x)$, $\lim_{x\to 100^+} f(x)$.

c) Determine: $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

d) A partir do enunciado da questão, interprete as suas respostas aos itens anteriores.

EXPOSIÇÃO TEÓRICA DO PROFESSOR(A): Formalizando a ideia de Continuidade

Nas fases anteriores desta UEPS, dissemos que, a partir do gráfico, poderíamos dizer se uma função era contínua quando fosse possível contorná-lo com um lápis sem tirar a sua ponta do gráfico.

Agora vamos abordar a continuidade de uma função a partir da ideia de limite.

Para falar na continuidade de uma função f em um determinado valor $x = c \in \mathbb{R}$ é necessário que c pertença ao domínio da f. Sendo assim, dizemos que f é contínua em c, caso $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$. Ou seja, os limites laterais da função devem existir e serem iguais a $f(c)$. Quando a função não é continua em um determinado valor de x, dizemos que f é descontínua em x. No caso da questão 5.6.1, temos que f é descontínua em $x = 20$, pois

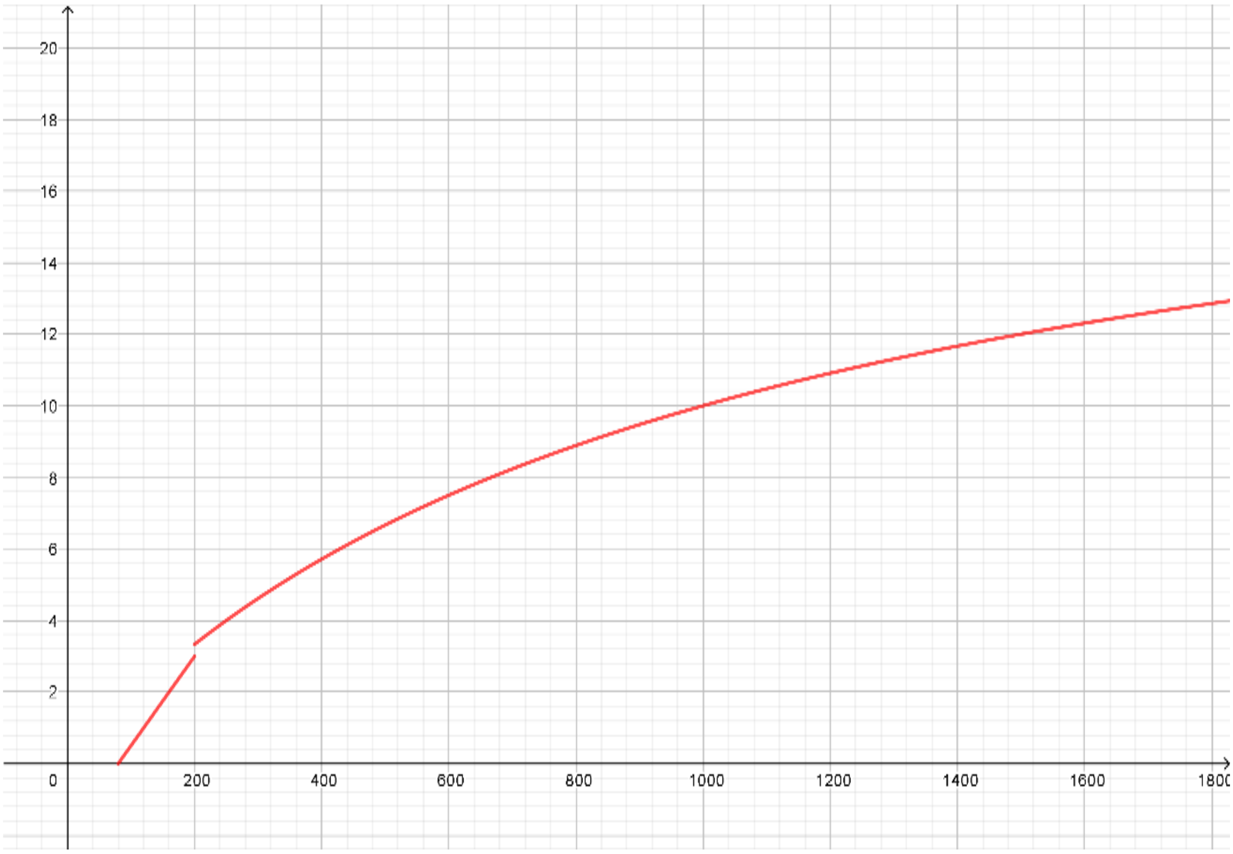
$\lim_{x \to 20^-} f(x) = 0 \neq f(20) = 2.$

QUESTÃO 5.6.2: Os gastos $f(x)$ de uma determinada família com material de limpeza, depende de sua renda mensal líquida, x, em reais. Essa função gasto é modelada pela expressão:

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}025x - 2 & se\ \ 80 \leq x \leq 200 \\ \dfrac{40x}{2x + 2000} & se\ \ 200 < x \end{cases}$$

A figura abaixo representa o gráfico de f:

Gráfico 13 – Gráfico da função $f(x)$; Questão 5.6.2 da Fase 6



Fonte: O autor, 2022.

a) A função f é contínua em $x = 200$? Justifique algebricamente sua resposta.

b) Com base no enunciado da questão, interprete a sua resposta ao item a).

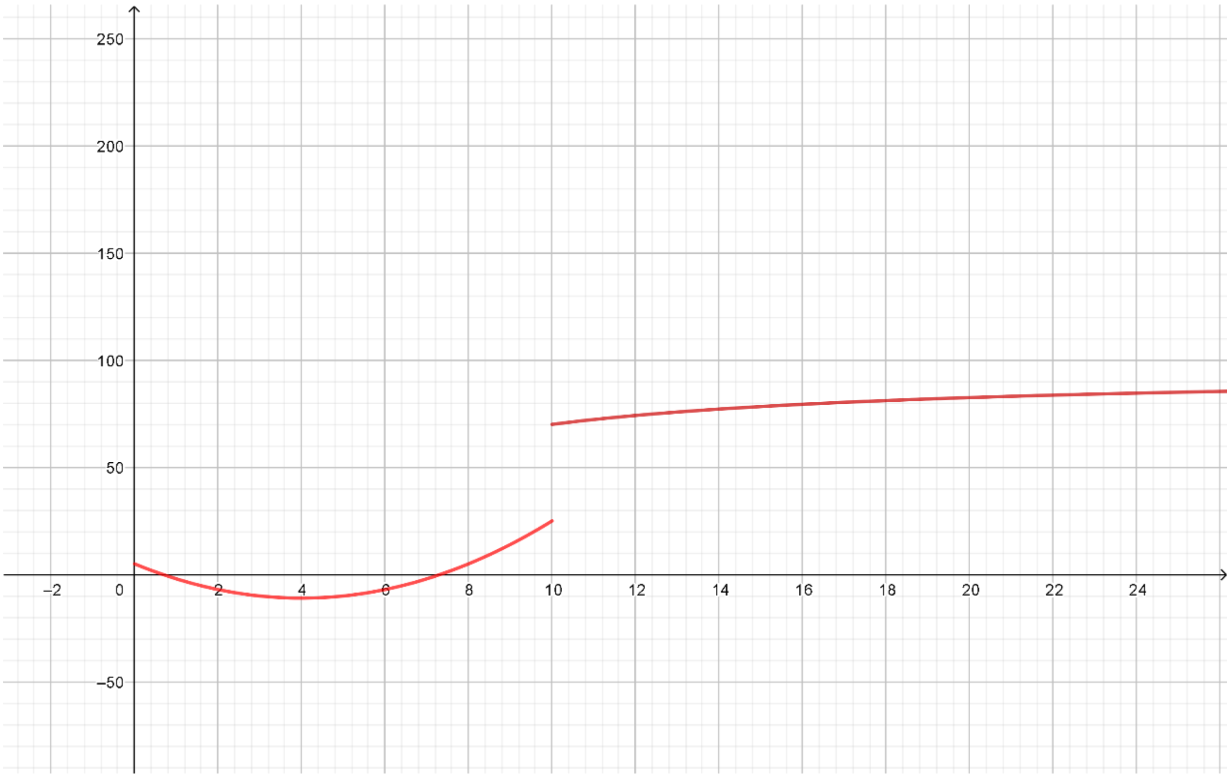
c) Uma família pode gastar mais de 20 reais? A partir do gráfico, nota-se que f possui uma assíntota horizontal. Descreva esta assíntota. Faça uma análise gráfica e algébrica.

QUESTÃO 5.6.3: A administração de um hospital vai implantar um novo sistema que visa reduzir o tempo de espera para as operações. O modelo a seguir foi determinado experimentalmente para prever que em x meses a porcentagem $f(x)$ de pacientes que podem ser operados sem serem colocados na lista de espera é:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 8x + 5 \;\; se \;\; 0 \leq x \leq 10 \\ \dfrac{38x - 100}{0{,}4x} \;\; se \;\; 10 < x \end{cases}$$

Observem o gráfico da função f (x) abaixo:

Gráfico 14 – Gráfico da função $f(x)$; Questão 5.6.2 da Fase 6



Fonte: O autor, 2022.

a) Calcule: $\lim_{x \to 10^-} f(x)$, $\lim_{x \to 10^+} f(x)$. Existe o $\lim_{x \to 10} f(x)$?

b) A função f é contínua em $x = 10$?

c) Em 10 meses o percentual de pacientes que podem ser operados sofre uma alteração expressiva. Como você explica esta situação?

d) Calcule $\lim_{x \to +\infty} f(x)$. Faça uma análise gráfica e algébrica.

e) Interprete a resposta do item d), com base no enunciado da questão.

5.2.7 Fase 7: Atividade Colaborativa; Mapa Conceitual

Objetivo: Esta fase visa rever o conteúdo para analisar o que foi aprendido pelos discentes em relação ao conteúdo ideias básicas de Limites e Continuidade de Função. Nesta apresentação serão apresentadas as semelhanças, diferenças e relações existentes entre os conceitos matemáticos inseridos nas situações-problema já trabalhadas anteriormente, promovendo a reconciliação integrativa.

Atividade: Será utilizada a técnica dos mapas conceituais que tem por finalidade a criação de uma estrutura gráfica que ajuda a organizar ideias, conceitos e informações de modo esquematizado a partir de ideias chave. Um exemplo de mapa conceitual encontra-se no apêndice E.

<u>ESTÁGIOS DA DINÂMICA</u>

ESTÁGIO 1: Mostrar à turma a técnica de mapas conceituais trabalhando juntos em alguns mapas simples que servirão como modelos para outros. Também é importante comentar características do mapa conceitual, como diferenciação progressiva e reconciliação integradora.

ESTÁGIO 2: A turma será dividida em grupos de 4 ou 5 participantes para começarem a trabalhar juntos nos mapas conceituais. Durante este tempo, também, eles são incumbidos de preparar uma exposição dos mapas. Uma vez que mapas conceituais não são autoexplicativos é importante que seus autores os apresentem, pois nesse momento eles podem esclarecer o porquê das associações que fizeram e mostrar com mais clareza como os conceitos se relacionam com a sua estrutura cognitiva.

5.2.8 Fase 8: Atividade Individual; Avaliação Somativa

Objetivo: Esta fase visa analisar o que foi aprendido pelos discentes em relação ao conteúdo ideias básicas de Limites e Continuidade de Função por meio de aplicação de uma avaliação somativa, onde devem ser propostas questões/situações que impliquem compreensão, que substanciam a apreensão de significados para buscar evidências da ocorrência de aprendizagem significativa.

Atividade: resolução de situações-problema, onde os estudantes poderão empregar as ideias básicas de Limites e Continuidade de Função a fim de verificar se o significado do novo conhecimento adquirido por eles ao longo das atividades propostas foi realizado da maneira esperada. Segundo Moreira (2011), a avaliação somativa é aquela que tenta avaliar o alcance de objetivos específicos de aprendizagem ao final de uma fase de aprendizagem. Neste caso, procura-se avaliar o desenvolvimento do letramento matemático, definido como as capacidades e competências para raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente. Um exemplo de uma avaliação somativa encontra-se no apêndice H.

5.2.9 Fase 9: Atividade Colaborativa; Aula Expositiva Dialogada Integradora Final

Objetivo: a partir principalmente da avaliação somativa sanar as possíveis dúvidas, promovendo a reconciliação integradora num nível de complexidade superior através das questões propostas nesta fase. Enfatizar a importância do estudo algébrico para obtenção do limite de uma função.

Atividade: apresentação oral do docente; analisar com os alunos as dificuldades encontradas; pontuar casos em que os resultados da tabela levam a conjecturas erradas em relação ao limite.

QUESTÃO 5.9.1: Considere a função f definida por:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

O gráfico de f está representado abaixo:

Gráfico 15 – Gráfico da função $f(x)$; Questão 5.9.1 da Fase 9

Fonte: O autor, 2022.

a) Preencha o quadro 14 a seguir, usando uma calculadora. Observe que os valores de x aproximam-se de $x = 0$ pela esquerda e pela direita.

Quadro 14 – Questão 5.9.1 letra a); Fase 9

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1,0		-1,0	
0,5		-0,5	
0,1		-0,1	
0,05		-0,05	

Fonte: O autor, 2022.

b) De acordo com o quadro 14, o que acontece com os valores de $f(x)$, quando x se aproxima de 0 pela esquerda e pela direita, ou seja, numa vizinhança de $x = 0$?

c) Agora, preencha o quadro 15 abaixo, usando uma calculadora. Observe que os valores de x também aproximam-se de $x = 0$ pela esquerda e pela direita.

Quadro 15 – Questão 5.9.1 letra c); Fase 9

x	$f(x)$	x	$f(x)$
0,0005		-0,0005	
0,0001		-0,0001	
0,00005		-0,00005	
0,00001		-0,00001	

Fonte: O autor, 2022.

d) De acordo com o quadro 15, o que acontece com os valores de $f(x)$, quando x se aproxima de 0 pela esquerda e pela direita, ou seja, numa vizinhança de $x = 0$?

e) Utilizando somente o quadro 14, qual seria o valor do limite de $f(x)$ quando x tende a zero? E se utilizássemos somente o quadro 15, qual seria a sua resposta para $\lim_{x\to 0} f(x)$?

f) Qual seria o limite de $f(x)$ quando x tende a zero? Agora, calcule o $\lim_{x\to 0} f(x)$, utilizando a noção de conjugado, que foi apresentada na questão 5.4.3.

EXPOSIÇÃO TEÓRICA DO PROFESSOR(A): Resultados da Tabela versus limite de uma função em um ponto.

No quadro 14 os valores da função parecem tender para 0,1666666 à medida que x se aproxima de 0, e assim podemos supor que $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2} = \frac{1}{6}\cdot$ No quadro 15 foram atribuídos valores ainda menores para x e neste caso, podemos conjecturar que $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2} = 0 \cdot$. Desta forma, qual seria o limite de $f(x)$ quando x tende a zero? Vamos utilizar uma ferramenta algébrica para responder a esta questão. Usaremos o conceito de conjugado, apresentado na questão 5.4.3.

$$\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2} = \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+9}+3}{\sqrt{x^2+9}+3)} = \frac{(x^2+9)-9}{x^2\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+9}+3}$$

Assim, $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2} = \frac{1}{6}\cdot$ Neste exemplo, o quadro 15 nos induziria a um valor falso para o limite de $f(x), x$ tendendo a zero. Desta forma a utilização de uma ferramenta algébrica foi fundamental para o cálculo do limite. O que aconteceu é que para valores de x muito próximos de zero $\sqrt{x^2+9}$ fica muito perto de 3, assim, o valor encontrado na calculadora para $\sqrt{x^2+9}$ é 3,000..., com tantas casas decimais quanto a calculadora for capaz de fornecer. (STEWART, 2013).

