UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional

Existem infinitos maiores que outros infinitos?

Talita Moreira

PROFMAT

Rio Claro - SP

2022

Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Existem infinitos maiores que outros infinitos?

Talita Moreira

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de Rio Claro.

Orientadora
Profa. Dra. Elíris Cristina Rizziolli
Departamento de Matemática - IGCE / UNESP

Rio Claro - SP

2022

M838e

Moreira, Talita
Existem infinitos maiores que outros infinitos? / Talita Moreira. -- Rio Claro, 2022
61 p. : il., tabs.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro
Orientadora: Elíris Cristina Rizziolli

1. Matemática. 2. Teoria dos conjuntos. 3. Infinito. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

TERMO DE APROVAÇÃO

Talita Moreira

EXISTEM INFINITOS MAIORES QUE OUTROS INFINITOS?

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Elíris Cristina Rizziolli
Departamento de Matemática - IGCE / UNESP
Orientadora

Prof. Dr. João Carlos Vieira Sampaio
Departamento de Matemática - CCET / UFSCar/ São Carlos (SP)

Prof. Dr. Thiago de Melo
Departamento de Matemática - IGCE / UNESP/ Rio Claro (SP)

Rio Claro, 04 de outubro de 2022

Dedico este trabalho aos meus familiares, amigos, professores e alunos. Cada um dos quais, com suas parcelas de contribuições, fossem elas acadêmicas, motivacionais e afetivas, foram fundamentais na construção do mesmo.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, que é a fonte de toda energia, sabedoria e inspiração.

Agradeço ao meu professor Edson Vital Rodrigues que fez despertar em mim o amor pela matemática.

Agradeço à professora Elíris, pela orientação, confiança, paciência, motivação e apoio, que foram essenciais no desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço a todos os professores do Profmat do campus da Unesp de Rio Claro, em especial ao professor Thiago de Melo, que contribuíram para meu crescimento e aprendizado.

Aos meus colegas de curso, em especial à Valdirene, expresso minha gratidão pelo companheirismo e apoio.

Ao meu namorado Érik por todo suporte e paciência durante a trajetória.

Aos meus amigos, principalmente à Marina, que nunca me permitiram desistir.

Agradeço aos meus alunos que me motivam diariamente a ser melhor.

Agradeço aos meus familiares, em especial ao tio Tiago, a minha avó Margarida e ao meu avô Luis Tadeu (*in memoriam*), pelo apoio de sempre.

Agradeço aos meus irmãos Kaíque e Vinícius por estarem sempre comigo.

Gratidão especialmente aos meus pais, Beatriz e Sebastião, por todo apoio e incentivo aos meus estudos.

Tu te tornas eternamente responsável por aquilo que cativas.

O Pequeno Príncipe

Resumo

Em todas as épocas, a ideia de um infinito persegue e desafia a compreensão da humanidade. O objetivo deste trabalho é apresentar formalmente o conceito de conjuntos finitos e infinitos, noções de enumerabilidade e não enumerabilidade, a fim de mostrar a ideia de infinitos maiores que outros infinitos através da apresentação de versões do paradoxo do Hotel de Hilbert, além de trazer outras abordagens do infinito. Apresentaremos uma proposta pedagógica para tratar a ideia de infinito no ensino médio, para que o estudante compreenda o conceito e estimule sua criatividade a respeito desse assunto.

Palavras-chave: Infinito, Enumerabilidade, Paradoxo, Hotel de Hilbert.

Abstract

In every age, the idea of an infinite pursues and challenges the understanding of humanity. This study aims to formally present the idea of finite and infinite sets, enumerability and non-enumerability, in addition to building the idea of infinities greater than other infinites by presenting versions of the Hilbert Hotel paradox and other approaches of infinity. This work will present a pedagogical proposal to deal with the concept of infinity in high school, so that the student understands the concept and stimulates their creativity on this subject.

Keywords: Infinite, Enumerability, Paradox, Hilbert Hotel.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

1 Introdução

De acordo com [9], quando paramos para pensar sobre o processo de contagem, aparecem alguns questionamentos. Uma das questões que podem surgir é: será que os números naturais são suficientes para contar a quantidade de elementos de quaisquer conjuntos? Ou seja, a contagem sempre conclui em um determinado número? É aí que as complicações da infinitude iniciam. O desenvolvimento do conceito de conjuntos é sutil. A princípio, conjunto é um conceito abstrato, podemos citar exemplos de objetos concretos, porém esse tipo de conjunto é sempre finito. Às vezes, não conseguimos contar por impossibilidade física, por exemplo, a quantidade de areia na praia e a quantidade de estrelas no céu. Ainda que seja humanamente impossível contar, há uma quantidade finita delas. Assim, existe um número natural que representa a quantidade de estrelas no céu, mesmo que nunca venhamos a saber qual é esse número. Até mesmo a quantidade de átomos no universo é finita, por mais que seja espantosamente grande.

Ocorre que, a partir do momento que criamos conceitos abstratos, como conjuntos e números, podemos imaginar conjuntos não apenas de objetos concretos, mas também de objetos abstratos. Assim, uma vez que inventamos os números naturais, e que para qualquer número natural, sempre haverá um maior, logo o conjunto dos números naturais é infinito. O conjunto dos números naturais não é o único conjunto infinito que existe. Temos o conjunto dos pontos de uma reta, o conjunto das retas em um plano, o conjunto das frações, o conjunto dos números reais, entre outros, que são formados por conceitos abstratos, e não por objetos concretos. Não é à toa, portanto, que a ideia de infinitude seja tão difícil de assimilar e, por muitas vezes, traia a nossa intuição e senso comum. Afinal, um conjunto infinito é infinito e pronto. Não há como contar os elementos de um conjunto infinito. Entretanto, algumas mentes mais aguçadas ousaram aprofundar-se nas questões filosóficas e matemáticas da infinitude, como por exemplo nos paradoxos de

Zenão, de Eléia, que se basearam em interpretações tortuosas do conceito de infinitude para "provar" a não existência de movimento, e ainda, o caso do famoso Paradoxo do Hotel de Hilbert, com infinitos quartos, sempre lotados e que ainda assim sempre com vagas disponíveis. Aprofundaremo-nos no estudo desse paradoxo, a fim de verificar se existe uma maneira de vencer a dinâmica desse hotel, se há alguma quantidade de pessoas que ele não poderia hospedar ali sem nenhum truque engenhoso e se existem infinitos que cabem no hotel e infinitos que não cabem.

Assim, esse trabalho está organizado da seguinte forma: no capítulo 1 apresentamos a introdução; no capítulo 2 tratamos de conjuntos infinitos e enumerabilidade, bem como resultados pertinentes ao tema; no capítulo 3 apresentamos uma demonstração de que existem infinitos números primos; no capítulo 4 abordamos algumas versões do Paradoxo do Hotel de Hilbert; no capítulo 5 apresentamos algumas abordagens do infinito que encontramos ao fazer o levantamento bibliográfico deste trabalho e finalmente no capítulo 6 uma proposta pedagógica para o ensino médio acerca do tema conjuntos infinitos através do Paradoxo do Hotel de Hilbert. Finalizamos com uma breve conclusão.

2 Conjuntos infinitos e enumerabilidade

Às vezes nos deparamos com exemplos de conjuntos infinitos equivocados, que embora sejam muito grandes, são contáveis e finitos, como por exemplo a quantidade de átomos no universo.

Neste capítulo apresentamos os principais conceitos e resultados acerca dos conjuntos finitos e infinitos e sua enumerabilidade, que serão úteis para o desenvolvimento do nosso trabalho, utilizando como referências [10], [11] e [14].

Definição 2.1. Para cada número $n \in \mathbb{N}$ chamaremos de I_n o conjunto dos números naturais não maiores que n , então $I_n = \{p \in \mathbb{N}; p \leq n\}$. Um conjunto A diz-se *finito* quando é vazio ou quando existem $n \in \mathbb{N}$ e uma bijeção $f : I_n \to A$. Escrevendo $x_1 = f(1), x_2 = f(2), \ldots, x_n = f(n)$ temos então $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Lema 2.2. *Se existe uma bijeção $f : A \to B$ então, dados $a \in A$ e $b \in B$, existe também uma bijeção $g : A \to B$ tal que $g(a) = b$.*

Demonstração. Seja $b' = f(a)$. Como f é sobrejetora existe $a' \in A$ tal que $f(a') = b$ e, como f é injetora, se $f(a') = f(a)$, então $a = a'$. Definamos $g : A \to B$ pondo $g(a) = b,\ g(a') = b'$ e $g(x) = f(x)$ se $x \in A$ não é igual a a nem a a'. Observe que, como f é injetora, g também está bem definida em a e em a', pois se $a = a'$ então $f(a) = f(a')$, ou seja, $b = b'$ e então $g(a) = g(a')$. Veja que $g(a) = g(a') \Rightarrow b = b' \Rightarrow f(a) = f(a')$, e como f é injetora, $a = a'$. E de modo natural g é sobrejetora em b e em b' pois são imagens pela definição de g. Com isso, mostramos que g é bijetora. $\square$

Teorema 2.3. *Todo subconjunto de um conjunto finito é finito.*

Demonstração. Provaremos inicialmente o seguinte caso particular: se A é finito e $a \in A$ então $A - \{a\}$ é finito. Com efeito, existe uma bijeção $f : I_n \to A$ a qual pelo Lema 2.2, podemos supor que cumpre $f(n) = a$. Se $n = 1$ então $A - \{a\} = \emptyset$ é finito. Se $n > 1$, a restrição de f a I_{n-1} é uma bijeção sobre $A - \{a\}$, logo $A - \{a\}$ é finito e tem $n - 1$ elementos. O caso geral se prova por indução no número n de elementos de A. Ele é evidente quando $A = \emptyset$ ou $n = 1$. Supondo o Teorema verdadeiro para conjuntos com n elementos, sejam A um conjunto com $n + 1$ elementos e B um subconjunto de A. Se $A = B$ nada há o que provar. Caso contrário, existe $a \in A$ com $a \notin B$. Então, na realidade, $B \subset A - \{a\}$. Como $A - \{a\}$ tem n elementos, segue que B é finito. □

Corolário 2.4. *Dada $f : A \to B$, se B é finito e f é injetiva então A é finito; se A é finito e f é sobrejetiva então B é finito.*

Demonstração. Com efeito, se f é injetiva então ela é uma bijeção de A sobre um subconjunto $f(A)$ do conjunto finito B. Por outro lado, se f é sobrejetiva e A é finito, então para cada $b \in B$ podemos escolher um $a = g(b) \in A$ tal que $f(a) = b$. Isso define uma aplicação $g : A \to B$ tal que $f(g(b)) = b$ para todo $b \in B$. Segue que g é injetiva, logo, pelo que acabamos de provar B é finito. □

Para nosso próximo resultado usaremos a seguinte definição:

Definição 2.5. Um subconjunto $A \subset \mathbb{N}$ diz-se *limitado* quando existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $a \leq p$ para todo $a \in A$.

Corolário 2.6. *Um subconjunto $A \subset \mathbb{N}$ é finito se, e somente se, é limitado.*

Demonstração. Com efeito, se $A = \{a_1, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{N}$ é finito, pondo $p = a_1 + \cdots + a_n$ vemos que $a \in A \Rightarrow a \leq p$, logo A é limitado. Reciprocamente, se $A \subset \mathbb{N}$ é limitado, então $X \subset I_p$ para algum $p \in \mathbb{N}$, segue-se pois do Teorema 2.3 que A é finito. □

Definição 2.7. Diz-se que um conjunto é infinito quando não é finito.

Definição 2.8. Um conjunto A é *enumerável* quando é finito ou quando existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \to A$ (ou uma bijeção de A em $\mathbb{N}$). Neste caso, f chama-se uma *enumeração* dos elementos de A. Escrevendo $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$, ..., $f(n) = a_n$, ..., tem-se então $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$.

Teorema 2.9. *Todo subconjunto $A \subset \mathbb{N}$ é enumerável.*

Demonstração. Se A é finito, nada há para demonstrar. Caso contrário, enumeraremos os elementos de A tomando $a_1 =$ menor elemento de A, e supondo definidos $a_1 < a_2 < ... < a_n$, escrevemos $A_n = A - \{a_1, ..., a_n\}$. Observando que $A_n \neq \emptyset$, pois A é infinito, definimos a_{n+1} =menor elemento de A_n. Então $A = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$. Com efeito, se existisse algum elemento $a \in A$ diferente de todos os a_n, teríamos $a \in A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, logo a seria um número natural maior do que todos os elementos do conjunto infinito $\{a_1, ..., a_n, ...\}$, o que é uma contradição. □

Corolário 2.10. *Seja $f : A \to B$ injetiva. Se B é enumerável, então A também é. Em particular, todo subconjunto de um conjunto enumerável é enumerável.*

Demonstração. Veja que como B é enumerável existe uma bijeção de $\mathbb{N}$ em B, considere $\varphi : B \to \mathbb{N}$ a aplicação inversa desta bijeção (que também é uma bijeção). Sendo $\varphi : B \to \mathbb{N}$ bijeção e $f : A \to B$ injetora segue que a composta $\phi \circ f : A \to \mathbb{N}$ é uma injetividade, e consequentemente $\phi \circ f : A \to \mathrm{Im}(\varphi \circ f)$ é uma bijeção, em que $C := \mathrm{Im}(\varphi \circ f) \subseteq \mathbb{N}$. Mas, pelo Teorema 2.9, C é enumerável, logo existe uma bijeção $\psi : C \to \mathbb{N}$.

Com isso, a composta $\psi \circ (\varphi \circ f)$:

$$A \xrightarrow{\varphi \circ f} C \xrightarrow{\psi} \mathbb{N}$$

é uma bijeção de A em $\mathbb{N}$ e portanto A é enumerável.

