UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Construções geométricas: a beleza do passo a passo

Adriana Cristina Sacconi Pereira

Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

ICMC USP SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

Adriana Cristina Sacconi Pereira

Construções geométricas: a beleza do passo a passo

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestra em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientador: Prof. Dr. Wagner Vieira Leite Nunes

USP – São Carlos
Outubro de 2022

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

P436c

Pereira, Adriana Cristina Sacconi
Construções geométricas: A beleza do passo a passo / Adriana Cristina Sacconi Pereira; orientador Wagner Vieira Leite Nunes. -- São Carlos, 2022.
226 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2022.

1. Construções geométricas. 2. Geometria plana. 3. Resolução de exercícios. 4. Geometria. I. Nunes, Wagner Vieira Leite , orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Adriana Cristina Sacconi Pereira

Geometric constructions: The beauty of step by step

Dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP – in accordance with the requirements of the Professional Master's Program in Mathematics in National Network, for the degree of Master in Science. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Professional Master Degree Program in Mathematics in National Network

Advisor: Prof. Dr. Wagner Vieira Leite Nunes

USP – São Carlos
October 2022

Dedico este trabalho aos meus pais Leoclides e Marileide, e ainda ao meu esposo João, pelo amor, carinho, compreenssão e apoio que jamais me faltou. E a turma do PROFMAT - 2017, uma nova família de amigos que levarei para a vida toda.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pelo dom da vida e pela fé que Nele deposito.

Agradeço à minha família que sempre apoiou a realização deste sonho, meu pai Leoclides, minha mãe Marileide, minha irmã Andreza, minha sobrinha Sophia e de modo muito especial, a meu esposo João que carinhosamente compreendeu o tempo que muitas vezes deixei de estar presente para dedicar-me aos estudos e que também muito me auxiliou a entender esse Latex (risos).

Agradeço ao meu orientador Dr. Wagner Vieira Leite Nunes que me aceitou e acolheu como orientanda, tendo paciência, disposição, sendo amigo, conselheiro, professor, enfim, sendo essa pessoa maravilhosa que contribuiu para a elaboração deste trabalho.

Agradeço a todos os professores que sempre me incentivaram a ir em busca dos meus sonhos, que me apoiaram e me ensinaram da melhor forma que puderam. De forma especial a Profª M. Sc. Rita de Cássia Barison Racanicci dos Santos que se tornou uma amiga com o passar dos anos.

Agradeço aos professores Erica Filleti, Luiz Ladeira, Michela Tuchapesk, Paulo Dattori, Sérgio Zani pela paciência, dedicação conosco. E em especial aos professores Ires Dias e Hermano Ribeiro por todo tempo e carinho que dedicaram para que pudessemos chegar até aqui.

Agradeço aos meus colegas de turma que fizeram nossas sextas-feiras (e as vezes alguns sábados e feriados) mais leves e felizes. Em especial agradeço ao Carlos e ao Douglas pelas caronas e companhias nas viagens a São Carlos.

Enfim, agradeço a todos que me ajudaram de alguma forma a concluir este mestrado. Meu muito obrigado.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

"Por vezes sentimos que aquilo que fazemos não é senão uma gota de água no mar.
Mas o mar seria menor se lhe faltasse uma gota."
(Madre Teresa de Calcutá)

RESUMO

PEREIRA, A. C. S. **Construções geométricas: a beleza do passo a passo**. 2022. 229 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2022.

Este trabalho tem objetivo de fornecer um material de estudo estruturado com construções e justificativas dentro da resolução de exercícios. Disponibilizando um material para aqueles que gostam e se interessam por matemática. Este trabalho chama a atenção para a dificuldade que parte dos professores de matemática tem ao se deparar com exercícios de geometria plana partindo de triângulos e circunferências, a dificuldade é notar que podemos resolver tais exercícios utilizando apenas régua não graduada e compasso, não dependendo de números (medidas). Este trabalho vem ao encontro dessa deficiência para ser um material de auxílio a esses professores ou a qualquer pessoa que se interesse. O intuito é disponibilizar um conteúdo rico em demonstrações e justificativas.

Palavras-chave: Construções geométricas, Geometria plana, Resolução de exercícios, Material de estudo.

ABSTRACT

PEREIRA, A. C. S. **Geometric constructions: The beauty of step by step**. 2022. 229 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2022.

This work aims to provide a structured study material with constructions and justifications within the resolution of exercises. Providing material for those who like and are interested in mathematics. This work draws attention to the difficulty that part of the mathematics teachers have when they come across exercises of flat geometry starting from triangles and circles, the difficulty is to notice that we can solve such exercises using only graduated ruler and compass, not depending on numbers (measures). This work comes to meet this deficiency to be a material of assistance to these teachers or to anyone who is interested in. The intention is to provide content rich in demonstrations and justifications.

Keywords: Geometric constructions, Flat geometry, Exercise resolution, Study material.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

CAPÍTULO

1

INTRODUÇÃO

Grande parte dos currículos escolares não contemplam as construções geométricas e é notável que há uma grande defasagem no ensino da geometria, visto que os resultados de vestibulares e até mesmo do Exame Nacional de Qualificação (ENQ), em que as questões que abordam conteúdos de geometria são as que tem o menor índice de acertos. Esse foi o fator motivacional para a escolha do tema.

O autor (WAGNER, 2007) traz em seu livro Construções Geométricas um pouco de história:

> As construções com régua e compasso já aparecem no século V a.C., época dos pitagóricos, e tiveram enorme importância no desenvolvimento da Matemática grega. Na Grécia antiga, a palavra *número* era usada só para os inteiros e uma fração era considerada apenas uma razão entre números. Estes conceitos, naturalmente, causavam dificuldades nas medidas das grandezas. A noção de número real estava ainda muito longe de ser concebida, mas, na época de Euclides (século III a. C.) uma ideia nova apareceu. As grandezas, no lugar de serem associadas a números, passaram a ser associadas a segmentos de reta. Assim, o conjunto dos números continuava discreto e o das grandezas contínuas passou a ser tratado por métodos geométricos. Nasce então nesse período uma nova álgebra, completamente geométrica onde a palavra *resolver* era sinônimo de *construir*.

Em 2017, a (SBM, 2017) publicou um relatório digital que apresenta algumas reflexões sobre o PROFMAT, na citação abaixo podemos ver que há problemas com a escrita matemática, o que influencia diretamente o trabalho com a geometria.

> O percentual de desligamento do Profmat, no quadriênio 2013 a 2016, apresentou uma média de 21% , quando comparado com o total de discentes matriculados, considerando o ano base correspondente. O ENQ aparece como o maior motivo de desligamento dos discentes, com

> baixo percentual de desligamento por reprovação em disciplinas. [...] Em geral, os egressos entrevistados consideraram o ENQ como a maior dificuldade do Programa. A grande dificuldade encontrada reside no fato de que para o ENQ, por ser um exame discursivo, é necessário saber escrever a linguagem matemática e essa é uma das maiores deficiências de formação durante a graduação.

Em vista de toda essa dificuldade, como incentivar professores e alunos a utilizar mais régua e compasso para resolver problemas de Geometria Plana? Com um material de linguagem acessível e construções detalhadas, esta é a proposta deste trabalho.

O trabalho foi organizado da seguinte forma: no capítulo 2 apresentamos breve considerações históricas relacionadas com a Geometria. No capítulo 3 tratamos de algumas construções básicas do Desenho Geométrico. O capítulo 4 é dedicado a resolução de exemplos aplicando-se os conceitos básicos tratados no capítulo anterior. No capítulo 5 apresentamos as considerações finais. O apêndice A tratamos do Teorema de Tales e algumas aplicações.

Os pré-requisitos básicos para a compreensão deste trabalho compreendem a noção de ângulo, soma de ângulos, triângulos, circunferências. Além disso, ao longo deste trabalho, o símbolo π denota duas vezes um ângulo reto e assim, o símbolo $\frac{\pi}{2}$ denotará o ângulo reto.

CAPÍTULO

2

HISTÓRIA

A história da ciência e, em particular, a história da matemática, constitui um dos capítulos mais interessantes do conhecimento. Permite compreender a origem das ideias que deram forma à nossa cultura e observar também os aspectos humanos do seu desenvolvimento: enxergar os homens que criaram essas ideias e estudar as circunstâncias em que elas se desenvolveram. Assim a história é um valioso instrumento para o aprendizado da própria matemática.

Podemos entender o porquê de cada conceito ter sido introduzido nesta ciência e o fato dele ser algo natural em seu momento de criação. Isto permite também estabelecer conexões com a história, a filosofia e várias outras manifestações.

Conhecendo a história da matemática percebemos que as teorias que hoje aparecem acabadas e elegantes resultaram sempre de desafios que os matemáticos enfrentaram e que foram desenvolvidas com grande esforço, dedicação e, quase sempre, numa ordem bem diferente daquela em que são apresentadas após todo o processo de descoberta.

Com este trabalho queremos oferecer um pouco mais de conhecimento sobre geometria plana, em especial construções geométricas, baseado numa bibliografia cientificamente séria, tão atualizada quanto possível, e redigido de uma forma simples e direta, facilmente acessível ao leitor.

Os livros relatam que desde as primeiras civilizações, a humanidade usava as imagens como meio de comunicação. Temos como exemplo a Arte Rupestre e vários são os tipos de imagens. E na matemática não é diferente, a história nos conta que a representação geométrica precedeu a algébrica. Mas em que se constitui a Geometria?

A Geometria foi desenvolvida pelo homem através da necessidade de medir espaços, daí a palavra Geometria vem do grego que significa medir a terra (geo = terra e metria = medida). A partir desta, temos os desenhos e as construções que são de suma importância para a resolução, construção e demonstração de situações que vão desde o dia-a-dia a complexos exercícios teóricos.

2.0.1 Euclides de Alexandria

Euclides nasceu por volta de 300 a. C. em Alexandria e é o mais famoso geômetra conhecido, e foi por sua geometria que praticamente todos já estudaram ou ainda estudam. Euclides foi professor, matemático platônico e escritor grego, muitas vezes referido como o "Pai da Geometria". Mas nada se sabe sobre sua vida particular. O que é conhecido é que ele abriu uma escola em sua cidade e escreveu pelo menos dois livros, um livro que falava sobre cônicas, e o famoso, Os Elementos, que é uma série com 13 rolos de pergaminhos, ambos se perderam com o tempo.

Euclides se via como o organizador e sistematizador da geometria conforme compreendida pelos gregos, e seu objetivo era criar uma matemática livre de suposições, não reconhecidas, baseadas apenas na intuição. Assim, montou 23 definições e 10 postulados (5 geométricos e 5 adicionais). Com estas regras Euclides demonstrou 465 teoremas, praticamente todo o conhecimento geométrico de sua época.

Dentre as informações utilizadas por Euclides, destacam–se:

i. Duas coisas que são iguais a uma terceira, são também iguais entre si;

ii. Se duas coisas iguais são adicionadas a outras coisas iguais, os totais são iguais;

iii. Se coisas iguais forem subtraídas de coisas iguais, os restos serão iguais;

iv. As coisas que coincidem uma com a outra são iguais entre si;

v. O todo é maior que a parte.

Entre seus postulados, utilizam – se os seguintes:

I) Dados quaisquer dois pontos, pode ser traçada uma linha tendo estes pontos como suas extremidades;

II) Qualquer linha pode ser prolongada indefinidamente em qualquer direção;

III) Dado qualquer ponto, pode ser desenhado um círculo com qualquer raio, com aquele ponto no centro;

IV) Todos os ângulos retos são iguais;

V) (Também conhecido como Postulado das Paralelas) Dados uma linha que cruze duas linhas retas de modo que a soma dos ângulos internos do mesmo lado seja menor do que dois ângulos retos, então as duas linhas, quando prolongadas, acabarão por se encontrar (naquele lado da linha). Que será melhor definido no item (3.5.3).

CAPÍTULO

3

ALGUMAS CONSTRUÇÕES ELEMENTARES

Ao longo deste capítulo vamos elencar algumas construções necessárias para a resolução de exercícios que tratam de construções geométricas utilizando régua não graduada e compasso. Mas, antes vamos considerar algumas observações importantes. Ponto e reta são elementos importantes nas construções geométricas, esses elementos não possuem definições, são noções primitivas da Geometria, mas precisam existir para dar base para as definições geométricas. Embora não seja possível definir esses objetos, é possível discutir suas características, propriedades e suas utilidades para a Geometria. Vejamos como o site Brasil Escola (PONTO..., 2019) relata sobre ponto e reta:

> O ponto não possui forma nem dimensão. Isso significa que o ponto é um objeto adimensional. Um dos usos mais importantes do ponto refere-se à localização geográfica. Os pontos são os objetos que melhor representam as localizações porque oferecem precisão. [...] As retas, na geometria plana, são conjuntos de pontos que não fazem curvas. Elas são infinitas para os dois sentidos. Como esses pontos não estão no mesmo lugar, é possível medir a distância entre eles. Entretanto, como os pontos continuam não tendo dimensão ou forma, não é possível medir sua largura. Sendo assim, dizemos que a reta possui apenas uma dimensão ou que é unidimensional.

Algumas construções simples de figuras geométricas que devemos considerar:

- Traçar uma reta conhecendo dois de seus pontos distintos;
- Traçar uma circunferência a partir do seu centro e do seu raio.

Para uma boa interpretação considere:

- AB indica o comprimento de um segmento de reta com extremos nos pontos A e B.
- $\overline{AB}$ indica o segmento de reta cujos extremos são os pontos A e B.

- Quando tratarmos de comprimento de um segmento de reta usaremos a igualdade e quando tratarmos apenas de segmentos de reta usaremos a congruência.

O autor (WAGNER, 2009) em sua obra Uma Introdução às Construções Geométricas diz:

> Nas construções geométricas são permitidos apenas a régua (não graduada) e o compasso. A régua serve apenas para desenhar uma reta passando por dois pontos distintos dados e o compasso serve apenas para desenhar uma circunferência cujo o raio é dado por um segmento e cujo centro é um ponto dado. Estes instrumentos não podem ser utilizados de nenhuma outra maneira.

Outra definição importante que devemos ressaltar é a de lugar geométrico, ainda na obra de (WAGNER, 2009) ele relata:

> Devemos deixar claro que quando dizemos que uma figura F é o *lugar geométrico dos pontos que possuem a propriedade p*, queremos dizer que todo ponto de F possui a propriedade p e nenhum ponto fora de F possui a propriedade.

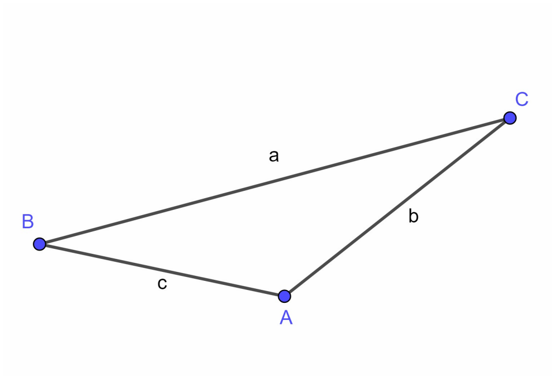
Podemos citar como exemplos de lugares geométricos a circunferência, a mediatriz, a bissetriz, o circuncentro dentre outros que serão abordados detalhadamente nas próximas sessões.

3.1 Triângulos

Definição 1. No plano, o triângulo é a figura geométrica limitada por três segmentos de reta que concorrem, dois a dois, em três pontos não colineares, formando os três lados e os três ângulos internos que somam π.

Sendo os pontos citados anteriormente A, B e C, diremos que esses pontos são os vértices do triângulo $\triangle ABC$.

Figura 1 – Triângulo ABC



Um triângulo pode se classificado quanto às medidas de seus lados ou quanto as medidas de seus ângulos.

Vejamos algumas definições:

Definição 2. Triângulo equilátero: é todo triângulo em que os três lados têm medidas iguais, logo os seus ângulos internos também são congruentes.

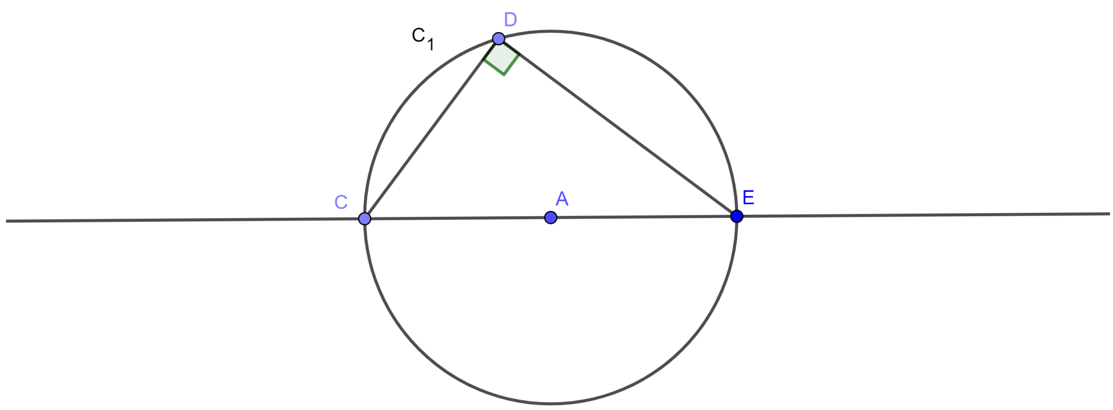
Definição 3. Triângulo isósceles: é todo triângulo que possui dois lados com medidas iguais[1].

Definição 4. Triângulo retângulo: possui um ângulo interno reto, ou seja, medindo $\dfrac{\pi}{2}$.

Proposição 1. Um triângulo pode ser inscrito em uma semicircunferência se, e somente se, é retângulo.

Demonstração. Dado um triângulo $\triangle CDE$ suponha que ele está inscrito em uma semicircunferência, ou seja, que um de seus lados é um diâmetro dessa circunferência.

Figura 2 – Triângulo inscrito em uma semicircunferência



Então o ângulo inscrito $\widehat{CDE}$ corresponde ao ângulo central $\widehat{CAE}$, que mede π. Pelo Teorema 1, a medida do ângulo inscrito $\widehat{CDE}$ é $\frac{\pi}{2}$, ou seja, $\widehat{CDE}$ é reto e o triângulo $\triangle CDE$ é retângulo.

Reciprocamente, seja CDE um triângulo retângulo em D e seja C_1 a circunferência que contém os vértices C, D, E desse triângulo. Como $C\hat{D}E$ é um ângulo reto, o ângulo central correspondente $\widehat{CAE}$ mede dois ângulos retos. Logo o centro A da circunferência pertence ao lado $\overline{CE}$, isto é, $\overline{CE}$ é um diâmetro da circunferência C_1 e o $\triangle CDE$ está inscrito em uma semicircunferência, completando a demonstração.

□

[1] Note que o triângulo equilátero é um caso particular do triângulo isósceles.

3.2 Casos de congruências de triângulos

Com os resultados abaixo, precisaremos verificar apenas três congruências[2], convenientemente escolhidas, para decidir se dois triângulos são ou não congruentes:

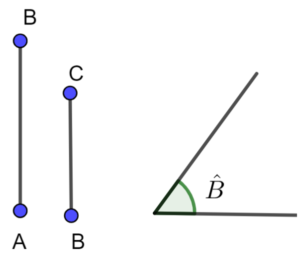
1. Primeiro caso (postulado[3]) - LAL (Lado, Ângulo, Lado) : se dois triângulos tem ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido entre esse lados, então os triângulos são congruentes (isto é, o lado restante e os outros dois ângulos também são ordenadamente congruentes).

   Realizaremos uma construção geométrica, na forma de problema, que nos permitirá perceber que escolhendo diversas posições no plano para os elementos elencados abaixo, teremos a construção de diversos triângulos $\triangle ABC$, que apenas estarão posicionados de maneira diferente do anterior no plano. Para ilustrar o postulado descrito façamos o problema abaixo:

   Construa com régua e compasso o triângulo $\triangle ABC$, dados geometricamente os seguintes elementos: segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, e o ângulo $\widehat{B}$.

   Construção:

   1.1. Observe a figura abaixo que ilustra os dados do enunciado:

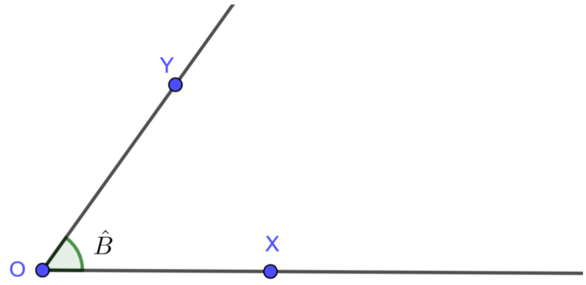
   

   1.2. Denote dois pontos quaisquer para traçarmos uma semirreta, digamos a semirreta $\overrightarrow{OX}$.

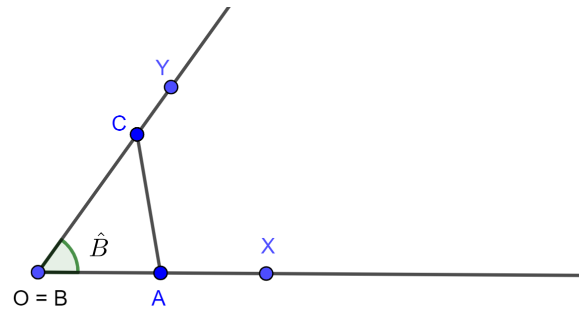
   1.3. Transporte o ângulo $\widehat{B}$ (como veremos na sessão 3.5.8) dado sobre a semirreta $\overrightarrow{OX}$ de modo que o ponto O seja o vértice do ângulo, determinando uma segunda semirreta, digamos $\overrightarrow{OY}$ com origem também no ponto O.

[2] Uma relação de congruência é uma relação de equivalência, que é válida para segmentos e ângulos.
[3] Observe que o primeiro caso é um postulado, e não requer demonstração. No entanto, os demais casos são teoremas e precisam ser demonstrados.



1.4. Transporte os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ (como veremos no exemplo 2), sobre as semirretas $\overrightarrow{OX}$ e $\overrightarrow{OY}$ e por fim feche o triângulo ligando os vértices remanescentes, formando assim, o triângulo $\triangle ABC$.

Figura 3 – Caso de Congruêngia LAL



2. Segundo caso (teorema) - ALA (Ângulo, Lado, Ângulo) : se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado e os dois ângulos a ele adjacentes, então esses triângulos são congruentes.

3. Terceiro caso (teorema): - LLL (Lado, Lado, Lado) se dois triângulos têm ordenadamente congruentes os três lados então esses triângulos são congruentes.

4. Quarto caso (teorema) - LAA (Lado, Ângulo, Ângulo): se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado, então esses triângulos são congruentes.

5. Quinto caso - Caso especial de congruência de triângulos retângulos (teorema): se dois triângulos retângulos têm ordenadamente congruentes um cateto e a hipotenusa, então esses triângulos são congruentes.

3.3 Casos de semelhança de triângulos

Dois triângulos são semelhantes quando têm os ângulos correspondentes congruentes e os lados homólogos (os dois lados opostos aos ângulos congruentes) proporcionais.

Vejamos os casos de semelhança:

1. Primeiro caso: AA (Ângulo, Ângulo): Se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, então eles são semelhantes.

2. Segundo caso: LLL (Lado, Lado, Lado): Se dois triângulos possuem os seus lados homólogos proporcionais, então eles são semelhantes.

3. Terceiro caso: LAL (Lado, Ângulo, Lado): Se dois lados de um triângulos são proporcionais aos lados homólogos de outro triângulo e se o ângulo entre esses lados for congruente ao correspondente do outro triângulo, então os triângulos são semelhantes.

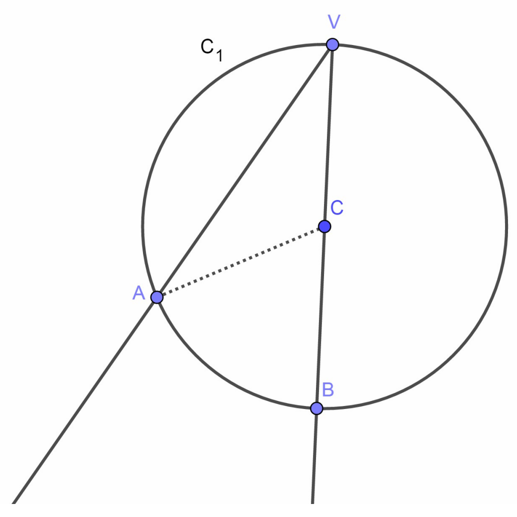
3.4 Alguns resultados relevantes

Teorema 1. Se em uma circunferêcia C_1, um ângulo central $\widehat{ACB}$ e um ângulo inscrito $\widehat{AVB}$ determinam o mesmo arco, então o ângulo $\widehat{ACB} = 2 \cdot \widehat{AVB}$.

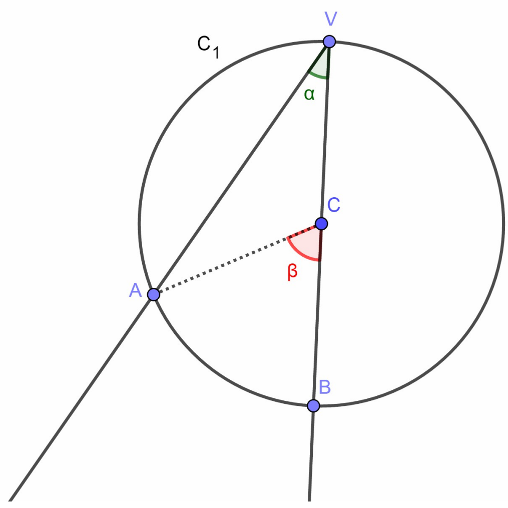
Observação 1. Se dois ângulos inscritos determinam o mesmo arco na circunferência C_1, então eles são congruentes.

Demonstração. Sejam A, B e V pontos distintos de uma circunferência C_1 de centro no ponto C. Considere três casos:

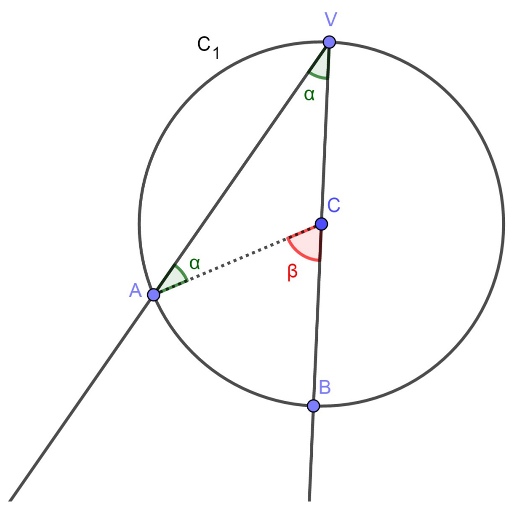
1. O centro C está sobre um lado do ângulo inscrito $\widehat{AVB}$.



Sejam α e β as medidas dos ângulos $\widehat{AVB}$ e $\widehat{ACB}$, respectivamente, e suponha que C seja um ponto do segmento $\overline{VB}$.

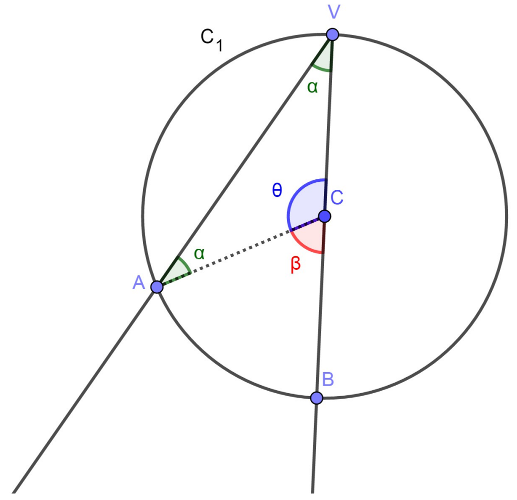


Note que os segmentos $\overline{CA}$ e $\overline{CV}$ são raios da circunferência C_1, logo o triângulo $\triangle CVA$ é isósceles (como veremos na definição 3) e, portanto, os ângulos $\widehat{CAV}$ e $\widehat{CVA}$ são congruentes.



Observe que :

- Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é π, então a medida θ do ângulo $\widehat{ACV}$ é $\theta = \pi - 2\alpha$.

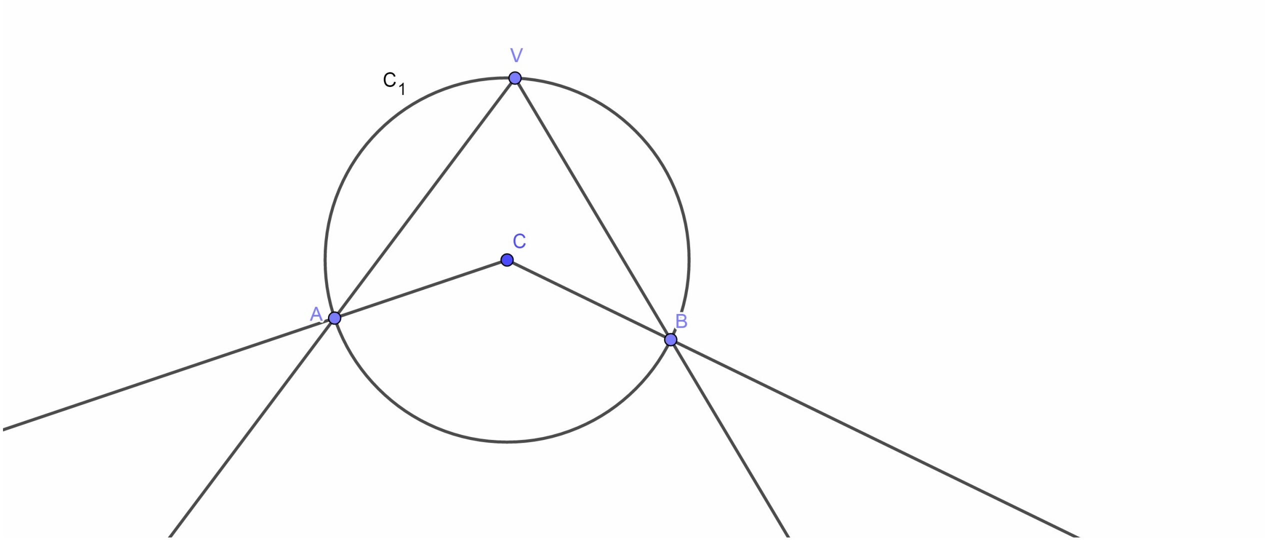


- Por outro lado, os pontos V, C e B são colineares, logo $\theta + \beta = \pi$, ou seja, $\theta = \pi - \beta$.

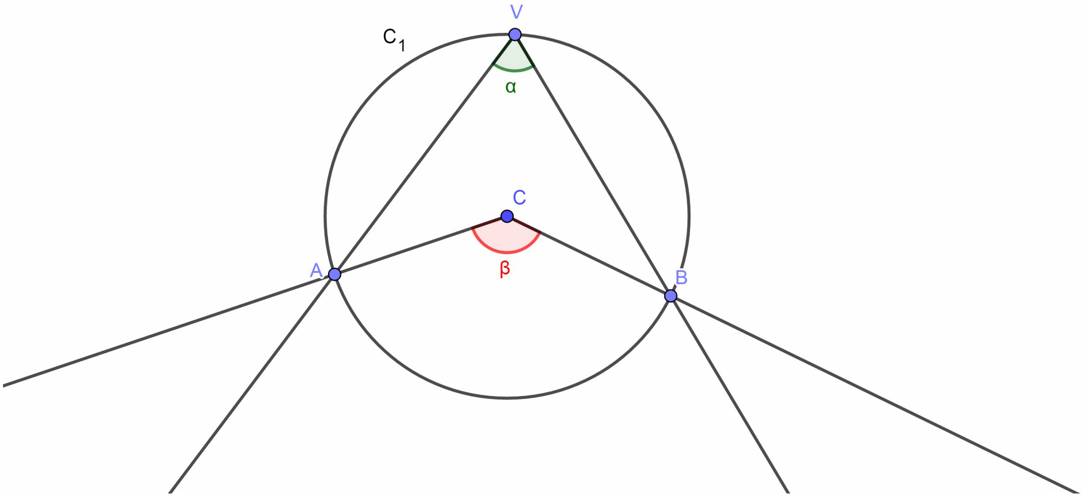
  Assim:

$$\pi - 2\alpha = \pi - \beta$$
$$2\alpha = \beta$$
$$\alpha = \frac{\beta}{2}$$

2. O centro C está no interior do ângulo inscrito $\widehat{AVB}$.

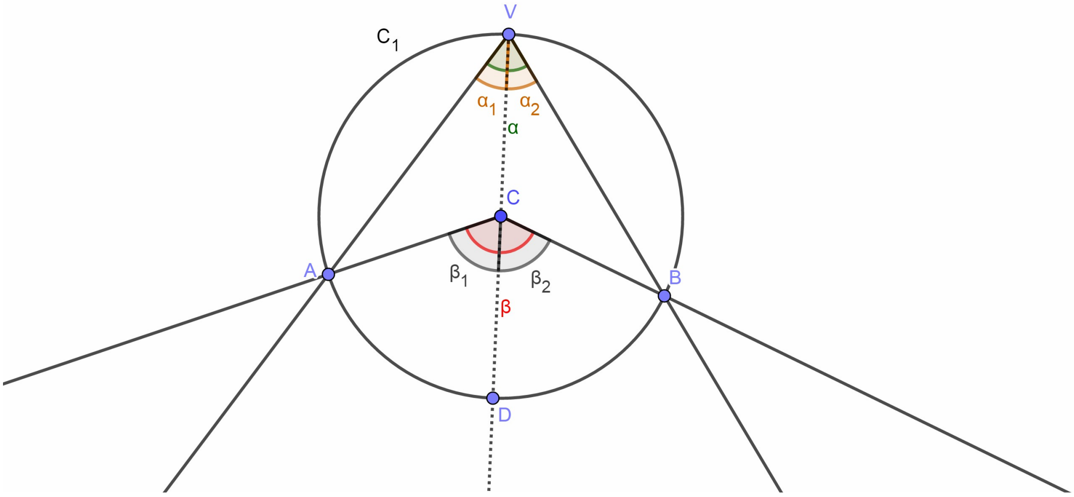


Sejam α e β as medidas dos ângulos $\widehat{AVB}$ e $\widehat{ACB}$, respectivamente, e suponha que C seja um ponto interior do ângulo $\widehat{AVB}$.



Seja, também, a semirreta $\overrightarrow{VC}$ cuja intersecção com a circunferência C_1 denominaremos ponto D. Observe que a semirreta $\overrightarrow{VC}$ divide cada um dos ângulos $\widehat{AVB}$ e $\widehat{ACB}$ em dois outros, assim temos:

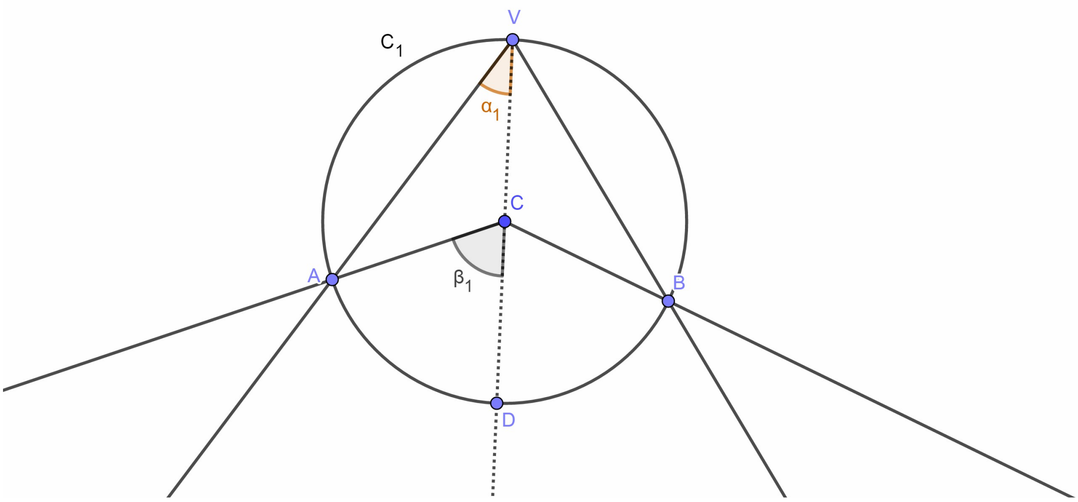
- (i) Os ângulos $\widehat{AVD}$ e $\widehat{DVB}$ correspondem, cujas medidas são α_1 e α_2 satisfazem $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$.
- (ii) Os ângulos $\widehat{ACD}$ e $\widehat{DCB}$ correspondem, cujas medidas são β_1 e β_2 satisfazem $\beta_1 + \beta_2 = \beta$.



Observe que o ângulo inscrito $\widehat{AVD}$ e o respectivo ângulo central $\widehat{ACD}$ estão nas condições do caso 1.

- O centro C está sobre um lado do ângulo inscrito.

(iii) Portanto, a medida do ângulo inscrito é a metade da medida do ângulo central, ou seja, $\alpha_1 = \frac{\beta_1}{2}$.



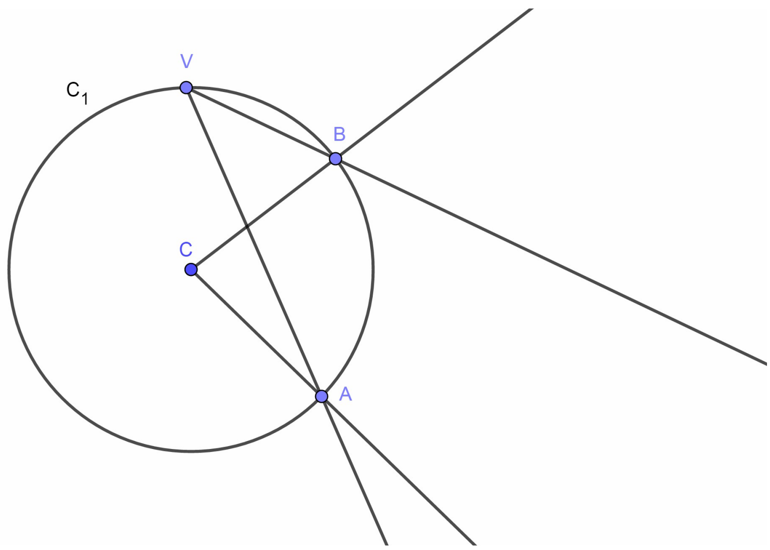
(iv) Analogamente o ângulo inscrito $\widehat{DVB}$ e o respectivo ângulo central $\widehat{DCB}$ também estão nas condições do caso 1, logo $\alpha_2 = \frac{\beta_2}{2}$.

Então, por (i), (ii), (iii) e (iv) temos que:

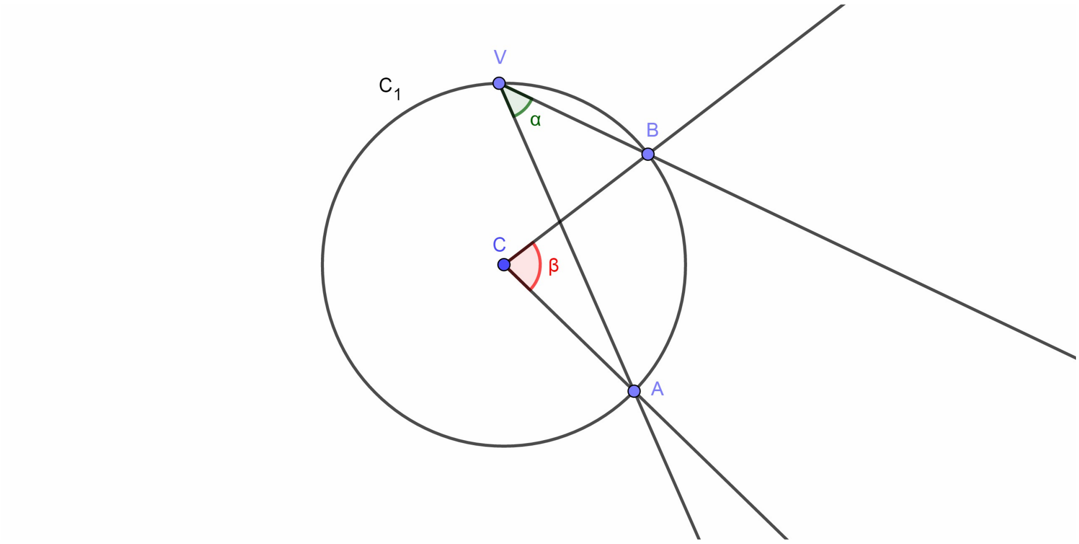
$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = \dfrac{\beta_1}{2} + \dfrac{\beta_2}{2} = \frac{\beta_1+\beta_2}{2} = \frac{\beta}{2}$

e portanto $\alpha = \frac{\beta}{2}$.

3. O centro C está no exterior do ângulo inscrito $\widehat{AVB}$.

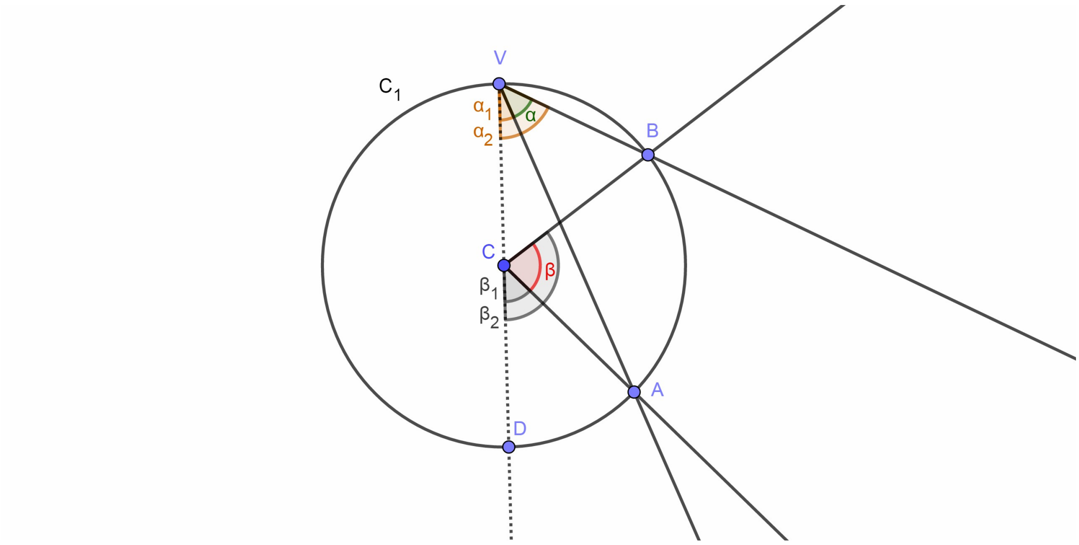


Sejam α e β as medidas dos ângulos $\widehat{AVB}$ e $\widehat{ACB}$, respetivamente, e suponha que C seja um ponto exterior do ângulo $\widehat{AVB}$.



Considere, também, a semirreta $\overrightarrow{VC}$ cuja interseção com a circunferência C_1 denominaremos ponto D. Note que a semirreta $\overrightarrow{VC}$ nos apresenta quatro novos ângulos, $\widehat{DVA}$, $\widehat{DVB}$, $\widehat{DCA}$ e $\widehat{DCB}$, assim temos que:

- (i) Os ângulos $\widehat{DVA}$ e $\widehat{DVB}$ correspondem, cujas medidas são α_1 e α_2 então $\alpha_2 - \alpha_1 = \alpha$.
- (ii) Os ângulos $\widehat{DCA}$ e $\widehat{DCB}$ correspondem, cujas medidas são β_1 e β_2 então $\beta_2 - \beta_1 = \beta$.

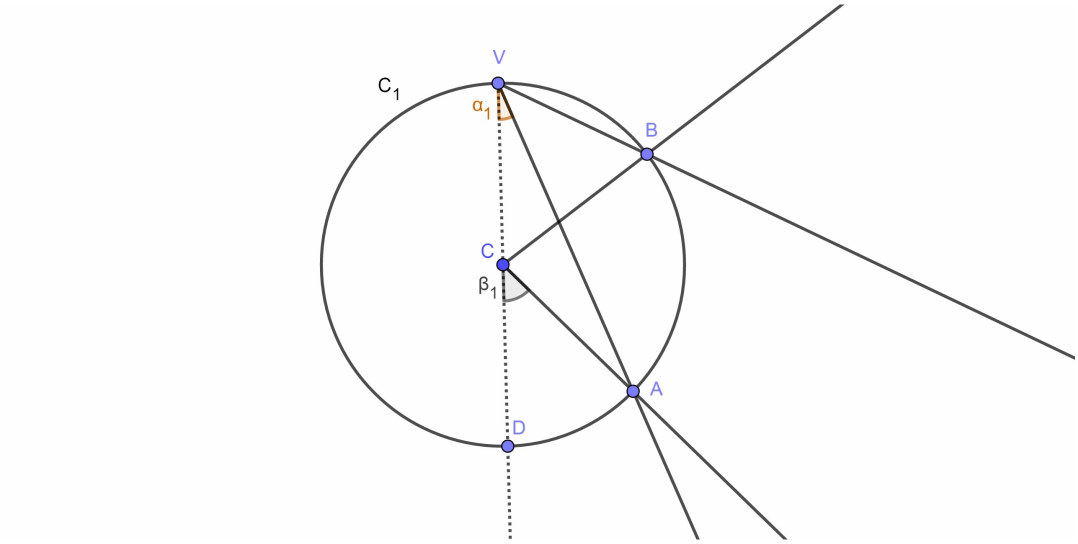


Observe que o ângulo inscrito $\widehat{DVA}$ e o ângulo central $\widehat{DCA}$ estão nas condições do caso 1.

- O centro C está sobre um lado do ângulo inscrito.

(iii) Portanto, a medida do ângulo inscrito é a metade da medida do ângulo central, ou seja, $\alpha_1 = \frac{\beta_1}{2}$.

Figura 4 – Teorema 1: Ângulo central



(iv) Analogamente o ângulo inscrito $\widehat{DVB}$ e o respectivo ângulo central $\widehat{DCB}$ também estão nas condições do caso 1, logo $\alpha_2 = \frac{\beta_2}{2}$.

Então, por (i), (ii), (iii) e (iv) temos que:

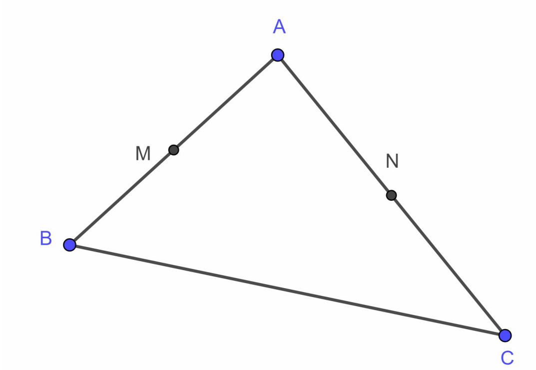
$\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = \dfrac{\beta_2}{2} - \dfrac{\beta_1}{2} = \frac{\beta_2 - \beta_1}{2} = \frac{\beta}{2}$

e portanto $\alpha = \frac{\beta}{2}$, como finalmente queríamos demonstrar.

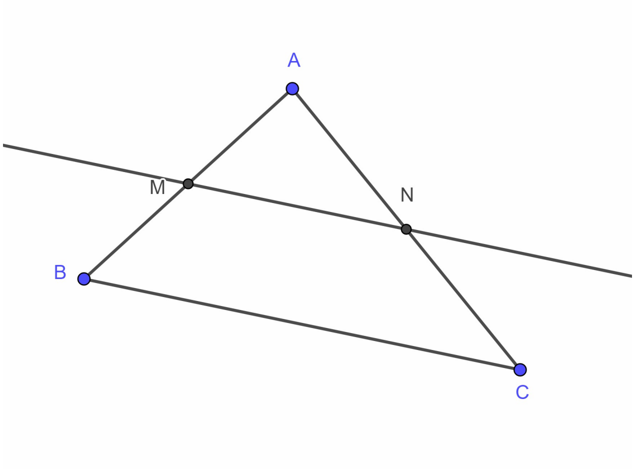
□

Teorema 2. Teorema da base média: O segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado, e sua medida é igual a metade da medida do terceiro lado.

Demonstração. Dado um $\triangle ABC$ qualquer, sejam M o ponto médio do lado $\overline{AB}$ e N o ponto médio de $\overline{AC}$.



Trace uma reta pelos pontos M e N.



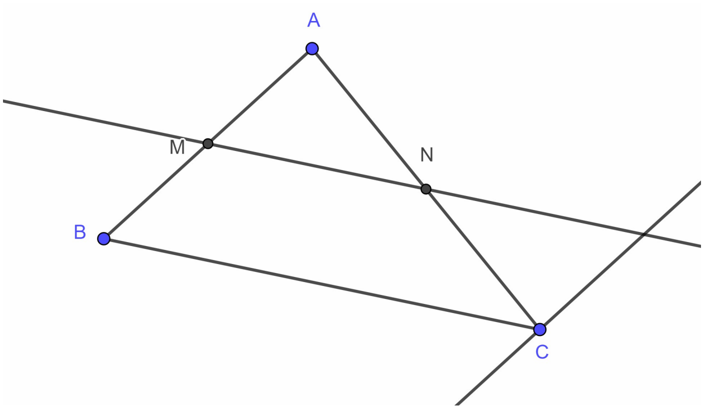
Hipótese:

$$\begin{cases} \overline{AM} \equiv \overline{MB} \\ \overline{AN} \equiv \overline{NC} \end{cases}$$

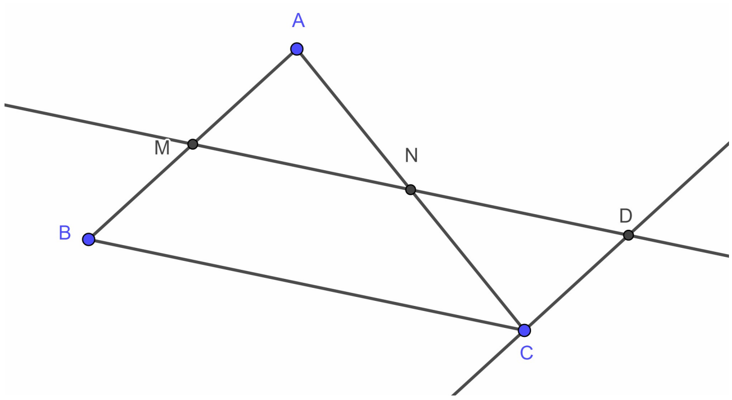
Tese:

$$\begin{cases} \overline{MN} \parallel \overline{BC} \\ \overline{MN} \equiv \dfrac{1}{2}\overline{BC} \end{cases}$$

Construa uma reta paralela (como veremos na construção 1.) ao segmento $\overline{AB}$ pelo ponto C.

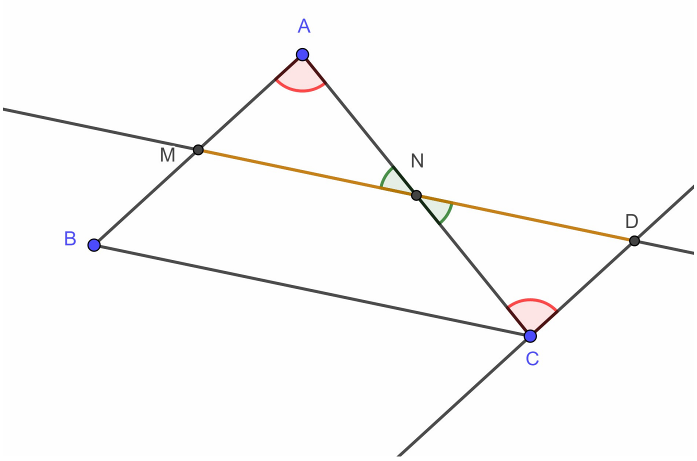


Denote por D o ponto de intersecção entre a reta que passa pelos pontos M e N e a reta paralela a $\overline{AB}$ que passa pelo ponto C.



Note que os $\triangle ANM$ e $\triangle CND$ são congruentes pelo caso LAA[4].

Figura 5 – Teorema da base média



$$\begin{cases} \overline{MN} \equiv \overline{ND} \\ \widehat{N} \equiv \widehat{N} \\ \widehat{A} \equiv \widehat{C} \end{cases}$$

Consequentemente temos $\overline{CD} \equiv \overline{AM} \equiv \overline{MB}$. Como sabemos que $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ e $\overline{MB} \equiv \overline{CD}$, segue que $BCDM$ é um paralelogramo [5], logo $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$.

Ainda da semelhança de triângulos, temos $\overline{MN} \equiv \overline{ND}$ e, como $\overline{MD} \equiv \overline{BC}$, temos $\overline{MN} \equiv \frac{1}{2}\overline{BC}$, como queríamos demonstrar.

$\square$

3.5 Algumas construções

Inicialmente vamos estabelecer algumas definições importantes quanto a alguns elementos que usaremos nas construções geométricas.

Definição 5. Denominamos circunferência o lugar geométrico dos pontos do plano que estão a uma distância r, chamada raio, de um ponto fixo C, chamado centro.

4 Veja o caso de congruência LAA em 4.

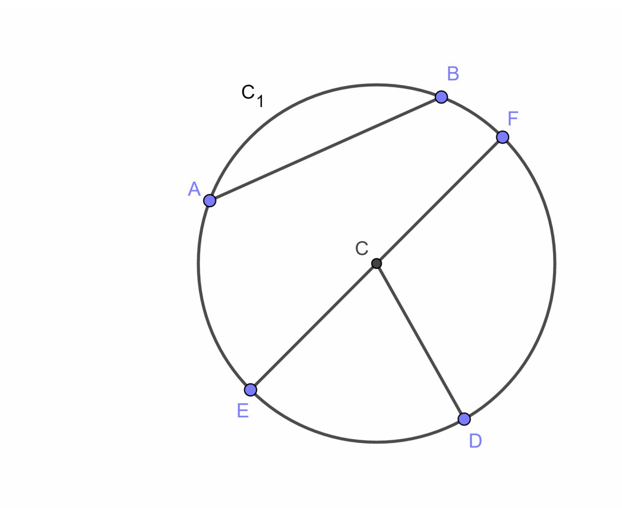
5 Um quadrilátero convexo é um paralelogramo se possuir lados opostos paralelos.

Em relação à circunferência existem alguns elementos e propriedades que no decorrer do texto serão mencionados, vejamos:

- corda de uma circunferência é o segmento que une dois pontos da mesma.
- diâmetro da circunferência é o segmento que intercepta o centro e une dois de seus pontos.
- a distância do centro a qualquer ponto da circunferência chama-se raio.
- o diâmetro é o dobro do raio.

Na imagem a seguir temos:

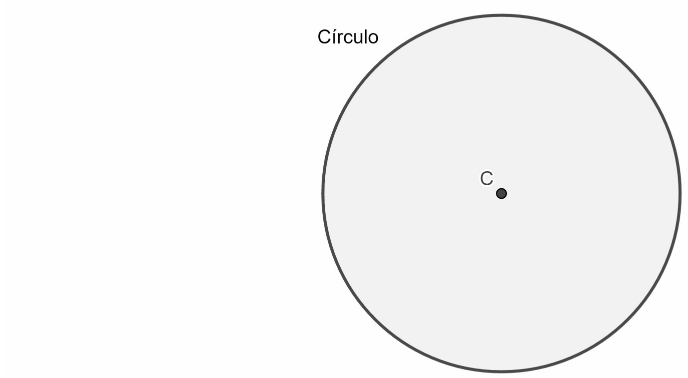
Figura 6 – Elementos da circunferência



- C_1 é a circunferência.
- o ponto C é o centro de C_1.
- $\overline{AB}$ é uma corda de C_1.
- $\overline{CD}$ é um raio de C_1.
- $\overline{EF}$ é um diâmetro de C_1.

Definição 6. Chama-se círculo de raio r a região do plano delimitada por uma circunferência de raio r.

Figura 7 – Círculo

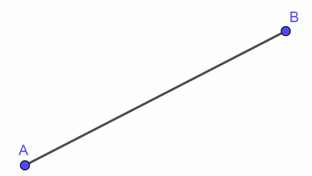


3.5.1 Ponto médio de um segmento

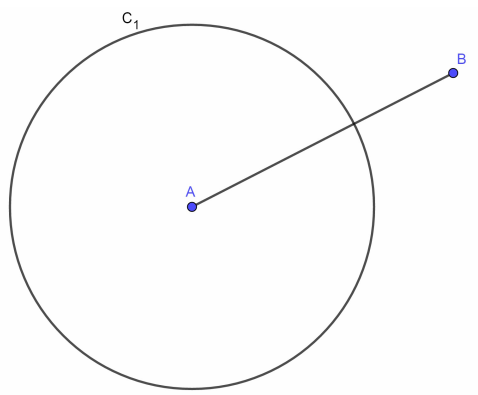
Definição 7. Podemos definir o ponto médio como o ponto que divide o segmento de reta, originando dois novos segmentos congruentes.

Exemplo 1. Construa o ponto médio, denominado ponto M, de um segmento $\overline{AB}$ dado.

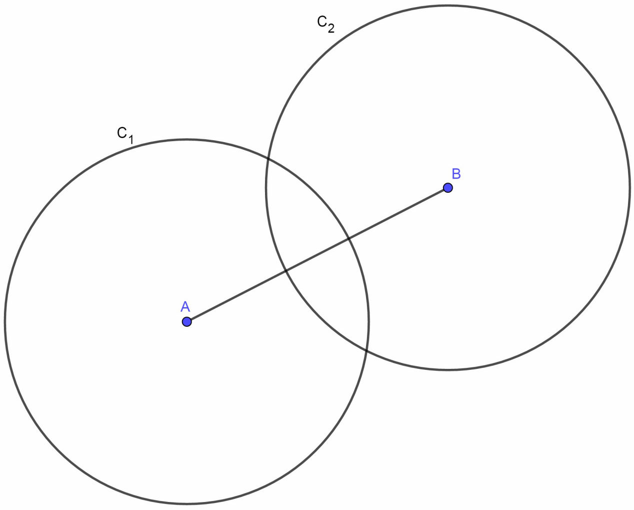
1. Considere o segmento $\overline{AB}$ abaixo:



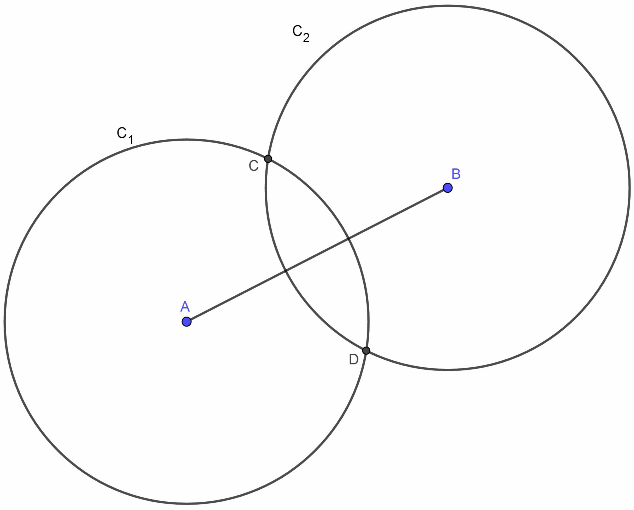
2. Construa a circunferência C_1 com centro no ponto A e raio maior que a metade da distância do ponto A ao ponto B, ou seja, metade do comprimento do segmento $\overline{AB}$.



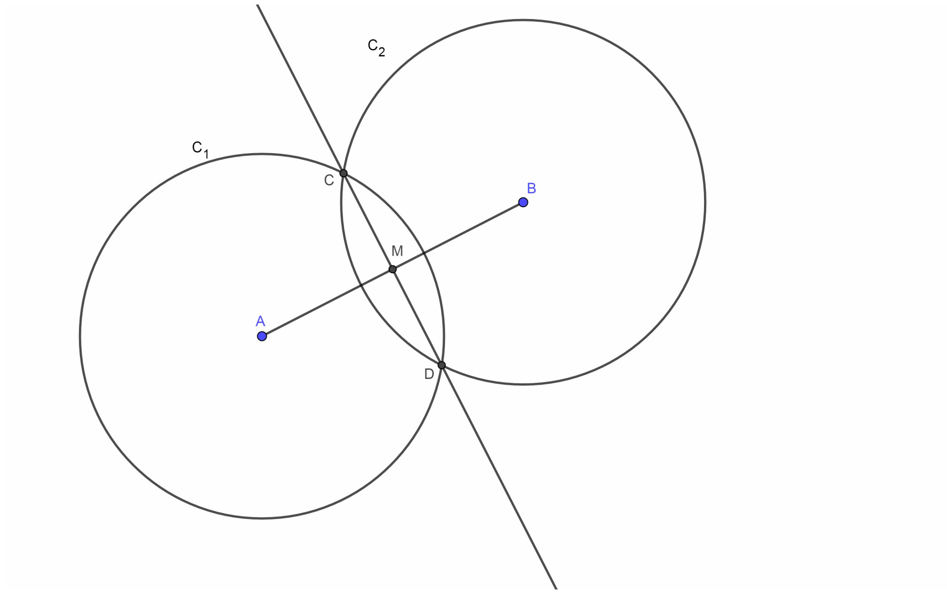
3. Analogamente desenhe a circunferência C_2 com centro no ponto B e mesmo raio de C_1.



4. Denote os pontos de intersecção entre as circunferências C_1 e C_2 por pontos C e D.

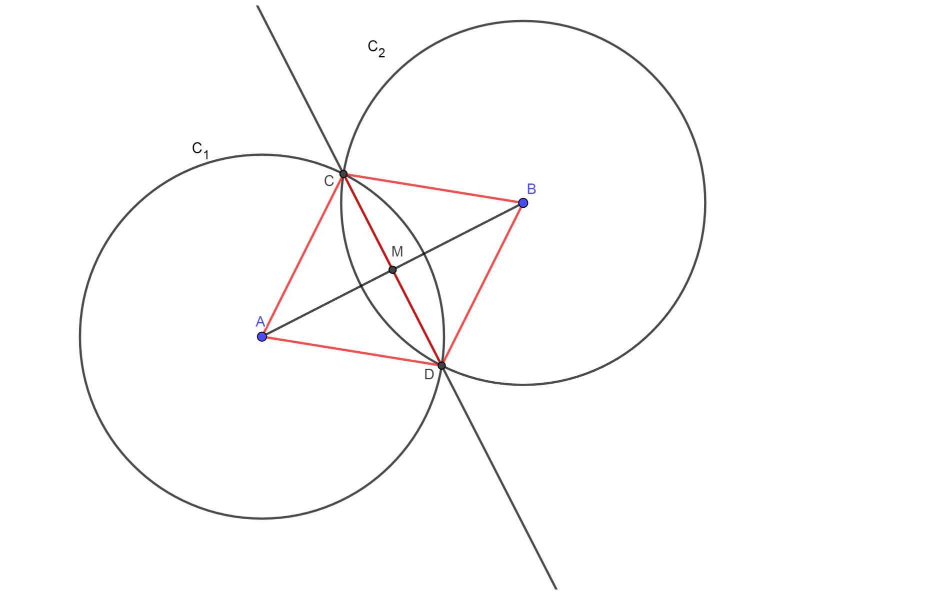


5. Agora basta traçar a reta $\overleftrightarrow{CD}$ e marcar o ponto de intersecção desta com o segmento $\overline{AB}$, logo este será o ponto médio desejado, ou seja, o ponto M.



Verificação de que a construção acima produz, de fato, o ponto médio do segmento $\overline{AB}$. Observe:

Figura 8 – Ponto médio de um segmento



Temos:

$\triangle ACD \equiv \triangle BCD$ pelo caso de congruência LLL[6].

Pois:

· $\overline{AC} \equiv \overline{BC}$ são raios das circunferências C_1 e C_2, respectivamente, que foram construídas com o mesmo raio.

· $\overline{AD} \equiv \overline{BD}$ são raios das circunferências C_1 e C_2, respectivamente, que foram construídas com o mesmo raio.

· $\overline{CD}$ é o lado comum dos $\triangle ACD \equiv \triangle BCD$.

[6] Veja o caso de congruência LLL em (3).

Em resultado desta congruência temos $\widehat{ACM} \equiv \widehat{BCM}$.

Logo
$\triangle ACM \equiv \triangle BCM$ pelo caso de congruência LAL[7].
Pois:
$\cdot$ $\overline{AC} \equiv \overline{BC}$ são raios das circunferências C_1 e C_2, respectivamente, que foram construídas com o mesmo raio.
$\cdot$ $\widehat{ACM} \equiv \widehat{BCM}$
$\cdot$ $\overline{CM}$ é o lado comum dos $\triangle ACM \equiv \triangle BCM$.

Portanto $\overline{AM} \equiv \overline{BM}$, completando a verificação.

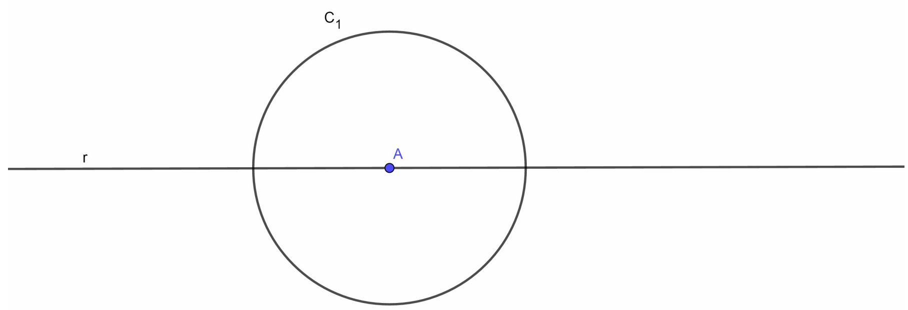
3.5.2 Perpendiculares

Construção 1: Construir, por um ponto dado, uma reta perpendicular a uma reta dada. O ponto em questão pode ou não pertencer à reta dada.

1. Considere uma reta r e um ponto A que pertença a mesma (ver figura abaixo):

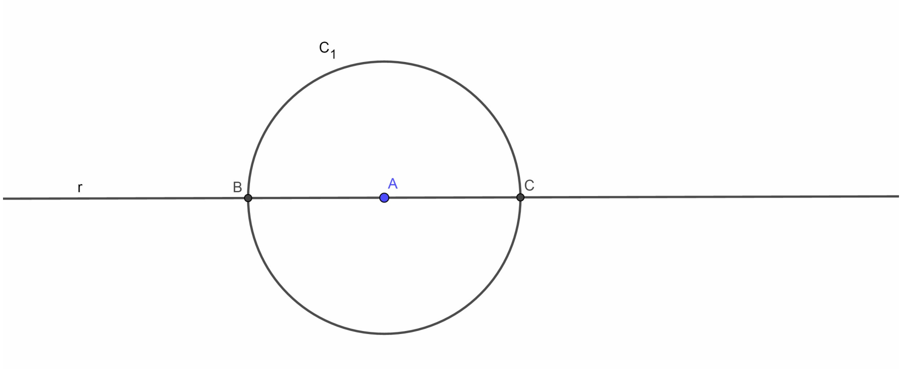
Façamos:

1.1. Colocar ponta seca do compasso (entenda como ponta seca, a ponta que não contém o grafite) no ponto A e com uma abertura qualquer construir uma circunferência C_1:

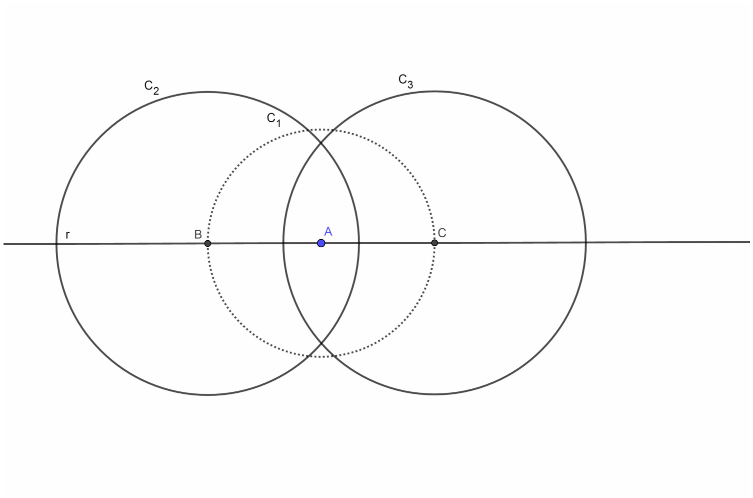


1.2. Denotar os pontos de intersecção entre a circunferência C_1 e a reta r, por ponto B e ponto C.

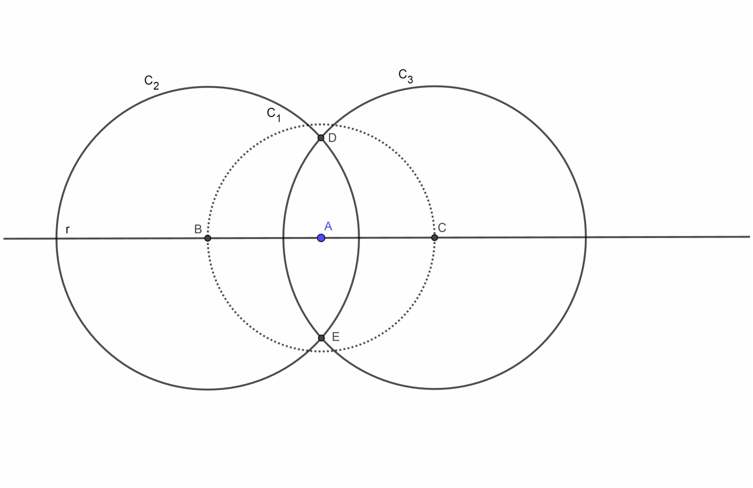
[7] Veja o caso de congruência LAL em (1).



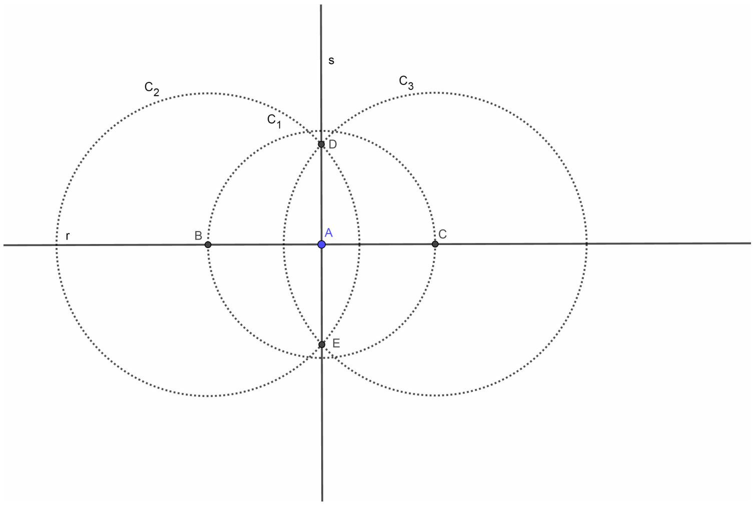
1.3. Colocar ponta seca do compasso no ponto B e com uma abertura maior que o segmento $\overline{BA}$ construa uma circunferência C_2, fazer o mesmo para o ponto C e construa a circunferência C_3.



1.4. Em seguida denote os pontos de intersecção D e E entre as circunferências C_2 e C_3.

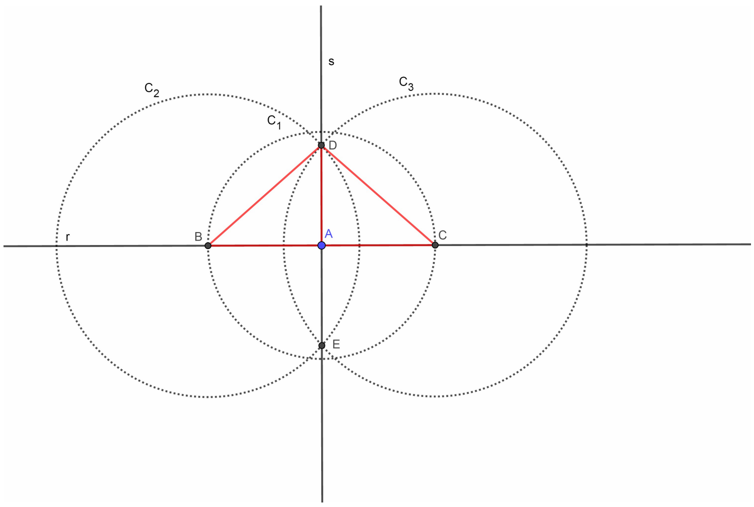


1.5. Traçar a reta s que passa pelos pontos D e E. Esta é a reta perpendicular a reta r, desejada, passando pelo ponto A.



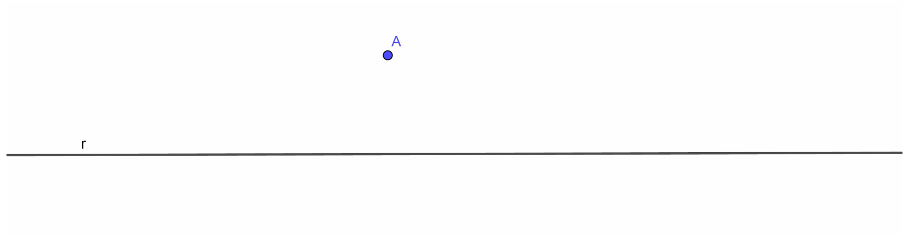
Verificação de que a construção acima produz, de fato, uma reta perpendicular à reta r pelo ponto A.
Observe:

Figura 9 – Reta perpendicular: caso 1

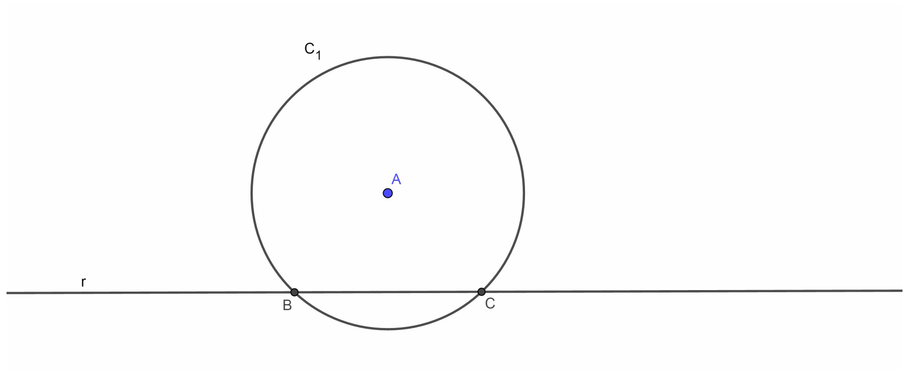


Temos:
$\triangle ADC \equiv \triangle ADB$ pelo caso de congruência LLL.
Pois:
· $\overline{BD} \equiv \overline{CD}$ são raios das circunferências C_3 e C_2, respectivamente, que foram construídas com o mesmo raio.
· $\overline{AD}$ é o lado comum dos $\triangle ADC$ e $\triangle ADB$.
· $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$ por construção, pois são raios da mesma circunferência.
Então os ângulos internos correspondentes dos triângulos em questão são congruentes.
Em particular os ângulos $\widehat{BAD}$ e $\widehat{CAD}$ são congruentes, pois são ângulos suplementares, logo cada um deles mede $\frac{\pi}{2}$.