5.2.10 Fase 10: Atividade Colaborativa; Avaliação da UEPS

Objetivo: Avaliação da UEPS em sala de aula com a participação dos alunos, produzindo um comentário integrador final sobre os temas tratados, visando o seu aperfeiçoamento e a sua reconstrução, se necessário, de acordo com a Teoria a Aprendizagem Significativa de Ausubel. Atividade: avaliação oral das respostas dos alunos às estratégias de ensino utilizadas e à sua aprendizagem através da mediação do professor. Uma UEPS só é considerada bem-sucedida se a avaliação do desempenho dos alunos fornecer evidências de aprendizagem significativa: captura de significado, compreensão, capacidade explicativa, emprego de conhecimentos para resolver situações-problema. A aprendizagem significativa é progressiva, o domínio de um campo conceitual é progressivo; daí a ênfase na evidência, não no comportamento definitivo (MOREIRA, 2011).

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A ideia norteadora desta pesquisa foi a tornar as ideias básicas do Cálculo, especialmente as noções básicas de Limites e Continuidade de Funções, acessíveis aos alunos do ensino médio. Os alunos, em geral, encontram muitas dificuldades nos cursos de Cálculo logo no início dos estudos universitários. As altas taxas de reprovação nesses cursos revelam um retrocesso e indicam um grave problema no processo de ensino-aprendizagem. Nossa sugestão foi a de inserir as ideias de Limites e Continuidade de Funções ao longo do ensino médio, de forma inuitiva valendo-se de exemplos práticos e de importantes aplicações. Desta forma, os alunos ao ingressarem nas universidades já estariam familiarizados com o tipo de raciocínio envolvido nesta disciplina. Além disso, teriam a oportunidade de ter contato com ideias que ainda se mostram modernas e relevantes para o avanço da ciência.

Desde a década de 1960 o Cálculo foi retirado da lista de contéudos "oficiais" da matemática do ensino básico. Atualmente, o que em geral se encontra é a inclusão destes tópicos em cursos preparatórios militares ou em programas de iniciação científica destinados a alunos com altas habilidades em matemática.

Acreditamos que em qualquer nivel de ensino, básico ou superior, uma das inquietações do professor deva ser a procura por ações pedagógicas que minimizem dificuldades de aprendizagem ou lacunas de conteúdos que o aluno apresente. Desta forma ao elaborar a nossa proposta tivemos a preocupação de que ela fosse o mais includente possível, e que a abordagem aos conteúdos fosse livre de excesso de formalismo e rigor matemáticos.

Neste trabalho sugerimos um exemplo de guia didático desenvolvido na forma de Unidade de Ensino Potencialmente Significativa - UEPS (MOREIRA, 2011), com base na Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS), criada por David Ausubel. Portanto, foi proposta uma abordagem significativa do conteúdo a ser ensinado, de forma não-arbitrária, onde o conhecimento prévio dos alunos, o chamado subsunçor, pudesse ser avaliado e vinculado aos conceitos e novas ideias que serão introduzidos. As noções de Limite e Continuidade de Funções foram construidas por meio de uma sequência de atividades elaboradas de modo que o conhecimento prévio do aluno fosse mobilizado a cada etapa dela. Em cada atividade o aluno era levado a interpretar e apresentar as suas soluções à problemas matemáticos, motivando, com isto, o desenvolvimento do pensamento lógico, a capacidade de encontrar e descrever padrões, o raciocínio e o uso correto da linguagem matemática. A confecção deste guia didático, com propostas possíveis de serem aplicadas com alunos do ensino médio, aponta para o fato de que o Cálculo é um conhecimento acessível à este nível educacional. Ter acesso a este conhecimento é de suma importância visto que está fortemente relacionado com as ciências modernas e permite a exploração de competências e aptidões matemáticas que podem ser desenvolvidas pelos discentes.

Este trabalho é apenas uma ideia de como as noções básicas de Cálculo Diferencial e Integral podem ser introduzidos no nível médio utilizando a Teoria da Aprendizagem Significativa. No nosso caso, para o desenvolvimento do guia didático, o subsunçor utilizado foi a noção básica de função, onde foi explorado a interpretação de tabelas, quadros e gráficos de modo a se investigar o seu comportamento. Muitas outras abordagens podem ser feitas, como o uso de taxas de variações. A forma de se apresentar novos conceitos com base nesta teoria nos fornece um horizonte pedagógico valiosíssimo para o ato da transmissão do conhecimento ao facilitar o desenvolvimento do pensamento matemático crítico e reflexivo.

Como pesquisa futura, gostaríamos de explorar e aprofundar alguns tópicos abordados ao longo do ensino básico que utilizam a noção de limite no seu desenvolvimento, como por exemplo, o número π, o número e, a área de um círculo, o limite da soma de uma PG infinita, probabilidade, o logaritmo natural, e muitos outros. A ideia seria a de mostrar de forma clara ao aluno como tais conteúdos se relacionam com a noção de Limite, como diz Rezende (2003, p. 402): “[...] tirar o conhecimento do Cálculo do esconderijo forçado a que está exposto na educação básica”.

Esperamos que as situações-problema apresentas neste guia didático por meio da UEPS possam servir de material a ser utilizado, adaptado e aprimorado por colegas docentes, que eles se sintam encorajados e motivados a trabalharem com seus alunos as ideias do Cálculo, visto a relevância deste tema.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, W. R. A. A Educação Jesuítica no Brasil e o seu Legado para a Educação da Atualidade. **Revista Grifos**, Chapecó, n. 36/37, p. 117-123, 2014.

ÁVILA, G. **Introdução à Análise Matemática**. São Paulo: Ed. Edgard Blucher, 1999.

AVILA, G. O Ensino do Cálculo no Segundo Grau. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, nº18, p.1-9, 1991.

BARUFI, M. C. B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral**. 1999. 184 f. Tese (Doutorado) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.

BOYER, C. B. **História da matemática.** Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.

BRASIL. **Decreto nº 19.851, de 11 de abril de 1931.** Dispõe que o ensino superior no Brasil obedecerá, de preferência, ao sistema universitário, podendo ainda ser ministrado em institutos isolados, e que a organização técnica e administrativa das universidades é instituída no presente Decreto, regendo-se os institutos isolados pelos respectivos regulamentos, observados os dispositivos do seguinte Estatuto das Universidades Brasileiras. Rio de Janeiro: Câmara dos Deputados, 1931. Disponível em: <https://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/1930-1939/decreto-19851-11-abril-1931-505837-republicacao-139891-pe.html>. Acesso em: 09 out. 2021.

BRASIL. **Decreto nº 19.852, de 11 de abril de 1931.** Dispõe sobre a organização da Universidade do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro: Câmara dos Deputados, 1931. Disponível em: <https://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/1930-1939/decreto-19852-11-abril-1931-510363-republicacao-85622-pe.html>. Acesso em: 09 out. 2021.

BRASIL. **Decreto nº 19.890, de 18 de abril de 1931.** Dispõe sobre a organização do ensino secundário. Rio de Janeiro: Câmara dos Deputados, 1931. Disponível em: <http://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/1930-1939/decreto19890-18-abril-1931-504631-publicacaooriginal-141245-pe.html>. Acesso em: 09 out. 2021.

BRASIL. **Decreto nº 20.158, de 30 de junho de 1931.** Dispõe sobre a organização do ensino comercial, regulamenta a profissão de contador e dá outras providências. Rio de Janeiro: Câmara dos Deputados, 1931. Disponível em:< https://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/1930-1939/decreto-20158-30-junho-1931-536778-republicacao-81246-pe.html>. Acesso em: 09 out. 2021.

BRASIL**. Decreto nº 4.244, de 9 de abril de 1942.** Dispõe sobre a Lei orgânica do ensino secundário. Rio de Janeiro: Câmara dos Deputados, 1942. Disponível em: <https://www2.camara.leg.br/legin/fed/declei/1940-1949/decreto-lei-4244-9-abril-1942-414155-publicacaooriginal-1-pe.html>. Acesso em: 09 out. 2021.

BRASIL. **Lei nº 4024, de 20 de dezembro de 1961.** Fixa as diretrizes e bases da Educação Nacional. Brasília: Câmara dos Deputados, 1961. Disponível em:< https://www2.camara.leg.br/legin/fed/lei/1960-1969/lei-4024-20-dezembro-1961-353722-publicacaooriginal-1-pl.html>. Acesso em: 09 out. 2021.

BRASIL. **Lei nº 5692, de 11 de agosto de 1971.** Fixa Diretrizes e Bases para o ensino de 1° e 2º graus, e dá outras providências. Brasília: Câmara dos Deputados, 1971. Disponível em: < https://www2.camara.leg.br/legin/fed/lei/1970-1979/lei-5692-11-agosto-1971-357752-publicacaooriginal-1-pl.html>. Acesso em: 09 out. 2021.

BRASIL. **Lei nº 9394, de 20 de dezembro de 1996.** Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Brasília: Planalto, 1996. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.html>. Acesso em: 09 out. 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC).** Brasília: MEC/SEB, 2017. Disponível em: < http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/>. Acesso em 01 mar 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular do Ensino Médio.** Brasília: MEC/SEB, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/ imagens/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 18 nov. 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. **Novo Ensino Médio.** Disponível em:< https://www.gov.br/mec/pt-br/novo-ensino-medio>. Acesso em 01 mar 2022.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio:** Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: Ministério da Educação, 2006. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em: 09 out. 2021.

BRASIL. Câmara de Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.** Brasília: Ministério da Educação, 2000. Disponível em: < http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf>. Acesso em: 27 set. 2021.

DANTE, L. R**. Matemática:** Contexto & Aplicações. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016. v.1.

DENARDI, V. B.; BISOGNIN, E. Representações Semióticas: contribuições para o estudo do conceito de Função. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 10, n. 2, p. 142-159, 3 jun. 2019.

DUCLOS, R. C. Cálculo do 2º Grau. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n.20, p.26 -30, 1992.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica.** Volume 1. 3ª. ed. São Paulo: Harbra, 2002.

MATURANA, H. **Cognição, ciência e cotidiano.** Belo Horizonte: Ed. UFMG, 2001.

MENEZES, E. T. **Verbete Reforma Capanema.** Dicionário Interativo da Educação Brasileira - EducaBrasil. São Paulo: Midiamix Editora, 2001. Disponível em: < https://www.educabrasil.com.br/reforma-capanema/>. Acesso em 01 mar 2022.

MIORIM, M. A. **Introdução a História da Matemática**. São Paulo, SP: Atual, 1998.

MORAES, M. C. M. Educação e política nos anos 30: a presença de Francisco Campos. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**, Brasília, v. 73, n. 174, p. 291-321, maio/ago. 1992.

MORAES, M. C. M. **Reformas de ensino, modernização administrada:** a experiência de Francisco Campos – anos vinte e trinta. Florianópolis: UFSC, Centro de Ciências da Educação, Núcleo de Publicações, 2000.

MOREIRA, M.A. **A teoria da aprendizagem significativa e sua implementação em sala de aula.** Brasília: Editora da UnB, 2006.

MOREIRA, M.A. (Org.) **A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a investigação nesta área.** Porto Alegre: Instituto de Física da UFRGS, 2004.

MOREIRA, M. A; MASINI, E. A. F. S. **Aprendizagem significativa:** a teoria de David Ausubel. São Paulo, Moraes, 1982.

MOREIRA, M.A. **Aprendizagem significativa em mapas conceituais.** Porto Alegre: UFRGS, Instituto de Física,2013.

MOREIRA, M.A. **Potentially meaningful teaching units – PMTU**. Porto Alegre: Instituto de Física da UFRGS, 2011.

MOREIRA, M. A. **Subsídios teóricos para o professor pesquisador em ensino de ciências:** a Teoria da Aprendizagem Significativa. Porto Alegre-RS, 2009, 2016.

MOREIRA, M. A. **Teorias de Aprendizagem.** EPU: São Paulo, 1999.

MOREIRA, M. A.; BUCHWEITZ, B. **Novas estratégias de Ensino e Aprendizagem:** mapas conceituais e o Vê epistemológico. Lisboa: Plátano, 1993.

OTONE e SILVA, M. C. **A Matemática do curso complementar da Reforma Francisco Campos.** 2006. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) − Departamento de Matématica, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

PEDRO, M; SAMUEL. H; WILTON. O. B. **Introdução Ao Cálculo Para Administração, Economia e Contabilidade.** São Paulo: Saraiva, 2009.

PILETTI, N. Evolução do currículo do curso secundário no Brasil. **Revista da Faculdade de Educação**, São Paulo, v. 13, n. 2, p. 27-72, jul./dez. 1987.

PINTO, N. B**.** Marcas Históricas da Matemática Moderna no Brasil. **Revista Diálogo Educacional/PUCPR**, Curitiba/PR, v. 5, n. 16, p 113-122, 2005.

REZENDE, W. M. **O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica.** 2003. 450 f. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

RIBEIRO, D. F. C. **Dos cursos complementares aos cursos clássicos e científicos:** a mudança na organização dos ensinos de matemática. 2006. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) − Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

ROCHA, M. A. S. A educação pública antes da independência. **Caderno de Formação: Formação de Professores. Educação, Cultura e Desenvolvimento. História da Educação Brasileira**, São Paulo, v. 1, p. 32-47, 2010.

ROQUE, T; CARVALHO, J. P. P. **Tópicos da História da Matemática.** Rio de Janeiro: SBM, 2012.

SAVIANI, D. **História das ideias pedagógicas no Brasil.** Campinas, SP: Autores Associados, 2007.

SOARES, F. D; DASSIE, B.B; ROCHA, J. L. Ensino de matemática no século XX – da Reforma Francisco Campos à Matemática moderna. **Horizontes**, Bragança Paulista, v. 22, n. 1, p. 7-15, 2004.

SPINA, C. **Modelagem Matemática no Processo de Ensino-Aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral para o Ensino Médio**. 2002. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2002.

STEWART, J. **Cálculo –** Volume I. Tradução da 7ª Edição Norte-Americana. 7ª. ed. São Paulo: Cengage Learning Edições Ltda, 2013.

VILCHES, M. A. **Cálculo Para Economia e Administração:** Volume 1. Rio de Janeiro: Departamento de Análise - IME, UERJ, 2018.

APÊNDICE A – SUGESTÃO DIDÁTICA DA FASE 1

Comentários com sugestões para esta fase: Antes de iniciar as atividades propostas para os próximos momentos, neste encontro propõe-se que o objetivo da UEPS seja apresentado aos alunos, abrindo espaço para questionamentos deles: Compreender as noções básicas de Limites e Continuidade de Função através da análise crítica gráfica, tabular e algébrica. Interpretar situações-problemas que envolvam as ideias básicas de Limites e Continuidade de Função. Apresentar uma proposta de ensino das noções básicas de Limites e Continuidade de Função no Ensino Médio baseada na Teoria da Aprendizagem Significativa. A forma como a UEPS será realizada e avaliada, bem como sua duração, devem ser apresentadas, também. É necessário enfatizar que esta proposta didático-pedagógica pode ser bem recebida por alguns alunos; No entanto, outros podem ter dificuldade em entender o verdadeiro significado, razão pela qual é recomendável manter esta explicação a mais detalhada e clara possível. Os alunos são orientados a sentarem em círculo para acompanharem a apresentação do tema específico e da UEPS pelo professor, abrindo espaço para perguntas dos discentes. Duas possibilidades de aplicação da UEPS são aqui propostas: continuamente, como unidade do programa de Matemática; ou no mesmo dia da semana, em datas consecutivas, podendo assim continuar com os demais conteúdos programados em Matemática.