Em particular, quando $A \subset B$ e B é enumerável, basta aplicarmos este resultado para a aplicação injetora inclusão $j : A \hookrightarrow B, j(a) := a$, $\forall a \in A$. □

Corolário 2.11. *Seja $f : A \to B$ sobrejetora. Se A é enumerável então B também é.*

Demonstração. Com efeito, para cada $b \in B$ podemos escolher um $a = g(b) \in A$ tal que $f(a) = b$. Isto define uma aplicação $g : B \to A$ tal que $f(g(b)) = b$ para todo $b \in B$, ou seja, $f \circ g$ é a Id_B. Como a Id_B é bijeção segue que g é injetora, pois se $g(b_1) = g(b_2)$, então $f(g(b_1)) = f(g(b_2))$ (pois f está bem definida), e então $(f \circ g)(b_1) = (f \circ g)(b_2) \Rightarrow Id_B(b_1) = Id_B(b_2) \Rightarrow b_1 = b_2$. Então, pelo Corolário 2.10, B é enumerável. □

Corolário 2.12. *Sejam A e B conjuntos infinitos tais que $B \subset A$. Se B não é enumerável então A não é enumerável.*

Demonstração. Observe que esse resultado é exatamente a afirmação contrapositiva do Corolário 2.10. □

Corolário 2.13. *O produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis é um conjunto enumerável.*

Demonstração. Com efeito, se A e B são enumeráveis então existem sobrejeções $f : \mathbb{N} \to A$ e $g : \mathbb{N} \to B$, logo $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A \times B$, dada por $\varphi(m, n) = (f(m), g(n))$ é sobrejetora. Portanto, basta provar que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável. Para isto, consideremos a aplicação $\psi : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, dada por $\psi(m, n) = 2^m \cdot 3^n$. Pela unicidade da decomposição de um número em fatores primos, ψ é injetora. Segue do Corolário 2.10 que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável. □

Através do Corolário 2.13 e do Princípio da Indução Finita é possível provar que, para uma quantidade finita de conjuntos enumeráveis, o produto cartesiano ainda será enumerável.

Corolário 2.14. *A reunião de uma família enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável.*

Demonstração. Com efeito, dados $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ conjuntos enumeráveis, existem bijeções (em particular sobrejeções) $f_1 : \mathbb{N} \to A_1$, $f_2 : \mathbb{N} \to A_2, \ldots,$ $f_n : \mathbb{N} \to A_n, \ldots$. Definindo $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ e a aplicação $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A$ dada por $f(m, n) = f_n(m)$, segue que f é uma sobrejeção pois: se $a \in A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, então $a \in A_{n_0}$, para algum $n_0 \in \mathbb{N}$, logo, pela sobrejetividade de f_{n_0}, $\exists\ m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f_{n_0}(m_0) = a$, com isso, tomando $(m_0, n_0) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ temos:

$$f(m_0, n_0) = f_{n_0}(m_0) = a.$$

Com isso, pela enumerabilidade de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (pelo Corolário 2.13) e a sobrejetividade de f, segue do Corolário 2.11 que A é um conjunto enumerável. □

Pela definição de conjunto enumerável ser um conjunto finito ou existir uma correspondência biunívoca com $\mathbb{N}$, temos as seguintes consequências do Corolário 2.14, pelas combinações envolvendo conjunto finito:

(i) A união de um conjunto finito com um conjunto enumerável é enumerável.

(ii) A união de dois conjuntos enumeráveis é enumerável.

(iii) A união de um número finito de conjuntos enumeráveis é enumerável.

(iv) A união de um conjunto enumerável de conjuntos finitos é enumerável.

Vê-se que todo conjunto finito é enumerável mas, um conjunto infinito pode ser enumerável ou não enumerável, como veremos a seguir.

Exemplo 2.15. O exemplo mais simples de conjunto infinito enumerável é o conjunto dos números naturais. De fato, verificamos a enumerabilidade de $\mathbb{N}$ considerando a aplicação identidade, que é uma bijeção, de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$.

Exemplo 2.16. O conjunto dos números pares positivos, denotado por P, é enumerável. Basta tomar a aplicação de $\mathbb{N}$ em P dada por $f(n) = 2n$, que é uma função bijetora.

Exemplo 2.17. O conjunto dos números ímpares positivos, denotado por L, é enumerável, pois considerando a aplicação de $\mathbb{N}$ em L dada por $f(n) = 2n - 1$, que é uma função bijetora.

Exemplo 2.18. O conjunto $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2 \ldots\}$ dos números *inteiros* é enumerável. Uma bijeção $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ pode ser definida pondo $f(n) = \frac{(n-1)}{2}$ para n ímpar e $f(n) = \frac{-n}{2}$ para n par.

Exemplo 2.19. O conjunto dos números racionais é enumerável. Veja que, pelo Corolário 2.11, basta apresentarmos uma aplicação sobrejetora de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ em $\mathbb{Q}$ (que é enumerável, pois está contido em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$). Observe o quadro a seguir que fornece uma maneira intuitiva de mostrarmos a definição da função sobrejetora: $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, com $\varphi(p, q) = \frac{p}{q}$.

$$
\begin{array}{cccccccccc}
\frac{1}{1} & & \frac{1}{2} & \rightarrow & \frac{1}{3} & & \frac{1}{4} & \rightarrow & \frac{1}{5} & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
\frac{2}{1} & & \frac{2}{2} & & \frac{2}{3} & & \frac{2}{4} & & \frac{2}{5} & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & & \\
\frac{3}{1} & & \frac{3}{2} & & \frac{3}{3} & & \frac{3}{4} & & \frac{3}{5} & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & & & \\
\frac{4}{1} & & \frac{4}{2} & & \frac{4}{3} & & \frac{4}{4} & & \frac{4}{5} & \cdots \\
 & \swarrow & & & & & & & & \\
\frac{5}{1} & & \frac{5}{2} & & \frac{5}{3} & & \frac{5}{4} & & \frac{5}{5} & \cdots \\
\downarrow & & & & & & & & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}
$$

Figura 2.1: Quadro de representação dos números racionais

Definição 2.20. Um conjunto A é dito não enumerável quando não é possível obter uma bijeção de A com o conjunto dos números naturais.

Teorema 2.21. *O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais não é enumerável.*

A estratégia dessa demonstração é mostrar que o intervalo $[0, 1)$ é um subconjunto não-enumerável de $\mathbb{R}$, e portanto, em virtude do Corolário 2.10, $\mathbb{R}$ não é enumerável.

Demonstração. Veja que cada $x \in [0, 1)$ tem uma representação decimal da forma:

$$0, a_1a_2a_3 \ldots, \tag{$*$}$$

onde $a_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

Observe que alguns números têm duas representações da forma $(*)$. Por exemplo, o número $\frac{1}{2}$ pode ser representado como:

$$0, 500 \ldots \text{ ou } 0, 4999 \ldots$$

Para tais números escolhemos a representação decimal que termina. Em outras palavras, eliminamos as decimais $0, a_1a_2a_3...$, que a partir de uma certa casa, todos os elementos são 9. Vamos supor, por absurdo, que o intervalo $[0, 1)$ seja enumerável, isto é, que o conjunto formado pelos decimais do tipo $(*)$ é um conjunto enumerável (já com a eliminação da dupla representação). Consequentemente, os elementos de tal conjunto podem ser escritos como:

$$\begin{array}{c} 0, a_{11}a_{12}a_{13} \ldots \\ 0, a_{21}a_{22}a_{23} \ldots \\ \vdots \end{array} \tag{$**$}$$

Agora construa o seguinte decimal:

$$0, b_1b_2b_3 \ldots b_n \ldots$$

em que todos os b_i's são diferentes de 0 e 9 e além disso $b_1 \neq a_{11}$, $b_2 \neq a_{22}$, $b_3 \neq a_{33}$, $\ldots$, $b_n \neq a_{nn}$ e assim por diante. Desta maneira podemos concluir que:

$$0, b_1b_2b_3 \ldots b_n \ldots \in [0, 1)$$

entretanto,

$$0, b_1b_2b_3 \ldots b_n \ldots \neq 0, a_{n1}a_{n2}a_{n3} \ldots a_{nn}$$

para qualquer $n \in \mathbb{N}$, já que $b_n \neq a_{nn}$.

Ou seja, $0, b_1 b_2 b_3 \ldots b_n \ldots$ não é igual a nenhum elemento de $(**)$ e portanto não pertence a $[0, 1)$, o que é absurdo. Portanto o absurdo foi supor que $[0, 1)$ é enumerável. $\square$

Exemplo 2.22. Considere o conjunto de todas as listas infinitas enumeráveis, que se pode formar utilizando apenas as letras A e B, como por exemplo:

$$\begin{array}{ccccccccc} A & A & A & A & A & A & A & A & \ldots \\ B & B & A & A & A & B & B & B & \ldots \end{array}$$

O conjunto de todas essas listas de A's e B's é não enumerável. Para isso, tomaremos $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots\}$ o conjunto de todas as sequências infinitas enumeráveis s_i com $i \in \mathbb{N}$, formadas a partir da combinações das letras A e B. Dessa forma, construiremos uma sequência infinita enumerável s tal que $s \notin S$, consideremos o primeiro termo da sequência s_1. Façamos o primeiro termo da sequência s diferente deste, de forma que $s \neq s_1 \neq s_2 \neq \ldots \neq s_n \neq \ldots$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Com isso, construímos uma sequência infinita enumerável s a partir da combinação de A's e B's, tal que $s \notin S$, e assim temos que S não é enumerável. A sequência s pode ser melhor compreendida pela tabela:.

s_1	=	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	...
s_2	=	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	...
s_3	=	A	B	A	B	A	B	B	B	B	B	A	...
s_4	=	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	...
s_5	=	B	B	A	B	A	B	B	A	B	A	B	...
s_6	=	A	A	B	B	A	B	B	A	B	B	A	...
s_7	=	B	A	A	A	B	A	A	A	B	A	A	...
s_8	=	A	A	B	B	A	A	B	B	A	A	B	...
s_9	=	B	B	A	A	B	B	A	A	B	B	A	...
s_{10}	=	B	B	A	B	B	B	A	A	B	A	B	...
s_{11}	=	B	B	A	B	A	B	A	A	B	A	A	...
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

s	=	B	A	B	B	B	A	B	A	A	B	B	...

Tabela 2.1: Tabela das sequências

Será que existem infinitos iguais? Ou infinitos que são maiores que outros infinitos? Por existirem conjuntos enumeráveis e conjuntos não enumeráveis, há diferentes tipos de infinitos. No que segue, abordaremos outras caracterizações sobre o infinito. No próximo capítulo, veremos a infinitude dos números primos, fato esse que despertou a curiosidade de diversos matemáticos.

3 A infinitude dos números primos

Neste capítulo utilizaremos como referências [4] e [8].

Os números primos têm uma importância na matemática devido a sua capacidade de gerar todos os demais números. Os números não primos diferentes de 0, 1 e de -1 podem ser formados pela multiplicação de números primos. Apesar de serem essenciais e parecerem simples, eles perduram como os objetos mais misteriosos já estudados pelos matemáticos. Observe uma lista de números primos:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, \cdots$$

A lista parece aleatória, sem nos fornecer qualquer pista sobre como determinar o próximo número primo. É possível encontrar uma fórmula que gere os números dessa lista? Alguma regra que nos diga qual será o centésimo número primo?

Essa questão tem intrigado as mentes matemáticas de todas as épocas. E mesmo depois de mais de dois mil anos de esforços, os números primos parecem resistir a qualquer tentativa de encaixá-los em algum padrão reconhecível.

Os primeiros registros dos estudos dos números primos e as suas propriedades foram feitos pelos matemáticos gregos antigos da escola de Pitágoras (500 a 300 a.C.). Eles estavam interessados nos números pelas suas propriedades numerológicas e místicas. Entendiam a ideia de primalidade e demonstravam interesse nos números perfeitos. Um número natural n é perfeito se ele for igual a soma dos seus divisores próprios, isto é, dos divisores positivos menores que n, por exemplo, o número 6 tem como divisores naturais $1, 2, 3$ e $(1+2+3 = 6)$, 28 tem como divisores naturais 1,2,4,7,14 e $(1+2+4+7+14 = 28)$. O matemático Leonard Euler (1947) mostrou que todos os números pares perfeitos são da forma: $P = (2^k - 1)2^{k-1}$, onde $2^k - 1$ é um número primo. Não é conhecido até hoje nenhum número perfeito ímpar.

Quando o livro *Os Elementos* de Euclides apareceu (cerca de 300 a.C.), muitos resultados importantes sobre números primos tinham sido provados, inclusive a existência de infinitos números primos e também que os números da forma $(2^k - 1)2^{k-1}$ são todos perfeitos.

Em 300 a.C., o grego Eratóstenes apresentou um algoritmo para calcular números primos, o Crivo de Eratóstenes.

Segue-se um largo período de tempo de interregno na história dos números primos. O desenvolvimento seguinte é dado por Pierre de Fermat, no início do século XVII, com a prova de uma especulação conjecturada por Albert Girard, que estabelece que todo número primo da forma $4n+1$ pode ser escrito de um só modo, como soma de dois quadrados de números inteiros. Além disso criou e provou os seguintes teoremas e metodologias:

(i) qualquer número inteiro positivo pode ser escrito como soma de quatro quadrados;

(ii) um novo método para fatorar números primos grandes;

(iii) e o Pequeno Teorema de Fermat (para distinguir do Grande Teorema de Fermat), se p for um número primo, então para qualquer número inteiro $a^p \equiv a \bmod p$.