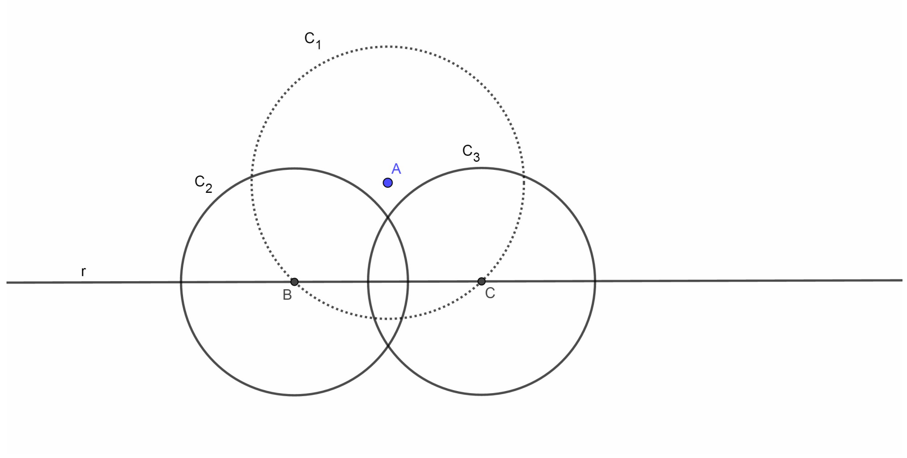
2. Considere uma reta r e um ponto A que não pertença a mesma (ver figura abaixo):



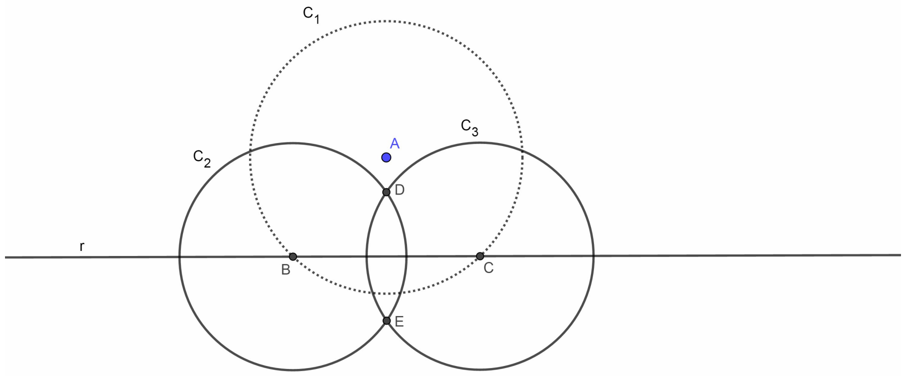
2.1. Colocar ponta seca do compasso no ponto A e com uma abertura qualquer e construir uma circunferência C_1 intersectando a reta r em dois pontos distintos, ponto B e ponto C.



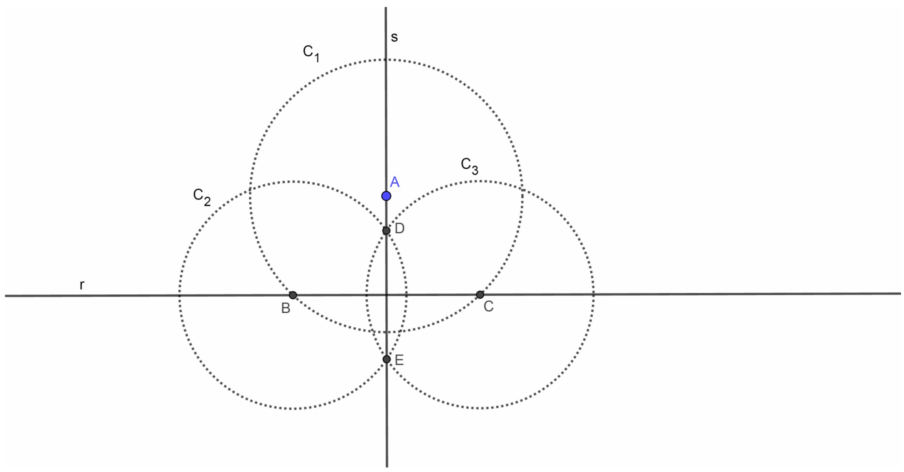
2.2. Colocar ponta seca do compasso no ponto B e com uma abertura maior que a metade do segmento $\overline{BC}$ e construir uma circunferência C_2, fazer o mesmo para o ponto C construindo a circunferência C_3.



2.3. Denotar os pontos de intersecção D e E entre as circunferências C_2 e C_3.

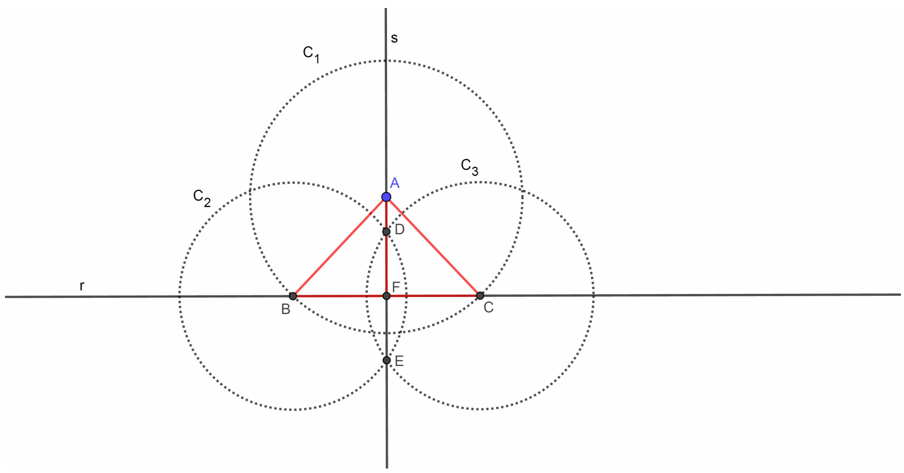


2.4. Traçar pelos pontos A, D e E a reta s que é perpendicular a reta r pelo ponto A.



Verificação de que a construção acima produz, de fato, uma reta perpendicular à reta r pelo ponto A.
Observe:

Figura 10 – Reta perpendicular: caso 2



Temos:
$\triangle FBA \equiv \triangle FCA$ pelo caso de congruência LLL.
Pois:
· $\overline{AC} \equiv \overline{AB}$ são raios da mesma circunferência.
· $\overline{AF}$ é o lado comum dos $\triangle FBA$ e $\triangle FCA$.
· $\overline{FC} \equiv \overline{FB}$ por construção, pois F é o ponto médio do segmento $\overline{CB}$.
Então os ângulos internos correspondentes dos triângulos em questão são congruentes.
Em particular os ângulos $\widehat{CFA}$ e $\widehat{BFA}$ são congruentes, pois são ângulos suplementares, logo cada um deles mede $\frac{\pi}{2}$, completando a verificação.

3.5.3 Paralelas

Uma das construções mais importantes da Geometria Euclidiana[8], segundo (NETO; CAMINHA, 2013), é a de uma reta paralela a uma reta dada, passando por um ponto também dado.

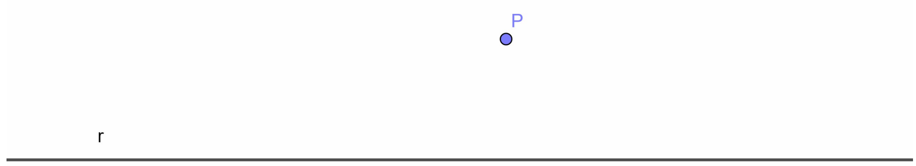
Definição 8. Se são dadas duas retas distintas no plano e elas não possuem ponto algum em comum, então elas são paralelas.

Ainda sobre a definição de retas paralelas, (NETO; CAMINHA, 2013) relata:

> [...]Euclides impôs a unicidade da reta paralela como um postulado, conhecido na literatura como o **quinto postulado**, ou **postulado das paralelas**.

Vejamos como Euclides escreveu tal postulado:

Dados uma reta r e um ponto $P \notin r$, existe uma única reta s paralela à reta r passando pelo ponto P.



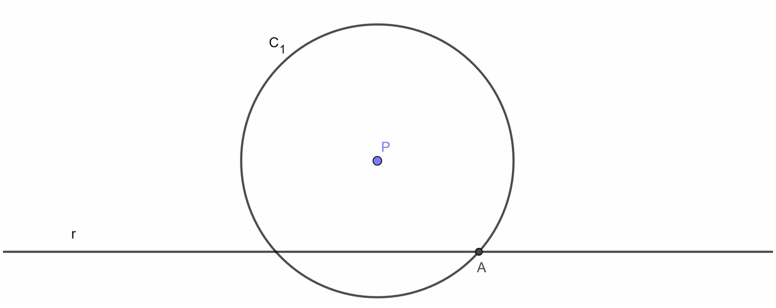
1. Vamos fazer a construção deste postulado com régua e compasso e em seguida apresentar a justificativa do mesmo.

[8] É a geometria baseada nos postulados de Euclides de Alexandria (para saber mais: 2.0.1).

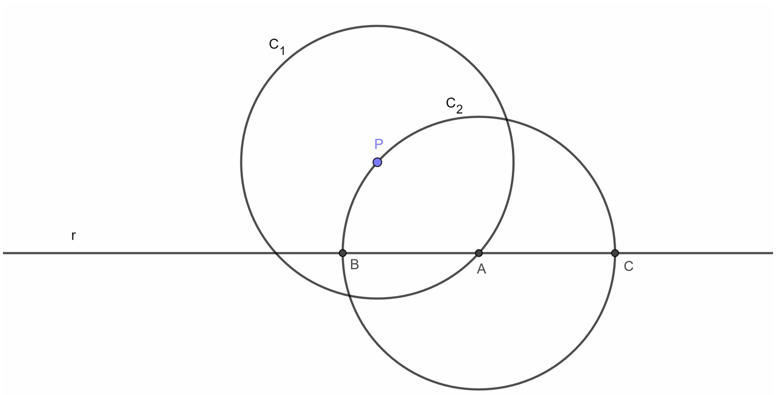
Note que o ponto P não pertence à reta r dada.

Construção:

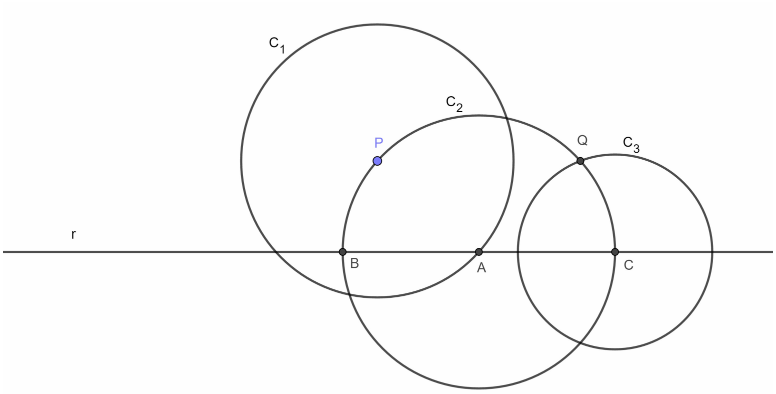
1.1. Traçar uma circunferência C_1 de raio qualquer e centro no ponto P interceptando a reta r no ponto A.



1.2. Traçar uma segunda circunferência C_2 com centro no ponto A e mesmo raio de C_1 e denote os pontos de intersecções entre C_2 e a reta r pelos pontos B e C.

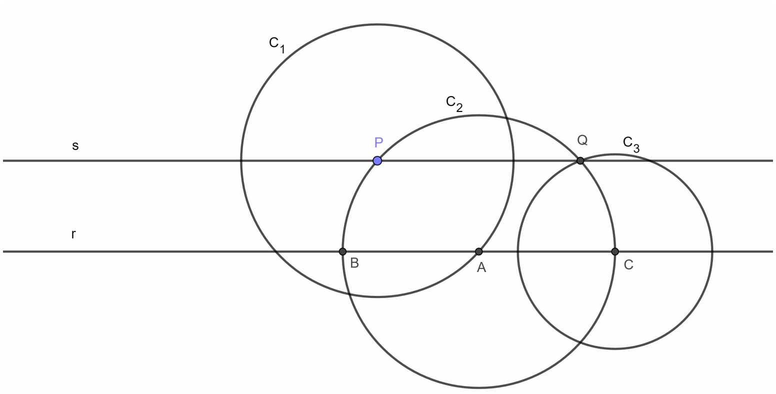


1.3. Traçar uma terceira circunferência C_3 com centro no ponto C e raio de segmento $\overline{BP}$, em seguida, denote o ponto de intersecção entre C_2 e C_3 por ponto Q que pertence ao mesmo semiplano que contém o ponto P, relativamente à reta r.



1.4. Traçar a reta s desejada pelos pontos P e Q.

Figura 11 – Postulado das paralelas

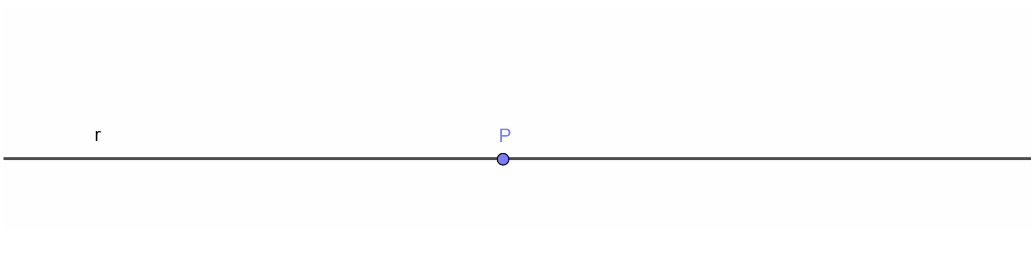


Verificação de que a construção acima garante que existe uma única reta paralela na situação dada.
Note que os triângulos $\triangle QCB$ e $\triangle PBC$ são retângulos pela Proposição 1, pois:

- $\overline{QC} \equiv \overline{PB}$ por construção, e são catetos dos triângulos $\triangle QCB$ e $\triangle PBC$, respectivamente.
- $\widehat{Q}$ e $\widehat{P}$ são ângulos retos.
- $\overline{CB} \equiv \overline{BC}$ pois é diâmetro da circunferência C_2 e são hipotenusas dos triângulos $\triangle QCB$ e $\triangle PBC$, respectivamente.

Pelo caso especial de congruência de triângulos retângulos[9], os triângulos $\triangle QCB$ e $\triangle PBC$ são congruentes.
Logo, as distâncias dos pontos P e Q à reta r são iguais, então as retas r e s são paralelas.
E note que a reta s é única pois por dois pontos distintos, no caso P e Q, passa apenas uma única reta, completando assim a verificação.

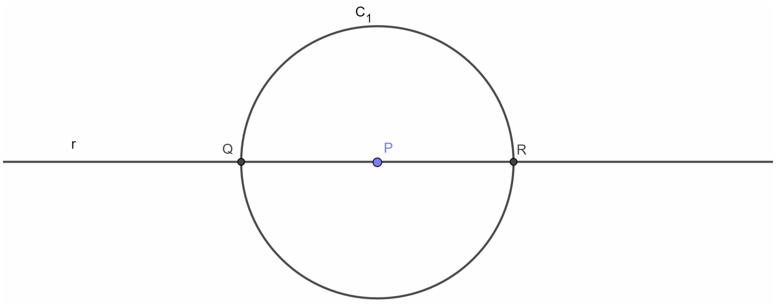
2. Dados uma reta r e um ponto $P \in r$, construa uma reta paralela à reta r dada.



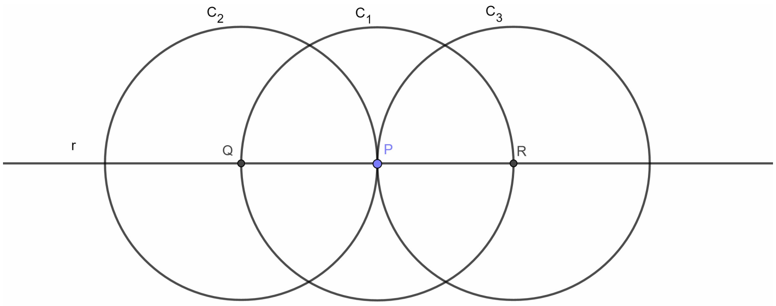
Construção:

2.1. Trace uma circunferência C_1 de raio qualquer e centro em P interceptando a reta r nos pontos Q e R.

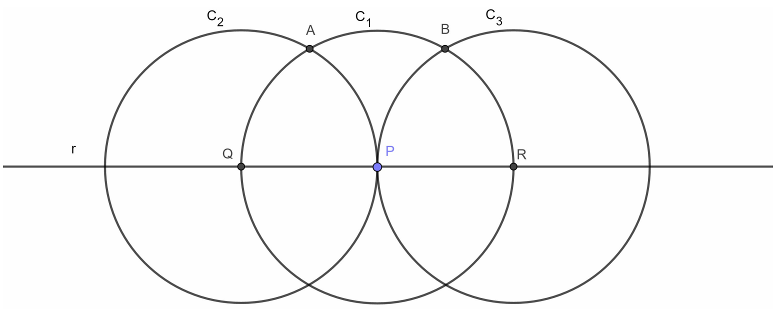
[9] Veja o caso de congruência de triângulos retângulos em (5).



2.2. Trace as circunferências C_2 e C_3 com centros nos pontos Q e R, respectivamente, com mesmo raio de C_1.

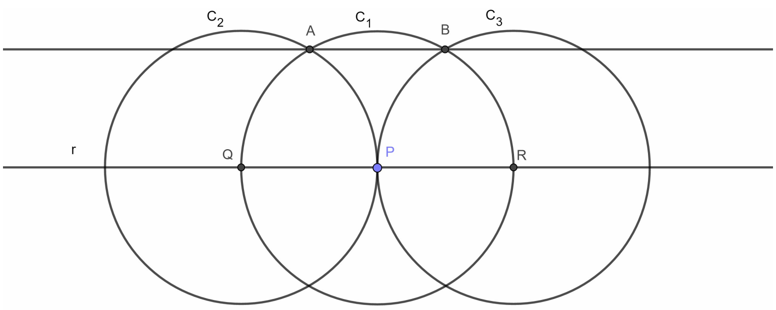


2.3. Denote os pontos de intersecções entre os pares de circunferências C_2 e C_1, e, C_1 e C_3 respectivamente pelos pontos A e B pertencentes ao mesmo semiplano, relativamente à reta r.



2.4. Trace a reta paralela desejada pelos pontos A e B.

Figura 12 – Construção de reta paralela



A verificação da construção acima é análoga ao caso 1.

3.5.4 Reta tangente a uma circunferência

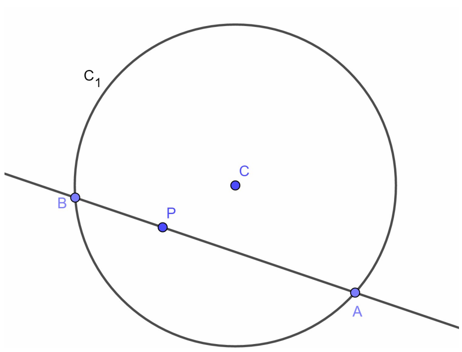
Dizemos que uma circunferência C_1 e uma reta r são tangentes ou, ainda, que a reta r é tangente à circunferência C_1, se r e C_1 tiverem exatamente um ponto P em comum. Nesse caso, P é denominado o ponto de tangência de r e C_1.

Construção 1: Traçar as retas tangentes a uma circunferência C_1 dada passando por um ponto P também dado.

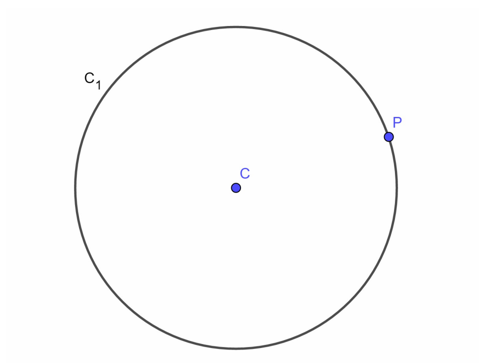
Para esta construção devemos considerar três situações:

1. O ponto P é interior à circunferência C_1.

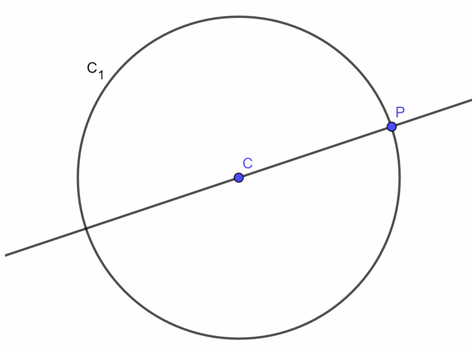
   Neste caso é fácil notar que a reta desejada não existe, pois tal reta terá dois pontos de intersecção com a circunferência C_1, logo não será uma reta tangente à circunferência C_1.



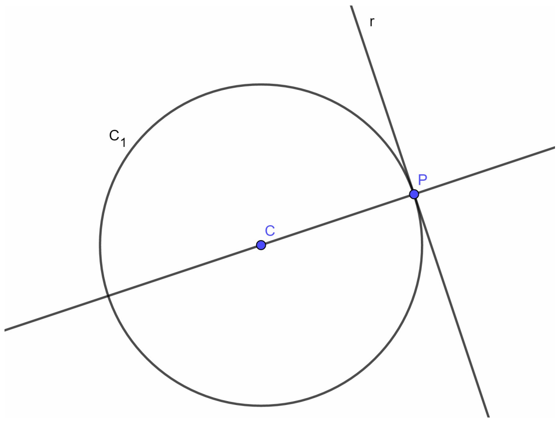
2. O ponto P pertence à circunferência C_1.



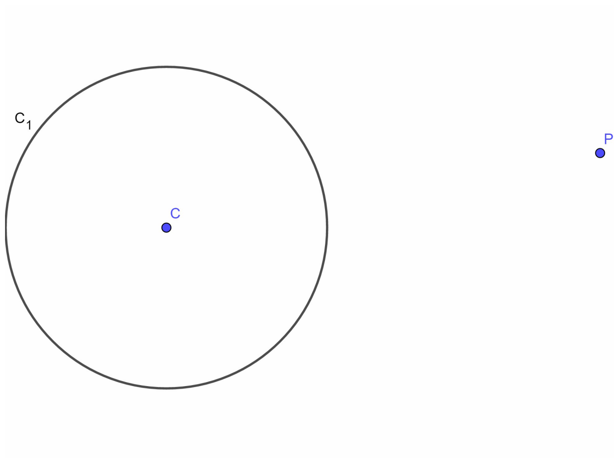
Começaremos traçando a reta $\overleftrightarrow{CP}$.



Em seguida, construa, pelo ponto P, a reta r, perpendicular[10] à reta $\overleftrightarrow{CP}$, que é a reta tangente desejada.

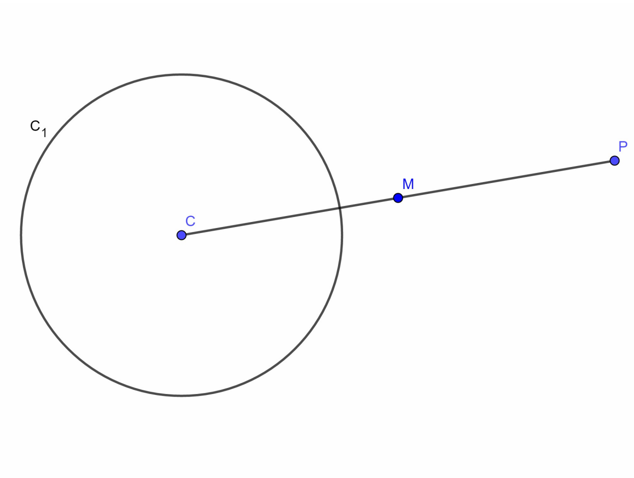


3. O ponto P é exterior à circunferência C_1.

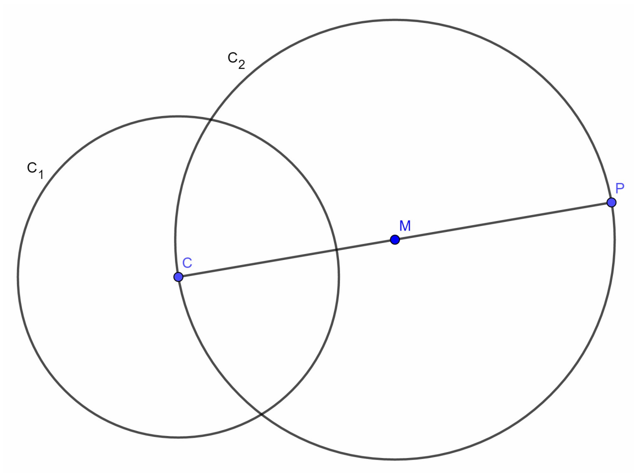


Iniciaremos traçando o segmento $\overline{CP}$ e em seguida encontraremos o ponto médio M do segmento $\overline{CP}$.

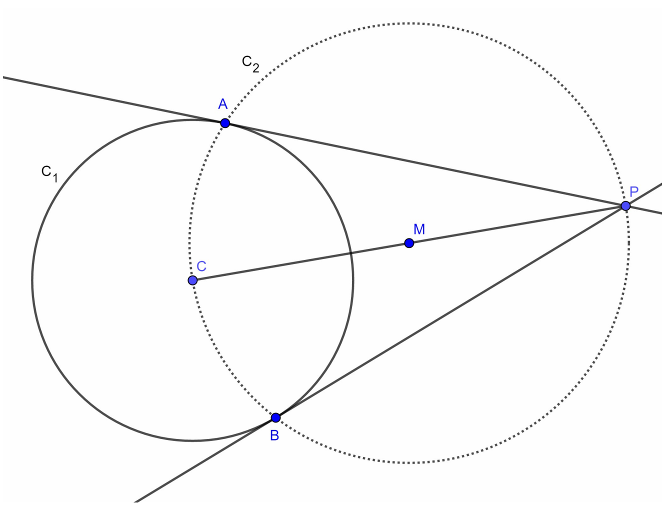
[10] Veja como construir retas perpendiculares em (3.5.2).



Em seguida construa a circunferência C_2 de centro no ponto M e raio de segmento $\overline{MP}$.



Sejam os pontos A e B, os pontos de intersecção entre as circunferências C_1 e C_2, trace as retas $\overleftrightarrow{PA}$ e $\overleftrightarrow{PB}$.

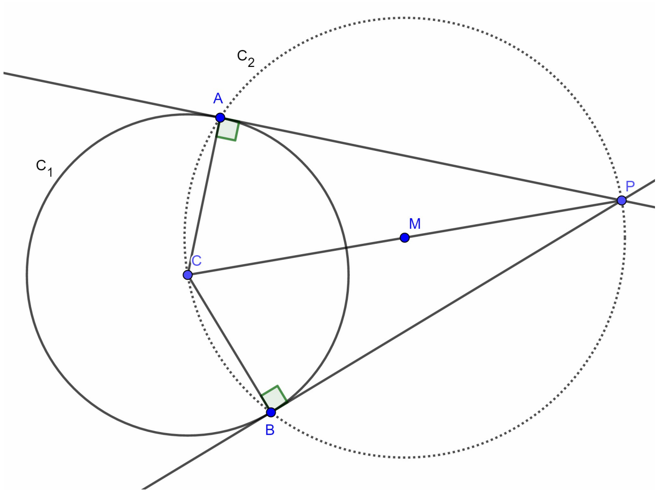


Logo as retas $\overleftrightarrow{PA}$ e $\overleftrightarrow{PB}$ são as retas tangentes desejadas.

Para a validação da construção acima:

Podemos assumir que $\overleftrightarrow{PA}$ e $\overleftrightarrow{PB}$ são retas tangentes a circunferência C_1 pois o triângulo $\triangle CAP$ é reto em A, visto que este possui um lado, $\overline{CP}$, que é um diâmetro da circunferência C_2, ou seja, o triângulo $\triangle CAP$ está inscrito em uma semicircunferência (justificado pelo Proposição 1); analogamente temos que o triângulo $\triangle CBP$ é reto em B completando a verificação.

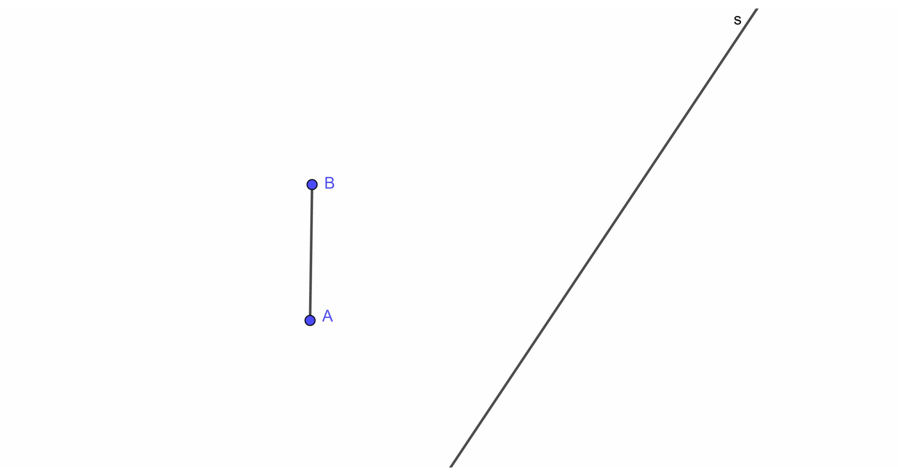
Figura 13 – Retas tangentes a uma circunferência



3.5.5 Transporte de segmentos

Nas construções geométricas um recurso muito utilizado é o transporte de segmento. Vejamos como proceder para realizar esse recurso. Para transportar segmentos de reta utilizamos apenas compasso e régua. Observe o exemplo a seguir:

Exemplo 2. Transporte o segmento $\overline{AB}$ para a reta s, ambos dados. Realize este procedimento utilizando somente compasso.

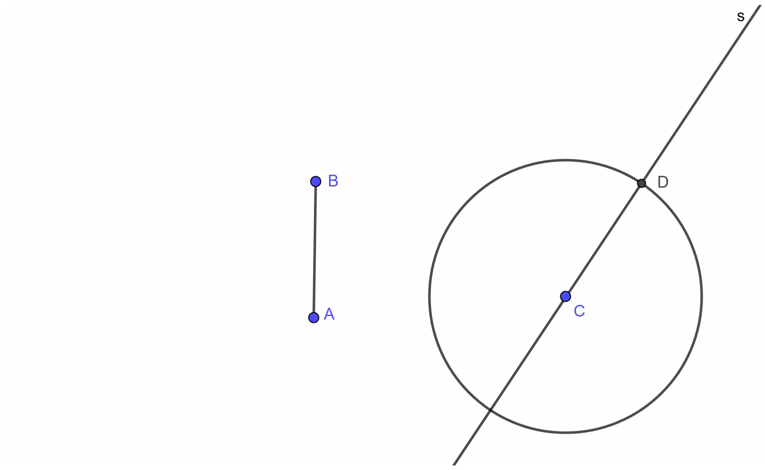


Construção:

1. Centre o compasso no ponto A e fixe a outra extremidade, do mesmo, no ponto B.

2. Mantendo a mesma abertura do compasso, centre-o em um ponto que pertença à reta s, chamemos tal ponto de C e denote um ponto D também sobre a reta s, tal que $\overline{CD} \equiv \overline{AB}$, assim transportamos o segmento $\overline{AB}$ para o segmento $\overline{CD}$ como desejado.

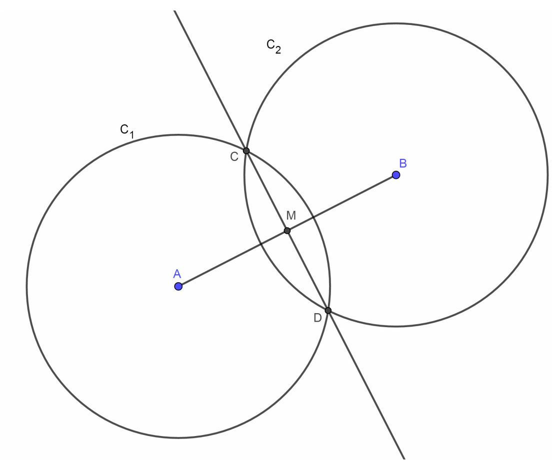
Figura 14 – Transporte de segmento

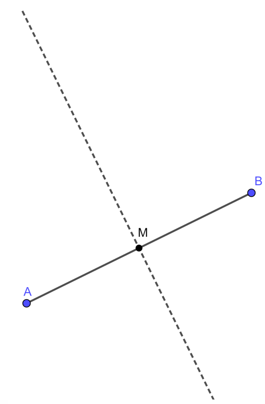


3.5.6 Divisão de um segmento em n partes iguais

Note que a ideia é dividir um segmento em n segmentos congruentes que justapostos dão origem ao segmento dado.
Vamos analisar os casos para alguns valores de n:

1. se $n = 2$, basta considerar o ponto médio[11] do segmento em questão.



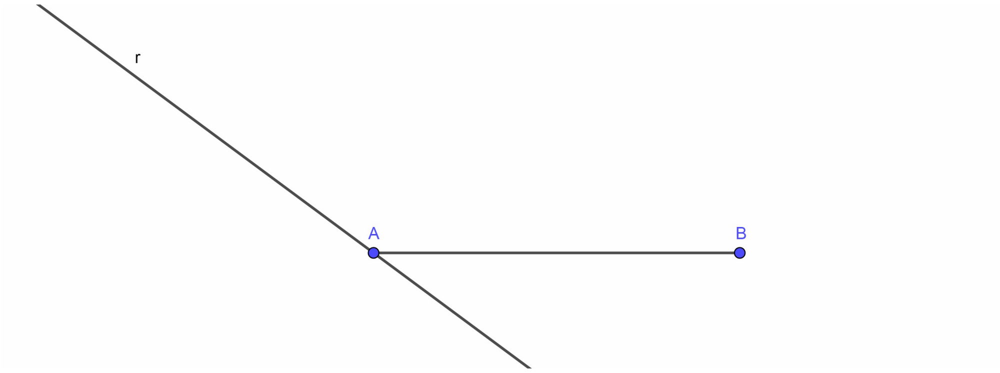


2. se $n = 3$, considere a seguinte construção:

    2.1. Trace um segmento $\overline{AB}$ qualquer.

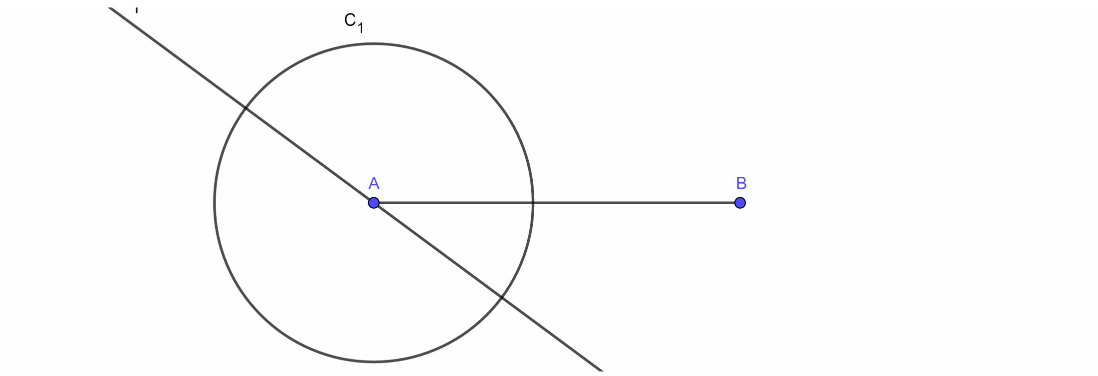
[11] Veja como determinar o ponto médio de um segmento em (3.5.1).

2.2. Trace uma reta r pelo ponto A formando um ângulo maior que zero e menor que π com o segmento $\overline{AB}$.

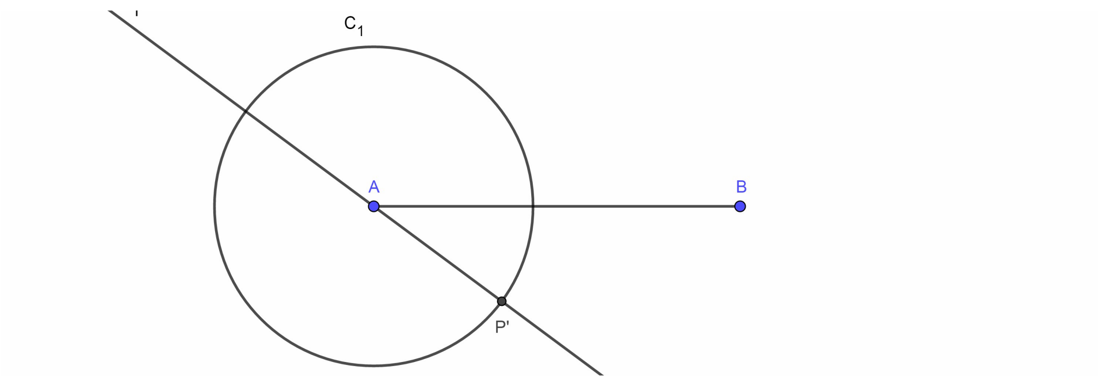


2.3. Sobre a reta r marcaremos 3 pontos distintos da seguinte maneira:

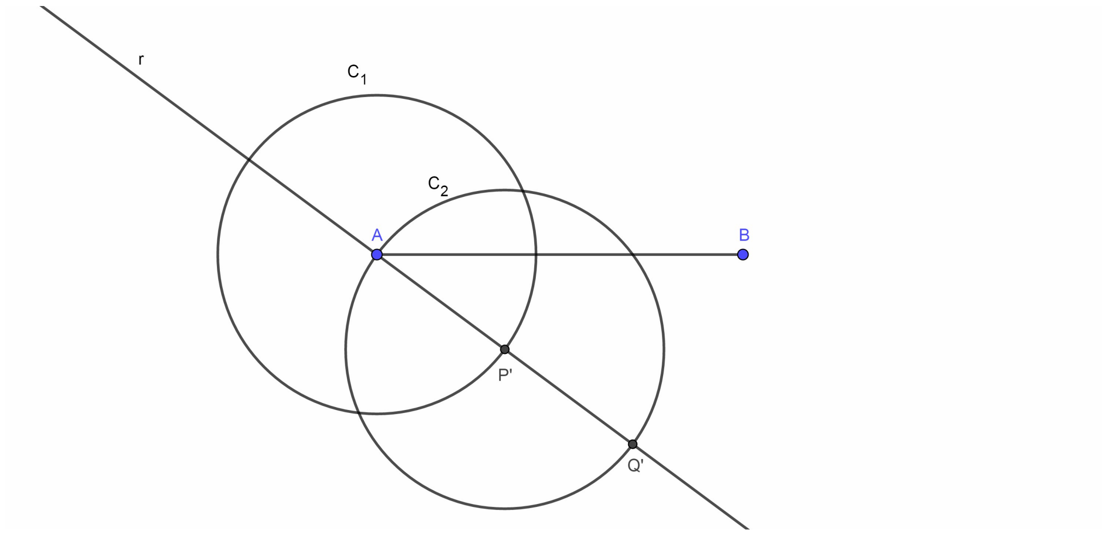
- Com uma abertura qualquer no compasso construa a circunferência C_1 com centro no ponto A.



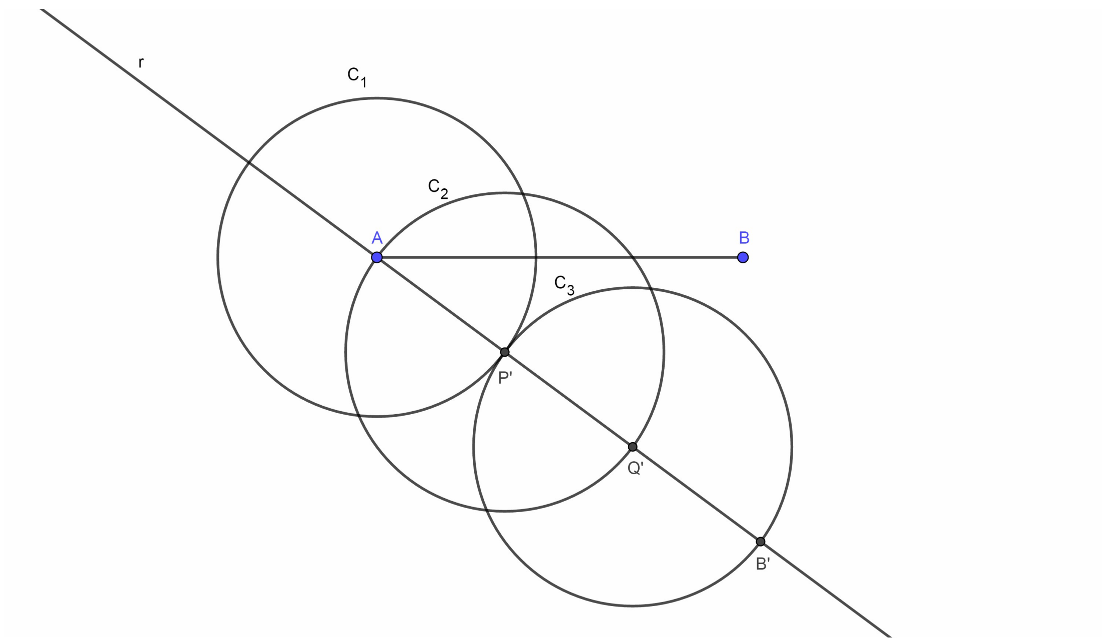
- Denote o ponto P' de intersecção entre a circunferência C_1 e a reta r, note que haverá dois pontos, utilizaremos o ponto P' convenientemente.



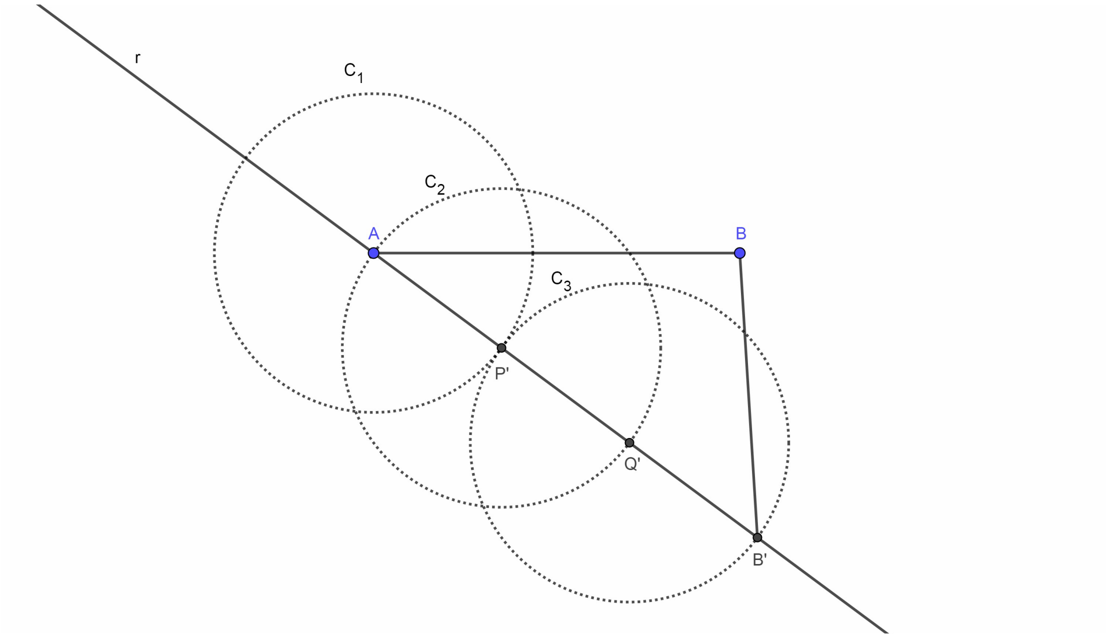
- Com o mesmo raio de C_1 construa a circunferência C_2 com centro no ponto P' e denote o ponto Q' de intersecção entre C_2 e a reta r.



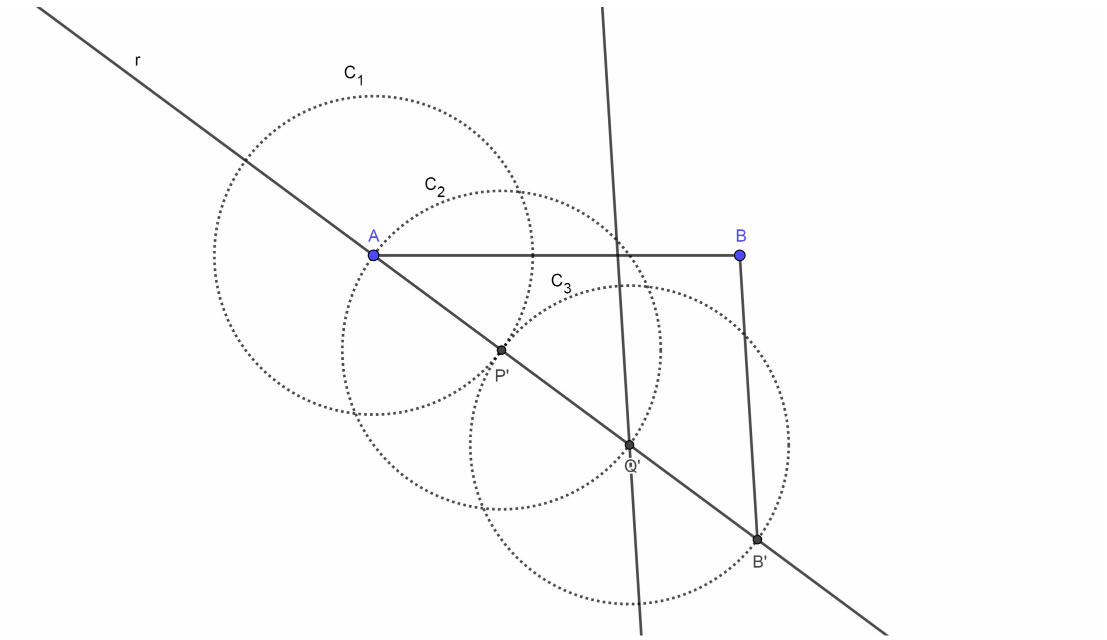
- Analogamente construa a circunferência C_3 e denote o ponto B'.



2.4. Construa o segmento $\overline{BB'}$, ligando os pontos B e B'.

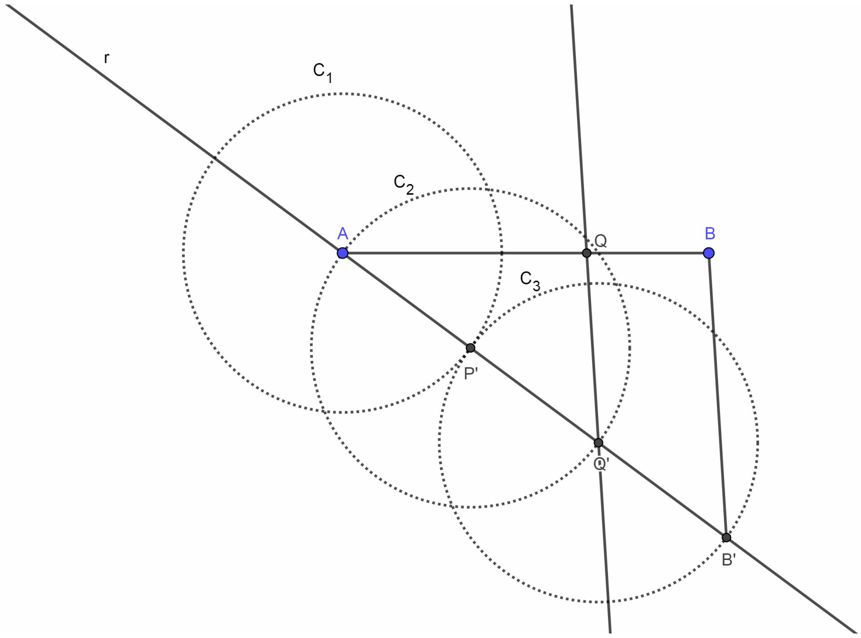


2.5. Construa uma reta paralela[12] ao segmento $\overline{BB'}$ que intersecta o ponto Q'.



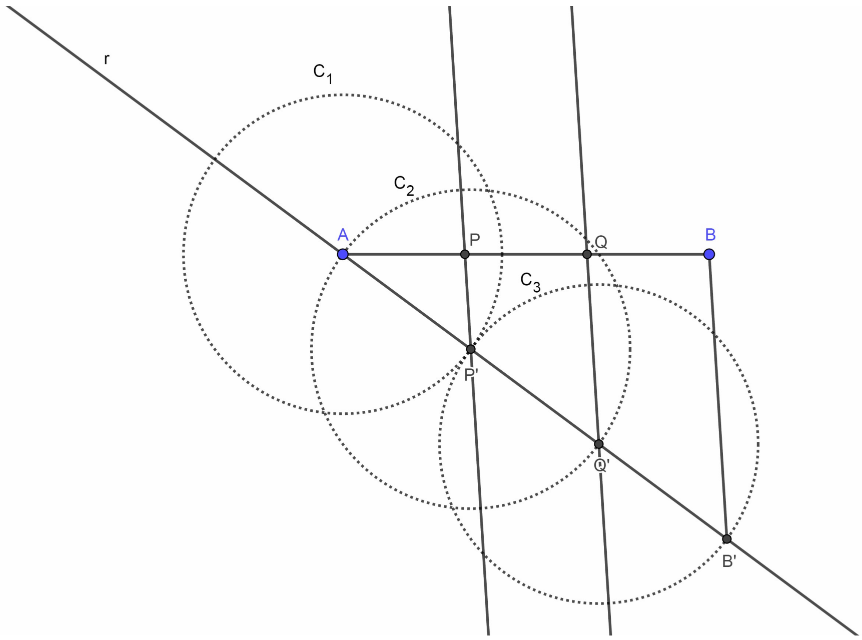
2.6. Denote o ponto Q de intersecção entre o segmento $\overline{AB}$ e a reta paralela construída.

[12] Veja como construir retas paralelas em (1.).



2.7. Analogamente determine o ponto P, ponto de intersecção entre a reta paralela ao segmento $\overline{BB'}$ e que intersecta o ponto P'.

Figura 15 – Divisão de um segmanto em n partes iguais



Logo temos que $\overline{AP} \equiv \overline{PQ} \equiv \overline{QB}$.

Verificação de que a construção acima garante o resulta na divisão do segmento $\overline{AB}$ em 3 segmentos congruentes.
Observe que temos um feixe de retas paralelas cortadas por duas transversais, o que nos remete ao Teorema de Tales (que pode ser consultado em A.2.)

Por construção, $\overline{AP'} \equiv \overline{P'Q'}$. Então:

$$\frac{AP'}{P'Q'} = \frac{AP}{PQ}$$

$$1 = \frac{AP}{PQ} \text{ (I)}$$

e

$$\frac{P'Q'}{Q'B'} = \frac{PQ}{QB}$$

$$1 = \frac{PQ}{QB} \text{ (II)}$$

De (I) e (II) temos $\frac{AP}{PQ} = \frac{PQ}{QB} = 1$, ou seja, os segmentos $\overline{AP}$, $\overline{PQ}$ e $\overline{QB}$ têm medidas congruentes.

3. Para $n \geq 4$, procedemos de maneira análoga.

3.5.7 Retângulo

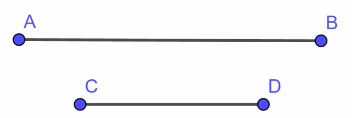
Definição 9. Um quadrilátero convexo[13] é um retângulo se todos os seus ângulos internos forem iguais a um ângulo reto cada.

Consequentemente os lados opostos são sempre paralelos, uma vez que são ambos perpendiculares entre si, os lados não opostos.

Exemplo 3. Construir um retângulo conhecidos dois de seus lados não paralelos.

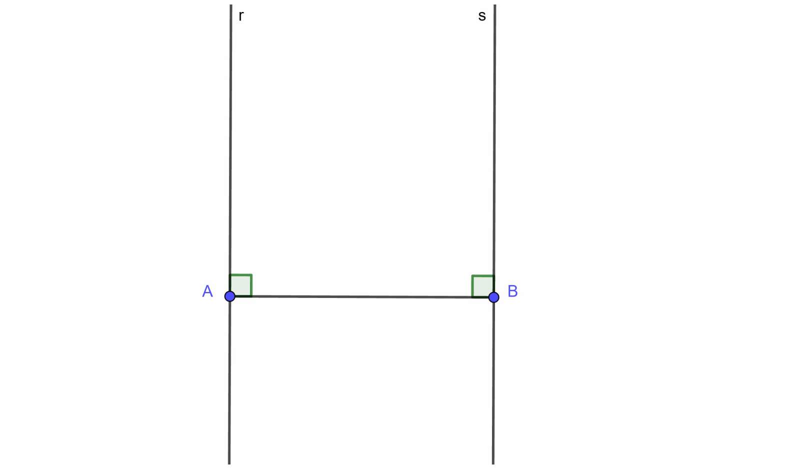
Construção:

1. Traçar dois segmentos de reta de comprimentos diferentes.

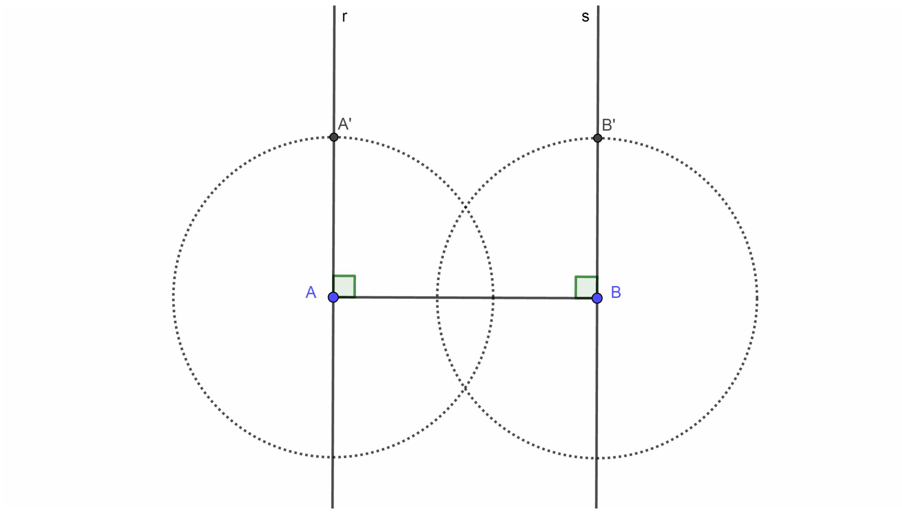


2. Transportar o segmento $\overline{AB}$[14] e trace retas perpendiculares pelos pontos A e B.

[13] Um polígono é convexo se a reta que contém qualquer de seus lados deixa todos os demais lados no mesmo semiplano.
[14] Veja como transportar segmento em (2).

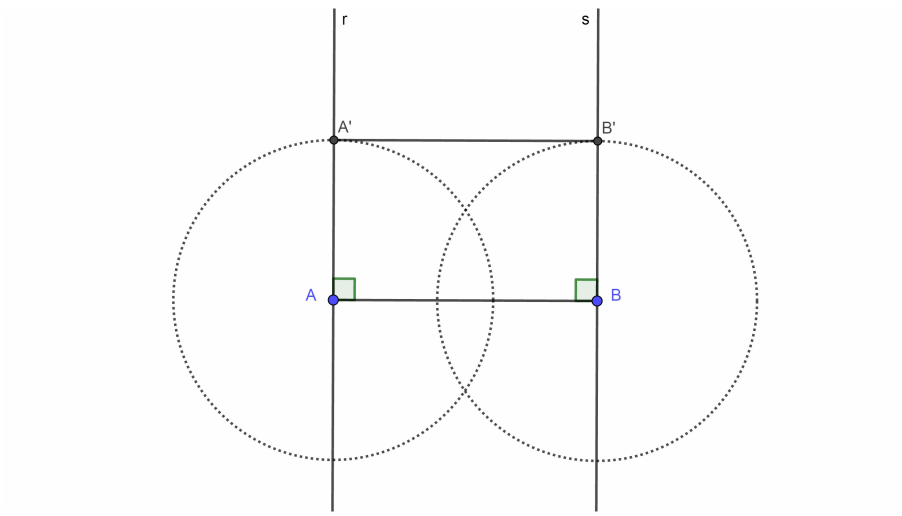


3. Transportar o segmento $\overline{CD}$ sobre as retas r e s, a partir dos pontos A e B, respectivamente, e em seguida denote os pontos A' e B'.



4. Traçar um segmento de reta ligando os pontos A' e B' finalizando o retângulo desejado.

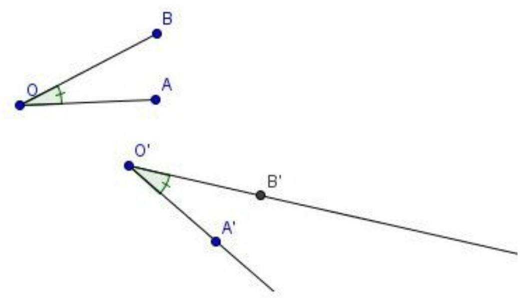
Figura 16 – Construção de retângulo



3.5.8 Transporte de ângulo

Postulado do transporte de ângulos

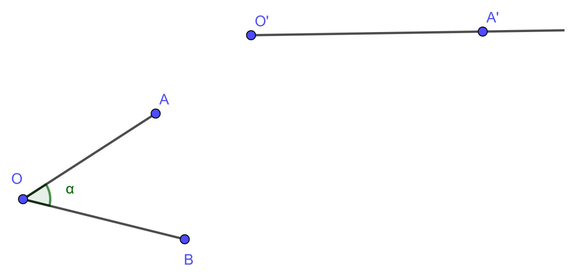
Dados um ângulo $\widehat{AOB}$ orientado positivamente e uma semirreta $\overrightarrow{O'A'}$ de um plano, existe sobre este plano, e em um dos semiplanos que permite determinar, uma única semirreta que forma um ângulo $\widehat{A'O'B'}$ congruente ao ângulo $\widehat{AOB}$.



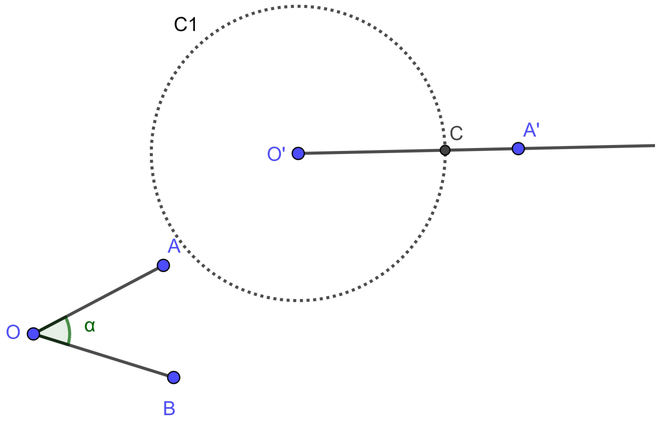
O postulado acima garante que é possível transportar um ângulo.

Apresentamos a construção e em seguida, a justificativa:

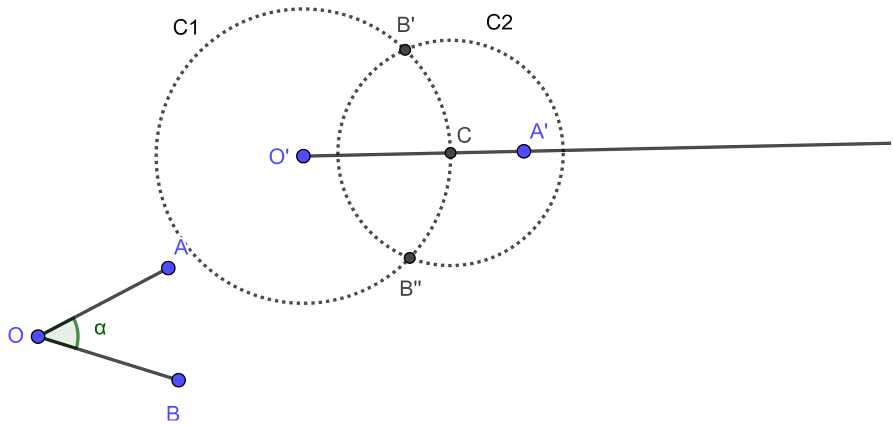
1. Sejam $\widehat{AOB}$ um ângulo e $\overrightarrow{O'A'}$ uma semirreta, ambos dados:



2. Centre a ponta seca do compasso no ponto O' e construa a circunferência C_1 de raio $\overline{AO}$. Esta circunferência intersectará a semirreta $\overrightarrow{O'A'}$ em um ponto C tal que $\overline{OA} \equiv \overline{O'C}$.

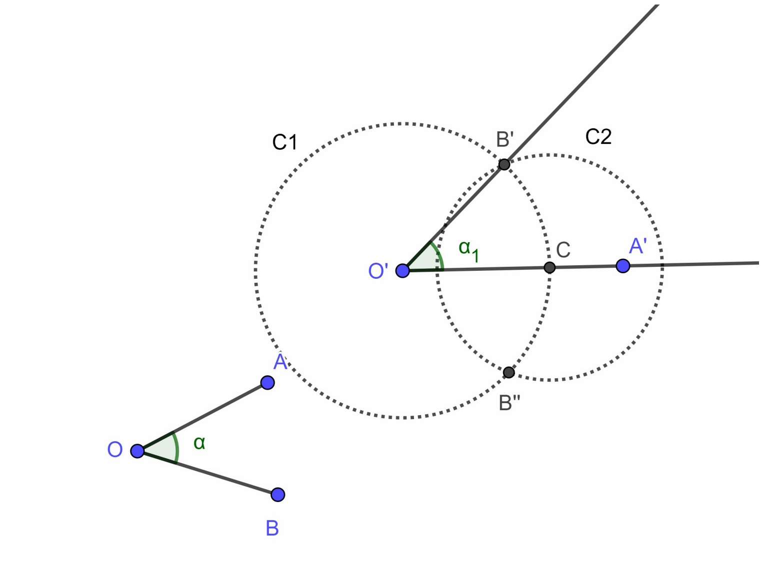


3. Ainda com o compasso faça uma circunferência C_2 com centro no ponto C e raio $\overline{AB}$. As circunferências C_1 e C_2 interceptam-se em dois pontos: B' e B''.



4. Escolha dentre os pontos B' e B'' o que se encontra no semiplano desejado. Escolha o ponto B' e trace a semirreta $\overrightarrow{O'B'}$.

Figura 17 – Transporte de ângulo



O ângulo $\widehat{A'O'B'}$ é congruente ao ângulo $\widehat{AOB}$.

Demonstração. Os triângulos $\triangle AOB$ e $\triangle CO'B'$ são congruentes pelo caso LLL com os lados ordenadamente congruentes por construção.

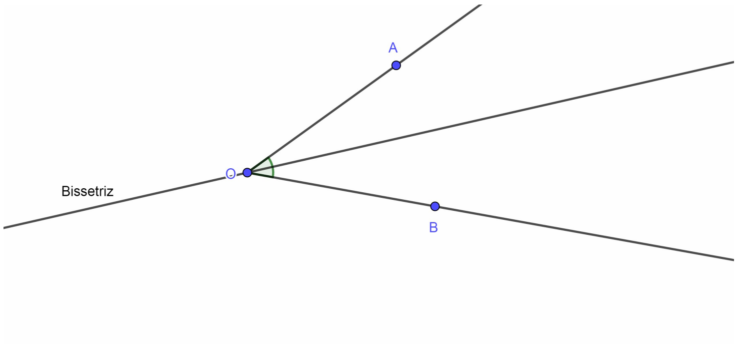
$\therefore \triangle CO'B' \equiv \triangle AOB$, pois:

$$\begin{cases} \overline{AO} \equiv \overline{CO'} \\ \overline{AB} \equiv \overline{CB'} \\ \overline{BO} \equiv \overline{B'O'} \end{cases}$$

Como o ponto C está sobre a semirreta $\overrightarrow{O'A'}$ então os ângulos $\widehat{CO'B'} \equiv \widehat{AOB}$. □

3.5.9 Bissetriz de um ângulo

Definição 10. Dadas duas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, o conjunto dos pontos que equidistam de $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ formam a bissetriz do ângulo $\widehat{AOB}$.

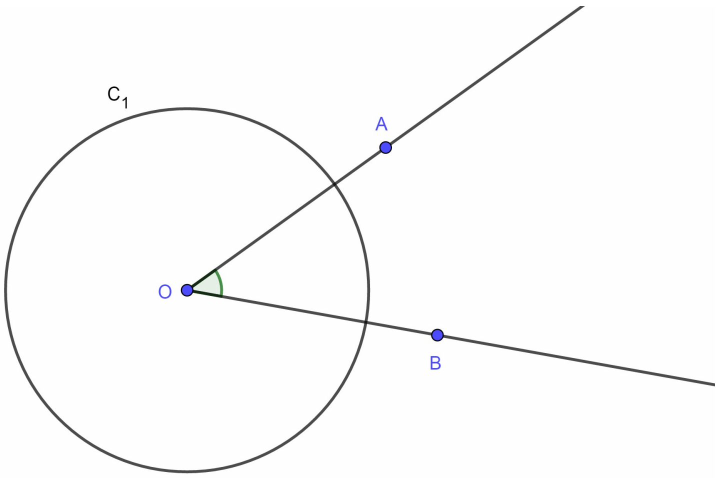


Em outras palavras:

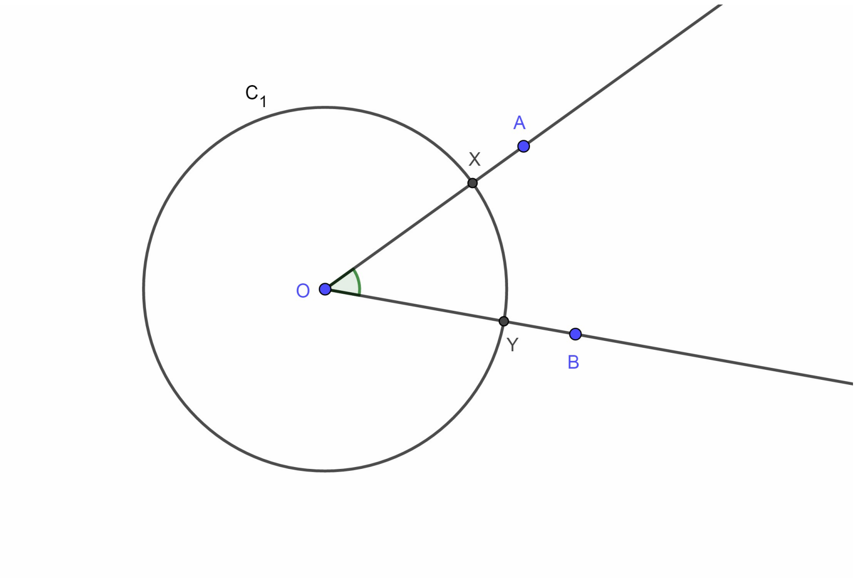
A bissetriz do ângulo $\widehat{AOB}$ = {Pontos P | distância(P,$\overrightarrow{OA}$) = distância (P,$\overrightarrow{OB}$)}.

Apresentamos a construção e em seguida, a justificativa:

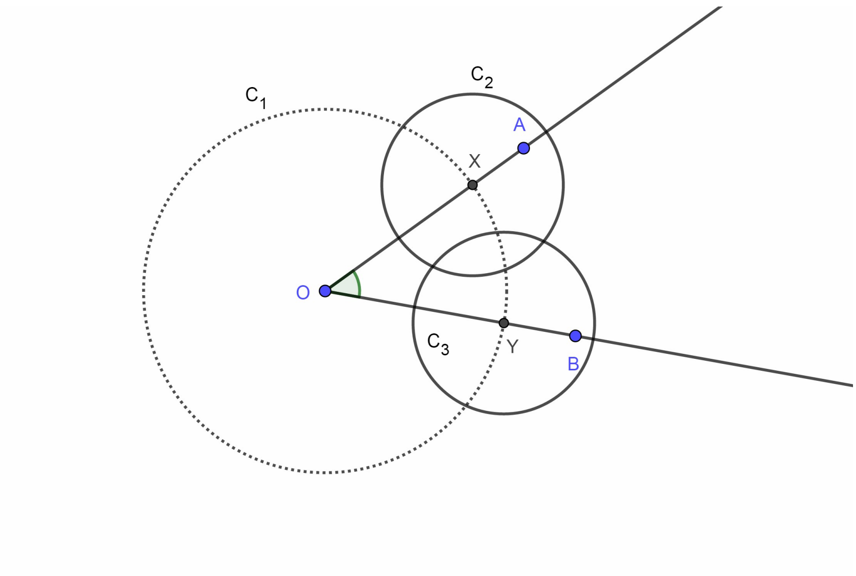
1. Dado um ângulo $\widehat{AOB}$, construa uma circunferência C_1 com centro em O e raio qualquer.



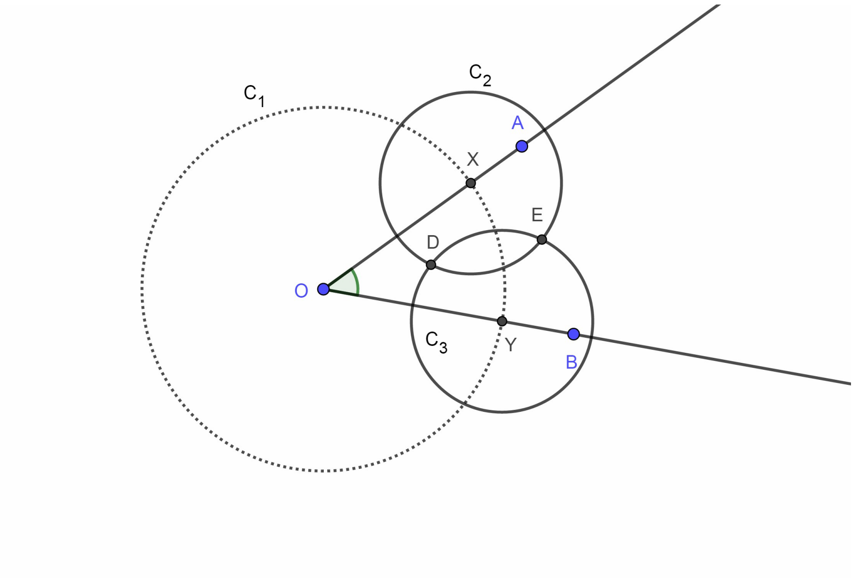
2. Denote os pontos de intersecção, X e Y, da circunferência C_1 com as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, respectivamente.



3. Construa duas circunferências, C_2 e C_3, de raios de mesma medida e com centros nos pontos X e Y, respectivamente.

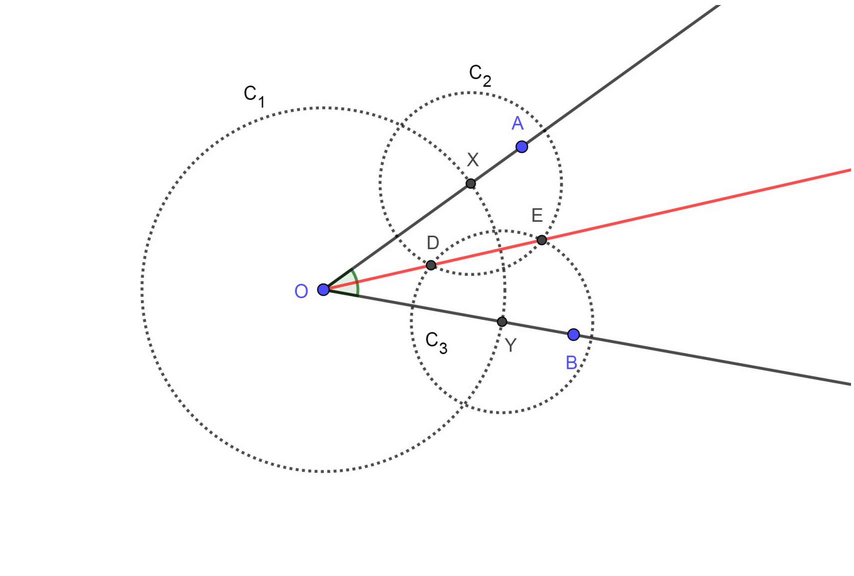


4. Denote os pontos D e E, de intersecção, entre as circunferências C_2 e C_3.



5. A semirreta $\overrightarrow{OE}$ é a bissetriz do ângulo $\widehat{AOB}$.

Figura 18 – Bissetriz de um ângulo



Demonstração. Os $\triangle OYE$ e $\triangle OXE$ são congruentes pelo caso LLL com os lados ordenadamente congruentes por construção.

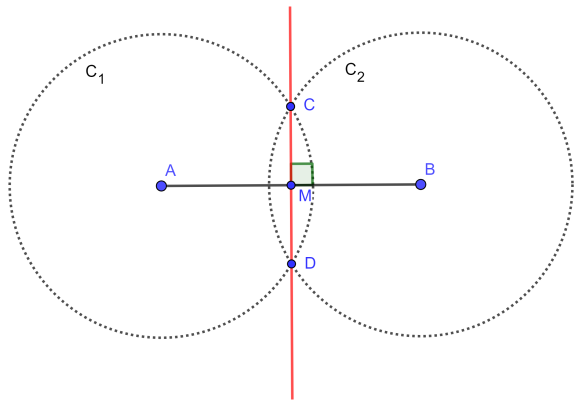
$$\begin{cases} \overline{OY} \equiv \overline{OX}, pois \text{ é } raio\ da\ circunferência\ C_1 \\ \overline{YE} \equiv \overline{XE}, pois\ são\ raios\ das\ circunferências\ C_2\ e\ C_3\ que\ por\ construção\ tem\ raios\ congruentes. \\ \overrightarrow{OE}\ contém\ o\ lado\ comum\ aos\ dois\ triângulos\ em\ questão. \end{cases}$$

$\therefore \widehat{YOE} \equiv \widehat{XOE}$, logo a semirreta $\overrightarrow{OE}$ é a bissetriz do ângulo $\widehat{AOB}$.

□

3.5.10 Mediatriz de um segmento

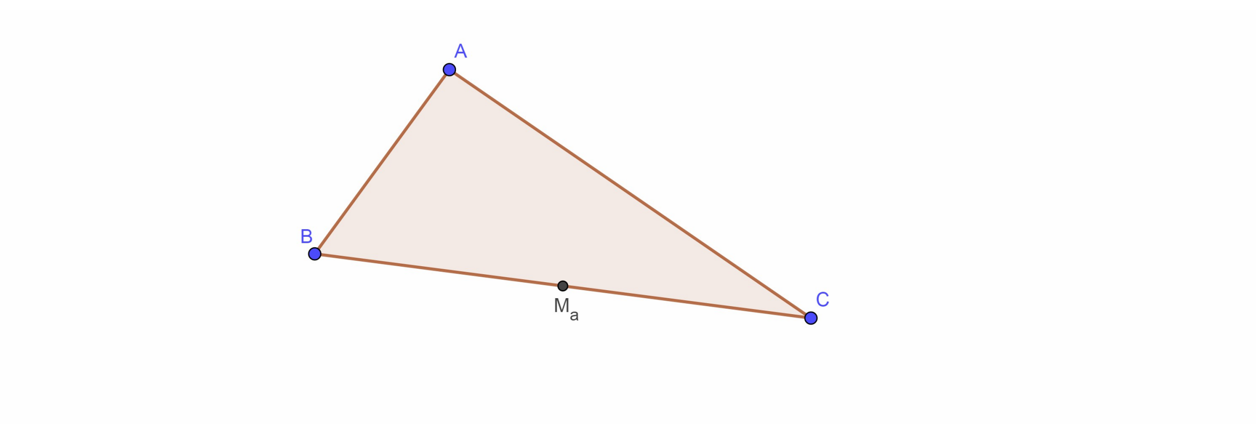
Definição 11. A mediatriz de um segmento $\overline{AB}$ é a reta perpendicular a este segmento e que passa pelo seu ponto médio M.