APÊNDICE B – SUGESTÃO DIDÁTICA DA FASE 2

Comentários com sugestões para esta fase: No caso aqui apresentado, deve-se enfatizar, primeiramente, a importância de conhecer as noções básicas de Função, de lembrar e explorar as possibilidades de criação e análise crítica de quadros e gráficos e entender as formas básicas de crescimento ou decrescimento, ampliando a possibilidade de compreensão do tema específico, noções básicas de Limites e Continuidade de Função, e as suas aplicações em algumas situações da realidade. As atividades deste momento são realizadas de forma que seja possível entender quais são as principais dúvidas dos alunos em relação às noções básicas de Função. Nesta atividade, o professor levará papeis quadriculados nos quais, após o preenchimento, os alunos podem esboçar o gráfico das funções com base nas informações dos quadros. Essas atividades e procedimentos são realizados de forma que os subsunçores (conhecimento prévio sobre funções, gráficos, quadros e suas aplicações no cotidiano) sejam devidamente acionados e corrigidos se necessário, a fim de preparar o aluno para as demais atividades. Para realizar a atividade para o segundo passo, propõe-se que as aulas sejam organizadas da mesma forma que para as avaliações: sem consultar o material, os colegas e o professor. Recomenda-se também anotar, fotografar, enfim, registrar de alguma forma todas as situações relevantes demonstradas pelos alunos durante esta atividade. Isso ajudará a identificar habilidades anteriores que são recomendadas para aquele passo. Os estudantes devem apresentar todos os passos realizados para a obtenção das respostas, devendo entregá-los, por escrito, para análise do(a) professor(a).

Os alunos são orientados a sugerir individualmente as soluções fazendo o uso de calculadora, régua, papel quadriculado e análise de quadros, sempre anotando como pensam para chegar a cada uma das respostas. Os estudantes devem apresentar todos os passos realizados para a obtenção das respostas, devendo entregá-los, por escrito, para análise do(a) professor(a) para que ele(a) possa analisar o conhecimento prévio dos discentes, encontrar os pontos de maior dificuldade, que merecem mais atenção, a fim de que as dúvidas dos alunos possam ser sanadas e a sequência didática proposta possa ser aperfeiçoada, significativamente, em momentos futuros, de acordo com princípios norteadores da Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel.

Recomenda-se analisar as respostas para produzir um relatório e um quadro com os resultados da avaliação diagnóstica, não só classificando as soluções como corretas ou incorretas, mas também levando em conta as estratégias e os desenvolvimentos utilizados pelos alunos nas questões propostas neste momento, com o objetivo de identificar conhecimentos prévios e subsunçores, a partir dos quais as próximas fases serão programadas. O docente deve revisar todas as situações-problema que os alunos trabalharam nesta fase, esclarecendo quaisquer dúvidas que tenham surgido até o momento.

Avaliação Diagnóstica: Resolva as tarefas a seguir sobre as noções básicas de funções. O objetivo desta atividade, além de verificar seu nível de compreensão deste conteúdo, noções básicas de Funções, é colaborar no seu desenvolvimento, entendendo que para resolver os problemas propostos você tentará utilizar seus conhecimentos prévios. Tais tarefas devem ser resolvidas com calculadora, papel quadriculado, régua, quadros e gráficos. É importante que você tente explicar como pensou ao resolver cada problema. Os estudantes devem apresentar todos os passos realizados para a obtenção das respostas, devendo entregá-los, por escrito, para análise do(a) professor(a).

Leia o texto abaixo:

FUNÇÃO

A noção de Função foi-se construindo e aperfeiçoando ao longo de vários séculos. O estudo de Função não é restrito apenas aos interesses da Matemática, as funções fazem parte do nosso cotidiano e estão presente na realização das coisas mais elementares que fazemos.

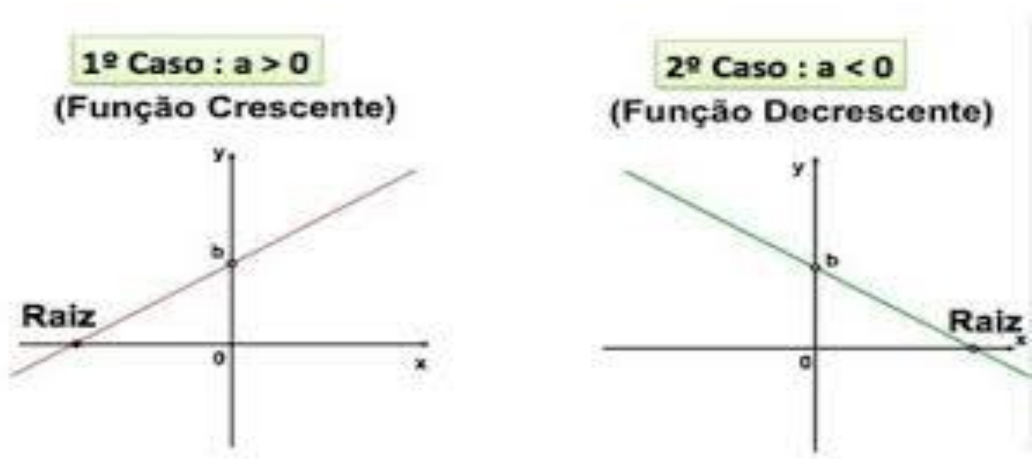
Nem sempre percebemos, mas estamos em contato com as funções a todo momento. Por exemplo, a análise de como o preço da corrida de táxi depende da quilometragem ou da verificação de que a quantidade de calor que um corpo absorve ocorre em função do aumento de sua temperatura ou, ainda, o fato de que um corpo em queda livre aumenta cada vez mais a distância que percorre a cada segundo sucessivo .Quando assistimos ou lemos um jornal, muitas vezes nos deparamos com um gráfico, que nada mais é que uma relação, comparação de duas grandezas ou até mesmo uma função, mas representada graficamente. Para que esse gráfico tome forma é necessário que essa relação, comparação seja representada em uma função na forma algébrica. Há uma variedade de situações possíveis de serem modeladas com funções polinomiais de diferentes graus.

Função é um caso especial de uma relação. Relação é um conjunto de pares ordenados, onde cada elemento do par pertence a um dos conjuntos relacionados. Nas relações não existem restrições quanto à lei de correspondência entre os elementos dos conjuntos, já para as funções é costume introduzir restrições. A construção de um gráfico no plano cartesiano representado pela lei de formação geral das funções, dada por $y = f(x)$, sempre ocorre com x pertencente ao domínio e y constituindo a imagem.

Situações-problema propostas:

QUESTÃO 1) Toda função definida por f(x) = ax + b, com a e b pertencentes aos reais e a ≠ 0 é considerada uma função do 1º grau e possui representação gráfica no plano cartesiano. O gráfico da função de primeiro grau é construído no plano de coordenadas cartesianas, atribuindo valores a x e encontrando os valores correspondentes a y. Os números encontrados são chamados de pares ordenados (x,y) e quando juntos formam a linha representativa da função de primeiro grau, podendo ser crescente ou decrescente.

Figura 23 – Características do gráfico de uma função do primeiro grau



Fonte:< https://escolaeducacao.com.br/funcao-do-primeiro-grau/funcao-comportamento/>. Acesso em 21 de dezembro de 2021

Construa um quadro com duas colunas, na primeira coloque valores de x (domínio) e na segunda os valores de f(x) (imagem da função). Marque no plano cartesiano os pares ordenados (x,y), depois trace a reta da função. Vamos determinar o gráfico da função dada pela seguinte lei de formação: y = f(x) = 2x – 1. Faça o esboço do gráfico no papel milimetrado e utilize o quadro abaixo para a realização desta atividade.

Quadro 16 – Questão 1; Fase 2

x	y = f(x) = 2x – 1	(x,y)
-2		
-1		
0		
1		
2		

Fonte: O autor, 2022.

Resposta:

Quadro 17 – Resposta da Questão 1; Fase 2

x	y = f(x) = 2x – 1	(x,y)
-2	-5	(-2,-5)
-1	-3	(-1,-3)
0	-1	(0,-1)
1	1	(1,1)
2	3	(2,3)

Fonte: O autor, 2022.

$y = 2.\,(-2) - 1 \rightarrow y = -4 - 1 \rightarrow y = -5$

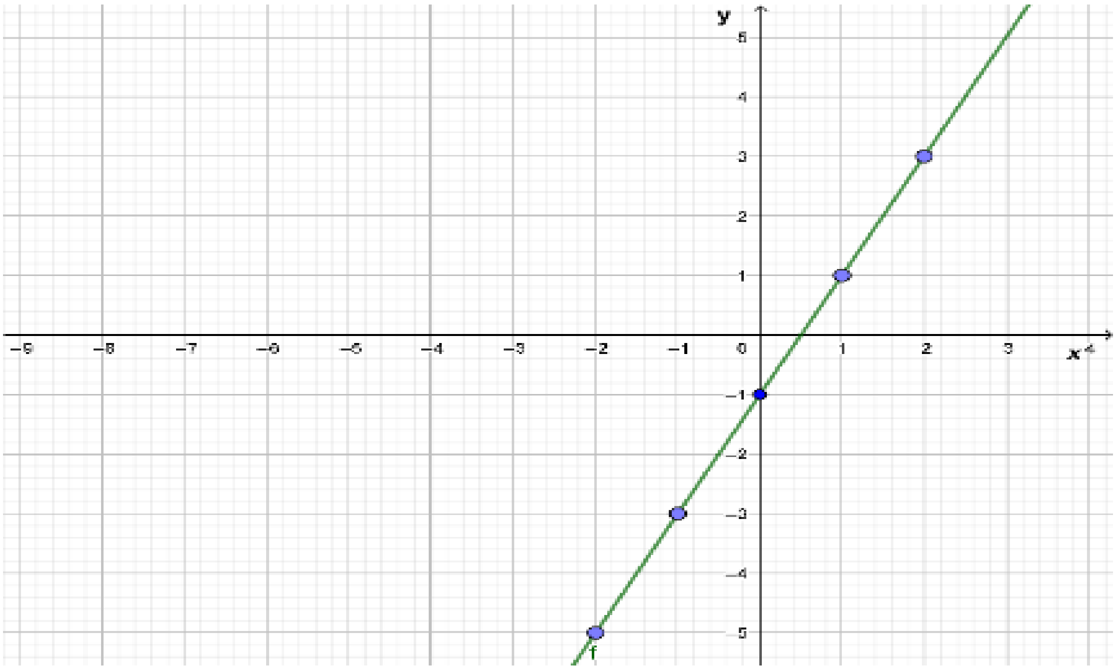
$y = 2.\,(-1) - 1 \rightarrow y = -2 - 1 \rightarrow y = -3$

$y = 2.\,0 - 1 \rightarrow y = -1$

$y = 2.\,1 - 1 \rightarrow y = 2 - 1 \rightarrow y = 1$

$y = 2.\,2 - 1 \rightarrow y = 4 - 1 \rightarrow y = 3$

Gráfico 16 – Gráfico da função $f(x)$; Questão 1 da Fase 2



Fonte: O autor, 2022.

QUESTÃO 2) Faça o esboço do gráfico de uma função do 1º grau crescente: f(x) = x + 2, (a>0)

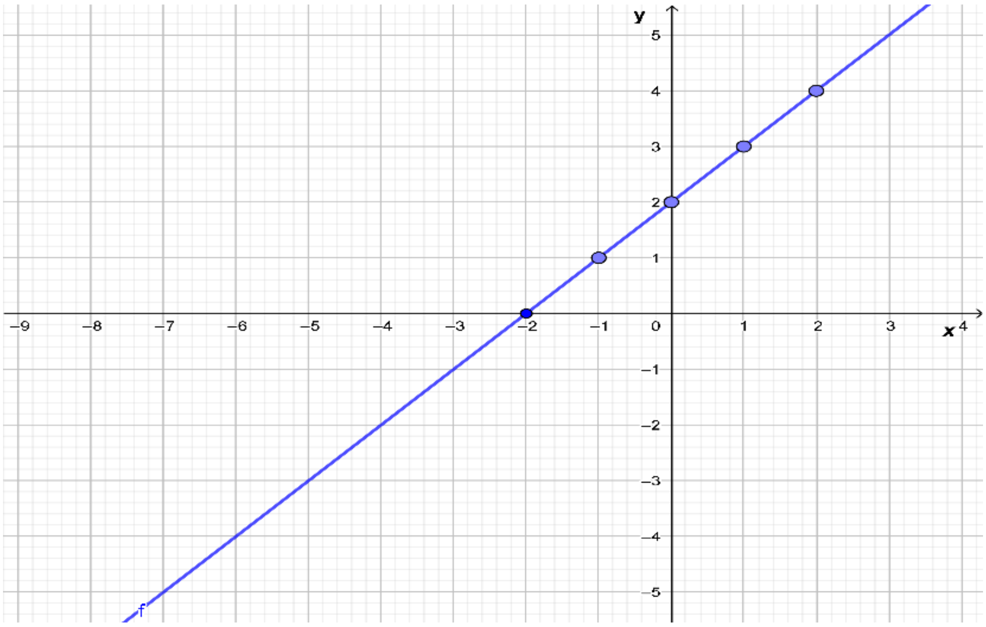
Resposta:

Quadro 18 – Questão 2; Fase 2

x	f(x) = x + 2
-2	0
-1	1
0	2
1	3
2	4

Fonte: O autor, 2022.

Gráfico 17 – Gráfico da função $f(x)$; Questão 2 da Fase 2



Fonte: O autor, 2022.

QUESTÃO 3) Faça o esboço do gráfico de uma função do 1º grau decrescente: f(x) = -2x + 3, (a < 0)

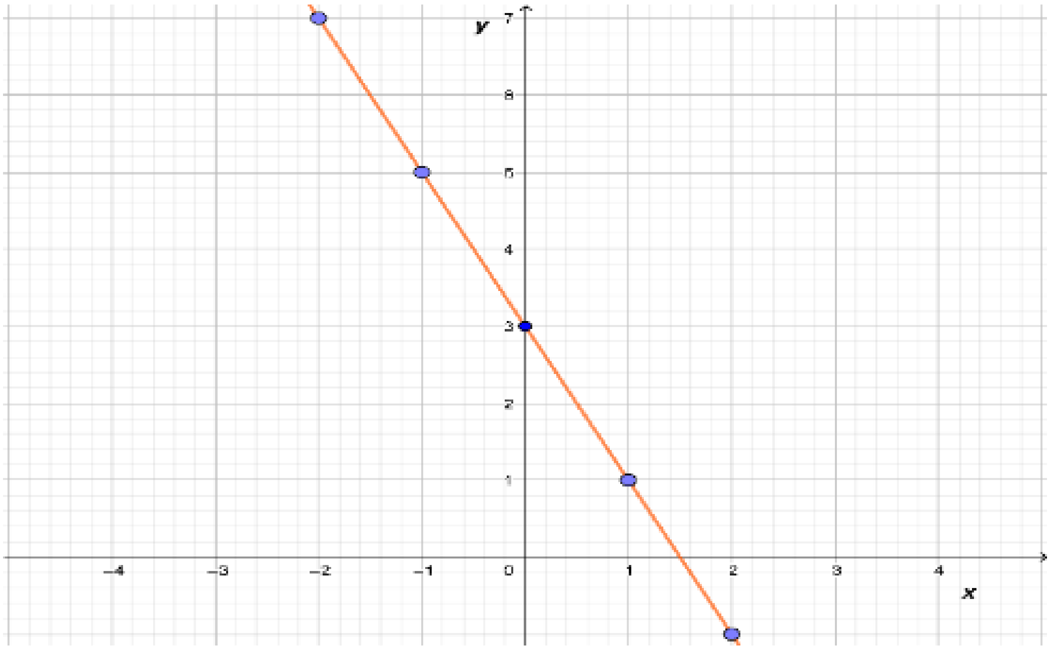
Resposta:

Quadro 19 – Questão 3; Fase 2

x	f (x) = -2x + 3
-2	7
-1	5
0	3
1	1
2	-1

Fonte: O autor, 2022.

Gráfico 18 – Gráfico da função $f(x)$; Questão 3 da Fase 2



Fonte: O autor, 2022.

QUESTÃO 4) Defina a característica observada no exercício anterior, para determinar se a função é crescente ou decrescente

Resposta: São decrescentes as funções em que se pode verificar a diminuição do valor de y ao aumentar o valor de x. São crescentes as funções em que se pode verificar o aumento do valor de y ao aumentar o valor de x.