Esse teorema prova, em parte, a chamada Hipótese Chinesa, de cerca de 2000 anos antes, que diz que um inteiro n é primo se, e somente se, o número $2^n - 2$ é divisível por n. A recíproca desse teorema é falsa, por exemplo, que $2^{341} - 2$ é divisível por 341 e $341 = 31 \cdot 11$. O Pequeno Teorema de Fermat é a base de muitos resultados da Teoria dos Números e de métodos conceituados, inclusive na determinação de números primos, que ainda hoje são utilizados em larga escala em computação. Fermat manteve correspondência com outros matemáticos do seu tempo, em particular com o monge Marin Mersenne. Em uma de suas cartas a Mersenne, ele conjecturou que os números da forma $F^n = 2^{2^n} + 1$ seriam primos. Estes números também são denominados números de Fermat. Somente cerca de 100 anos depois, Euler demonstra que tal conjectura é falha: $2^{32} + 1 = 4294967297$ é divisível por 641 e, portanto não é primo.

Os números da forma $2^n - 1$ também atraíram atenção de Mersenne, devido ao fato de que, caso n não seja primo, esses números são compostos e foram chamados de números de Mersenne, referenciando o estudo dedicado pelo matemático. Naturalmente, nem todos os números da forma $2^n - 1$, com n primo, são primos. Por exemplo, $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$ é composto. No entanto, isso só foi descoberto por volta de 1536.

Por muitos anos os números de Mersenne, M^n (adotamos a notação M^n para indicar o n-ésimo número primo de Mersenne.), com n primo, forneceram os maiores números primos conhecidos. O número M^{19} é primo e isso foi provado por Pietro Antonio Cataldi, em 1588. Este foi o maior número primo conhecido por cerca de 200 anos, até que François E. A. Lucas mostrou que M^{127} (número de 39 dígitos) é primo, que passou a ser o recordista até a era dos computadores eletrônicos.

Em 1952 foram descobertos os números de Mersenne $M^{521}, M^{607}, M^{1279}, M^{2203}, M^{2281}$ por Raphael Mitchel Robinson com a ajuda de um primitivo computador eletrônico (LLT/SWAC) e isso estabelece o início da era eletrônica. Até a presente data, é conhecido um total de 51 números primos de Mersenne, sendo o maior deles o número $M^{8258933}$, com 24862048 dígitos. O trabalho de Euler tem também um grande impacto na Teoria dos Números em geral e na Teoria dos números primos, em particular, pois estende o Pequeno Teorema de Fermat e introduz a *função φ (de Euler).* Como mencionado, Euler fatorou o quinto número de Fermat: $2^{32} + 1$.

Considerando o estudo sobre a densidade dos números primos, Legendre (Adrien-Marie Legendre) e Gauss fizeram extensos cálculos. Gauss (um prodígio do cálculo) disse a um amigo que, quando tinha 15 minutos de folga, ocupava-se contando os números primos num alcance de 1000 números. Estima-se que, até o fim da sua vida, Gauss tenha contado todos os números primos até três milhões. Ainda há muitas questões relacionadas com os números primos por desvendar, que datam de centenas de anos atrás.

Iniciaremos a abordagem sobre infinitude dos números primos com o conceito de divisibilidade.

Definição 3.1. Diz-se que um número inteiro a é divisor do número inteiro b ou que o número inteiro b é *divisível* por a se for possível encontrar $c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ac$. Nesse caso, podemos dizer também que b é *múltiplo* de a. Para indicar que a divide b, usaremos a notação $a \mid b$.

A relação entre elementos de $\mathbb{Z}$, definida por $x \mid y$, que acabamos de introduzir, goza das seguintes propriedades:

i) $a \mid a$ (reflexibilidade) De fato, $a = a \cdot 1$;

ii) Se $a, b \geq 0, a \mid b$ e $b \mid a$, então $a = b$;

Por hipótese, $b = a \cdot c_1$ e $a = bc_2$. Se $a = 0(b = 0)$, então $b = 0(a = 0)$. Suponhamos $a, b > 0$. Como $a = c_1c_2$, segue que $c_1c_2 = 1$. Mas c_1 e c_2 são positivos e, portanto, essa igualdade só é possível para $c_1 = c_2 = 1$. De onde $a = b$;

iii) Se $a \mid b$ e $b \mid c$, então $a \mid c$ (transitividade);

iv) Se $a \mid b$ e $a \mid c$, então $a \mid (bx + cy)$, quaisquer que sejam os inteiros x e y;

Por hipótese, $b = ad_1$ e $c = ad_2$. Daí, $bx = a(xd_1)$ e $cy = a(yd_2)$.

Somando membro a membro essas igualdades, temos:

$$bx + cy = a(xd_1) + a(yd_2) = a(xd_1 + yd_2)$$

Então, devido a definição dada, $a \mid (bx + cy)$;

Dessa propriedade, segue em particular que:

- Se $a \mid b$ e $a \mid c$, então $a \mid (b + c)$ e $a \mid (b - c)$;
- Se $a \mid b$, então $a \mid bx$, qualquer que seja o inteiro x.

v) Se $a \mid b$ e $c \mid d$, então $ac \mid bd$.

Por hipótese $b = ar$ e $d = cs$ para convenientes inteiros r e s. Multiplicando-se membro a membro essas igualdades, obtém-se $bd = (ac)(rs)$. De onde $ac \mid bd$.

Definição 3.2. Sejam a e b dois números inteiros. Um elemento $d \in \mathbb{Z}$ se diz *máximo divisor comum* de a e b se cumpre as seguintes condições:

i) $d \geq 0$

ii) $d \mid a$ e $d \mid b$;

iii) Se d' é um inteiro tal que $d' \mid a$ e $d' \mid b$ então $d' \mid d$, ou seja, todo divisor comum de a e b também é divisor de d.

A definição de máximo divisor comum pode ser estendida de maneira natural para n números inteiros $a_1, a_2, ..., a_n$ para $n > 2$.

Seguem algumas propriedades imediatas do conceito de máximo divisor comum:

i) Se d e d_1 são máximos divisores comuns de a e b, então $d = d_1$.

   De fato, devido a definição, $d \mid d_1$ e $d_1 \mid d$. Como se trata de números positivos, isso só é possível se $d = d_1$. Fica garantido, então, que um par de inteiros não pode ter mais de um divisor comum.

ii) O número 0 é o máximo divisor comum de $a = 0$ e $b = 0$. É só lembrar da definição.

iii) Qualquer que seja $a \neq 0$, $|a|$ é o máximo divisor comum de a e 0.

   Pela definição, $|a|$ é positivo, $|a|$ divide 0, porque todo inteiro é divisor de 0 e $|a|$ divide a, pois $a = |a|$ ou $a = -|a|$. Se $c \mid a$ e $c \mid 0$, então $c \mid |a|$.

iv) Se d é máximo divisor comum de a e b, então d também é máximo divisor comum de $-a$ e b, a e $-b$ e $-a$ e $-b$. Basta lembrar que todo divisor de x é divisor de $-x$ e vice-versa.

A definição de máximo divisor comum de dois números inteiros não garante por si só sua existência. A intuição nos diz que isso é verdade, mas, a rigor, é preciso demonstrar que é, como faremos a seguir. A demonstração que daremos se justifica principalmente porque garante a possibilidade de exprimir de maneira aritmética o máximo divisor comum de a e b como uma soma envolvendo esses elementos.

Proposição 3.3 (Identidade de Bezout)**.** *Para quaisquer inteiros a e b, existem inteiros x_0 e y_0 tais que $d = ax_0 + by_0$ é o máximo divisor comum de a e b.*

Demonstração. Pela propriedade (iv), podemos nos ater ao caso em que $a > 0$ e $b > 0$. Consideremos o conjunto $\{L = ax + by \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$. L possui elementos estritamente positivos, por exemplo $a + b$, obtido ao se fazer $x = y = 1$. Seja d o menor entre todos os elementos estritamente positivos de L. Portanto, $d = ax_0 + by_0$, para convenientes elementos $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$. Mostremos que d é o máximo divisor comum de a e b. De fato:

i) $d \geq 0$;

ii) Apliquemos o algoritmo Euclidiano[1] de a e d que é possível pois $d > 0$, logo $a = dq + r, (0 \leq r < d)$. Mas, como já vimos, $d = ax_0 + by_0$, então:

$$a = (ax_0 + by_0)q + r$$

[1]Dados um inteiro b qualquer e um inteiro estritamente positivo a, podem se determinar dois inteiros, q e r, tais que $b = aq + r$, com $0 \leq r < a$. Ademais, as condições impostas determinam os inteiros q e r univocamente.

. Daí, por transposições algébricas convenientes:

$$r = a(1 - qx_0) + b(-qy_0)$$

o que mostra que r é um elemento de L. Então, r não pode ser estritamente positivo, pois é menor que $d \neq$ min de L, mas $d =$ min $(L \cap \mathbb{N})$. Logo, $r = 0$, e portanto, $a = dq$. Ou seja, $d \mid a$.

Analogamente demonstra-se que $d \mid b$;

iii) Se $d' \mid a$ e $d' \mid b$, então $d' \mid d$, uma vez que $d = ax_0 + by_0$.

□

A notação que usaremos para exprimir o máximo divisor comum d de a e b é $d = mdc(a, b)$. Vale ressaltar que esse máximo divisor comum pode ser expresso por uma igualdade envolvendo a e b: $d = ax_0 + by_0$, em que x_0 e y_0 são convenientes inteiros, como vimos. Na verdade, sempre há uma infinidade de pares de inteiros $x, y \in \mathbb{Z}$ para os quais $d = ax + by$.

Cada uma dessas relações será chamada de identidade de Bezout para a, b e d.

Proposição 3.4. *Para que os inteiros a e b sejam primos entre si, é necessário e suficiente que existam $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ tais que $ax_0 + by_0 = 1$.*

Demonstração. Se a e b são primos entre si, ou seja, $mdc(a, b) = 1$. Logo, a Proposição 3.3 garante a existência do par de elementos x_0, y_0. Reciprocamente, suponhamos que se possam encontrar $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ tais que $ax_0 + by_0 = 1$. Então, qualquer divisor de a e b é também divisor de 1. Assim, os únicos divisores comuns aos elementos a e b são $+1$ e -1. De onde o máximo divisor comum de a e b é 1. □

Exemplo 3.5. Mostremos que dois números inteiros consecutivos são primos entre si. Tomemos n e $n + 1$. Se $a \mid n$ e $a \mid n + 1$, então $a \mid [(n + 1) - n]$, ou seja, $a \mid 1$. Logo, $a = \pm 1$. Ou seja, os únicos divisores comuns a n e $n + 1$ são 1 e -1. Portanto o máximo divisor de a e b é 1.

Outra maneira de chegar a essa conclusão é observar que vale a seguinte identidade de Bezout para os números considerados: $(n + 1) \cdot 1 + n \cdot (-1) = 1$.

Corolário 3.6. *Se a e b são inteiros não nulos e $d = mdc(a, b)$ então, $mdc(a/d, b/d) = 1$.*

Demonstração. Utilizaremos a identidade de Bezout para a e b. Como $d = mdc(a, b)$, então, existem inteiros x_0 e y_0 tais que $ax_0 + by_0 = d$. Daí, dividindo ambos os membros por d:

$$(a/d)x_0 + (b/d)y_0 = 1.$$

Então, pela Proposição 3.4, a/d e b/d são primos entre si. $\square$

Proposição 3.7. *Se a e b são inteiros primos entre si e $a \mid bc$, então $a \mid c$.*

Demonstração. Pela Proposição 3.4, $ax_0 + by_0 = 1$, para convenientes inteiros x_0 e y_0. Multiplicando-se os dois membros dessa igualdade por c, temos:

$$(ac)x_0 + (bc)y_0 = c.$$

Como $a \mid a$, então $a \mid (ac)x_0$, e como $a \mid bc$ por hipótese, então $a \mid (bc)y_0$. Logo, $a \mid ((ac)x_0 + (bc)y_0)$. Ou seja, $a \mid c$. $\square$

Proposição 3.8. *Sejam a e b inteiros primos entre si. Se $a \mid c$ e $b \mid c$, então $ab \mid c$.*

Demonstração. Consideremos uma identidade de Bezout para a e b:

$$ax_0 + by_0 = 1.$$

Multiplicando-se ambos os membros dessa igualdade por c:

$$(ac)x_0 + (bc)y_0 = c.$$

Como $a \mid a$ e $b \mid c$, então $ab \mid ac$, portanto, $ab \mid (ac)x_0$. Analogamente, demonstra-se que $ab \mid (bc)y_0$. Logo, $ab \mid [(ac)x_0 + (bc)y_0]$, ou seja, $ab \mid c$. $\square$

A seguir apresentamos a definição de número primo.

Um número inteiro $a \neq 0, \pm 1$ tem pelo menos quatro divisores: ± 1 e $\pm a$. Esses são os *divisores triviais* de a. Alguns números diferentes de 0 e ± 1 só têm os divisores triviais - são os chamados *números primos*. Por exemplo, o número 2 é primo, pois seus únicos divisores são ± 1 e ± 2. Um número inteiro diferente de 0 e ± 1 e que tem divisores não triviais é chamado *número composto*, como, por exemplo o 6, cujos divisores são $\pm 1, \pm 2, \pm 3$, e ± 6.

Definição 3.9. Um número inteiro p é chamado *número primo* se as seguintes condições se verificam:

i) $p \neq 0$;

ii) $p \neq \pm 1$;

iii) Os únicos divisores de p são $\pm 1, \pm p$.

Um número inteiro $a \neq 0, \pm 1$ é chamado *número composto* se tem outros divisores, além dos triviais, ou seja, quando não é um número primo.

Lema 3.10 (Lema de Euclides). *Sejam $a, b, p \in \mathbb{Z}$. Se p é primo e $p \mid ab$, então $p \mid a$ ou $p \mid b$.*

Demonstração. Suponhamos que p não seja divisor de a. Logo, $-p$ também não é divisor de a. Como os divisores de p são apenas ± 1 e $\pm p$, então os divisores comuns de a e p são apenas ± 1. Daí, $mdc(p, a) = 1$ e, portanto, existem $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ tais que:

$$px_0 + ay_0 = 1.$$

Multiplicando-se ambos os membros dessa igualdade por b, obtém-se :

$$b(px_0) + b(ay_0) = b.$$

Como $p \mid p$ e $p \mid ab$ (hipótese), então, $p \mid [p(bx_0) + (ab)y_0]$, ou seja $p \mid b$. □

Analogamente se mostra que, se p não divide b, então p divide a.