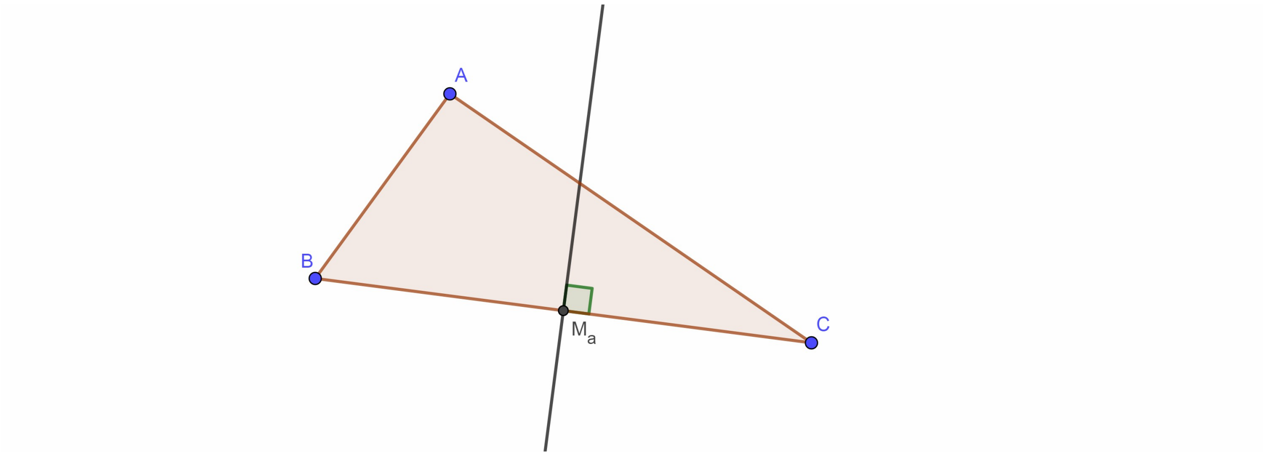
Descrição dos passos e demonstração análogos à construção da reta perpendicular por um ponto pertencente a uma reta dada (vide construção 3.5.2).

Exemplo 4. Dado um triângulo $\triangle ABC$ qualquer determine suas mediatrizes.

1. Determine o ponto médio M_a do lado $\overline{BC}$ oposto ao vértice A.

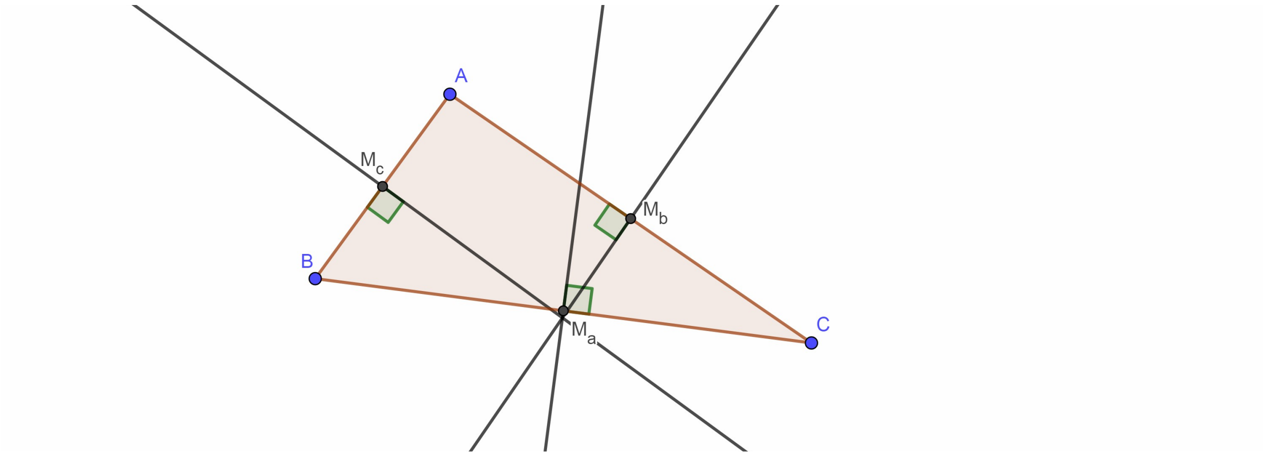


2. Trace uma reta perpendicular ao lado $\overline{BC}$ pelo ponto M_a, que é a mediatriz referente ao lado $\overline{BC}$.



3. De maneira análoga construa as mediatrizes dos lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ do triângulo em questão.

Figura 19 – Mediatriz de um triângulo



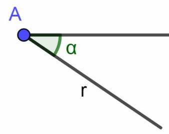
Observação 2. Pode-se mostrar que as três mediatrizes de um triângulo encontram-se em um mesmo ponto.

3.5.11 Arco capaz

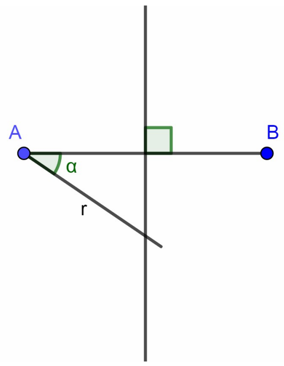
Definição 12. Arco capaz é o lugar geométrico dos pontos que "enxergam" um segmento dado sob um determinado ângulo.

Exemplo 5. Seja $\overline{AB}$ e $\widehat{\alpha}$, um segmento e um ângulo, respectivamente dados, vamos construir o arco capaz associado ao ângulo α para o segmento $\overline{AB}$ (vide figura abaixo).

1. Transporte o ângulo[15] $\widehat{\alpha}$ sobre o segmento $\overline{AB}$, dando origem a semirreta r.

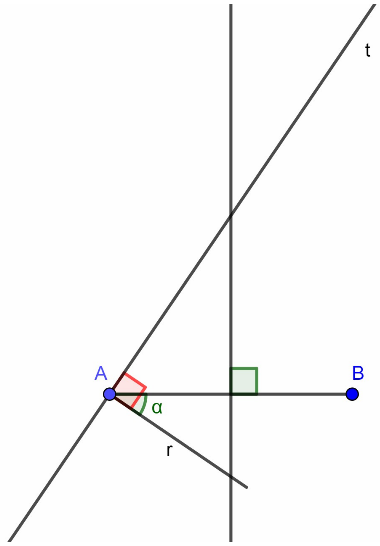


2. Construa a mediatriz (como no exemplo 4) do segmento $\overline{AB}$.

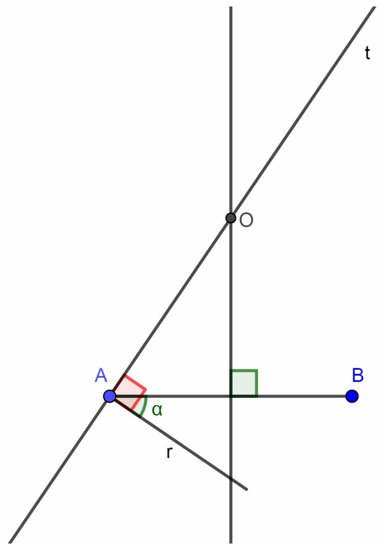


3. Trace pelo ponto A uma reta perpendicular a semirreta r, nomeie a reta perpendicular t.

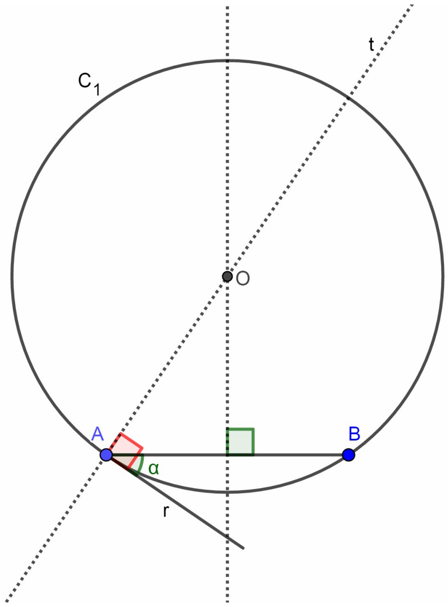
[15] Vide o postulado do transporte de ângulo em (3.5.8).



4. Denote por O o ponto de intersecção da reta perpendicular t com a mediatriz.

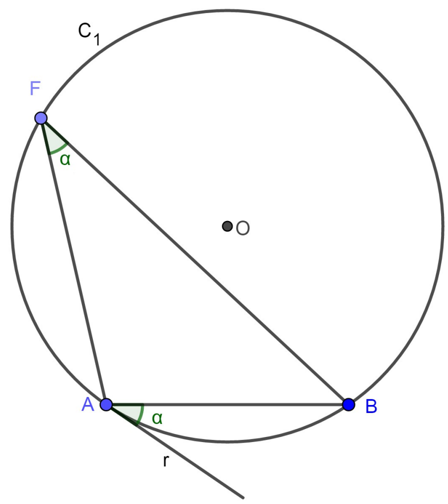


5. Construa a circunferência C_1 com centro no ponto O e raio $\overline{OA}$.

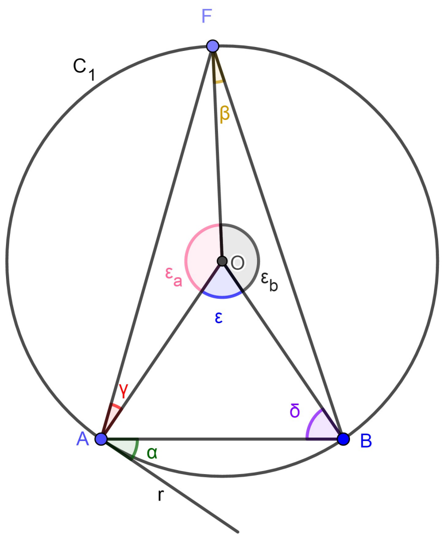


6. O arco $\overset{\frown}{AB}$ maior é o arco capaz associado ao ângulo $\widehat{\alpha}$, para o segmento $\overline{AB}$, independente da posição do ponto F no arco $\overset{\frown}{AB}$ maior, o ângulo $\widehat{F}$ é congruente ao ângulo $\widehat{\alpha}$.

Figura 20 – Construção do arco capaz

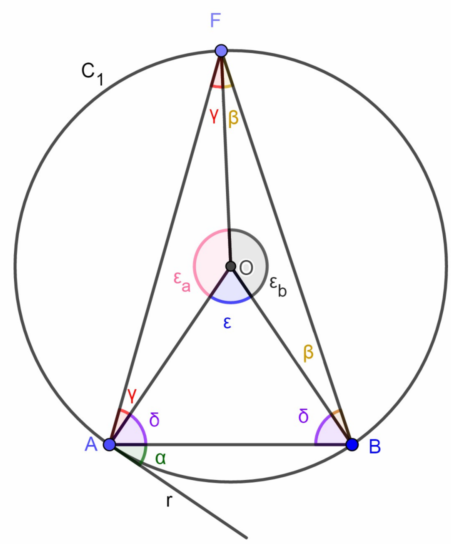


Demonstração. ($\Rightarrow$)Observe:



Os triângulos $\triangle AOF$, $\triangle BOF$ e $\triangle AOB$ são isósceles, pois o vértice O é o centro da circunferência C_1.

Portanto:



A partir desses triângulos e das respectivas medidas, em radianos, dos ângulos envolvidos temos:

(i) $\varepsilon + 2 \cdot \delta = \pi$

(ii) $\varepsilon_a + 2 \cdot \gamma = \pi$

(iii) $\varepsilon_b + 2 \cdot \beta = \pi$

(iv) $\varepsilon + \varepsilon_a + \varepsilon_b = 2\pi$

Fazendo (i) + (ii) + (iii) e usando (iv) temos:

$$\underbrace{\varepsilon+\varepsilon_a+\varepsilon_b}+2.\delta+2.\gamma+2.\beta=3\pi$$

$$2\pi+2(\delta+\gamma+\beta)=3\pi$$

$2(\delta+\gamma+\beta)=\pi$ o que é válido pois $\triangle ABF$ é um triângulo.

$\delta+\gamma+\beta=\dfrac{\pi}{2}$ (v)

E pela construção de arco capaz, o ângulo entre o segmento $\overline{AO}$ e a semirreta r é reto.

Isto é:

$$\text{(vi) } \alpha+\delta=\frac{\pi}{2}$$

Fazendo (v) - (vi) obtemos:

$\gamma+\beta+\delta-(\alpha+\delta)=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2}$

$\gamma+\beta=\alpha$

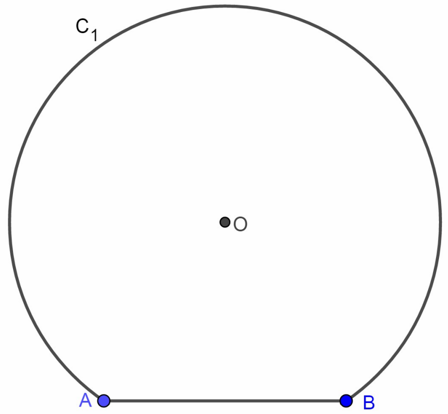
Em outras palavras, a medida do ângulo $\widehat{AFB}$ é igual $\gamma+\beta$, que é o próprio ângulo $\widehat{\alpha}$ da construção do arco capaz.

Note que o ponto F pode estar em qualquer outra posição do arco construído que a demonstração será a mesma.

Portanto todos os pontos pertencentes ao arco capaz "enxergam"o segmento $\overline{AB}$ sob o ângulo $\widehat{\alpha}$, como queríamos demonstrar.

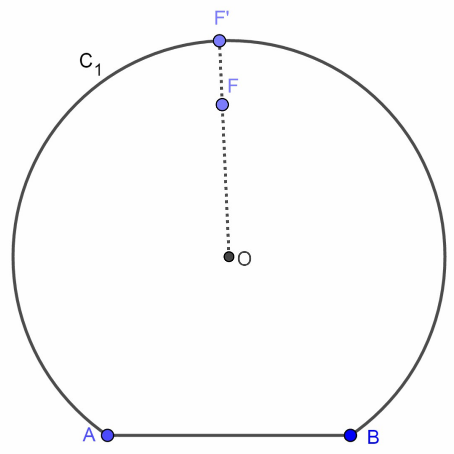
($\Leftarrow$) Agora vamos demonstrar que, se algum ponto "enxerga"o segmento $\overline{AB}$ sob um ângulo $\widehat{\alpha}$, então ele pertence ao arco capaz desse segmento.

Considere a figura abaixo em que temos o segmento $\overline{AB}$ e a circunferência C_1 que é o arco capaz associado ao ângulo $\widehat{\alpha}$ para o segmento $\overline{AB}$ já construído.

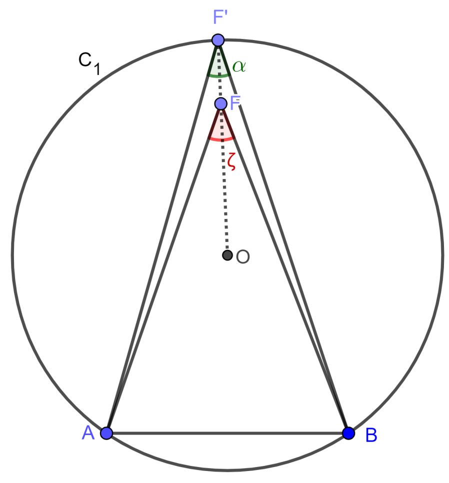


Considere também um ponto F dentro da região determinada pelo arco e pelo segmento $\overline{AB}$. Vamos supor que o ponto F também "enxerga" $\overline{AB}$ sob o ângulo $\widehat{\alpha}$.

Construa um raio da circunferência C_1 passando por F e note que, para qualquer ponto F, existe um ponto F' ao longo do raio que pertence ao arco capaz.



Suponha agora que $\alpha = \zeta$.



Pode-se mostrar que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 2π, portanto, analisando o quadrilátero $F'AFB$, temos:

$\alpha + (2\pi - \zeta) + m(\widehat{F'AF}) + m(\widehat{FBF'}) = 2\pi$

Supondo que $\alpha = \zeta$:

$\alpha + (2\pi - \alpha) + m(\widehat{F'AF}) + m(\widehat{FBF'}) = 2\pi$

$2\pi + m(\widehat{F'AF}) + m(\widehat{FBF'}) = 2\pi$

$m(\widehat{F'AF}) + m(\widehat{FBF'}) = 0$

Como os ângulos $\widehat{F'AF}$ e $\widehat{FBF'}$ têm medidas maiores que zero, isso implica ambos têm medida zero, o que é um absurdo!

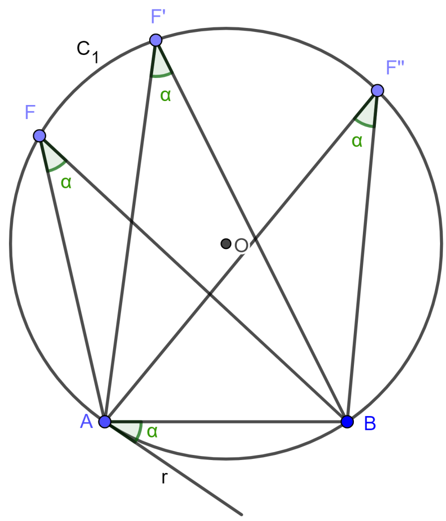
Portanto todos os ângulos dos $\triangle FAB$ e $\triangle F'AB$ são congruentes, e como eles têm o lado $\overline{AB}$ em comum, todos os lados também são congruentes, logo $F' = F$, o que também é um absurdo!

Em outras palavras, não há pontos no interior do arco capaz que também enxergam o segmento $\overline{AB}$ sob o ângulo $\widehat{\alpha}$.

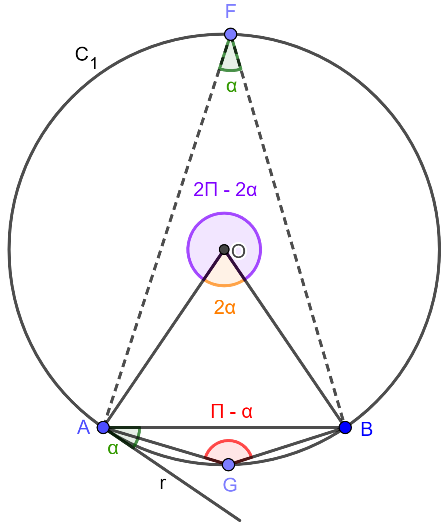
De maneira análoga tratamos o caso do ponto F externo à região delimitada pelo arco capaz e o segmento $\overline{AB}$.

Portanto concluímos que o lugar geométrico de todos os pontos que enxergam um determinado segmento sob um determinado ângulo é o arco capaz. □

Observação 3. Um observador que se move sobre o arco capaz de um ângulo $\widehat{\alpha}$, consegue ver o segmento $\overline{AB}$ sempre sob o mesmo ângulo (o ângulo $\widehat{\alpha}$).



Observação 4. Se considerarmos um ponto, que indicaremos por G, que pertence ao arco $\overset{\frown}{AB}$ menor da circunferência C_1, o ângulo $\widehat{AGB}$ também será constante e, além disso, será igual a $\pi - \alpha$ pelo Teorema 1 (veja a figura abaixo).



3.6 Algumas construções sobre triângulos

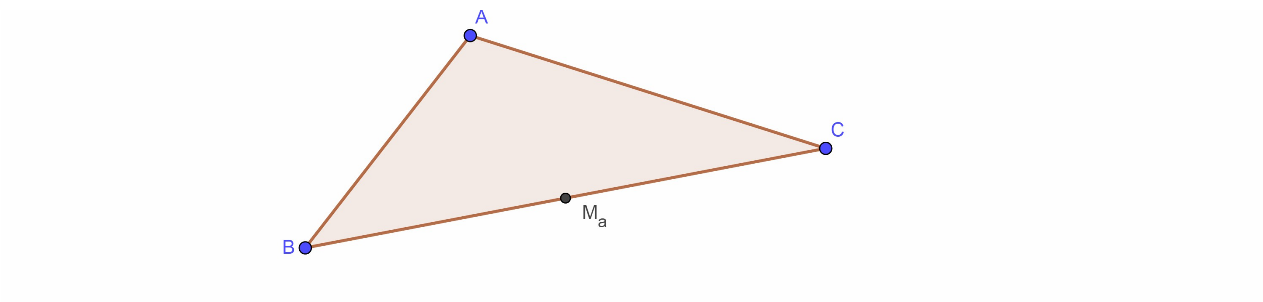
3.6.1 Mediana

Definição 13. A mediana, referente a um lado de um triângulo, é a semirreta que parte do vértice desse triângulo e intersecta o ponto médio do lado considerado.

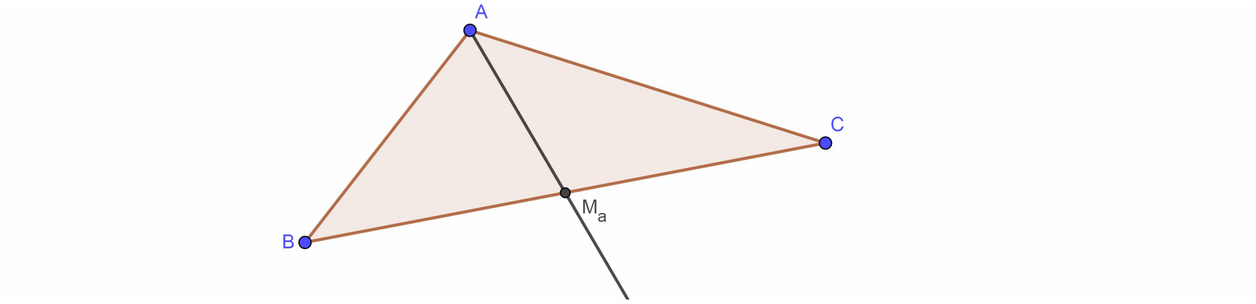
Exemplo 6. Dado um triângulo $\triangle ABC$ qualquer determine suas medianas.

Construção:

1. Determine o ponto médio M_a do lado $\overline{BC}$, oposto ao vértice A.

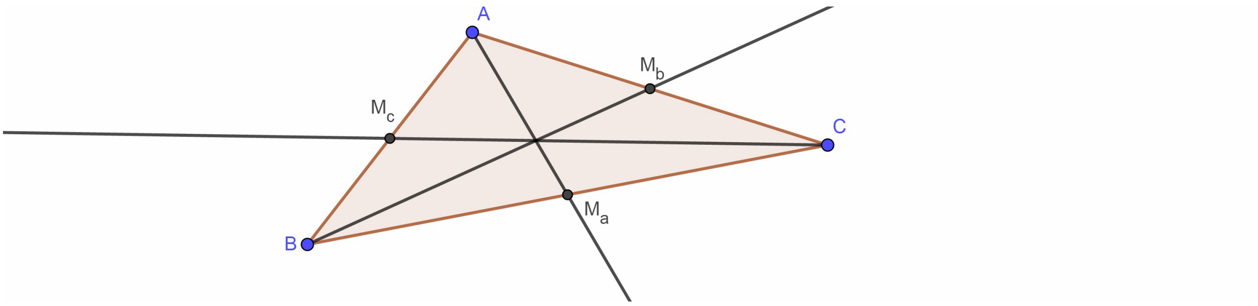


2. Trace a semirreta $\overrightarrow{AM_a}$, que será a mediana referente ao vértice A.



3. De maneira análoga, construa, respectivamente, as medianas dos lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ do triângulo $\triangle ABC$.

Figura 21 – Mediana de um triângulo



Logo as medianas desejadas são as semiretas $\overrightarrow{AM_a}$, $\overrightarrow{BM_b}$ e $\overrightarrow{CM_c}$.

Observação 5. Pode-se mostrar que as três medianas encontram-se em um único ponto, interior ao triângulo considerado, na razão $1:2$, ou seja, está localizado a uma distância do vértice igual a $\frac{2}{3}$ do segmento determinado pela mediana.

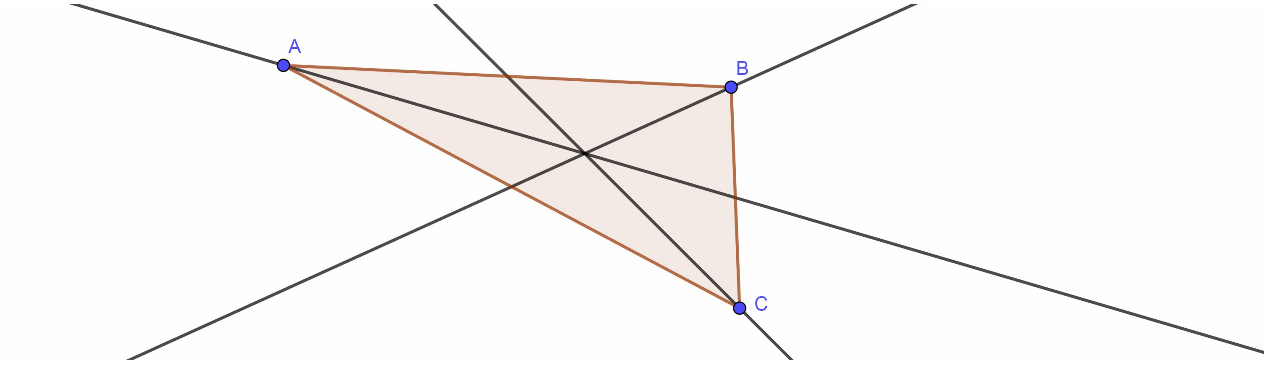
3.6.2 Baricentro

Pode-se mostrar que o encontro das medianas de um triângulo ocorre em um único ponto. Com isso temos a seguinte definição:

Definição 14. O baricentro é o lugar geométrico da intersecção das medianas de um triângulo qualquer e sempre será um ponto interior ao mesmo.

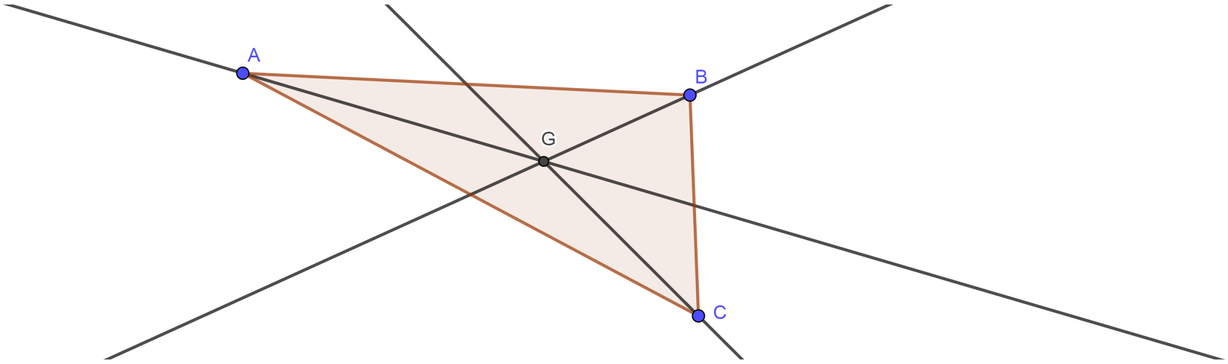
Exemplo 7. Dado um triângulo $\triangle ABC$, determine o ponto que representa o baricentro desse triângulo.

1. Construa as medianas (como fizemos no exemplo 6) dos lados do triângulo dado.



2. Denote o ponto de intersecção das medianas pelo ponto G, este é o baricentro do triângulo em questão.

Figura 22 – Baricentro de um triângulo



Observação 6. Pode-se mostrar que o baricentro separa cada mediana na razão 1:2, ou seja, está localizado a uma distância do vértice igual a $\frac{2}{3}$ do segmento que representa a mediana.

3.6.3 Incentro

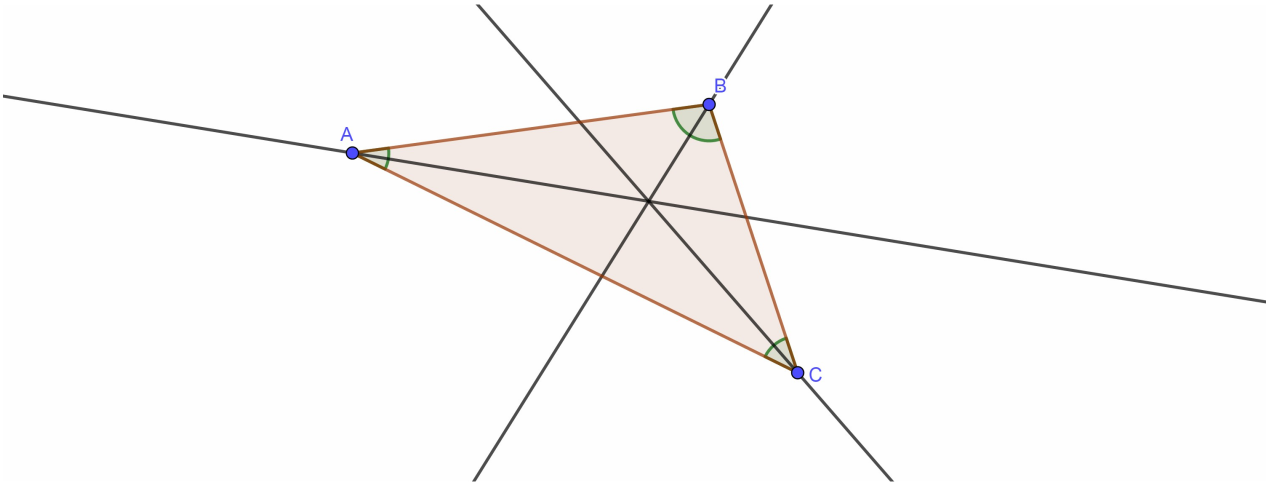
Pode-se mostrar que o encontro das bissetrizes de um triângulo ocorrem em um único ponto. Com isso temos a seguinte definição:

Definição 15. O incentro de um triângulo é o lugar geométrico da intersecção das bissetrizes desse triângulo.

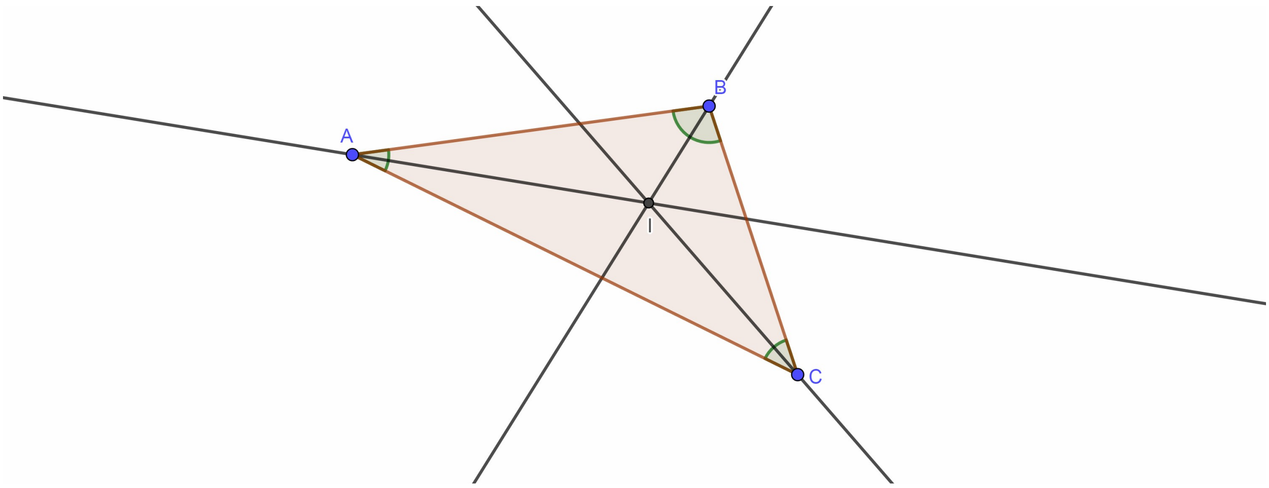
Exemplo 8. Dado um triângulo $\triangle ABC$, determine o ponto que representa o incentro desse triângulo.

Construção:

1. Construa as bissetrizes (como fizemos em 3.5.9) referentes aos ângulos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$.



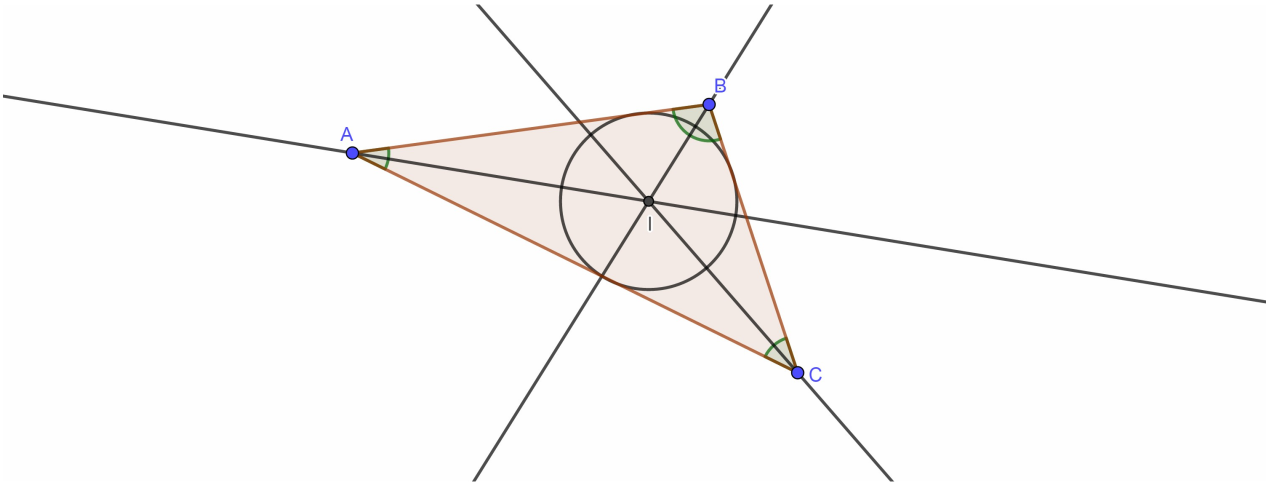
2. Denote o ponto de intersecção das bissetrizes pelo ponto I, este é o incentro do triângulo em questão.



Observação 7. Pode-se mostrar que por meio do incentro podemos construir a circunferência inscrita (veja figura a seguir) em um triângulo.

A circunferência tendo por centro, o incentro, e por raio, o segmento que vai do incentro até qualquer um dos lados do triângulo em questão, de forma perpendicular a este, já que é sobre esta reta perpendicular que se encontra a menor distância entre o centro e o lado.

Figura 23 – Incentro de um triângulo



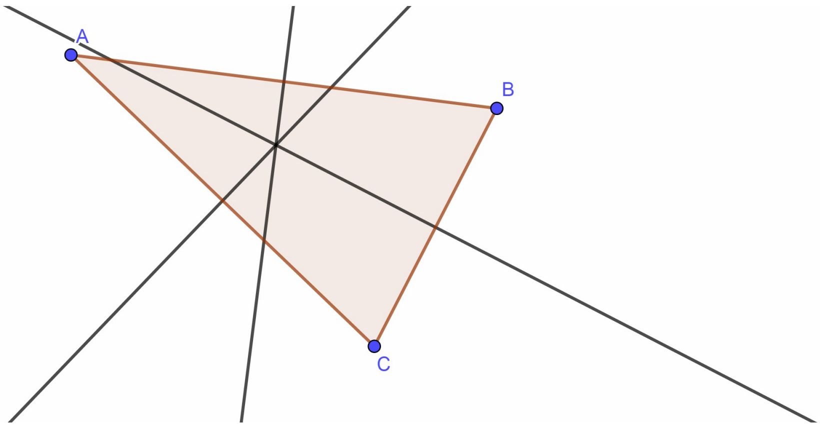
3.6.4 Circuncentro

Pode-se mostrar que o encontro das mediatrizes de um triângulo ocorre em um único ponto. Com isso temos a seguinte definição:

Definição 16. O circuncentro de um triângulo qualquer é o lugar geométrico da intersecção das mediatrizes de seus lados.

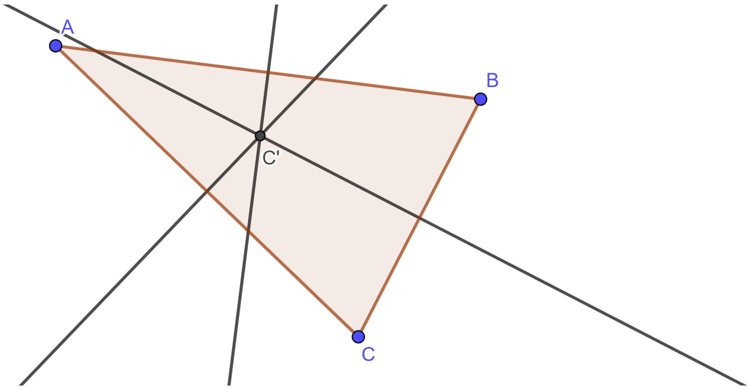
Exemplo 9. Dado um triângulo $\triangle ABC$ qualquer, determine o ponto que representa o circuncentro desse triângulo.

1. Construa as mediatrizes (como fizemos no exemplo 4) dos lados do triângulo dado.

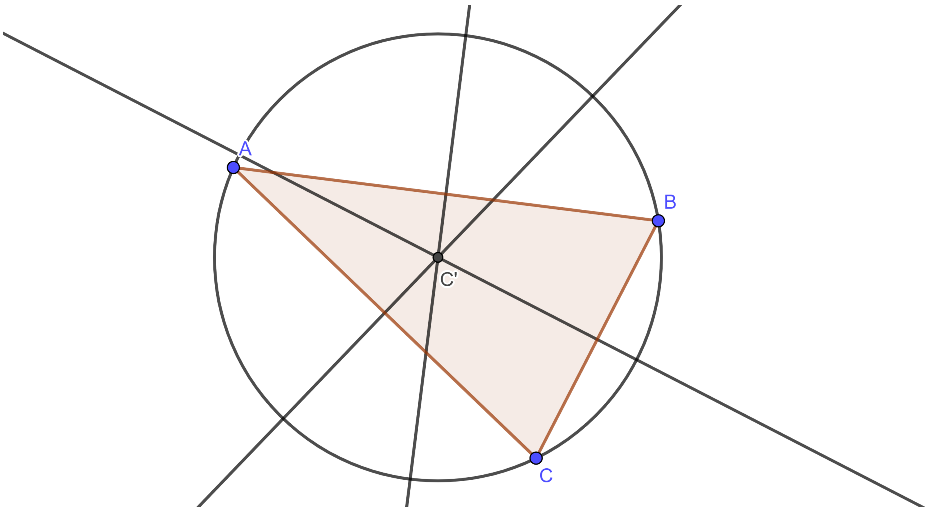


2. Denote o ponto de intersecção das mediatrizes pelo ponto C', este é o circuncentro do triângulo em questão.

Figura 24 – Circuncentro de um triângulo



Observação 8. Pode-se mostrar que a circunferência cujo centro é o o circuncentro, é a circunferência circunscrita ao triângulo dado.



3.6.5 Ortocentro

Observação 9. Pode-se mostrar que as três alturas de um triângulo encontram-se em um mesmo ponto que chamamos de ortocentro (vide exemplo 10).

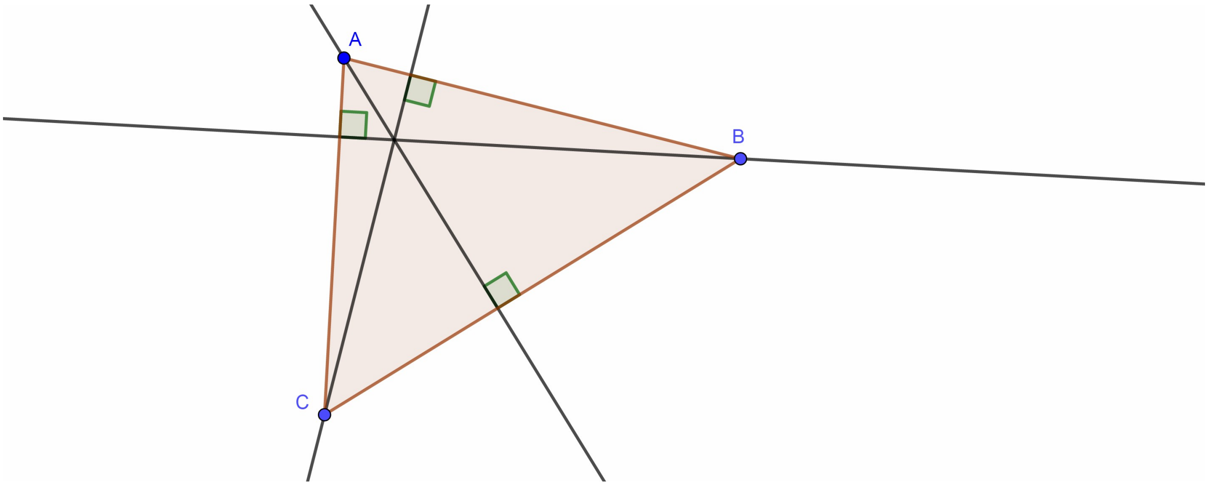
Com isso temos a seguinte definição:

Definição 17. O ortocentro é o lugar geométrico da intersecção das alturas de um triângulo qualquer.

Visto que a altura relativa a um vértice do triângulo é a reta que passa por este vértice e intersecta o lado oposto ao vértice dado, formando um ângulo reto.

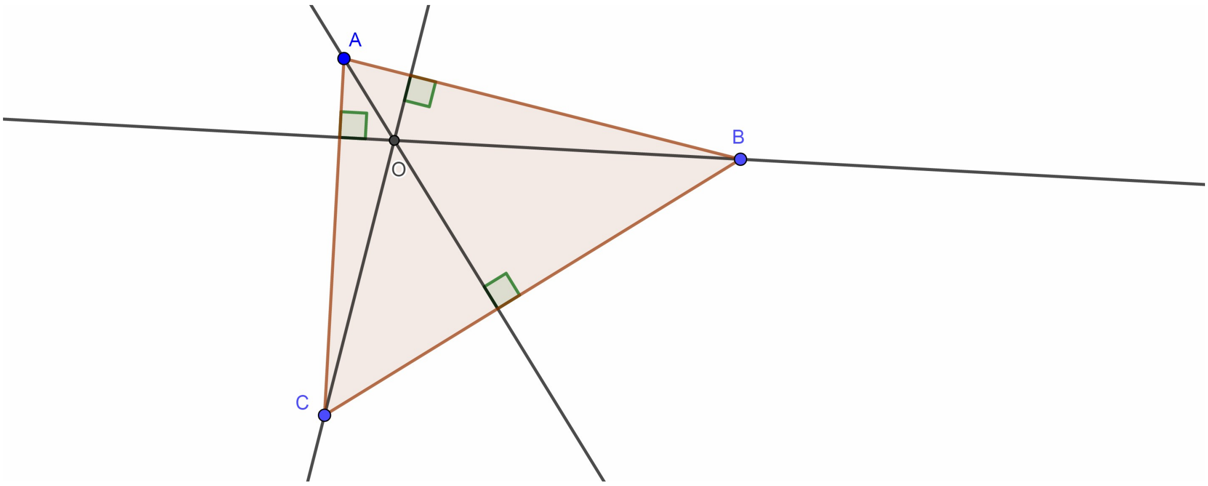
Exemplo 10. Dado um triângulo $\triangle ABC$, determine o ponto que representa o ortocentro desse triângulo.

1. Construa as alturas relativas aos lados do triângulo dado.



2. Denote o ponto de intersecção das alturas pelo ponto O, este é o ortocentro do triângulo em questão.

Figura 25 – Ortocentro de um triângulo



Note:

- O ortocentro encontra-se na região interna do triângulo se este é acutângulo.
- O ortocentro coincide com o vértice do ângulo reto se for retângulo.
- O ortocentro encontra-se fora do triângulo no caso deste ser obtusângulo.

CAPÍTULO

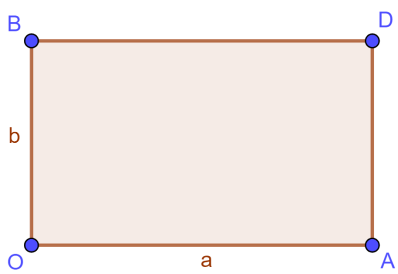
4

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

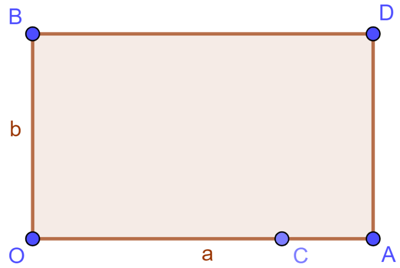
Na antiguidade, resolver uma equação do tipo $ax = bc$ era bem mais do que apenas alguns cálculos algébricos, significava encontrar a altura x de um retângulo de base a que tivesse a mesma área de um retângulo de dimensões b e c, ou seja, resolvia-se por meio de construções geométricas.

A seguir passaremos à construção, com régua e compasso, da solução do problema acima, por meio de vários passos, a saber:

1. Constrói-se, geometricamente, o retângulo $OBDA$ (veja figura abaixo), de tal modo que $OA = a$ e $OB = b$.

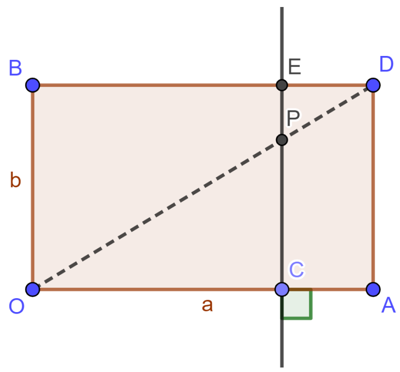


2. Sobre o lado $\overline{OA}$, encontra-se o ponto C, de tal modo que (veja figura a seguir) $OC = c$

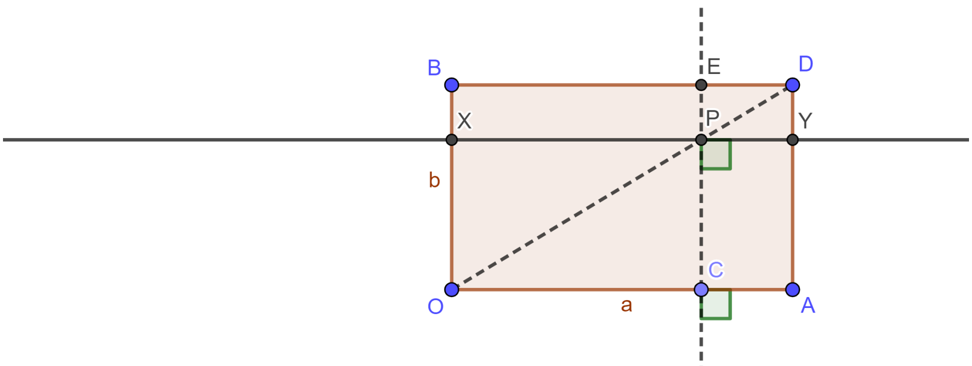


Observemos que, caso $c > a$, então o ponto C estará no prolongamento do lado $\overline{OA}$.

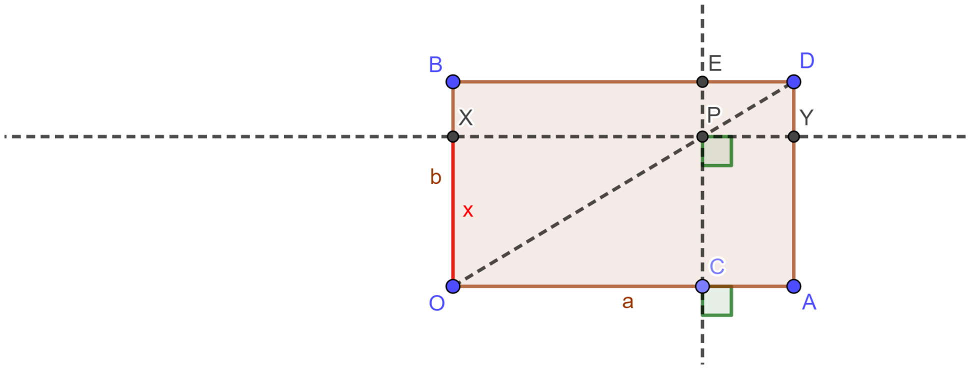
3. Traça-se, pelo ponto C, a reta paralela à reta que contém lado $\overline{OB}$. Esta reta encontrará a diagonal (ou o prolongamento da mesma) $\overline{OD}$, do retângulo $OBDA$, em um ponto que denotaremos por P e também encontrará o lado $\overline{BD}$, do retângulo $OBDA$, em um ponto que denotaremos por E (veja figura abaixo).



4. Traça-se, pelo ponto P, a reta paralela à reta que contém o lado $\overline{OA}$. Esta encontrará os lados $\overline{OB}$ e $\overline{AD}$, do retângulo $OADB$, nos pontos que denotaremos por X e Y, respectivamente (veja figura abaixo).



5. A solução da nossa equação será $x = OX$



Justificativa:

1. Como, por construção, as retas $\overleftrightarrow{OA}$ e $\overleftrightarrow{XY}$, $\overleftrightarrow{OB}$ e $\overleftrightarrow{CE}$, $\overleftrightarrow{CE}$ e $\overleftrightarrow{AD}$ são paralelas, segue que:

   · os triângulos ΔODA, ΔOBD são congruentes (caso LLL);

   · os triângulos ΔOPC, ΔOXP são congruentes (caso LLL);

   · os triângulos ΔPDY, ΔPED também são congruentes (caso LLL).

   Portanto, dois a dois, eles têm mesma área.

2. Temos

$$\text{área}(\Delta OBD) = \text{área}(\Delta ODA) \tag{4.1}$$

e

$$\text{área}(\Delta OBD) = \text{área}(\Delta OXP) + \text{área}(\square XBEP) + \text{área}(\Delta PED) \tag{4.2}$$

$$\text{área}(\Delta ODA) = \text{área}(\Delta OPC) + \text{área}(\square CPYA) + \text{área}(\Delta PDY)\,. \tag{4.3}$$

Sabemos que

$$\text{área}(\Delta OPC) = \text{área}(\Delta OXP) \quad \text{e} \tag{4.4}$$

$$\text{área}(\Delta PDY) = \text{área}(\Delta PED)\,. \tag{4.5}$$

Logo, de (4.1), (4.2), (4.3), (4.4) e (4.5), segue que

$$\text{área}(\square XBEP) = \text{área}(\square CPYA)\,. \tag{4.6}$$

Logo os retângulos $XBEP$ e $CPYA$ têm mesma área.

3. Temos também

$$\begin{aligned}
\text{área}(\square OBEC) &= \text{área}(\Delta OPC) + \text{área}(\Delta OXP) + \text{área}(\square XBEP) \\
&\overset{(4.4)}{=} 2\,\text{área}(\Delta OPC) + \text{área}(\square XBEP) \\
&\overset{(4.6)}{=} 2\,\text{área}(\Delta OCP) + \text{área}(\square CPYA) \\
&\overset{(4.4)}{=} \text{área}(\Delta OCP) + \text{área}(\Delta OXP) + \text{área}(\square CPYA) \\
&= \text{área}(\square OXYA).
\end{aligned}$$

Logo, os retângulos $OBEC$ e $OXYA$ têm mesma área, ou seja,

$$OC \cdot OB = OA \cdot OX\,, \quad \text{isto é,} \quad b\,c = a\,x\,.$$

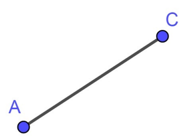
Assim encontramos, geometricamente, a solução x para nossa equação.

Para ilustrar a beleza das construções geométricas, assim como suas demonstrações, apresentarei ao longo deste trabalho, uma coletânea de exercícios que serão resolvidos detalhadamente. Note que as resoluções da quase totalidade de tais exercícios não irão requerer medidas, ou seja, podemos realizá-las apenas com régua, não graduada, e compasso. Em alguns deles surgirão alusões que poderão nos remeter à ideia de medidas, mas ocorrerão apenas por conta de notações, não prejudicando, na resolução, o uso somente da régua, não graduada, e compasso.

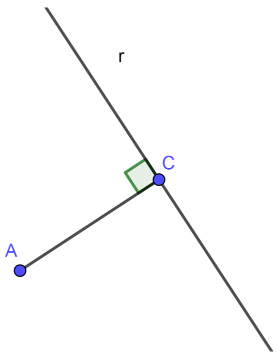
Exercício 4.0.1. Construir um quadrado conhecendo sua diagonal.

Resolução:

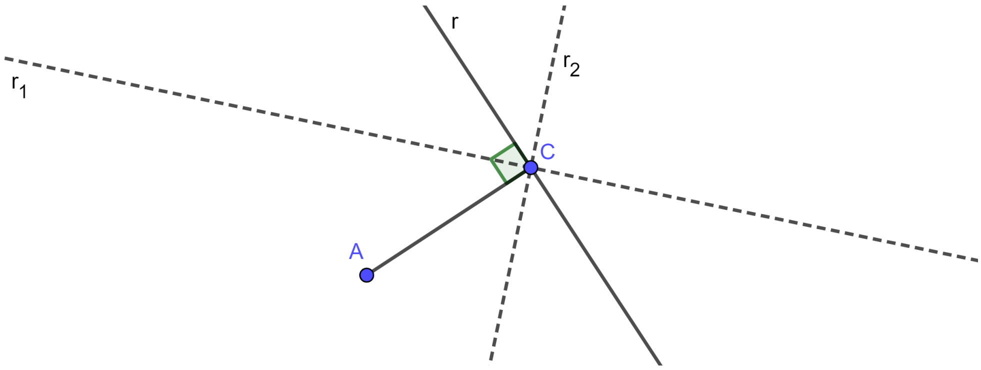
1. Sejam os pontos A e C taia que o segmento $\overline{AC}$ seja a diagonal dada.



2. Trace uma reta perpendicular ao segmento $\overline{AC}$, passando pelo ponto C. Nomeie a reta perpendicular por r.

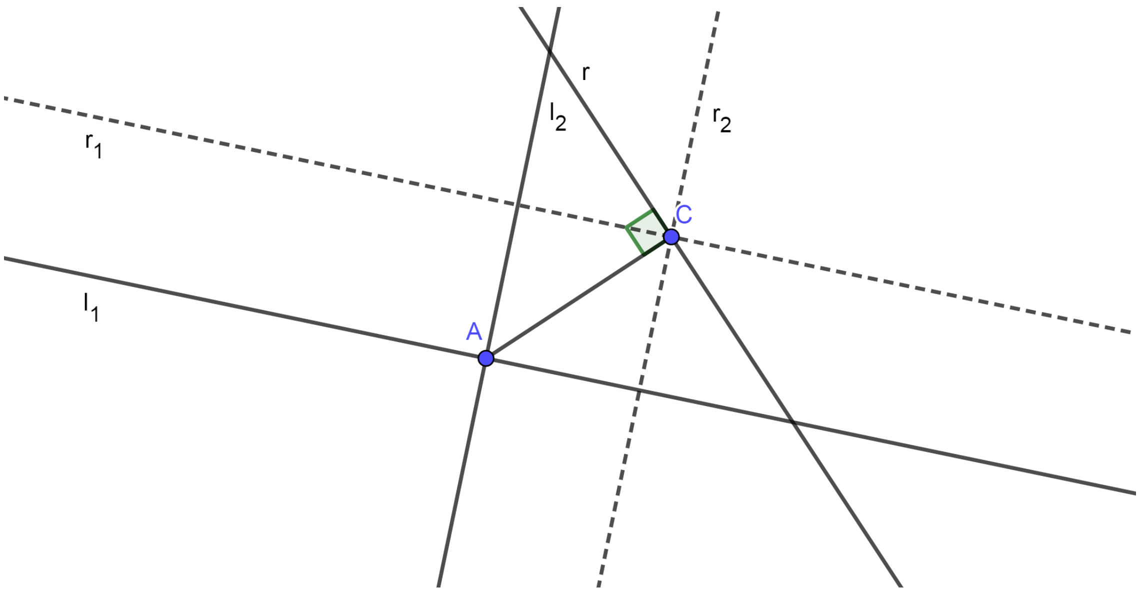


3. Trace as bissetrizes entre o segmento $\overline{AC}$ e a reta r (trace por ambos os lados do segmento $\overline{AC}$) e nomeie as bissetrizes por r_1 e r_2.

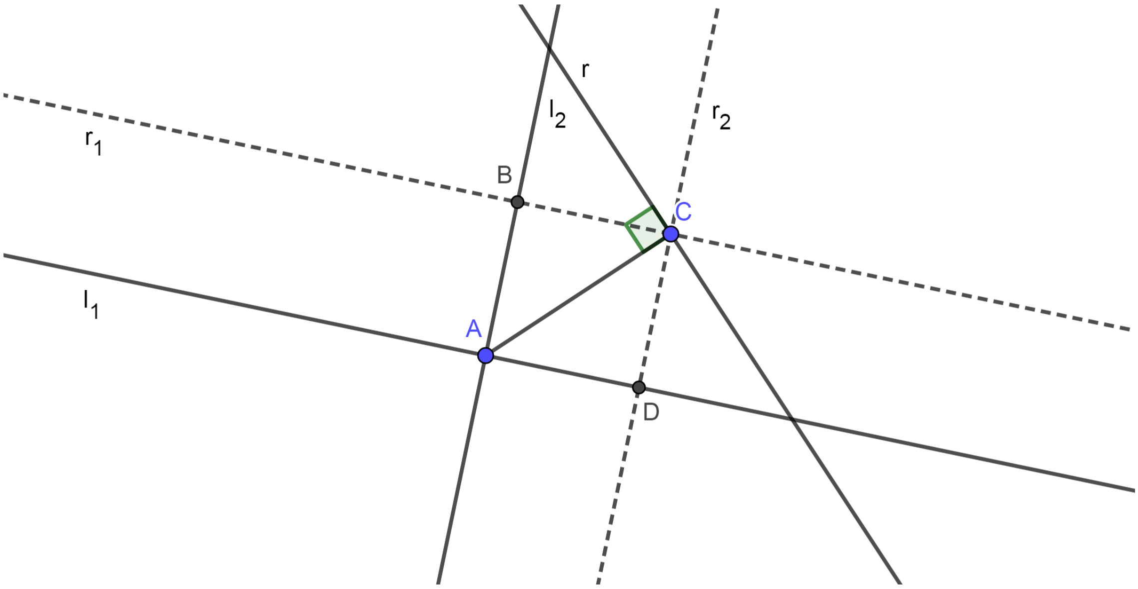


4. Note que dois dos lados do quadrado em questão encontram-se sobre as bissetrizes r_1 e r_2.

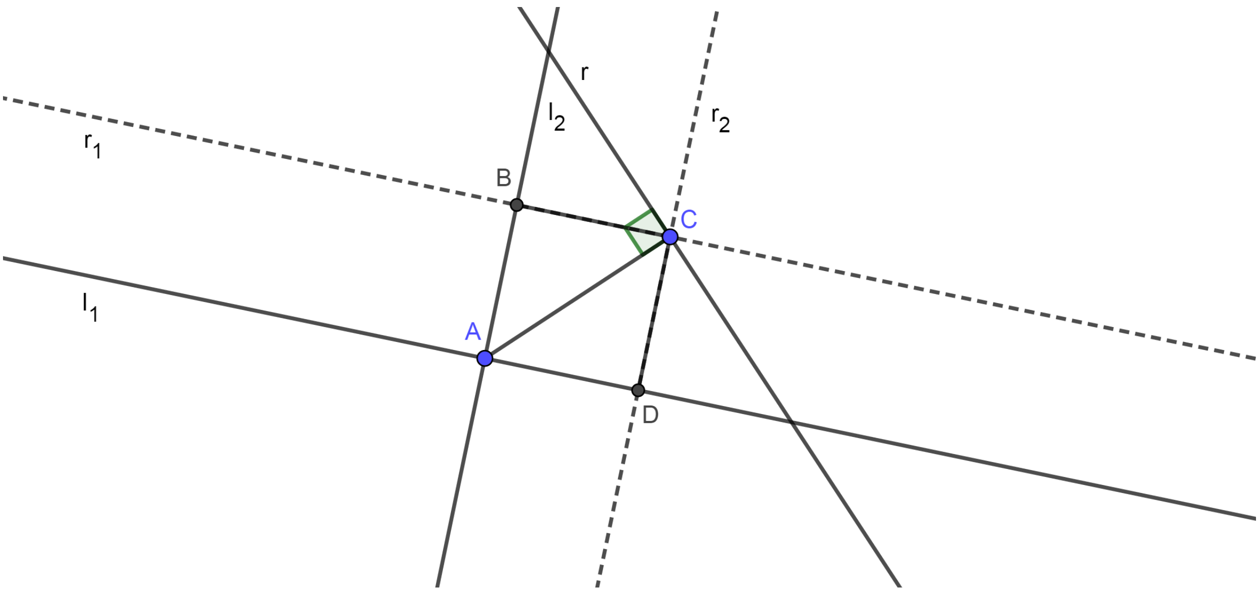
5. Trace uma reta paralela à bissetriz r_1 passando pelo ponto A, nomeie-a por l_1, e uma reta paralela à bissetriz r_2 também passando pelo ponto A, nomeie-a por l_2.



6. Denote os pontos de intersecção entre a bissetriz r_1 e a reta paralela l_2, denote-o pelo ponto B, e o ponto de intersecção da bissetriz r_2 com a reta paralela l_1 denote pelo ponto D.

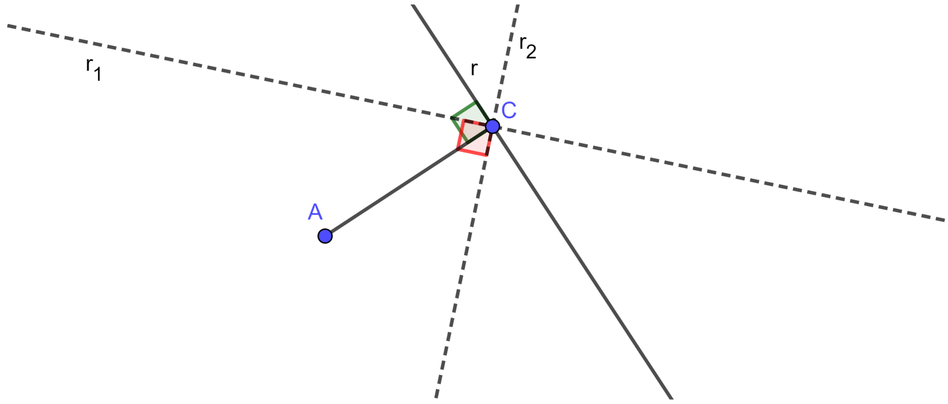


7. Trace os segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ e então temos o quadrado $ABCD$ desejado.

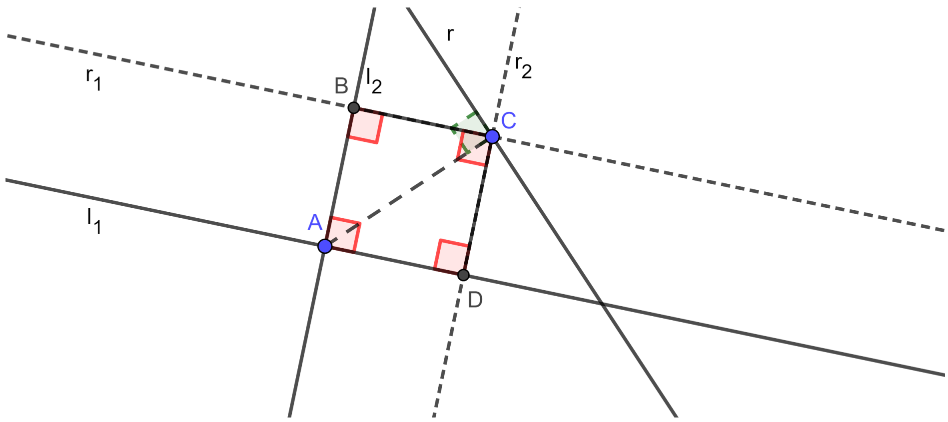


Justificativa:

Note que dois lados do quadrado em questão se encontram sobre as bissetrizes r_1 e r_2 porque como o segmento $\overline{AC}$ é a diagonal dada, temos que o ângulo entre as bissetrizes r_1 e r_2 é um ângulo reto (pois a reta r é perpendicular à diagonal $\overline{AC}$ por construção).



Em seguida basta perceber que os outros dois lados do quadrado estarão sobre as retas paralelas l_1 e l_2 pois se encontram a uma mesma distância das bissetrizes r_1 e r_2 por construção, respectivamente. Observe que em seguida encontramos os vértices B e D.
Logo, $ABCD$ é um quadrado por construção.

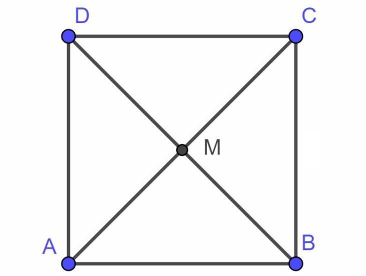


Exercício 4.0.2. Mostre que as diagonais de um quadrado cruzam-se perpendicularmente e nos seus respectivos pontos médios [1].
labelitm:Exer2

Resolução:

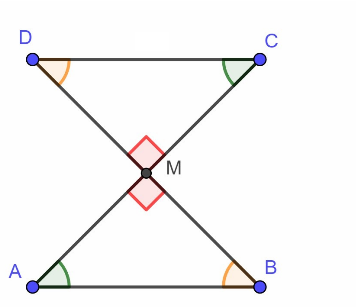
Observe a figura seguinte, onde $ABCD$ é um quadrado, os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são diagonais e o segmento $\overline{BC}$ é um lado do quadrado dado:

[1] Propriedade geral de paralelogramos: as diagonais intersectam-se nos seus respectivos pontos médios.



1. Seja o ponto M a intersecção das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$.

2. Após traçar as diagonais temos quatro triângulos: $\triangle MAB$, $\triangle MBC$, $\triangle MCD$ e $\triangle MDA$ com o vértice M em comum e lados congruentes $\overline{AD} \equiv \overline{DC} \equiv \overline{CB} \equiv \overline{BA}$. Note que $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ e $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$, logo:



Os triângulos $\triangle MCD$ e $\triangle MAB$ são congruentes pelo caso ALA[2].

Veja:

- $\widehat{D} \equiv \widehat{B}$ são ângulos alternos internos
- $\overline{DC} \equiv \overline{AB}$
- $\widehat{C} \equiv \widehat{A}$ são ângulos alternos internos

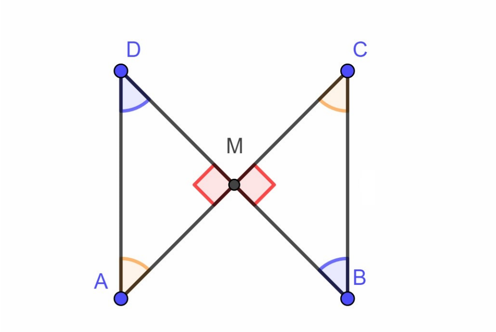
Logo $\overline{AM} \equiv \overline{MC}$ e $\overline{BM} \equiv \overline{MD}$.

Portanto M é o ponto médio dos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$.

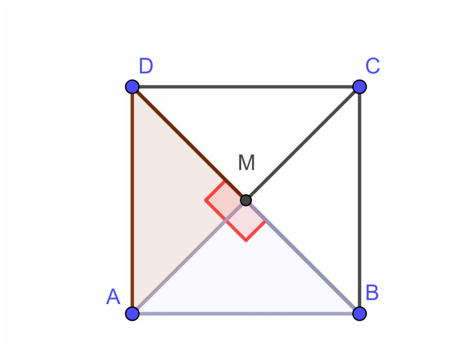
Então as diagonais de um quadrado cruzam-se em seus pontos médios.

Analogamente, os triângulos $\triangle MBC$ e $\triangle MDA$ são congruentes pelo caso ALA.

[2] Veja o caso de congruência ALA em (2).



3. Analisemos agora os triângulos $\triangle MAB$ e $\triangle MDA$:



Temos $\triangle MAB \equiv \triangle MDA$ pelo caso LLL pois:

- $\overline{AD} \equiv \overline{AB}$ pois são lados do quadrado.
- $\overline{AM}$ lado comum dos triângulos em questão.
- $\overline{BM} \equiv \overline{MD}$ demonstrado anteriormente (vide 2.).

Portanto $\triangle MAB \equiv \triangle MDA$.

E ainda como os pontos B, M e D estão sobre uma única reta, os ângulos $\widehat{DMA}$ e $\widehat{AMB}$ somam dois ângulos retos.

Como os triângulos em questão são congruentes, os seus ângulos correspondentes também são congruentes, logo $\widehat{DMA} \equiv \widehat{AMB}$ são ângulos retos.

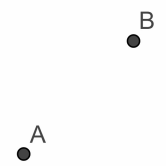
Concluímos então que as diagonais do quadrado se interceptam perpendicularmente em seus pontos médios.

Note que a justificativa acompanha a construção neste exercício.

Exercício 4.0.3. Construir um quadrado dados em posição, os pontos médios de dois lados adjacentes.

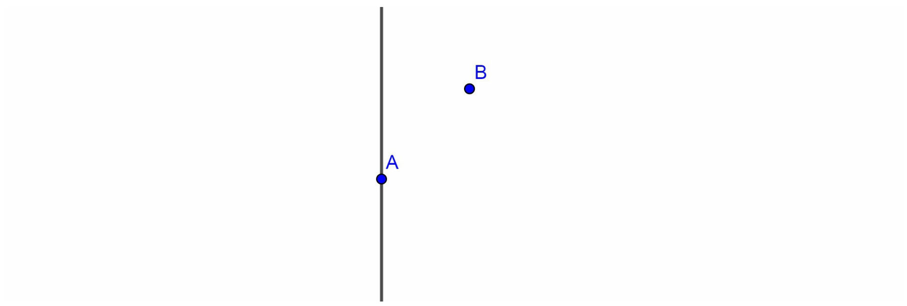
Resolução:

Suponhamos que sejam dados os pontos A e B, respectivamente, pontos médios de dois lados adjacentes do quadrado em questão como na figura abaixo.

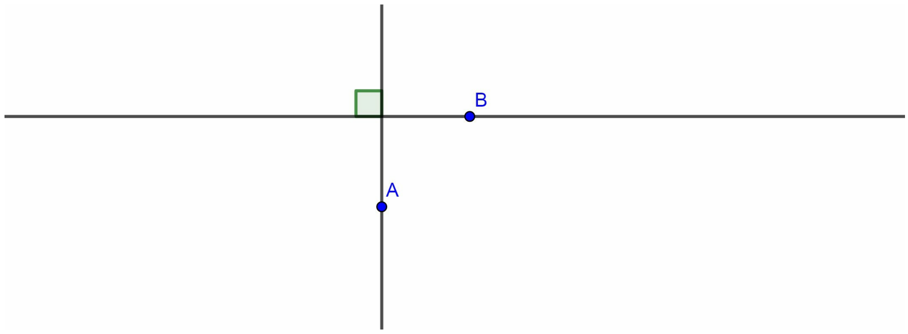


Façamos:

1. Traçar uma reta pelo ponto A dado.

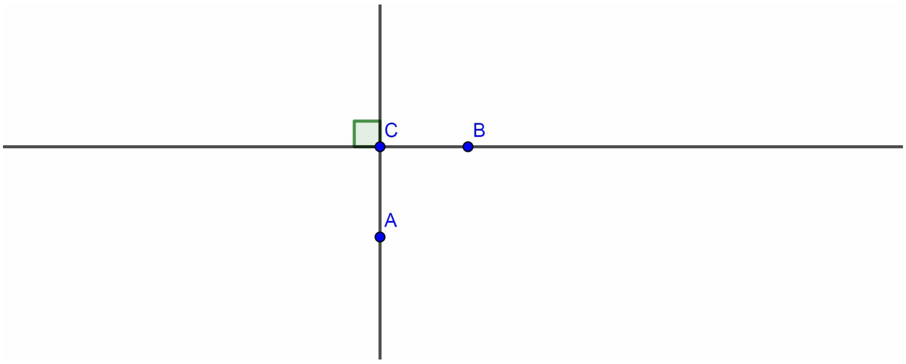


2. Traçar uma segunda reta pelo ponto B perpendicular[3] à primeira reta.

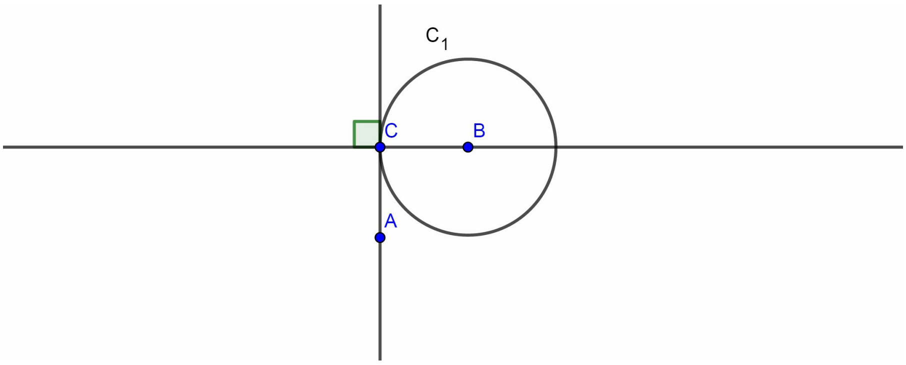


[3] Veja como construir retas perpendiculares em (3.5.2).

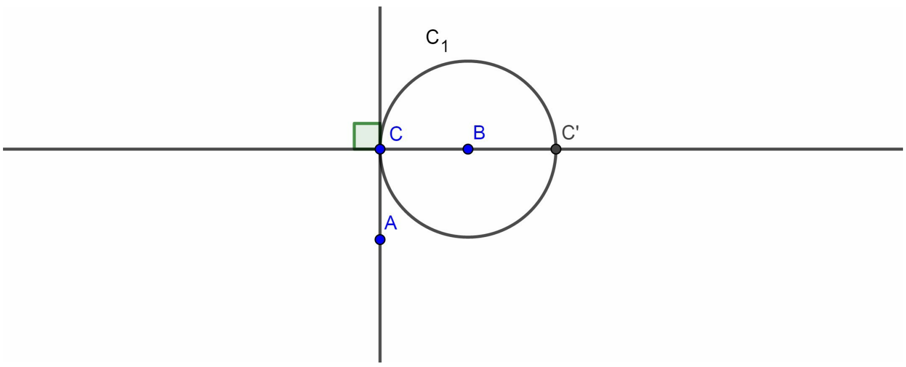
3. Denotar o ponto de intersecção entre as retas desenhadas, por C.



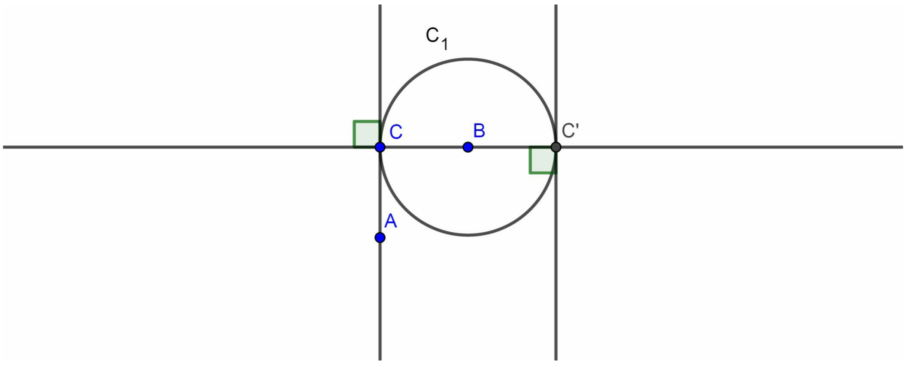
4. Desenhar a circunferência C_1 com centro no ponto B e raio igual ao segmento $\overline{BC}$.