QUESTÃO 5) Classifique as funções a seguir em (C) crescente ou (D) decrescente:

( ) f(x) = 2x + 1
( ) g(x) = –8x + 7
( ) h(x) = 5 – x

Resposta:
(C) f(x) = 2x + 1
(D) g(x) = –8x + 7
(D) h(x) = 5 – x

QUESTÃO 6) Em uma determinada cidade, a tarifa cobrada pelos taxistas corresponde a uma parte fixa denominada bandeirada e uma parte referente aos quilômetros percorridos. Sabendo-se que uma pessoa pretende dirigir 7 km com a bandeirada custando R$ 4,50 e pagando R$ 2,75 por quilômetro rodado, determine:

- Uma função que expressa o valor da tarifa calculada em relação aos quilômetros percorridos naquela cidade.

Resposta:

De acordo com os dados, a bandeirada, R$ 4,50, não depende do número de quilômetros percorridos. Cada quilômetro percorrido deve ser multiplicado por 2,75. Considerando p(x) o valor da tarifa, podemos escrever a seguinte função para expressar este valor:

$$p\,(x) = 2{,}75\,x + 4{,}5$$

-Quanto paga a pessoa mencionada no enunciado.

Resposta:

Agora que definimos a função para calcular a tarifa, basta substituir x por 7 km

$$p\,(7) = 2{,}75.\ 7 + 4{,}5 = 19{,}25 + 4{,}5 = 23{,}75$$

Logo, a pessoa tem que pagar R$ 23,75 por uma viagem de 7 km.

QUESTÃO 7) O dono de uma loja de moda praia gastou R$ 520,00 comprando um novo estilo de biquíni. Ele pretende vender cada peça desse biquíni por R$ 40,00. Com quantas peças vendidas ele começará a ter lucro?

Resposta:

Dada a quantidade x de itens vendidos, o lucro do comerciante é dado pela seguinte função:

$f\,(x) = 40.x – 520.$

Calculando f (x) = 0, encontramos o número de peças que o revendedor precisa para não ter lucro nem prejuízo.

$40.x - 520 = 0$

$40.x = 520$

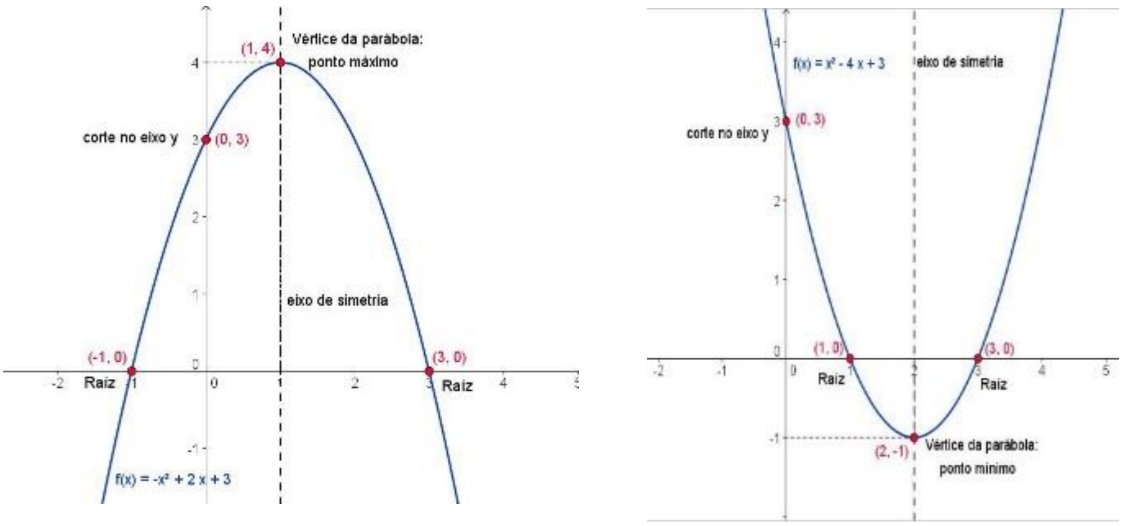
$x = 520 / 40$

$x = 13$

Portanto, se ele vender mais de 13 peças, terá lucro, se vender menos de 13 peças, terá prejuízo.

QUESTÃO 8) A função de segundo grau dada pela expressão matemática $y = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$ é representada graficamente por uma parábola com concavidade para cima quando $a > 0$; ou concavidade para baixo quando $a < 0$. O gráfico da função de 2º grau é construído no plano de coordenadas cartesianas, atribuindo valores a x e encontrando os valores correspondentes a y. Os números encontrados são chamados de pares ordenados (x,y) e quando juntos formam a parábola representativa da função de segundo grau.

Figura 24 – Características do gráfico de uma função do segundo grau



Fonte:< http://www.joinville.ifsc.edu.br/~joni.fusinato/MAT%20I%20-%20Integrado/Aulas/>. Acesso em 21 de dezembro de 2021

Vamos determinar o gráfico da função dada por $y = f(x) = x^2$. Faça o esboço do gráfico no papel milimetrado e utilize o quadro abaixo para a realização desta atividade.

Quadro 20 – Questão 8; Fase 2

x	$y = f(x) = x^2$	(x,y)
-2		
-1		
0		
1		
2		

Fonte: O autor, 2022.

Resposta:

Quadro 21 – Resposta da Questão 8; Fase 2

x	y = f(x) = x^2	(x,y)
-2	4	(-2,4)
-1	1	(-1,1)
0	0	(0,0)
1	1	(1,1)
2	4	(2,4)

Fonte:O autor, 2022.

$y = (-2)^2 = 4$

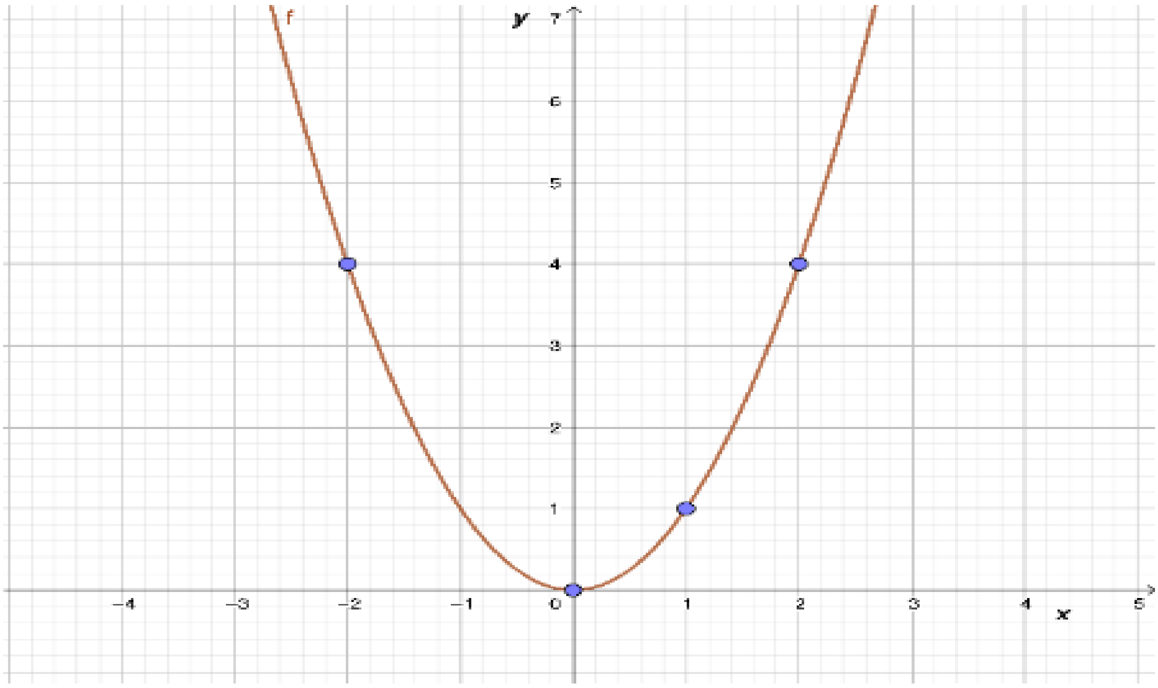
$y = (-1)^2 = 1$

$y = (0)^2 = 0$

$y = (1)^2 = 1$

$y = (2)^2 = 4$

Gráfico 19 – Gráfico da função $f(x)$; Questão 8 da Fase 2



Fonte: O autor, 2022.

QUESTÃO 9) Faça o esboço do gráfico de funções do 2º grau, um com concavidade voltada para cima e outro com concavidade voltada para baixo, no papel milimetrado e utilize o quadro abaixo para a realização desta atividade.

a) $y = x^2 - 2x$ $(a > 0)$

Quadro 22 – Questão 9 letra a); Fase 2

x	$y = x^2 - 2x$
-1	
0	
1	
2	
3	

Fonte: O autor, 2022.

Resposta:

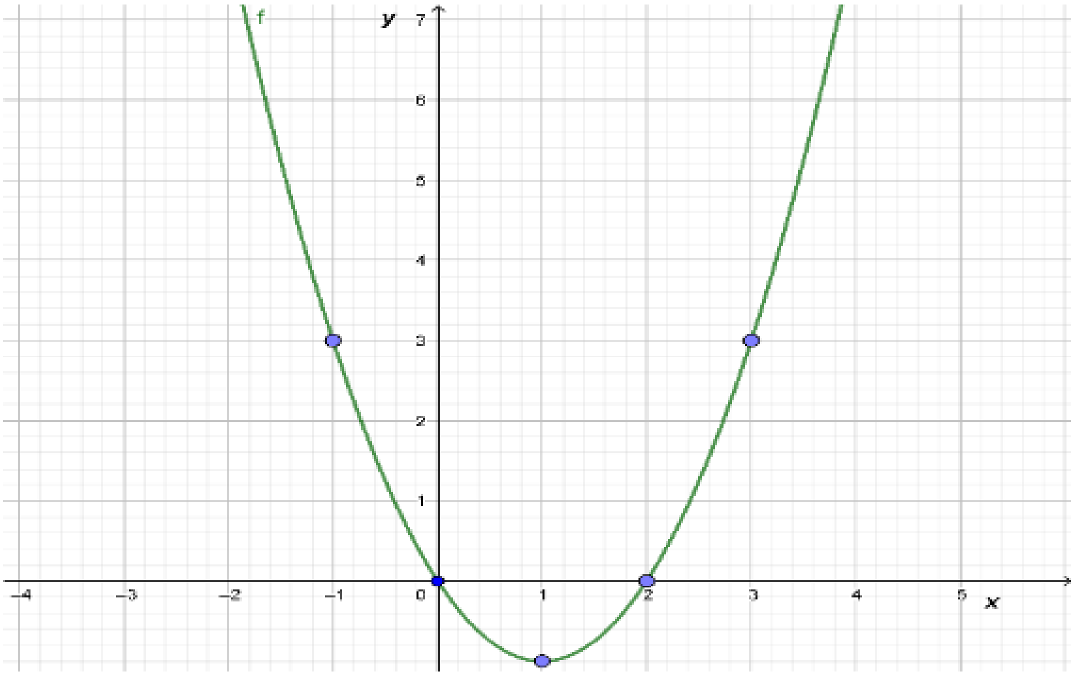
Observe o quadro com os valores de x e y, onde podem ser selecionados aleatoriamente os números de x, que são sucessivamente substituídos na função para encontrar os valores correspondentes a y.

Quadro 23 – Resposta da Questão 9 letra a); Fase 2

x	$y = x^2 - 2x$
-1	3
0	0
1	-1
2	0
3	3

Fonte: O autor, 2022.

Gráfico 20 – Gráfico da função $f(x)$; Questão 9 letra a) da Fase 2



Fonte: O autor, 2022.

b) $y = -x^2 + 3x$, $(a < 0)$

Quadro 24 – Questão 9 letra b); Fase 2

x	$y = -x^2 + 3x$
-1	
0	
1	
2	
3	
4	

Fonte: O autor, 2022.

Resposta:

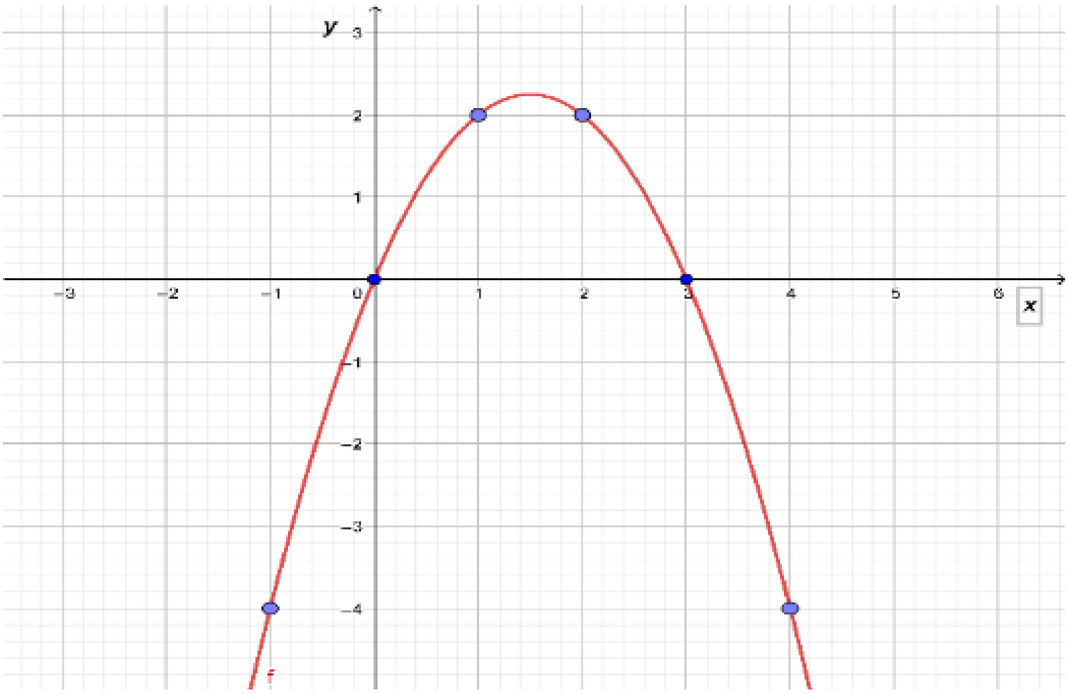
$$y = -x^2 + 3x, \ (a < 0)$$

Quadro 25 – Resposta da Questão 9 letra b); Fase 2

x	$y = -x^2 + 3x$
-1	-4
0	0
1	2
2	2
3	0
4	-4

Fonte: O autor, 2022.

Gráfico 21 – Gráfico da função $f(x)$; Questão 9 letra b) da Fase 2



Fonte: O autor, 2022.

QUESTÃO 10) Defina a característica observada, na atividade acima, para determinar se a concavidade da parábola é direcionada para cima ou a concavidade direcionada para baixo.

Resposta:

As funções quadráticas cujo coeficiente de x^2 é positivo têm concavidade voltada para cima. Quando o coeficiente de x^2 é negativo a concavidade é voltada para baixo.

QUESTÃO 11) Identifique se a representação gráfica das funções a seguir é uma parábola, com a concavidade direcionada para cima (∪) ou com a concavidade direcionada para baixo (∩):

(   ) $f(x) = 2x^2 – 3x + 4$

(   ) $g(x) = –5x^2 – 7x^2$

(   ) $h(x) = –x^2 – 2x + 8$

Resposta:

(∪) $f(x) = 2x^2 – 3x + 4$

(∩) $g(x) = –5x^2 – 7x^2$

(∩) $h(x) = –x^2 – 2x + 8$

QUESTÃO 12) Quando uma bola é chutada em um jogo de futebol por um goleiro num tiro de meta, sua trajetória é descrita pela equação $h(t) = – 2t^2 + 8t$ ($t \geq 0$), onde t é o tempo medido em segundos e h (t) é a altura em metros da bola no instante t. Após o chute, determine:

- O momento em que a bola retorna ao solo.