Observação 3.11. Por indução, pode-se demonstrar que, se p é primo e divide $a_1 a_2 \cdots a_n$ com $(n \geq 1)$, então p divide um dos fatores a_i.

Lema 3.12. *Se $a \neq 0, \pm 1$ é um número inteiro, então o conjunto:*

$$L = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 1 \text{ e } x \text{ é divisor de } a\}$$

possui um mínimo e esse mínimo é um número primo.

Demonstração. O conjunto L não é vazio, pois se a e $-a$ são divisores de a, um desses números é necessariamente maior que 1. Então, pelo princípio do menor inteiro, L possui mínimo, o qual será denotado por p. Se p não fosse primo, então seria composto (já que é maior que 1), teria um divisor não trivial q e portanto, também, $-q$ seria divisor de p. Resumindo: p teria um divisor q_1 tal que $1 < q_1 < p$ ($q_1 = q$ ou $q_1 = -q$). Logo, $q_1 \mid p$ e $p \mid a$, do que segue que $q_1 \mid a$ e, portanto, $q_1 \in L$. Absurdo, já que p é um número mínimo de S e $1 < q_1 < p$. □

Teorema 3.13 (Teorema Fundamental da Aritmética)**.** *Se $a > 1$ é um número inteiro, então é possível expressar a como produto $a = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n$ em que $n \geq 1$ e os inteiros $p_1, p_2, ..., p_n$ são números primos positivos. Além disso, se $a = q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_r$, em que $q_1,\ q_2, ...,\ q_r$ são também números primos positivos, então $r = n$ e cada p_i é igual a um dos q_j.*

Demonstração. Pelo lema 3.12, a tem um divisor primo positivo p_1. Logo $a = p_1 \cdot q_1$, para um conveniente $q_1 \in \mathbb{Z}$. Como a e p_1 são estritamente positivos, o mesmo acontece com q_1, que, ademais, é menor que a (é um fator positivo de a), ou seja, $1 \leq q_1 < a$.

Se $q_1 = 1$, a demonstração está concluída: $a = p_1$ é primo positivo.

Se $q_1 > 1$, repete-se o raciocínio com esse número: toma-se um divisor primo p_2 de q_1, o que é garantido pelo Lema 3.12, e portanto, $q_1 = p_2 \cdot q_2$, para um conveniente q_2 ($q_2 < q_1$). Nesta altura, $a = p_1 \cdot p_2 \cdot q_2$, em que p_1 e p_2 são primos positivos e $q_2 \geq 1$. Agora, repete-se o raciocínio com q_2 e assim por diante. Como $a > q_1 > q_2 > \cdots \geq 1$, em alguma etapa desse procedimento se terá $q_n = 1$, então, $a = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n$, como queríamos provar.

Agora para a segunda parte do teorema, suponhamos $p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n = q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_r$, nas condições enunciadas. Então, p_1, por exemplo, divide o lado direito da equação e, portanto, devido ao lema 3.10, divide um dos fatores q_j. Digamos que $p_1 \mid q_1$. Como q_1 é primo e seu único divisor primo é ele mesmo, então $p_1 = q_1$. Com isso, cancelando p_1 na igualdade da hipótese, obtemos $p_2 p_3 \cdots p_n = q_2 \cdot q_3 \cdot ... \cdot q_r$. Repete-se o raciocínio, o que permitirá cancelar mais um fator do lado direito da equação com um igual a ele do lado esquerdo. E assim por diante. Como não se pode ter uma situação do tipo $p_{r+1} p_{r+2} \ldots p_n = 1$ (o que significaria que os números primos do primeiro membro seriam divisores de 1, o que é impossível pois tratam-se de números inteiros), então $n = r$ e cada fator do lado direito da equação é igual a um do lado esquerdo. □

Com os conceitos e resultados desse capítulo podemos concluir:

Teorema 3.14. *Existem infinitos números primos.*

Demonstração. Suponha que exista uma quantidade finita n de números primos. Sejam eles $p_1,\ p_2, ...,\ p_n$ os tais números primos. Considere o número $P = (p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot ... \cdot p_n) + 1$. Pelo teorema 3.13, sabemos que P pode ser decomposto em fatores primos. Então existe algum primo p_i que divide $P = (p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot ... \cdot p_n) + 1$. Mas como só existem n primos, então esse p_i deve ser igual a algum dos primos $p_1,\ p_2,\ ...,\ p_n$. Mas se p_i é igual a algum destes primos, então $p_i \mid (p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n)$. Como $p_i \mid P = (p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot ... \cdot p_n) + 1$ e $p_i \mid (p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot ... \cdot p_n)$, temos que $p_i \mid (P - (p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot ... \cdot p_n)) = 1$. O que é um absurdo, pois $P_i > 1$. Ou seja, não pode existir uma quantidade específica de primos, se não chegamos a este absurdo. Logo, existem infinitos números primos. □

O próximo capítulo destaca uma maneira interessante de se perceber o conceito de enumerabilidade e não-enumerabilidade de conjunto infinitos, com uma história bem curiosa, conhecida como Paradoxo do Hotel de Hibert.

4 Paradoxo do Hotel de Hilbert

Nos capítulos anteriores, abordamos a noção de infinito enumerável e não enumerável e a infinitude dos números primos. Veremos como explicar tais conceitos de forma interessante e lúdica em aulas de matemática, especialmente aos estudantes do ensino médio. O exemplo que mais se destaca é a história do Hotel de Hilbert, que possui diversas versões. Veremos a abordagem mais conhecida a seguir. Para este capítulo utilizaremos as referências [5], [16] e [6].

4.1 Versão Canônica

Existem infinitos que são maiores do que outros infinitos? A contextualização dessa expressão se dá através do Paradoxo [1] do Hotel de Hilbert que envolve conjuntos infinitos.

Um conjunto A é enumerável se é finito ou se existe uma correspondência biunívoca de A com o conjunto dos números naturais, isto é, existe uma função bijetora $f : \mathbb{N} \to A$. A partir dessa ferramenta será possível compreender o Paradoxo do Hotel de Hilbert.

O Paradoxo do Hotel de Hilbert considera um hotel com infinitos quartos todos enumerados com números naturais, isto é, o primeiro quarto corresponde ao número 1, o segundo quarto corresponde ao número 2 e assim por diante. O hotel encontra-se lotado, ou seja, os infinitos quartos estão ocupados por infinitos hóspedes. Ao chegar um novo hóspede, mesmo com o hotel lotado, o gerente do hotel consegue acomodá-lo, afinal, o hotel possui infinitos quartos. Para tal, o gerente solicita que o hóspede do quarto número 1 mude-se para o quarto de número 2, o hóspede que se encontrava no quarto número 2 mude-se para o quarto de número 3, o hóspede que se encontrava no quarto de número

[1] Paradoxos são expressões numéricas ou verbais com uma contradição interna - verdadeiras charadas de lógica.

n mude-se para o quarto de número $n+1$ e assim por diante, tendo em vista que na numeração através do conjunto dos números naturais, sempre haverá um próximo termo. Com essa manobra, o quarto de número 1 está vago para o novo hóspede.

A estratégia é a mesma se chegar um grupo de n hóspedes para se acomodar no hotel; o gerente terá que deslocar o hóspede do quarto de número 1 para o quarto de número $n+1$, e assim por diante de modo que os n primeiros quartos fiquem vagos.

$$\left\{ \faChild_1, \ldots, \faChild_n, \faChild_{n+1}, \ldots \right\} \iff \mathbb{N}$$

Ao chegar um ônibus com infinitos passageiros, para acomodar todos eles, o gerente solicita aos hóspedes do hotel que mudem de quarto novamente de modo que cada um deve ir para o quarto cujo número é o dobro do quarto em que se encontra, isto é, o hóspede do quarto de número 1 muda-se para o quarto de número 2, o hóspede do quarto de número 2 muda-se para o quarto de número 4, o hóspede do quarto número n muda-se para o quarto de número $2n$ e assim por diante. Desse modo, todos os quartos cujos números são ímpares encontram-se disponíveis para os infinitos novos hóspedes.

Agora, o desafio do gerente aumenta ao ter que acomodar uma excursão de infinitos ônibus com infinitos passageiros em cada ônibus. Para tal, o gerente solicita que os hóspedes mudem-se de quarto novamente, de modo que o número do novo quarto é igual a 2 elevado ao número do quarto em que se encontrava, isto é, o hóspede que se encontra o quarto de número 1 muda-se para o quarto de número 2, pois $2^1 = 2$, o hóspede que se encontra no quarto de número 2 muda-se para o quarto de número 4, pois $2^2 = 4$, o hóspede que se encontra no quarto de número n muda-se para o quarto de número 2^n e assim por diante.

Assim, para alocar os infinitos novos hóspedes dos infinitos ônibus da excursão, o gerente usa a seguinte estratégia: os passageiros do primeiro ônibus serão acomodados nos quartos cujo número é igual a 3 elevado ao número do seu assento do ônibus, ou seja, o passageiro do assento número 1 será acomodado no quarto de número 3, pois $3^1 = 3$, o passageiro do assento número 2 será acomodado no quarto de número 9, pois $3^2 = 9$, o passageiro do assento número n, será acomodado no quarto de número 3^n e assim por diante.

Os próximos infinitos ônibus deverão seguir a sequência dos números primos, logo, os passageiros do segundo ônibus serão acomodados nos quartos cujo número é o resultado de 5 elevado ao número do seu assento no ônibus.

Analogamente, os passageiros do terceiro ônibus serão acomodados nos quartos cujos números são potências de 7 e assim por diante, para cada ônibus, uma potência cuja base é um número primo. A questão que deve ser levantada é se com essa estratégia traçada pelo gerente há o risco de dois hóspedes serem acomodados no mesmo quarto. Felizmente isso não acontece, porque, os passageiros do primeiro ônibus estão acomodados em quartos de números da forma 3^n e do segundo ônibus, estão acomodados em quartos de números da forma 5^m. Supondo que tenha um quarto com dois hóspedes, isso implica admitir que $3^n = 5^m$, portanto, como 3^n é divisível por 3, então tem-se 5^m também é divisível por 3 o que implica que 5 é divisível por 3 o que é um absurdo, pois, sabe-se que 5 não é divisível por 3. Isso ocorre para quaisquer dois números primos distintos.

$$\left\{ \text{🚌}_1, \ldots, \text{🚌}_n, \text{🚌}_{n+1}, \ldots \right\} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{N} \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \text{primos} \right\}$$

Com essa estratégia, ainda estão vagos os quartos cujos números são divisíveis por mais de um número primo tendo em vista que o gerente acomodou os infinitos passageiros dos infinitos ônibus em quartos de número da forma p^n onde p é um número primo correspondente ao ônibus e n corresponde ao número do assento do ônibus p. Dessa forma, por exemplo, o quarto de número 6 está vago, pois 6 é divisível por 2 e por 3, podendo então, acomodar mais infinitos novos hóspedes, pois todos os múltiplos de 6 também estão vagos.

Outras formas de apresentar esse paradoxo também podem ser encontradas. Veremos a seguir uma versão encontrada em um canal do Youtube.

4.2 Versão Canal Veritasium: como um hotel infinito ficou sem espaço

Imagine um hotel com um número infinito de quartos numerados em $1, 2, 3$ e assim por diante. Esse é o Hotel de Hilbert e você é o gerente. Agora, pode parecer assim, como se você tivesse acomodação para todos os que vierem, mas há um limite, uma maneira de exceder, até mesmo o infinito de quartos no Hotel de Hibert.

Para começar, vamos dizer que apenas uma pessoa é permitida em cada quarto e todos os quartos estão ocupados. Há um número infinito de pessoas em um infinito número de quartos.

Chega uma nova pessoa, e ela quer um quarto, mas todos estão ocupados. O que você pode fazer? Bem, um gerente ruim pode mandar a pessoa embora, mas você sabe o seu caminho em torno do infinito. Você faz um anúncio e pede a todos os hóspedes que troquem para irem para o próximo quarto. Então a pessoa do quarto número 1 irá para o quarto número 2, a do número 2 para o 3, e assim por diante. E agora você poderá colocar o novo hóspede no quarto número 1.

Se um ônibus com 100 passageiros chega você sabe exatamente o que fazer: todos tem que seguir em frente por 100 quartos e você fornece aos novos hóspedes os quartos desocupados.

Mas digamos que vem um ônibus infinitamente longo, que têm um número infinito de passageiros. Você sabia o que fazer com um número finito de convidados, mas como age com um número infinito? Você pensa nisso por um momento e então faz um plano, diz a cada um dos seus hóspedes atuais para ir para o quarto com número com o dobro do número do seu quarto. Ou seja, a pessoa no primeiro quarto vai para o segundo; a pessoa do quarto 2 muda-se para o quarto 4; o quarto 3 vai para o quarto número 6, e assim por diante. Agora, todos os quartos com números ímpares estão livres novamente, e já que, como você já sabe há infinitos números ímpares, você pode levar cada passageiro do ônibus infinito e dar um quarto com um número ímpar.

Está começando a parecer que todos podem se hospedar nesse hotel. E essa é a beleza do infinito. Vai durar para sempre.

E de repente, vários ônibus infinitos estacionam. Mas não apenas um ou dois, mas um número infinito de ônibus infinitamente grandes. Então, o que você pode fazer? Claro, você cria uma planilha infinita. Para cada ônibus você cria uma linha: ônibus 1, ônibus 2, ônibus 3 e assim por diante. E no topo da tabela uma linha para todos os hóspedes atuais do hotel. As demais colunas serão para a posição que cada pessoa ocupa. Assim, você tem os quartos do hotel $1, 2, 3$, etc. E o ônibus 1 assento 1, ônibus 1 assento 2, ônibus 1 assento 3 e assim por diante.