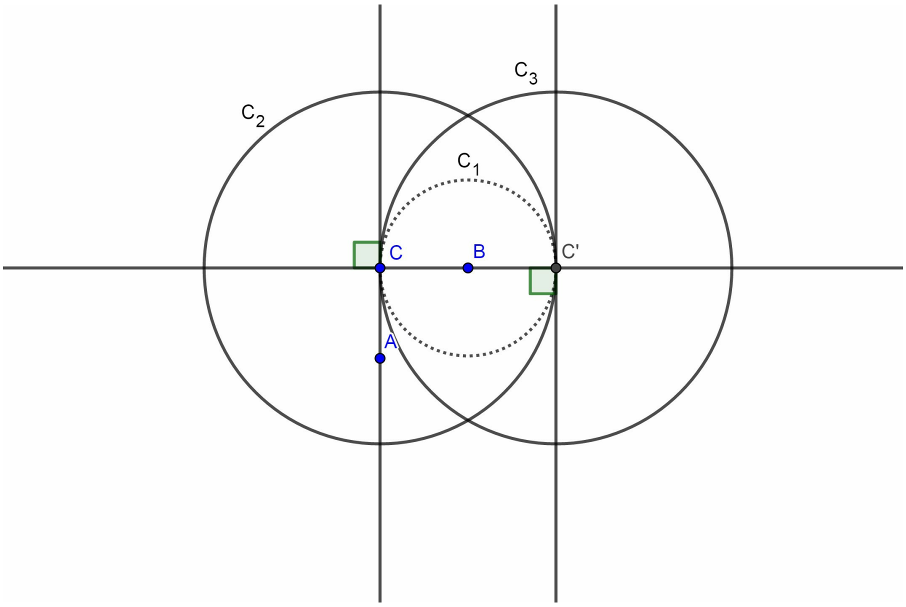
5. Denotar o ponto de intersecção entre a circunferência C_1 e a reta que contém o segmento $\overline{BC}$ por ponto C'.



6. Desenhar uma reta perpendicular ao segmento $\overline{CC'}$ intersectando-a no ponto C'.

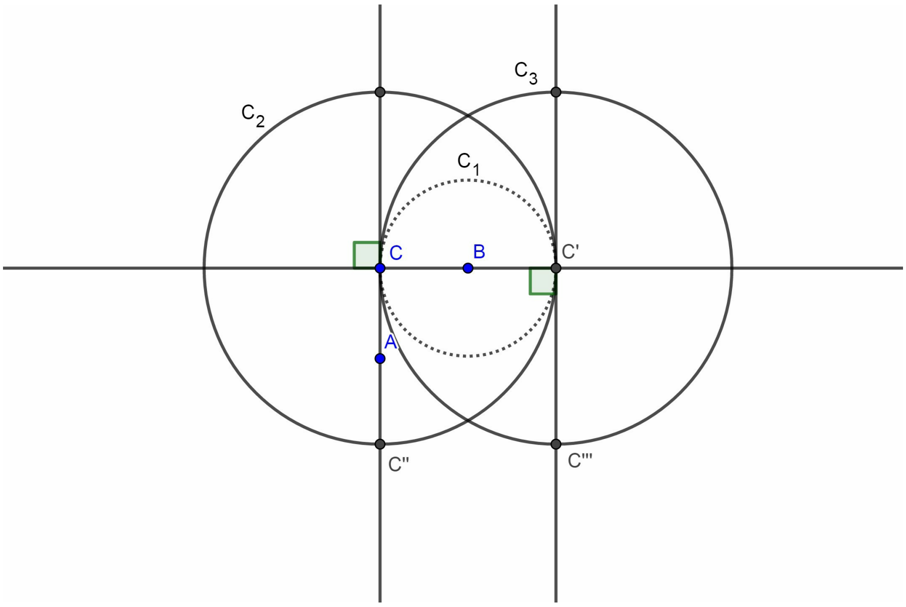


7. Construir as circunferências C_2 e C_3 de raio igual ao segmento $\overline{CC'}$ (que é o lado do quadrado) e centros nos pontos C e C', respectivamente.

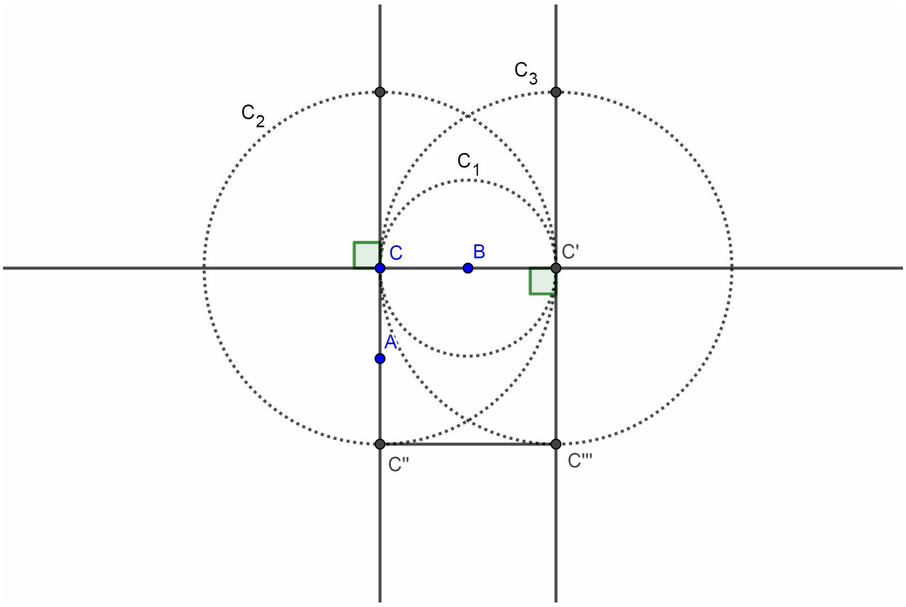


8. Denotar os pontos de intersecção entre as circunferências C_2 e C_3 com as retas perpendiculares a reta que contém o segmento $\overline{CC'}$, por C'' e C''', respectivamente.

   Note que teremos dois pontos de intersecção para cada circunferência gerando dois quadrados simétricos com relação ao raio $\overline{CC'}$.



9. Traçar o segmento $\overline{C''C'''}$ e o quadrado $CC'C'''C''$ é o desejado.



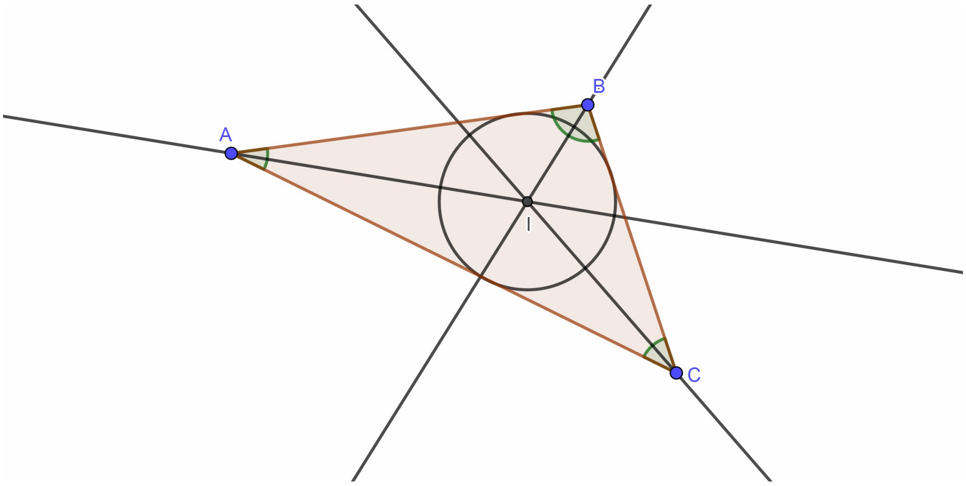
Justificativa:

Note que os lados do quadrado equivalem aos raios das circunferências C_1, C_2 e C_3 que são de mesmo comprimento, por construção, nos fornecendo o quadrado desejado.

Exercício 4.0.4. Construir a circunferência inscrita em um triângulo dado.

Resolução:

Basta encontrar o incentro[4], que é o encontro das bissetrizes e o centro da circunferência inscrita.



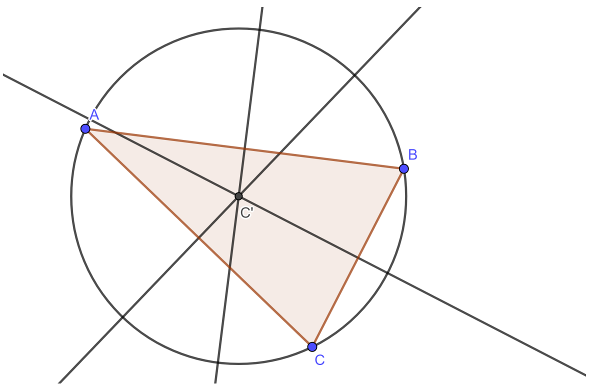
Exercício 4.0.5. Construir uma circunferência por três pontos não colineares dados.

Resolução:

Note que a partir de três pontos não colineares podemos construir um triângulo.

Logo basta construir a circunferência circunscrita a este triângulo.

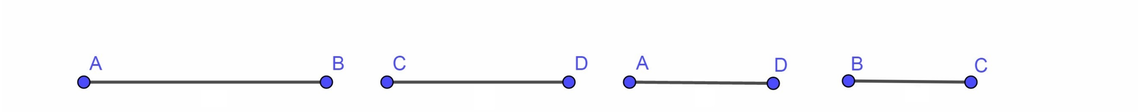
Para tanto devemos determinar o circuncentro[5] do triângulo em questão e desenhar a circunferência desejada.



Exercício 4.0.6. Construir um trapézio[6] conhecendo as bases representadas pelos segmentos $\overline{AB}$

[4] Veja como determinar o incentro no exemplo (8).
[5] Veja como determinar o circuncentro no exemplo (9).
[6] Trapézios são quadriláteros que possuem um par de lados paralelos.

e $\overline{CD}$ e os outros dois lados representados pelos segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ dados na figura abaixo.



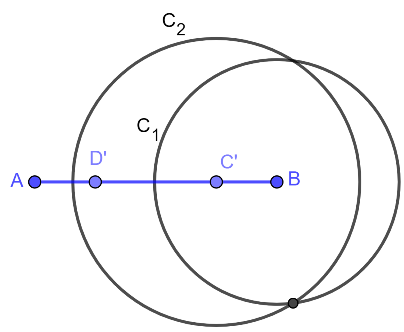
Resolução:

1. Trace o segmento de reta $\overline{AB}$ e denote o ponto C' sobre o segmento $\overline{AB}$ (considere $AB > CD$, note que se $AB < CD$, a construção será análoga), de modo que $\overline{AC'} \equiv \overline{CD}$.

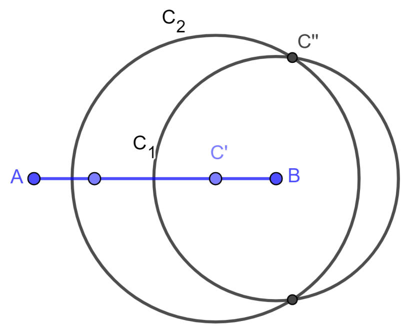
2. Denote o ponto D' sobre o segmento $\overline{AB}$ de modo que $\overline{BD'} \equiv \overline{CD}$.

Note que os passos (1) e (2) são realizados utilizando o procedimento de transporte de segmento (vide exemplo 2).

3. Construa as circunferências C_1 e C_2 com centro nos pontos B e C', respectivamente, com raios $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$, respectivamente.

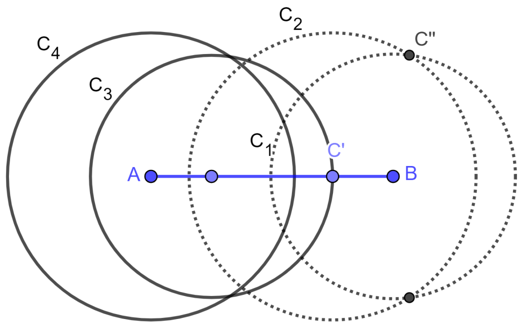


4. Denote o ponto C'' que é a intersecção das circunferências C_1 e C_2.

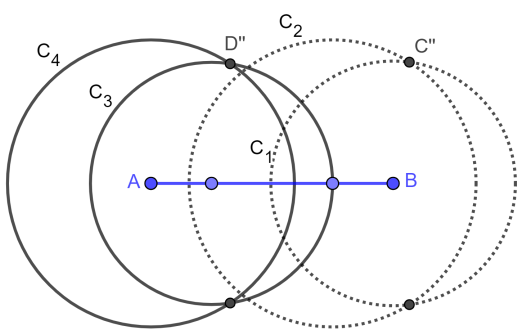


Note que teremos dois pontos de intersecção entre as circunferências C_1 e C_2 que nos fornecerão dois trapézios congruentes.

5. Construa as circunferências C_3 e C_4 com centro nos pontos D' e A, respectivamente, com raios $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$, respectivamente.

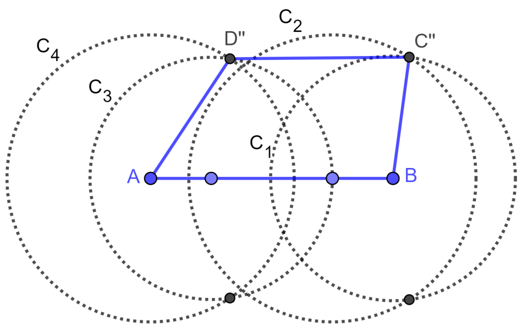


6. Denote o ponto D'', a intersecção das circunferências C_3 e C_4.

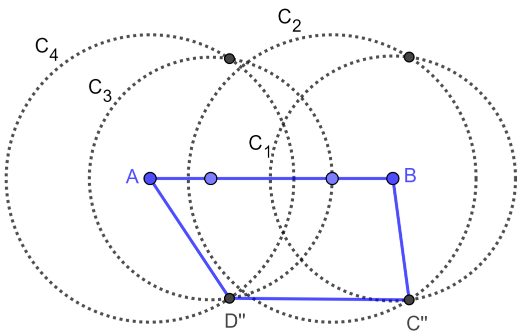


Note que novamente teremos dois pontos de intersecção entre as circunferências construídas, o que nos confirma que teremos dois trapézios congruentes.

7. Finalmente ligando os pontos A, B, C'' e D'', teremos o trapézio desejado.



Caso tivéssemos usado os pontos de intersecção que estão no semiplano abaixo da reta que contém o segmento $\overline{AB}$, teríamos o seguinte trapézio:



Justificativa:

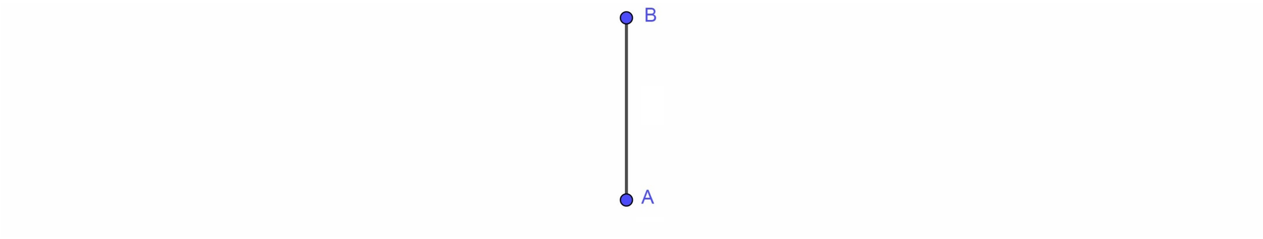
A intersecção das circunferências C_1 e C_2 resulta no vértice C do trapézio desejado porque $\overline{C''C'} \parallel \overline{AD''}$ são congruentes, recurso justificado pela definição de paralelogramo e pelo teorema da base média (vide teorema 2), visto que todo paralelogramo é, em particular, um trapézio.

Exercício 4.0.7. Construir um hexágono regular dado em posição um lado.

Segue a construção:

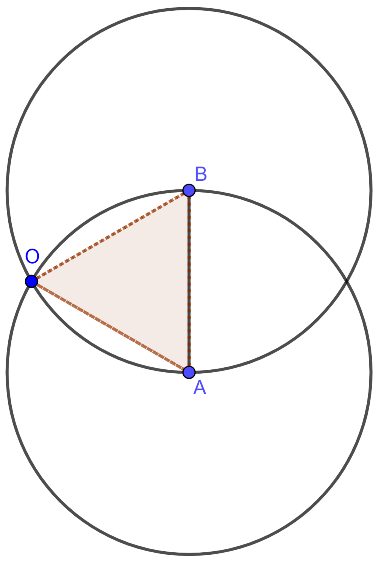
Seja o segmento de reta $\overline{AB}$, o lado dado do hexágono regular, temos:

1. Fixe o lado $\overline{AB}$ dado.



2. Construa um triângulo equilátero[7] a partir do lado $\overline{AB}$. Para tal construção basta traçar duas circunferências, com centros nos pontos A e B, e raio $\overline{AB}$. Em seguida, denotar o ponto O, de intersecção entre as circunferências construídas. Logo terá o triângulo equilátero $\triangle ABO$ desejado.

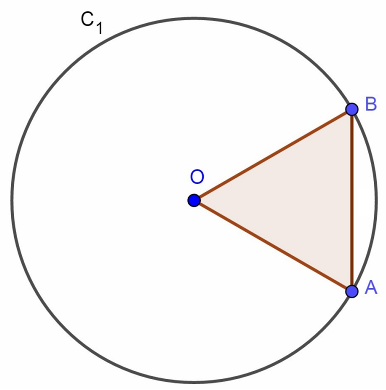
Observação 10. Note que um hexágono regular é composto por seis triângulos equiláteros.



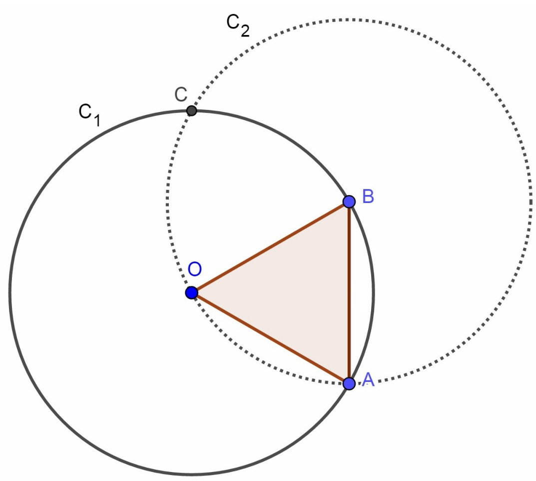
Note que o ponto O é o baricentro[8] do hexágono regular.

3. Construa a circunferência C_1 com centro no ponto O e raio $\overline{AB}$.

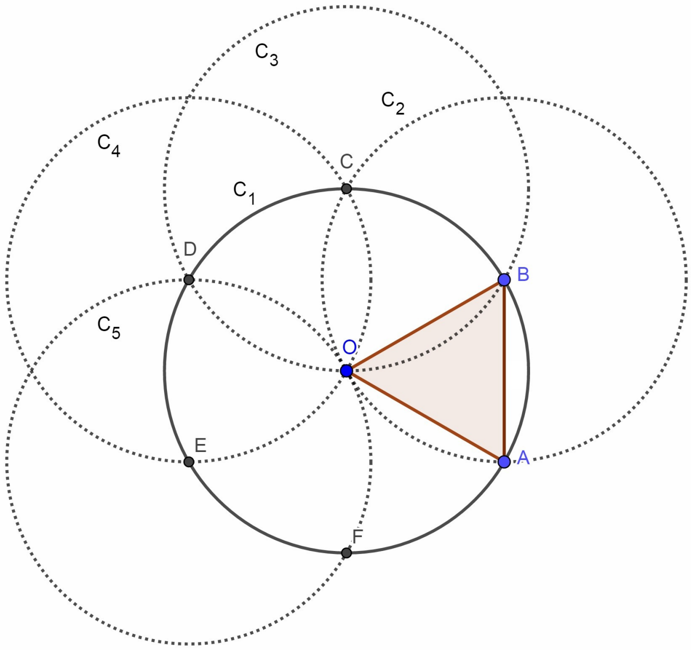
[7] Vide definição (2).
[8] Vide definição (14).



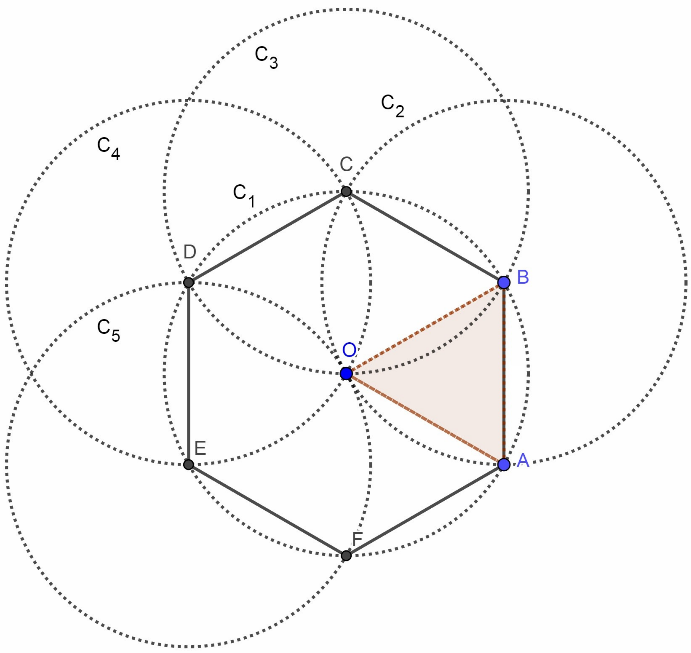
4. Ainda com raio $\overline{AB}$ construa a circunferência C_2 com centro em B e denote o ponto de intersecção entre as circunferâncias C_1 e C_2 por C.



5. Analogamente construa as circunferências C_3, C_4 e C_5 de raio $\overline{AB}$, a partir do ponto C, denotando suas intersecções com a circunferência C_1, pelos pontos D, E e F, respectivamente.



6. Trace os segmentos $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ e $\overline{FA}$ e temos o hexágono regular desejado.

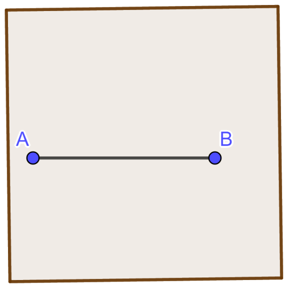


Justificativa:

Por construção, temos os seis triângulos equiláteros que geram o hexágono regular desejado.

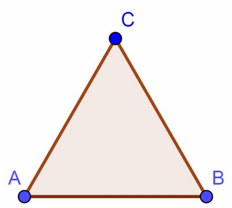
Exercício 4.0.8. Construir uma reta perpendicular ao segmento $\overline{AB}$, pelo ponto A, estando este ponto muito próximo da borda do papel.

Observe:

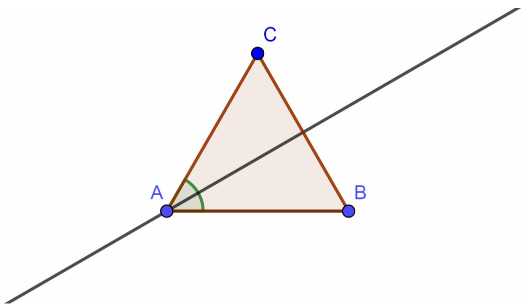


Resolução:

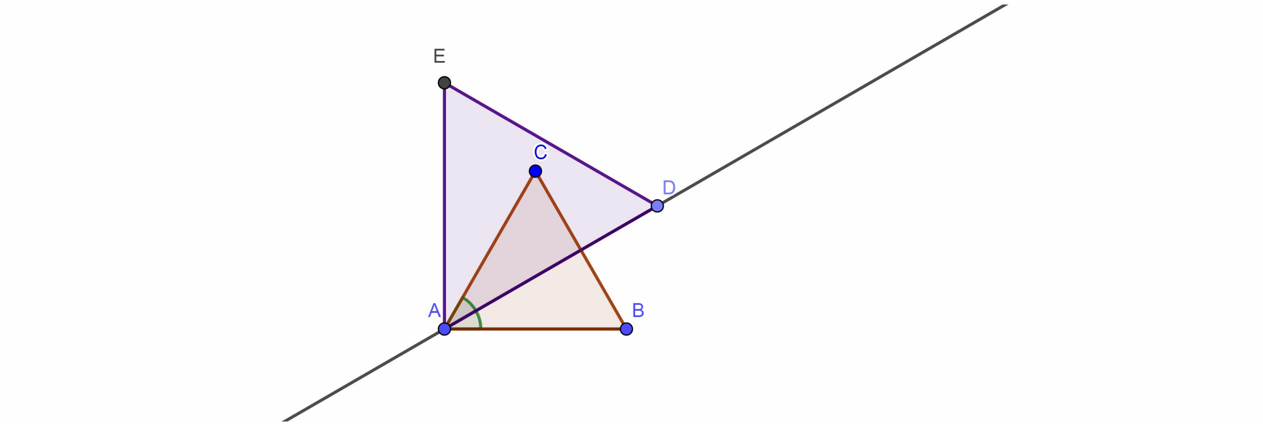
1. Dado o segmento $\overline{AB}$, construa um triângulo equilátero sobre esse segmento.



2. Trace a bissetriz de um dos ângulos do $\triangle ABC$, façamos a bissetriz do ângulo $\widehat{A}$.



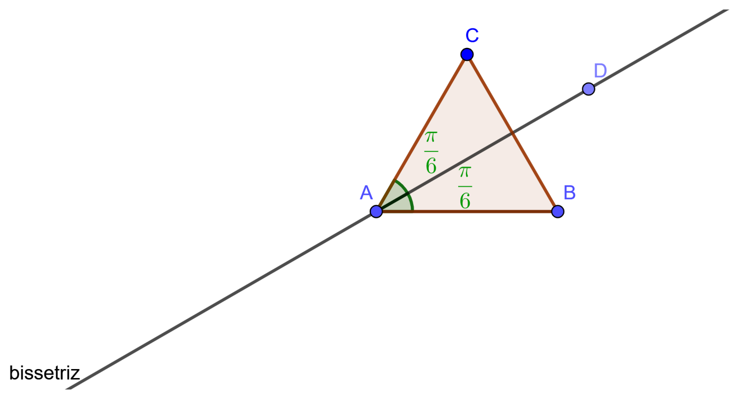
3. Denote um ponto D qualquer sobre a bissetriz e em seguida construa um triângulo equilátero $\triangle ADE$ sobre o segmento $\overline{AD}$.



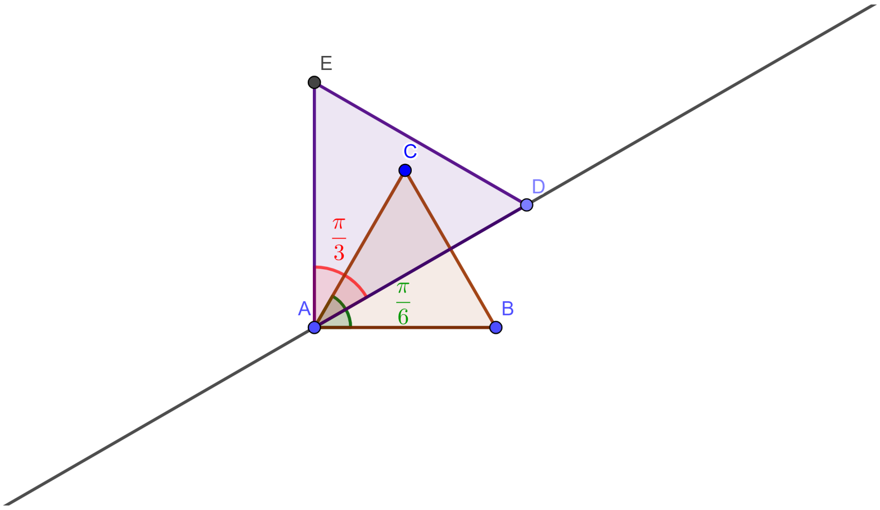
Logo o segmento $\overline{AE}$ é a perpendicular desejada.

Justificativa:

Como cada ângulo interno de um triângulo equilátero mede $\dfrac{\pi}{3}$, ao cconstruir a bissetriz, o ângulo $\widehat{DAB}$ medirá $\dfrac{\pi}{6}$.



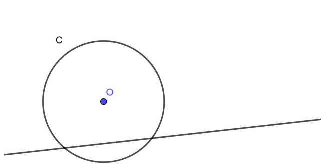
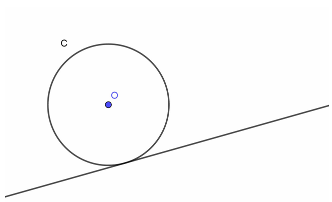
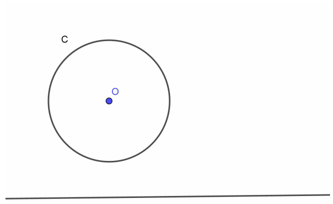
Ao construir um segundo triângulo equilátero sobre a mediatriz, temos um ângulo reto entre os segmentos $\overline{AE}$ e $\overline{AB}$, como queríamos demonstrar. Logo o segmento $\overline{AE}$ é perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ pelo ponto A.



Exercício 4.0.9. Dados em posição uma circunferência C e uma reta r, construir uma circunferência de raio dado, tangente à reta r e tangente exteriormente a C.

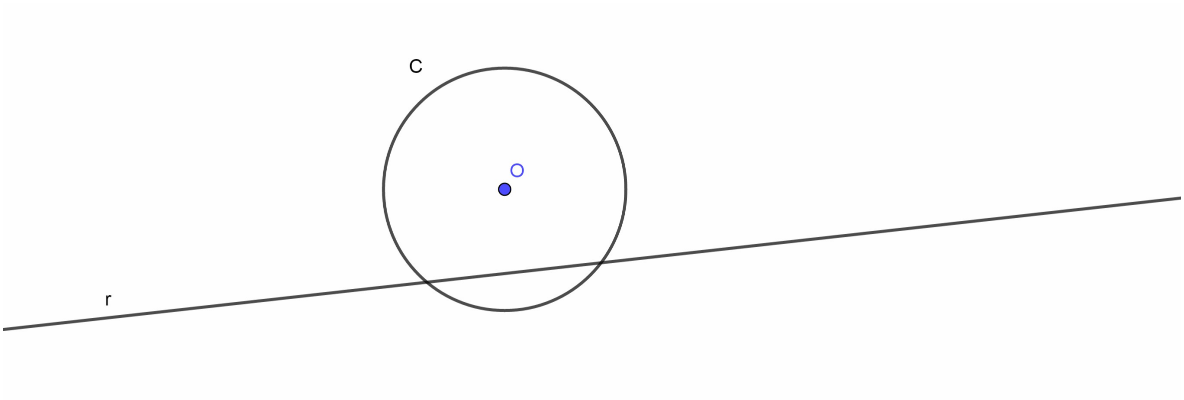
Resolução:

Dado o raio da circunferência a ser construída, digamos raio de comprimento a, e de acordo com o proposto pelo enunciado, temos que considerar três situações:

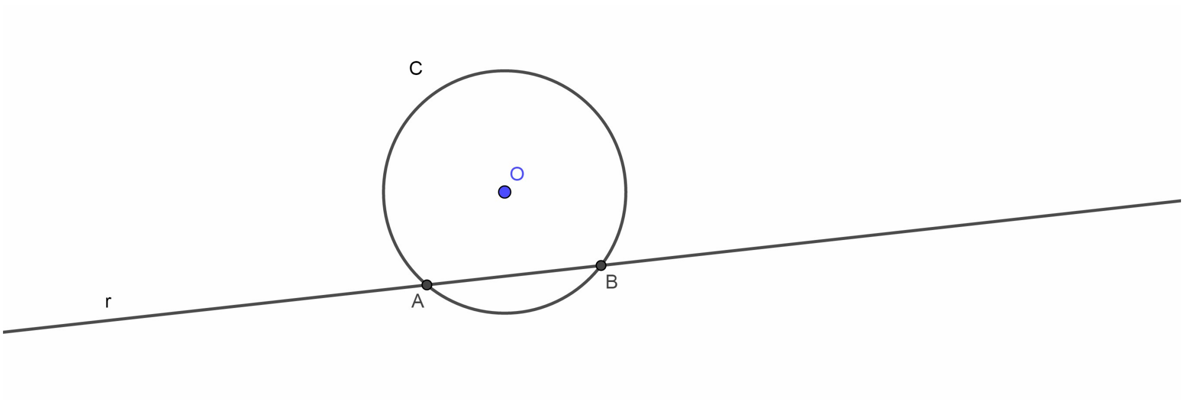
1) A reta r é secante à circunferência C. 	2) A reta r é tangente à circunferência C. 	3) A intersecção entre a reta r e a circunferência C é vazia, ou seja, não há pontos em comum. 

A seguir contemplamos a construção de cada situação descrita acima:

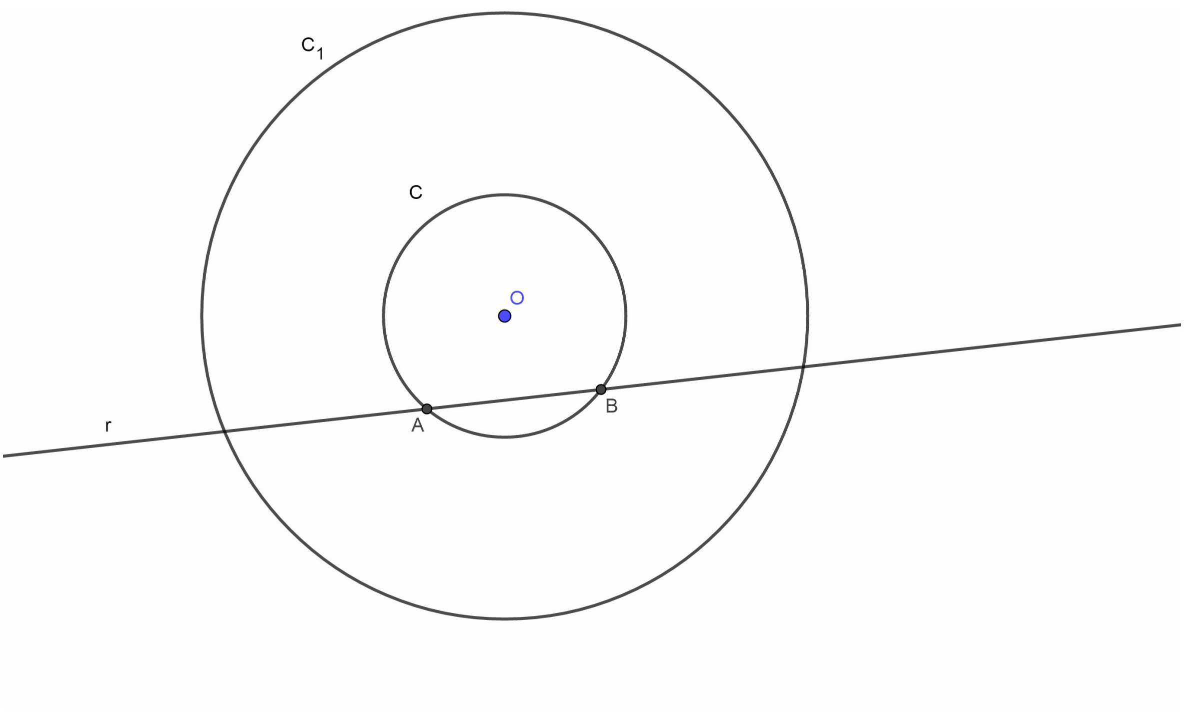
1. A reta r é secante à circunferência C.



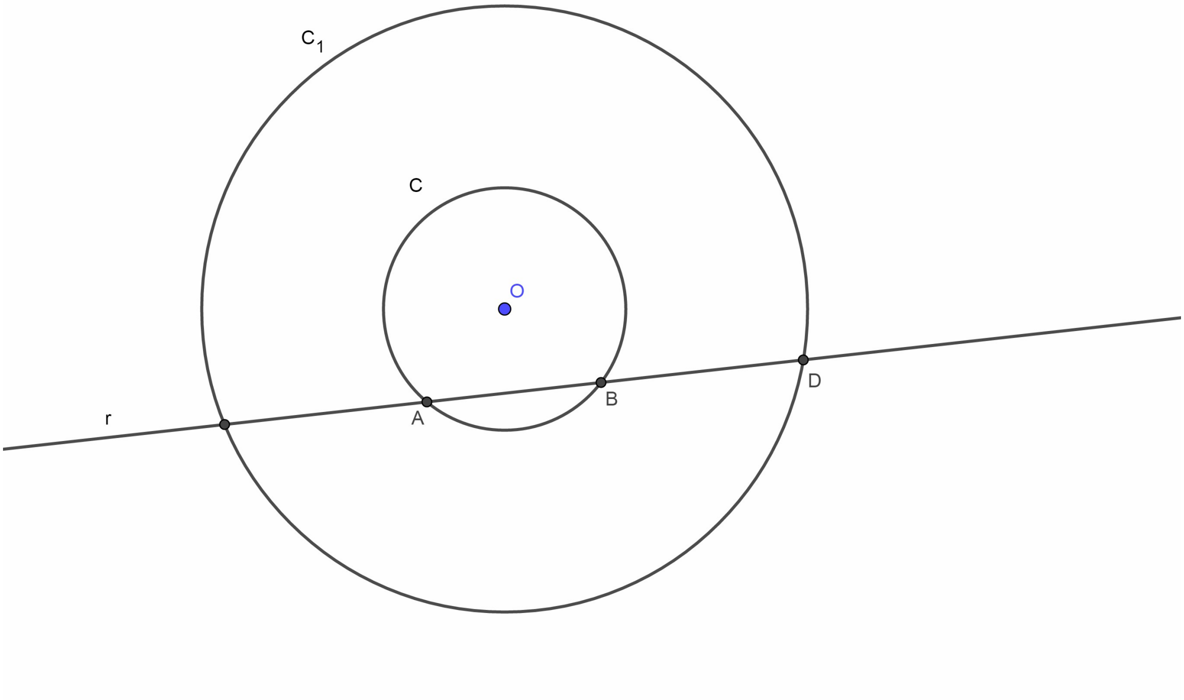
1.1. Seja O o centro da circunferência C, de raio de comprimento a, e uma reta r secante à circunferência C pelos pontos, denotados por A e B.



1.2. Construa uma circunferência, C_1, com centro em O e raio de comprimento $a+b$, para b positivo fixado.

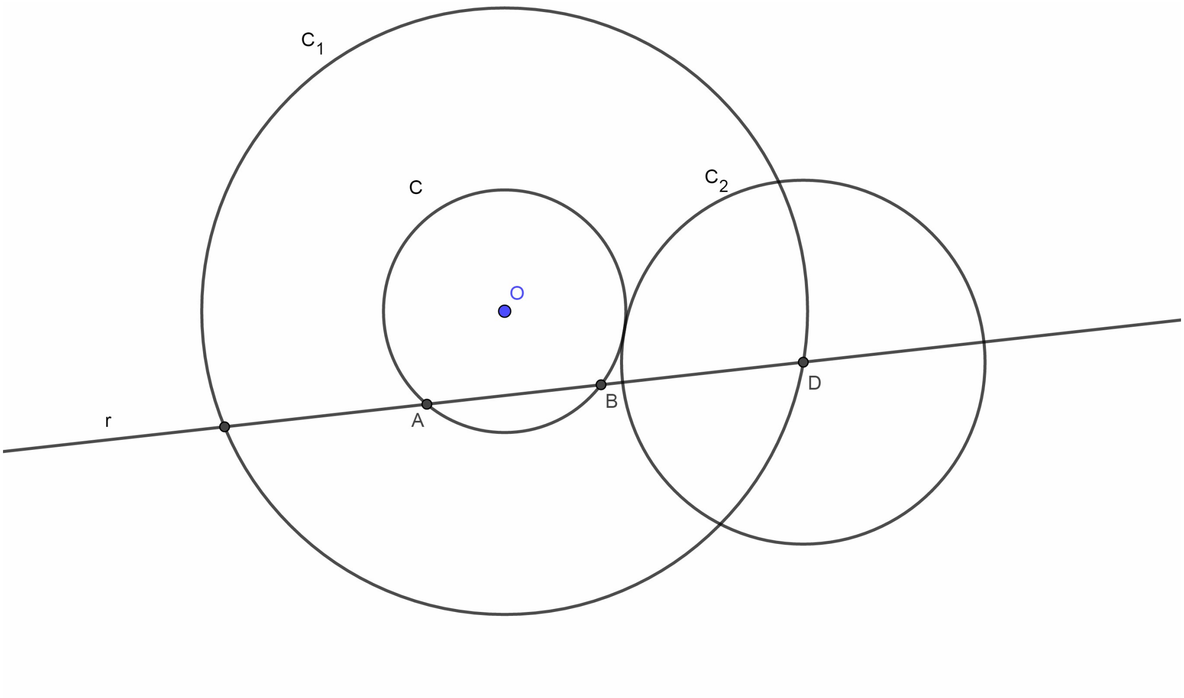


1.3. Denote o ponto de intersecção entre a circunferência C_1 e a reta r por D.

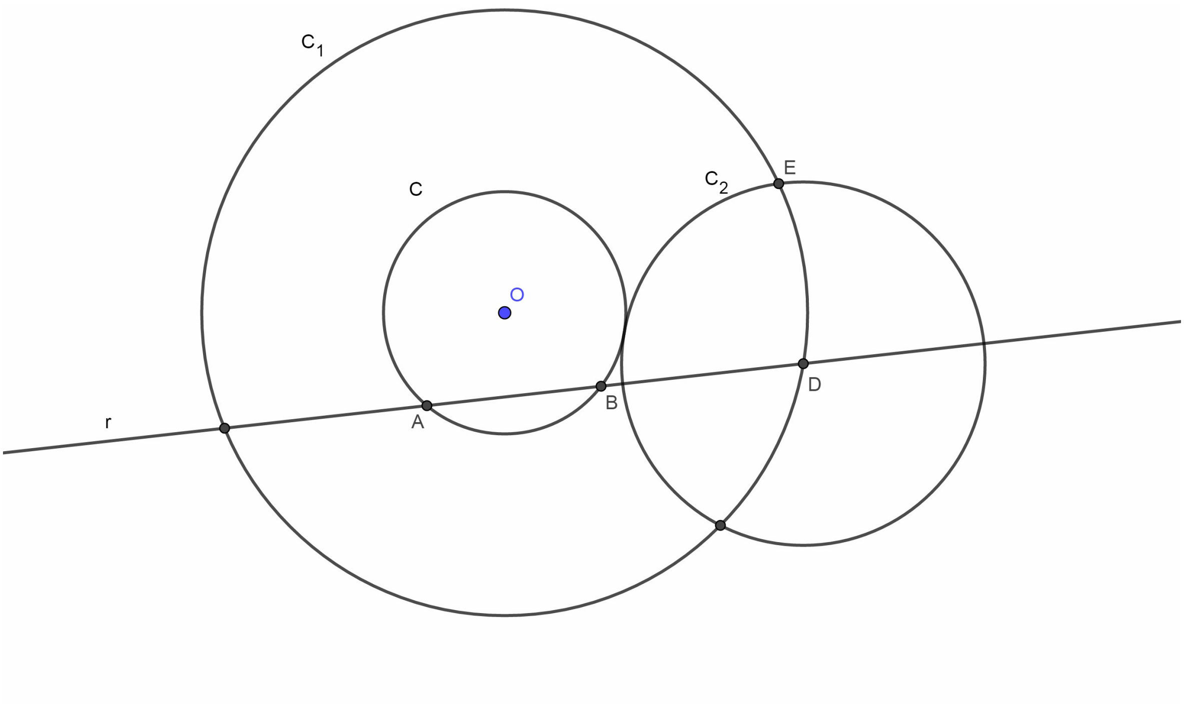


Note que há dois pontos de intersecção, a resolução é análoga para ambos os pontos.

1.4. Construa uma circunferência, C_2, com centro no ponto D e raio de comprimento b.

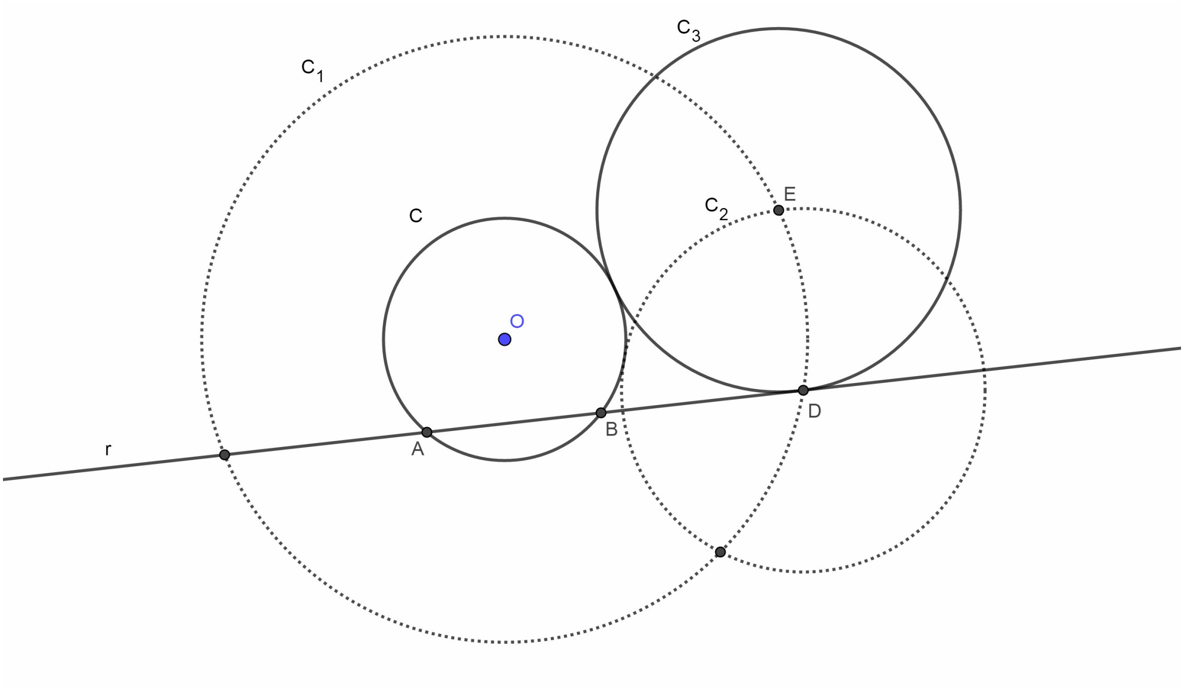


1.5. Denote o ponto de intersecção entre as circunferências C_1 e C_2 por E.

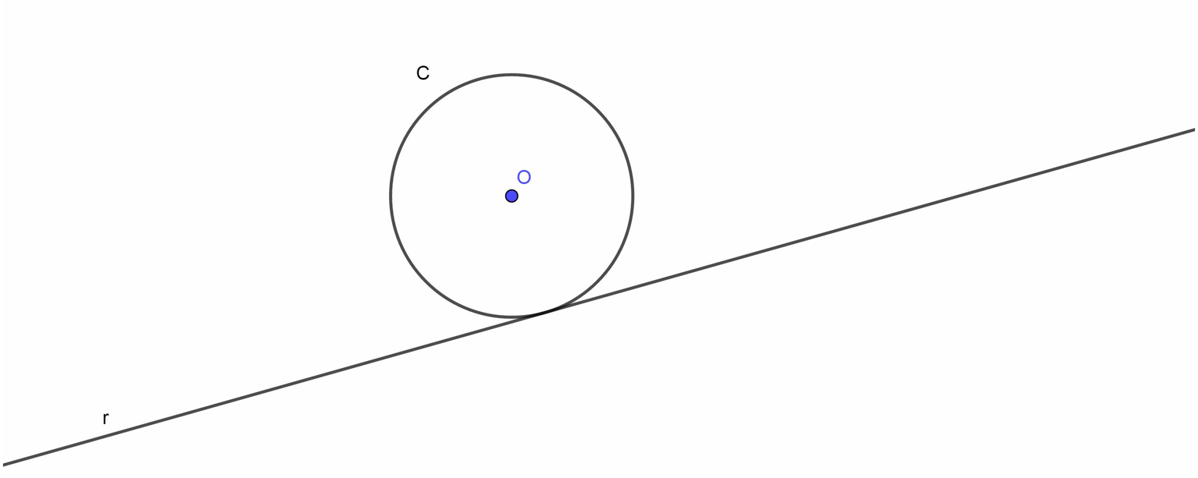


Note que novamente haverá dois pontos de intersecção, e a resolução é análoga para ambos.

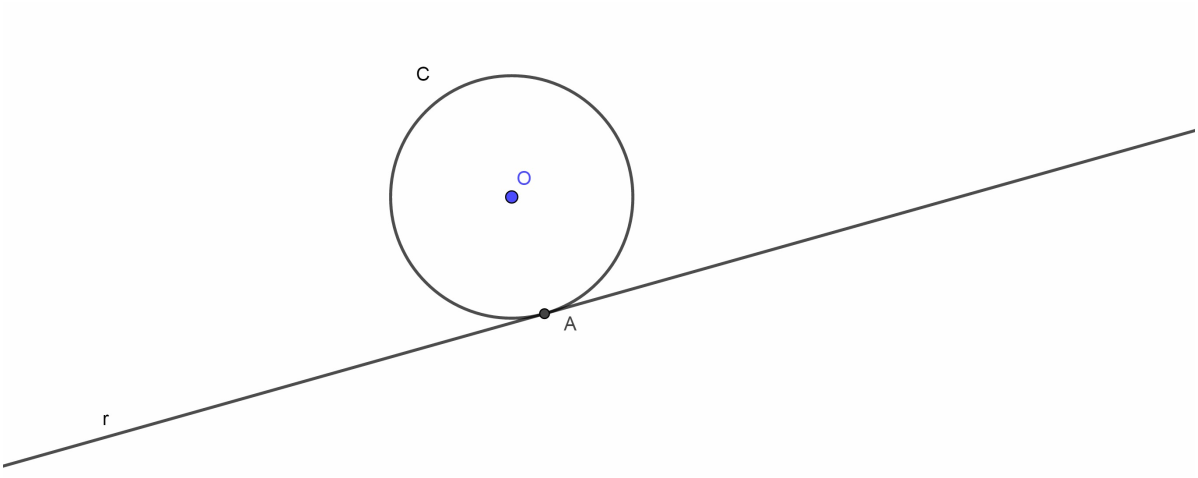
1.6. Finalmente construa a circunferência C_3 com centro no ponto E e raio de comprimento b, esta é a circunferência desejada.



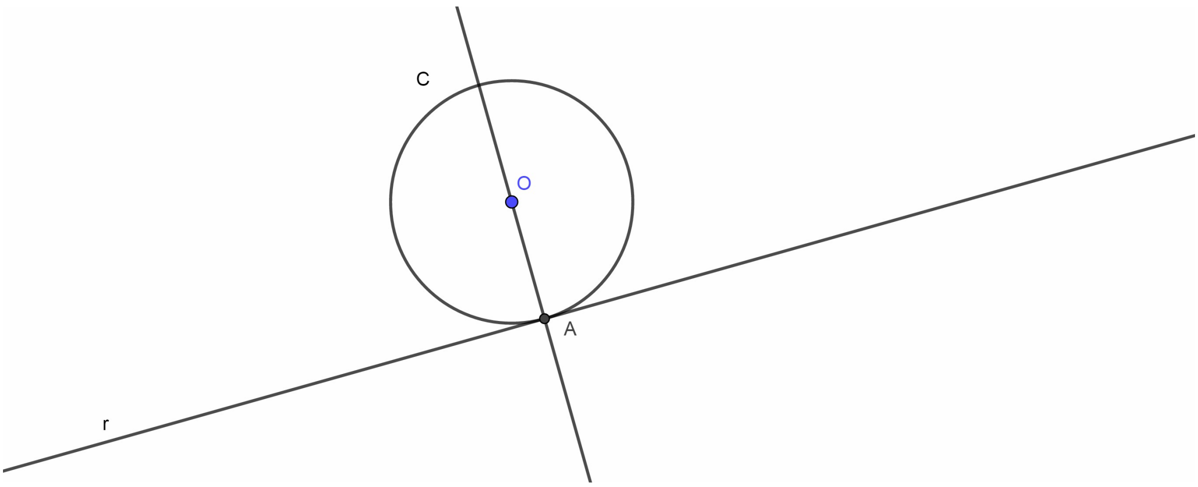
2. A reta r é tangente à circunferência C.



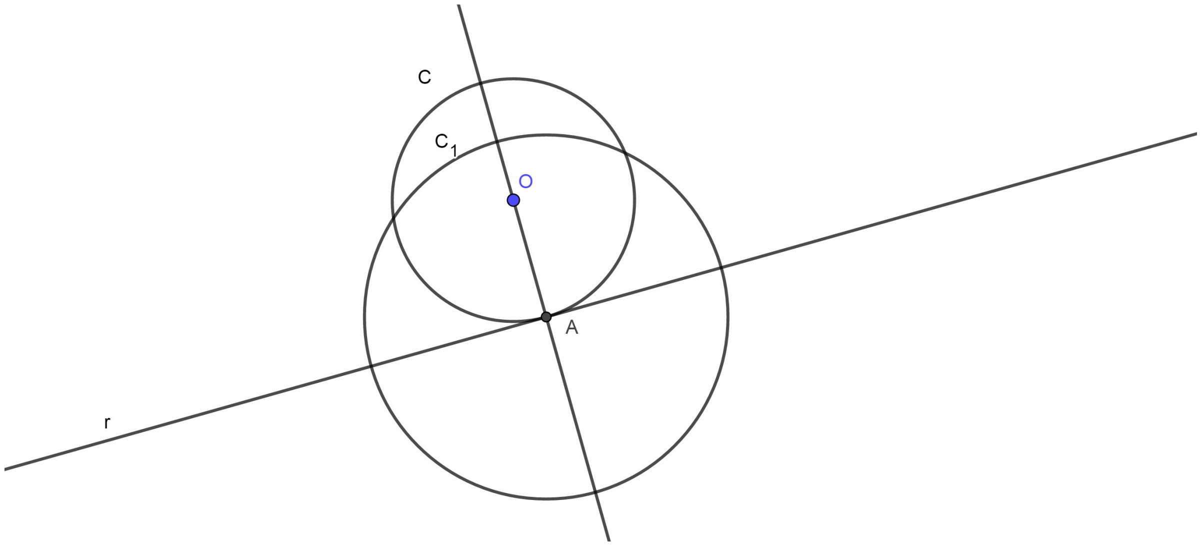
2.1. Denote o ponto de intersecção entre a circunferência C e a reta r por A.



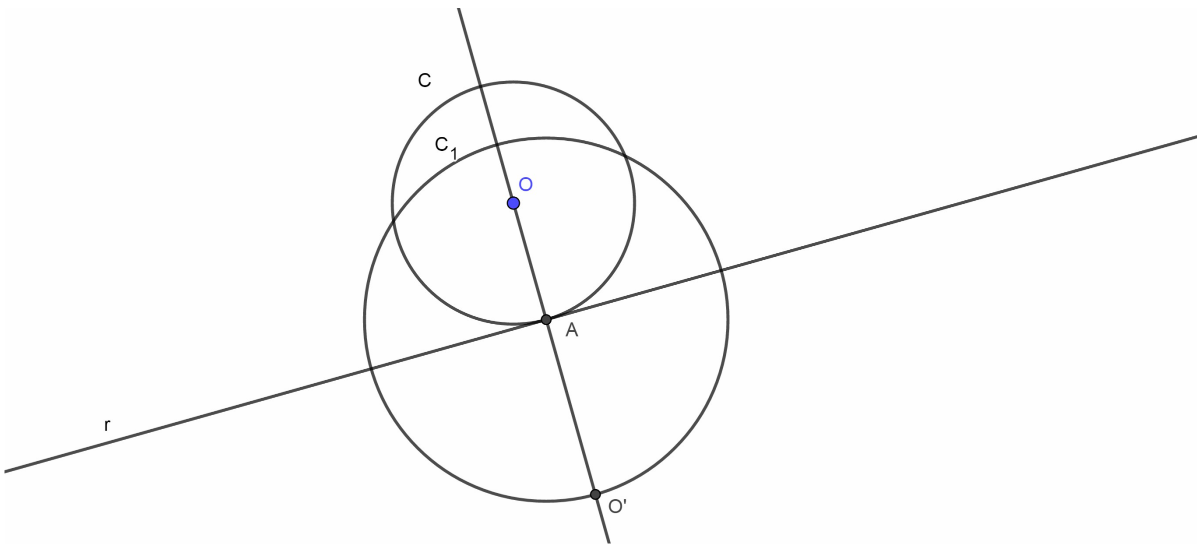
2.2. Trace uma reta pelos pontos O e A.



2.3. Construa uma circunferência C_1 com centro no ponto A e raio de comprimento b, para $0 < b < 2a$.

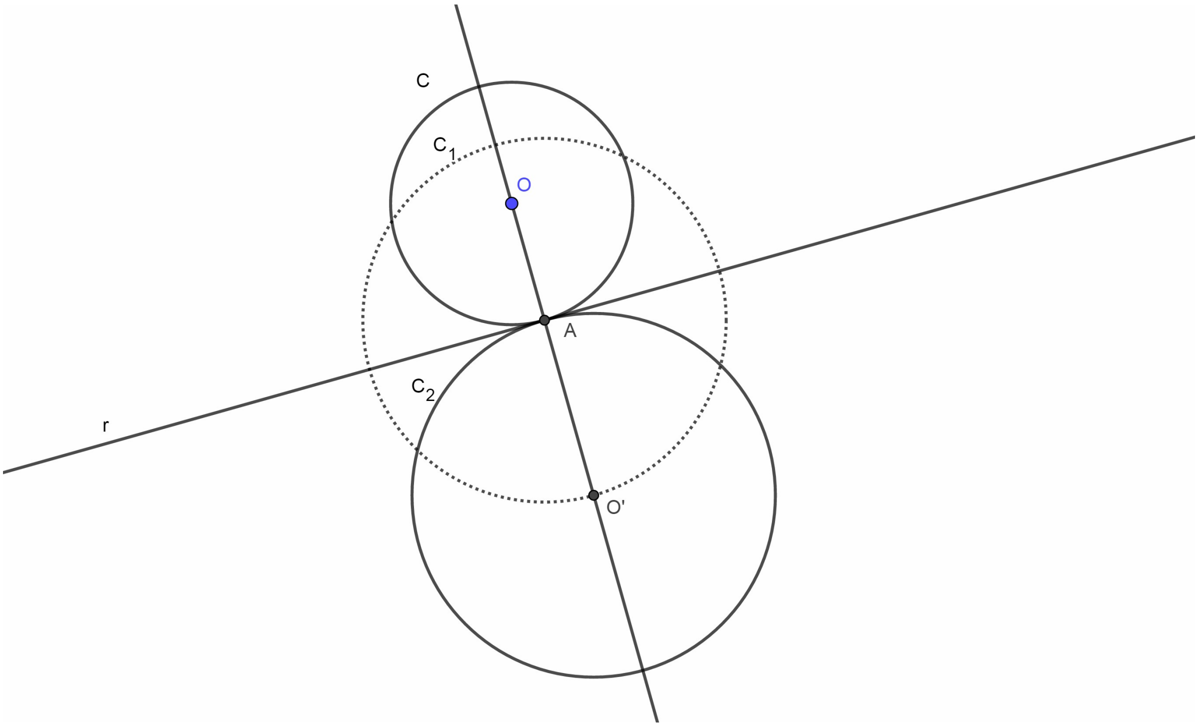


2.4. Denote o ponto de intersecção entre a circunferência C_1 e a reta que contém o segmento $\overline{OA}$ por O'.

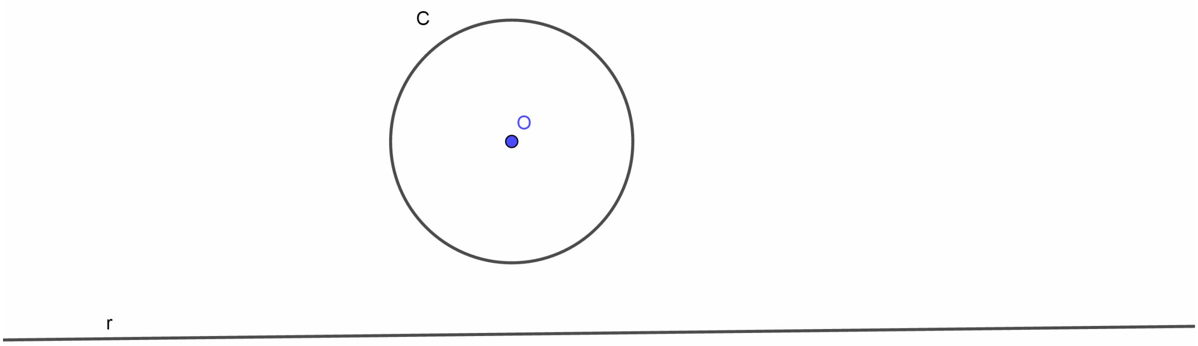


Note que há dois pontos de intersecção, usaremos o ponto que está no semiplano abaixo da reta r.

2.5. Construa uma circunferência C_2 com centro em O' e raio de comprimento b, esta é a circunferência desejada.

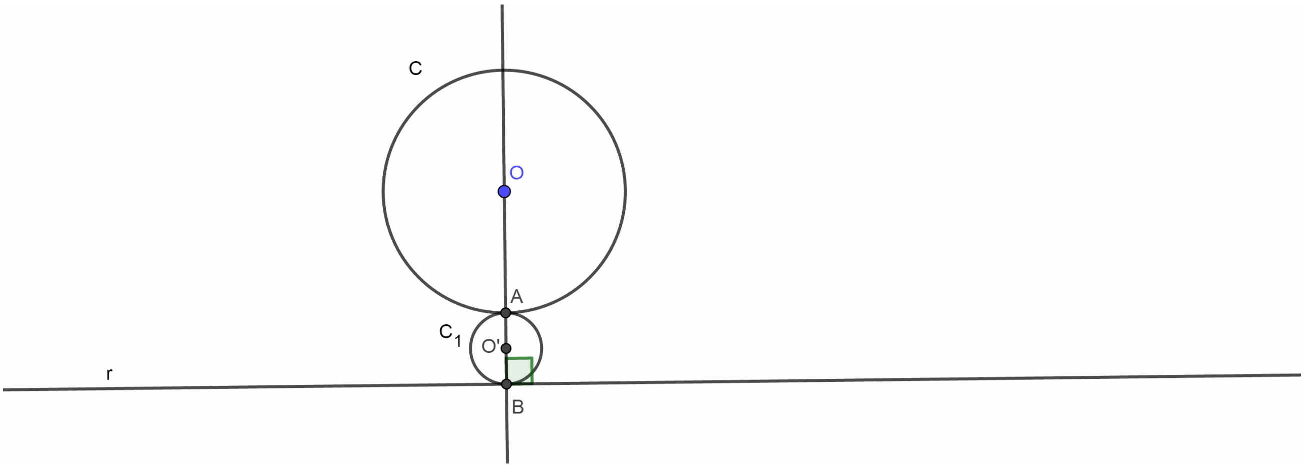


3. A intersecção entre a reta r e a circunferência C é vazia, ou seja, não há pontos em comum.

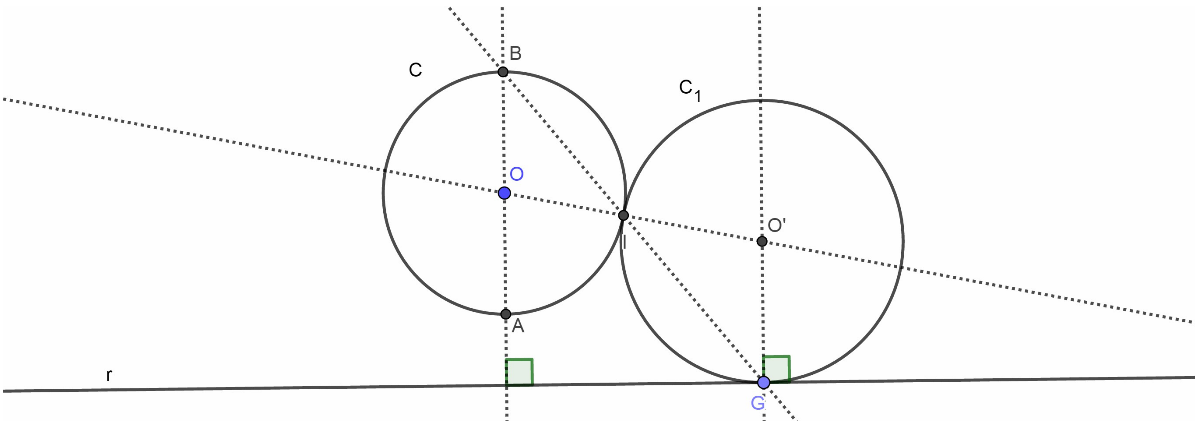


Para a solução deste caso temos duas situações distintas, observe as figuras seguintes que ilustram essas possibilidades:

I)

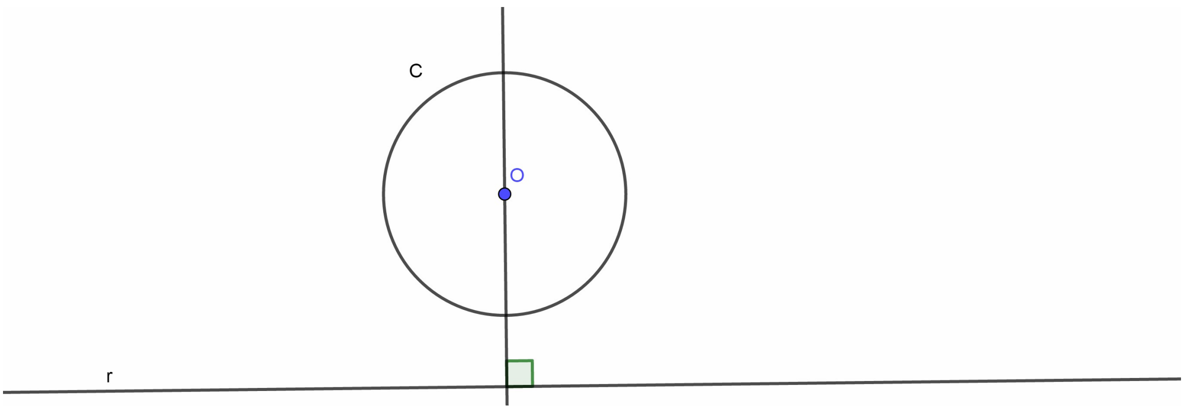


II)

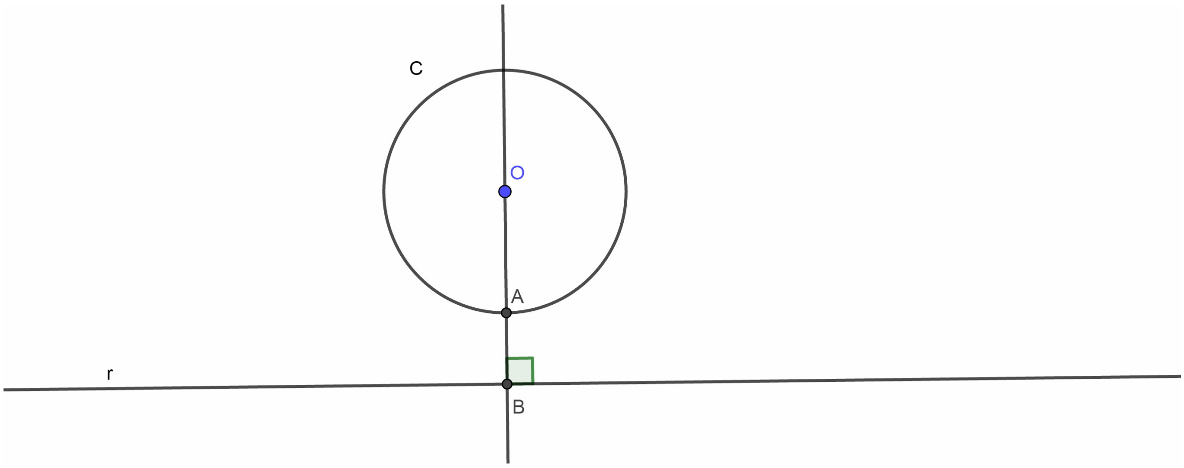


3.1. Vamos à construção da primeira possibilidade:

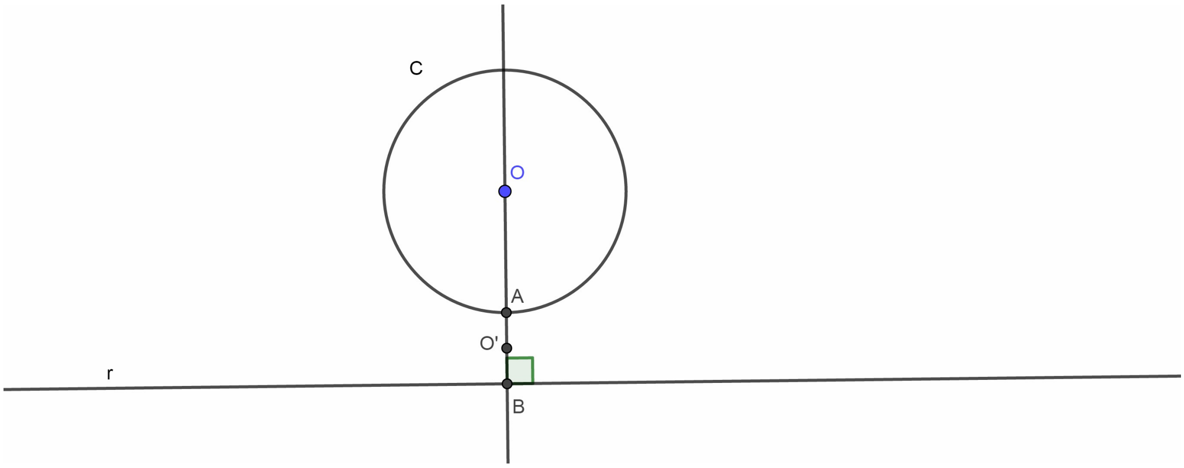
3.1.1. Trace pelo ponto O uma reta perpendicular à reta r.



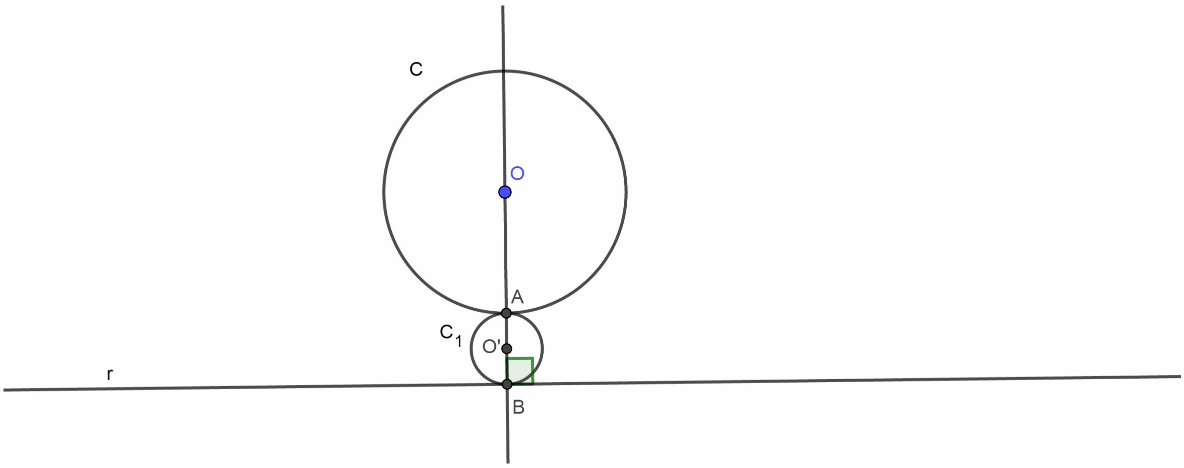
3.1.2. Denote o ponto de intersecção entre a circunferência C e a perpendicular por ponto A, e o ponto de intersecção da reta r e a perpendicular por ponto B.



3.1.3. Determine o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ e nomeie por O'.



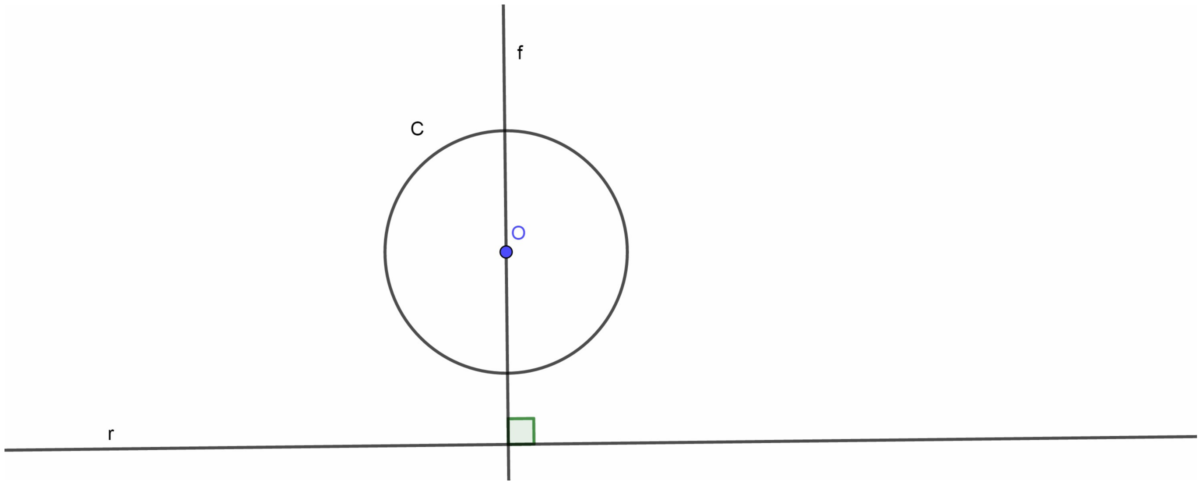
3.1.4. Construa uma circunferência C_1 com centro no ponto O' e raio $\overline{O'A}$, esta é a circunferência desejada.



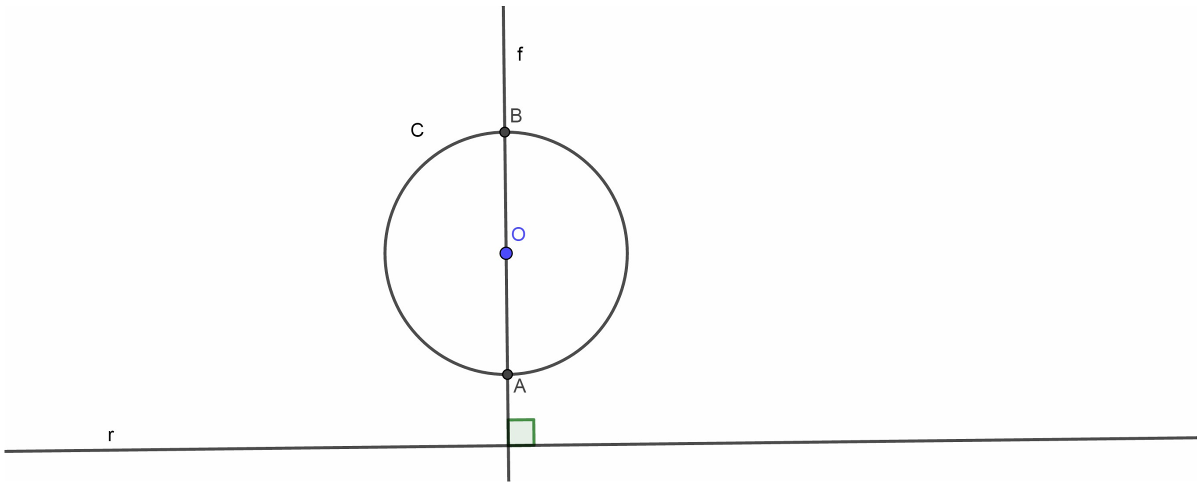
A justificativa é imediata.