Resposta:

Houve dois momentos em que a bola tocou o solo: o primeiro foi antes de ser chutada e o segundo quando ela finalizou sua trajetória e retornou para o chão. Em ambos os momentos a altura h(t) foi igual a zero, então:

$h(t) = – 2t^2 + 8t$

$0 = – 2t^2 + 8t$

$2t^2 – 8t = 0$

$2t. (t – 4) = 0$

$t' = 0$

$t'' – 4 = 0$

$t'' = 4$

Portanto, o segundo momento em que a bola tocou o solo foi no momento de quatro segundos.

- A altura máxima que a bola atingiu.

Resposta:

A altura máxima que a bola atingiu, é dada pelo vértice da parábola e as coordenadas de seu vértice (x_v, y_v). Perceba que a coordenada x do vértice (x_v) fica no ponto médio do segmento entre as raízes da parábola, portanto, para encontrar a coordenada x_v, podemos calcular a média aritmética entre as raízes da função:

$$x_v = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{0+4}{2} = 2$$

No caso apresentado, só é interessante encontrar y_v. Note também que a imagem da função aplicada no ponto x_v é justamente y_v, ou seja, $f(x_v) = y_v$.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
$$y_v = f(x_v) = a(x_v)^2 + b(x_v) + c$$
$$y_v = f(2) = -2(2)^2 + 8(2) + 0 = 8$$

Portanto, a altura máxima que a bola atingiu foi de 8 metros

APÊNDICE C – SUGESTÃO DIDÁTICA DA FASE 3

Comentários com sugestões para esta fase: Os alunos são instruídos a resolver as seguintes tarefas em pares. É importante que as duplas expliquem seu raciocínio à medida que desenvolvem cada um dos problemas sugeridos aqui. Eles devem delinear todos os passos dados para obter as respostas e apresentá-las por escrito para análise do(a) professor(a) com o objetivo de que ele(a) possa analisar o conhecimento prévio dos discentes, encontrar os pontos de maior dificuldade, que merecem mais atenção, a fim de que as dúvidas dos alunos possam ser sanadas e a sequência didática proposta possa ser aperfeiçoada, significativamente, em momentos futuros, de acordo com princípios norteadores da teoria da aprendizagem significativa de Ausubel.

Conforme o planejamento, as atividades do terceiro encontro devem levar em consideração os conhecimentos prévios identificados, o que deve ser feito a partir da análise das soluções das situações-problema propostas na segunda fase. Com base nisso, novas questões são sugeridas para permitir que os alunos observem, experimentem e hipotetizem, como participantes ativos do seu próprio aprendizado. As novas atividades funcionam, em um nível muito introdutório, para servir como uma ponte entre o que o aluno já sabe e o que ele precisa saber para obter um aprendizado significativo por meio da tarefa que está enfrentando. Podem ser sugeridas para serem resolvidas em duplas, a fim de que os alunos possam discutir os problemas apresentados, sem a intervenção do professor. Os alunos devem delinear todos os passos dados para obter as respostas e apresentá-las por escrito para análise do(a) professor(a). O docente deve revisar todas as situações-problema que os alunos trabalharam nesta fase, esclarecendo quaisquer dúvidas que tenham surgido até o momento.

QUESTÃO 5.3.1

a) Completando o quadro: O quadro a seguir mostra o que acontece quando tal operação é executada.

Quadro 26 – Resposta da Questão 5.3.1 letra a); Fase 3

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1	2	3	8
1,5	2,75	2,5	5,75
1,8	3,44	2,2	4,64
1,9	3,71	2,1	4,31
1,95	3,8525	2,05	4,15250
1,99	3,97010	2,01	4,03010
1,995	3,985025	2,005	4,015025
1,999	3,997001	2,001	4,003001

Fonte: O autor, 2022.

b) Os pares ordenados encontrados são: (1,9994; 3,9982), (1,9996; 3,9988), (1,99968; 3,99904), (1,9998; 4,9994), (1,99988; 3,99964), (1,99996; 3,99988), (2,00004; 4,00012), (2,00012; 4,00036), (2,0002; 4,0006).

c) Analisando os resultados do quadro: Preenchendo o quadro, item (a), e os valores das ordenadas nos pares ordenados, item (b), notamos que a função está ficando cada vez mais perto de 4, à medida que chegamos bem próximos à esquerda e à direita de 2.

d) Analisando graficamente: Se olharmos para o gráfico da função f, vemos que a função atinge o valor 4 quando x é igual a 2.

e) Analisando algebricamente: Sim, é suficiente substituir o lugar de x na função por 2. Ou seja: $f\ (2) =\ (2)^2 - \ (2) +\ 2, isto$ é, $f(2) =\ 4$. Podemos encontrar, neste caso, o valor que a função tende a atingir quando x se aproxima de (2) por substituição simples.

f) Amadurecendo a ideia de continuidade: O valor de f (2) é 4. De acordo com a definição informal de continuidade que foi tomada e observada no gráfico de f acima, digamos que seu gráfico não tenha pontos indefinidos, quebras, buracos e saltos. Portanto, a função f é contínua no ponto x = 2. Podemos ver que as aproximações à direita e à esquerda de x=2 são iguais a 4.

QUESTÃO 5.3.2

a) Completando o quadro: O quadro abaixo mostra o que acontece quando realizamos tal operação.

Quadro 27 – Resposta da Questão 5.3.2, letra a); Fase 3

x	$f(x)$	x	$f(x)$
9	9	11	9,9
9,5	9,5	10,5	9,45
9,8	9,8	10,2	9,18
9,9	9,9	10,1	9,09
9,95	9,95	10,05	9,045
9,99	9,99	10,01	9,009
9,995	9,995	10,005	9,0045
9,999	9,999	10,001	9,0009

Fonte: O autor, 2022.

Analisando os resultados do quadro: À medida que completamos o quadro, descobrimos que a função fica cada vez mais perto de diferentes valores conforme nos aproximamos à esquerda e à direita de 10

b) Analisando graficamente: Conforme explicado acima, em última análise, estamos interessados no que acontece na vizinhança do ponto, ou seja, na vizinhança de 10. Veja o gráfico da função f (x). Observamos que se formos para a direita e para a esquerda no gráfico, obtemos valores diferentes, por isso encontramos um “buraco” quando x=10.

c) Calculando algebricamente: Se calcularmos f (10), seu valor é 10. Notamos que a função salta no ponto x = 10.

d) Amadurecendo a ideia de continuidade: Este gráfico ilustra uma descontinuidade conhecida como uma descontinuidade de salto. Observe que se formos para a direita e para a esquerda no gráfico, obtemos valores diferentes, como foi dito anteriormente.

APÊNDICE D – SUGESTÃO DIDÁTICA DAS FASES 4,5,6

Comentários com sugestões para as fases 4,5 e 6: Os alunos são instruídos a resolver as seguintes tarefas em pares. É importante que as duplas expliquem seu pensamento à medida que desenvolvem cada um dos problemas propostos neste momento, apresentando-o à turma e entregando-o, posteriormente, por escrito, ao professor(a) para serem analisados com o objetivo de que ele(a) possa analisar o conhecimento dos discentes em relação ao conteúdo trabalhado nesta fase, encontrar os pontos de maior dificuldade, que merecem mais atenção, a fim de que as dúvidas dos alunos possam ser sanadas e a sequência didática proposta possa ser aperfeiçoada, significativamente, em momentos futuros, de acordo com princípios norteadores da teoria da aprendizagem significativa de Ausubel.

Nesta fase, são recomendados momentos de exposição/intervenção do professor(a) sobre alguns conceitos necessários para o posterior desenvolvimento das atividades. É importante que haja a mediação do professor, quando são promovidas atividades que desenvolvem a socialização de ideias. Os alunos precisam se sentir à vontade e entendam suas intervenções como colaboradores, talvez mais para si mesmos do que para os outros. Cada uma das exposições/intervenções pode ser projetada e lida para o grande grupo usando o PowerPoint e os slides apresentados através do Datashow. Neste passo é importante levar em consideração as dificuldades observadas e analisadas nas atividades promovidas nos dois primeiros encontros, dando espaço para questionamentos dos alunos ou sendo apresentadas pelo professor para esclarecer e apresentar novos exemplos e conceitos, sempre que necessário. O essencial é que seja valorizada a diferenciação progressiva, partindo de aspetos mais gerais que dão um primeiro olhar ao todo, ao essencial, mas depois abordando aspectos mais específicos.

Em cada parte destas fases, os alunos devem trabalhar em duplas para discutir e resolver juntos as situações-problema propostas. Feito isso, a orientação consiste no fato de que, após a conclusão de cada etapa deste passo, os grupos apresentem as soluções das questões à turma, bem como a explicação detalhada das mesmas, com a mediação do professor. Os estudantes devem apresentar todos os passos realizados para a obtenção das respostas, devendo entregá-los, por escrito, para análise do(a) professor(a). O docente deve revisar todas as situações-problema que os alunos trabalharam nesta fase, esclarecendo quaisquer dúvidas que tenham surgido até o momento.

SUGESTÃO DIDÁTICA DA FASE 4

QUESTÃO 5.4.1

a) Analisando graficamente: Depois de observar graficamente a função f e analisar o comportamento desta função aproximando-se à esquerda de x = 10 no quadro, temos: $\boldsymbol{\lim_{x \to 10^-} = 10}$

Analisando algebricamente: Vamos encontrar, algebricamente, o limite lateral, x em direção à 10 pela esquerda: $\boldsymbol{\lim_{x \to 10^-} f(x) = \lim_{x \to 10^-} x = 10}$

b) Analisando graficamente: Depois de observar graficamente a função f e analisar o comportamento desta função aproximando-se à direita de x = 10 no quadro, temos: $\boldsymbol{\lim_{x \to 10^+} = 9}$

Analisando algebricamente: Vamos encontrar, algebricamente, o limite lateral, x em direção à 10 pela direita: $\boldsymbol{\lim_{x \to 10^+} f(x) = \lim_{x \to 10^+} 0{,}9 \cdot x = 9}$

QUESTÃO 5.4.2

a) Completando o quadro: O abaixo mostra o que acontece quando realizamos tal operação.

Quadro 28 – Resposta da Questão 5.4.2 letra a); Fase 4

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1	2	3	5
1,5	3,5	2,5	4,5
1,8	3,8	2,2	4,2
1,9	3,9	2,1	4,1
1,95	3,95	2,05	4,05
1,99	3,99	2,01	4,01
1,995	3,995	2,005	4,005
1,999	3,999	2,001	4,001

Fonte: O autor, 2022.

b) Analisando os resultados do quadro: Ao completar o quadro, descobrimos que conforme nos aproximamos à esquerda e à direita de x=2, a função fica cada vez mais perto de 4. Depois de observar a função f e analisar o comportamento desta função, que realiza uma aproximação à esquerda e à direita de x = 2 no quadro, temos: $\lim_{x\to -2^-} f(x) = 4$ e o $\lim_{x\to -2^+} f(x) = 4.$ Descobrimos que os limites laterais coincidem, ou seja: $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$

c) Se substituirmos x por (2), teremos a seguinte situação: $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(2)^2-4}{(2)-2} = \frac{0}{0}$. Ou seja, temos uma indeterminação. Sabemos que essa relação $\frac{0}{0}$ é uma indeterminação porque é um valor indefinido. Podemos observar que o gráfico contém um furo porque a função não está definida para o valor de x = 2, ou seja, o valor 2 não faz parte do domínio da função.Assim, não podemos encontrar o limite ou valor que a função deseja atingir quando x se aproxima de (2) por simples substituição. No entanto, no quadro e no gráfico, podemos ver que a função tem a intenção de atingir o valor 4 à medida que x se aproxima à direita e à esquerda de x=2, ou seja, o limite da função existe quando x se aproxima de 2 e é igual a 4; isto é, 4 unidades são produzidas.

d) Analisando o gráfico da função, precisamos lembrar que o buraco existe nele, em x = 2, pois esse valor não faz parte do. Embora a função tenha um “buraco” em x = 2, o limite da função existe quando x se aproxima de 2 e é igual a 4; isto é, 4 unidades são produzidas.

e) Temos um “furo” em x=2, portanto, a função representa uma descontinuidade pontual, também chamada de descontinuidade removível.

QUESTÃO 5.4.3

a) Completando o quadro: O quadro abaixo mostra o que acontece quando realizamos tal operação.

Quadro 29 – Resposta da Questão 5.4.3 letra a); Fase 4

x	$f(x)$	x	$f(x)$
3,9	0,2515823418685	4,1	0,2484567313165
3,99	0,2501564456182	4,01	0,2498439450078
3,999	0,2500156269534	4,001	0,2499843769528
3,9999	0,2500015625195	4,0001	0,2499984375195
3,99999	0,2500001562501	4,00001	0,2499998437501
3,999999	0,2500000156250	4,000001	0,2499999843750
3,9999999	0,2500000015625	4,0000001	0,2499999984375
3,99999999	0,2500000001562	4,00000001	0,2499999998437

Fonte: O autor, 2022.

Analisando os resultados do quadro: Ao completar o quadro e depois de analisar seu comportamento aproximando-se à esquerda e à direita de x = 4, pode-se ver que à medida que nos aproximamos de x=4, a função se aproxima à esquerda e à direita, cada vez mais, de 0,25.

b) Para encontrar o limite de uma função, não estamos interessados no valor que ela assume no ponto x, mas no valor que ela tende a atingir. Em limite, o importante para nós é o que acontece próximo ao ponto, ou seja, próximo a 4. Para que o valor limite exista, os limites à esquerda e à direita devem ser os mesmos, ou seja: $\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^-} f(x)$. Podemos ver que se formos para a esquerda e para a direita de x=4 no quadro, obtemos o mesmo valor, a função se aproxima à esquerda e à direita, cada vez mais, de 0,25. Isso significa que o limite da função em 4 realmente existe. Assim, o limite da função f quando x se aproxima de 4 é $\frac{1}{4} = 0{,}25$. Escrevemos: $\lim_{x\to 4} f(x) = 0{,}25$

c) Notamos que existe uma lacuna no gráfico porque a função não está definida com o valor x = 4, ou seja, o valor 4 não faz parte do domínio da função.

d) No entanto, não parece uma boa ideia substituir x por 4 para avaliar a função, uma vez que temos zero (0) no denominador. A função f não está definida para o valor de x = 2, ou seja, o valor 2 não faz parte do domínio da função.Assim, não podemos encontrar o limite ou valor que a função deseja atingir quando x se aproxima de (4) por simples substituição. No entanto, no quadro, podemos ver que a função tem a intenção de atingir o valor 0,25 à medida que x se aproxima à direita e à esquerda de x=4, ou seja, o limite da função existe quando x se aproxima de 4 e é igual a 0,25.

e) Amadurecendo a ideia de continuidade: A função não está definida para o valor de x = 4, ou seja, o valor 4 não faz parte do domínio da função, embora pudéssemos determinar que as aproximações são iguais tanto para a direita quanto para a esquerda de x=4, isto é, o limite da função quando x tende para 4 é igual$0{,}25\ ou\ \frac{1}{4}$. Temos um furo e, portanto, a função representa uma descontinuidade pontual, também chamada de descontinuidade removível.

SUGESTÃO DIDÁTICA DA FASE 5

QUESTÃO 5.5.1

a) Completando o quadro: O quadro abaixo mostra o que acontece quando realizamos tal operação

Quadro 30 – Resposta da Questão 5.5.1 letra a); Fase 5

x	$f(x)$	x	$f(x)$
3,5	14	2,5	-10
3,4	17	2,6	-13
3,3	22	2,7	-18
3,2	32	2,8	-28
3,1	62	2,9	-58
3,05	122	2,95	-118
3,01	602	2,98	-298
3,0001	60002	2,9999	- 59998

Fonte: O autor, 2022.

b) Analisando os resultados do quadro: Deve-se notar que se nos aproximarmos de 3 pela direita, a função aumenta infinitamente, e se nos aproximarmos de 3 pela esquerda, a função diminui infinitamente de forma negativa.

Analisando graficamente: Estamos interessados no limite, isto é, do que acontece na vizinhança do ponto, ou seja, na vizinhança de 3. Podemos ver facilmente, através do gráfico, que os limites à direita e à esquerda são diferentes quando x se aproxima de 3. Portanto, observe que a função f (x) não tem limite quando se aproxima de 3.