Assim, todo mundo recebe um identificador individual que é composto pela combinação de seu ônibus e assento.

	1	2	3	4	5	...
Hotel	Quarto 1	Quarto 2	Quarto 3	Quarto 4	Quarto 5	...
Ônibus 1	O1L1	O1L2	O1L3	O1L4	O1L5	...
Ônibus 2	O2L1	O2L2	O2L3	O2L4	O2L5	...
Ônibus 3	O3L1	O3L2	O3L3	O3L4	O3L5	...
Ônibus 4	O4L1	O4L2	O4L3	O4L4	O4L5	...
Ônibus 5	O5L1	O5L2	O5L3	O5L4	O5L5	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

Tabela 4.1: Tabela infinita

Como você divide os quartos aqui?

Comece no canto superior esquerdo e desenhe uma linha que ziguezagueia para frente e para trás através da planilha passando por cada identificador único exatamente uma vez.

	1	2	3	4	5	⋯
Hotel	Quarto 1	Quarto 2	Quarto 3	Quarto 4	Quarto 5	⋯
Ônibus 1	O1L1	O1L2	O1L3	O1L4	O1L5	⋯
Ônibus 2	O2L1	O2L2	O2L3	O2L4	O2L5	⋯
Ônibus 3	O3L1	O3L2	O3L3	O3L4	O3L5	⋯
Ônibus 4	O4L1	O4L2	O4L3	O4L4	O4L5	⋯
Ônibus 5	O5L1	O5L2	O5L3	O5L4	O5L5	⋯
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Figura 4.1: Ziguezague na tabela infinita

Imagine-se puxando em ambas as extremidades (ou opostas) da linha endireitando-a. Percebe-se que fomos de um infinito de uma planilha infinitamente grande que se tornou uma única linha infinitamente grande.

	1	2	3	4	5	⋯
Hotel	Quarto 1	Quarto 2	O1L1	O2L1	O1L2	⋯

Figura 4.2: Linha infinita

E aí é muito simples, apenas alinhar cada pessoa nessa linha com um único quarto no hotel. Assim, todo mundo se encaixa sem problemas.

Mas agora um grande ônibus chega. Um ônibus de festa infinito e sem assentos. Em vez disso, todos a bordo são identificados pelo seu nome único, o que é um pouco estranho. Os nomes de todos são compostos por apenas duas letras, A e B. Mas cada nome é infinitamente longo, por exemplo um é chamado ABBAAAA...AAA... mantendo o A para sempre. Outro chama-se ABABABABAB...ABABAB..., etc. Neste ônibus, existe para cada pessoa uma das possibilidades de sequência infinita com essas duas letras, qualquer combinação em sequência das letras A e B será nome de alguma pessoa desse ônibus, inclusive nomes que não possuem padrões de repetição.

Agora vem ABBAAA...AAAAA..., vou chamá-lo de ABBA para abreviar, ele entra no hotel para organizar os quartos, mas você lhe diz: "Desculpe-me, mas não há como acomodar todos no hotel". E ele pergunta: "O que quer dizer? Há um número infinito de nós e você tem um número infinito de quartos. Por que isso não funciona?" Então você mostra a ele. Você traz a planilha infinita novamente e começa a distribuir quartos para as pessoas do ônibus. Então você tem o quarto 1, atribua a ABBA, e em seguida o quarto dois para ABABABA....BABABABA... e você continua colocando uma sequência diferente de A's e B's ao lado de cada número de quarto.

Quarto 1	ABBAAAAAAAA...
Quarto 2	ABABABABABAB...
Quarto 3	BBAABBBBBBAA...
Quarto 4	BBABAAABAAAA...
Quarto 5	BBABAABBAABA...
⋮	⋮

Tabela 4.2: Sequência infinita das letras A e B

"E aqui está o problema", você diz ao ABBA, "Vamos dizer que temos uma lista infinita completa, eu ainda posso escrever o nome de uma pessoa que ainda não tem um quarto. Você faz isso escrevendo o nome dessa pessoa com a primeira letra do primeiro nome e a altera de A para B. Então você pega a segunda letra do próximo nome e troca de B para A. E é isso que você faz com toda lista. E certamente o nome que você observou não vai estar em nenhum outro lugar da lista. Pois não vai coincidir com a primeira letra do primeiro nome ou a segunda letra do segundo nome, ou a terceira letra do terceiro nome. O nome será diferente de qualquer outro da lista, mesmo que seja apenas por um caractere, a letra na diagonal.

Sem Quarto	BABAB...
Quarto 1	ABBAAAAAAAA...
Quarto 2	ABABABABABAB...
Quarto 3	BBAABBBBBBAA...
Quarto 4	BBABAAABAAAA...
Quarto 5	BBABAABBAABA...
⋮	⋮

Tabela 4.3: Letra na diagonal da sequência infinita das letras A e B

O número de quartos do Hotel de Hilbert é infinito, claro, mas é um infinito contável, o que significa que há tantos quartos como há números positivos de um para o infinito. Em contrapartida, o número de passageiros no ônibus é incontavelmente infinito. Se você tentar combinar cada um deles a um número inteiro, você ainda vai ter pessoas sobrando. Alguns infinitos são maiores que outros. Logo, há um limite para as pessoas que podem ir ao Hotel de Hilbert. Isso é incrível o suficiente, mas o que é ainda mais louco é essa descoberta de infinitos de diferentes tamanhos que desencadeou uma série de invenções que levaram a invenção do dispositivo em que você está olhando agora. Mas isso é uma história para outra hora.

Abordaremos a seguir uma terceira versão desse paradoxo.

4.3 Versão de Jeff Dekofsky

Por volta de 1920, o matemático alemão David Hilbert imaginou um famoso experimento de lógica matemática para mostrar como é difícil compreender o conceito de infinito.

Imagine um hotel com um número infinito de quartos e um gerente noturno muito trabalhador. Certa noite, o Hotel Infinito está completamente lotado, com um número infinito de hóspedes. Um homem entra no hotel e solicita uma vaga. Em vez de recusar o hóspede, o gerente da noite decide acomodá-lo. Como? É fácil. Ele pede ao hóspede do quarto número 1 que se mude para o quarto número 2, o hóspede do apartamento 2 vai para o quarto 3 e assim por diante. Cada hóspede muda-se do quarto número "n" para o quarto "$n+1$". Já que há um número infinito de apartamentos, haverá uma nova vaga para cada hóspede existente. Isto deixa o quarto 1 livre para um novo cliente. O processo pode ser repetido para qualquer número finito de novos hóspedes.

Se, digamos, um ônibus de turismo trouxer 40 novas pessoas procurando acomodação, cada hóspede existente terá apenas que se mudar do quarto número "n" para o quarto número "$n+40$", liberando assim os primeiros 40 quartos.

Agora, o ônibus infinito com infinitos passageiros deixa o gerente da noite inicialmente perplexo, mas ele se dá conta de que há uma solução para acomodar cada nova pessoa. Ele pede ao hóspede do quarto 1 para se mudar para o quarto 2. A seguir, pede ao hóspede do quarto 2 que passe para o quarto 4, o hóspede do quarto 3 para deslocar-se para o quarto 6, e assim por diante. Cada hóspede atual muda-se do quarto número "n" para o quarto "$2n$", ocupando apenas os quartos dos infinitos números pares. Assim procedendo, ele desocupou todos os infinitos quartos dos números ímpares que serão ocupados pelas pessoas que chegaram no ônibus infinito.

Todo mundo fica feliz e os negócios do hotel prosperam mais do que nunca. Para falar a verdade, prosperam exatamente no mesmo montante de sempre, faturando um número infinito de dólares a cada noite. As notícias sobre este incrível hotel se espalham. Chegam pessoas de lugares distantes, de toda a parte.

Uma noite acontece o impensável. O gerente noturno olha para fora e vê uma infinidade de ônibus infinitamente grandes, cada qual com um número contável de infinitos passageiros. O que ele pode fazer? Se ele não puder hospedá-los, o hotel perderá uma quantidade infinita de dinheiro e ele certamente perderá seu emprego. Por sorte, ele lembra que, por volta do ano 300 a.C., Euclides provou que existe uma quantidade infinita de números primos. Assim, para realizar a tarefa aparentemente impossível de encontrar infinitos leitos para infinitos ônibus com infinitos passageiros cansados. O gerente noturno reserva a cada hóspede atual o primeiro número primo, 2, elevado à potência do número do seu quarto atual. Assim, o atual ocupante do quarto número 7 vai para o quarto número 2^7, que é o quarto 128. O gerente noturno a seguir leva as pessoas do primeiro dos ônibus infinitos e as acomoda no quarto cujo número é o número primo seguinte, o 3, elevado à potência do número do seu assento no ônibus. Desse modo, a pessoa no assento de número 7 no primeiro ônibus vai para o quarto número 3^7, ou o quarto número 2187. Isso continua para todos os do primeiro ônibus. Aos passageiros do segundo ônibus são associadas potências do número primo seguinte, o 5. O próximo ônibus, potências de 7. Segue para cada ônibus: potências de 11, potências de 13, potências de 17, etc. Tendo em vista que cada um destes números tem apenas 1 valor único para as potências dos números naturais de seus números primos tomados como base, não há superposição do número de quartos. Todos os passageiros dos ônibus distribuem-se pelos quartos usando esquemas de reservas únicos, baseados em números primos únicos. Dessa forma, o gerente da noite pode acomodar cada passageiro de cada ônibus, embora muitos quartos permanecerão vazios, como o quarto 6, já que 6 não é uma potência de nenhum número primo.

Felizmente, seus patrões não eram muito bons de matemática, de modo que seu emprego está a salvo. As estratégias do gerente noturno são possíveis apenas porque, embora o Hotel Infinito seja com certeza um pesadelo logístico, ele lida apenas com o nível mais baixo do infinito, principalmente, o infinito contável dos números naturais, $1, 2, 3, 4$ e assim por diante. Georg Cantor chamou este nível de infinito aleph-zero. Usamos números naturais para os números dos quartos bem como para os números dos assentos dos ônibus. Se trabalharmos com ordens superiores de infinito, como aquela dos números reais, estas estratégias estruturadas não serão mais possíveis por não termos meios de incluir sistematicamente cada número. O Hotel Infinito do Número Real tem quartos com números negativos no subsolo, quartos com número fracionários, de modo que o cara do quarto $\frac{1}{2}$ sempre desconfia que ele tem menos espaço do que aquele do quarto 1. Quartos numerados com raiz quadrada, como o quarto radical 2 e o quarto pi[2], onde os hóspedes esperam ter sobremesa grátis.

Um gerente que se preza desejaria trabalhar ali, mesmo com um salário infinito? Mas no Hotel Infinito de Hilbert, onde nunca existe vaga e há sempre quarto para mais gente. Os cenários enfrentados pelo gerente sempre esforçado e talvez excessivamente hospitaleiro servem para nos lembrar do quanto é difícil para as nossas mentes relativamente finitas entender um conceito tão amplo como o infinito. Talvez você possa ajudar a resolver esses problemas depois de uma boa noite de sono. Mas, honestamente, talvez seja preciso que você troque de quarto às 2 horas da madrugada.

Notamos algumas diferenças nas versões apresentadas em relação a versão canônica, a versão do Canal Veritasium que apresenta a ideia de uma planilha com a correspondência biunívoca entre assentos de ônibus e quartos, posteriormente demonstra que não é pos-

[2]Trocadilho com a palavra *pie*, em inglês, que é torta.

sível relacionar os quartos com os nomes infinitos em função do infinito dos quartos ser contável. Já a versão de Jeff Dejofsky aborda o infinito dos números reais, apresentando possibilidades de quartos fracionários e quartos negativos no subsolo.

Todas essas versões são iterativas e dialogam com o leitor, facilitando a utilização em salas de aula.

5 Outras abordagens do infinito

Neste capítulo utilizaremos como referências [15], [7] e [12].

Uma das primeiras e mais famosas contemplações do infinito pelo ser humano começa aproximadamente 500 anos antes de Cristo com o paradoxo de Aquiles e a Tartaruga, proposto pelo filósofo grego Zenão de Eléia. Ele pode ser formulado assim:

5.1 Paradoxo de Aquiles e a Tartaruga

Suponha que uma tartaruga, que é um dos animais mais lentos da natureza, aposte uma corrida com Aquiles, herói grego, conhecido por sua velocidade. Já que Aquiles é mais veloz, a tartaruga recebe uma vantagem, começando a corrida pouco à frente da linha de largada. De acordo com o paradoxo, Aquiles nunca alcançaria a tartaruga, pois quando ele chegar ao ponto em que ela partiu, a adversária já teria avançado até algum ponto adiante na pista de corridas. E quando Aquiles chegar à próxima posição, a tartaruga terá avançado ainda mais. Zenão afirma que a série é interminável e haverá sempre uma distância, por menor que seja, entre os dois competidores.

Todos nós sabemos, é claro, que Aquiles iria alcançar a tartaruga com muita facilidade, mas assinalar isso não invalida o raciocínio de Zenão. O que ele quer dizer é que Aquiles deve efetuar uma série infinita de atos, algo que não pode ser feito num período de tempo finito.

Infelizmente, os escritos do próprio Zenão desapareceram e a única versão que temos de seus paradoxos é a de Aristóteles. Portanto não podemos ter a certeza de que os temos em sua forma original. Aristóteles diz que Zenão propôs o paradoxo de "Aquiles e a Tartaruga" e um outro chamado "A dicotomia" no intuito de mostrar que o movimento era impossível. Mas não é certo que isso esteja correto. Alguns filósofos pensam que

Zenão estava rebatendo a ideia de que o espaço e tempo eram infinitamente divisíveis, que seu objetivo ao descrever uma situação absurda em que Aquiles tem de transpor uma série de distâncias que ficam progressivamente mais curtas era mostrar que o espaço não podia ser dividido dessa maneira.