3.2. Vamos à construção da segunda possibilidade:

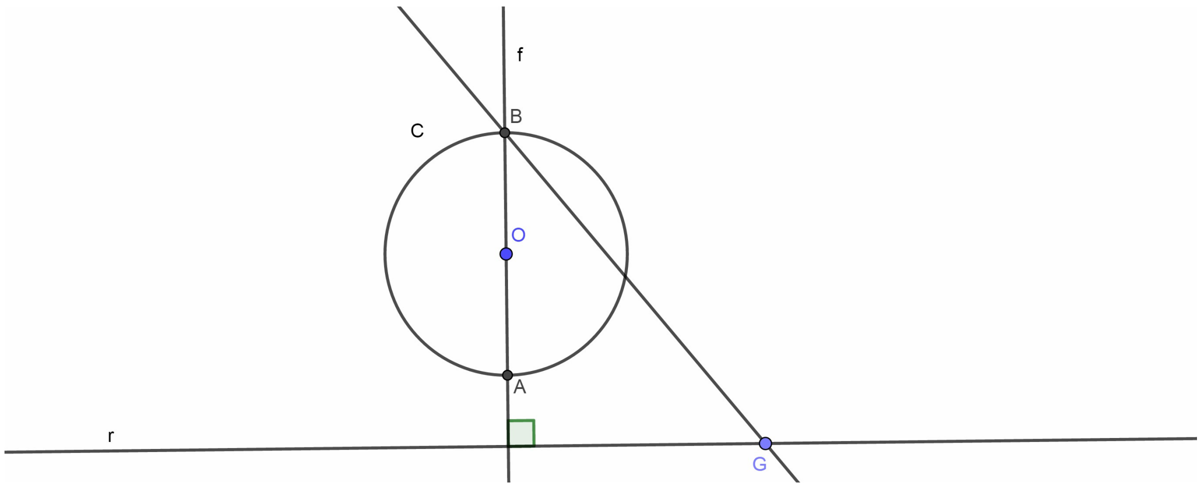
3.2.1. Trace pelo ponto O uma reta perpendicular a reta r, nomeie por f.



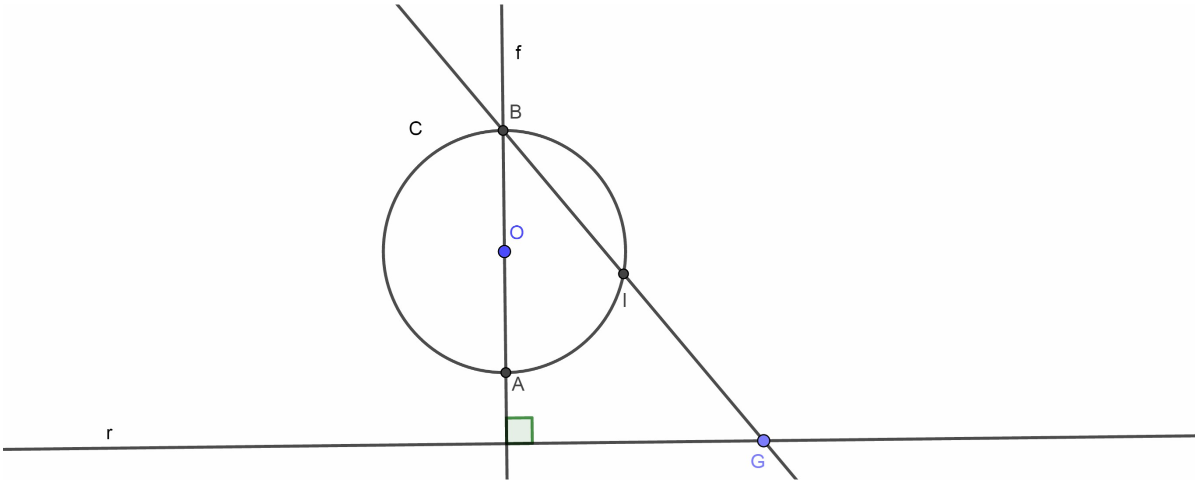
3.2.2. Denote os pontos de intersecção entre a circunferência C e a reta perpendicular f por A e B.



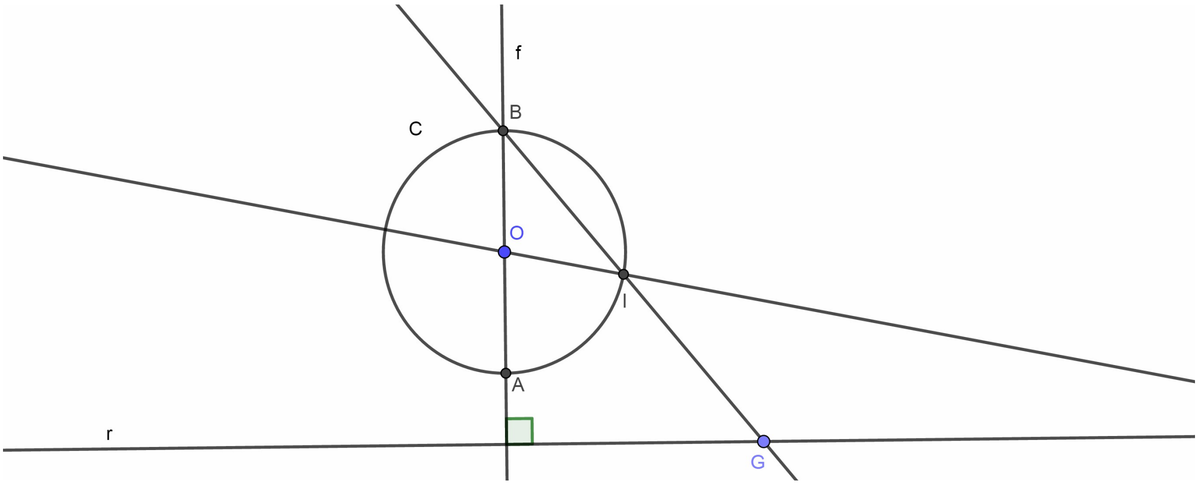
3.2.3. Trace uma reta qualquer pelo ponto B interceptando a reta r em um ponto G.



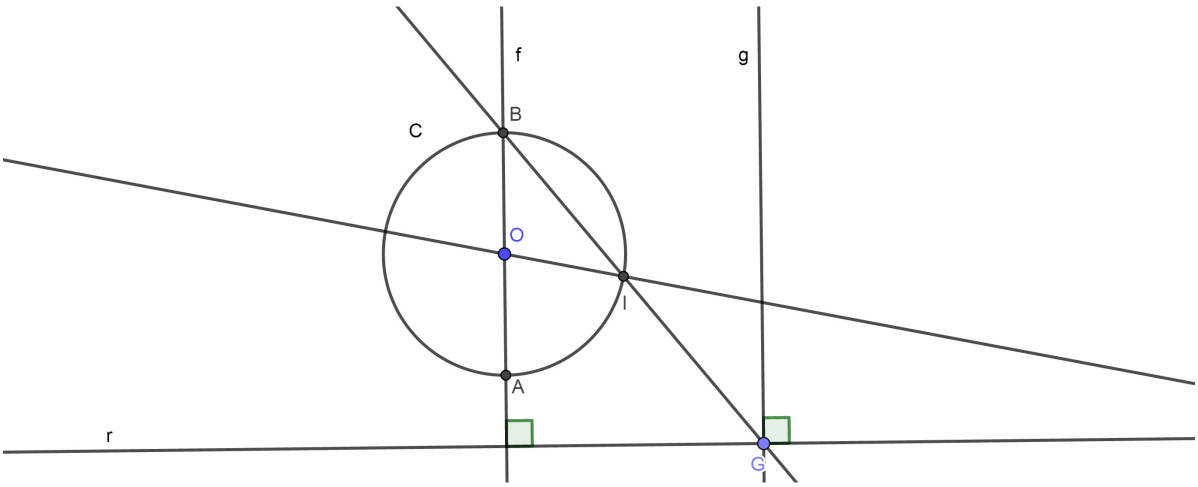
3.2.4. Denote o ponto de intersecção entre a circunferência C e a reta qualquer por I.



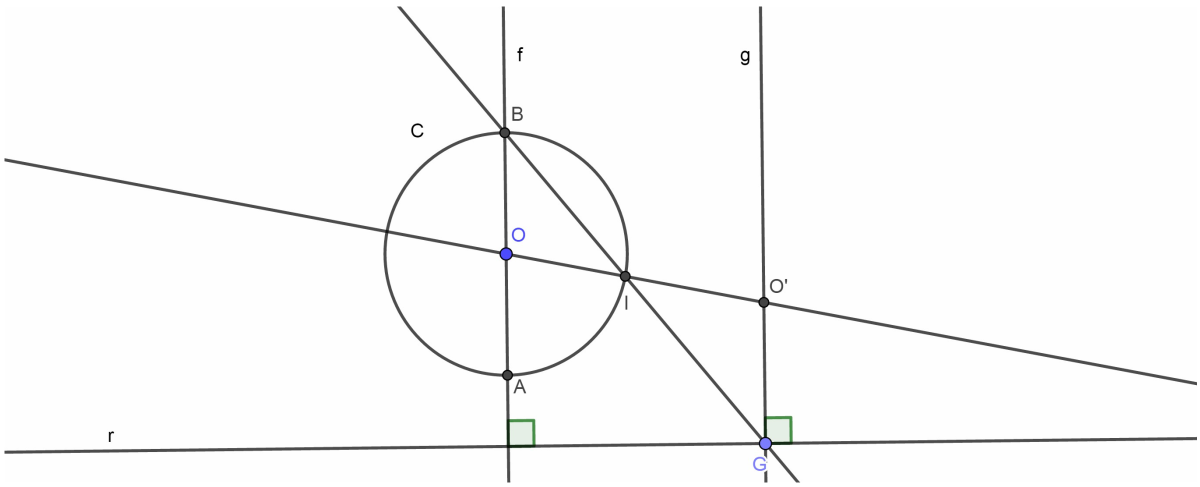
3.2.5. Trace a reta que contém o segmento $\overline{OI}$.



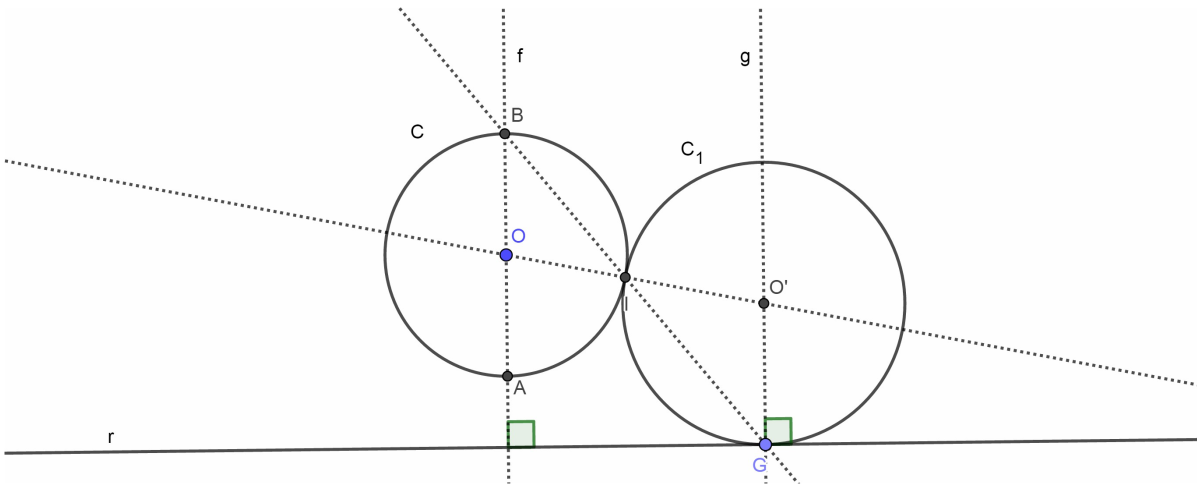
3.2.6. Trace pelo ponto G uma reta perpendicular à reta r, nomeie por reta g.



3.2.7. Denote o ponto de intersecção entre a reta que contém o segmento $\overline{OI}$ e a reta g, por O'.



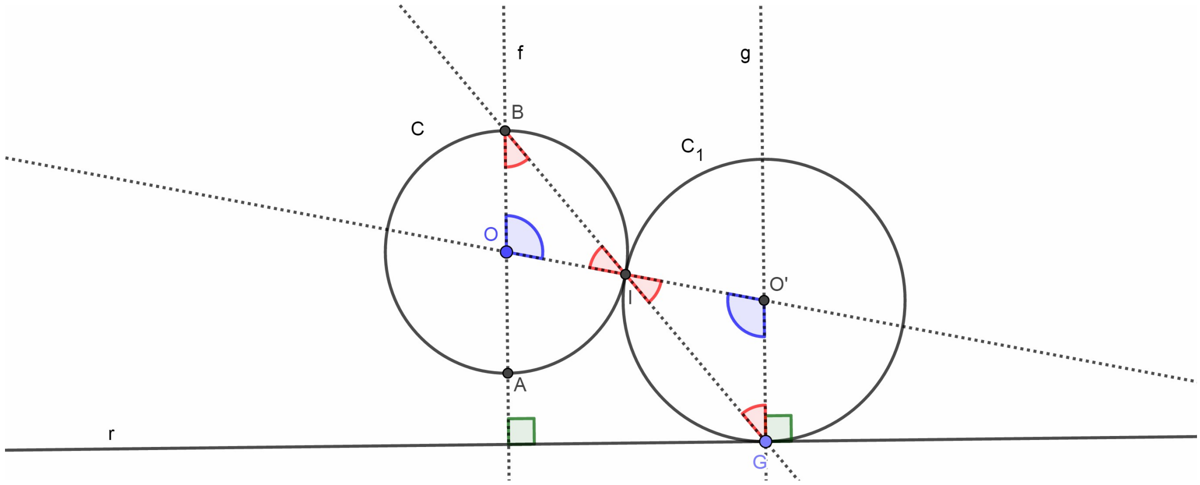
3.2.8. Construa uma circunferência C_1 com centro no ponto O' e raio $\overline{O'I}$, esta é a circunferência procurada.



Note que haverá infinitas circunferências que satisfaçam as condições dadas neste caso, devido às possibilidades de escolhas do ponto G.

Justificativa:

Observe:



Por construção, os segmentos $\overline{O'G}$ e $\overline{OA}$ são perpendiculares à reta r.

Note que os $\triangle BOI$ e $\triangle IO'G$ são isósceles, pois dois de seus lados são raios das circunferências C e C_1, respectivamente.

Ainda por construção, os pontos O, I e O' são colineares.

Logo, I é o ponto de tangência entre as circunferências C e C_1, e G o ponto de tangência entre a circunferência C_1 e a reta r.

Exercício 4.0.10. Faça uma análise geométrica das possibilidades das intersecções entre uma circunferência C e duas retas r e s que equidistam de C.

Solução:

Considere algumas situações relacionadas às posições das retas e da circunferência:

1. As retas r e s são paralelas.

   Caso as retas dadas sejam paralelas, temos que considerar suas posições com relação à circunferência C.

   1.1. As retas r e s são paralelas e tangentes à circunferência C.

   1.2. As retas r e s são paralelas e não interceptam a circunferência C.

   1.3. As retas r e s são paralelas e apenas uma delas intercepta a circunferência C.

   1.4. As retas r e s são paralelas e ambas interceptam a circunferência C.

   1.5. As retas r e s são paralelas e apenas uma delas tangencia a circunferência C.

   Neste caso não há pontos que satisfaçam o problema.

2. As retas r e s são concorrentes, ou seja, se interceptam.

   2.1. O ponto de intersecção de r e s é interior a circunferência C.

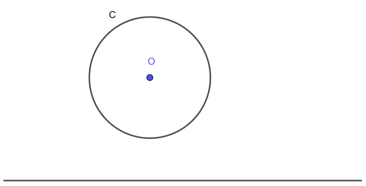
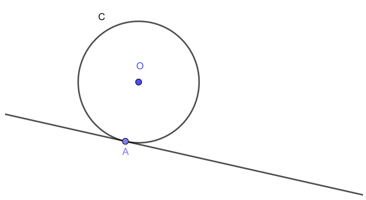
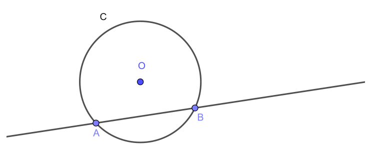
   2.2. O ponto de intersecção de r e s é exterior a circunferência C.

   2.3. O ponto de intersecção de r e s pertence a circunferência C.

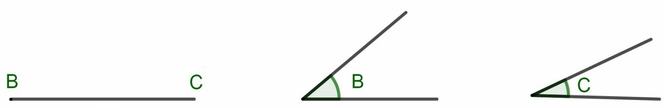
Exercício 4.0.11. Faça uma análise geométrica referente as posições entre uma circunferência C e uma reta, ambas dadas.

Solução:

Temos as possíveis posições para a reta r em relação à circunferência C que satisfazem as condições do enunciado:

1) A intersecção entre C e r é vazia. 	2) A intersecção entre C e r é um ponto, ou seja, r é tangente à C. 	3) A intersecção entre C e r são dois pontos, ou seja, r é secante a C. 

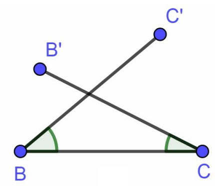
Exercício 4.0.12. Construir o triângulo $\triangle ABC$ conhecendo o lado $\overline{BC}$ e os ângulos $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$, dados na figura abaixo.



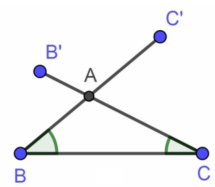
Resolução:

1. Trace o segmento $\overline{BC}$.

2. Transporte os ângulos $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ sobre o lado $\overline{BC}$.



3. Denote o ponto A que é a intersecção das extremidades dos respectivos ângulos dados e então temos o $\triangle ABC$ procurado.



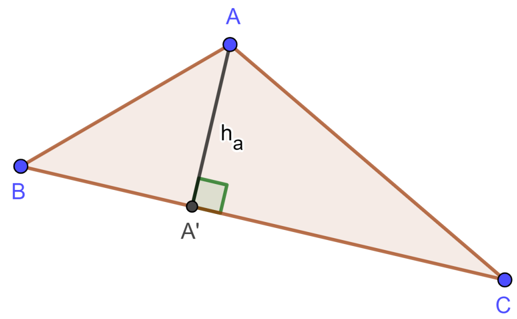
Justificativa:

Perceba que a construção é validada pelo postulado do transporte de ângulos. E o vértice A é determinado por consequência da construção citada.

Exercício 4.0.13. Construir o triângulo $\triangle ABC$ conhecendo os lados $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, e o segmento que representa a altura referente ao vértice A, cujo comprimento é denotado por h_a.

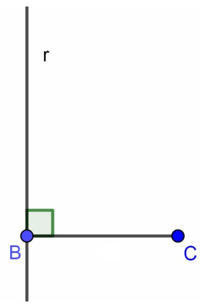
Resolução:

1. Observe a figura abaixo que ilustra os dados do enunciado.

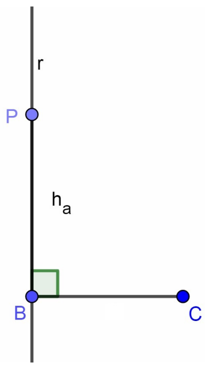


2. Inicie a contrução traçando o segmento $\overline{BC}$.

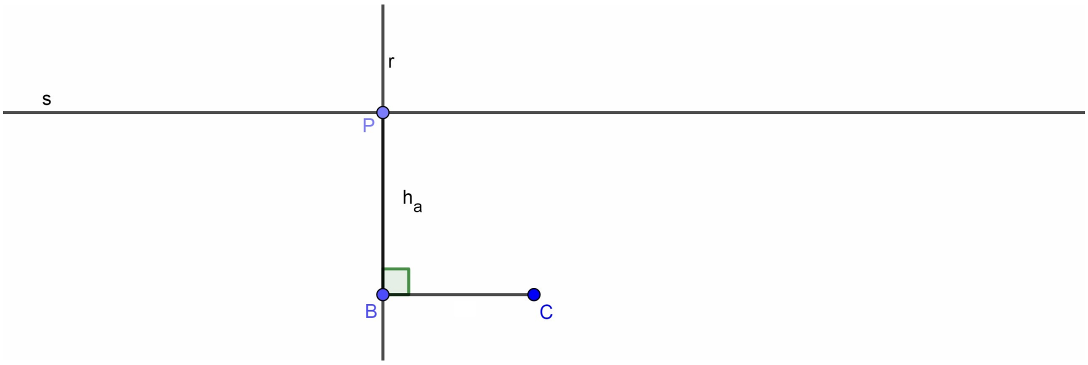
3. Em seguida trace uma reta perpendicular pelo ponto B e a nomeie por r.



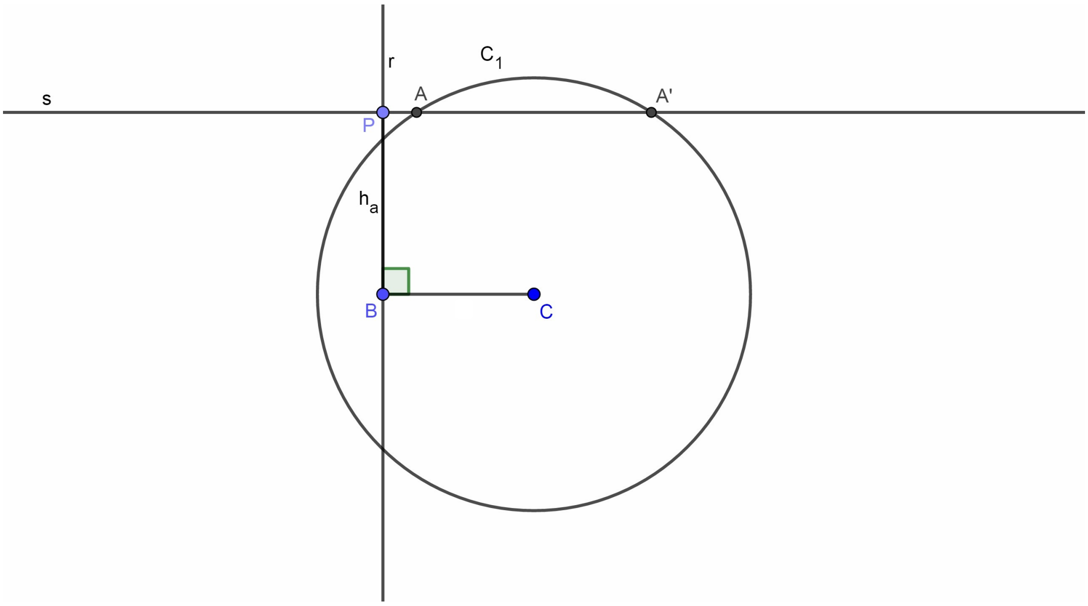
4. Transporte a altura cujo comprimento é igual a h_a sobre a reta r e denote o ponto P de modo que o segmento $\overline{BP}$ tenha comprimento igual a h_a.



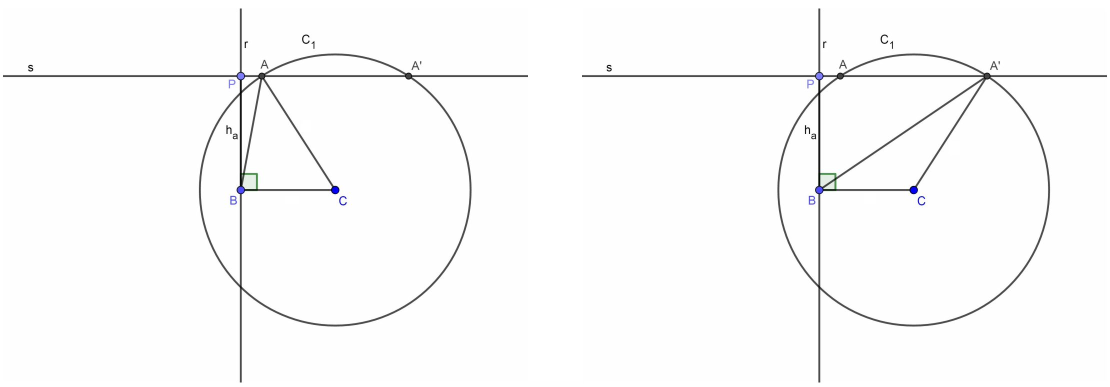
5. Trace uma reta paralela ao segmento $\overline{BC}$, intersectando a reta r no ponto P. Denote esta reta por s.



6. Construa uma circunferência C_1, com centro em C e raio de comprimento AC, cuja intersecção com s são os pontos que chamaremos de A e A'.



Logo temos dois triângulos que satisfazem os dados do exercício.



Observação 11. Qualquer triângulo construído sobre o segmento $\overline{BC}$ e com o terceiro vértice pertencente à reta s terá altura cujo comprimento é constante, que neste caso é h_a.

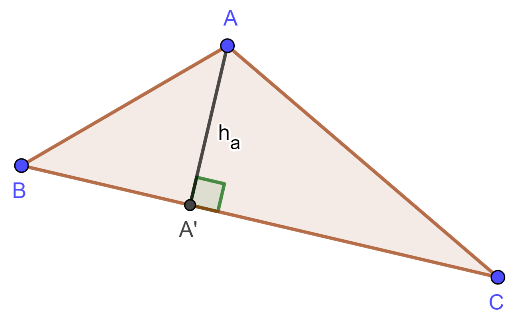
Justificativa:

Por construção, a reta r é perpendicular a reta s relativo à altura cujo comprimento é igual a h_a. Como conhecemos o lado $\overline{AC}$, a construção da circunferência C_1 é evidente, nos fornencendo como resultado o triângulo desejado.

Exercício 4.0.14. Construir um triângulo $\triangle ABC$ conhecendo os lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ e o segmento que representa a altura referente ao vértice A, cujo comprimento será denotado por h_a.

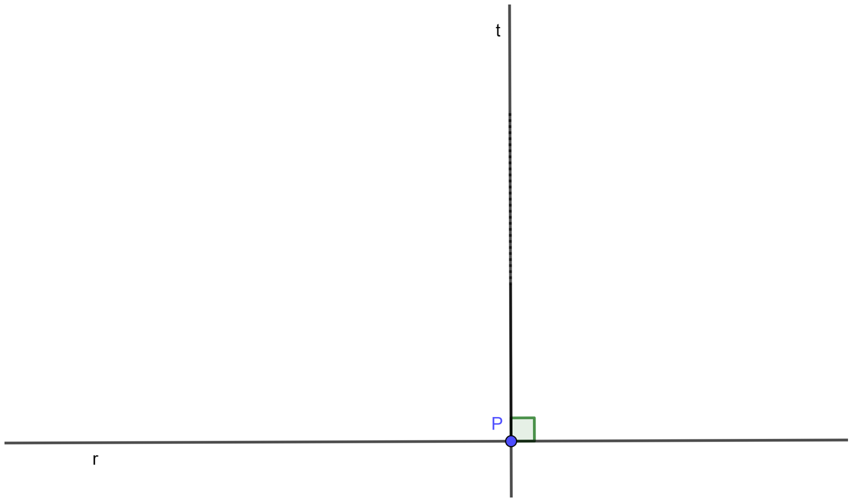
Resolução:

1. Observe a figura abaixo que ilustra os dados do enunciado.

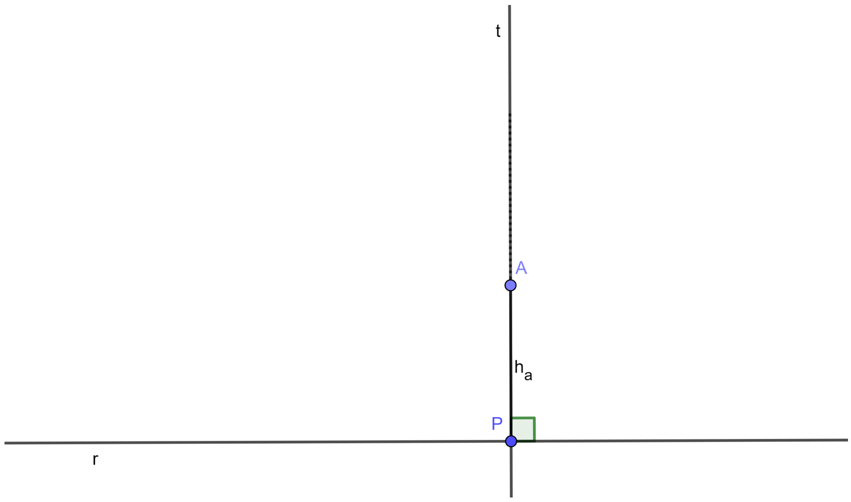


2. Vamos iniciar a construção traçando uma reta r suporte para o segmento $\overline{BC}$. Denote um ponto P qualquer sobre a reta r.

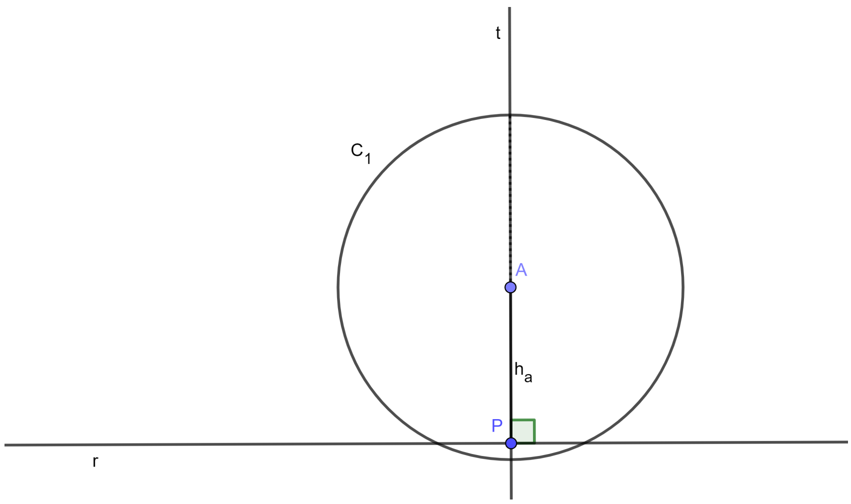
3. Trace uma reta t perpendicular a reta r intersectando-a no ponto P.



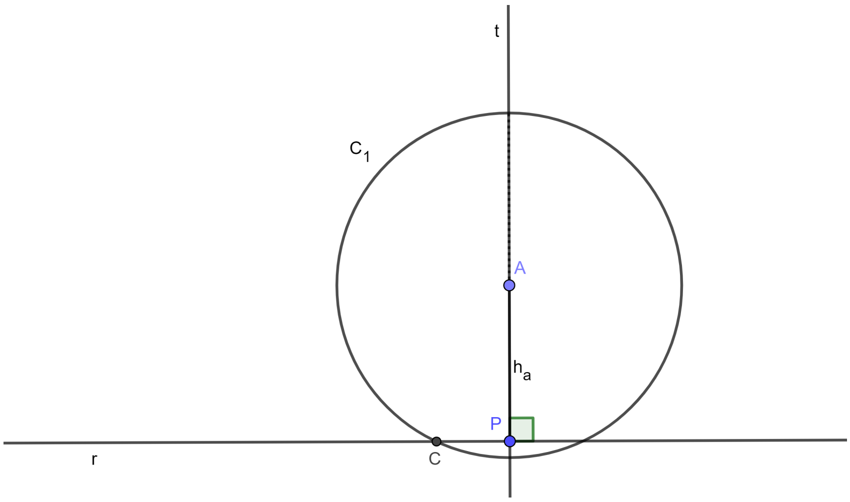
4. Denote o ponto A de modo que o segmento $\overline{AP}$ seja o segmento cujo comprimento é igual a h_a.



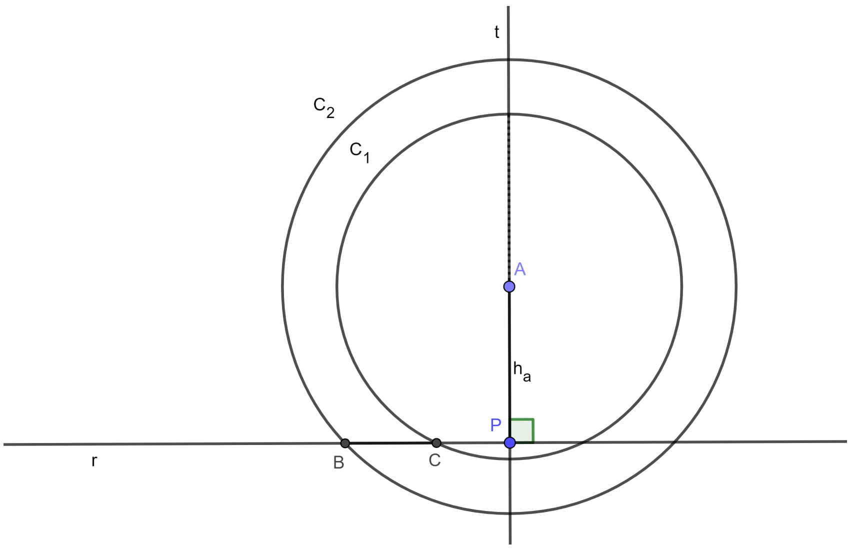
5. Construa uma circunferência C_1 com centro no ponto A e raio de comprimento AC (dado).



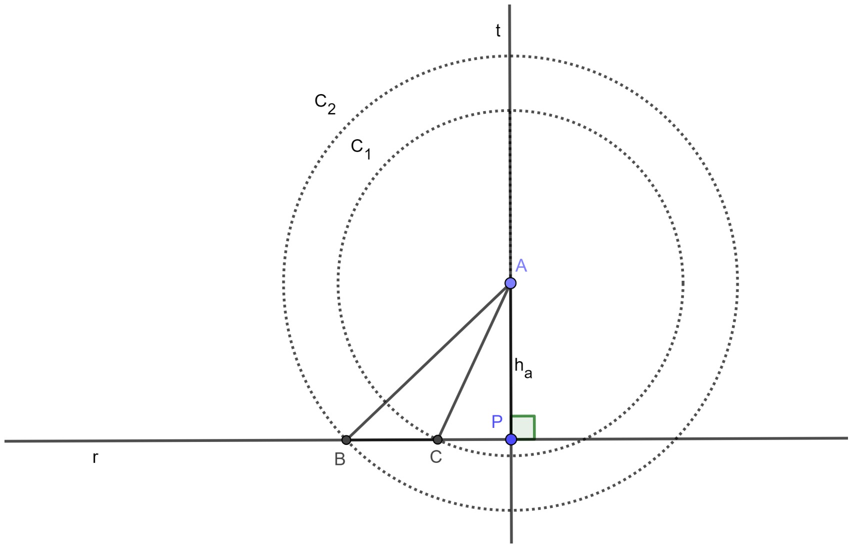
6. Denote o ponto C resultado da intersecção entre a circunferência C_1 e a reta r.



7. Analogamente construa a circunferência C_2 com centro no ponto A e raio de comprimento AB, em seguida denote o ponto B resultado da intersecção entre a circunferência C_2 e a reta r.



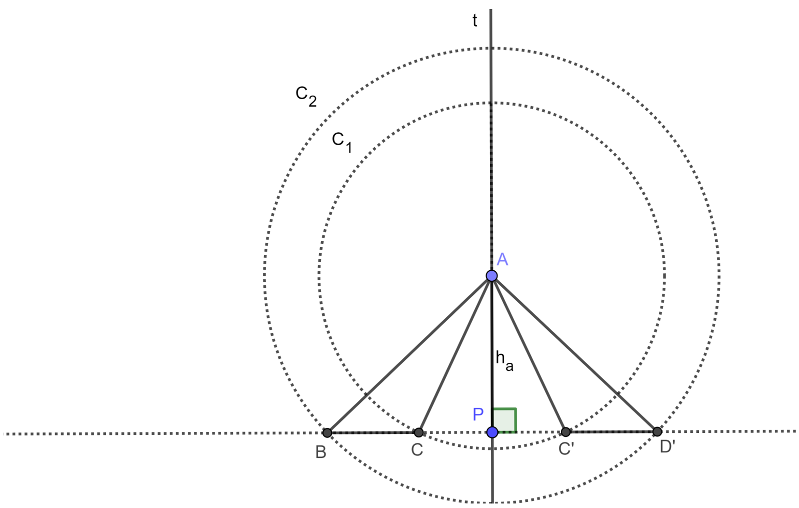
8. Logo temos o $\triangle ABC$ que corresponde ao triângulo desejado.



Justificativa:

Por construção, as retas r e t são perpendiculares. Note que o segmento que representa a altura cujo comprimento é igual a h_a, nos permite denotar o ponto A e construir as circunferências C_1 e C_2. Em decorrência, determinamos um triângulo que satisfaz as condições do enunciado.

Observação 12. Note que existe outro triângulo, simétrico ao $\triangle ABC$, relativamente à reta t, que satisfaz as condições do enunciado, o $\triangle AB'C'$. A justificativa é análoga.

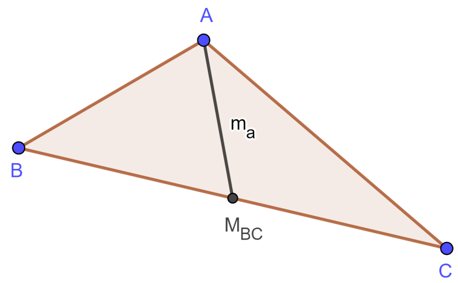


Note ainda que se $\overline{AC} \equiv \overline{AB}$, não teremos o triângulo desejado.

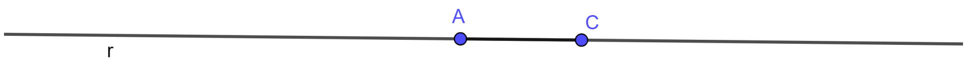
Exercício 4.0.15. Construir o triângulo $\triangle ABC$ conhecendo os lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ e a mediana referente ao lado $\overline{BC}$, cujo comprimento denotamos por m_a.

Resolução:

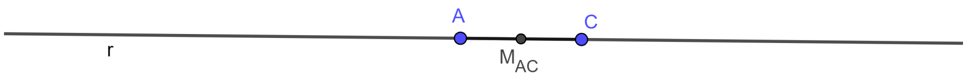
1. Observe a figura abaixo que ilustra os dados do enunciado.



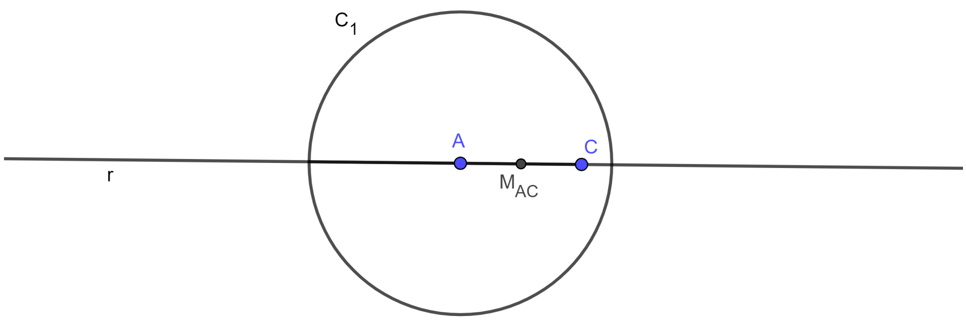
2. Inicie a construção traçando uma reta r suporte para o lado $\overline{AC}$.



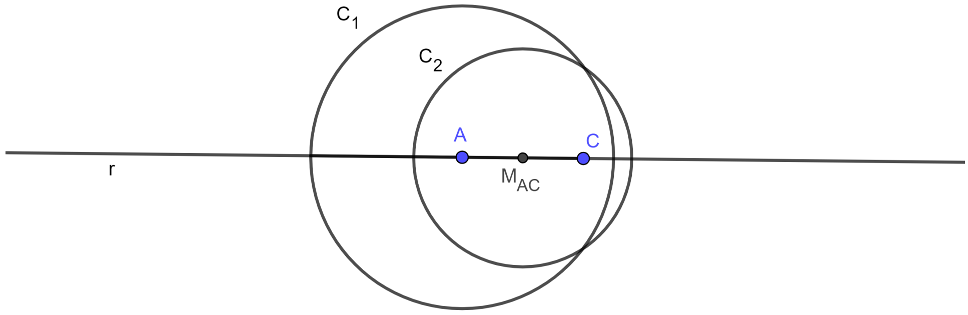
3. Denote o ponto médio do segmento $\overline{AC}$ e nomeie por ponto M_{AC}.



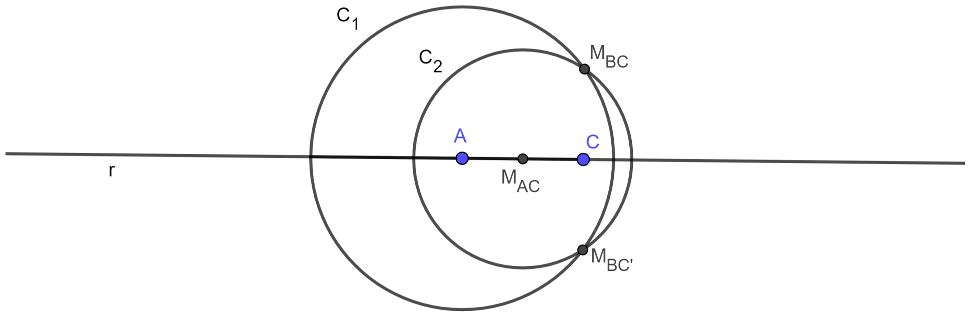
4. Construa uma circunferência C_1 com centro no ponto A e raio de comprimento igual a m_a.



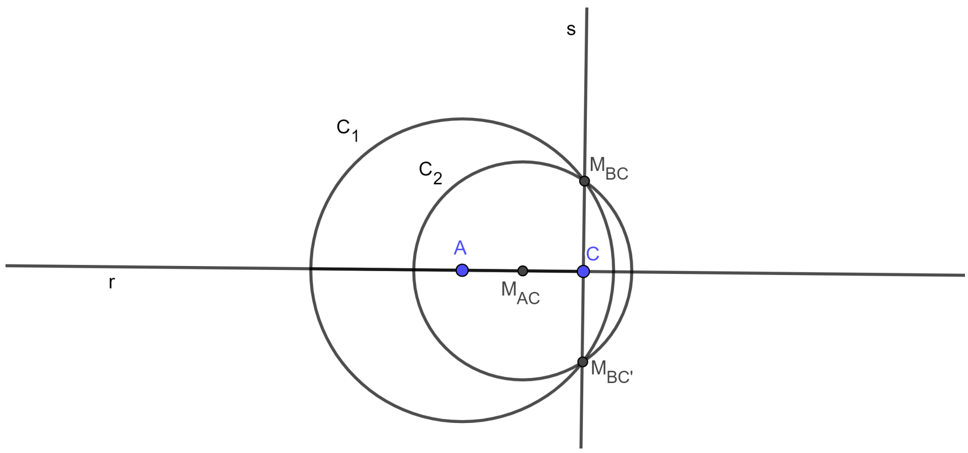
5. Construa uma circunferência C_2 com centro no ponto M_{AC} e raio de comprimento $\dfrac{AB}{2}$.



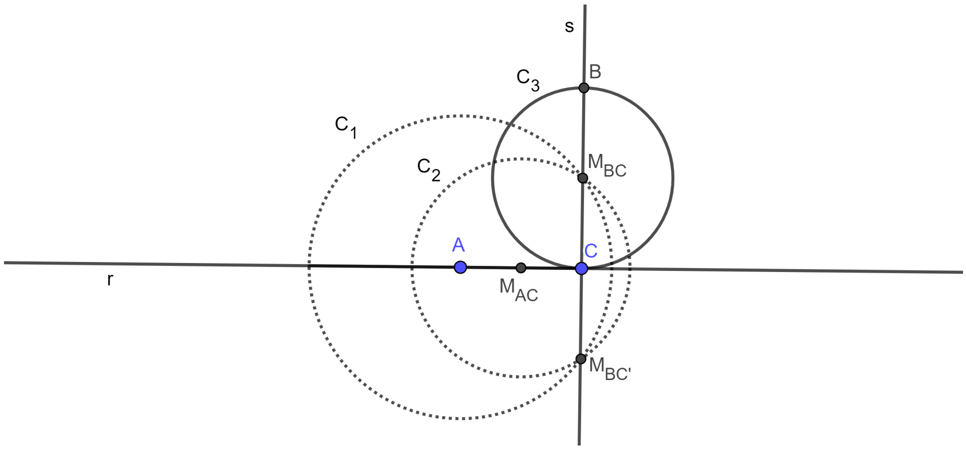
6. Denote os pontos M_{BC} e $M_{BC'}$ que são as intersecções entre as circunferências C_1 e C_2 e também, são os pontos médios, respectivamente, dos lados $\overline{BC}$ e $\overline{B'C}$ (que ficará evidente na figura do passo 9), note que ambos os segmentos são congruentes.



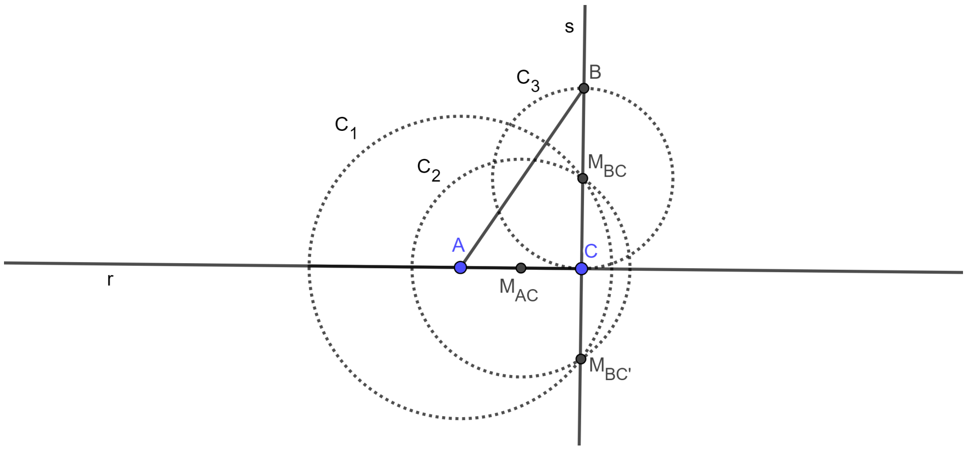
7. Trace uma reta s pelos pontos C e M_{BC}. Note que os pontos C, M_{BC} C e $M_{BC'}$ são colineares.



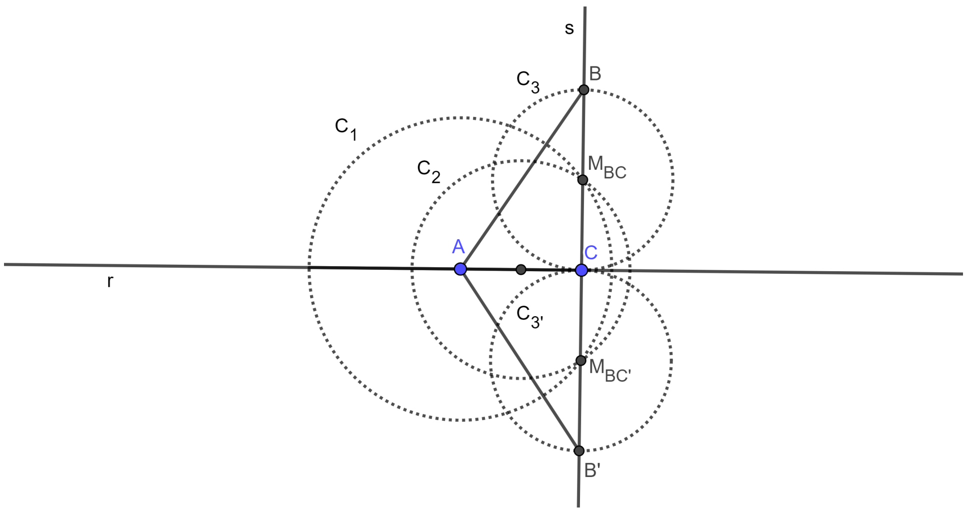
8. Denote o ponto B de modo que $\overline{BM_{BC}} \equiv \overline{M_{BC}C}$ e com o ponto M_{BC} pertencente ao segmento $\overline{BC}$. Para isso bastar construir a circunferência C_3 com centro em M_{BC} e raio de comprimento $M_{BC}C$.



9. Agora trace segmentos ligando os pontos A, B e C e temos o triângulo desejado.

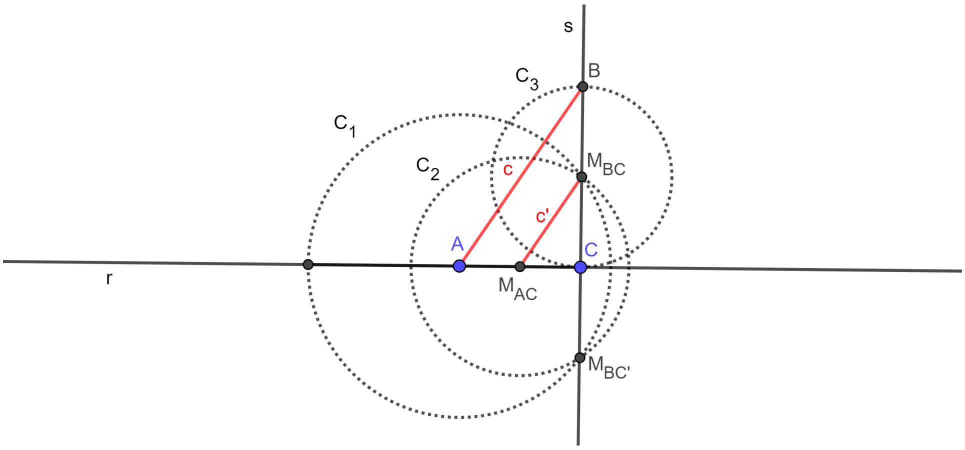


Note que teremos dois triângulos que satisfazem os dados do exercício, se repetirmos os passos 7 e 8 com relação ao ponto $M_{BC'}$ construiremos o $\triangle AB'C$ (veja a figura abaixo).



Justificativa:

Pelo conceito de base média[9] o segmento $\overline{CM_{BC}}$ tem comprimento igual a $\dfrac{BC}{2}$, logo para traçar o lado $\overline{BC}$ bastou denotar o ponto B como foi feito no passo 7.

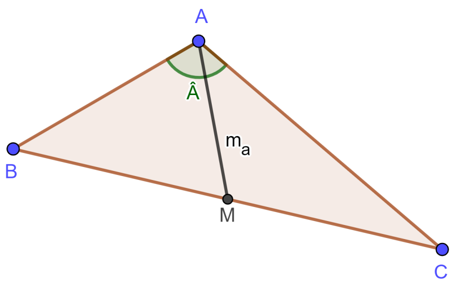


De maneira análoga é a justificativa para o △AB'C.

Exercício 4.0.16. Construir o triângulo $\triangle ABC$ conhecendo o lado $\overline{BC}$, o ângulo $\widehat{A}$ e o segmento que representa a mediana relativa ao lado $\overline{BC}$, cujo comprimento será denotado por m_a.

Construção:

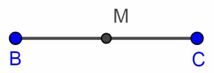
1. Observe a figura abaixo que ilustra os dados do enunciado.



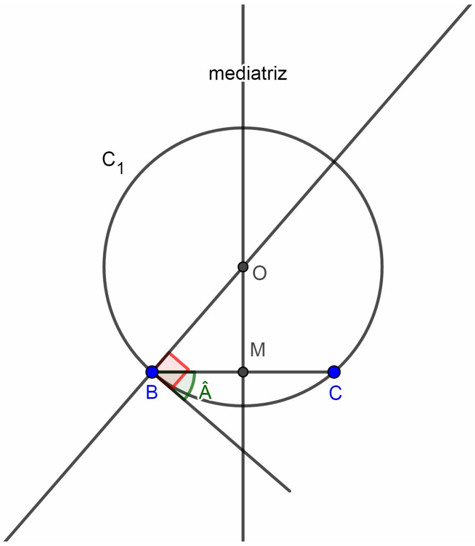
2. Vamos iniciar a construção traçando o segmento $\overline{BC}$.

3. Determine o ponto médio do segmento $\overline{BC}$, nomeie por M.

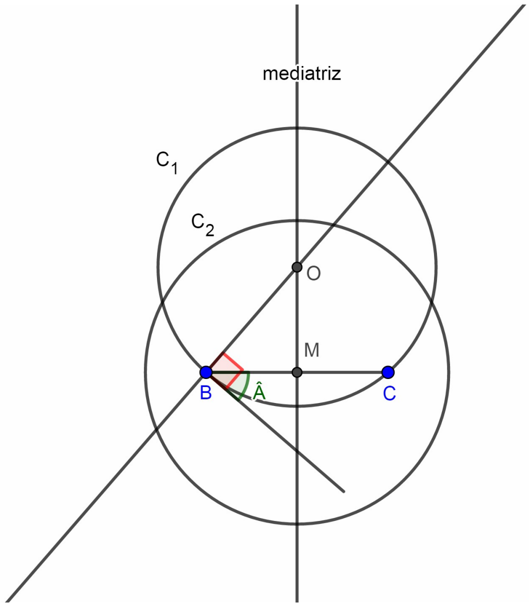
[9] Vide teorema (2).



4. Construa o arco capaz[10] C_1 associado ao ângulo $\widehat{A}$ relativo ao segmento $\overline{BC}$.

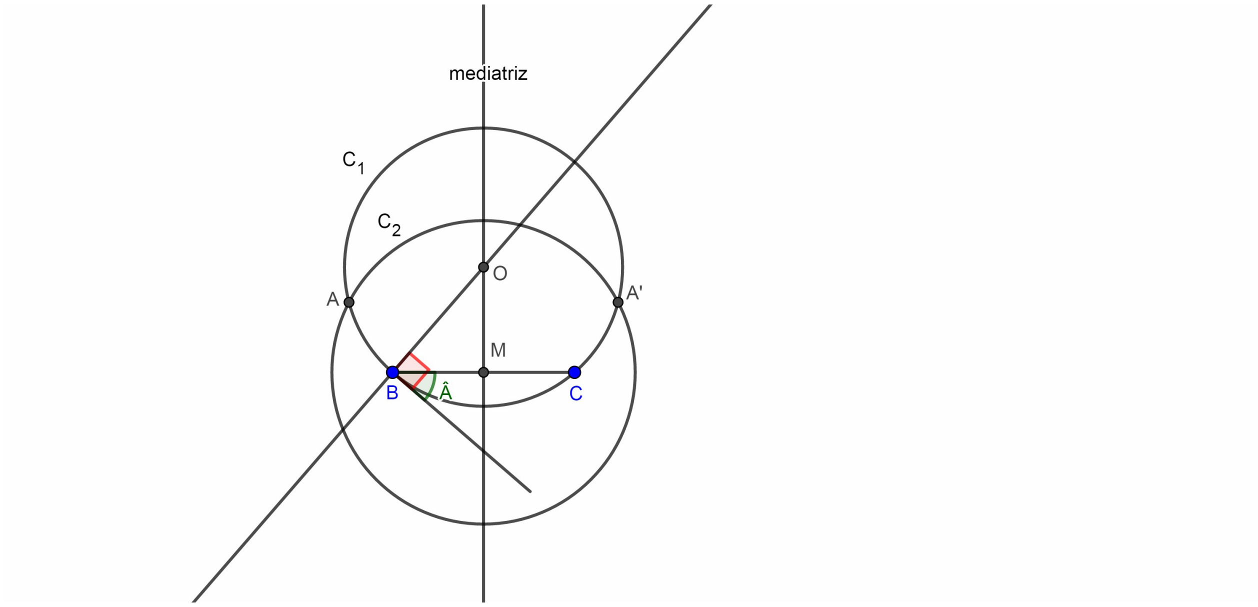


5. Construa uma circunferência C_2 com centro no ponto M e raio cujo o comprimento é igual a m_a.

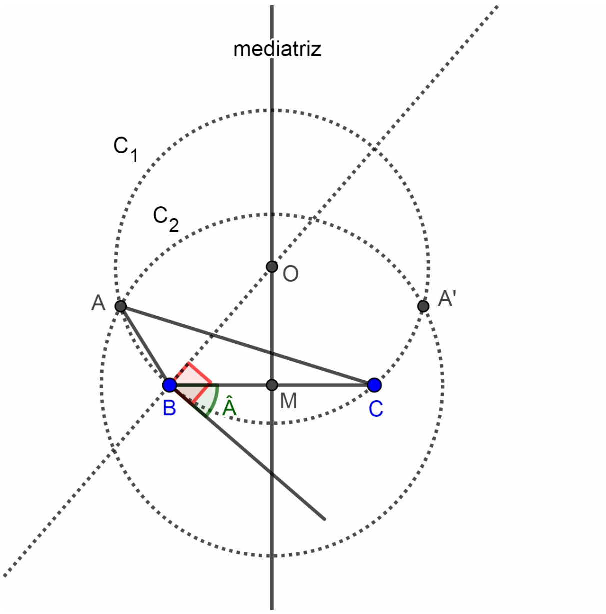


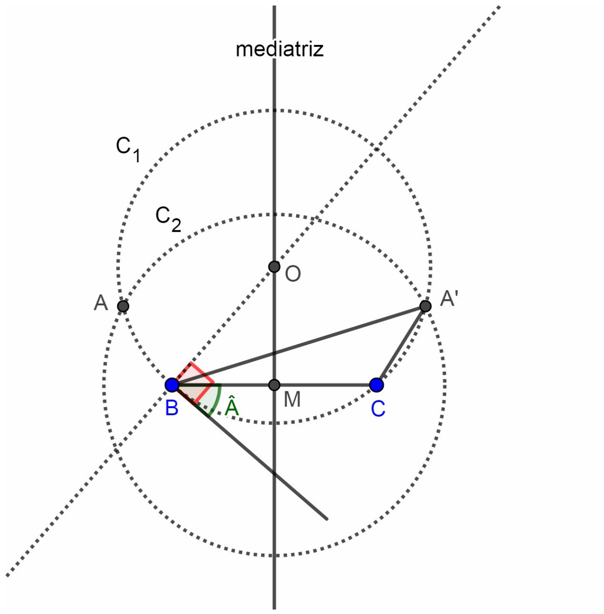
6. Denote os pontos de intersecção entre o arco capaz C_1 e a circunferência C_2 por A e A'.

[10] Vide exemplo (5).



7. Trace segmentos ligando, respectivamente, os pontos A, B e C e, A', B e C, logo temos dois triângulos que satisfazem os dados do exercício.





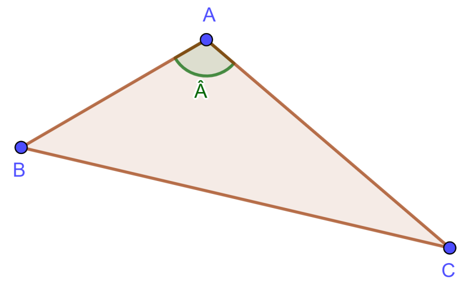
Justificativa:

Note que a resolução é validada pela construção do arco capaz, pois a partir deste encontramos o lugar geométrico dos pontos que "enxergam"o ângulo $\widehat{A}$ sob o segmento $\overline{BC}$. E sabemos que o ponto que satisfaz o enunciado deste exercício se encontra a uma distância congruente ao segmento que representa a mediana cujo comprimento é m_a do segmento citado, logo, basta construir a circunferência C_2 com raio m_a para determinar os pontos A e A' resultando nos triângulos desejados.

Exercício 4.0.17. Construir o triângulo $\triangle ABC$ conhecendo os lados $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ e o ângulo $\widehat{A}$.

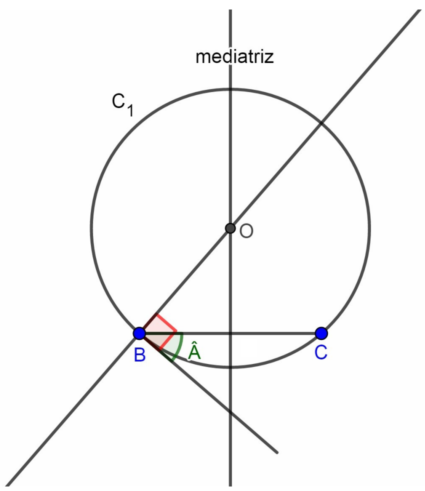
Resolução:

1. Observe a figura abaixo que ilustra os dados do enunciado.

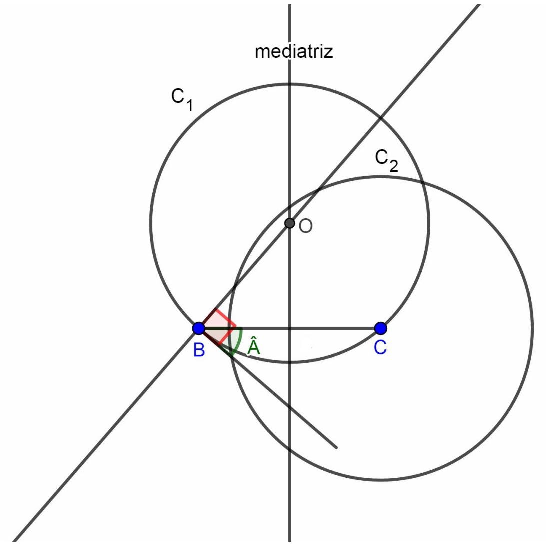


2. Vamos iniciar a construção traçando o segmento $\overline{BC}$.

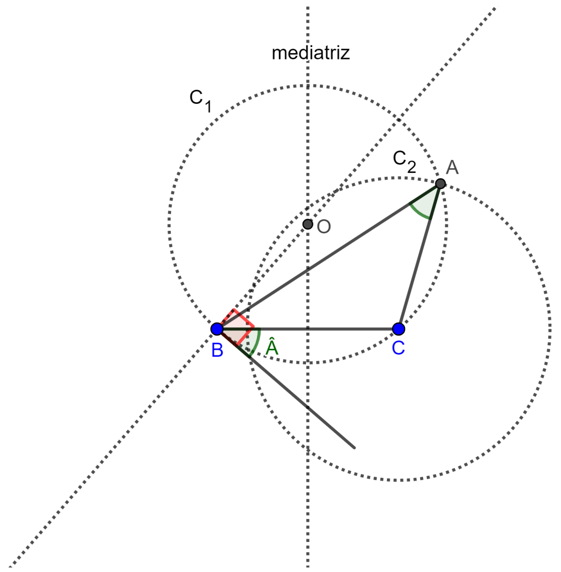
3. Construa o arco capaz C_1 do ângulo $\widehat{A}$ relativo ao segmento $\overline{BC}$.



4. Construa uma circunferência C_2 com centro no ponto C e raio de segmento $\overline{AC}$.



5. Encontre o ponto de intersecção entre o arco capaz C_1 e a circunferência C_2, note que este é o ponto A do triângulo desejado.



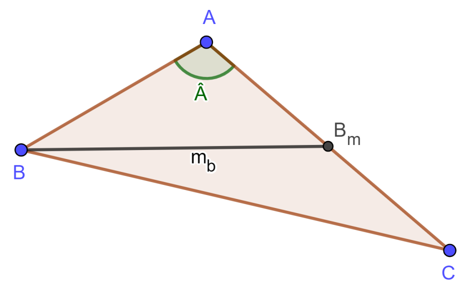
Justificativa:

Note que a resolução é validada pela construção do arco capaz, pois a partir deste encontramos o lugar geométrico dos pontos que "enxergam" o ângulo $\widehat{A}$ sob o segmento $\overline{BC}$. E sabemos que o ponto que satisfaz o enunciado deste exercício se encontra a uma distância congruente ao segmento $\overline{AC}$ do ponto C, logo, basta construir a circunferência C_2, com centro no ponto C e raio de segmento $\overline{AC}$, para determinar o ponto A resultando no triângulo desejado.

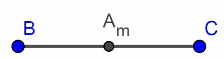
Exercício 4.0.18. Construir um triângulo $\triangle ABC$ conhecendo o lado $\overline{BC}$, o ângulo $\widehat{A}$ e o segmento que representa a mediana relativa ao lado $\overline{AC}$, cujo comprimento denotaremos por m_b.

Resolução:

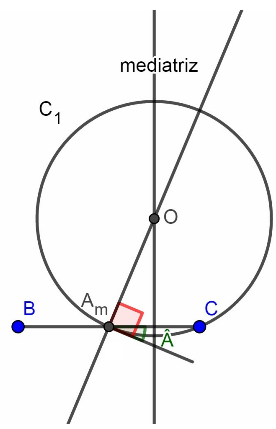
1. Observe a figura abaixo que ilustra os dados do enunciado.



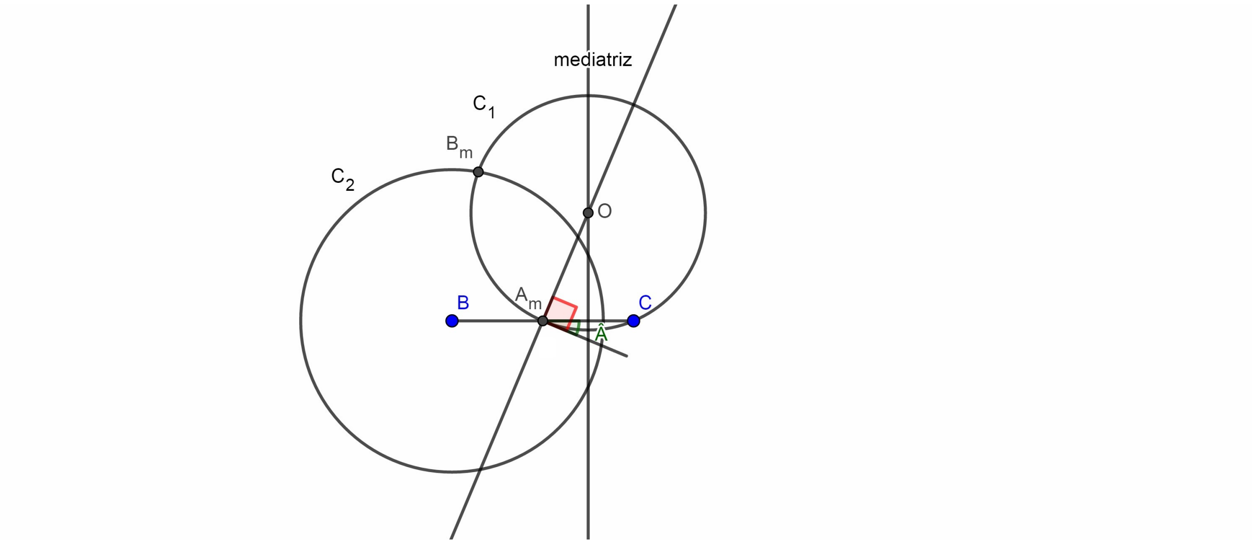
2. Trace o segmento $\overline{BC}$ e em seguida denote seu ponto médio A_m.



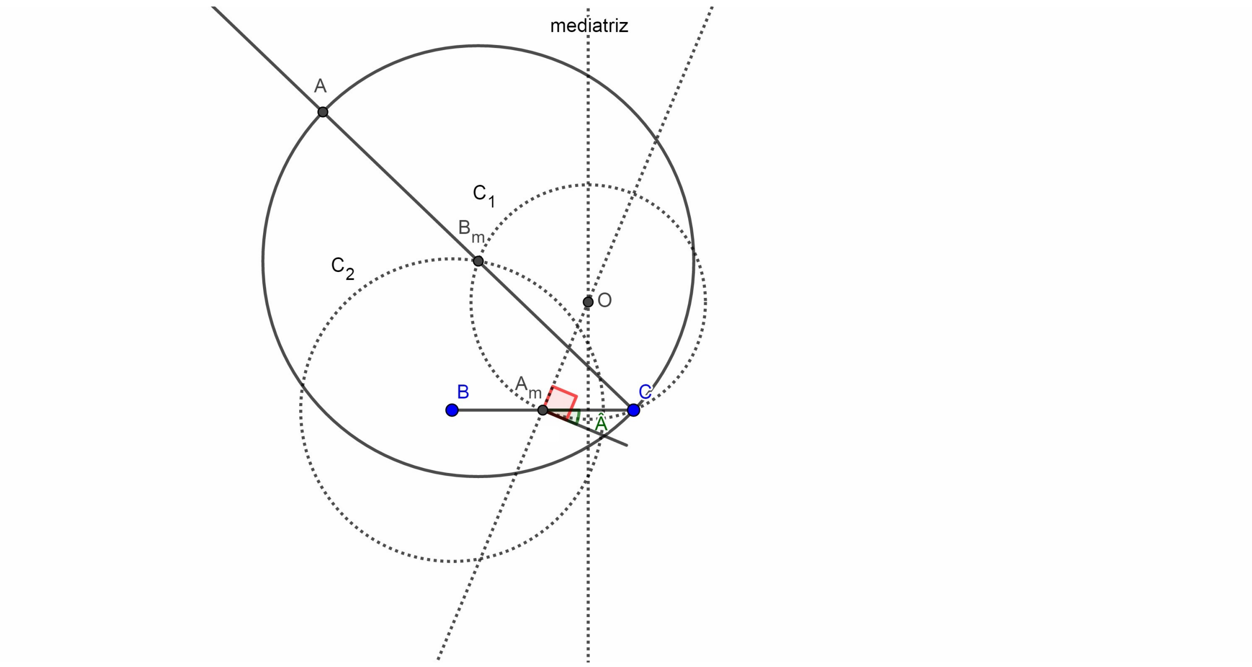
3. Construa o arco capaz C_1 do ângulo $\widehat{A}$ relativo ao segmento $\overline{A_mC}$.



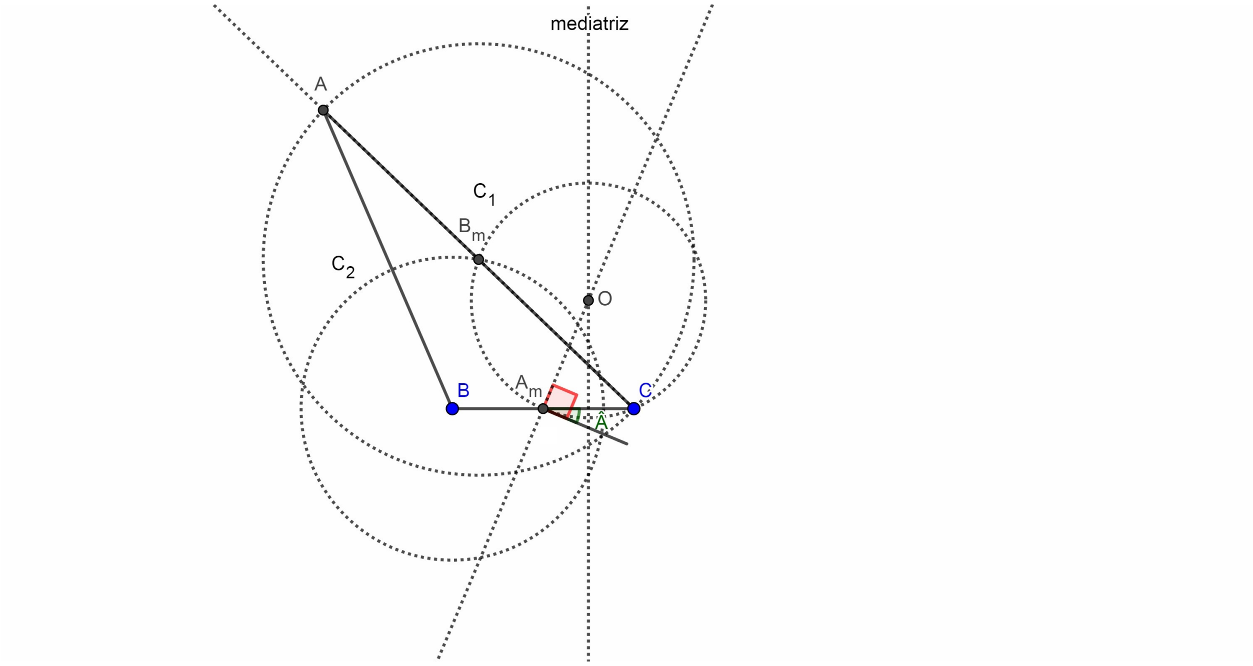
4. Construa uma circunferência C_2 com centro no ponto B e raio congruente a mediana cujo comprimento é m_b, cuja intersecção com C_1 é o ponto B_m.



5. Prolongue o segmento $\overline{CB_m}$ e encontre o ponto A de modo que $\overline{AB_m} \equiv \overline{B_mC}$, de maneira que o ponto B_m pertença ao segmento $\overline{AC}$.



6. Então temos o triângulo $\triangle ABC$ desejado.



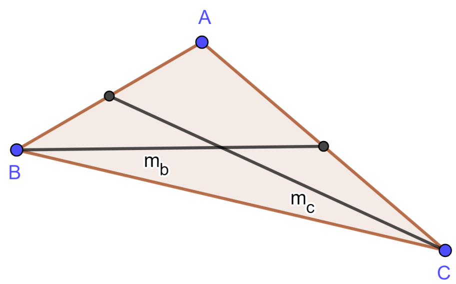
Justificativa:

Note que por construção determinamos o ponto médio B_m a partir da mediana cujo comprimento é igual a m_b dada, concluindo assim que o ponto A está localizado no prolongamento do segmento $\overline{CB_m}$ de modo que os pontos A e C colineares equidistam do ponto médio determinado.

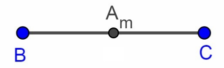
Exercício 4.0.19. Construir o triângulo $\triangle ABC$ conhecendo o lado $\overline{BC}$ e os segmentos que representam as medianas relativas aos lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, cujos comprimentos denotaremos por m_b e m_c.

Resolução:

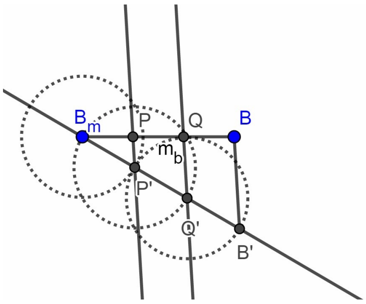
1. Observe a figura abaixo que ilustra os dados do enunciado.

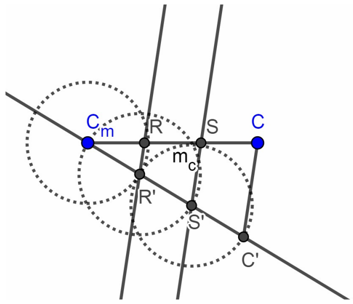


2. Trace o segmento $\overline{BC}$ e em seguida denote seu ponto médio por A_m.

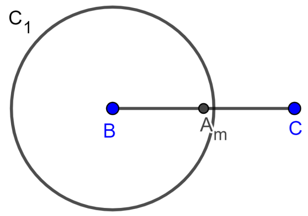


3. Divida[11] os segmentos que representam as medianas relativas aos lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, cujos comprimentos são m_b e m_c em 3 partes congruentes.

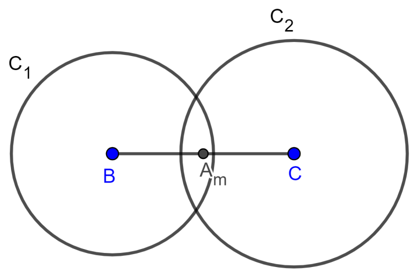




4. Construa uma circunferência C_1 com centro no ponto B e raio cujo comprimento é dois terços do comprimento do segmento que representa a mediana relativa ao lado $\overline{AC}$ que tem comprimento m_b.

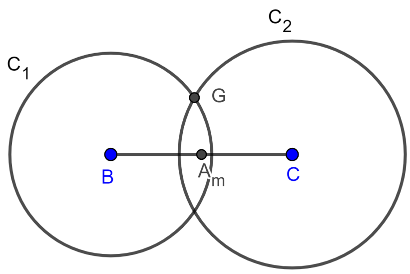


5. Construa uma circunferência C_2 com centro no ponto C e raio cujo comprimento é dois terços do segmento que representa a mediana relativa ao lado $\overline{AB}$ que tem comprimento m_c.