Analisando algebricamente: Observe que se substituirmos x por 3, obteremos o valor $\frac{6}{0}$. Anteriormente, vimos a situação em que encontramos $\frac{0}{0}$ e, para contornar e encontrar o limite, recorremos à fatoração, substituição e multiplicação pelo conjugado. A situação que surge neste ponto é distinta. Note isso, $f\ (3)\ = \frac{2.3}{3-3} = \frac{6}{0}$, o que não é uma indeterminação matemática $\frac{0}{0}$, mas um valor indefinido.

c) A função não está definida com o valor x = 3, ou seja, o valor 3 não faz parte do domínio da função. Percebemos que as aproximações à direita e à esquerda de x=3 são diferentes, ou seja, os limites laterais não coincidem. Este gráfico ilustra uma descontinuidade conhecida como descontinuidade infinita.

QUESTÃO 5.5.2

a) Analisando algebricamente: Calculamos f (50): $f(x) = \frac{120.x}{100-x} = \frac{120.50}{100-50} = 120, ou\ seja, 120\ 000\ 000\ Reais.$

b) Analisando algebricamente: Agora precisamos resolver a seguinte equação: $280 = \frac{120.x}{100-x} \rightarrow \frac{28\ 000}{400} = 70\%.$

c) Analisando graficamente: Observe que a função cresce infinitamente conforme nos aproximamos de 100 pela esquerda. Neste ponto poderíamos dizer que o limite à esquerda de f (x) é infinito (+ ∞) e temos o seguinte: $\lim_{x \to 100^-} f(x) = +\infty$.

d) A função não está definida com o valor x = 100, ou seja, o valor 100 não faz parte do domínio da função. Temos uma assíntota vertical, x=100. O limite de f, que tende para 100 à esquerda é infinito $(+\infty)$.

e) Como vimos anteriormente: $\lim_{x \to 100^-} f(x) = +\infty$. Isso significa que quanto mais perto chegamos da limpeza de toda a reserva, o custo aumenta arbitrariamente; ou seja, não é economicamente justificável limpar toda a reserva.

QUESTÃO 5.5.3

a)Completando o quadro: O quadro abaixo mostra o que acontece quando realizamos tal operação.

Quadro 31 – Resposta da Questão 5.5.3 letra a); Fase 5

x	$f(x)$	x	$f(x)$
10 000	2,0001	- 10 000	1 ,99990000
10 000 000	2,0000001	- 10 000 000	1,9999999000000
100 000 000	2,00000001	- 100 000 000	1,9999999900000
100 000 000 000	2,00000000001	- 100 000 000 000	1,9999999999900
100 000 000 000 000	2,00000000000001	- 100 000 000 000 000	1,9999999999999

Fonte: O autor, 2022.

b) Analisando os resultados do quadro e do gráfico: Se x tende a valores infinitamente grandes, vemos no quadro e no gráfico que a função tende a assumir valores próximos de 2, ou seja, a função se aproxima da altura y = 2.

c) Analisando os resultados do quadro e do gráfico: A partir da análise do gráfico de f (x) e do quadro, também descobrimos que quando a função tende a assumir valores negativos infinitamente pequenos, a função também se aproxima da altura 2. Portanto, dizemos que o limite existe e é igual a dois.

d) Analisando o gráfico, notamos que $\frac{1}{2}$ não pertence ao domínio da função e também não existe o limite da função quando x tende a $\frac{1}{2}$. Veja que temos uma assíntota vertical em x = $\frac{1}{2}$. A função não está definida para o valor de $x = \frac{1}{2}$, ou seja, o valor $\frac{1}{2}$ não faz parte do domínio da função. Temos uma assíntota vertical. O limite de f de x tendendo a $\frac{1}{2}$ pela direita é infinito $(+\infty)$ e o limite de f(x) de x tendendo a $\frac{1}{2}$ pela esquerda é menos infinito $(-\infty)$.

e) Observando o gráfico de f notamos que existe uma reta, y=2, paralela ao eixo x passando pelo ponto $(0,2)$ para a qual a curva que representa o gráfico se aproxima à medida que "x tende a mais ou menos infinito", sem nunca a intersectar.

f) Amadurecendo a ideia de continuidade: Percebemos que o limite de f de x tendendo a $\frac{1}{2}$ pela direita é infinito $(+\infty)$ e o limite de f(x) de x tendendo a $\frac{1}{2}$ pela esquerda é menos infinito $(-\infty)$ são diferentes, ou seja, os limites laterais não coincidem. A função f não é contínua em $x = \frac{1}{2}$. Este gráfico ilustra uma descontinuidade conhecida como descontinuidade infinita.

QUESTÃO 5.5.4

a) Completando o quadro: Espera-se que o preenchimento do quadro produza os seguintes resultados:

Quadro 32– Resposta da Questão 5.5.4 letra a); Fase 5

x	$f(x)$	x	$f(x)$
4,5	- 1	3,5	3
4,4	- 1,5	3,6	3,5
4,3	- 2,3333333	3,7	4,3333333
4,2	- 4	3,8	6
4,1	- 9	3,9	11
4,05	- 19	3,95	21
4,01	- 99	3,98	51
4,0001	- 9 999	3,9999	10 001

Fonte: O autor, 2022.

Completando o quadro: Ao completar o quadro, obteremos os seguintes resultados:

Quadro 33 – Resposta da Questão 5.5.4, letra a); Fase 5

x	$f(x)$	x	$f(x)$
10 000	0,99989995	- 10 000	1,0000999
10 000 000	0,999999899	- 10 000 000	1,0000000999999
100 000 000	0,9999999899	- 100 000 000	1,0000000099999
100 000 000 000	0,9999999999899	- 100 000 000 000	1,0000000000099

Fonte: O autor, 2022.

b)

i) Vejamos o gráfico da função f(x) e o quadro. Podemos ver facilmente que os limites à esquerda e à direita são diferentes quando x se aproxima de 4. Vamos observar graficamente o que acontece com a função perto do valor x = 4. Conforme nos aproximamos de 4 pela esquerda, a função cresce infinitamente. Podemos dizer que o limite de f (x) de x tendendo à esquerda de x=4 é infinito $(+\infty)$. Portanto $\lim\limits_{x \to 4^-} \frac{x-5}{x-4} = +\infty.$

ii) Vamos observar graficamente o que acontece com a função perto do valor x = 4. Conforme nos aproximamos de 4 pela direita, a função decresce infinitamente negativamente, e conforme nos aproximamos de 4 pela esquerda, a função cresce infinitamente. Podemos dizer que o limite de f (x) de x tendendo à direita de x=4 é menos infinito $(-\infty)$ Portanto: $\lim\limits_{x \to 4^+} \frac{x-5}{x-4} = -\infty.$

iii) Se olharmos o quadro e o gráfico de f, descobrimos que quando x tende a valores infinitamente grandes, a função tende a assumir valores próximos de 1, ou seja, a função se aproxima da altura y = 1: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x-5}{x-4} = 1.$

iiii) Quando a função tende a assumir valores negativos e infinitamente pequenos, ela também se aproxima da altura 1. Podemos escrever assim: $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x-5}{x-4} = 1.$

c) Descobrimos que não há limite da função quando x tende para 4, uma vez que os limites laterais são diferentes, logo: $\lim\limits_{x \to 4} \frac{x-5}{x-4} = não\ existe.$

d) Descobrimos que há limite da função quando x tende para ∞, uma vez que os limites laterais são iguais. Isso significa que o limite da função quando x tende para o infinito é 1.

Assim: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x-5}{x-4} = 1.$

e) Analisando algebricamente: Conforme mencionado anteriormente, no caso em que o grau do numerador e do denominador da fração que expressa a função que queremos calcular o limite é o mesmo, o limite é o número obtido pela divisão dos coeficientes desses termos: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x-5}{x-4}$. Lembre-se de que quando o expoente não é expresso, ele é entendido como expoente1,

ou seja, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^1-5}{x^1-4}$. Portanto, temos como coeficientes 1 no numerador e 1 no denominador. Desta forma, temos o coeficiente $\frac{1}{1}$ que, se resolvido, dará como resultado, 1. Certifique-se de que corresponde ao resultado que pudemos ver no gráfico mostrado acima.

f) Quando $\lim\limits_{x\to c} f(x) = +\infty \; ou \; -\infty$, a função f terá uma assíntota vertical em x = c. Ou seja, x = 4 é uma assíntota vertical. Quando $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = d \quad ou \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = d$ existe, então f(x) tem uma assíntota horizontal em y = d, ou seja, y = 1 é uma assíntota horizontal.

]QUESTÃO 5.5.5

a) Completando o quadro: Depois de preencher o quadro, os seguintes resultados são obtidos:

Quadro 34 – Resposta da Questão 5.5.5 letra a); Fase 5

x	$m(x)$
10	17,39130434
20	18,82352941
50	19,56947162
90	19,76815113
100	19,79218208
200	19,94763745
1000	19,97992018

Fonte: O autor, 2022.

b) Analisando os resultados do quadro e do gráfico: Se x tende a valores infinitamente grandes, pode ser visto no gráfico que a função tende a assumir valores menores, e no quadro deve-se notar que a função tende a assumir valores próximos a 20, isto é, a função se aproxima da altura y = 20. Desta forma: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{20x^2}{x^2+x+5} = 20$.

Analisando algebricamente: Usaremos a forma para calcular o limite: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{20x^2}{x^2+x+5} =?$ Conforme mencionado anteriormente, no caso em que o grau do numerador da fração que expressa a função que queremos calcular o limite é o mesmo, o limite é o número que resulta da divisão dos coeficientes desses termos $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{20x^2}{x^2+x+5}$. Portanto, temos 20 no numerador 20 e 1 no denominador, como coeficientes. Desta forma, obtemos o coeficiente $\frac{20}{1}$, que, se resolvido, obterá como resultado, 20.

c) Logo, após um longo período de treinamento, um funcionário pode construir 20 computadores por dia.

d) Não, já que de acordo com o ítem c), após um longo período de treinamento, um funcionário pode construir 20 computadores por dia, logo esta montadora não pode almejar uma produção diária de 21 computadores por funcionário.

QUESTÃO 5.5.6

a) Preenchendo o quadro, obtemos os seguintes resultados:

Quadro 35 – Resposta da Questão 5.5.6 letra a); Fase 5

x	$f(x)$
10	3,571428
20	1,648351
50	0,623960
90	0,340737
100	0,305997

Fonte: O autor, 2022.

Analisando os resultados do quadro e do gráfico: Se x tende a valores infinitamente grandes, vemos, de acordo com o gráfico, que a função tende a assumir valores menores e que a função de acordo com o quadro tende a assumir valores próximos de 0, ou seja, a função se aproxima da altura y = 0. Desta forma: $\lim_{x \to \infty} \frac{30x}{x^2-2x+4} = 0$

b) Analisando algebricamente: Voltando ao que dissemos antes, se o grau do denominador for maior do que o grau do numerador, temos: $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$.

c) A epidemia de dengue passará quando o tempo crescer infinitamente; ou seja, o número de pessoas infectadas em uma epidemia de dengue tende a zero a longo prazo.

SUGESTÃO DIDÁTICA DA FASE 6

QUESTÃO 5.6.1

a) Analisando graficamente: Analisando o gráfico acima próximo a 20, ou seja, encontrando os limites laterais, x pela esquerda em direção a 20 e x tendendo a 20 pela direita, notamos que a função salta. Este gráfico ilustra uma descontinuidade conhecida como uma descontinuidade de salto. Percebemos que quando vamos para a direita e para esquerda de x=20 no gráfico, chegamos a imagens diferentes. Portanto, ao analisar o gráfico, percebe-se que há uma interrupção no ponto x = 20 e nesse caso, dizemos que a função é descontínua em x = 20. Se agora analisarmos o gráfico acima e calcularmos o limite da função perto de 100, ou seja, encontrarmos os limites laterais, x pela esquerda em direção a 100 e x pela direita em direção a 100, descobrimos que a função não salta. Podemos ver isso se formos para a direita e para a esquerda de x=20 no gráfico, chegando na mesma imagem. Podemos observar que para x = 100 a função não sofre interrupções, então dizemos que a função é contínua em x = 100.

b) Para que o limite exista, os limites à esquerda e à direita de x=20 devem ser iguais, ou seja: $\lim_{x \to 20^-} f(x) = \lim_{x \to 20^+} f(x)$. Primeiramente devemos calcular o limite quando x tende a 20 pela direita e pela esquerda e quando x tende a 100 pela direita e pela esquerda. Então, vamos avaliar o limite da função próximo a 20, encontrando os limites laterais, x à esquerda em direção a 20, x tendendo a 20 à direita: $\lim_{x \to 20^-} f(x) = \lim_{x \to 20^-} 0 = 0 \ e \lim_{x \to 20^+} f(x) = \lim_{x \to 20^+} 0{,}1x = 2$. Calculando os limites, temos que o limite de f(x) pela esquerda é 0 e o limite pela direita de f(x) é 2. Logo, a função é descontínua no ponto t = 20, pois pela direita temos um valor e pela esquerda temos outro, ou seja, os limites laterais são diferentes, embora não haja buraco no gráfico (O gráfico não possui assíntota vertical) em x = 20. Os limites laterais não coincidem, portanto o limite não existe. Por outro lado, devemos verificar a continuidade para x = 100. Percebemos agora que quando a função tende a 100 pela esquerda, temos $f(x)$= 0,1x e quando a função tende a 100 pela direita, temos: $f(x) = \frac{40x-1000}{2x+100}$. Portanto, avaliemos o limite da função na vizinhança de 100, ou seja, procuremos os limites laterais, x tendendo à esquerda de 100 e x tendendo à direita de 100: $\lim_{x \to 100^-} f(x) = \lim_{x \to 100^-} 0{,}1x = 10 \ e \ \lim_{x \to 100^+} f(x) = \lim_{x \to 100^+} \frac{40x-1000}{2x+100} = 10$. Se calcularmos os limites, temos que o limite à esquerda de f (x) é 10 e o limite à direita de f (x) também é 10. Vemos que os limites laterais coincidem, então o limite existe.

c) Analisando algebricamente: $\lim_{x \to \infty} \frac{40x-1000}{2x+100}$? Conforme mencionado anteriormente, no caso em que o grau do numerador da fração que expressa a função que queremos calcular o limite é o mesmo, o limite é o número que resulta da divisão dos coeficientes desses termos $\lim_{x \to \infty} \frac{40x-1000}{2x+100}$. Portanto, temos 40 no numerador e 2 no denominador, como coeficientes. Desta forma, obtemos o coeficiente $\frac{40}{2}$, que, se resolvido, obterá como resultado, 20.

d) Observa-se que a mudança de gastos de uma família varia significativamente quando as horas que assistem TV são um pouco menor ou maior do que 20 horas. Nota-se que não mudam, as despesas, se o tempo de televisão for um pouco maior ou menor do que 100 horas por mês. Conclui-se que o custo mensal f de uma família com a assinatura de um determinado canal de TV a cabo pós um longo período, horas, de utilização deste canal por mês, não pode ser superior a 20 reais.

QUESTÃO 5.6.2

a) Para que o limite exista, os limites à esquerda e à direita de x=200 devem ser iguais, ou seja: $\lim_{x \to 200^-} f(x) = \lim_{x \to 200^+} f(x)$.Vamos avaliar o limite da função na vizinhança de 200, isto é, vamos encontrar os limites laterais, x tendendo a 200 pela esquerda e x tendendo a 200 pela direita: $\lim_{x \to 200^-} f(x) = \lim_{x \to 200^-} 0{,}025x - 2 = 3 \ e \ \lim_{x \to 200^+} f(x) = \lim_{x \to 200^+} \frac{40x}{2x+2000} = 3{,}33$. Temos que o limite à esquerda de f (x) é 3 e o limite à direita de f (x) é 3,33. Vemos que os limites laterais não coincidem, então o limite não existe. Podemos ver que quando vamos para a esquerda e para a direita no gráfico, chegamos a imagens diferentes.