Na realidade, saber as razões pelas quais Zenão criou seu paradoxo, não nos auxilia a compreendê-lo. Para isso, é preciso estudar o paradoxo em si. Simplificando um pouco as coisas, suponhamos que Aquiles corra exatamente duas vezes mais depressa que a tartaruga. Observe que, ao fazer essa suposição não alteramos a natureza do paradoxo. O princípio é exatamente o mesmo, quer Aquiles corra duas, dez ou cem vezes mais depressa que o seu adversário.

Além disso, vamos presumir que a vantagem dada à tartaruga seja dez metros e que Aquiles precise de exatamente um segundo para completar a primeira fase da corrida, isto é, para chegar ao ponto de partida da tartaruga. Com isso, a dianteira da tartaruga terá sido reduzida a cinco metros nesse ponto. Se Aquiles é capaz de correr dez metros por segundo, a tartaruga correrá com metade dessa velocidade. Como a dianteira da tartaruga foi reduzida pela metade, Aquiles precisará de meio segundo para completar a segunda fase. A transposição da terceira exigirá um quarto de segundo, ao passo que a quarta vai demandar um oitavo de segundo, e assim por diante.

Posição	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
Tempo necessário (segundos)	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\cdots$

Se somarmos então o tempo total transcorrido em qualquer fase da corrida, verificamos que a soma é $1\frac{1}{2}$ segundos após duas posições, $1\frac{3}{4}$ segundo após três posições, $1\frac{7}{8}$ após quatro, e assim por diante.

Posição	1	2	3	4	5	6	$\ldots$
Tempo necessário (segundos)	1	$1\,\frac{1}{2}$	$1\,\frac{3}{4}$	$1\,\frac{7}{8}$	$1\,\frac{15}{16}$	$1\,\frac{31}{32}$	$\ldots$

A impressão que se tem é que o tempo total se aproxima cada vez mais de 2 segundos. Na realidade, no mundo real, Aquiles alcançaria a tartaruga exatamente nesse intervalo de tempo nas condições descritas.

Caso Aquiles corresse dez vezes mais depressa que a tartaruga, o resultado seria semelhante. A única diferença seria que o tempo exigido para a corrida seria menor. De fato pode ser demonstrado que o tempo seria $1\frac{1}{9}$ segundos.

$$1 + 0,1 + 0,01 + 0,001 + 0,0001 + \cdots = 1,1111\cdots = 1\frac{1}{9}$$

À primeira vista, parece que o paradoxo de Zenão pode ser resolvido facilmente, bastando um pouco de aritmética. Um momento de reflexão nos mostrará que não é assim. Zenão não disse que Aquiles seria incapaz de alcançar a tartaruga em um tempo finito, sabia perfeitamente que isso aconteceria. O que Zenão disse realmente foi que era impossível para Aquiles efetuar um número infinito de atos.

5.2 Paradoxo da dicotomia

O paradoxo da dicotomia em natureza é similar ao paradoxo de Aquiles e a Tartaruga, segundo Zenão, não é possível completar nenhuma jornada. Para tanto, você precisa primeiro percorrer a metade do trajeto total, depois a metade da distância restante, e de novo a metade do que resta, e assim por diante. Por mais perto que você chegue do lugar onde deseja ir, sempre sobra uma distância.

De fato, para percorrer qualquer distância é preciso primeiro vencer a metade dessa distância. Como toda a distância tem uma metade, todo o deslocamento entre um ponto A e um ponto B envolve completar um número infinito de tarefas. Além disso, não é possível nem sequer começar, diz Zenão. Afinal, antes que a segunda metade da distância possa ser percorrida, é preciso transpor a primeira. Mas antes que essa possa ser percorrida é preciso completar o primeiro quarto. E para que isso possa ser feito, é preciso transpor o primeiro oitavo, e assim sucessivamente, reiteradamente.

Zenão, pelo menos como retratado pela Física Aristotélica, argumentou que, como consequência desse paradoxo, o movimento não existe. Uma vez que um número infinito de etapas não pode ser concluído.

As duas formas do paradoxo são na realidade imagens umas da outras. Na primeira, Zenão divide uma distância em partes cada vez menores. Se representarmos isso como uma série de frações obtemos o conjunto infinito:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$$

Na segunda parte do paradoxo, isso é invertido, e as frações cada vez menores aparecem no início:

$$\dots \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$$

Se somarmos as frações, obteremos algo assim:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

À medida que mais termos são acrescentados, a soma vai se aproximando cada vez mais de 1, assim como se aproximava cada vez mais de 2 segundos no paradoxo anterior. Zenão está dizendo que para transpor qualquer distância é necessário efetuar um número infinito de tarefas.

5.3 Infinito ao longo da história

Os paradoxos de Zenão abriram um caminho para que os gregos pudessem começar a compreender o infinito. Um grande nome nesse campo foi Eudoxo de Cnido (400-350 a.C.). É quase certo que ele tenha realizado boa parte da obra que mais tarde Euclides de Alexandria (300 a.C) enfeixou num livro chamado Elementos. Também se acredita que ele seja autor do chamado método de exaustão, que se tornou a raiz da Análise Moderna, lidando justamente com os problemas que envolvem o infinito. O método de Eudoxo consistia em colocar figuras dentro de figuras. Por exemplo, um triângulo, depois dois triângulos menores, depois três ainda menores — e assim por diante, todos dentro de uma parábola. Dessa maneira, é possível usar figuras conhecidas — os triângulos — para calcular uma área desconhecida, a da parábola. Arquimedes de Siracusa (290-212 a.C.) foi o primeiro a usar o método de exaustão com rigor, montando uma soma infinita:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots$$

Como se vê, não muito diferente da soma que resolveu a corrida de Zenão. E, com ela, Arquimedes calculou a área da parábola, uma das mais importantes curvas geométricas. Nos milênios seguintes, pouco se acrescentou a esse trabalho. Para avançar era preciso descobrir fórmulas gerais, para calcular áreas de quaisquer figuras, por exemplo.

Esse desenvolvimento iniciou-se apenas no Renascimento e seria completado, por volta de 1700, com o cálculo infinitesimal do inglês Isaac Newton (1643-1727) e do alemão Wilhelm Leibniz (1646-1716) quando surgiram fórmulas para o cálculo das mais variadas áreas e volumes, assim como o comprimento de curvas, entre muitas outras coisas.

Porém, era como se soubessem somar sequências infinitas de números sem compreender muito bem o que estavam fazendo. O alemão Friedrich Gauss, considerado o príncipe dos matemáticos, expressou as dúvidas dessa época, banindo da Matemática a própria ideia do infinito.

Posteriormente o francês Augustin Louis Cauchy (1789-1857) criou o conceito de limite, um meio de dar significado a uma sequência infinita. Segundo ele, não era certo dizer que $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = 2$, mas sim que essa soma tende a 2, sem nunca chegar a ele. E ainda, que é sempre possível dizer quanto falta para chegar a 2. Basta fazer uma soma finita: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1,75$, logo, falta $0,25$ para 2.

Em lugar de dizer, por exemplo, que uma sequência é infinita, se diz que é tão longa quanto se queira — quanto mais longa, menor a diferença com relação a 2, que pode ser tornada tão pequena quanto se desejar. Pode parecer pouca coisa, mas, em Matemática, o rigor é crucial, o que significa eliminar toda e qualquer ambiguidade. E isso se obteve a partir do trabalho de Cauchy.

Desde então essa ideia vem sendo aprimorada, inclusive por meio das teorias de Cantor. Pode parecer que os números infinitos não têm nada a ver com o resto da Matemática, mas não é assim. Afinal, os números estão por todo lado. Vale a pena acompanhar as ideias de Cantor em relação ao infinito que se relacionam com as ideias do paradoxo do Hotel de Hilbert.

5.4 Georg Cantor e o Aleph-zero

Cantor emparelhou os números inteiros com os números menores que 1 e constatou: depois de esgotar a lista dos inteiros, ainda haviam números menores que 1 a emparelhar. Concluiu que o infinito de números entre 0 e 1 era maior que o infinito número dos inteiros. Nem havia nome para essa quantidade. Cantor chamou de Aleph-zero o conjunto de todos os inteiros — o “menor” dos infinitos. Posteriormente viria o Aleph-zero mais 1, e por aí adiante, numa inimaginável hierarquia de infinitos.

6 Proposta pedagógica para o Ensino Médio

Neste capítulo, apresentaremos uma proposta pedagógica para o Ensino Médio, que foi aplicada em uma sala de 1º ano do Ensino Médio, com aproximadamente 40 estudantes, em uma escola pública, na cidade de Atibaia, no Estado de São Paulo. A atividade utiliza o Paradoxo do Hotel de Hilbert, a fim de abordar os conteúdos de matemática do ensino médio através de situações, ficções e contextualizações com informações associadas ao conceito de infinito, destacando a importância da construção desse conceito, bem como propor sugestões de como tratar esse assunto em sala de aula. Para a aplicação da proposta pedagógica os estudantes realizaram as atividades em grupos de 4 pessoas. Para abordagem foram utilizadas as seguintes referências: [1], [2], [3] e [13].

Atualmente, na Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, utiliza-se como guia de referência para as habilidades a serem desenvolvidas junto aos estudantes do Ensino Médio um texto chamado Currículo Paulista. Esse documento, preparado de acordo com a Base Nacional Comum Curricular, determina quais conteúdos devem ser ministrados por seus professores e fixa as expectativas de aprendizagem dos estudantes. Todos os alunos recebem material didático cujas atividades estão embasadas no Currículo Paulista. Portanto, seja qual for o conteúdo que se deve trabalhar na educação pública do estado de São Paulo, ele deve ser necessariamente pautado nas habilidades do Currículo Paulista.

Com a aplicação dessa proposta tem-se como meta, que os alunos desenvolvam ou aprimorem algumas habilidades específicas que se encontram no texto do Currículo Paulista, quais sejam:

CURRÍCULO PAULISTA

2º BIMESTRE		
UNIDADES TEMÁTICAS	HABILIDADES	OBJETOS DE CONHECIMENTO MATEMÁTICA
Números e Álgebra	(EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.	• Funções: interpretação de gráficos e de expressões algébricas; • Sistemas e unidades de medida: leitura e conversão de unidades de grandezas diversas.
Números e Álgebra	(EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.	• Funções polinomiais do 1º grau (função afim, linear e constante); • Gráficos de funções; • Taxa de variação de uma função (crescimento/decrescimento); • Razões trigonométricas: tangente de um ângulo; • Equação da reta: coeficiente angular.
Números e Álgebra	(EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.	• Funções polinomiais do 1º grau (função afim, função linear, função constante, função identidade); • Gráficos de funções; • Taxa de variação de funções polinomiais do 1º grau
Números e Álgebra	(EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.	• Funções polinomiais do 1º grau (função afim, linear e constante); • Gráficos de funções a partir de transformações no plano; • Proporcionalidade; • Estudo do crescimento e variação de funções; • Estudo da variação de funções polinomiais de 1º grau: crescimento, decrescimento, taxa de variação da função.
Números e Álgebra	(EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.	• Funções afins; • Sequências numéricas: progressões aritméticas (P.A).

Figura 6.1: Conteúdos e habilidades do Currículo Paulista. 1ª série - Ensino médio. Fonte: [13]

6.1 Contextualização e atividade investigativa

O que é o infinito? Primeiramente, qualquer pessoa pode definir o que é infinito. Dentre as respostas que já ouvi dos meus alunos estão: “é um número muito grande”, “é o conjunto de todos os números”, “é algo que não tem fim”, "é o tamanho do universo, etc. Claramente, essas definições possuem uma forte componente intuitiva, mas o infinito é, por definição, uma coisa que escapa à intuição.

No primeiro momento realizamos um debate acerca das ideias dos estudantes sobre o conceito de infinito. A roda de conversa é um instrumento metodológico, pois ela abre espaço para que os sujeitos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem estabeleçam um espaço de diálogos e interações no contexto escolar, ampliando suas percepções sobre si e sobre o outro.

O conceito de infinito costuma aparecer no ensino básico como característica de algum tema principal e, apesar de manifestar-se como conjuntos, sequências e múltiplos, por exemplo, não é comum ver em materiais didáticos um espaço que incentive essa discussão de forma estruturada. O tema pode surgir como curiosidade dos alunos ou pode ser uma boa oportunidade para convidá-los a trabalhar pensamentos abstratos, argumentos lógicos e generalizações matemáticas.

Inicialmente trabalhamos conceitos de padrões e sequências numéricas, das mais simples e comuns até aquelas que são menos intuitivas, convidando os alunos a descobrirem e generalizarem o padrão numérico apresentado em cada uma delas, investigando e discutindo sobre características de cada sequência, possibilitando que o estudante visualize sequências contidas em outras, como por exemplo: a sequência dos números ímpares faz parte da sequência de números naturais, se há diferentes formas de representar o padrão de uma sequência, o que diferentes sequências têm em comum etc. Na primeira etapa, surgiram sequências como: sequência de números pares e ímpares, de números naturais, de múltiplos, de quadrados perfeitos, de números primos, entre outras. Dentre diversas observações, a quantidade infinita de números surgiu como algo que todas essas têm em comum. E, nesse momento, houve o questionamento: *O que sabemos sobre o infinito de cada uma delas?*

Algumas questões foram propostas:

- Há a mesma quantidade de números pares do que de números ímpares?
- Há a mesma quantidade de números positivos do que de números negativos?
- Há a mesma quantidade de números inteiros do que de números pares?
- Quantos números reais há entre 0 e 1? É a mesma quantidade que há entre 0 e 2?
- Todos os infinitos são iguais?
- Há infinitos de tamanhos diferentes?
- Podemos contar um infinito?
- Todos infinitos são contáveis?