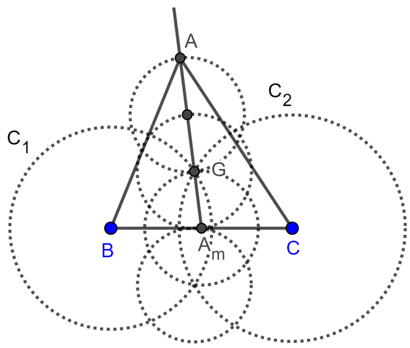
[11] Vide caso (2) de como dividir um segmento em n partes iguais.

6. Denote o ponto G de intersecção entre as circunferências C_1 e C_2.



   Note que G é o baricentro do $\triangle ABC$.

7. Trace a semirreta $\overrightarrow{A_mG}$ e encontre o ponto A de modo que $\overline{AG}$ tenha o comprimento igual ao dobro de A_mG, com o ponto G pertencente ao segmento $\overline{AA_m}$. Logo temos como resultado o $\triangle ABC$ desejado.

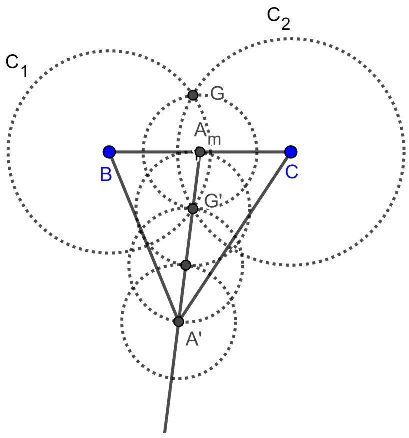


Justificativa:

Como vimos anteriormente (na Definição 14), o ponto G é o baricentro do $\triangle ABC$.

Observação:

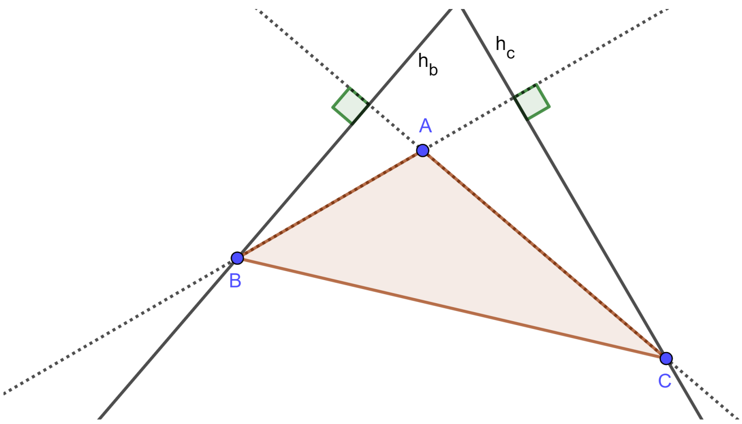
Note que há outro triângulo que satisfaz os dados do enunciado, se considerarmos o ponto G' e repetirmos o passo 7 teremos o $\triangle A'BC$. E a justificativa será análoga à acima.



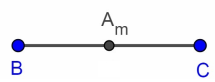
Exercício 4.0.20. Construir o triângulo $\triangle ABC$ conhecendo o lado $\overline{BC}$ e os segmentos que representam as alturas relativas aos vértices B e C, cujos comprimentos denotaremos por h_b e h_c.

Resolução:

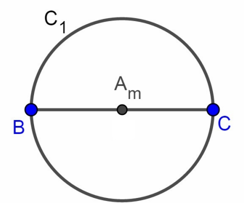
1. Observe a figura abaixo que ilustra os dados do enunciado.



2. Trace o segmento $\overline{BC}$ e em seguida denote seu ponto médio por A_m.



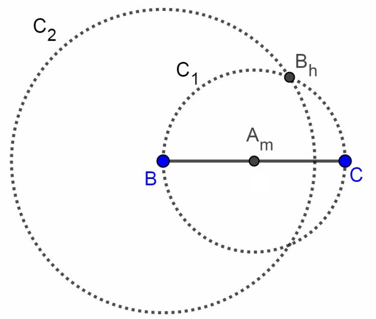
3. Construa uma circunferência C_1 com centro no ponto A_m e raio de comprimento igual a A_mC.



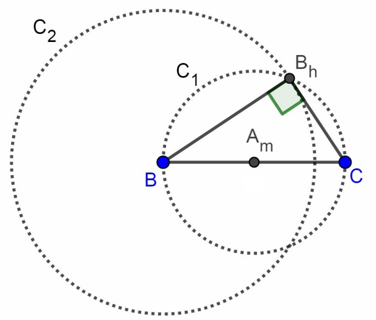
4. Determine o triângulo retângulo $\triangle BCB_h$, onde B_h é o pé da altura relativa ao vértice B, cujo o comprimento é h_b.

   Para isso siga os passos abaixo:

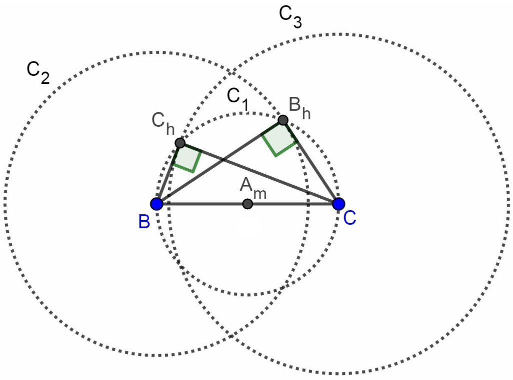
   4.1. Construa uma circunferência C_2 com centro no ponto B e raio de comprimento igual a h_b, em seguida denote o ponto de intersecção entre as circunferências C_1 e C_2, situado no semiplano acima do segmento $\overline{BC}$, por B_h.



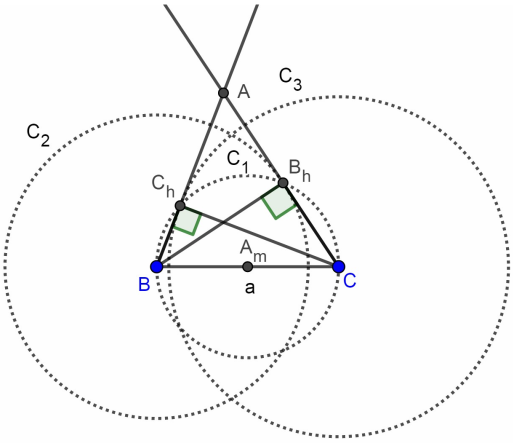
   4.2. Trace os segmentos $\overline{BB_h}$ e $\overline{CB_h}$ para determinar o $\triangle BCB_h$



5. Analogamente construa o triângulo retângulo $\triangle BCC_h$, onde o ponto C_h é o pé da altura relativa ao vértice C, cujo comprimento é igual a h_c.



6. Prolongue os segmentos $\overline{BC_h}$ e $\overline{CB_h}$ e denote sua intersecção por ponto A, formando o $\triangle ABC$ desejado.



Note que há dois triângulos que satisfazem os dados do exercício, o segundo triângulo é encontrado de maneira análoga e está posicionado no semiplano abaixo do segmento $\overline{BC}$.

Justificativa:

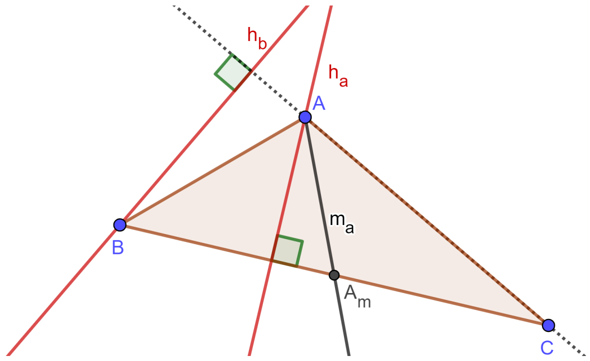
A construção dos passos 3 e 4 justificam-se pela Proposição 1.

E no passo 5 determinamos o vértice A, pois como os pontos B_h e C_h são pés das alturas referentes aos vértices B e C, respectivamente, então esses pontos pertencem aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, do triângulo desejado.

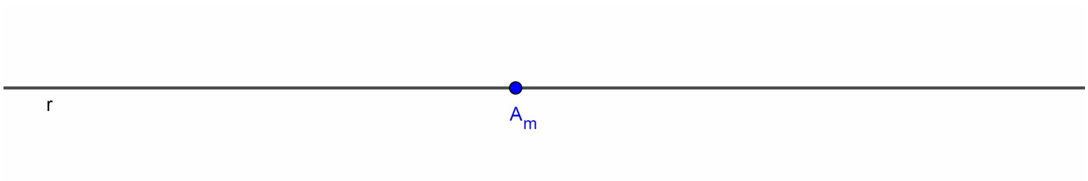
Exercício 4.0.21. Construir o triângulo $\triangle ABC$ conhecendo os segmentos que representam a mediana relativa ao lado $\overline{BC}$, e as alturas relativas aos vértices A e B, cujos comprimentos serão denominados, respectivamente, por m_a, h_a e h_b.

Resolução:

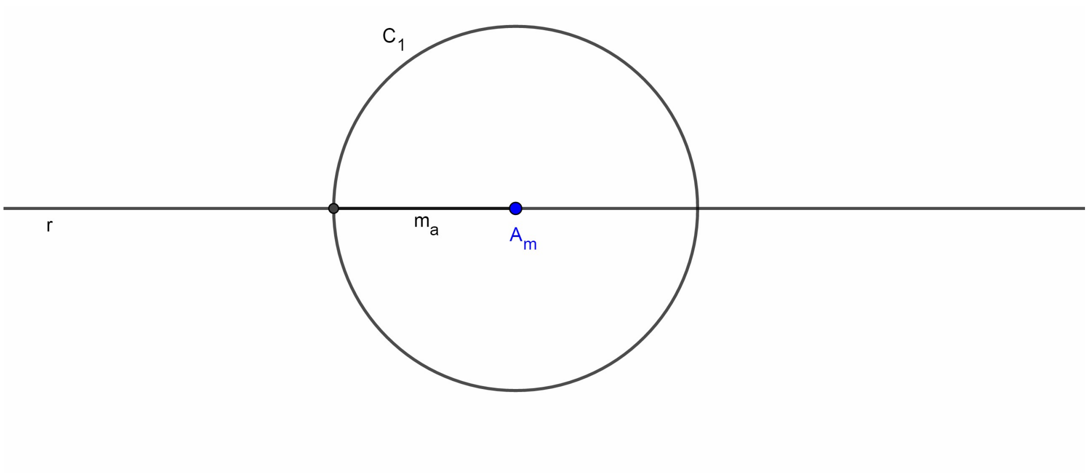
1. Observe a figura abaixo que ilustra os dados do enunciado.



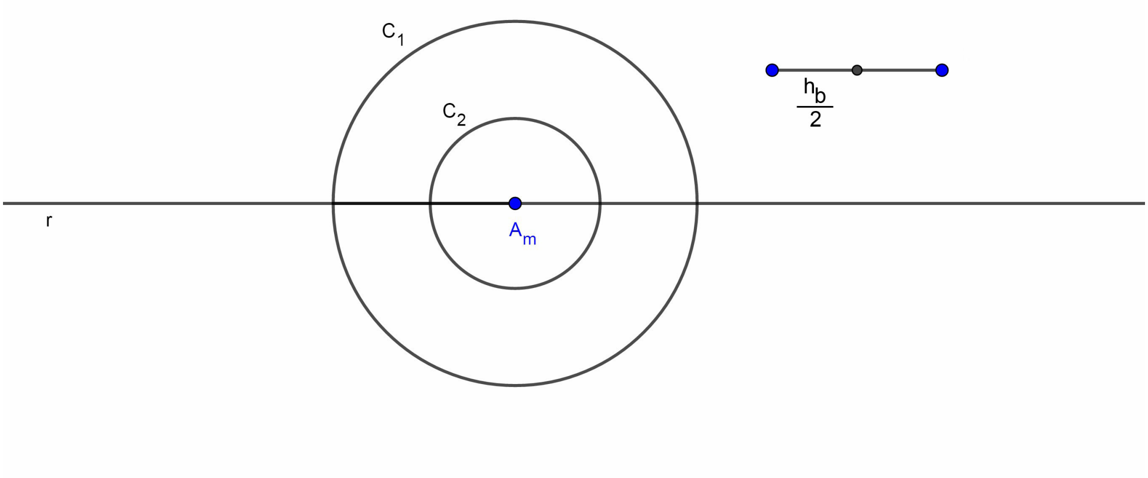
2. Trace a reta r que contém o lado $\overline{BC}$ e denote por A_m, o ponto médio deste lado. Note que A_m está localizado no lado citado, e este por sua vez, está localizado na reta r.



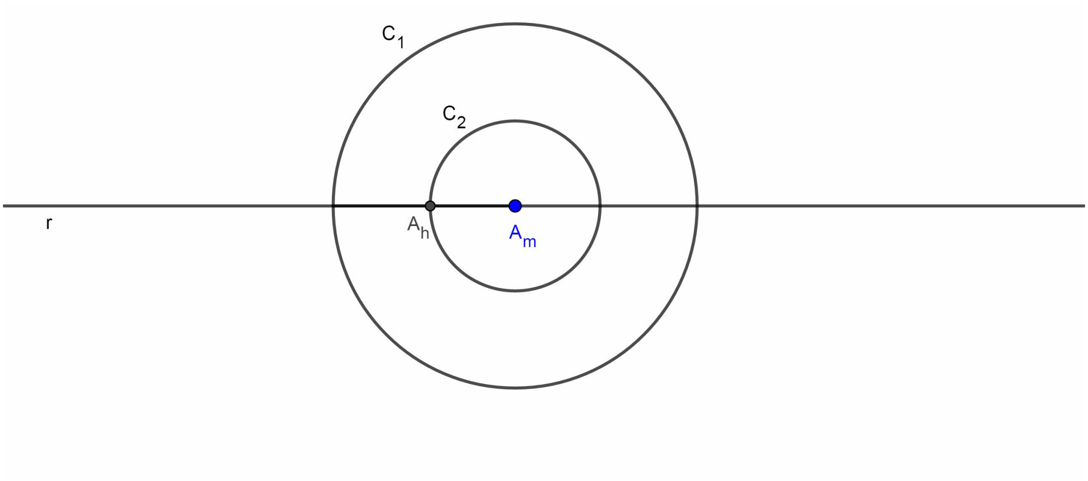
3. Construa uma circunferência C_1 com centro no ponto A_m e raio de comprimento igual a m_a. Note que o ponto A pertencerá a C_1.



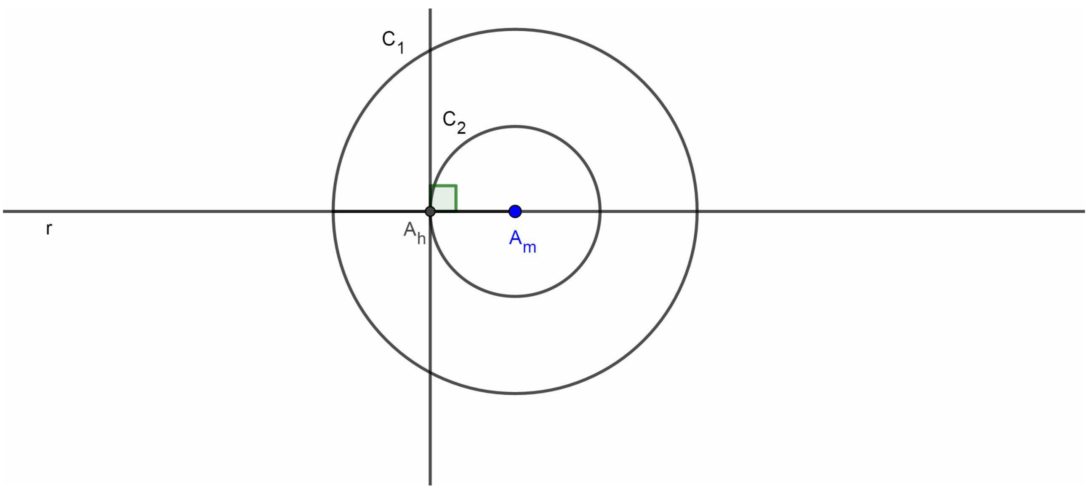
4. Construa uma circunferência C_2 com centro no ponto A_m e raio de comprimento igual à metade do comprimento h_b.



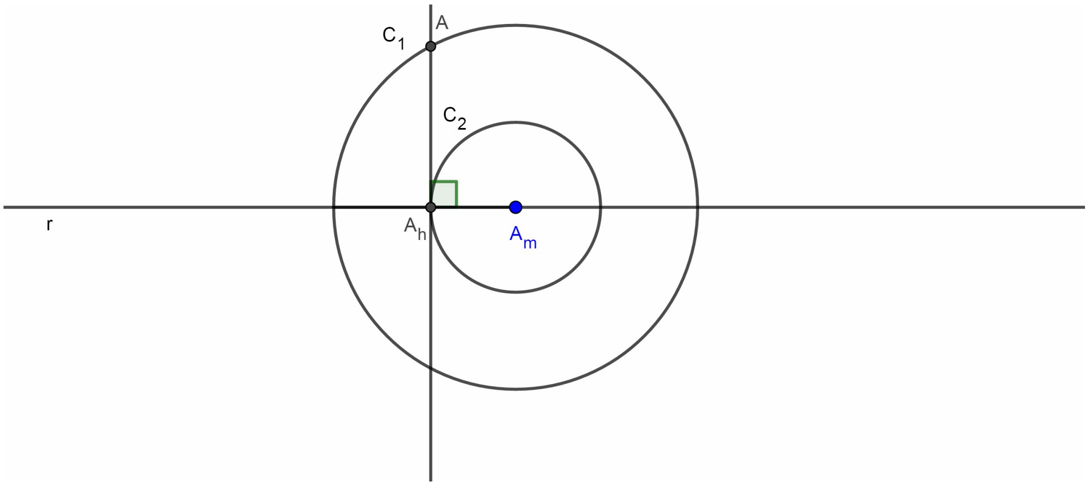
5. Denote o ponto de intersecção entre a circunferência C_2 e a reta r por A_h, que é o pé da altura relativa ao vértice A, cujo comprimento é igual a h_a. Note que há dois pontos de intersecção, escolha um, a construção é análoga para ambos.



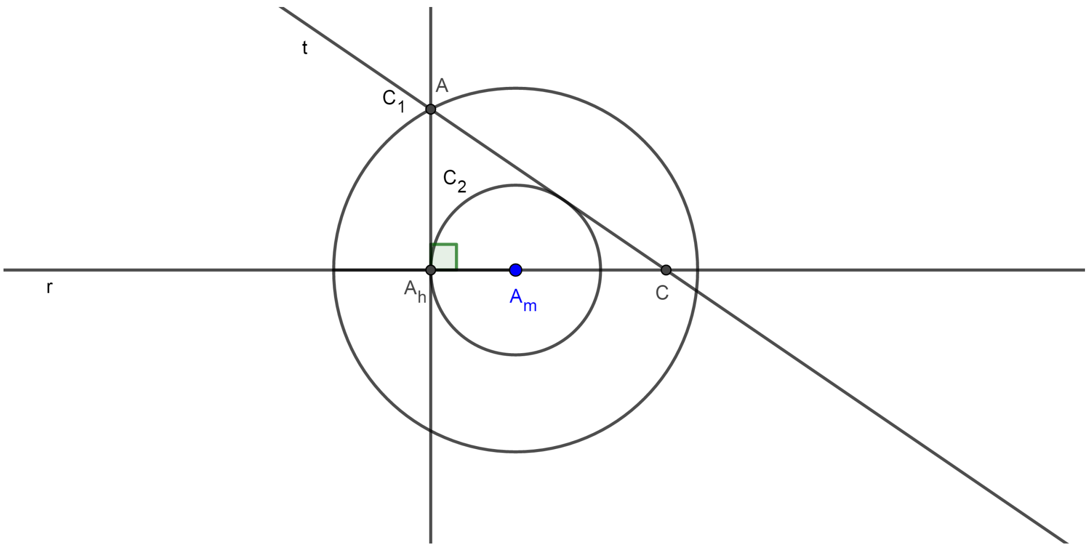
6. Trace pelo ponto A_h uma reta perpendicular a r.



7. Denote por A o ponto de intersecção da circunferência C_1 e a reta perpendicular a r, situado no semiplano superior, relativo a r.

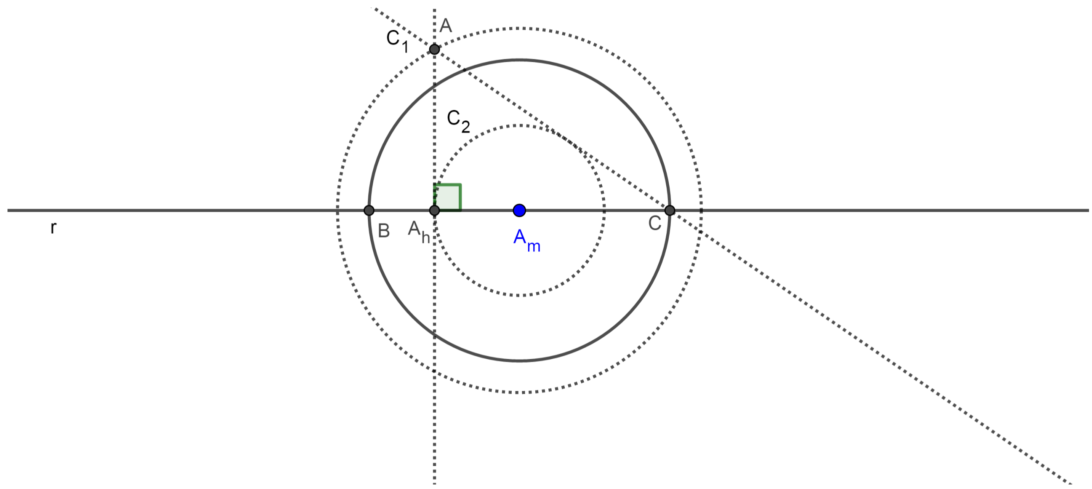


8. Trace a reta tangente t[12] à circunferência C_2 pelo ponto A, cuja intersecção com a reta r é o ponto C.

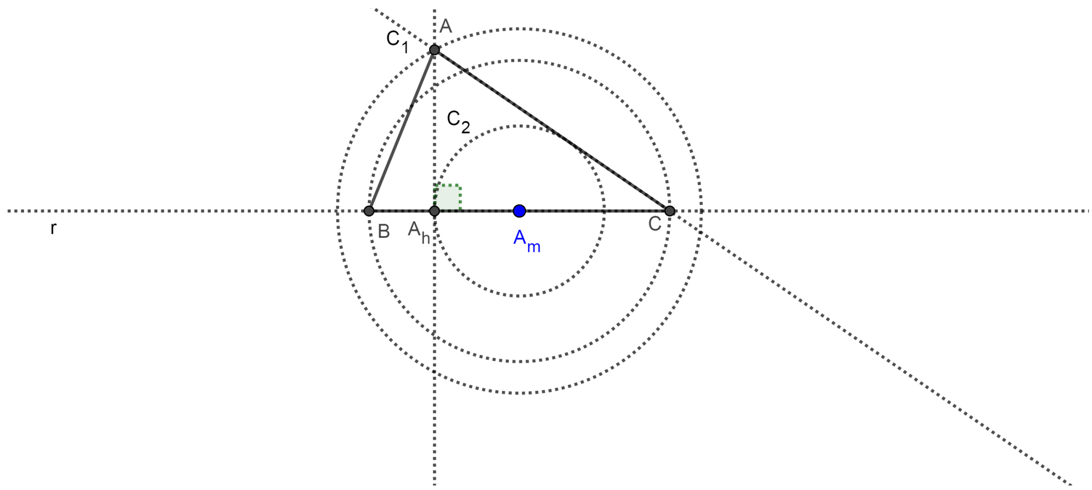


9. Denote por B o ponto de modo que os segmentos $\overline{BA_m} \equiv \overline{A_mC}$, com o ponto A_m pertencente ao segmento $\overline{BC}$. Note que o ponto A_m pertence ao lado $\overline{BC}$, logo foi possível determinar o ponto B.

[12] Vide sessão (3.5.4).



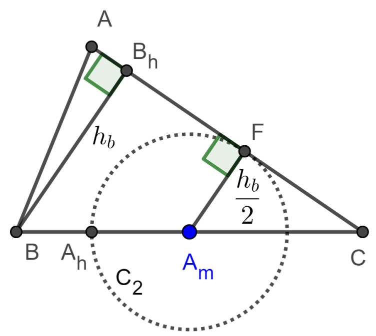
10. Trace os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ e temos o $\triangle ABC$ desejado.



Note que há 4 triângulos que são soluções deste exercício, as construções são análogas.

Justificativa:

Observe:



Perceba que os $\triangle BB_hC$ e $\triangle A_mFC$ são semelhantes pelo caso AA[13].

Pois:

Eles tem o ângulo $\widehat{C}$ em comum e,

$\widehat{B_h} \equiv \widehat{F}$.

Logo $\dfrac{h_b}{2}$ é proporcional a h_b e ainda temos que

$A_mC = \dfrac{BC}{2}$ por construção,

então

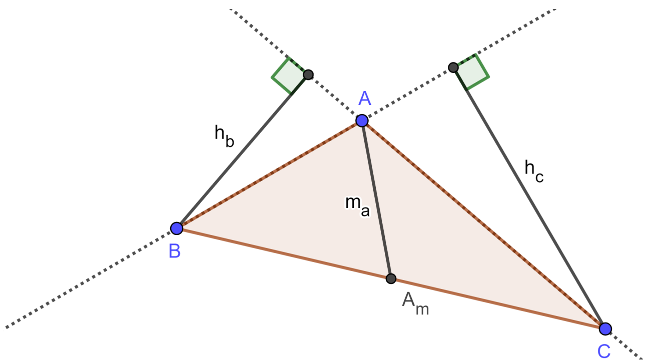
$A_mF = \dfrac{BB_h}{2}$, ou seja, $\dfrac{h_b}{2} = \dfrac{h_b}{2}$

como queríamos demonstrar.

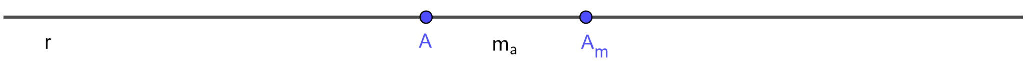
Exercício 4.0.22. Construir o triângulo $\triangle ABC$ conhecendo os segmentos que representam a mediana relativa ao lado $\overline{BC}$, e as alturas relativas aos vértices B e C, cujos comprimentos são m_a, h_b e h_c.

Resolução:

1. Observe a figura abaixo que ilustra os dados do enunciado.

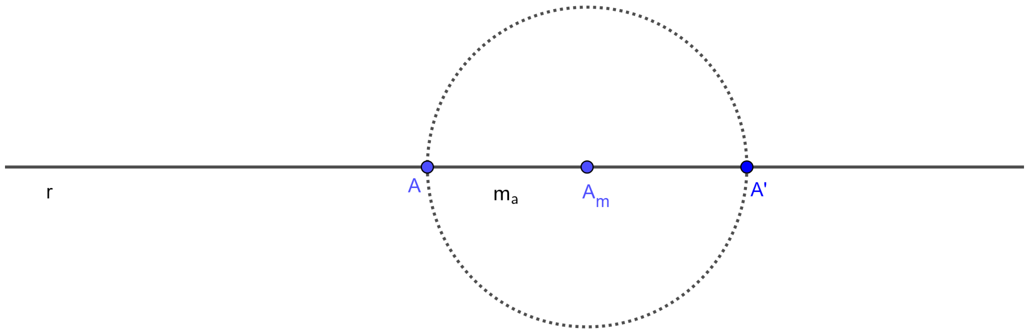


2. Trace uma reta r e denote por A e A_m, os pontos, de modo que o segmento $\overline{AA_m}$ tenha comprimento m_a.

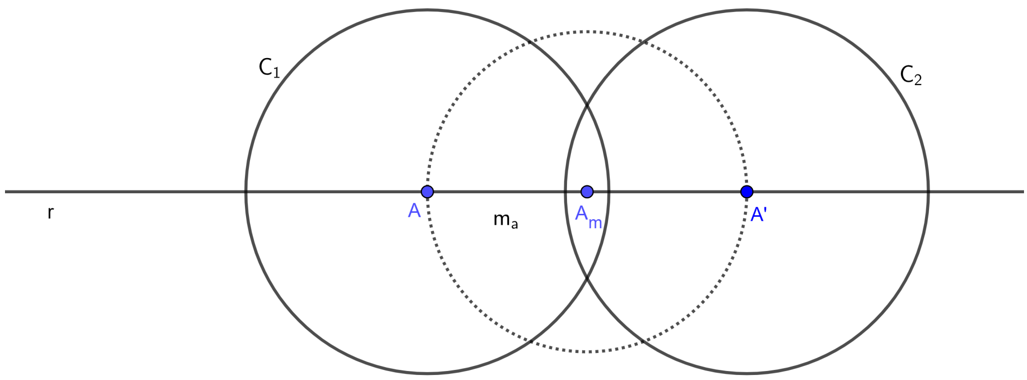


3. Seja A' o ponto sobre a reta r, de modo que $AA_m = A_mA'$, de modo que o ponto A_m pertença ao segmento $\overline{AA'}$.

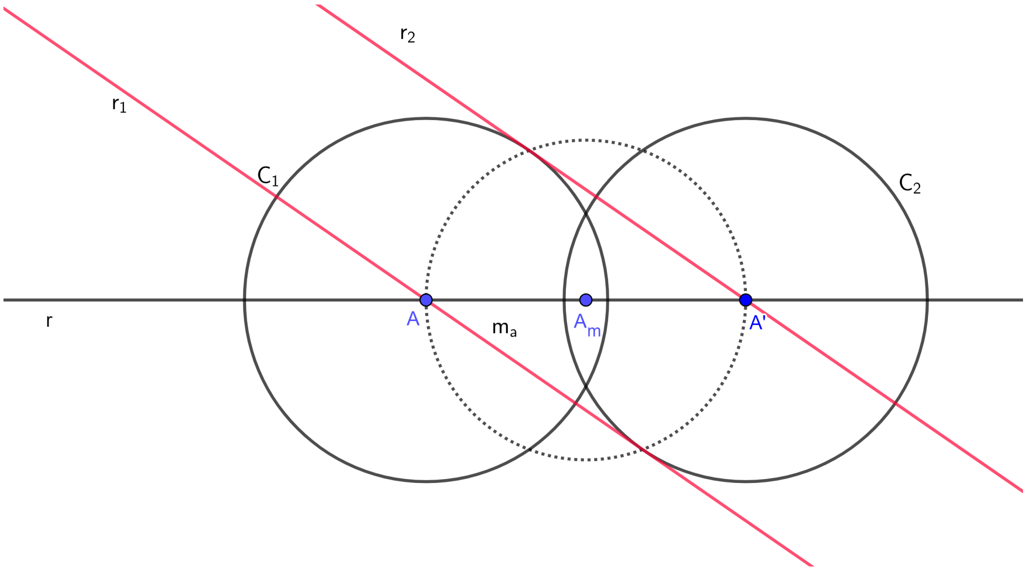
[13] vide caso (1).



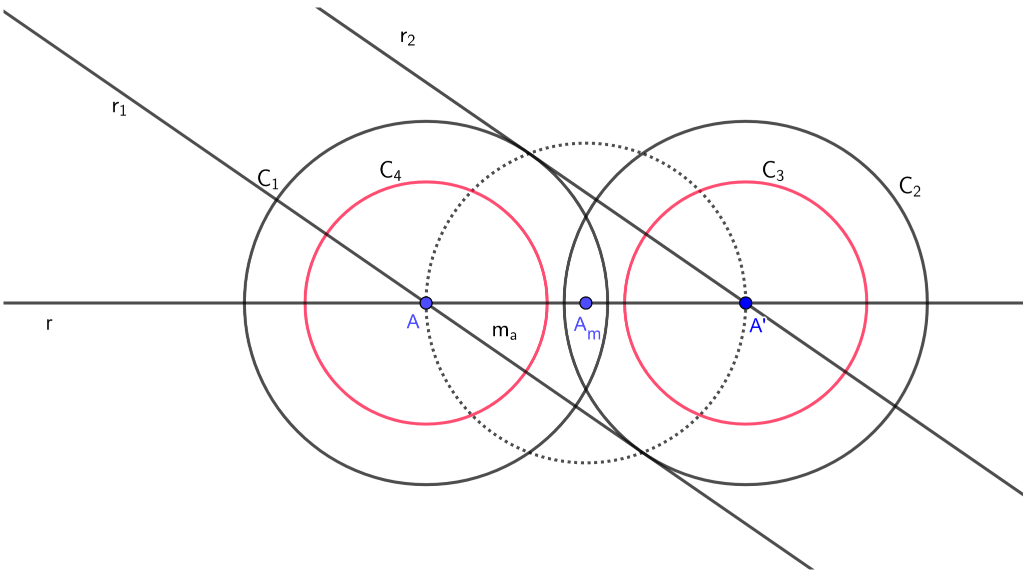
4. Construa duas circunferências, C_1 e C_2, de centros nos pontos A e A', e raio igual ao comprimento da altura referente ao vértice B, representada por h_b, respectivamente.



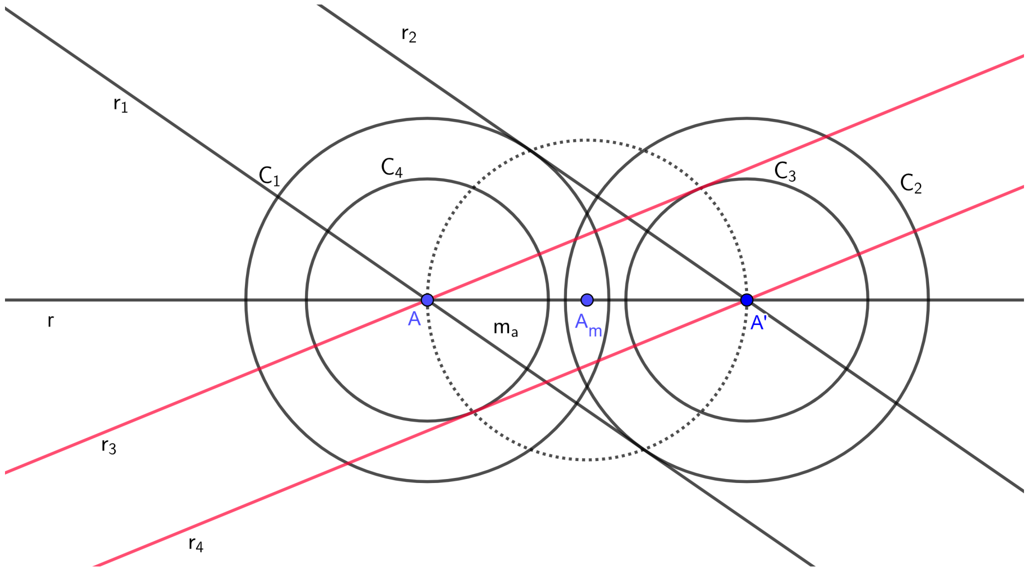
5. Trace duas retas, r_1 e r_2, de modo que a reta r_1 seja tangente à circunferência C_2 e contenha o ponto A e, a reta r_2 seja tangente à circunferência C_1 e contenha o ponto A' (observe a figura abaixo).



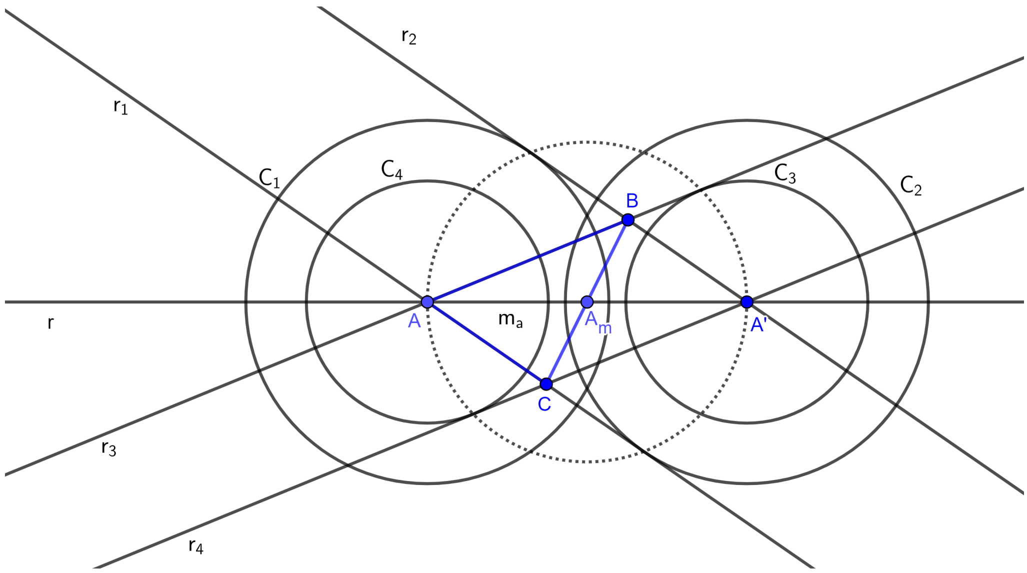
6. Construa duas circunferências, C_3 e C_4, de centros nos pontos A' e A e raio igual ao comprimento da altura referente ao vértice C, representada por h_c, respectivamente.



7. Trace duas retas, r_3 e r_4, de modo que a reta r_3 seja tangente à circunferência C_3 e contenha o ponto A e, a reta r_4 seja tangente à circunferência C_4 e contenha o ponto A' (observe a figura seguinte).



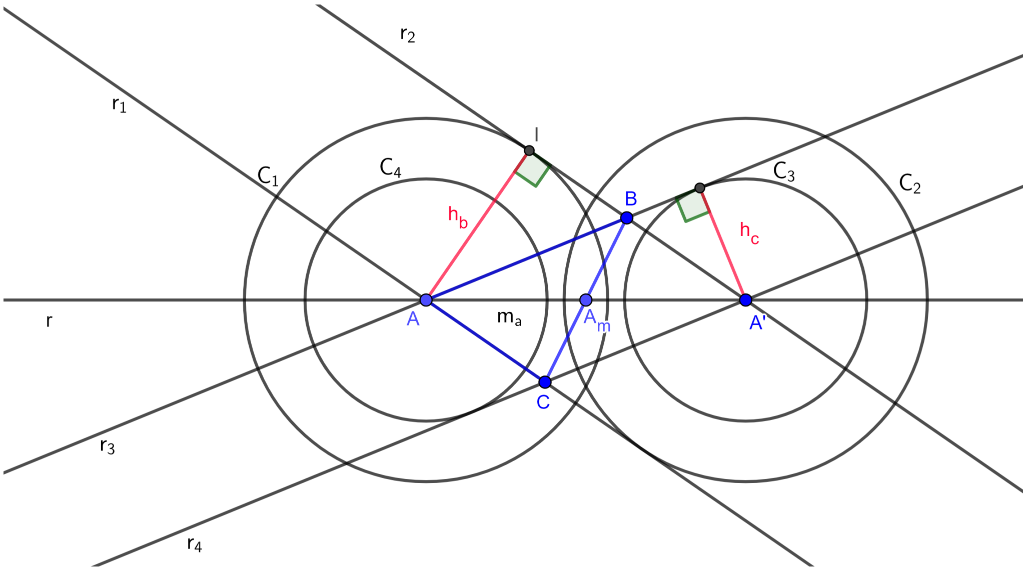
8. Denote o ponto de intersecção entre as retas r_2 e r_3 por B e, o ponto de intersecção entre as retas r_1 e r_4 por ponto C. Trace os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, e em seguida temos o $\triangle ABC$ desejado.



Justificativa:

Os vértices B e C do triângulo desejado estão localizados sobre as retas r_2 e r_1, respectivamente. Desta maneira a altura referente ao vértice B terá comprimento h_b, e também os pontos citados deverão estar sobre o segmento que contenha o ponto A_m, pois deste modo, o ponto A_m será o ponto médio do segmento $\overline{BC}$. Sabemos também que o vértice B deverá pertencer a reta r_3 e o vértice C, deverá pertencer a reta r_4, assim a altura relativa ao vértce C terá comprimento h_c (observe a figura abaixo).

Note que o segmento de comprimento h_b é perpendicular à reta r_2, pois r_2 é tangente à circunferência C_1 no ponto I. Analogamente, o segmento de comprimento h_c é perpendicular à reta r_3.



Observe ainda que o quadrilátero $ACA'B$ é um paralelogramo, pois as retas r_1 e r_2 são paralelas, assim como as retas r_3 e r_4, por construção.

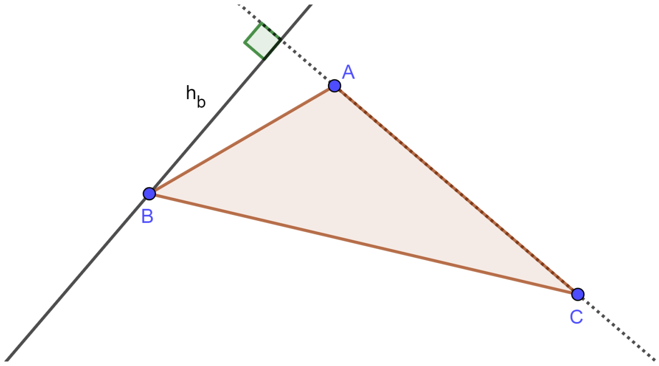
Logo o ponto A_m é ponto médio do segmento $\overline{BC}$ e assim $AA_m = m_a$ é o comprimento da mediana relativa ao vértice A.

Notemos ainda que, por construção a altura do $\triangle ABC$, relativa ao vértice B terá comprimento h_b, pois as retas r_1 e r_2 são paralelas e distam h_b uma da outra, e a altura, relativa ao vértice C, terá comprimento h_c, pois as retas r_3 e r_4 são paralelas e distam h_c uma da outra, logo temos o $\triangle ABC$ desejado.

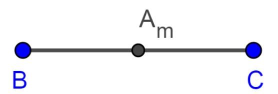
Exercício 4.0.23. Construir o triângulo $\triangle ABC$ conhecendo o lado $\overline{BC}$, a soma $s = b + c$, a soma dos comprimentos dos outros dois lados e comprimento da altura relativa ao vértice B, denotada por h_b.

Resolução:

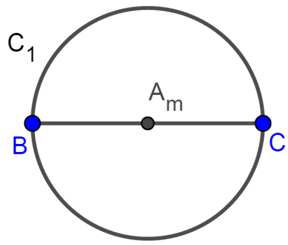
1. Observe a figura abaixo que ilustra os dados do enunciado.



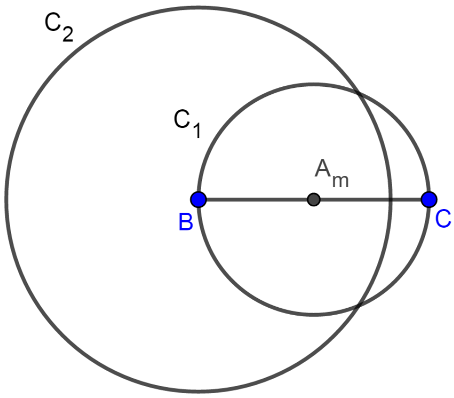
2. Trace o segmento $\overline{BC}$ e em seguida denote seu ponto médio por A_m.



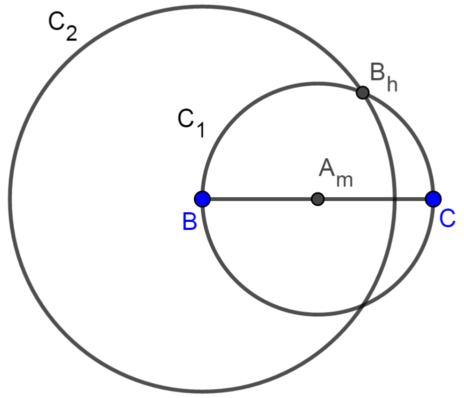
3. Construa uma circunferência C_1 com centro no ponto A_m e raio de comprimento $\dfrac{BC}{2}$.



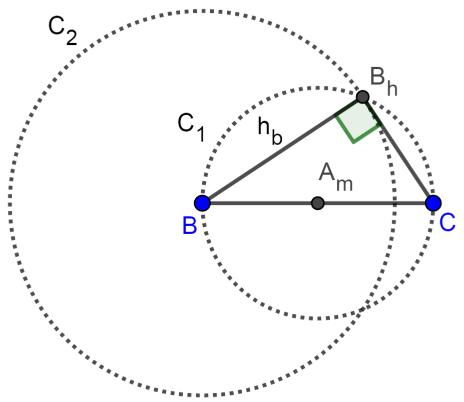
4. Construa uma circunferência C_2 com centro no ponto B e raio de comprimento igual a h_b.



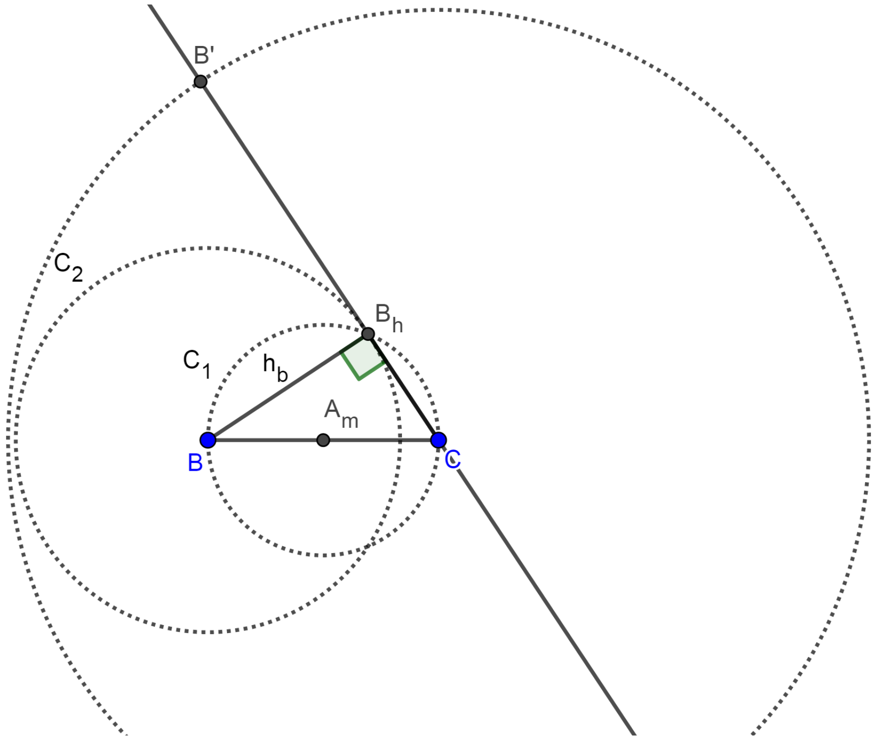
5. Seja B_h, o ponto de intersecção, que é o pé da altura de comprimento h_b, entre as circunferências C_1 e C_2.



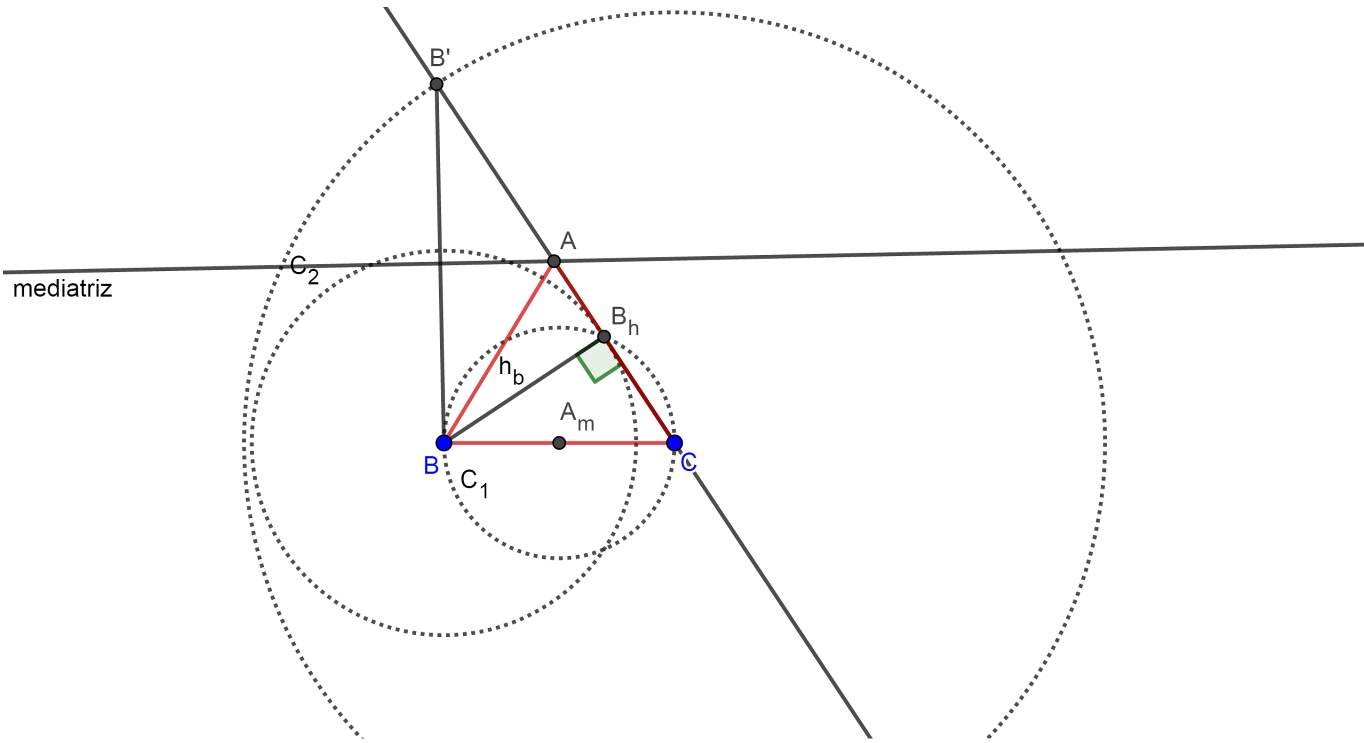
6. Trace os segmentos $\overline{BB_h}$ e $\overline{CB_h}$ determinando o $\triangle BCB_h$, que possui ângulo reto em B_h. Note que o segmento $\overline{BC}$ é a hipotenusa e, $\overline{BB_h}$, é a altura cujo comprimento é igual a h_b e, é também um cateto do triângulo em questão.



7. Trace uma reta que contenha o segmento $\overline{CB_h}$ e defina o ponto B', de modo que $CB' = s = b + c$, com o ponto B_h pertencente ao segmento $\overline{CB'}$.



8. Trace a mediatriz[14] do segmento $\overline{BB'}$, cuja intersecção com $\overline{CB'}$ será o ponto A. Logo temos o $\triangle ABC$ desejado.



Justificativa:

Note que ao traçar a mediatriz do segmento $\overline{BB'}$, determinamos o vértice A, pois $\overline{AB'} \equiv \overline{AB}$, cujo

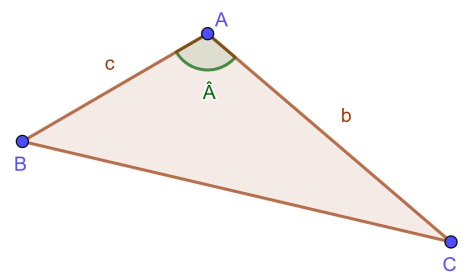
[14] Vide exemplo (4).

comprimento é igual a c, visto que tínhamos $s = b + c = CB'$, portanto o vértice A pertence à mediatriz de $\overline{BB'}$.

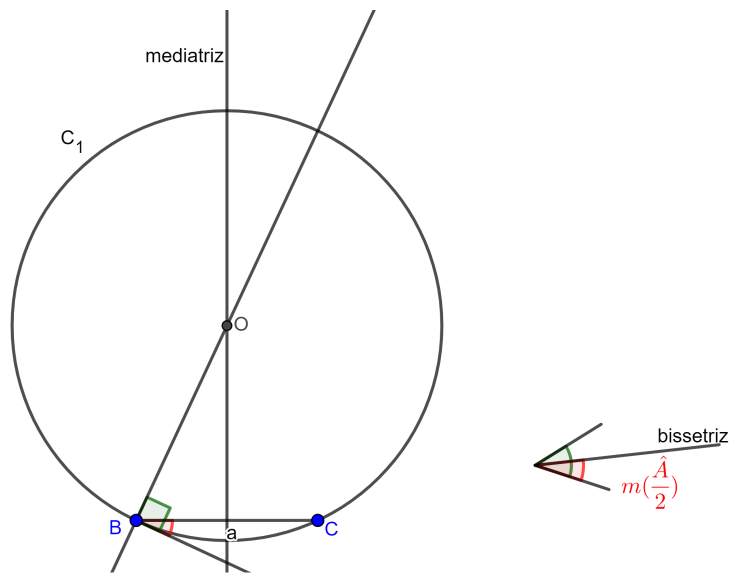
Exercício 4.0.24. Construir o triângulo $\triangle ABC$ conhecendo o lado $\overline{BC}$, o ângulo $\widehat{A}$ e a soma $s = b + c$, ou seja, a soma dos comprimentos dos outros dois lados.

Resolução:

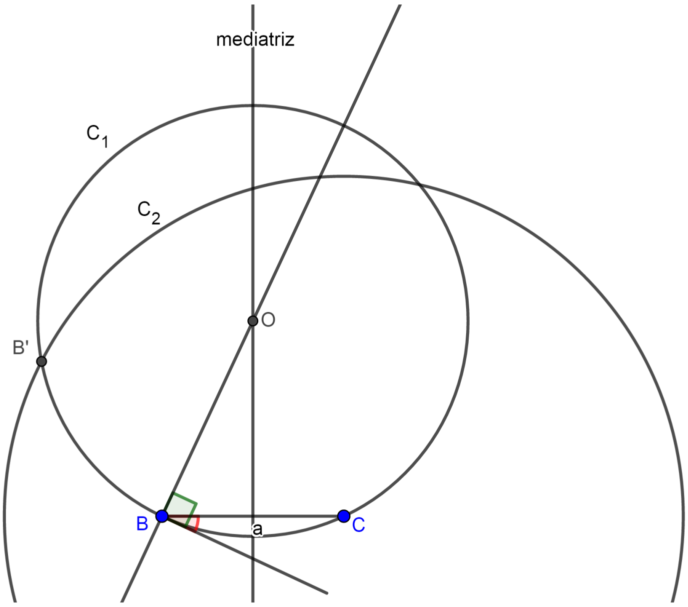
1. Observe a figura abaixo que ilustra os dados do enunciado.



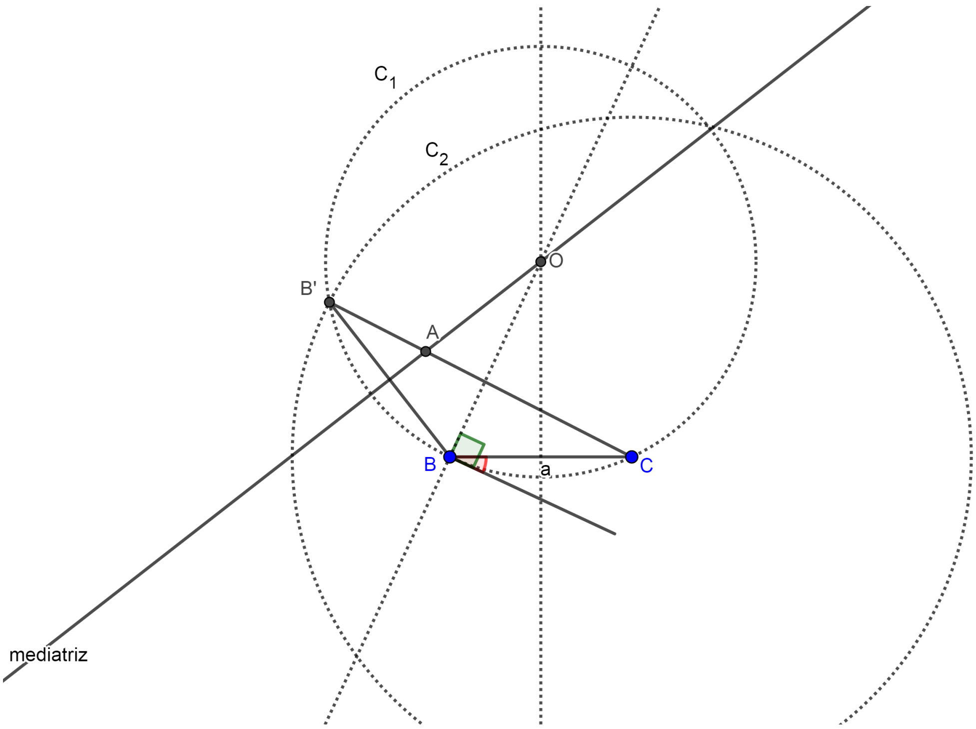
2. Trace o segmento $\overline{BC}$ de comprimento a e em seguida construa o arco capaz C_1 do ângulo que mede $m(\frac{\widehat{A}}{2})$, relativo ao segmento $\overline{BC}$.



3. Construa uma circunferência C_2 com centro em C e raio de comprimento igual a s, em seguida denote o ponto de intersecção B' das mesmas.

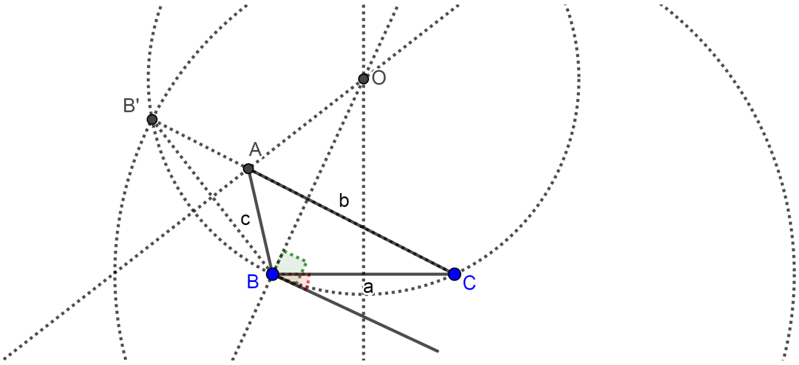


4. Trace a mediatriz de $\overline{BB'}$, cuja intersecção com o segmento $\overline{B'C}$ será o ponto A.



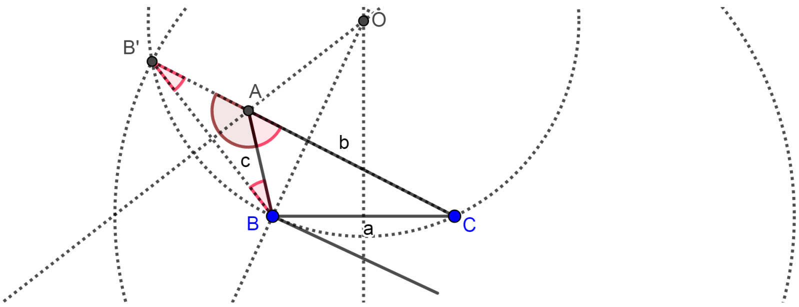
Note que o ponto A pertence ao segmento $\overline{B'C}$, que $s = b + c$, de tal maneira que $\overline{B'A} \equiv \overline{AB}$ tem comprimento c.

5. Trace os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ e temos o $\triangle ABC$ desejado.



Justificativa:

Observe que:



Note que o ângulo $\widehat{BAC}$ é o ângulo suplementar do ângulo $\widehat{B'AB}$,

logo,

$m(\widehat{BB'A}) + m(\widehat{B'BA}) = m(\widehat{BAC})$

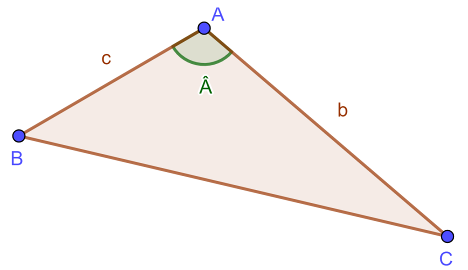
$m(\frac{\widehat{A}}{2}) + m(\frac{\widehat{A}}{2}) = m(\widehat{A})$

Como queríamos demonstrar.

Exercício 4.0.25. Construir o triângulo $\triangle ABC$ conhecendo o lado $\overline{BC}$, o ângulo $\widehat{A}$ e a diferença $d = b - c$, ou seja, a diferença dos comprimentos dos outros dois lados.

Resolução:

Observe a figura abaixo que ilustra os dados do enunciado.



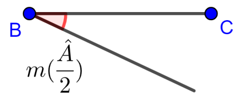
Para resolver este exercício devemos considerar três situações:

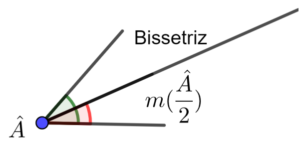
1. Se $b < c$: Não há solução.

2. Se $b = c$: Não há solução.

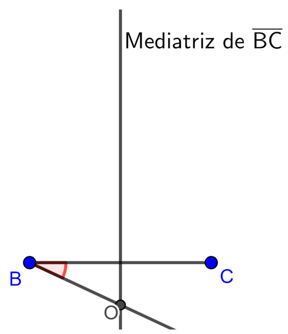
3. Se $b > c$ temos a condição dada $d = b - c$ é maior que zero e poderá ser o comprimento de um segmento.

   3.1. Trace o segmento $\overline{BC}$ e em seguida transporte o ângulo que tem medida igual a $m(\dfrac{\widehat{A}}{2})$ para $\overline{BC}$, a partir do ângulo $\widehat{B}$.

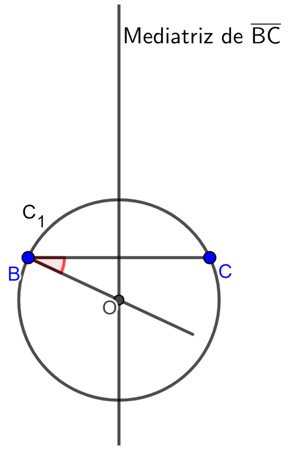




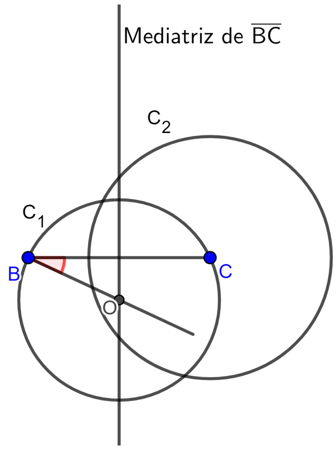
   3.2. Trace a mediatriz do segmento $\overline{BC}$ e denote o ponto de intersecção O, entre a semirreta adjacente ao ângulo que tem medida igual a $m(\dfrac{\widehat{A}}{2})$ e a mediatriz construída.



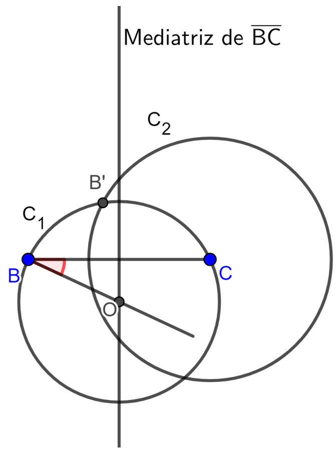
3.3. Construa uma circunferência C_1 com centro em O e raio de comprimento igual a OB.



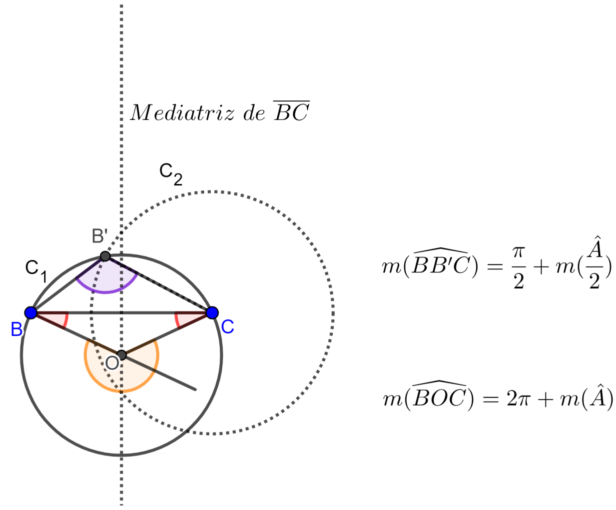
3.4. Construa uma circunferência C_2 com centro em C e raio de comprimento igual a d.



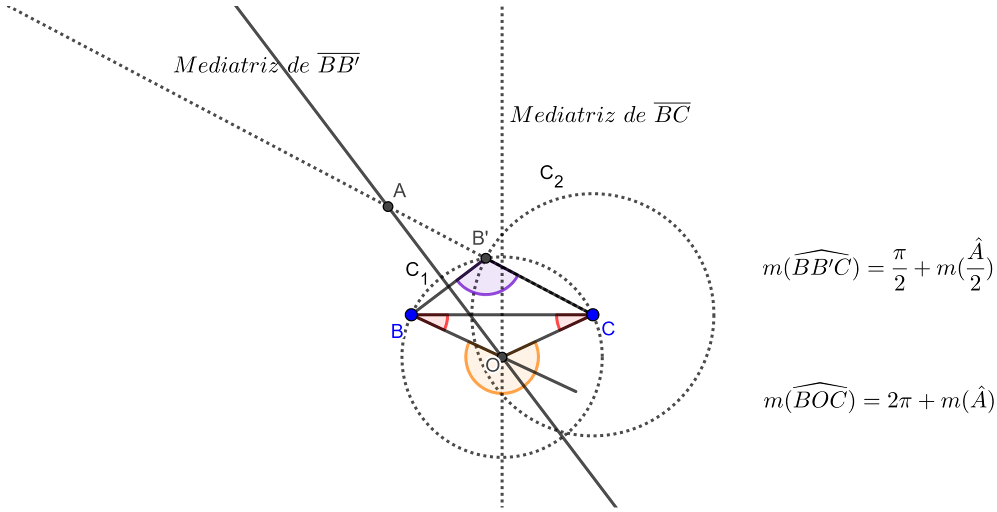
3.5. Denote por B', o ponto de intersecção entre as circunferências C_1 e C_2.



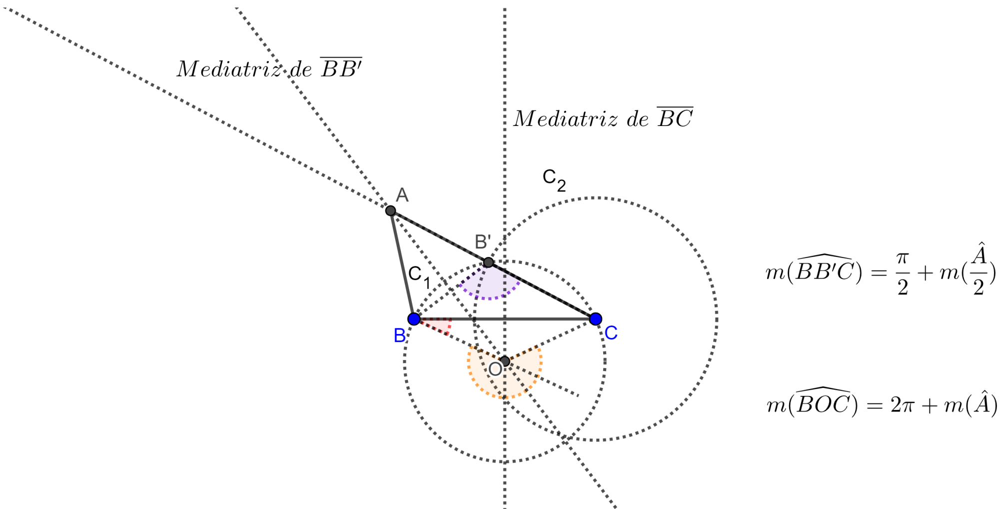
Note que $m(\widehat{BB'C}) = \dfrac{\pi}{2} + m(\dfrac{\widehat{A}}{2})$, pois é a metade do ângulo central.



3.6. Trace a mediatriz do segmento $\overline{BB'}$ e denote o ponto de intersecção entre essa mediatriz e a reta que contém o segmento $\overline{CB'}$ por A.

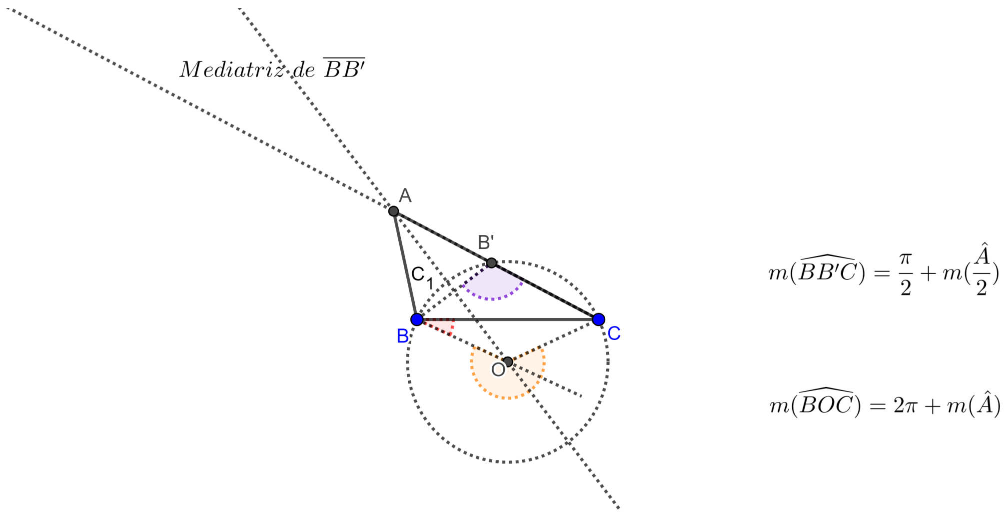


3.7. Trace os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ e temos o $\triangle ABC$ desejado.



Justificativa:

Observe que:



Note que o ângulo $\widehat{BB'C}$ é o ângulo suplementar de $\widehat{AB'B}$,

e

$$m(\widehat{BB'C}) = \frac{\pi}{2} + m(\frac{\widehat{A}}{2}) \text{ (vide 3.5.)}$$

então, ao analisar o $\triangle AA'B'$ retângulo em A', pela construção da mediatriz, concluímos que a medida do ângulo $m(\widehat{B'AA'}) = m(\frac{\widehat{A}}{2})$.

Analogamente temos que a medida do ângulo $m(\widehat{BAA'}) = m(\frac{\widehat{A}}{2})$.

Logo

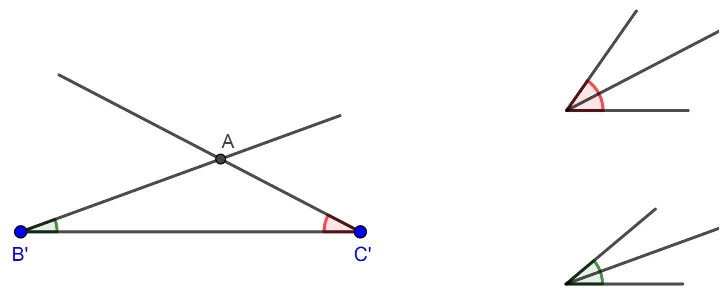
$$m(\widehat{BAA'}) + m(\widehat{B'AA'}) = m(\widehat{A})$$

Como queríamos demonstrar.

Exercício 4.0.26. Construir o triângulo $\triangle ABC$ conhecendo o perímetro p e os ângulos $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$.

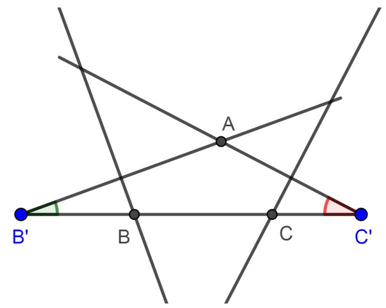
Resolução:

1. Trace o segmento $\overline{B'C'}$ de comprimento p e em seguida transporte os ângulos de medidas iguais a $m(\dfrac{\widehat{B}}{2})$ e $m(\dfrac{\widehat{C}}{2})$ para o segmento $\overline{B'C'}$ a partir dos vértices B' e C', respectivamente.

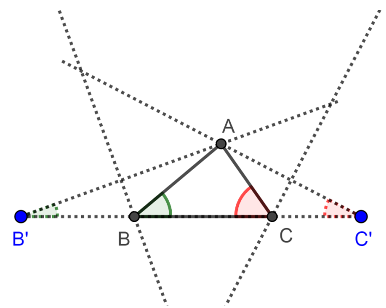


Note que a intersecção entre os lados adjacentes dos ângulos $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ será o ponto A.

2. Trace as mediatrizes dos segmentos $\overline{AB'}$ e $\overline{AC'}$, cujas intersecções com o segmento $\overline{B'C'}$ serão os pontos B e C, respectivamente.



3. Trace os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ e teremos o $\triangle ABC$ desejado.



Justificativa:

Por construção (da mediatriz do segmento $\overline{AB'}$) temos que $\overline{AB} \equiv \overline{BB'}$, cujo comprimento é igual a c.

Logo os ângulos,

$m(\widehat{AB'B}) = m(\widehat{B'AB}) = m(\frac{\widehat{B}}{2})$ por construção.

Note que o ângulo $\widehat{ABC}$ é o ângulo externo, ou suplementar, do ângulo $\widehat{ABB'}$ logo:

Pelo exercício 4.0.24 temos:

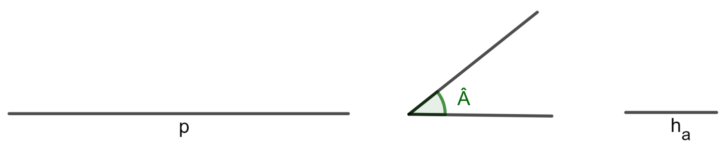
$m(\widehat{AB'B}) + m(\widehat{B'AB}) = m(\widehat{ABC})$

$m(\frac{\widehat{B}}{2}) + m(\frac{\widehat{B}}{2}) = m(\widehat{B})$

Analogamente temos que $\overline{AC} \equiv \overline{CC'}$ tem comprimento igual a b e $\widehat{ACB} \equiv \widehat{C}$.

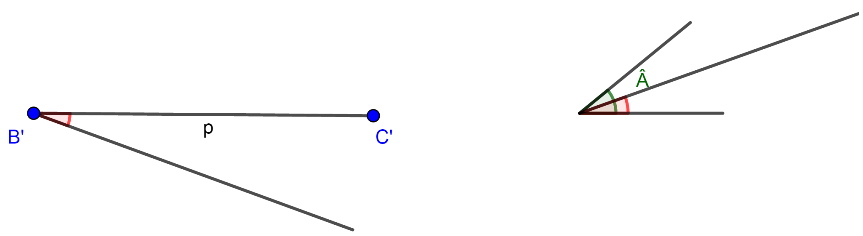
Como queríamos justificar a construção do $\triangle ABC$.

Exercício 4.0.27. Construir o triângulo $\triangle ABC$ conhecendo o perímetro p, o ângulo $\widehat{A}$ e o comprimento da altura relativa ao vértice A, denotada por h_a (ver figura abaixo).