Observando as condições de continuidade, temos que f (200) = 0,025 .x – 2 = 0,025 .200 – 2 = 3. Logo, f(c) = f (80) existe. Porém, notamos anteriormente que os limites laterais não coincidem, portanto o limite de x tendendo a 80 não existe, ou seja: $\lim\limits_{x \to 200^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 200^+} f(x), portanto \lim\limits_{x \to 200} = não\ existe$. Disto podemos concluir que f (x) não é contínua em 200. Portanto, a função é descontínua em x = 200.

b) Na verdade, a variação nas despesas de uma família varia consideravelmente quando sua renda é um pouco menor ou maior do que 200 reais.

c) Analisando graficamente: Se x tende a valores infinitamente grandes, pode-se ver no gráfico que a função tende a assumir valores próximos a 20, ou seja, a função se aproxima da imagem y = 20. Isso significa que o limite da função quando x se aproxima do infinito é 20.

Analisando algebricamente: Podemos verificar esse resultado da seguinte maneira: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{40x}{2x+2000} =$? Lembre-se de que, para calcular o limite no infinito, ou seja, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$, basta comparar o grau, o maior expoente, das expressões do numerador e do denominador. Se o limite existe, a função tem uma assíntota horizontal no limite. Já vimos que no caso em que o grau do numerador da fração que expressa a função que queremos calcular o limite é o mesmo, o limite é o número que resulta dos coeficientes desses termos. Observando o $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{40x}{2x+2000}$ Observe que o grau de expressão do numerador e do numerador e denominador é 1 (lembre-se: se o expoente não for expresso, ele é entendido como expoente1, ou seja, $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{40x^1}{2x^1+2000}$. Portanto, temos como coeficientes - 40 no numerador e 2 no denominador. Desta forma, temos o coeficiente $\frac{40}{2}$ que ao ser simplificado, o resultado alcançado é 20. Certifique-se de que corresponde ao resultado que podemos ver no gráfico mostrado acima, então: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{40x}{2x+2000} = 20$.

De volta ao que dissemos antes: Quando $\lim\limits_{x \to +\infty} = d\ ou \lim\limits_{x \to -\infty} = d$ existe, então f(x) tem uma assíntota horizontal em y = d, ou seja, y = 20 é uma assíntota horizontal, portanto, nenhuma família pode gastar mais de 20 reais na limpeza.

QUESTÃO 5.6.3

a) Na função $f(x) = x^2 - 8x + 5$, calculamos o limite quando x tende a 10 pela esquerda, $\lim_{x \to 10^-} f(x)$ porque nesta função x só pode assumir valores entre 0 e 10, inclusive. Já na função $f(x) = \frac{38x-100}{0,4x} =$, calculamos o limite quando x tende a 10 pela direita, ou seja, quando x tende a 10 por valores maiores que 10, porque nesta função x só pode assumir valores maiores que 10. Avaliaremos o limite da função na vizinhança de 10, isto é, encontraremos os limites laterais, x tendendo a 10 pela esquerda e x tendendo a 10 pela direita: $\lim_{x \to 10^-} f(x) = \lim_{x \to 10^-} x^2 - 8x + 5 = 70 \ e \ \lim_{x \to 10^+} f(x) = \lim_{x \to 10^+} \frac{38x-100}{0,4x} = 70$. Para que o limite exista, os limites à esquerda e à direita de x=10 devem ter o mesmo valor, isto é: $\lim_{x \to 10^-} f(x) = \lim_{x \to 10^+} f(x)$, portanto o $\lim_{x \to 10} f(x)$ existe.

b) Então, a verificação de continuidade será feita. Observando as condições de continuidade, temos que $f(10) = x^2 - 8x + 50 = 10^2 - 8.10 + 50 = 70$. Logo, f(c) = f (10) existe. Notamos anteriormente que os limites laterais coincidem, portanto o limite de x tendendo a 10 existe, ou seja: $\lim_{x \to 10^-} f(x) = \lim_{x \to 10^+} f(x) = 70, portanto \lim_{x \to 10} f(x) \ existe$. Temos que: $\lim_{x \to 10} f(x) = 70 = f(10)$. De tal modo, podemos concluir que f(x) é contínua em 10.

c) Logo, uma vez que a função é contínua em x = 10, podemos concluir que a proporção de pacientes que podem ser operados sem serem colocados na lista de espera não varia significativamente se o tempo de espera para as operações for ligeiramente inferior ou superiora a 10 meses. Sabemos ainda que segundo o modelo que se quer implementar, o percentual de cidadãos que podem ser atendidos sem terem de aguardar por outra data é de 70% (f (10) = 70).

d) Analisando graficamente: Se x tende a assumir valores infinitamente grandes, podemos ver no gráfico que a função tende a assumir valores maiores.

Analisando algebricamente: Podemos fazer a verificação deste resultado da seguinte forma: $\lim_{x \to \infty} \frac{38x-100}{0,4x} =?$. Lembre-se de que, para calcular o limite no infinito, $\lim_{x \to \infty} f(x)$, basta comparar o grau, o maior expoente, das expressões do numerador e do denominador. Se o limite existe, a função tem uma assíntota horizontal no limite. Já vimos que no caso em que o grau do numerador da fração que expressa a função que queremos calcular o limite é o mesmo que o do denominador, o limite é o número que resulta dos coeficientes desses termos. Observando o $\lim_{x\to\infty}\frac{38x-100}{0,4x}$ observe que o grau de expressão do numerador e do numerador e denominador é 1 (lembre-se: se o expoente não for expresso, ele é entendido como expoente1, ou seja, $\lim_{x\to\infty}\frac{38x^1-100}{0,4x^1}$. Portanto, temos como coeficientes 38 no numerador e 0,4 no denominador. É assim que obtemos o coeficiente$\frac{38}{0,4}$ que ao ser simplificado, o resultado 95 é alcançado. Certifique-se de que corresponda ao resultado que podemos ver no gráfico mostrado acima, logo: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{38x-100}{0,4x} = 95$

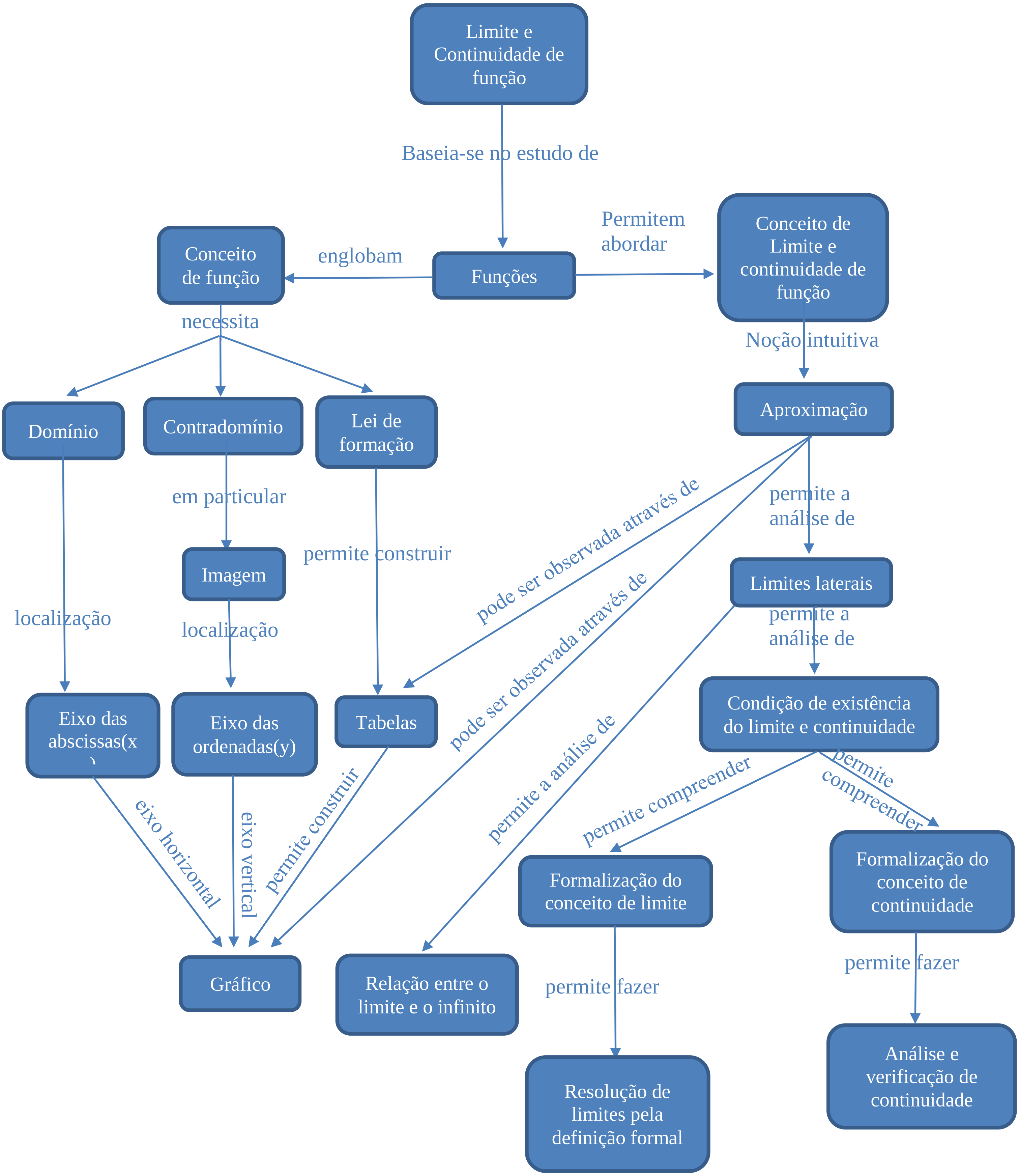
f) De volta ao que dissemos anteriormente: Quando $\lim_{x\to+\infty} = d \ ou \lim_{x\to-\infty} = d$ existe, então f (x) tem uma assíntota horizontal em y = d, ou seja, y = 95 é uma assíntota horizontal, então a porcentagem nunca pode exceder 95%.

APÊNDICE E – SUGESTÃO DIDÁTICA DA FASE 7

Comentários com sugestões para esta fase: É uma atividade em que os alunos se preocupam principalmente com situações que exigem mais raciocínio e interpretação. Antes de usar a técnica de Mapas Conceituais em sala de aula, alguns passos introdutórios (ou aulas) são sugeridos aos alunos, pois essa técnica geralmente é nova para eles, portanto, levará algum tempo para se familiarizar com ela para que possa ser usada de forma mais eficaz. Para criar um mapa conceitual eficaz, dinâmico e intuitivo, é importante considerar alguns elementos básicos: Escolha o assunto, reúna todas as informações que você precisa, processe as informações e filtre apenas o que você precisa, organize e conecte conceitos, revise e refine os detalhes. Os alunos são orientados a criarem seus mapas conceituais em grupos de 4 a 5 participantes. É importante que eles apresentem seu raciocínio para a classe ao criar seus mapas conceituais. Em seguida, cada grupo deve explicar o seu mapa conceitual, por escrito, com suas próprias palavras. Essa explicação deve ser dada ao professor(a) para ser analisada por ele(a) com o objetivo de que o docente possa verificar o conhecimento dos discentes em relação ao conteúdo trabalhado nesta fase para avaliação qualitativa conforme o número de diferenciações progressivas e reconciliações integradoras significativas, encontrar os pontos de maior dificuldade, que merecem mais atenção, a fim de que as dúvidas dos alunos possam ser sanadas e a sequência didática proposta possa ser aperfeiçoada, significativamente, em momentos futuros, de acordo com princípios norteadores da Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel. O objetivo desta atividade é verificar o seu grau de compreensão do conteúdo, noções básicas de Limites e Continuidade de Função, com base no que estudamos nos encontros anteriores.

Situação- problema proposta: Crie um Mapa Conceitual com o tema noções básicas de Limites e Continuidade de Função que será apresentado ao grande grupo para discussão. É importante que você procure expor de forma clara e objetiva como pensou, em cada etapa, ao criar o seu mapa conceitual. Após, cada grupo deve explicar o mapa feito por escrito com suas próprias palavras; essa explicação deve ser dada ao professor para avaliação qualitativa conforme o número de diferenciações progressivas e reconciliações integradoras significativas. A atividade será realizada em grupos de 4 ou 5 participantes.

Sugestão de Mapa Conceitual



APÊNDICE F– SUGESTÃO DIDÁTICA DA FASE 8

Comentários com sugestões para esta fase: Para obter evidências do conhecimento que os alunos construíram durante a aplicação da UEPS, deve ser realizada uma avaliação somativa. Assim, para o sétimo momento da UEPS, foi organizada a avaliação final. A seleção das situações-problema foi baseada no estudo realizado até o momento. Ela consta de algumas das questões trabalhadas em outros encontros, procurando-se, em alguns casos, modificar os contextos. Por isso, são apresentados para solução individual dos alunos. Segundo Moreira (2011), a avaliação somativa é aquela que tenta avaliar o alcance de objetivos específicos de aprendizagem ao final de uma fase de aprendizagem. Neste caso, procura-se avaliar o desenvolvimento do letramento matemático, definido como as capacidades e competências para raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas nos mais variados contextos, usando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. O professor deve enfatizar a importância de todos tentarem registrar como pensaram ao resolver cada problema. As respostas às questões são apresentadas ao professor por escrito para análise. O docente deve revisar todas as situações-problema que os alunos trabalharam nesta fase, esclarecendo quaisquer dúvidas que tenham surgido até o momento.. Aplicação da avaliação somativa, onde devem ser propostas questões/situações que impliquem compreensão, que substanciam a apreensão de significados para buscar evidências da ocorrência de aprendizagem significativa. Esta fase visa rever o conteúdo para analisar o que foi aprendido pelos discentes em relação ao conteúdo noções básicas de Limites e Continuidade de Função. Os alunos são orientados a propor soluções individualmente, sempre registrando como pensaram para chegar a cada uma das respostas. As respostas às questões são apresentadas ao professor por escrito com o objetivo de que o docente possa analisar o conhecimento dos seus alunos em relação ao conteúdo trabalhado nesta fase. Desta forma, podem encontrar os pontos de maior dificuldade, que merecem mais atenção, a fim de que as dificuldades possam ser sanadas e a sequência didática proposta possa ser aperfeiçoada, significativamente, em momentos futuros.

Avaliação Final ou Somativa: Resolva os seguintes problemas abaixo. O objetivo destas atividades é verificar o seu grau de compreensão do conteúdo, noções básicas de Limites e Continuidade de Função, com base no que estudamos nos encontros anteriores. Tais tarefas devem ser resolvidas com calculadora, papel quadriculado e régua; analisando quadros e gráficos. É importante que você procure explicar como pensou, ao resolver cada um dos problemas. Ao final da atividade, as resoluções das questões são entregues por escrito ao professor para serem analisadas.

Leia o texto abaixo:

LIMITES E CONTINUIDADE DE FUNÇÃO

Desde as últimas décadas do século XX, diversos estudos e pesquisas relatam dificuldades de aprendizagem da matemática, desde o ensino fundamental ao ensino superior. Neste último, descobrimos que essas dificuldades se manifestam de forma expressiva no Cálculo. Assim, decidimos investigar o problema de compreender o limite de uma função de uma variável real, visto que sua importância reside no entendimento de outros conceitos. Enfatizamos, neste capítulo, a relação entre o limite e a continuidade de uma função e suas implicações na evocação de imagens conceituais que se relacionam com tais ideias.

Em algumas funções, quanto menor a variação na variável independente (geralmente representada por x), menor a variação no valor f (x) da função, ou seja, os seus valores variam continuamente. Para outras, seus valores variam de forma imprevisível se modificarmos os valores das variáveis independentes controladamente. Limite é um instrumento matemático que possibilita analisar criticamente e precisamente tais situações como um todo.