Nessa etapa, não foi possível obter conclusões matemáticas generalizadas, porém foi possível se atentar ao conhecimento prévio de cada estudante e dar margem para desenvolverem a imaginação e a curiosidade.

6.2 Injetividade, sobrejetividade e bijetividade

Já havíamos trabalhado previamente os conceitos de funções via diagrama de flechas, função injetora, sobrejetora e bijetora para abordar uma de suas principais aplicações: a comparação entre o número de elementos de conjuntos finitos.

Foi proposto um exercício com diagramas de conjuntos e funções, para que em cada item fosse determinado se a função era injetora, sobrejetora ou bijetora. Além disso, que determinassem qual dos conjuntos possuía o maior número de elementos sem realizar a contagem.

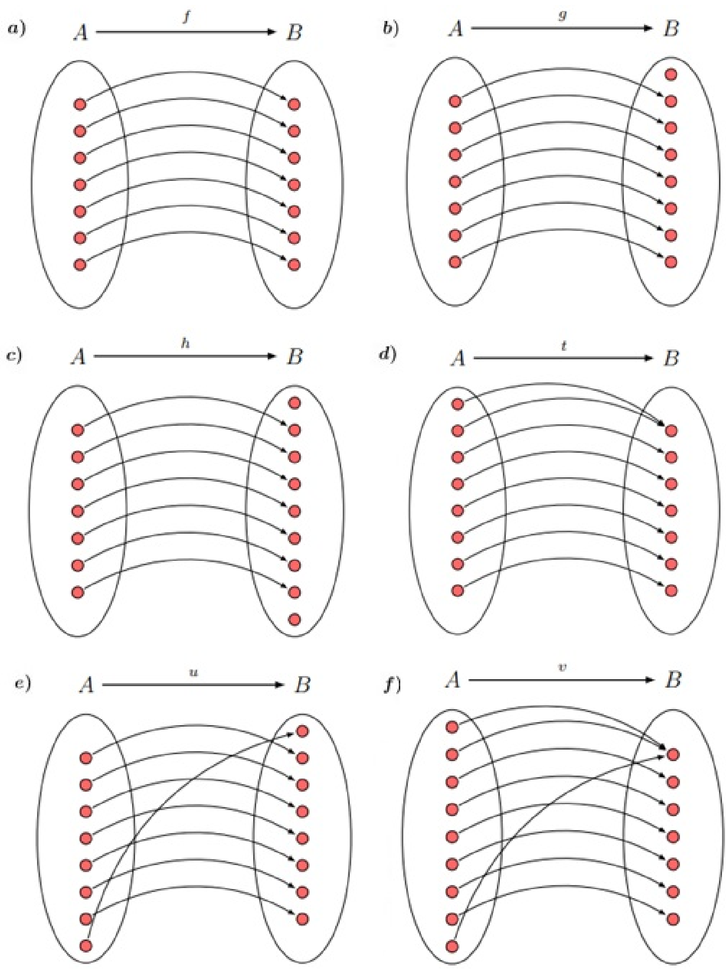

Figura 6.2: Exercício proposto

Os estudantes realizaram o exercício em grupos de 4 pessoas, anotaram os resultados para cada um dos itens e posteriormente os apresentaram para sala, socializaram as estratégias utilizadas para comparar o número de elementos dos conjuntos em cada caso. Vejamos a generalização das respostas:

(a) Todo elemento do conjunto A está relacionado com um único elemento do conjunto B, em correspondência 1 a 1. Logo, os conjuntos possuem o mesmo número de elementos.

(b) Todo elemento do conjunto A possui um único correspondente em B. Porém, sobra 1 elemento em B, logo, há mais elementos em B.

(c) Todo elemento do conjunto A possui um único correspondente em B. Porém, sobram 2 elementos em B, logo há mais elementos em B.

(d) Todos os elementos de B possuem algum correspondente em A. Além disso, existem 2 elementos de A associados a um mesmo elemento em B. Assim, o conjunto A possui mais elementos que o conjunto B.

(e) Novamente todo elemento do conjunto A está relacionado com um único elemento do conjunto B, além disso, não sobram elementos em B. Dessa forma, os conjuntos tem mesma quantidade de elementos.

(f) Todo elemento do conjunto A possui um único correspondente em B. Porém, sobram 3 elementos em B, logo há mais elementos em B.

Em seguida, a partir do exercício e a discussão anterior, foi proposto que os estudantes respondessem às perguntas :

(1) Se existir uma função bijetora entre dois conjuntos A e B finitos, o que se pode afirmar em relação ao número de elementos desses conjuntos?

(2) Se existir uma função $f : A \to B$ que é apenas injetora, o que se pode dizer quanto ao número de elementos desses conjuntos? E se a função for apenas sobrejetora?

(3) Se existir uma função $f : A \to B$ que é apenas sobrejetora, o que se pode dizer quanto ao número de elementos desses conjuntos?

Vejamos a generalização dos resultados obtidos:

(1) Se existir uma função bijetora entre dois conjuntos finitos, eles estarão em correspondência 1 a 1. Então, podemos afirmar que eles possuem o mesmo número de elementos.

(2) Se existir uma função somente injetora do conjunto A para o B, o conjunto B será maior, porque mesmo todos os elementos do conjunto A estando associados a um único elemento do conjunto B, ainda sobram elementos.

(3) Se existir uma função somente sobrejetora do conjunto A para o B, o conjunto A será maior, porque mesmo todos os elementos do conjunto B estando associados a um único elemento do conjunto A, ainda sobram elementos.

6.3 Como um hotel infinito ficou sem espaço

Inicialmente foi entregue uma folha contendo o texto com o Paradoxo do Hotel de Hilbert, para leitura partilhada com os estudantes, buscando explicar cada processo de entrada de um novo hóspede. O objetivo dessa atividade foi compreender a diferença entre os comportamentos de conjuntos finitos e conjuntos infinitos no que diz respeito às funções bijetoras. O estudante deverá perceber que, diferentemente do que ocorre para conjuntos finitos, pode haver bijeção entre um conjunto infinito e uma de suas partes próprias, ou seja, pode estar em correspondência 1 a 1 com o todo.

A seguir, apresentaremos as partes do texto utilizadas na atividade, bem como as observações trabalhadas em sala de aula.

O Hotel de Hilbert é um grandioso hotel que possui infinitos quartos, todos numerados: o quarto 1, o quarto 2, o quarto 3 e assim sucessivamente. Este hotel possui infinitos hóspedes e encontra-se com todos os quartos ocupados. Seu gerente é o alemão David Hilbert, um dos maiores matemáticos do século XX.

Certo dia, pela manhã, um viajante chega ao Hotel e pergunta se há uma vaga. A recepcionista prontamente responde:

- O hotel está lotado, senhor. Não há como acomodá-lo.

Ao ouvir a recepcionista dizer isso, o gerente surge e diz:

- É possível acomodá-lo, sim. Prepare meu microfone, pois darei um recado aos nossos hóspedes. Ao microfone, ele discursa:

- Bom dia, caros hóspedes! Para acomodar um novo viajante, cada um de vocês deverá deslocar-se para o quarto que vem logo em seguida do qual ocupam agora: o hóspede do quarto 1 deverá se deslocar para o quarto 2; o hóspede do quarto 2 deverá ir para o quarto 3; o hóspede do quarto 3 vai para o quarto 4 e assim sucessivamente. Após o recado, todos os hóspedes prontamente se deslocaram para o próximo quarto, como pedido pelo gerente. O quarto 1 ficou vago, e Hilbert finalmente disse ao viajante que ali se encontrava:

- Há uma vaga para o senhor. Dirija-se ao quarto de número 1. Depois disso, o hotel voltou a sua situação inicial de lotação.

Através da solução dada pelo gerente, nesse trecho do texto, podemos observar a seguinte correspondência que sugere uma função:

$$1 \to 2$$

$$2 \to 3$$

$$3 \to 4$$

$$\vdots$$

Ao questionar os estudantes sobre qual conjunto poderia ser o domínio e qual poderia ser o contradomínio para que a função seja bijetora, perceberam que o domínio é o conjunto dos números naturais e,x o contradomínio é o conjunto dos números naturais com exceção do número 1. Observando que função associa a cada natural n o seu sucessor $n+1$, formalizamos a função:

$$f : \mathbb{N} \to \{2, 3, 4, \cdots\}$$

$$f(n) = n + 1$$

Ao questionar se essa função estabelece ou não uma bijeção entre o domínio e o contradomínio, os estudantes perceberam que a função f estabelece uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e um de seus subconjuntos próprios, aquele que não possui apenas o número 1. Questionando se é possível haver bijeção entre um conjunto e um de seus subconjuntos próprios, o que justamente é a característica mais contraintuitiva entre os conjuntos infinitos: a parte ter em bijeção com o todo, rompendo com a intuição de que $\mathbb{N}$ é maior que seu subconjunto $\{2, 3, 4, \cdots\}$, uma vez que seus elementos podem ser postos de correspondência 1 a 1 de modo a conseguir comportar mais uma pessoa no hotel de Hilbert.

Após essa etapa, foram propostas as seguintes situações:

(a) Chegaram 2 viajantes. Como eles podem ser acomodados? Descreva, se possível, a função bijetora com solução dada.

(b) Chegaram k viajantes. Como vocês os acomodariam?

Após as discussões, as generalizações das soluções apresentadas foram as seguintes:

(a) O hóspede do quarto 1 deverá ir para o 3, já o hóspede do quarto 2 para o 4, o hóspede do quarto 3 para o 5 e, assim sucessivamente. Cada hóspede deverá se mudar para o quarto cujo número será o número do quarto atual somado com dois, ou seja, o hóspede do quarto n deverá se dirigir ao quarto $n + 2$. Formalizando a seguinte função bijetora:

$$f : \mathbb{N} \to \{3, 4, 5, \cdots\}$$

$$f(n) = n + 2$$

(b) A solução encontrada foi a generalização da anterior, sugerindo uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e o conjunto $\{k + 1, k + 2, \cdots\} = \{x \in \mathbb{N} : x > k\}$, ou seja, a pessoa do quarto de número 1 mudaria-se para o quarto $k+1$, a pessoa do quarto de número 2 mudaria-se para o quarto $k + 2$ e, assim sucessivamente.

Continuamos com o texto:

O Hotel novamente encontra-se lotado. Chega ao hotel um ônibus com um número infinito (enumerável) de passageiros e todos eles querem se hospedar no hotel. Bem, o hotel tem in derão, agora, acomodar essas novas pessoas?

Os estudantes observaram que cada hóspede deveria se deslocar para o quarto cujo número é o dobro daquele em que ele se encontra. Dessa forma, o hóspede que se encontra no quarto 1, se mudará para o 2, o hóspede que se encontra no quarto 2 se mudará para o 4, o do quarto 3 para 6 e, assim por diante, ou seja, o hóspede que se encontra no quarto n será deslocado para o quarto $2n$.

$$1 \to 2$$

$$2 \to 4$$

$$3 \to 6$$

$$\vdots$$

Desse modo, os quartos ímpares ficarão vagos. Então, o gerente solicitará que o primeiro passageiro se hospede no quarto 1, que o segundo passageiro se aloje no quarto 3, ou seja, o passageiro de número n deverá se hospedar no n-ésimo quarto ímpar:

$$1 \to 1$$

$$2 \to 3$$

$$3 \to 5$$

$$\vdots$$

Assim, todos os passageiros serão acomodados nos quartos ímpares. Foi apresentado aos estudantes que essas duas maneiras de manejar os hóspedes sugerem duas bijeções:

$$f : \mathbb{N} \to \{2, 4, 6, 8 \cdots\}$$

$$g : \mathbb{N} \to \{1, 3, 5, 7 \cdots\}$$

Ou seja, os números pares e ímpares estão em bijeções com os naturais.

Agora solicitamos que os estudantes imaginassem que chegasse ao hotel um número infinito de ônibus como o do caso anterior. Perceberam novamente, nenhuma das estratégias adotadas nos casos anteriores seria útil. Com algumas intervenções perceberam que poderiam realocar os hóspedes da seguinte forma:

$$1 \to 2^1$$

$$2 \to 2^2$$

$$3 \to 2^3$$

$$\vdots$$

$$n \to 2^n$$

Desse modo, realocaram todos os hóspedes que já estavam hospedados no hotel e os colocamos em quartos cujos números são potências de dois. Poderiam hospedar os passageiros de cada ônibus da seguinte forma:

$$\begin{array}{cccc}
\text{Ônibus 1} & \text{Ônibus 2} & \text{Ônibus 3} & \cdots \\
1 \to 3^1 & 1 \to 5^1 & 1 \to 7^1 & \cdots \\
2 \to 3^2 & 2 \to 5^2 & 2 \to 7^2 & \cdots \\
3 \to 3^3 & 3 \to 5^3 & 3 \to 7^3 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
n \to 3^n & n \to 5^n & n \to 7^n & \cdots
\end{array}$$

Ou seja, alocamos os passageiros de cada ônibus em quartos, cujos números são potências de números primos, por exemplo: Os passageiros do ônibus um ficaram nos quartos $3, 9, 27$, os passageiros do ônibus dois ficaram nos quartos $5, 25, 125$, e assim por diante.

Questionamos como poderíamos saber que isso iria realmente funcionar? Abordamos o Teorema Fundamental da Aritmética que nos garante que cada número natural $n > 1$ pode ser decomposto de forma única em fatores primos. Como nós optamos por utilizar apenas quartos, cujos números são potências de números primos, esse teorema nos garante que nunca haverá dois hóspedes no mesmo quarto.