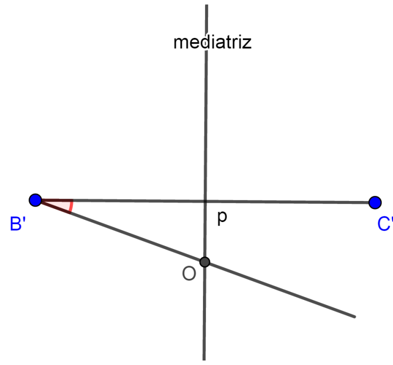


Resolução:

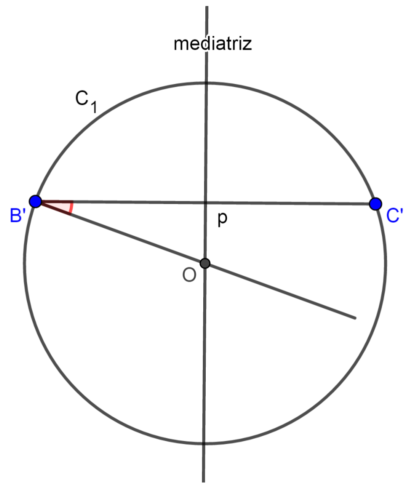
1. Trace o segmento $\overline{B'C'}$ de comprimento p e em seguida transporte o ângulo de medida igual a $m(\frac{\widehat{A}}{2})$ (ângulo vermelho, veja figura abaixo) a partir de B'.



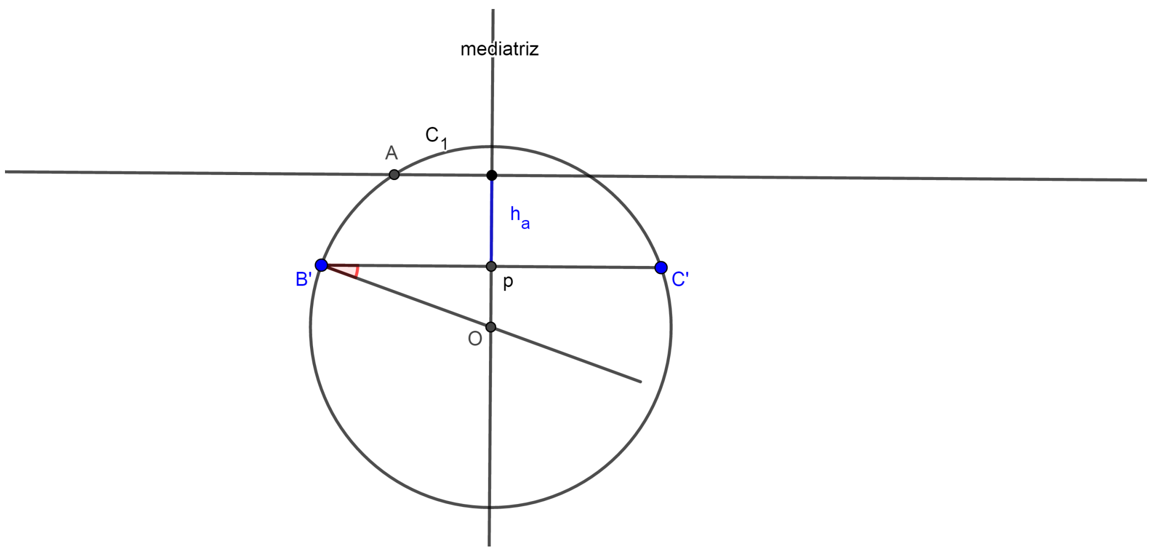
2. Trace a mediatriz do segmento $\overline{B'C'}$ e denote o ponto de intersecção O, entre a mediatriz e o segmento adjacente ao ângulo de medida igual a $m(\frac{\widehat{A}}{2})$.



3. Construa uma circunferência C_1 com centro em O e raio igual ao segmento $\overline{OB'}$.

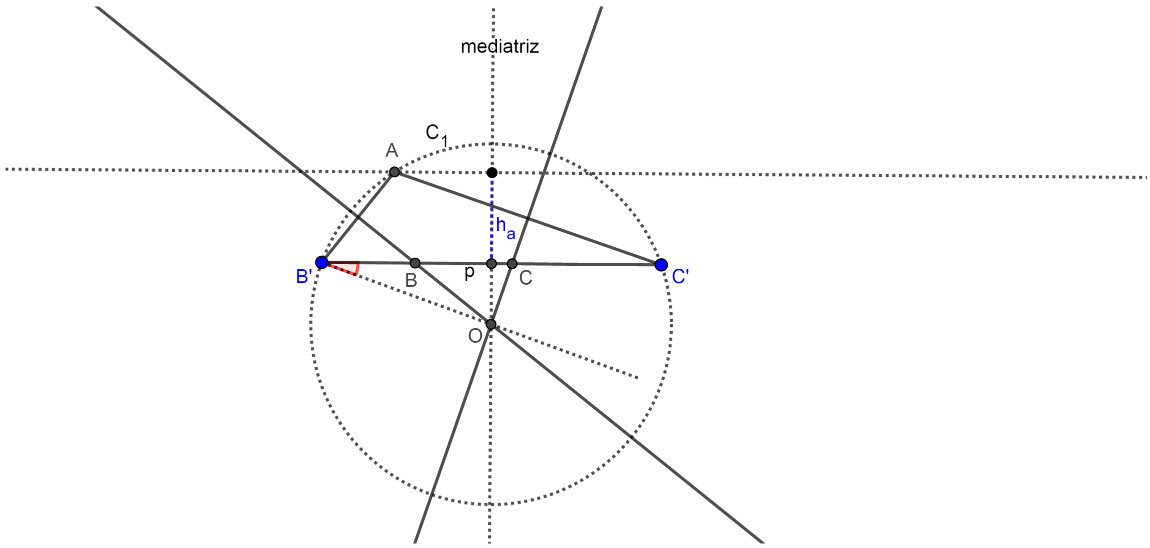


4. Trace uma reta paralela ao segmento $\overline{B'C'}$ a uma distância h_a, cuja intersecção com a circunferência C_1 será o ponto A (note que há dois pontos de intersecção, logo teremos dois triângulos como resposta).

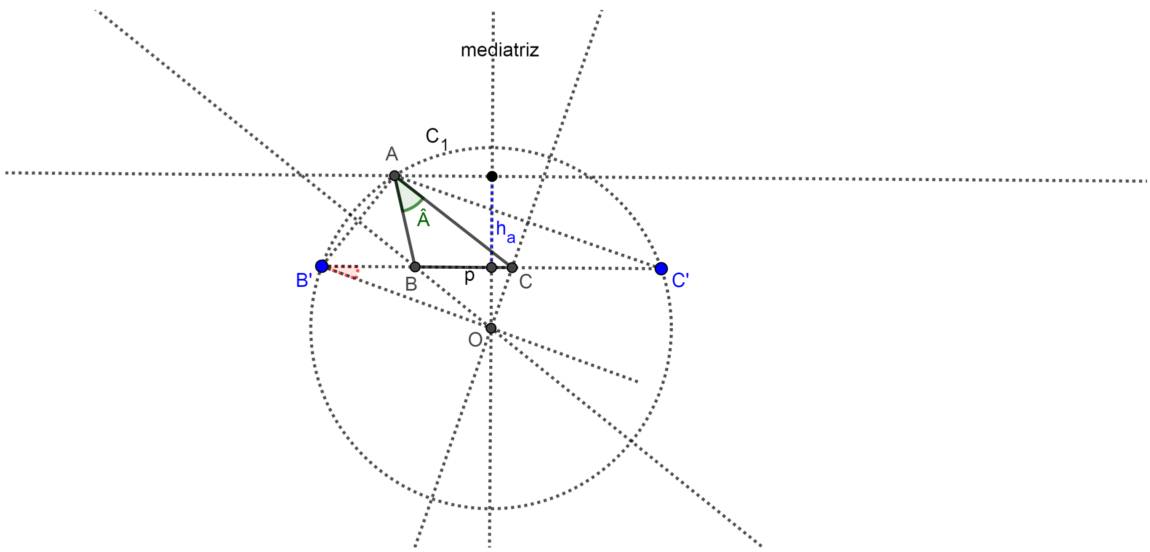


Note que se o segmento que representa a altura, cujo comprimento é igual a h_a for maior que o segmento da mediatriz que liga $\overline{B'C'}$ a circunferência C_1, não será possível construir o triângulo desejado.

5. Trace as mediatrizes dos segmentos $\overline{AB'}$ e $\overline{AC'}$ cujas as intersecções com $\overline{B'C'}$ são os pontos B e C, respectivamente.

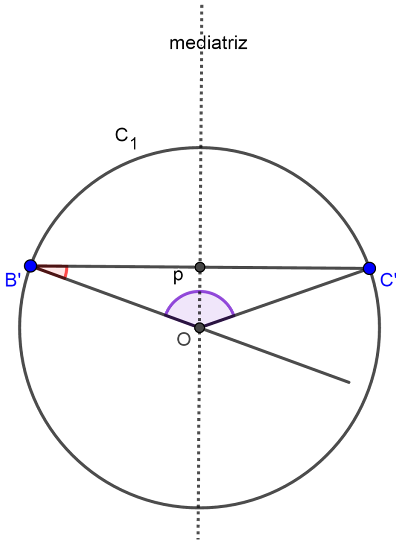


6. Trace os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ e temos o triângulo $\triangle ABC$ desejado.



Justificativa:

Observe que:



Note que o ângulo $\widehat{B'OC'}$ equivale ao ângulo $\widehat{A}$ subtraído de dois ângulos retos, pois o triângulo $\triangle B'OC'$ é isósceles.

Pois

· $\overline{OB'} \equiv \overline{OC'}$ que são os raios de C_1;

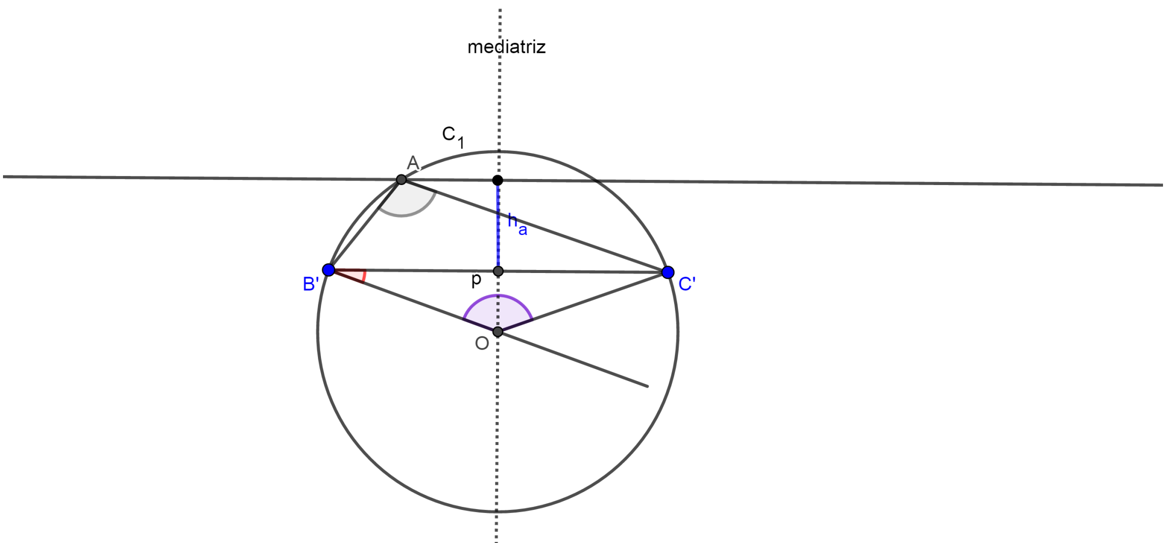
· os ângulos $\widehat{C'B'O} \equiv \widehat{B'C'O}$ que tem medida igual a $m(\frac{\widehat{A}}{2})$.

Logo,

$m(\widehat{C'B'O}) + m(\widehat{B'C'O}) + m(\widehat{B'OC'})$ equivalem a dois ângulos retos.

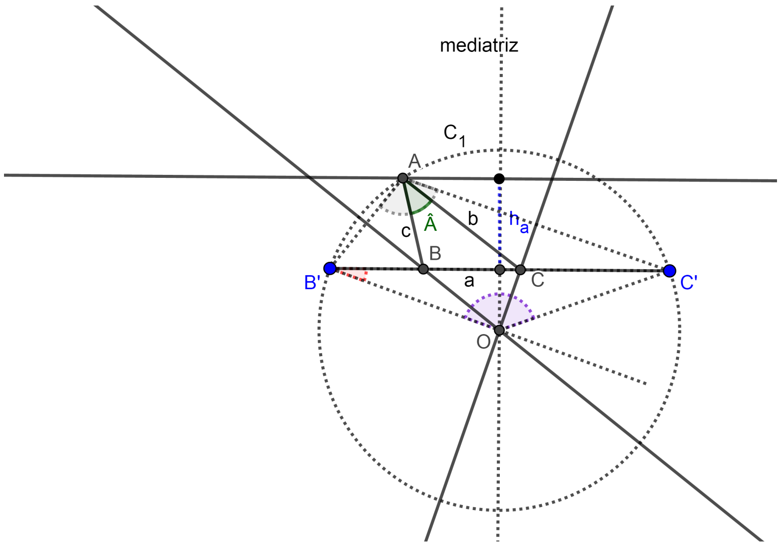
$m(\frac{\widehat{A}}{2}) + m(\frac{\widehat{A}}{2}) + m(\widehat{B'OC'})$ equivalem a dois ângulos retos.

E ainda,



Vale lembrar que o ângulo $\widehat{B'AC'}$ pode estar localizado em qualquer parte do arco $\overset{\frown}{B'C'}$

superior, que serão congruentes, que neste caso é congruente a um ângulo reto adicionado de um ângulo de medida igual a $m(\frac{\widehat{A}}{2})$, pois é arco capaz do segmento $\overline{B'C'}$.
Para finalizar,



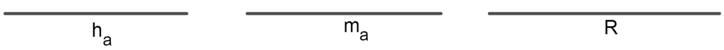
Note que ao traçar as mediatrizes dos segmentos $\overline{AB'}$ e $\overline{AC'}$ temos:

· $\overline{AB} \equiv \overline{BB'}$ que tem comprimento igual a c;

· $\overline{AC} \equiv \overline{CC'}$ que tem comprimento igual a b;

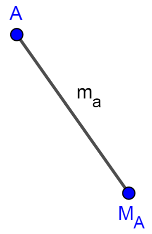
· $B'B + BC + CC' = c + a + b = p$ por construção, como queríamos demonstrar.

Exercício 4.0.28. Construir o triângulo $\triangle ABC$ conhecendo os segmentos que representam, respectivamente, a altura relativa ao vértice A e a mediana relativa ao lado $\overline{BC}$, cujos comprimentos serão denominados por h_a e m_a e o raio de comprimento R da circunferência circunscrita.

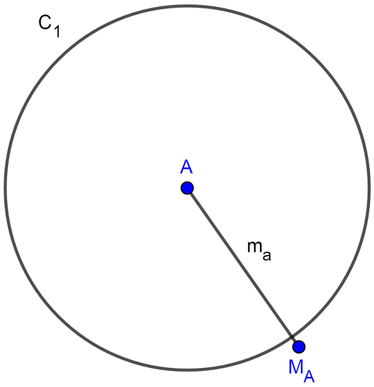


Resolução:

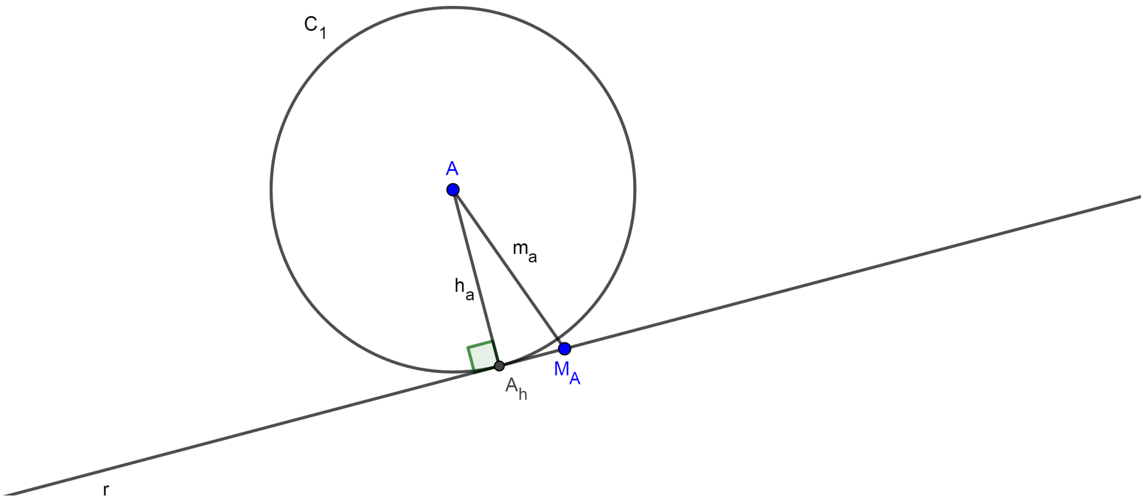
1. Trace o segmento $\overline{AM_A}$ cujo comprimento é m_a dada.



2. Construa uma circunferência C_1 com centro no ponto A e raio congruente a altura relativa ao vértice A, cujo comprimento é h_a.

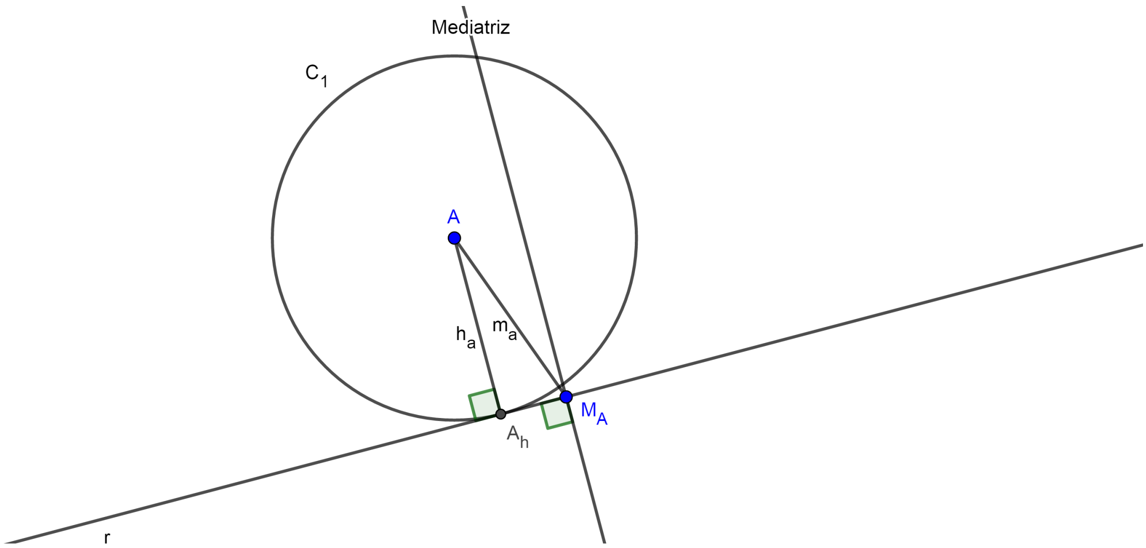


3. Trace a reta r, tangente à circunferência C_1, e que contém o ponto M_A. Note que o ponto de tangência (intersecção) entre a circunferência C_1 e a reta r é o ponto A_h.

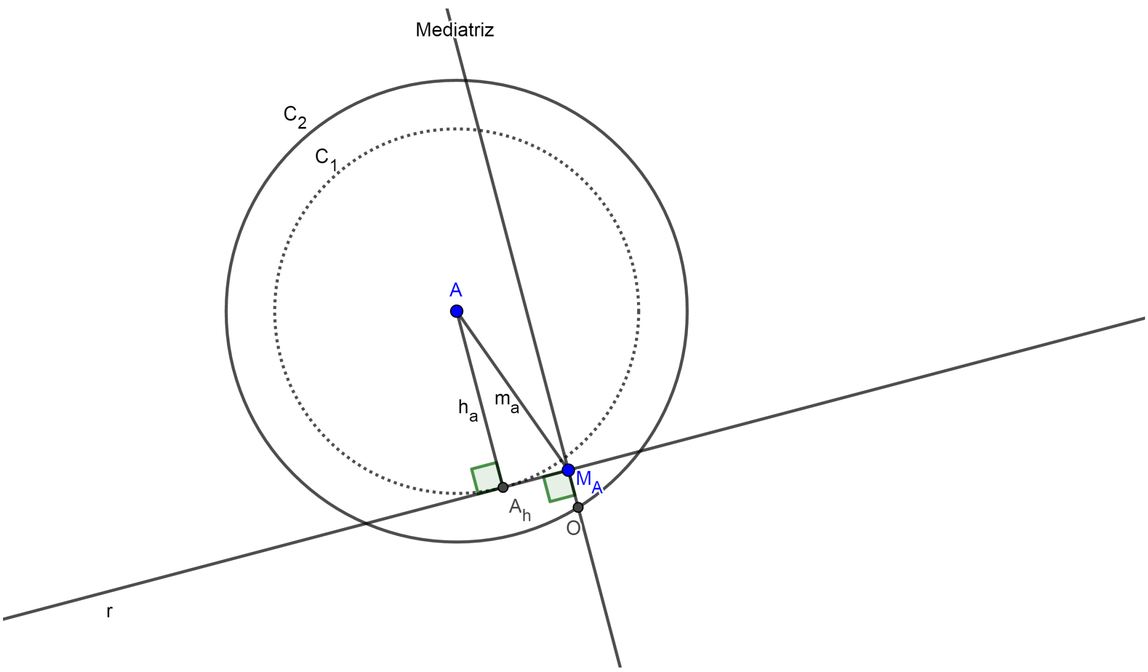


Note que os "pés"da altura relativa ao vértice A e da mediana relativa ao lado $\overline{BC}$, cujo comprimento é h_a e m_a pertencem ao lado $\overline{BC}$ do triângulo desejado, que pertencerá a reta r construída.

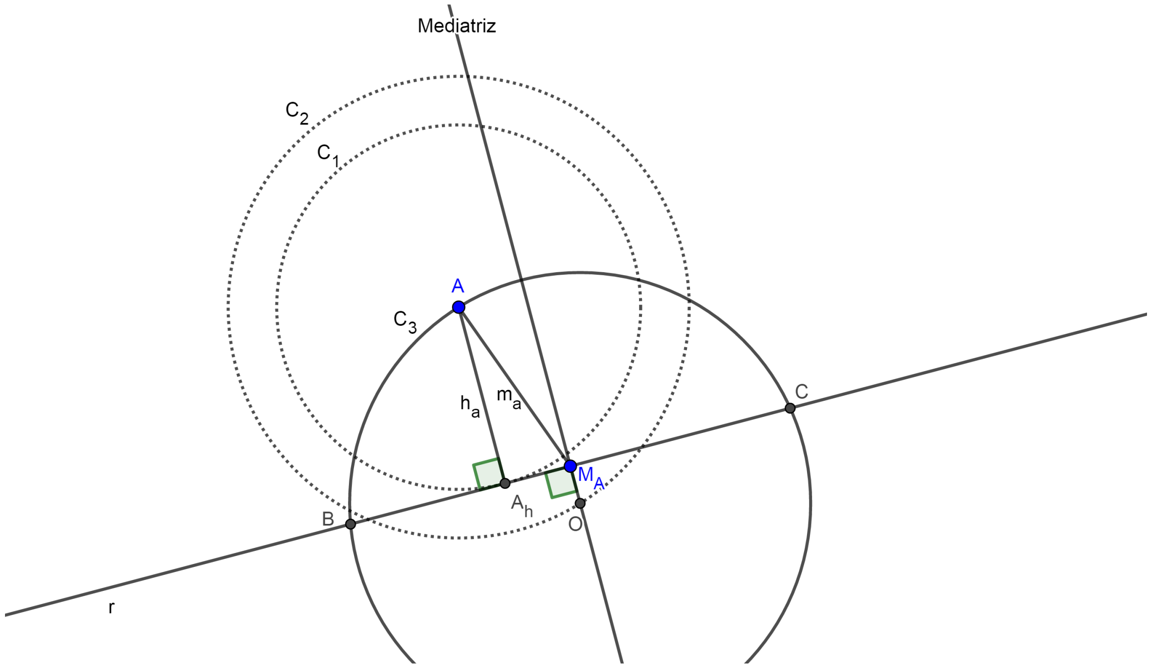
4. Trace a mediatriz, pelo ponto M_A, da reta r.



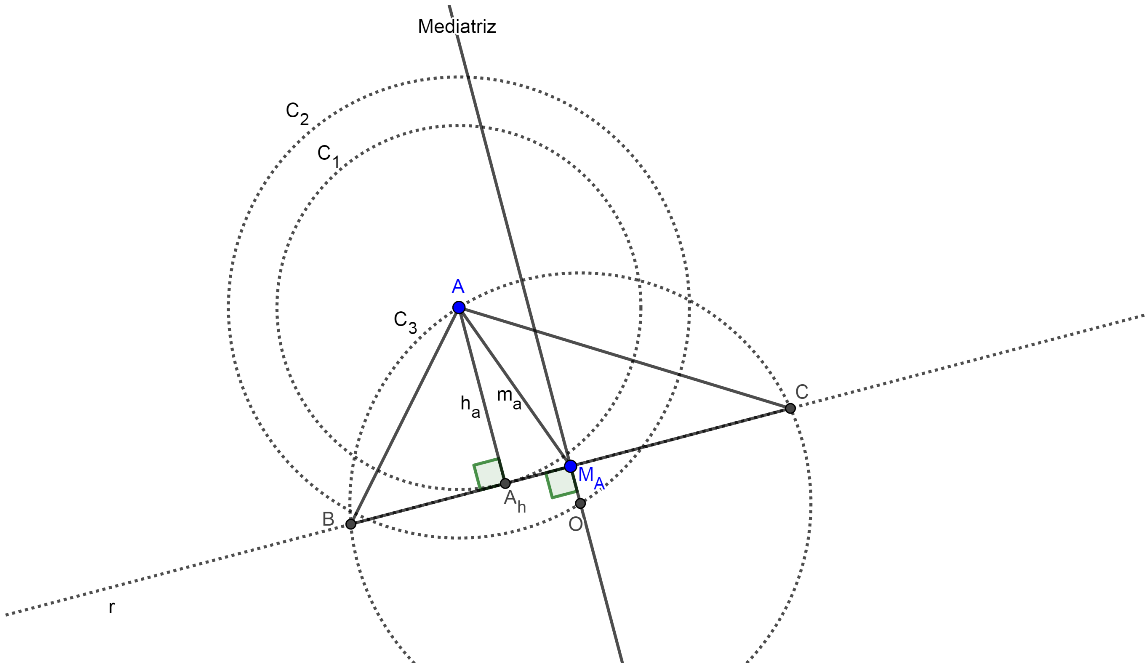
5. Construa uma circunferência C_2 com centro no ponto A e raio de comprimento igual a R, dado. Note que a intersecção entre a circunferência C_2 e a mediatriz, é o ponto O, ou seja, o circuncentro do triângulo $\triangle ABC$ desejado.



6. Construa uma circunferência C_3 com centro no ponto O e raio cujo comprimento é R. Em seguida denote os pontos de intersecções B e C, entre a circunferência C_3 e a reta r.



7. Trace os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ e temos o triângulo $\triangle ABC$ desejado.



Justificativa:

Por construção, temos que M_A é o ponto médio do segmento $\overline{BC}$.

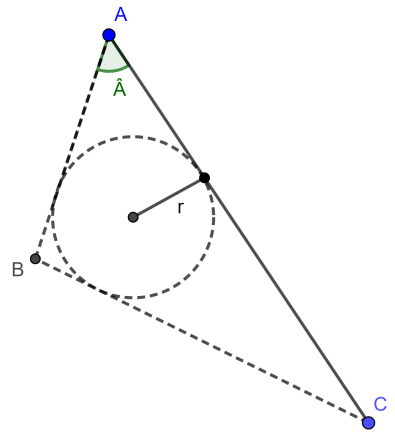
Como o circuncentro é a intersecção das mediatrizes de um triângulo, e foi dado o raio R, da circunferência circunscrita ao triângulo $\triangle ABC$ desejado.

Logo, na construção, a intersecção entre a circunferência C_2 e a mediatriz, resulta no circuncentro, e a partir deste, é possível determinar o triângulo $\triangle ABC$ desejado.

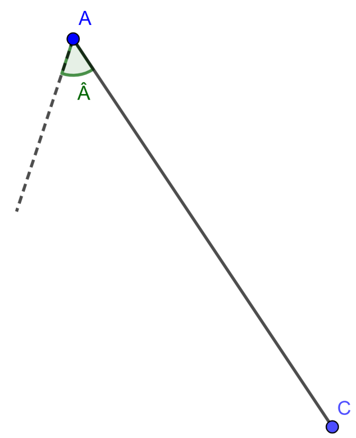
Exercício 4.0.29. Construir o triângulo $\triangle ABC$ conhecendo o ângulo $\widehat{A}$, o lado $\overline{AC}$ e o raio r da circunferência inscrita.

Resolução:

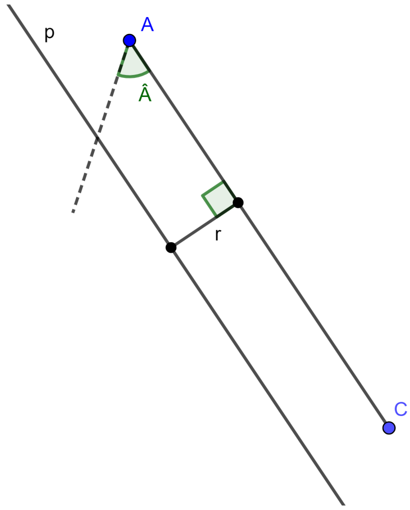
1. Observe a figura abaixo que ilustra os dados do enunciado:



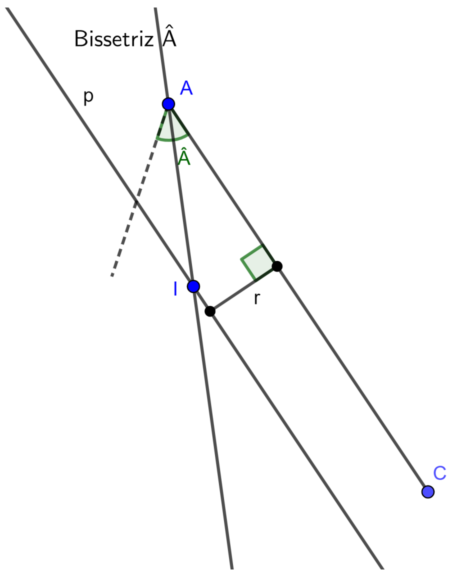
2. Trace o segmento $\overline{AC}$ e em seguida transporte o ângulo $\widehat{A}$ a partir do ponto A.



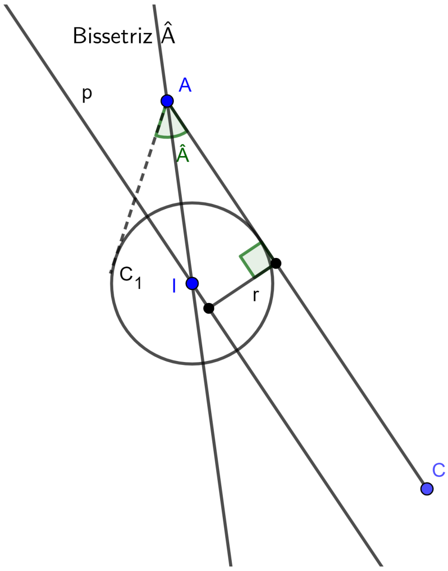
3. Trace uma reta p, paralela ao segmento $\overline{AC}$ a uma distância r (comprimento do raio da circunferência inscrita) do segmento $\overline{AC}$.



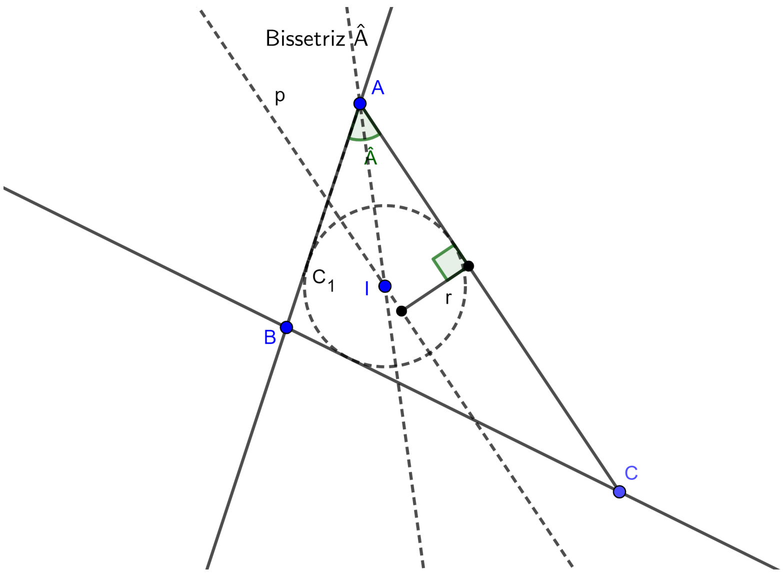
4. Trace a bissetriz do ângulo $\widehat{A}$ cuja a intersecção com a reta p é o ponto I, ou seja, o incentro do triângulo $\triangle ABC$ desejado.



5. Construa uma circunferência C_1 com centro no ponto I e raio de comprimento igual a r que é a circunferência inscrita ao triângulo $\triangle ABC$.



6. Trace a reta tangente a circunferência C_1 pelo ponto C, cuja intersecção com o lado adjacente do ângulo $\widehat{A}$ é o ponto B.



Logo temos o triângulo $\triangle ABC$ desejado.

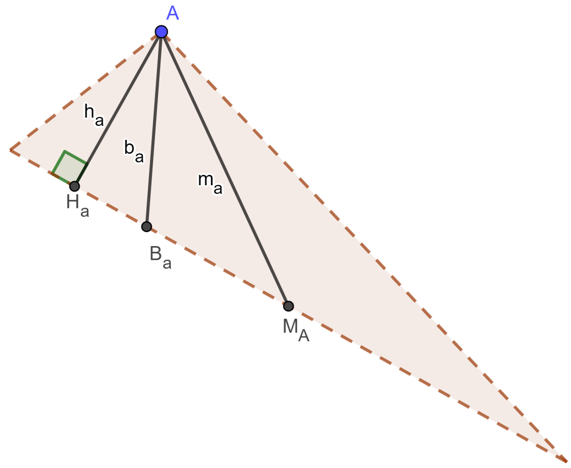
A justificativa é em decorrência da construção.

Observação 13. Para determinados comprimentos do raio r e do segmento $\overline{AC}$ não existirá solução para este exercício.

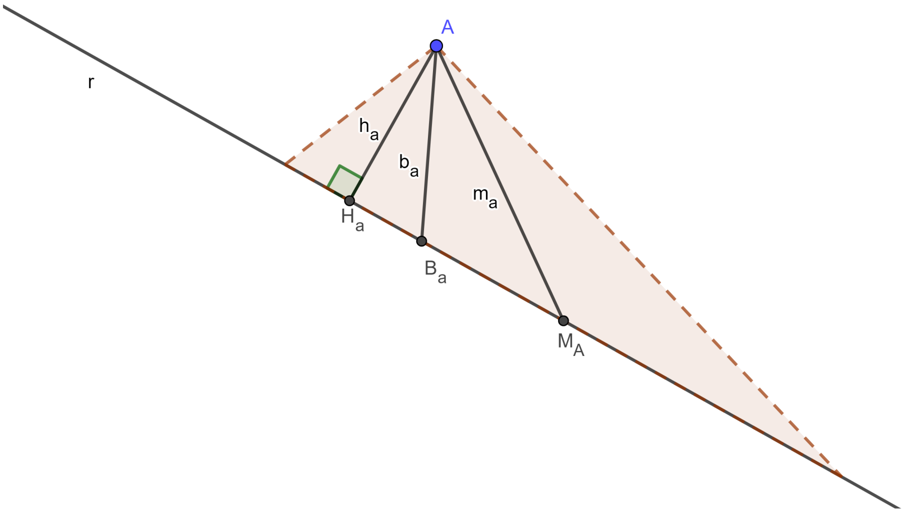
Exercício 4.0.30. Construir um triângulo conhecendo os comprimentos da altura, mediana e bissetriz relativas a um mesmo vértice.

Resolução:

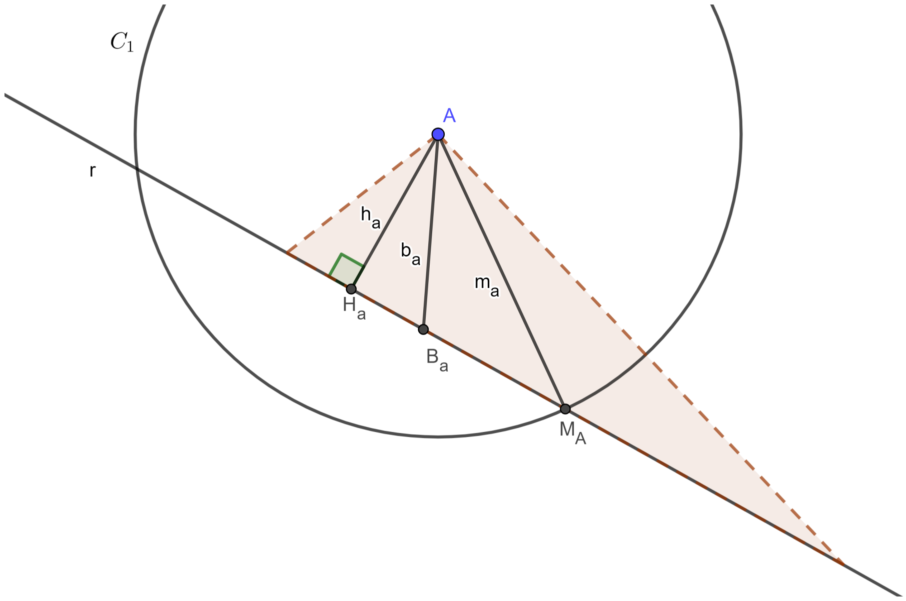
1. Observe a figura abaixo que ilustra os dados do enunciado e, considere os pontos H_a, B_a e M_A, pontos de intersecções entre a altura, bissetriz e mediana referentes ao vértice A com o lado $\overline{BC}$ (que ainda vamos determinar), respectivamente.



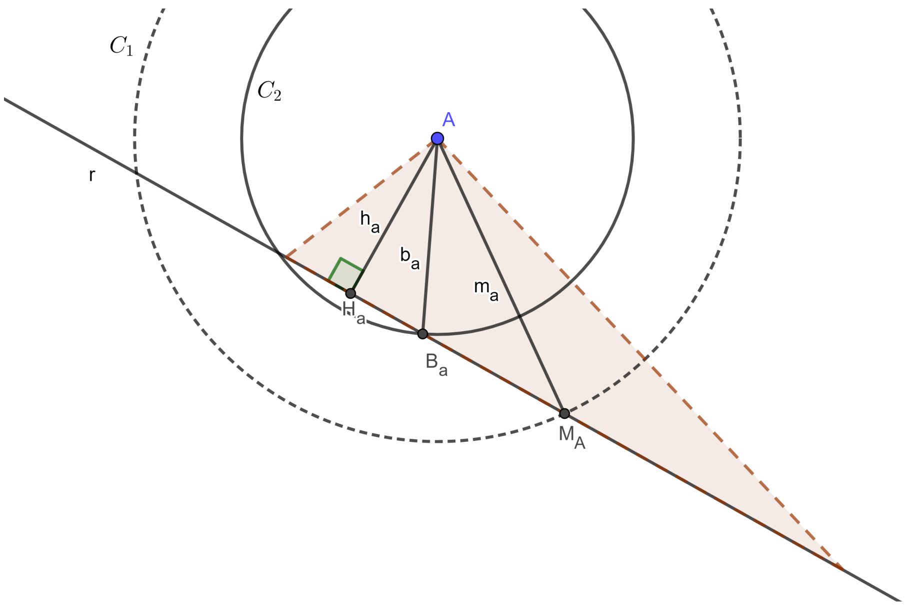
2. Trace pelos pontos H_a e B_a, a reta r tal que o segmento $\overline{AH_a}$ tenha comprimento h_a e o segmento $\overline{AH_a}$ seja perpendicular a reta r.



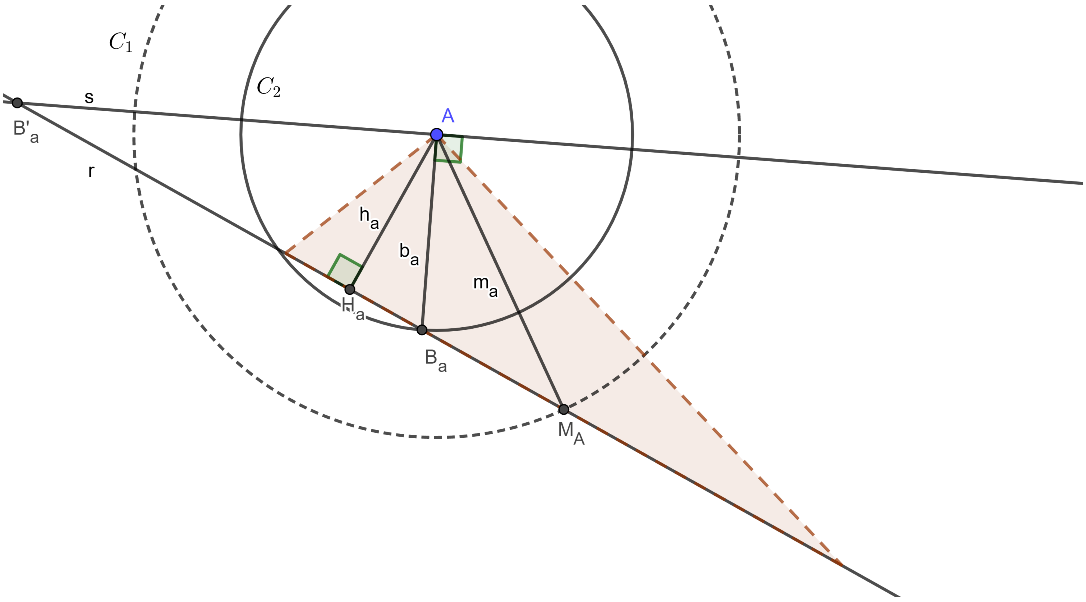
3. Trace a circunferência C_1 com centro no ponto A e raio igual a mediana relativa ao lado $\overline{BC}$, cujo comprimento é m_a. Note que o ponto M_A pertence a reta r de maneira que $AM_A = m_a$.



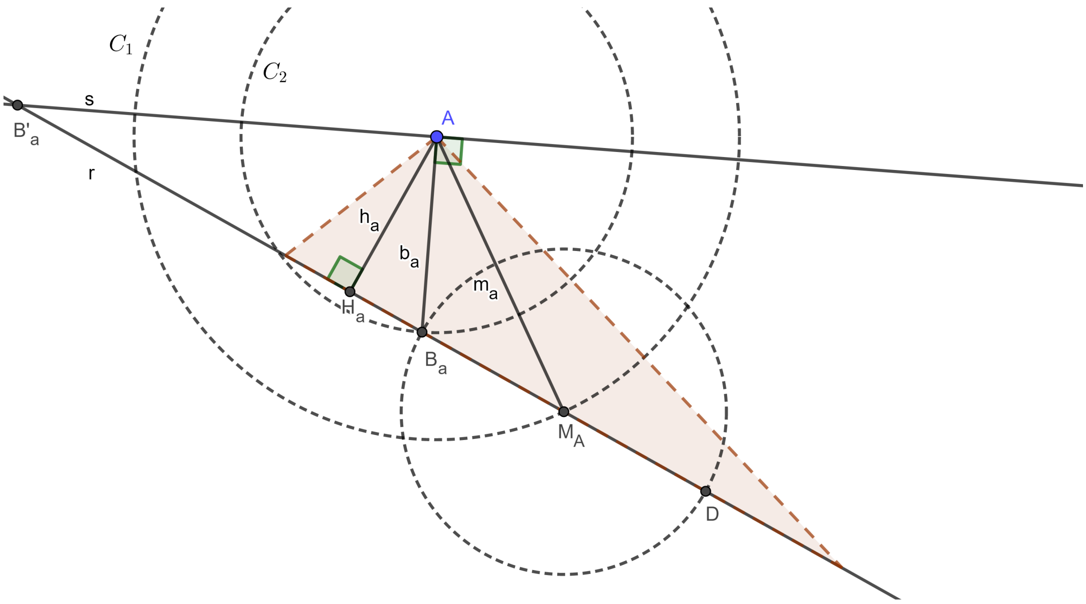
4. Trace a circunferência C_2 com centro no ponto A e raio de comprimento igual a b_a. Note que o ponto B_a pertence a reta r de maneira que $AB_a = b_a$.



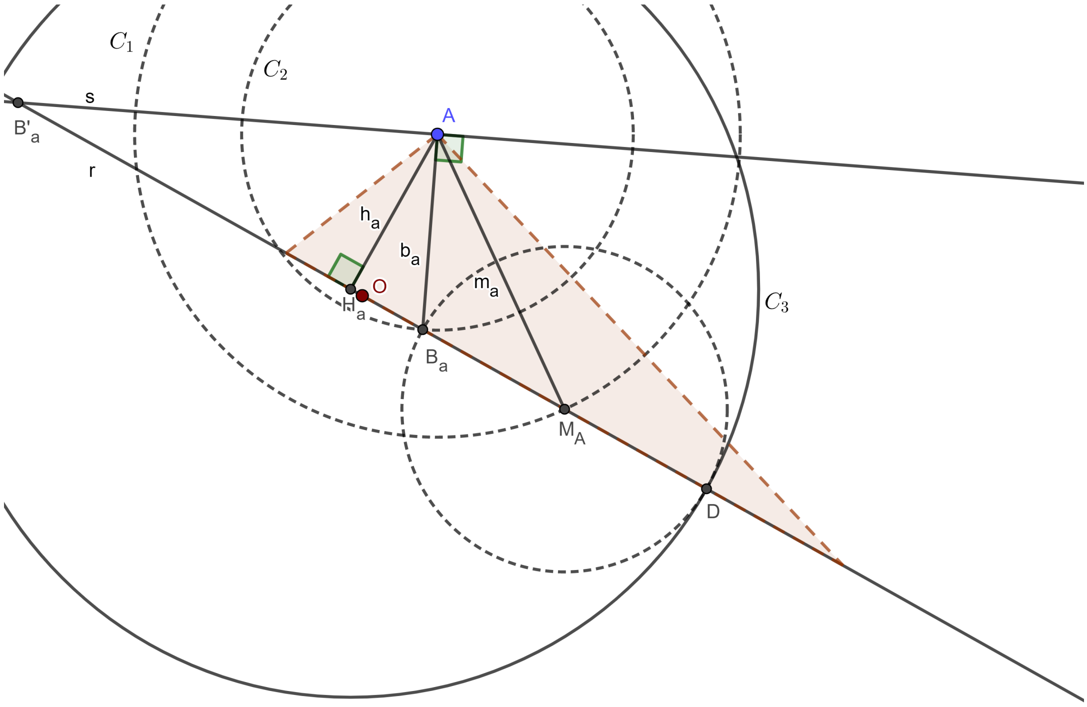
5. Trace a reta s, perpendicular ao segmento $\overline{AB_a}$, pelo ponto A e em seguida, denote o ponto B'_a, que é o ponto de intersecção entre entre as retas r e s.



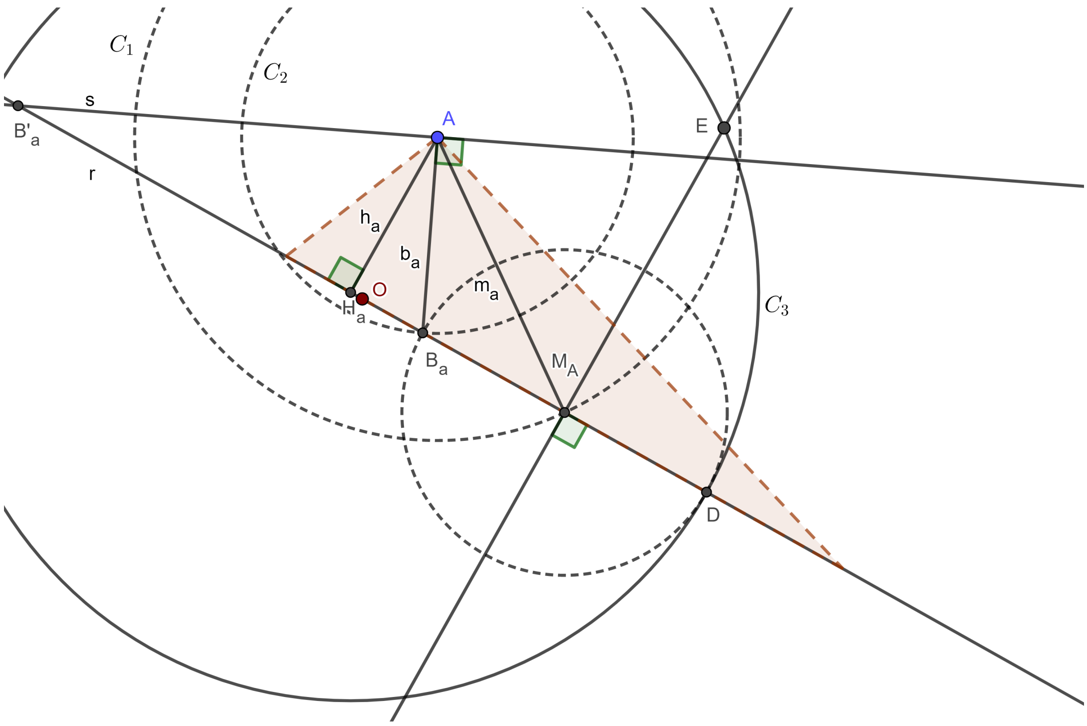
6. Determine o ponto D, de modo que D pertença a reta r e se tenha $M_AD = B_aM_A$.



7. Determine o ponto médio O do segmento $\overline{B'_aD}$. Em seguida, trace a circunferência C_3 com centro no ponto O e raio de segmento $\overline{OD}$.

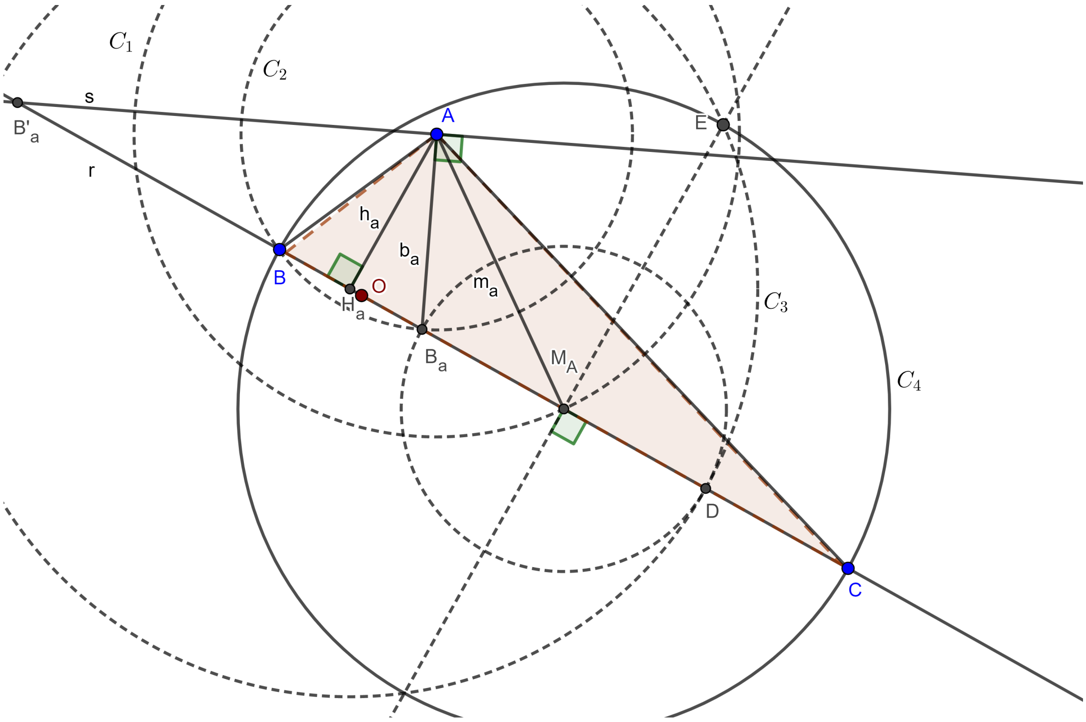


8. Trace uma reta perpendicular, a reta r, pelo ponto M_A. Em seguida, denote o ponto de intersecção entre a reta perpendicular construida e a circunferência C_3, nomeie por ponto E.



9. Trace a circunferênia C_4 com centro no ponto M_A e raio $\overline{M_AE}$. Em seguida, denote os pontos B e C, pontos de intersecções entre a reta r e a circunferência C_4, formando o

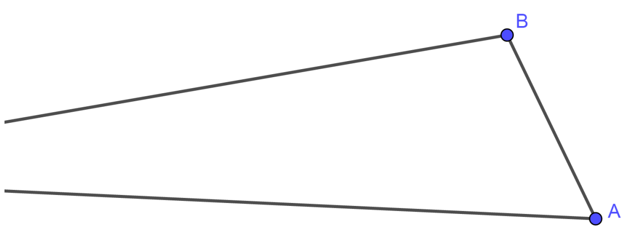
triângulo $\triangle ABC$ desejado.



Justificativa:

De acordo com a construção descrita acima, h_a é o comprimento da altura relativa ao vértice A, m_a é o comprimento da mediana relativa ao lado $\overline{BC}$, e b_a é o comprimento da bissetriz relativa ao vértice A pelo Toerema das Bissetrizes.

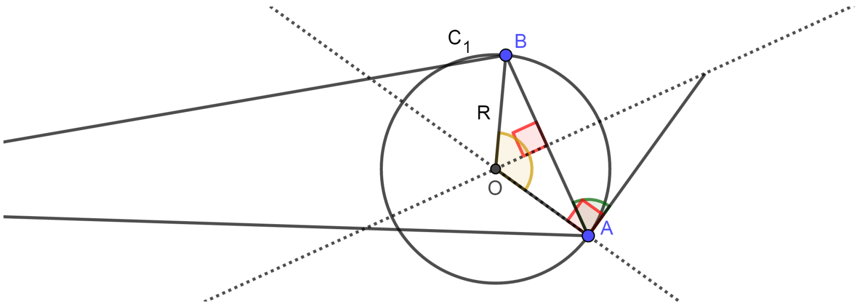
Exercício 4.0.31. Determine o raio da circunferência circunscrita ao triângulo $\triangle ABC$ cujo vértice C é inacessível. Observe a ilustração abaixo.



Resolução:

1. Seja a medida do ângulo $\widehat{C}$, $m(\widehat{C}) = \pi - (m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}))$.

2. Construa o arco capaz C_1 do ângulo $\widehat{C}$ relativo ao segmento $\overline{AB}$.



· Note que o centro do arco capaz do ângulo $\widehat{C}$ é o ponto O, que é o circuncentro do triângulo $\triangle ABC$. · Perceba ainda que o arco capaz do ângulo $\widehat{C}$ dá origem ao ângulo central de medida igual a $m(2\widehat{C})$ (em amarelo).

· Por fim temos o comprimento do raio da circunferência desejada, que é $OA = OB$.

Justificativa:

Como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é π temos:

$m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = \pi$

logo,

$m(\widehat{C}) = \pi - (m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}))$

Na construção do arco capaz C_1 o centro da circunferência está sobre a mediatriz do segmento em questão (note que a mediatriz é o lugar geométrico dos pontos que equidistam dos pontos A e B, do segmento $\overline{AB}$), logo o circuncentro está sobre a mediatriz.

Note que os pontos A, B e C (ponto inacessível) equidistam do ponto O:

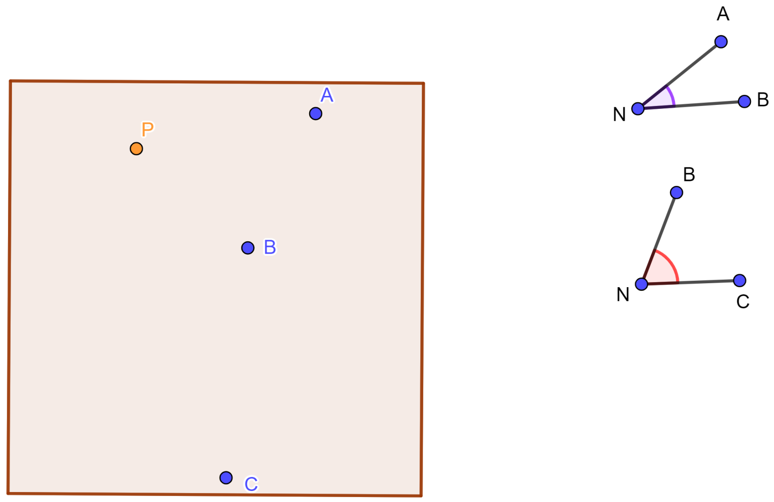
$\overline{OA} \equiv \overline{OB} \equiv \overline{OC}$ (I)

Logo o ponto O é o centro do arco capaz do ângulo $\widehat{C}$ por construção e é o circuncentro por (I).

E ainda da construção temos que os pontos A, B e C (vértices do triângulo em questão) pertencem ao arco capaz, o ponto O, é o circuncentro.

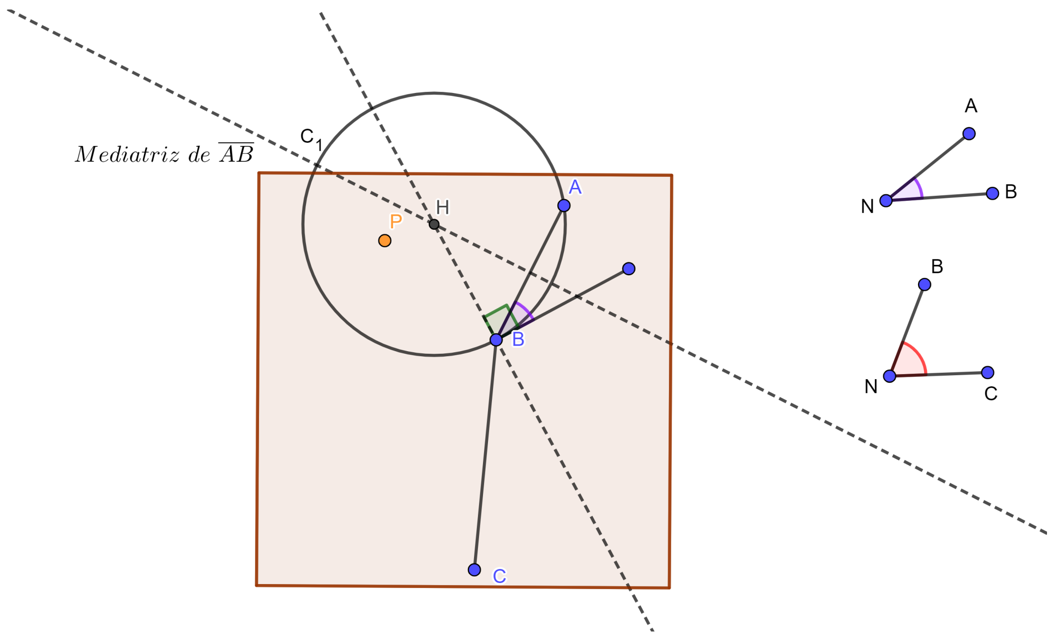
Perceba que teremos infinitos triângulos que satisfazem as condições dadas.

Exercício 4.0.32. Um navio N deseja atingir o porto P da carta naútica mostrada na figura abaixo. Em certo momento, o capitão, avistando os faróis A, B e C, mede os ângulos $\widehat{ANB}$ e $\widehat{BNC}$. Use régua (não graduada) e compasso para obter a posição do navio nesse instante e determine a distância do navio ao porto.

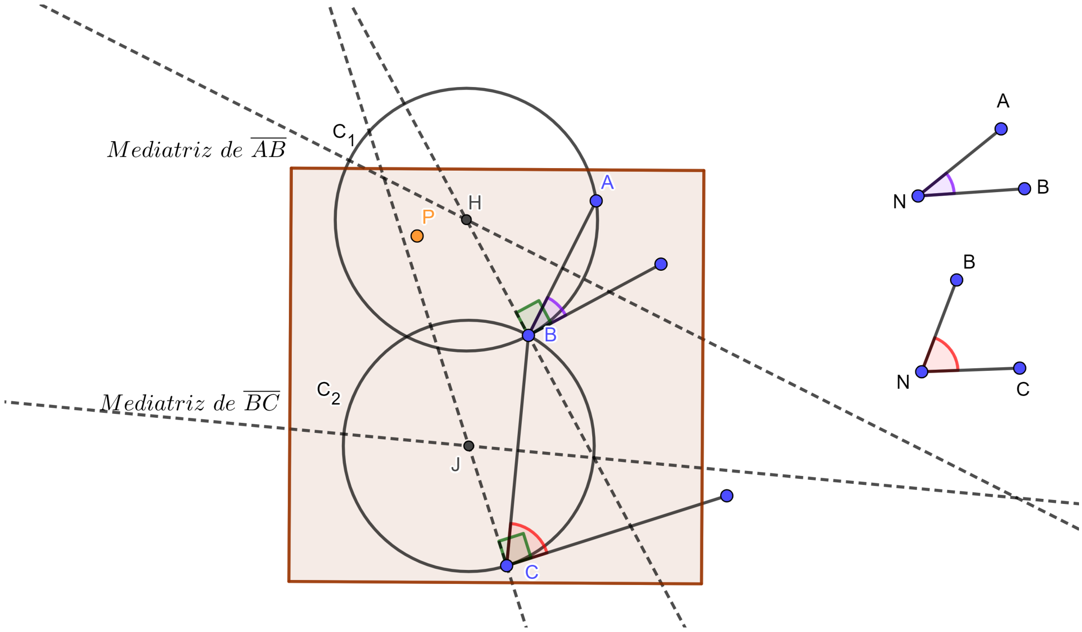


Resolução:

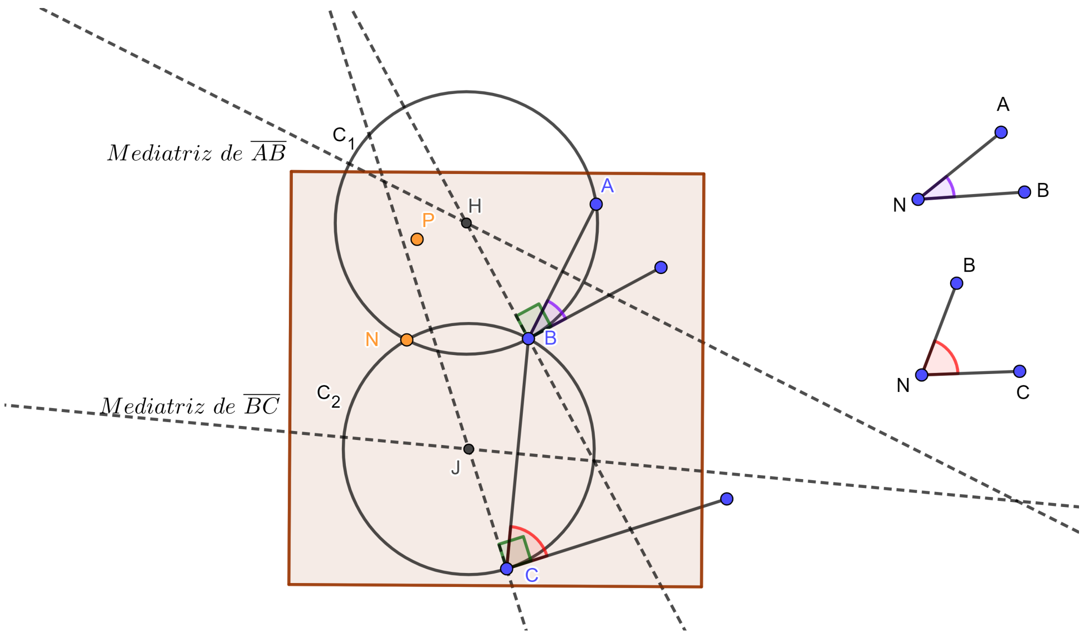
1. Trace o arco capaz C_1 do ângulo $\widehat{ANB}$ relativo ao segmento $\overline{AB}$. Note que pela construção de arco capaz, o ponto H é o centro de C_1.



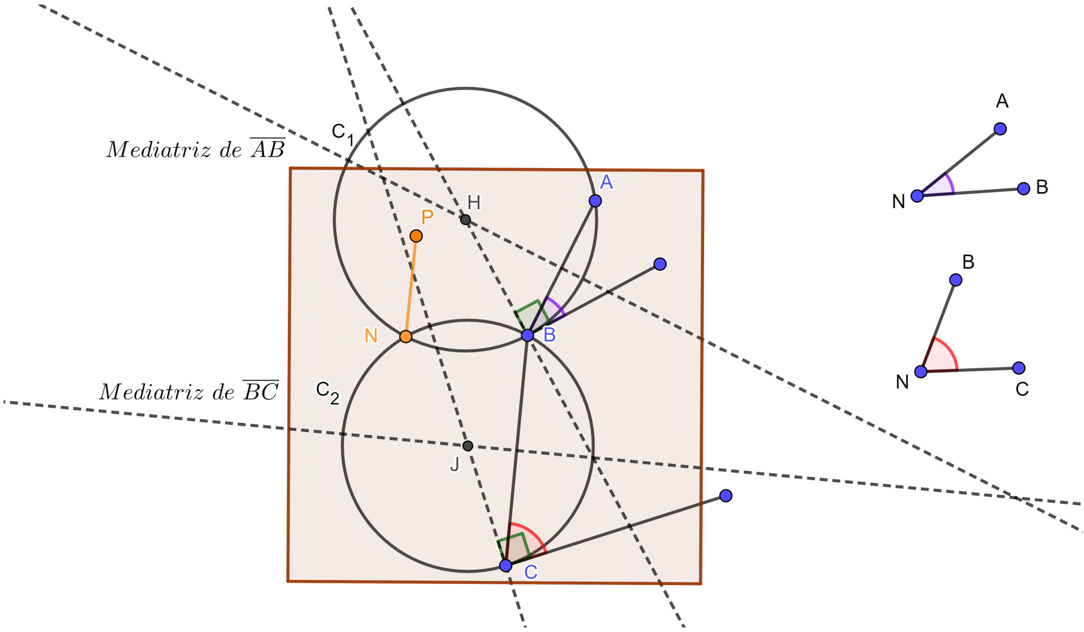
2. Trace o arco capaz C_2 do ângulo $\widehat{BNC}$ relativo ao segmento $\overline{BC}$. Note que o ponto J é o centro de C_2.



3. Note que a intersecção entre C_1 e C_2 é o ponto N, posição do navio (perceba que o outro ponto de intercecção é o ponto B).



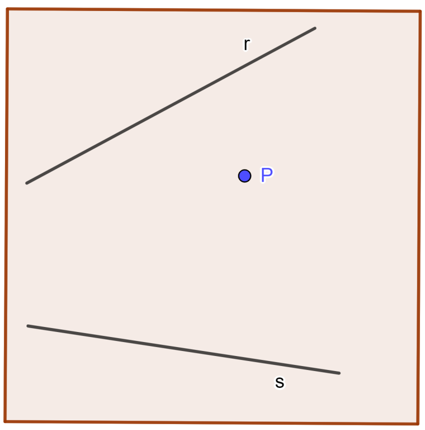
4. A distância do navio até o porto é representada pelo o segmento $\overline{NP}$.



Justificativa:

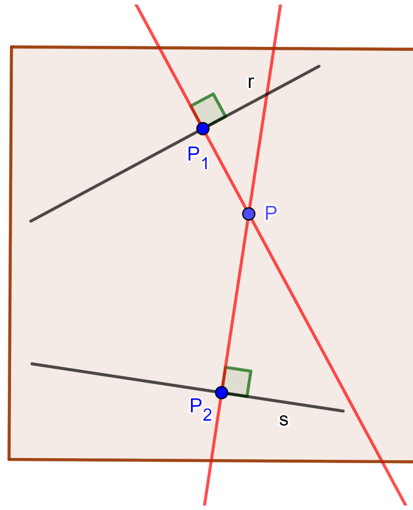
Note que o lugar geométrico do ponto N que "enxerga"o segmento $\overline{AB}$ sob o ângulo $\widehat{ANB}$ é um arco que contém os pontos A e B, ou seja, o arco capaz do segmento $\overline{AB}$, logo a justificativa segue da demonstração da validade do arco capaz (veja em 3.5.11).

Exercício 4.0.33. Traçar pelo ponto P uma reta que passe pelo ponto de intersecção (inacessível) das retas r e s dadas. Observe a ilustração abaixo.

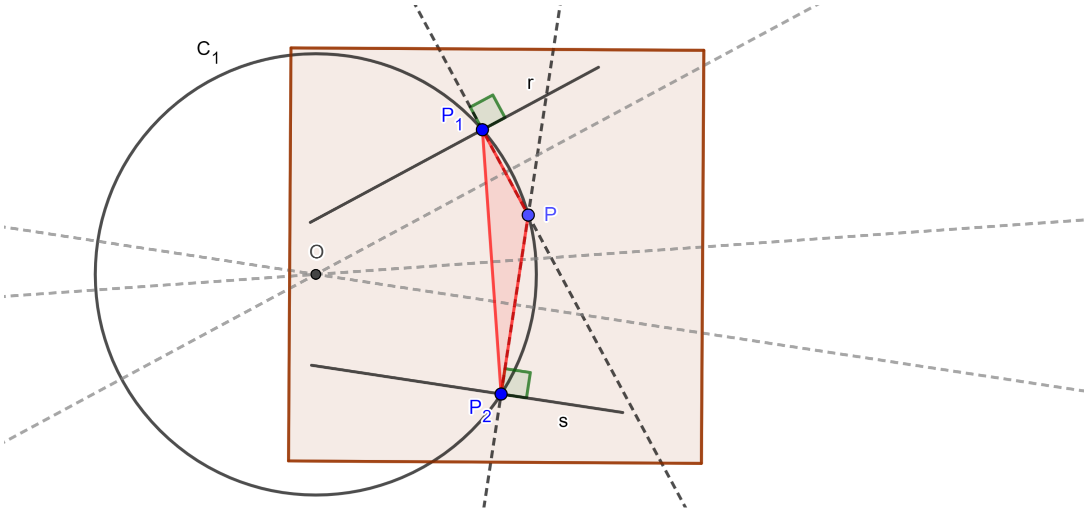


Resolução:

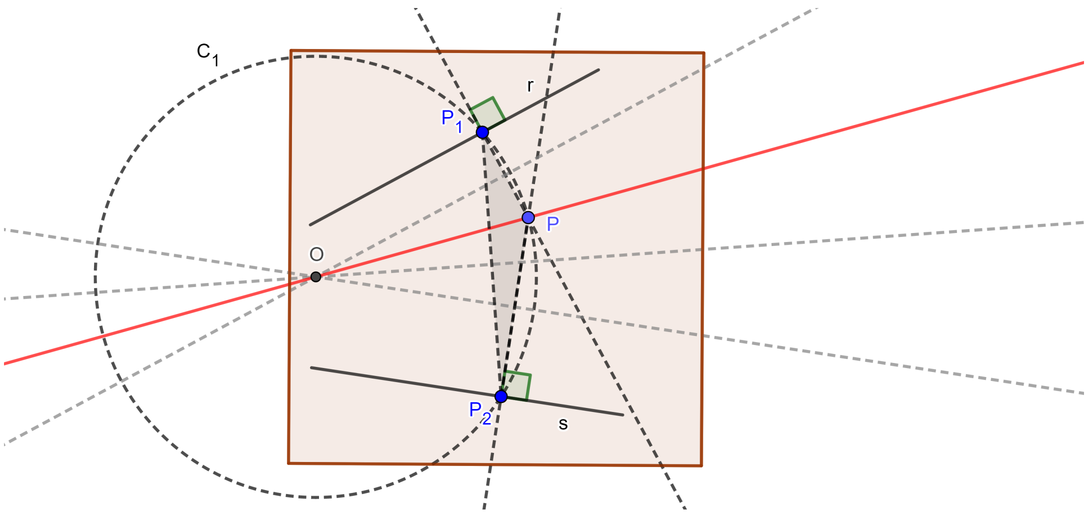
1. Trace as retas perpendiculares as retas r e s pelo ponto P, determinando os pontos de intersecções P_1 e P_2. Observe:



2. Determine o circuncentro C_1 do triângulo $\triangle PP_1P_2$, traçando as mediatrizes do triângulo citado.

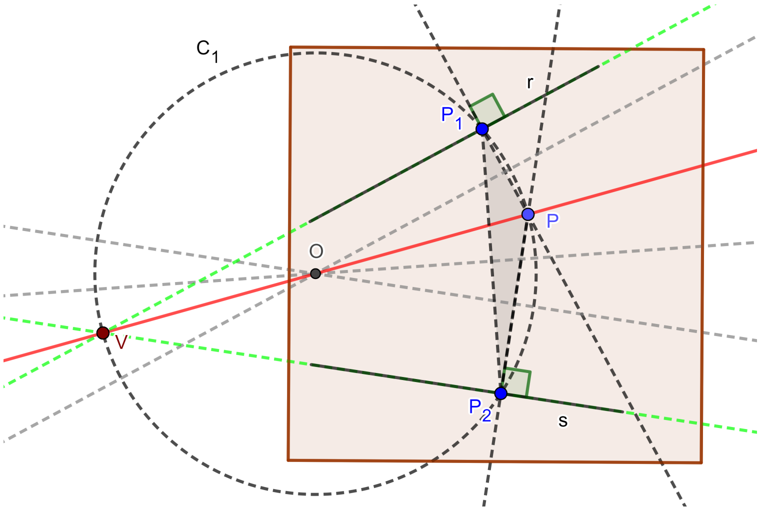


3. Trace a reta desejada que contém o segmento $\overline{PO}$ e o ponto V de intersecção inacessível solicitado.



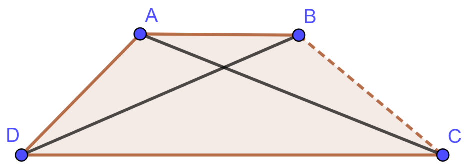
Justificativa:

Note que o triângulo $\triangle PP_1P_2$ é inscritível à circunferência C_1, por construção. Logo, o quadrilátero VP_1PP_2 também será inscritível à circunferência C_1 se $\overline{VP} \equiv 2 \cdot \overline{OP}$, ou seja, se o ponto V pertencer a circunferência C_1.



Exercício 4.0.34. Construir o trapézio $ABCD$ conhecendo o segmento que representa a soma das bases $AB + CD$, as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ e o lado $\overline{AD}$.