Para a elaboração gráfica de funções mais complexas, o estudo de Limite tem sido uma ferramenta primordial. Encontra-se softwares em sites ou até mesmo em telefones celulares que exibem rapidamente funções de vários tipos, mas que podem apresentar limitações técnicas, confundindo os seus usuários e de maneira conveniente, aplicando-se algumas noções de Limite e Continuidade, muitos desses problemas solucionam-se.

As operações matemáticas com o número 0 (zero) e o infinito (∞), foram apresentadas nas fases 4 e 5 do capítulo 5. As atividades sobre Limite e Continuidade permitiram que fossem realizados contatos importantes com estas entidades. Um dos conceitos-chave que contribuem na compreensão de Derivada, Integral e várias outras definições matemáticas subsequentes que aparecem no estudo do Cálculo é o conceito de Limite.

Situações-problema propostas:

1) A função P, que representa o desenvolvimento da capacidade de produção de uma fábrica ao longo do tempo t, em dias, é definida por:

$$P(t) = \frac{40000}{10000 - (t - 100)^2}$$

a) Calcule *P (10), P (20), P (50), P (100) e P (150).* Explique o que acontece com a produção. Avalie $\lim_{t \to 100} P(t)$.

b) Encontre o $\lim_{t \to 200} P(t)$; explique o resultado.

c) Esboce o gráfico de *P*.

2) Em geral, à medida que a produção aumenta, os custos de produção diminuem. Suponha que uma empresa tenha a seguinte função de custo C para a quantidade de determinado produto x produzidos:

$$C(x) = \begin{cases} 1{,}2x \;\; se \;\; 0 < x \leq 100 \\ 0{,}9x \;\; se \;\; 100 < x \leq 300 \\ 0{,}75x \;\; se \;\; 300 < x \leq 600 \\ 0{,}6x \;\; se \;\; 600 < x \end{cases}$$

a) Esboce o gráfico de $C = C(x)$.

b)Determine: $\lim_{x \to 100^-} C(x)$, $\lim_{x \to 100^+} C(x)$, $\lim_{x \to 300^-} C(x)$, $\lim_{x \to 300^+} C(x)$ $\lim_{x \to 600^-} C(x)$, $\lim_{x \to 600^+} C(x)$. Analise os resultados encontrados.

3) Um fornecedor de refrigerantes vende um tipo específico de refrigerante de acordo com os seguintes preços: R$ 10 por caixa na compra de até 30 caixas. R$ 8 por caixa, na compra de mais de 30 caixas e menos de 70 caixas. R$ 5 por caixa na compra de mais de 70 caixas e menos de 150 caixas e R$ 4 por caixa na compra de mais de 150 caixas.

Se x é o número de caixas e P é o preço total, a função preço P é definida por:

$$P(x) = \begin{cases} 10x \;\; se \;\; 0 < x \leq 30 \\ 8x \;\; se \;\; 30 < x \leq 70 \\ 5x \;\; se \;\; 70 < x \leq 150 \\ 4x \;\; se \;\; 150 < x \end{cases}$$

a) Esboce o gráfico de $P = P(x)$.

b)Determine: $\lim_{x\to 30^-} C(x)$, $\lim_{x\to 30^+} C(x)$, $\lim_{x\to 70^-} C(x)$, $\lim_{x\to 70^+} C(x)$ $\lim_{x\to 150^-} C(x)$, $\lim_{x\to 150^+} C(x)$. Comente os resultados encontrados.

4) A função P, que representa o preço que determinados itens atingem em um leilão, varia de acordo com número de potenciais compradores, x, é definida por:

$$P(x) = \begin{cases} 5x + 5 \; se \;\; 0 \leq x \leq 10 \\ \dfrac{38x - 700}{9} \;\; se \;\; 10 < x \end{cases}$$

Verifique se há discrepâncias importantes quando o número de compradores em potencial for um pouco maior do que 10.

5) A função E, que representa o crescimento da população de uma determinada cidade após t anos, a partir de 2009, foi modelada por:

$$E(t) = \frac{20000t^2 + 35000t + 200000}{t^2 + 2t + 10}$$

Determine o comportamento da população após *t=3*, *t=5*, *t=15* anos. Como é o comportamento a longo prazo?

6) Em uma cidade, a função A, que representa o consumo de água em função da utilização de x metros cúbicos por mês, é modelada por:

$$A(x) = \begin{cases} 8 \;\; se \;\; x < 10 \\ 8 + 2(x - 10) \;\; se \;\; 10 \leq x < 20 \\ 28 + 2{,}8(x - 20) \;\; se \;\; 20 \leq x \end{cases}$$

a) Examine a continuidade do consumo de água $A = A(x)$ nos pontos $x_0 = 10$ e $x_1 = 20$.

b) Analise se o consumo de água difere significativamente ao serem gastos cerca de 20 metros cúbicos de água.

c) Esboce o gráfico de $A = A(x)$.

7) A função V, que representa nota do vestibular obtida por um aluno, varia de acordo com o tempo *t* em horas que ele passou estudando. Essa pontuação é modelada por:

$$V(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{3} & se \quad 0 \leq t \leq 15 \\ \dfrac{2t}{0{,}2t + 3} & se\ 15 < t \end{cases}$$

a) Verifique a continuidade da função neste ponto: $x_0 = 15$.

b) Explique por que a pontuação não pode exceder 15 pontos.

8) Em um determinado país, a função T, que representa o valor do imposto de renda devido por um indivíduo que recebeu *x u.m* em um determinado ano, é modelada por:

$$T(x) = \begin{cases} 0{,}15 \ \ se \ \ 0 \leq x \leq 25000 \\ 3750 + 0{,}25(x - 25000) \ \ se \ \ 25000 \leq x < 60000 \\ 12550 + 0{,}35(x - 60000) \ \ se \ \ 60000 \leq x \end{cases}$$

a) Observe que os pontos problemáticos são $x_0 = 25000$ e $x_1 = 60000$. Examine a continuidade do imposto de renda $T = T(x)$ nos pontos $x_0 = 25000$ e $x_1 = 60000$.

b) A renda de um contribuinte difere significativamente se sua receita for ligeiramente inferior ou superior a *600.000* reais?

9) Em uma empresa, a função C, que representa o custo de produção de uma certa quantidade, x, de um produto específico, é definida por:

$$C(x) = \begin{cases} 2x \ \ se \ \ 0 < x \leq 10 \\ 0{,}6x + 14 \ \ se \ \ 10 < x \end{cases}$$

a) Esboce o gráfico de $C = C(x)$.

b) Encontre $\lim\limits_{x \to 10^-} C(x)$ e $\lim\limits_{x \to 10^+} C(x)$.

c) C= $C(x)$ é contínua no ponto $x_0 = 10$? Explique o resultado obtido.

10) A função f, que representa a população (em milhares) de uma colônia bacteriana, t minutos após a introdução de uma toxina, é definida por:

$$f(t) = \begin{cases} t^2 + 7t & se \ \ t < 5 \\ -8t + 72 & se \ 5 \leq t \end{cases}$$

a) Encontre $\lim_{t \to 10} f(t)$.

b) Encontre $\lim_{t \to 5^-} f(t) \ \ e \ \ \lim_{t \to 5^+} f(t)$.

c) A função *f* é contínua em *t* = 5? Analise o resultado encontrado.

d) Explique por que a população deve ser de 10000 bactérias em algum momento entre *t* = 1 e *t* = 7.

e) Esboce o gráfico de *f*.

APÊNDICE G – SUGESTÃO DIDÁTICA DA FASE 9

Comentários ou sugestões para esta fase: Neste encontro, o objetivo principal é a promoção de uma reconciliação integradora, ou seja, sanar as dúvidas levantadas em reuniões anteriores e promover a reconciliação integradora. Ao final da UEPS, busca-se dar continuidade ao procedimento de diferenciação progressiva, resgatando as características mais expressivas do conteúdo em questão, mas numa ótica integradora, isto é, buscando uma reconciliação integrativa, voltando ao assunto, mas num nível de complexidade superior através das questões propostas nesta fase. Prepare uma apresentação com o objetivo de retomar, com comentários, todas as atividades já trabalhadas nas fases anteriores. Com base no planejamento da UEPS e levando em consideração as observações registradas nos encontros realizados, busca-se promover a retomada de todas as atividades já realizadas, com os respectivos enunciados, para esclarecer dúvidas e conhecer aspectos relevantes para os alunos. O professor, como mediador, comentará cada uma das situações-problema trabalhadas anteriormente e as que estão presentes nesta fase, destacando as possíveis soluções apresentadas pelos alunos e apresentando novos exemplos que podem ajudar na solução, pelos próprios alunos, das situações-problema levantadas , sempre que possível. Observe a atenção e disposição dos alunos, com relação à discussão promovida, levantando dúvidas ou questionando sobre diferentes possibilidades de resolução.

QUESTÃO 5.9.1

a) Completando o quadro: O quadro a seguir mostra o que acontece quando tal operação é executada.

Quadro 36 – Resposta da Questão 5.9.1 letra a); Fase 9

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1,0	0,16228	-1,0	0,16228
0,5	0,16553	-0,5	0,16553
0,1	0,16662	-0,1	0,16662
0,05	0,16666	-0,05	0,16666

Fonte: O autor, 2022.

b) Analisando os resultados do quadro: Conforme completamos o quadro, notamos que a função está ficando cada vez mais perto de 0,16666..., à medida que chegamos bem próximos à esquerda e à direita de 0.

c) Completando o quadro: O quadro a seguir mostra o que acontece quando tal operação é executada.

Quadro 37 – Resposta da Questão 5.9.1 letra c); Fase 9

x	$f(x)$	x	$f(x)$
0,0005	0,16800	-0,0005	0,16800
0,0001	0,20000	-0,0001	0,20000
0,00005	0,00000	-0,00005	0,00000
0,00001	0,00000	-0,00001	0,00000

Fonte: O autor, 2022.

d) Analisando os resultados do quadro: Conforme completamos o quadro, notamos que a função está ficando cada vez mais perto de 0, à medida que chegamos bem próximos à esquerda e à direita de 0.

e) No quadro 14 os valores da função parecem tender para 0,1666666 à medida que x se aproxima de 0, e assim podemos supor que $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}=\frac{1}{6}\cdot$ No quadro 15 foram atribuídos valores ainda menores para x e neste caso, podemos conjecturar que $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}=0\cdot$.

f) Desta forma, qual seria o limite de $f(x)$ quando x tende a zero? Vamos utilizar uma ferramenta algébrica para responder a esta questão. Usaremos o conceito de conjugado, apresentado na questão 5.4.3.

$$\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}=\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+9}+3}{\sqrt{x^2+9}+3)}=\frac{(x^2+9)-9}{x^2\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)}=\frac{1}{\sqrt{x^2+9}+3}$$

Assim, $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}=\frac{1}{6}\cdot$

APÊNDICE H– SUGESTÃO DIDÁTICA DA FASE 10

Comentários ou sugestões para esta fase: Neste encontro, o objetivo principal é promover a reconciliação integradora, ou seja, retomar o assunto, porém em níveis mais altos de complexidade para verificar se a aprendizagem significativa dos conceitos da UEPS foi percebida, ou não, pelos discentes. O(a) professor(a), como mediador, discutirá, juntamente com os estudantes, as estratégias de ensino utilizadas nesta UEPS, permitindo que eles as avaliem oralmente, e posteriormente, reflitam sobre seu aprendizado. A partir deste retorno dos alunos sobre a avaliação da UEPS e da análise das atividades individuais e colaborativas propostas ao longo do capítulo 5, o professor poderá pensar sobre a necessidade de reformulação de algumas atividades, analisando-as qualitativamente e reconstruindo-as, se necessário, com o objetivo de tornar a UEPS cada vez mais facilitadora da aprendizagem significativa proposta por David Ausubel.

ANEXO A – TEORIA DE LIMITES E CONTINUIDADE DE UMA FUNÇÃO DE VARIÁVEL REAL

Neste anexo apresentaremos a teoria de Limites e Continuidade de uma função de variável real. Para a confecção deste material nos baseamos no livro Cálculo – Volume 1 do Stewart.

(I) O Limite de uma função

Sejam $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in \mathbb{R}$. Suponha que f está definida em algum intervalo aberto que contenha a, exceto possivelmente no próprio a.

(I.1) Definição de limite de uma função

Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a a é L, se para cada número $\epsilon > 0$ houver um número $\delta > 0$ tal que para $x \in D$

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta \quad \text{então } |f(x) - L| < \epsilon$$

Nesse caso, escrevemos $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

Exemplo 1: $\lim_{x \to 3} (4x - 5) = 7$

Seja $\epsilon > 0$.

$$|(4x - 5) - 7| = |4x - 12| = |4(x - 3)| = 4 \cdot |x - 3|$$

Se $0 < |x - 3| < \frac{\epsilon}{4}$ então $|(4x - 5) - 7| < 4 \cdot \frac{\epsilon}{4} = \epsilon$.

Assim, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta = \frac{\epsilon}{4} > 0$ tal que para $x \in \mathbb{R}$, se $0 < |x - 3| < \delta$ então $|(4x - 5) - 7| < \epsilon$.

Exemplo 2: $\lim_{x \to 3} x^2 = 9$

$$|x^2 - 9| = |(x + 3) \cdot (x - 3)|$$

Se $|x - 3| < 1$, então $|x + 3| = |(x - 3) + 6| < 7$.

Seja $\delta = \min\left\{1, \frac{\epsilon}{7}\right\}$.

Se $0 < |x - 3| < \delta$ então

$|x^2 - 9| = |(x+3) \cdot (x-3)| < |x+3| \cdot |x-3| < 7.\delta < \epsilon$

(I.2) Definição de Limite à Esquerda e à Direita

Dizemos que o limite de $f(x)$, quando x tende a a pela esquerda, é L se dado $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que se $x < a$ e $0 < |x - a| < \delta$ ou seja $a - \delta < x < a$, $x \in D$, então $|f(x) - L| < \epsilon$. Escrevemos $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$.

Dizemos que o limite de $f(x)$, quando x tende a a pela direita, é L se dado $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que se $x > a$ e $0 < |x - a| < \delta, x \in D$, então $|f(x) - L| < \epsilon$. Escrevemos $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$.

Nesse caso, o limite de $f(x)$ quando x tende a a existe se, e somente se, existem os limites laterais à direita e à esquerda de a e, além disso, estes limites são iguais.

Assim, $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se, e somente se, $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L$.

(I.3) Limites Infinitos

Dizemos que $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ se para cada número $M > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se

$$0 < |x - a| < \delta \text{ então } f(x) > M.$$

Da mesma forma, dizemos que $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ se para cada número $M > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se

$$0 < |x - a| < \delta \text{ então } f(x) < -M.$$

(I.4) Limites no Infinito

Quando existe $L \in \mathbb{R}$ tal que para x suficientemente grande, os valores de $f(x)$ podem se tornar tão próximos de L quanto se queira, dizemos que $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$. Analogamente, quando para x suficientemente grande em valores absolutos, os valores de $f(x)$ ficam arbitrariamente próximos de L dizemos que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$.

Desta forma, $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ se dado $\epsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que se $x \in D$ e $x > M$ então $|f(x) - L| < \epsilon$. Analogamente, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ se dado $\epsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que se $x \in D$ e $x < -M$ então $|f(x) - L| < \epsilon$.

(I.5) Continuidade

Seja $a \in D$.

f é contínua em a se $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Dessa forma, usando a definição de limite, temos que f é conínua em $a \in D$, se dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in D$ e $|x - a| < \delta$ então $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

Se f for contínua em a, para todo $a \in D$, dizemos que f é contínua em D.

Esta definição requer três verificações para a continuidade de f em a:

1. $f(a)$ está definida (isto é, a está no domínio de f);
2. $\lim_{x \to a} f(x) = existe$;
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

(I.6) Continuidade

Seja $a \in D$.

Uma função f é contínua à direita em um número a se

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

e f é contínua à esquerda em a se

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

(I.7) Continuidade

Uma função f é contínua em um intervalo se for contínua em todos os números do intervalo. Se f for definida somente de um lado da extremidade do intervalo, entendemos *continuidade* na extremidade como *continuidade à direita* ou *à esquerda*.