Os estudantes observaram que os hóspedes do hotel ficaram em quartos cujos números são da forma 2^n. Os passageiros do primeiro ônibus ficaram em quartos cujos números são da forma 3^n, os do segundo ônibus ocuparam quartos cujos números são da forma 5^n, e assim por diante. Porém, potências de primos não são suficientes para preencher todos os quartos do hotel. O quarto de número 6 por exemplo ficará vazio, pois $6 = 2 \cdot 3$, ou seja, 6 não pode ser escrito como potência de nenhum primo, logo nem os hóspedes do hotel, nem os passageiros de nenhum dos ônibus se hospedarão nele! O mesmo acontecerá com os quartos de número: $10 = 2 \cdot 5$ e $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ e com todos os outros infinitos números que não podem ser escritos como potências de números primos. Isso os levou a conclusão bizarra, de que começamos com um hotel com infinitos quartos, todos lotados, conseguimos alocar infinitos grupos, cada um com infinitas pessoas neste hotel sem expulsar ninguém e acabamos com um número infinito de quartos vazios!

Apresentamos aos estudantes o vídeo do Canal Veritasium: como um hotel infinito ficou sem espaço que aborda o Paradoxo do Hotel de Hilbert, versão já abordada anteriormente. Foi proposto que os estudantes desenhassem o hotel para que pudessem explorar sua criatividade, algumas das ilustrações produzidas por eles:

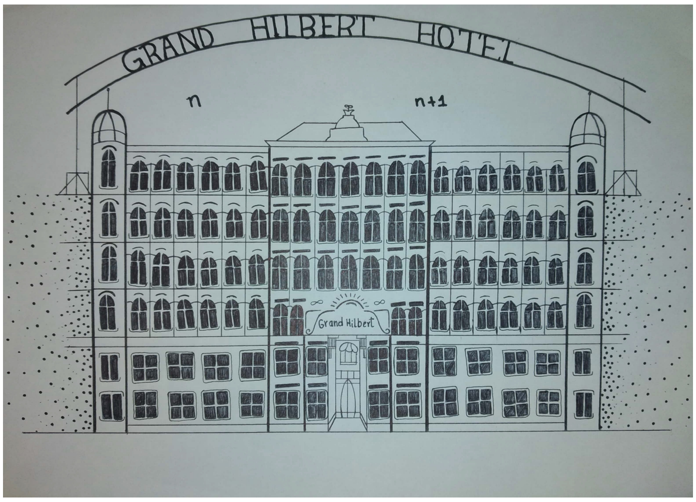

Figura 6.3: Ilustração do Hotel de Hilbert desenvolvida por estudante I

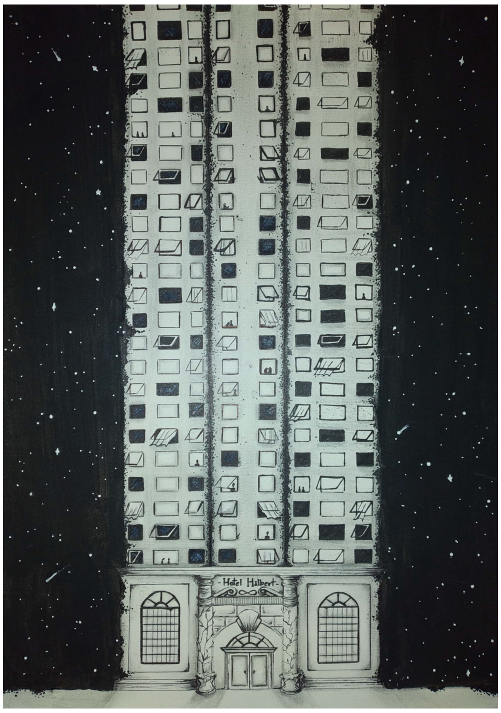

Figura 6.4: Ilustração do Hotel de Hilbert desenvolvida por estudante II

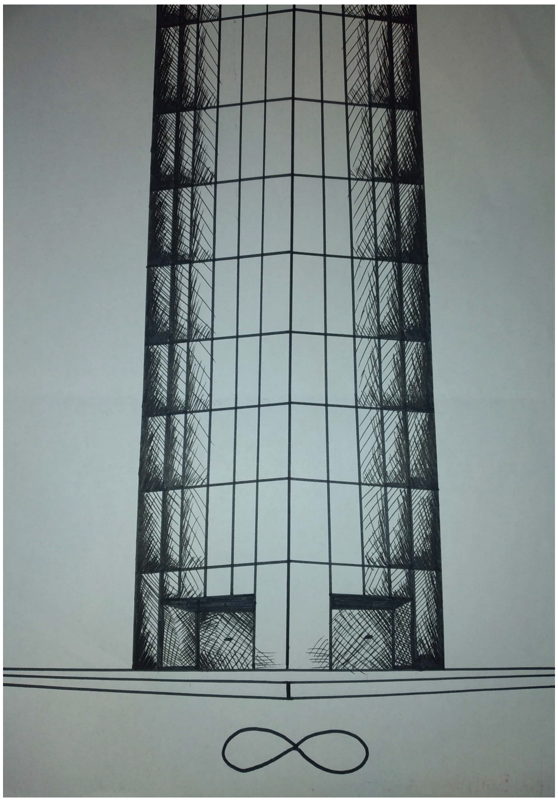

Figura 6.5: Ilustração do Hotel de Hilbert desenvolvida por estudante III

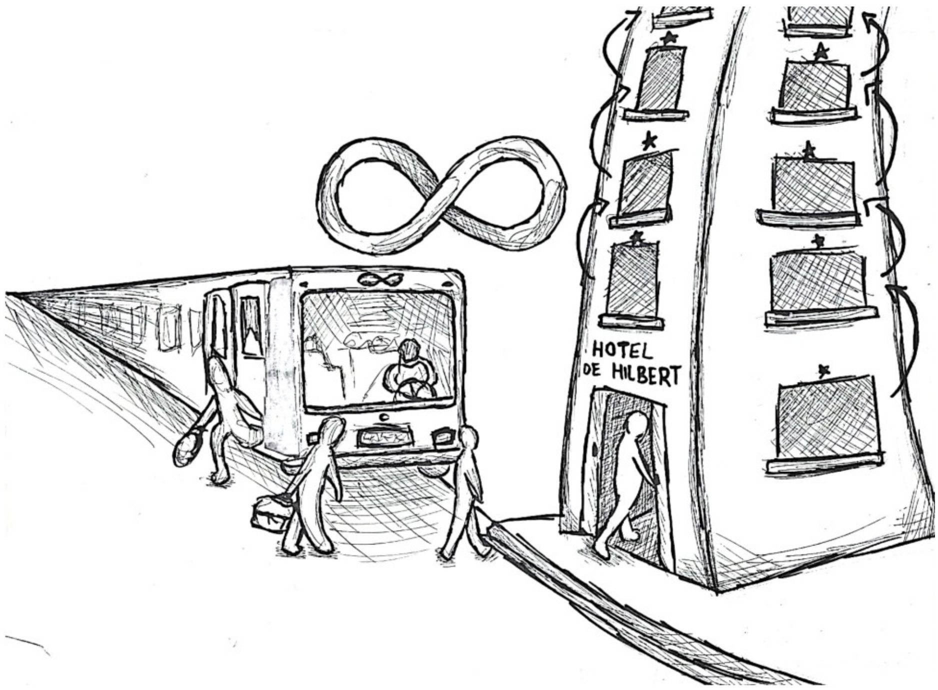

Figura 6.6: Ilustração do Hotel de Hilbert desenvolvida por estudante IV

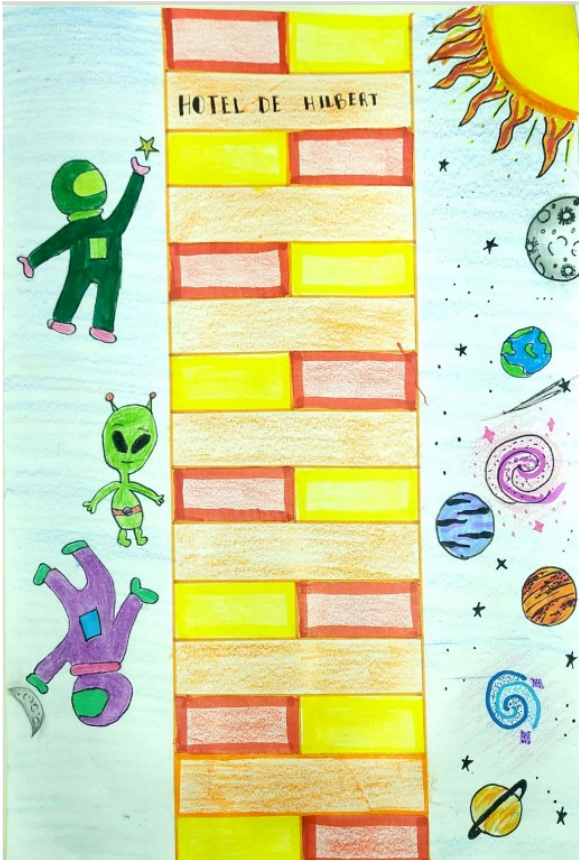

Figura 6.7: Ilustração do Hotel de Hilbert desenvolvida por estudante V

Figura 6.8: Ilustração do Hotel de Hilbert desenvolvida por estudante VI

7 Conclusão

Na matemática o infinito é a designação dada a qualquer coisa que seja maior do que nossa mente possa imaginar, e por esse motivo o conceito de infinito foi discutido por filósofos e matemáticos como Zenão, Aristóteles, Cantor, Hilbert, entre outros.

O conceito de infinito está presente no currículo de Matemática e o presente trabalho demonstrou claramente a utilidade do Paradoxo do Hotel de Hibert para aprimoramento da abordagem didática do infinito, como uma proposta para iniciar uma reflexão sobre a importância da construção desse conceito por parte de discentes e docentes, e mostrar aos professores que há possibilidade da aplicação do conceito de infinito na matemática, como na construção de conjuntos numéricos elementares, para trabalhar funções, entre outros. Além disso concluímos que existem infinitos que são maiores que outros; pela teoria de Cantor para cada conjunto infinito haverá um mais infinito ainda.

É um conceito cujo processo de aprendizagem é reconhecidamente difícil, mas não impossível. Esperamos que esta dissertação tenha apresentado a conceituação do infinito matemático, como uma nova ferramenta que seja útil e simples, e que auxilie professores da educação matemática básica, a fim de elevar o conhecimento destes e consequentemente dos estudantes nessa disciplina.

Referências

[1] BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica; **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília, 2018.

[2] BARGAS, C. L. D. **Uma perspectiva sobre o Ensino de Funções Bijetivas e Cardinalidade no Ensino Médio** Campinas SP: UNICAMP, 2020. Disponível em: `https://www.ime.unicamp.br/eventos/uma-perspectiva-sobre-ensino-funcoes-bijetivas-cardinalidade-no-ensino-medio`. Acesso em: 01 mar. 2022.

[3] COORDENAÇÃO SEDUC/SP; **Currículo Paulista Etapa Ensino Médio. SEDUC-SP**. São Paulo, 2020.

[4] COSTA DOS REIS, C.; BAYER, V. . **Números primos: relação histórica e algumas curiosidades.** Revista Ifes Ciência , [S. l.], v. 6, n. 4, p. 242-256, 2020. DOI: 10.36524/ric.v6i4.854. Disponível em: `https://ojs.ifes.edu.br/index.php/ric/article/view/854`. Acesso em: 29 abr. 2022.

[5] DESANTI, M. D.; PROBST, W. R. **Um outro olhar sobre as indeterminações.** Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática, v. 10, n. 1, 2022. ISSN: 2319-023X. Disponível em: `https://doi.org/10.21711/2319023x2022/pmo109`. Acesso em: 07 mai. 2022.

[6] DEKOFSKY, J; **The Infinite Hotel Paradox - Jeff Dekofsky**. Disponível em: `https://ed.ted.com/lessons/the-infinite-hotel-paradox-jeff-dekofsky`. Acesso em: 23 jan. 2022.

[7] DIEGUEZ, F. **Georg Cantor e o álefe-zero: O homem que colocou o infinito no bolso.** Revista Super Interes-

sante. Disponível em: https://super.abril.com.br/comportamento/georg-cantor-e-o-alefe-zero-o-homem-que-colocou-o-infinito-no-bolso/. Acesso em: 18 abr. 2022.

[8] DOMINGUES, H. H. IEZZI, G. **Álgebra moderna.** São Paulo, SP. Atual, 2003.

[9] FARJADO, R. **Teoria dos Conjuntos.** São Paulo: IME USP, 2017. Disponível em: https://www.ime.usp.br/fajardo/Conjuntos.pdf. Acesso em: 30 abr. 2022.

[10] FIGUEIREDO, D. G. **Números irracionais e transcendentes.** 3a edição. Rio de Janeiro. SBM, 2002.

[11] LAGES LIMA, Elon. **Análise Real: Funções de uma váriavel.** 8. ed. 189 p. v. 1.. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

[12] MORRIS, Richard. **Uma breve história do infinito: dos paradoxos de Zenão ao universo quantico.** Tradução de Maria Luiza X. de A. Borges. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor Ltda, 1998.

[13] SÃO PAULO, Secretaria de Educação do Estado de São Paulo. **Currículo Paulista**. São Paulo: SEE- SP/UNDIME-SP, 2019.

[14] THOMÉ, J. A. F. ; SILVA, F. A. **Conjuntos enumeráveis e não enumeráveis** Paraná: UFPR, 2016. Disponível em: https://acervodigital.ufpr.br/bitstream/handle/1884/54776/CONJUNTOS-ENUMERAVEIS-E-NAO-ENUMERAVEIS.pdf?sequence=1. Acesso em: 01 jun. 2022.

[15] VAIANO, B. **Existe alguma coisa maior do que o infito?** Revista Super Interessante. Disponível em: https://super.abril.com.br/especiais/existe-alguma-coisa-maior-do-que-o-infinito/. Acesso em: 10 fev. 2022.

[16] How An Infinite Hotel Ran Out Of Room. **Canal Veritasium.** Disponível em: https://youtu.be/OxGsU8oIWjY. Acesso em: 18 mar. 2022