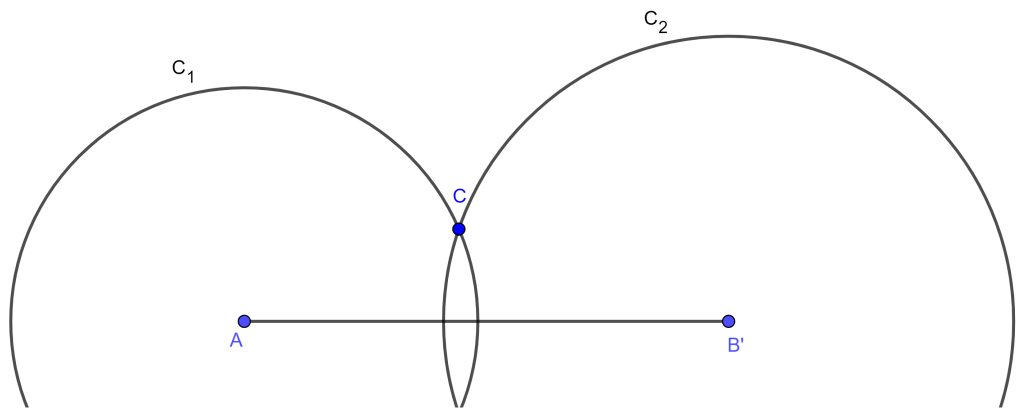
Observe:



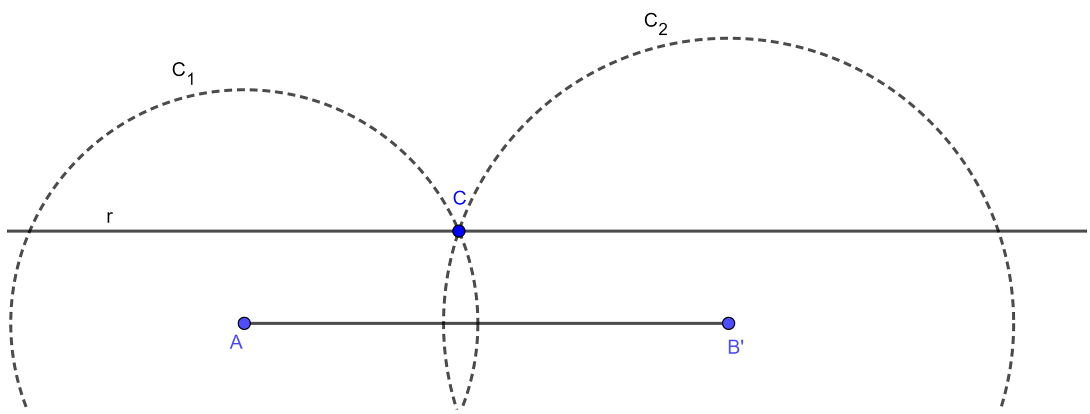
Resolução:

1. Trace o segmento $\overline{AB'}$ cujo comprimento é igual a $AB + CD$.

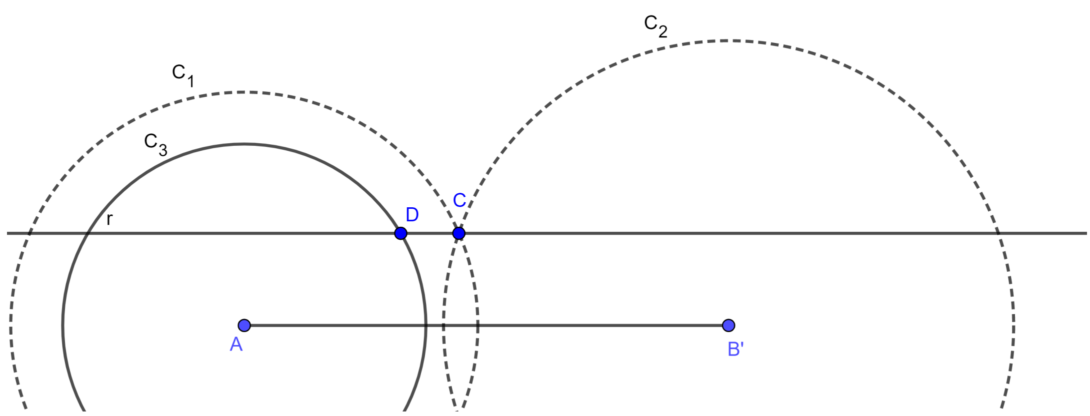
2. Construa as circunferências C_1 com centro no ponto A e raio $\overline{AC}$, e C_2 com centro no ponto B' e raio $\overline{BD}$. Denote o ponto de intersecção entre as circunferências construídas por ponto C.



3. Trace uma reta paralela r ao segmento $\overline{AB'}$ pelo ponto C.

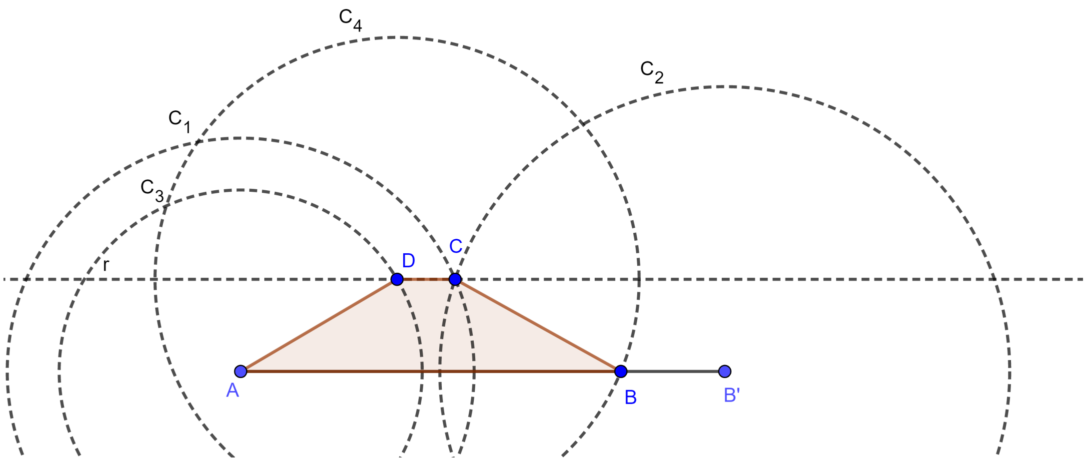


4. Construa a circunferência C_3 com centro no ponto A e raio igual a $\overline{AD}$, cuja intersecção com a reta r é o vértice D.



Note que há dois pontos como resultado da intersecção da reta r e a circunferência C_3, usaremos o ponto D a fim que forme-se um trapézio.

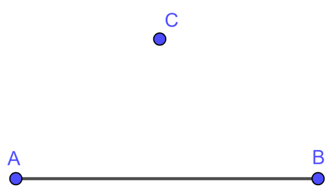
5. Construa a circunferência C_4 com centro no ponto D e raio $\overline{BD}$, cuja a intersecção com o segmento $\overline{AB'}$ é o vértice B (note que novamente poderá existir dois pontos de intersecção). E temos o trapézio $ABCD$ desejado.



A justificativa é em decorrência da construção.

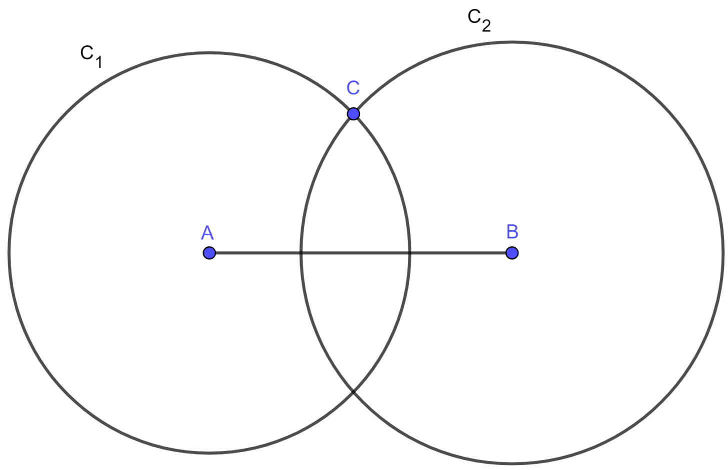
Exercício 4.0.35. Construir um ponto simétrico a um ponto C, relativo ao segmento $\overline{AB}$.

Observe:

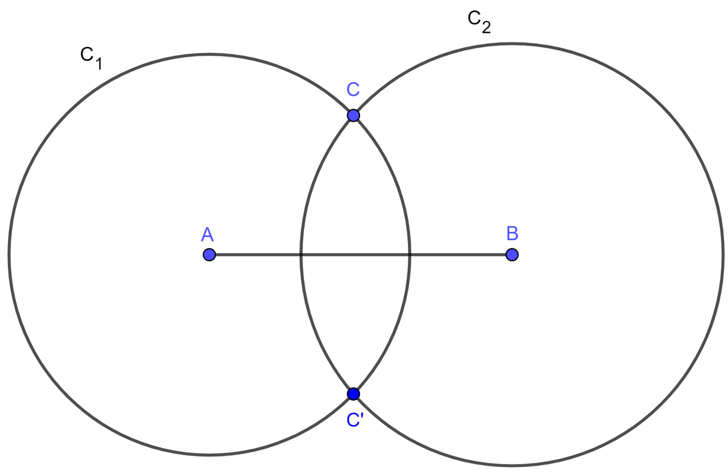


Resolução:

1. Construa as circunferências C_1, com centro no ponto A e raio $\overline{AC}$, em seguida construa a circunferência C_2, com centro no ponto B e raio $\overline{BC}$.



2. Denote o ponto de intersecção entre as circunferências C_1 e C_2 pelo ponto C' (note que um dos pontos de intersecção é o próprio ponto C). O ponto C' é o ponto simétrico desejado.



Justificativa:

Pelo caso de congruência LLL temos:

$\cdot \triangle ACB \equiv \triangle AC'B$

Portanto:

$\cdot$ Note que $\widehat{CAB} \equiv \widehat{C'AB}$.

Por construção o triângulo $\triangle ACC'$ é isósceles.

Seja D o ponto de intersecção do segmento $\overline{AB}$ com o segmento $\overline{CC'}$.

$\cdot$ O segmento $\overline{AD}$ é bissetriz do ângulo $\widehat{CAC'}$,

Logo,

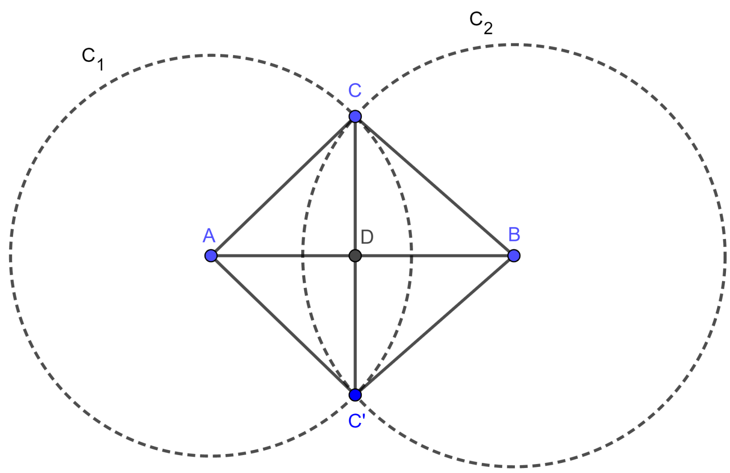
$\cdot$ O segmento $\overline{AD}$ é altura relativa ao vértice A e mediana relativa ao lado $\overline{CC'}$, Então:

· Os segmentos $\overline{CC'}$ e $\overline{AB}$ são perpendiculares.

· Os segmentos $\overline{CD}$ e $\overline{C'D}$ são congruentes.

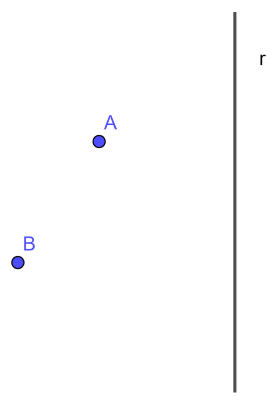
Portanto:

O ponto C' é o simétrico de C.



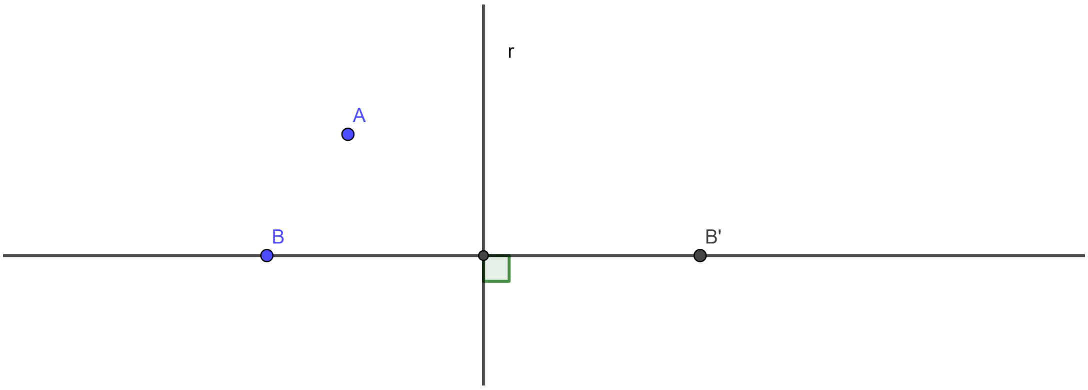
Exercício 4.0.36. Dados dois pontos A e B situados no mesmo semiplano determinado pela reta r, determinar o ponto P sobre r de forma que $PA+PB$ seja mínimo.

Observe:

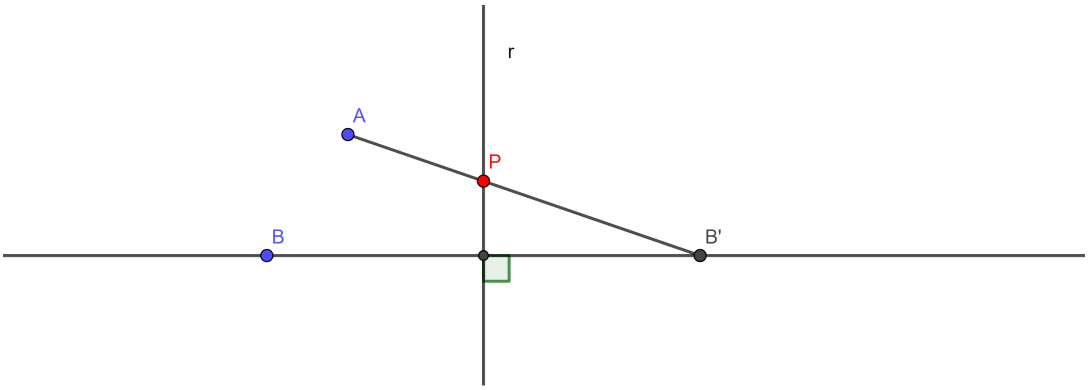


Resolução:

1. Determinar o ponto simétrico de B em relação à reta r, nomeie por ponto B' (veja exercício 4.0.35).



2. Note que a reta r neste contexto é o lugar geométrico dos pontos que equidistam dos pontos B e B', logo, traçar o segmento $\overline{AB'}$ nos fornecerá o ponto P solicitado, que será a intersecção entre o segmento $\overline{AB'}$ e a reta r.



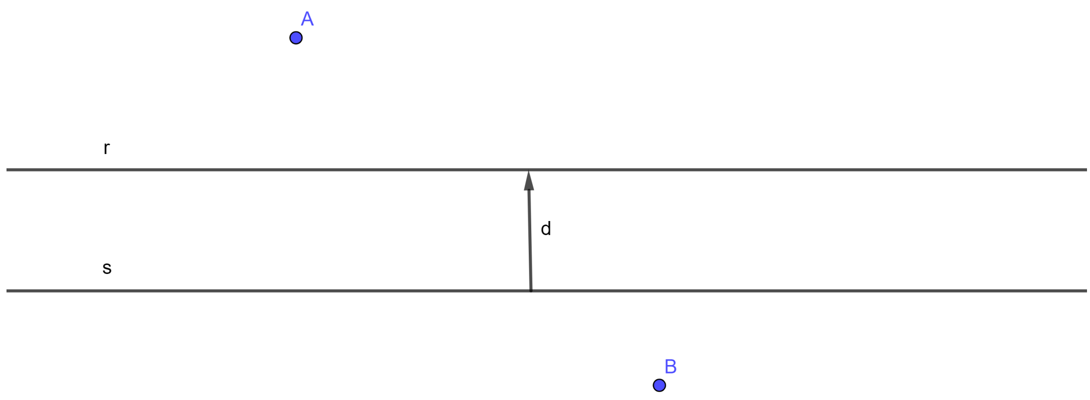
Como $\overline{PB'} \equiv \overline{PB}$ então $AP + PB' = AP + PB$ será mínimo.

A justificativa é em decorrência da construção.

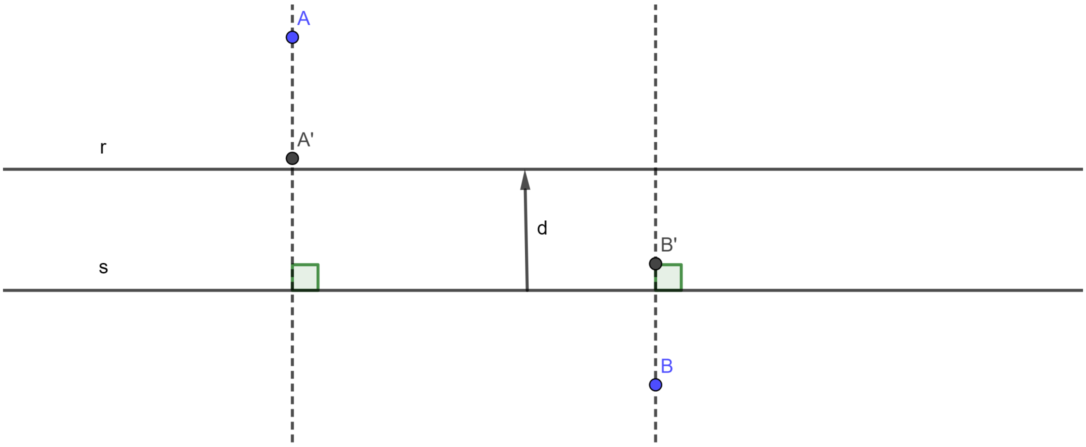
Exercício 4.0.37. Na figura abaixo, as retas paralelas r e s são as margens de um rio e os pontos A e B representam cidades em lados opostos desse rio. Deseja-se construir uma ponte $\overline{PQ}$ ($P \in r$, $Q \in s$) perpendicular às margens de forma que construindo as estradas $\overline{AP}$ e $\overline{BQ}$ o percurso total de A até B seja mínimo.
Determinar a posição da ponte $\overline{PQ}$.

Resolução:

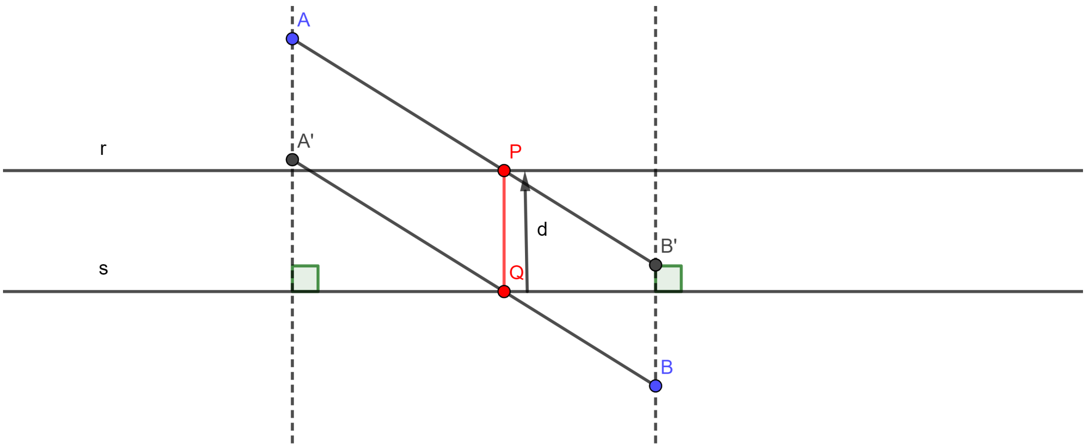
1. Note que as retas paralelas r e s estão a uma distância que chamaremos de d, este é o tamanho da ponte.



2. Translade o ponto A a uma distância d "para baixo", determinando o ponto A', em seguida translade o ponto B "para cima", também a uma distância d, encontrando o ponto B'(note que a translação dos pontos é análoga ao exercício 4.0.35 quando determinamos pontos simétricos).



3. Construa os segmentos $\overline{AB'}$ e $\overline{A'B}$ cujas as intercções com as margens do rio (retas r e s) determinam a posição da ponte $\overline{PQ}$ solicitada.



Justificativa:

Note que nesta resolução, o problema se transformou na minimização dos segmentos $\overline{AB'}$ e $\overline{A'B}$.

Onde os comprimentos dos segmentos:

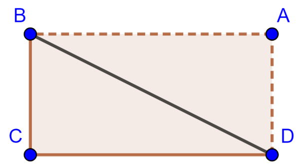
- $AB' = AP + PB'$

- $A'B = A'Q + QB$

São segmentos distintos e os pontos A, P, B' e A', Q, B estão alinhados, por construção, formando assim os segmentos citados.

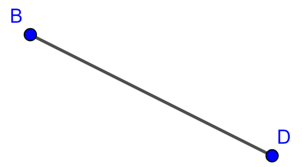
Exercício 4.0.38. Construir um retângulo $ABCD$ conhecendo a sua diagonal $\overline{BD}$ e o seu semiperímetro $BC+CD$.

Observe:

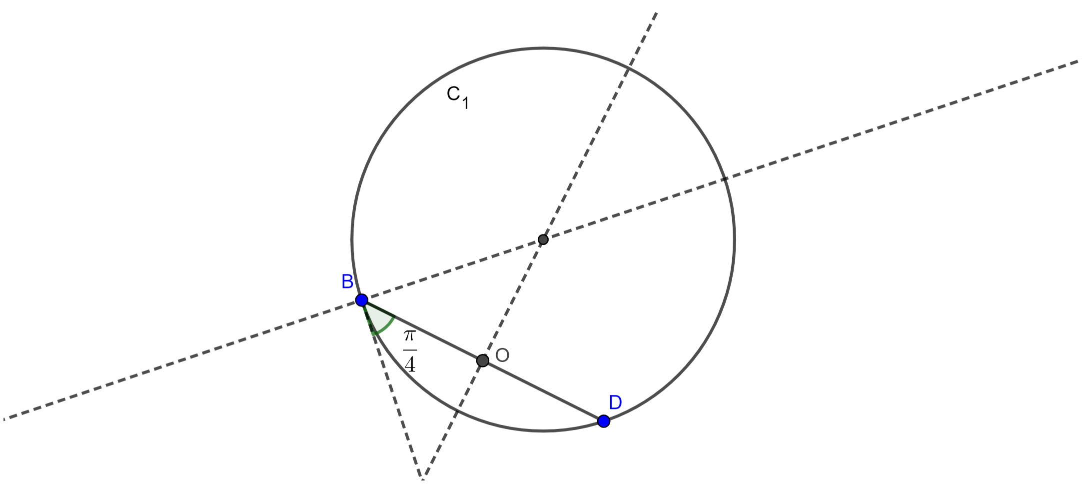


Resolução:

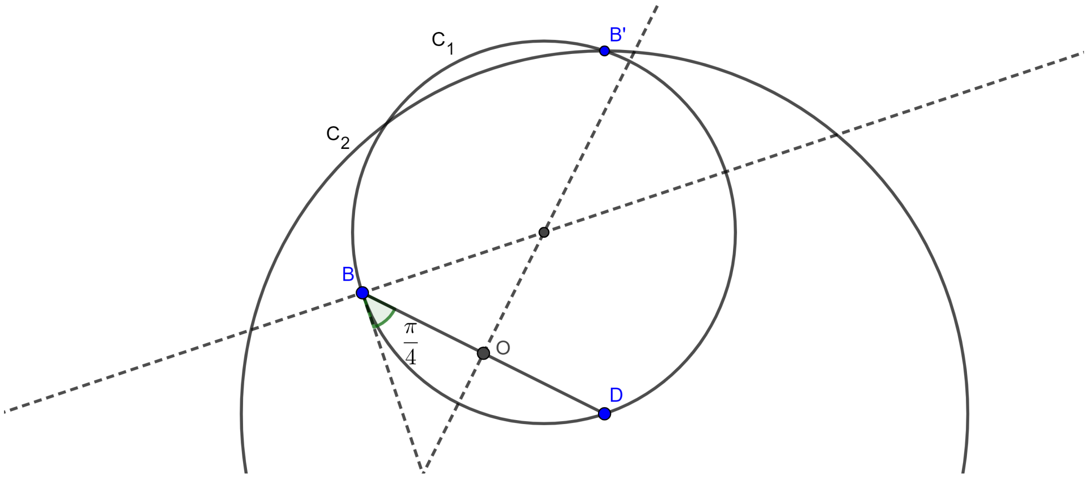
1. Considere o retângulo $ABCD$, o retângulo desejado, então, construa a diagonal $\overline{BD}$.



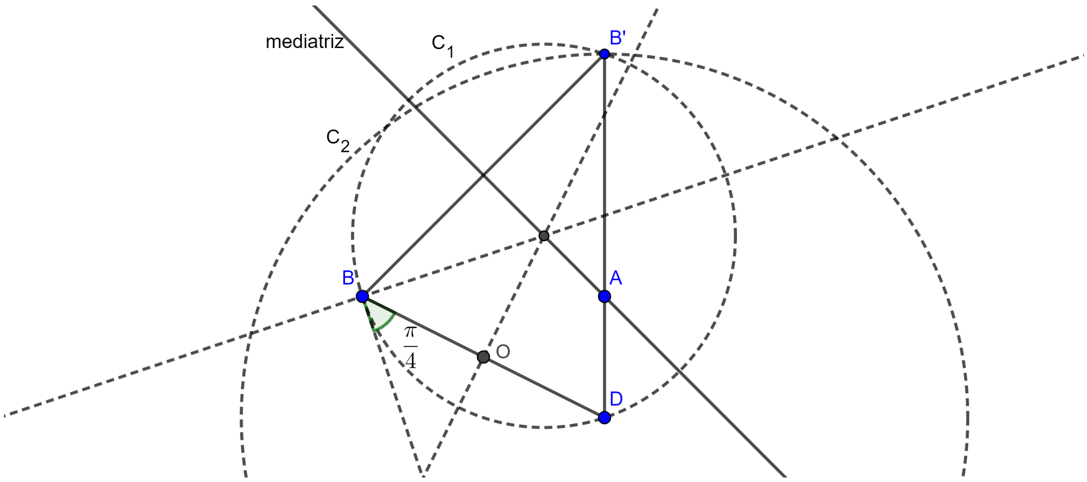
2. Determine o ponto médio O, do segmento $\overline{BC}$ e em seguida construa o arco capaz C_1 do ângulo de medida igual a $\dfrac{\pi}{4}$ relativo ao segmento $\overline{BC}$.



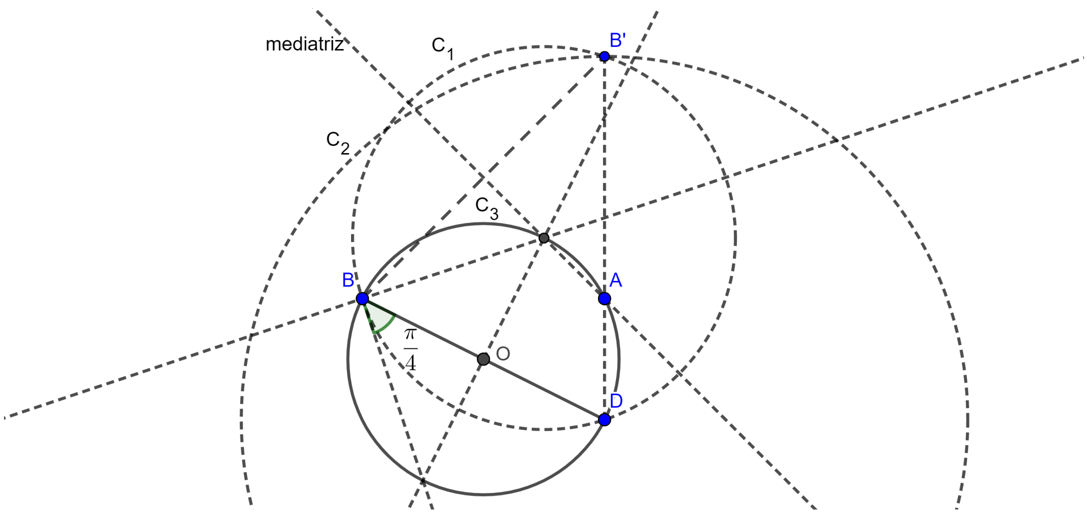
3. Construa a circunferência C_2 com centro no ponto D e raio de comprimento $BC+CD$. Em seguida, denote o ponto de intersecção entre as circunferências C_1 e C_2 por ponto B'.



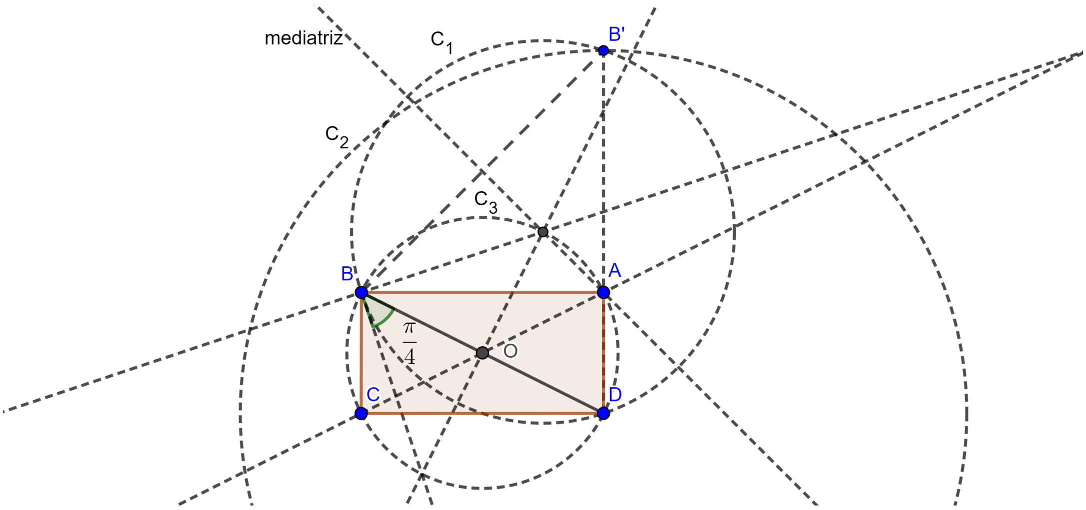
4. Trace o segmento $\overline{BB'}$ e em seguida, construa a sua mediatriz. Note que a intersecção entre a mediatriz e o segmento $\overline{DB'}$ é o vértice A.



5. Construa a cricunferência C_3 com centro no ponto O e raio de comprimento igual a $\dfrac{BD}{2}$.

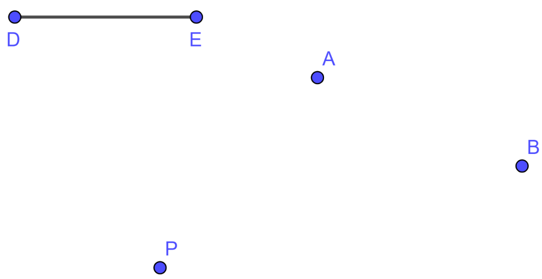


6. Trace a reta que contém o segmento $\overline{AO}$, cuja a intersecção com a circunferência C_3 é o vértice C do retângulo $ABCD$ desejado.



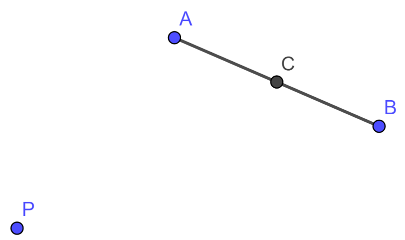
A justificativa é em decorrência da construção.

Exercício 4.0.39. Dados, em posição, os pontos A, B e P, e dado também um segmento $\overline{DE}$, traçar, pelo ponto P, uma reta r, de modo que os pontos A e B pertençam a um dos semiplanos determinados pela reta r e cuja soma das distâncias dos pontos A e B à reta r sejam iguais a $2 \cdot DE$ (veja a figura abaixo).

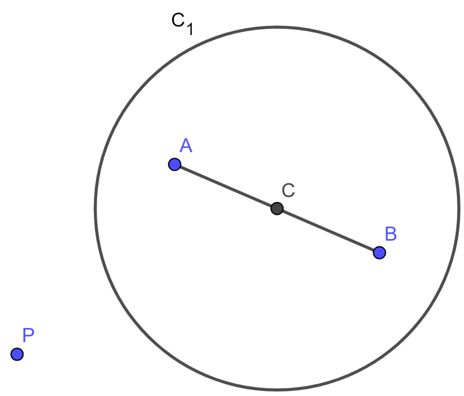


Resolução:

1. Construa o segmento $\overline{AB}$ e determine seu ponto médio, nomeie por ponto C.

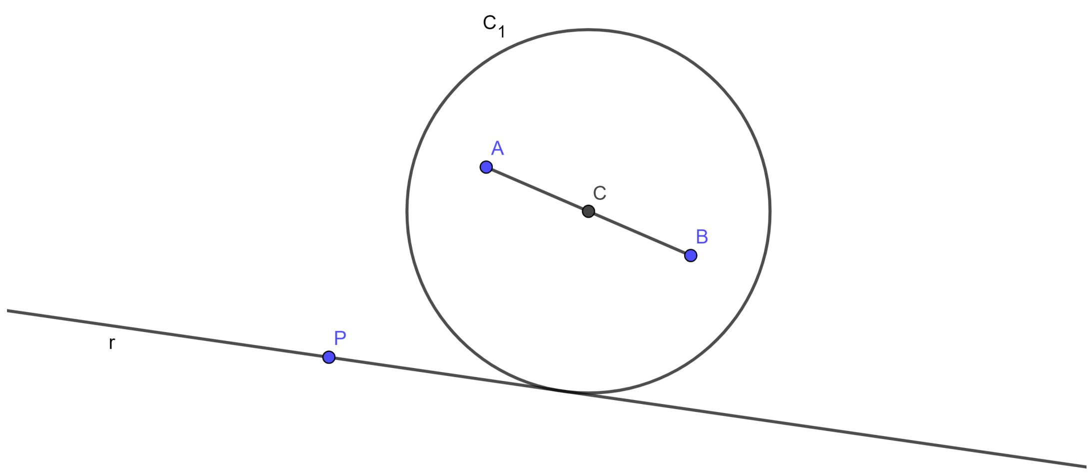


2. Construa a circunferência C_1 com centro no ponto C e raio $\overline{DE}$.



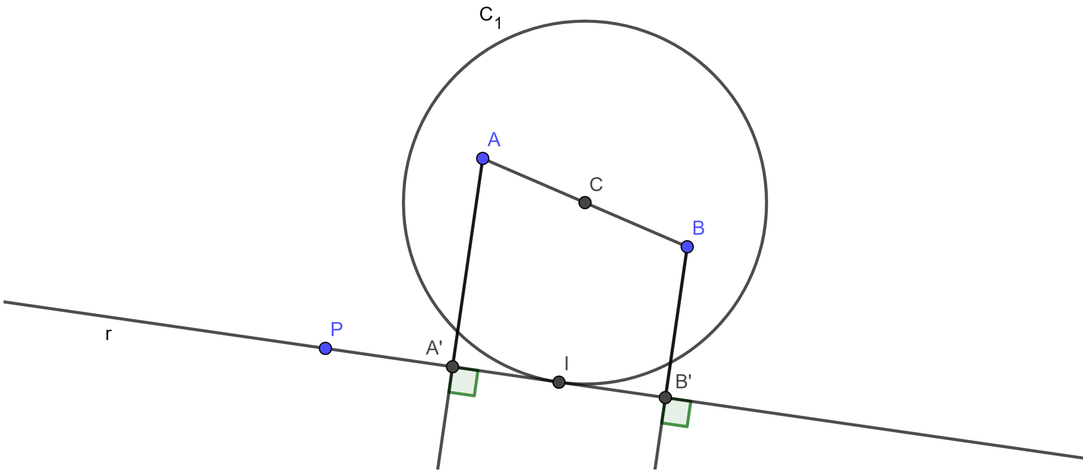
3. Determine a reta tangente a circunferência C_1 pelo ponto P.

   Note que esta é a reta r desejada.



Justificativa:

Observe a figura abaixo:



Perceba que o quadrilátero $ABB'A'$ é um trapézio por construção, pois:

- $\overline{AA'} \parallel \overline{BB'}$;

  visto que os segmentos $\overline{AA'}$ e $\overline{BB'}$ são perpendiculares a reta r.

E ainda,

- $\overline{CI}$ é congruente ao raio da circunferência C_1.
- O ponto C é ponto médio do segmento $\overline{AB}$.
- O ponto I é ponto médio do segmento $\overline{A'B'}$.

  Visto que,

  $\overline{CI}$ é perpendicular a reta r,

  pois,

  a reta r é tangente (por construção) à circunferência C_1 no ponto I.

Como os segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ e $\overline{CI}$ são perpendiculares a reta r temos que

$\overline{AA'} \parallel \overline{BB'} \parallel \overline{CI}$.

E como, o ponto C, é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$, o ponto I é o ponto médio do segmento $\overline{A'B'}$.

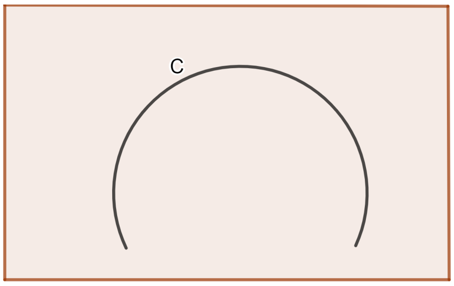
Logo, o segmento $\overline{CI}$ é a base média do trapézio $ABB'A'$.

Portanto,

$$\frac{AA' + BB'}{2} = CI = DE$$
$$AA' + BB' = 2 \cdot DE,$$

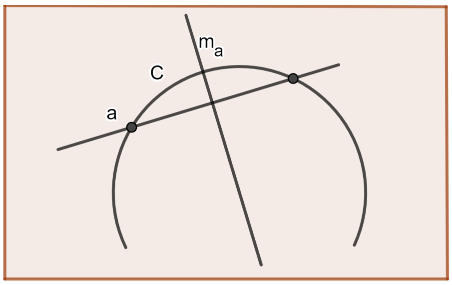
validando a construção do exercício.

Exercício 4.0.40. De uma circunferência C conhecemos uma parte um pouco maior do que sua semicircunferência, como na figura abaixo. Limitando-se ao espaço disponível, determine o raio da circunferência C.

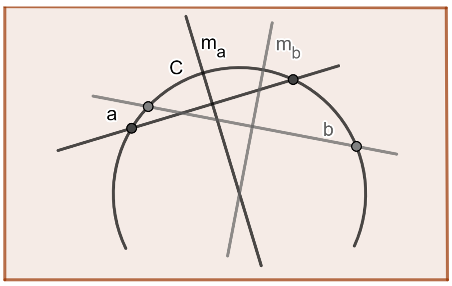


Resolução:

1. Trace uma reta secante à circunferência C, denote-a por reta a. Em seguida, determine a mediatriz m_a da corda formada.

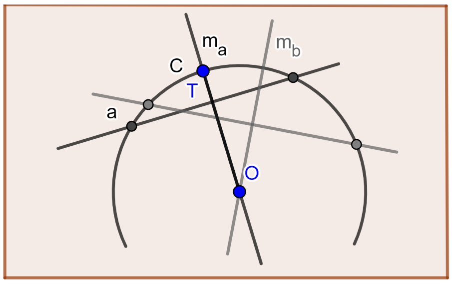


2. Analogamente, trace uma segunda reta secante, distinta de m_a, denote-a por b e determine a mediatriz m_b da nova corda formada.



3. Denote o ponto de intersecção entre as mediatrizes m_a e m_b por ponto O. E ainda, o ponto T, ponto de intersecção entre a cincunferência C e a mediatriz m_a.

   Note que o ponto O é o centro da circunferência C dada, e o segmento $\overline{OT}$ é o raio desejado.



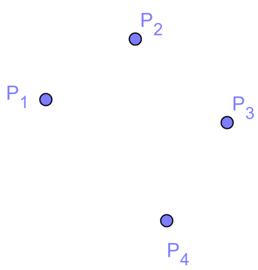
Justificativa:

Como a mediatriz é o lugar geométrico dos pontos equidistantes de dois pontos, a intersecção das mediatrizes m_a e m_b nos fornece o centro da circunferência C, que é o ponto que equidista de todos os pontos que compoem a circunferência citada.

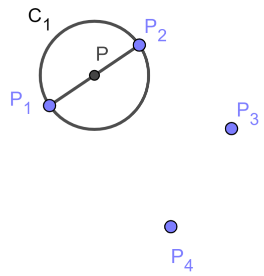
Exercício 4.0.41. Construir um quadrado $ABCD$, dados em posição um ponto de cada um dos seus lados.

Resolução:

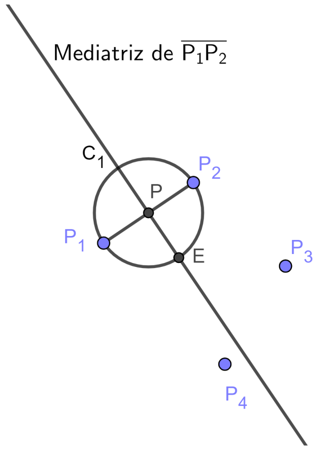
Sejam P_1, P_2, P_3 e P_4 os pontos dados, observe a figura abaixo.



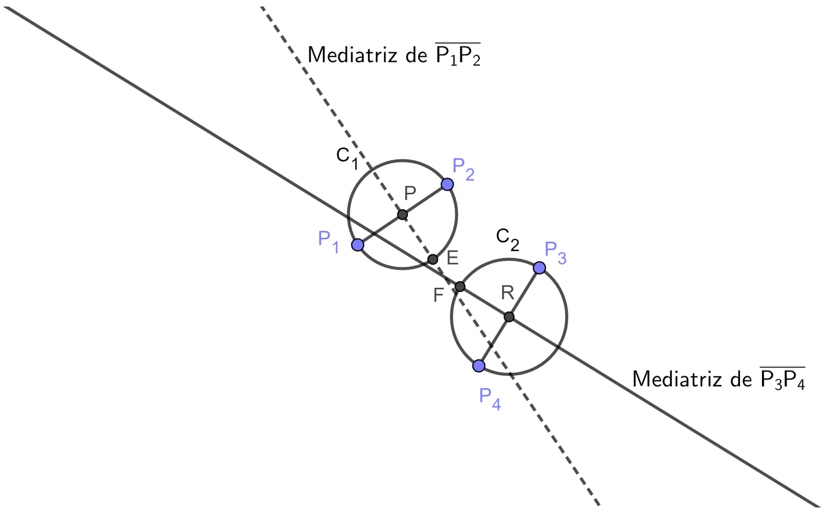
1. Trace o segmento $\overline{P_1P_2}$ e determine seu ponto médio, denominado ponto P. Em seguida, construa a circunferência C_1 com centro no ponto P e raio $\overline{PP_1}$.



2. Determine a mediatriz do segmento $\overline{P_1P_2}$ e denote sua intersecção com a circunferência C_1, por ponto E.

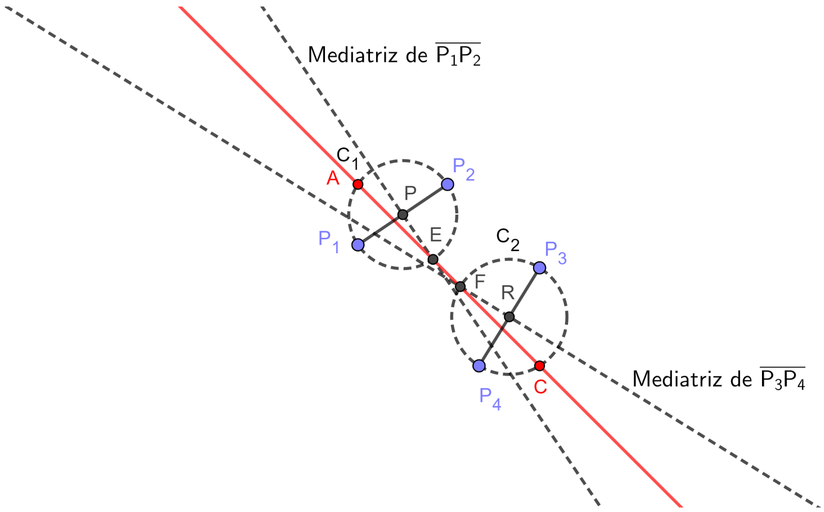


3. Analogamente, construa a circunferência C_2 com centro no ponto R e raio $\overline{RP_3}$, onde R é o ponto médio de $\overline{P_3P_4}$. Em seguida, determine a mediatriz do segmento $\overline{P_3P_4}$ e denote sua intersecção com a circunferência C_2 por ponto F.

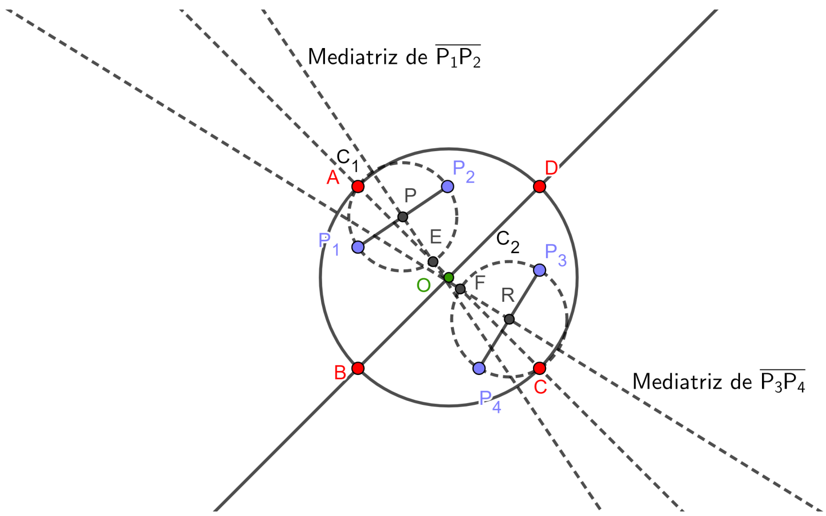


4. Prolongue o segmento $\overline{EF}$ (note que uma das diagonias do quadrado $ABCD$ desejado

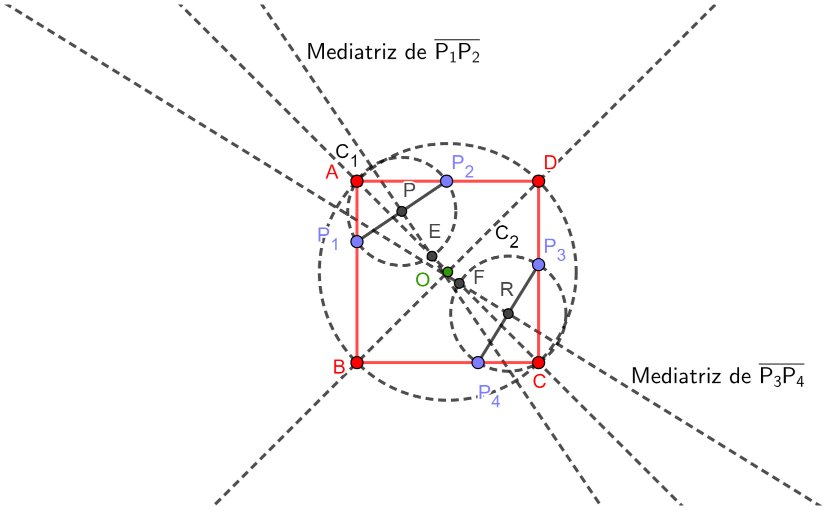
contém este segmento) determinando os vértices A e C sobre as circunferências C_1 e C_2, respectivamente.



5. Trace a mediatriz do segmento $\overline{AC}$ pelo seu ponto médio O, determinando os vértices B e D, tais que $\overline{OA} \equiv \overline{OB} \equiv \overline{OC} \equiv \overline{OD}$.



6. Agora trace os segmentos que ligam os pontos A, B, C e D, e temos o quadrado desejado.



Justificativa:

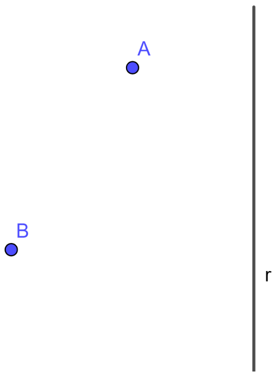
Note que o triângulo $\triangle AP_1P_2$ é retângulo em A, pois o triângulo $\triangle AP_1P_2$ está inscrito à circunferência C_1 e o segmento $\overline{P_1P_2}$ é diâmetro de C_1. Logo, temos que as medidas dos ângulos $m(\widehat{P_1AE}) = m(\widehat{P_2AE}) = \dfrac{\pi}{4}$, então, as medidas dos ângulos $m(\widehat{P_1PE}) = m(\widehat{P_2PE}) = \dfrac{\pi}{2}$, de modo que o ponto E é o ponto médio do arco $\widehat{P_1EP_2}$, e assim, o ponto E pertence a mediatriz do segmento $\overline{P_1P_2}$.

Analogamente, podemos justificar que o ponto R pertence à mediatriz do segmento $\overline{P_3P_4}$.

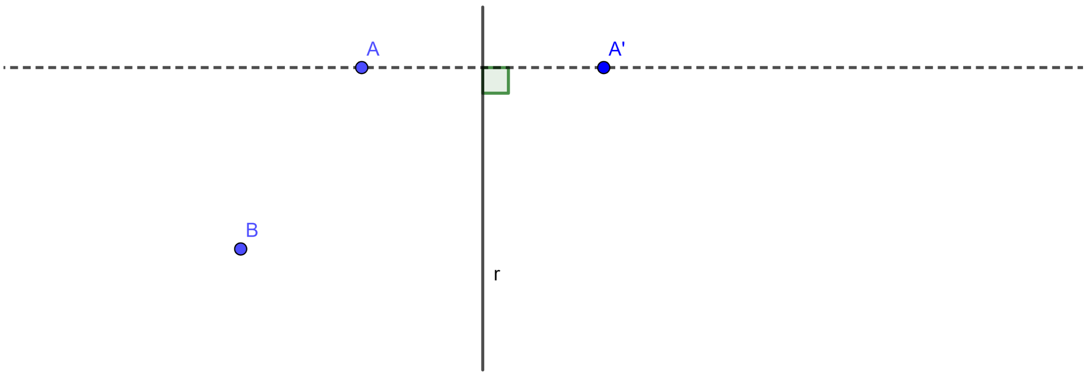
Exercício 4.0.42. São dados dois pontos, A e B, de um mesmo semiplano determinado por uma reta r. Determinar um ponto P sobre a reta r de forma que o ângulo entre a reta r e o segmento $\overline{PB}$ seja o dobro do ângulo entre o segmento $\overline{PA}$ e a reta r.

Resolução:

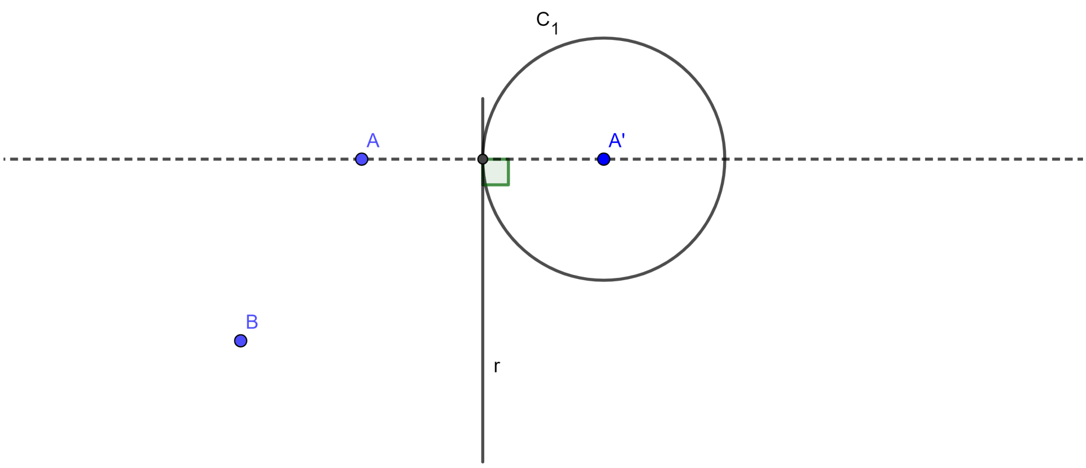
1. Observe a figura abaixo que ilustra os dados do enunciado.



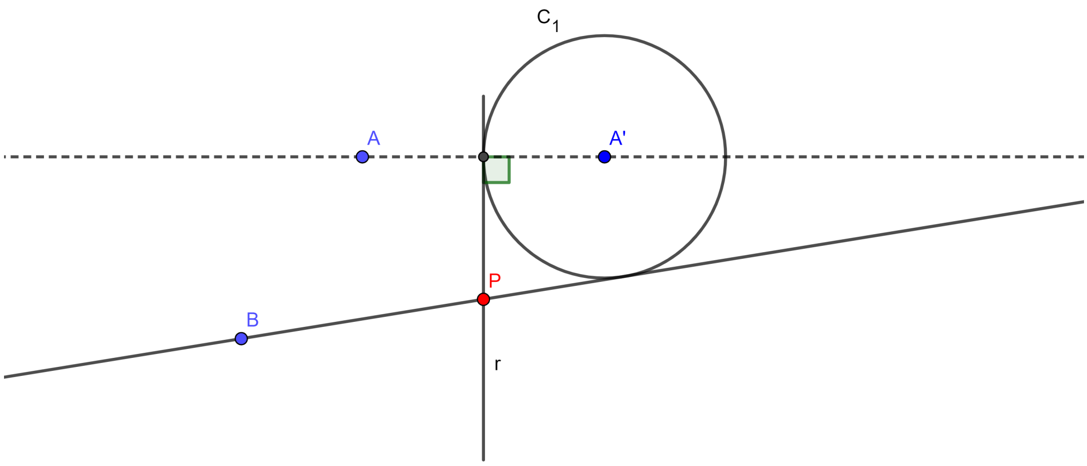
2. Determine o ponto simétrico do ponto A em relação à reta r, nomeie por ponto A'.



3. Construa a circunferência C_1 tangente à reta r e com centro no ponto A'.

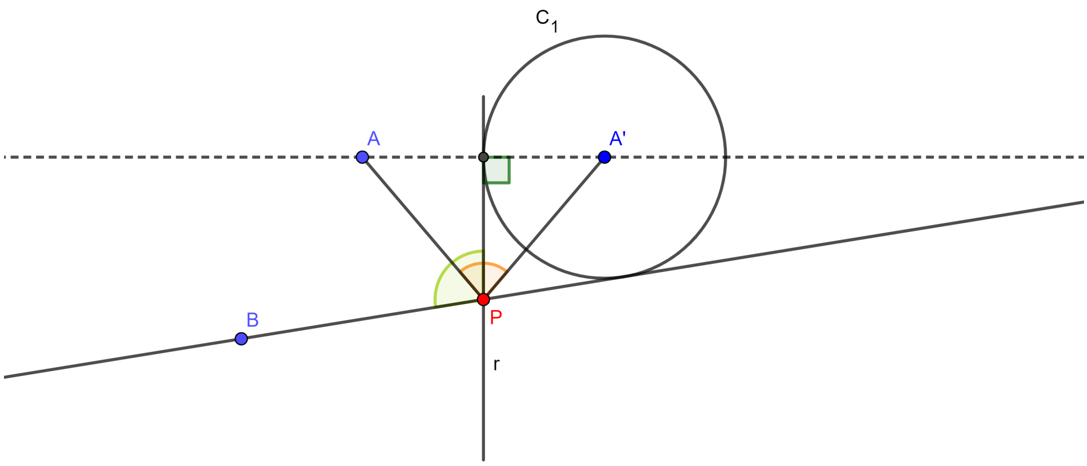


4. Trace a reta tangente à circunferência C_1 pelo ponto B, cuja a intersecção com a reta r é o ponto P desejado.



Justificativa:

Pela construção, a medida do ângulo entre o segmento $\overline{PB}$ e a reta r é o dobro da medida do ângulo entre o segmento $\overline{PA'}$ e a reta r, que é igual à medida do ângulo entre o segmento $\overline{PA}$ e a reta r.

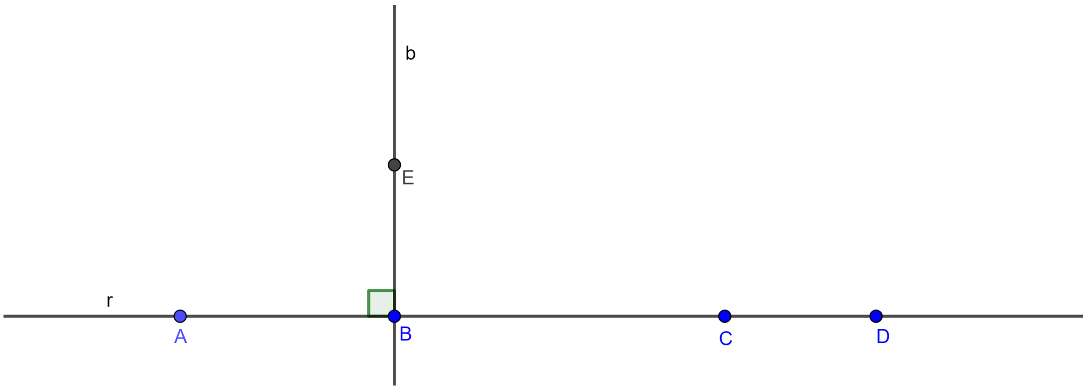


Exercício 4.0.43. São dados os pontos A, B, C e D, nesta ordem, sobre uma reta. Traçar pelos pontos A e B duas retas paralelas e pelo pontos C e D outras duas retas paralelas, de forma que as intersecções dessas retas formem um quadrado.

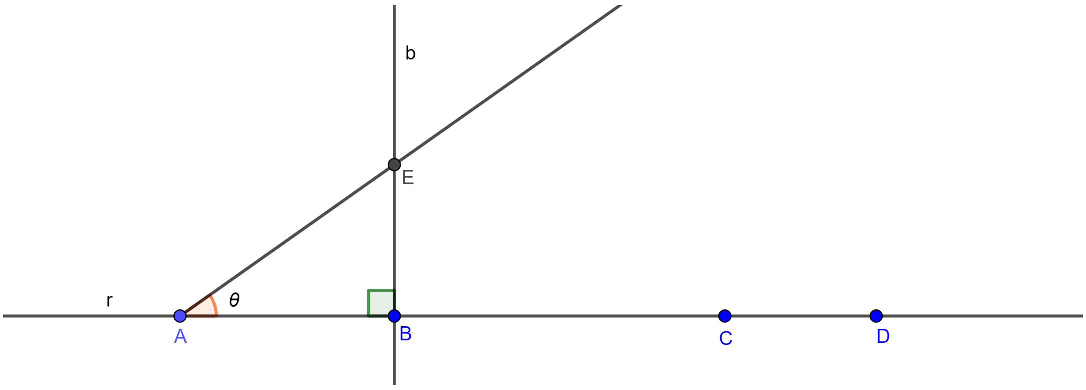
Resolução:

Seja r a reta que contém os pontos A, B, C e D dados.

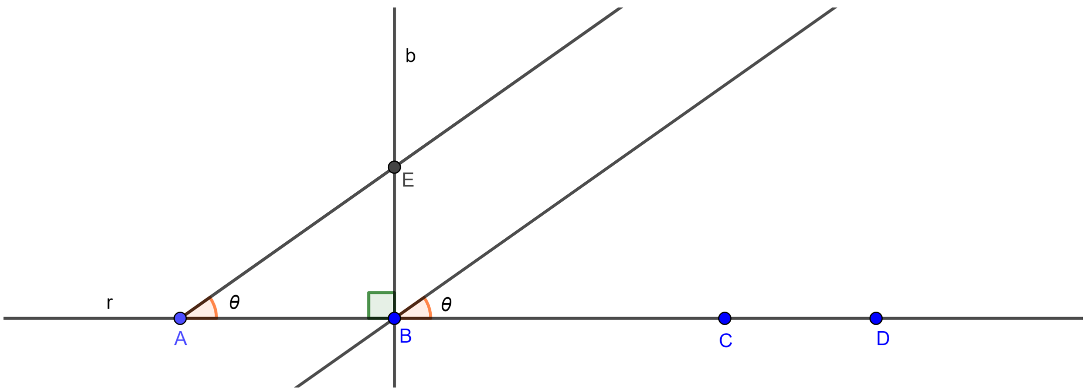
1. Trace uma reta b, perpendicular à reta r, pelo ponto B. Em seguida, denote o ponto E sobre a reta b, tal que, $\overline{BE} \equiv \overline{CD}$.



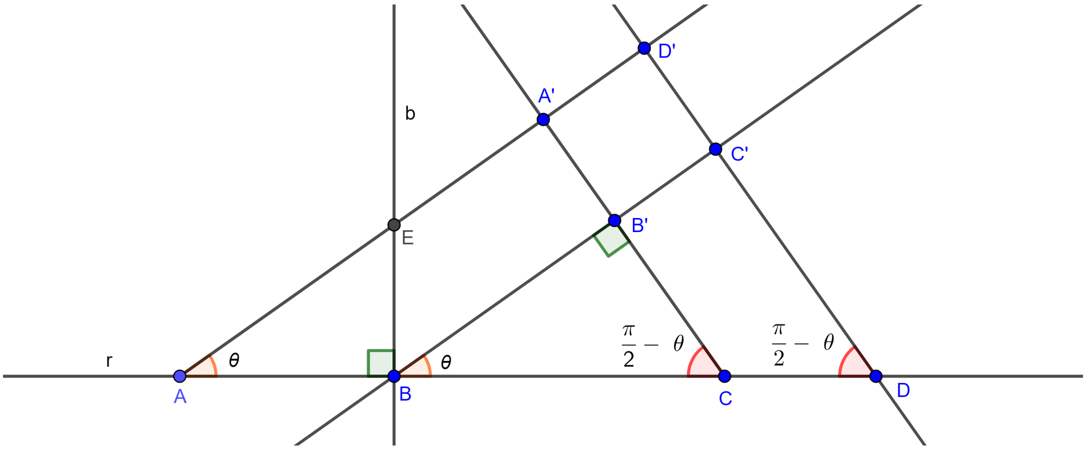
2. Trace a semirreta $\overrightarrow{AE}$, nomeie o ângulo $\widehat{EAB}$ de medida igual a θ.



3. Trace a reta paralela, a reta $\overleftrightarrow{AE}$, pelo ponto B. Logo, a medida do ângulo formado por esta paralela com a semirreta $\overrightarrow{BC}$ é igual a θ.

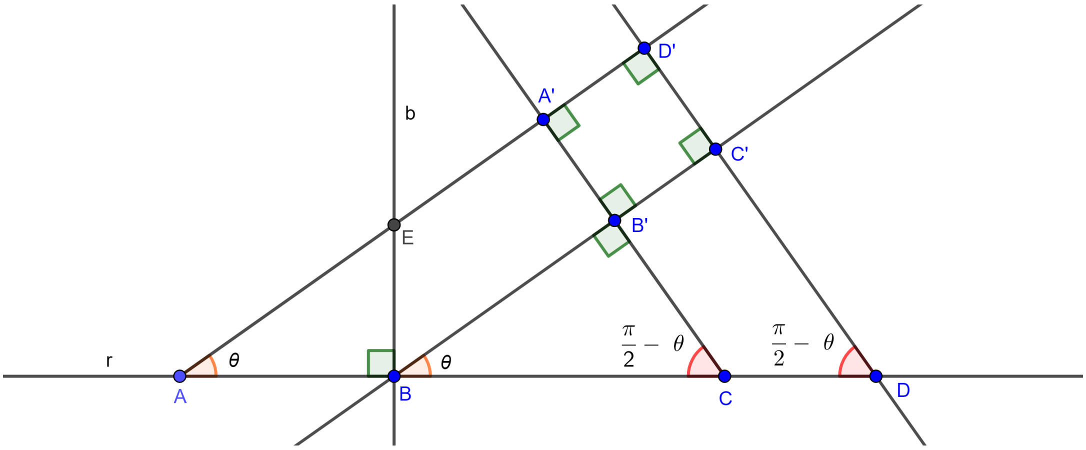


4. Trace pelos pontos C e D, retas paralelas entre si, cuja medida do ângulo com a reta r é igual a $\dfrac{\pi}{2} - \theta$. Em seguida, denote os pontos de intersecção entre as retas, por A', B', C e D como na figura abaixo e temos o quadrado desejado.



Justificativa:

Observe a figura abaixo:



Note que $m(\widehat{BB'C}) = \dfrac{\pi}{2}$ em decorrência do triângulo $\triangle B'BC$.

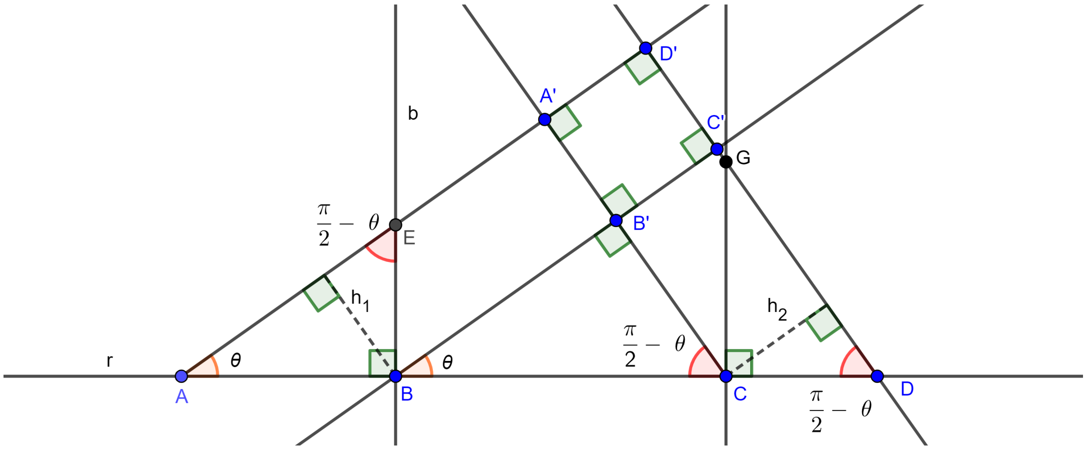
Logo, o ângulo $\widehat{A'B'C'}$ também é reto.

Como as retas $\overleftrightarrow{AA'}$ e $\overleftrightarrow{BB'}$ são paralelas, o ângulo $\widehat{B'A'D'}$ é reto.

Por consequência, os segmentos $\overline{A'B'} \equiv \overline{C'D'}$.

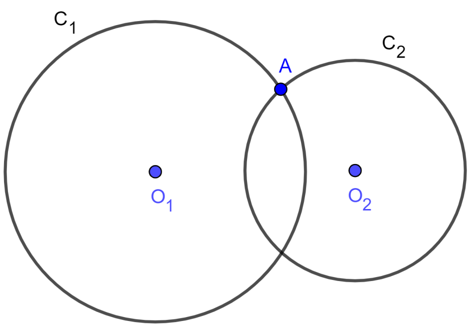
De modo semelhante $m(\widehat{A'D'C'}) = m(\widehat{D'C'B'}) = \dfrac{\pi}{2}$, logo, $\overline{A'D'} \equiv \overline{B'C'}$.

Agora, vamos analisar os triângulos $\triangle ABE$ e $\triangle CGD$, onde o ponto G é o ponto de intersecção entre a reta $\overleftrightarrow{DC'}$ e a perpendicular pela reta r no ponto C, veja a figura a seguir:



Os triângulos $\triangle ABE$ e $\triangle CGD$ são congruentes pelo caso ALA, assim suas alturas relativas às suas hipotenusas são de mesmo comprimento ($h_1 = h_2$), logo, os segmentos $\overline{A'B'} \equiv \overline{B'C'}$, demonstrando que o quadrilátero $A'B'C'D'$ é um quadrado.

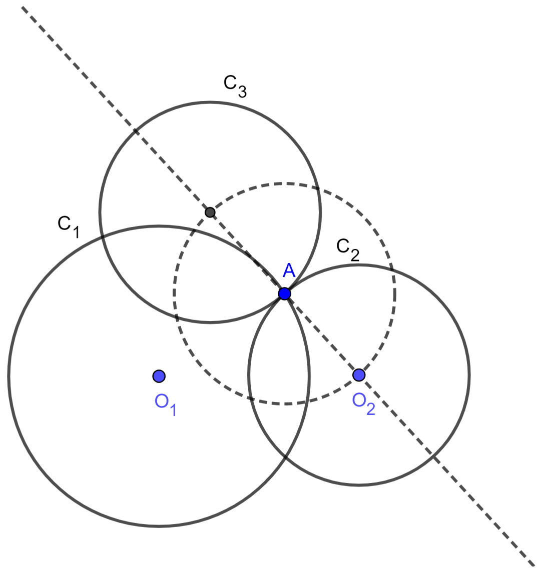
Exercício 4.0.44. São dadas as circunferências C_1 e C_2 como na figura abaixo. Traçar pelo ponto A, dado, uma reta secante $\overleftrightarrow{PAQ}$ de maneira que se tenha $\overline{PA} \equiv \overline{AQ}$.



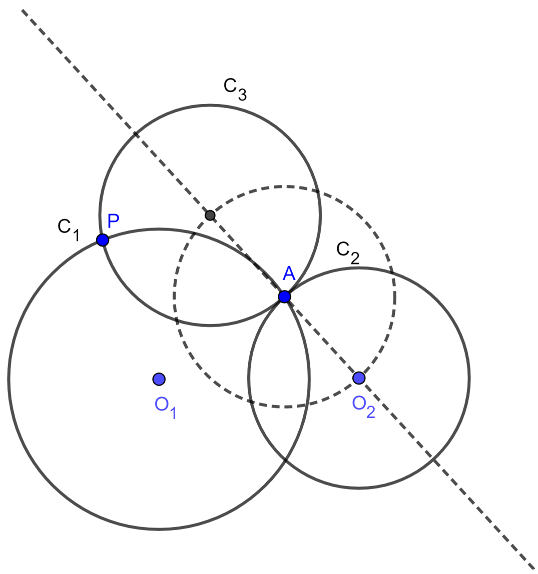
Resolução:

Sejam os pontos O_1 e O_2, os centros, respectivamente, das circunferências C_1 e C_2, dadas:

1. Determine a circunferência C_3, simétrica à circunferência C_2 em relação ao ponto A.

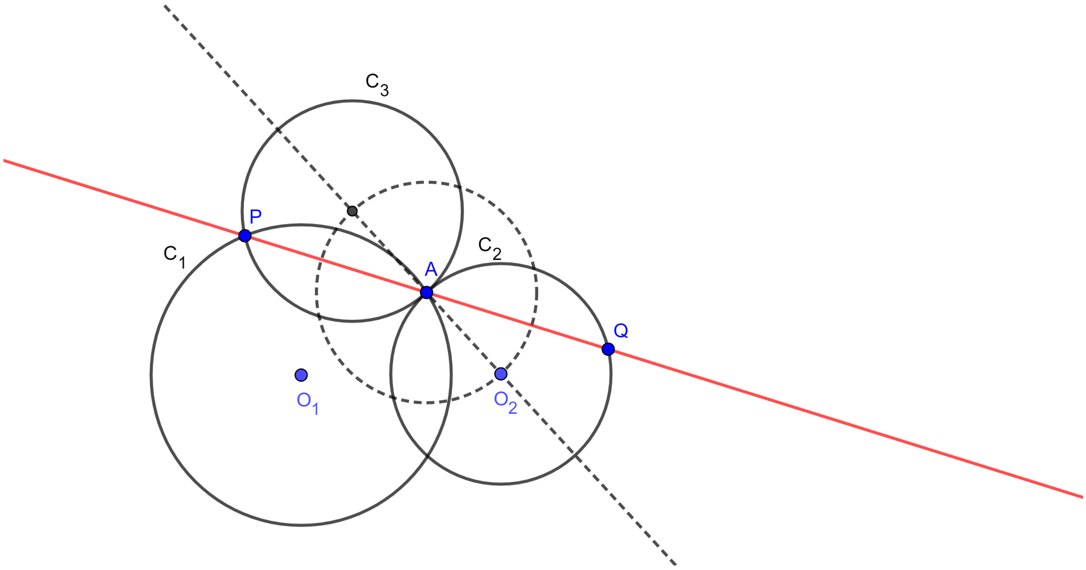


2. Denote o ponto de intersecção entre as circunferências C_1 e C_3, por ponto P (note que um dos pontos de intersecção é o ponto A).



3. Trace a reta $\overleftrightarrow{PA}$ e denote o ponto de intersecção entre a reta $\overleftrightarrow{PA}$ e a circunferência C_2, por ponto Q.

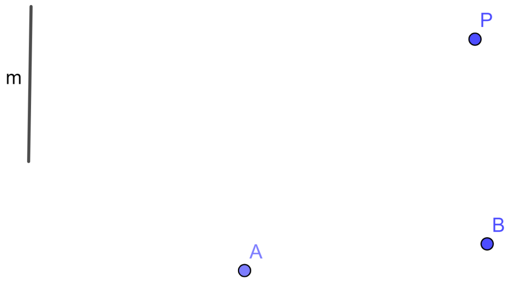
   Logo temos a reta secante $\overleftrightarrow{PAQ}$ desejada.



Justificativa:

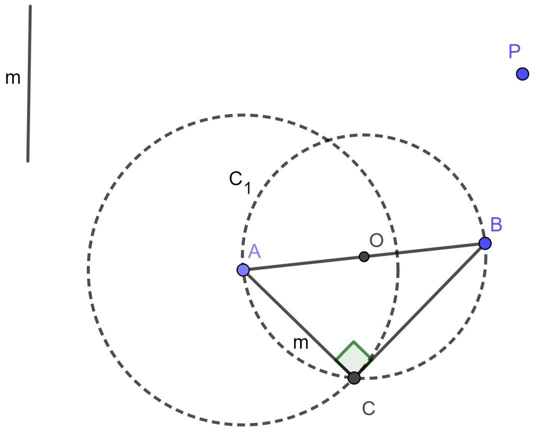
Por construção, o ponto P é simétrico de Q, com relação ao ponto A, concluímos que os segmentos $\overline{PA} \equiv \overline{PQ}$.

Exercício 4.0.45. Dados em posição os pontos A, B e P, e dado também, um segmento de comprimento m (veja a figura abaixo), traçar pelo ponto P, uma reta r de maneira que os pontos A e B fiquem em semiplanos distintos, determinados pela reta r, e que a soma das distâncias do ponto A até a reta r e do ponto B até a reta r seja m.



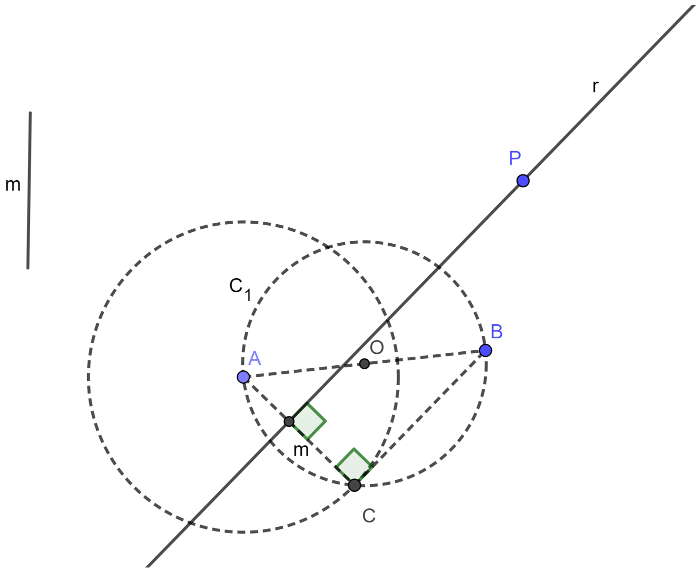
Resolução:

1. Utilizando a figura dada, determine o ponto C tal que o triângulo $\triangle ABC$ formado, seja retângulo, com o segmento $\overline{AB}$ sendo sua hipotenusa, e o segmento $\overline{AC}$ tenha comprimento m.



Note que para determinar o triângulo $\triangle ABC$ basta determinar o ponto médio do segmento $\overline{AB}$, o ponto O, este é o centro da circunferência C_1, circunscrita ao triângulo $\triangle ABC$. E para determinar o ponto C sobre a circunferência C_1, basta transportar o segmento cujo o comprimentos é m.

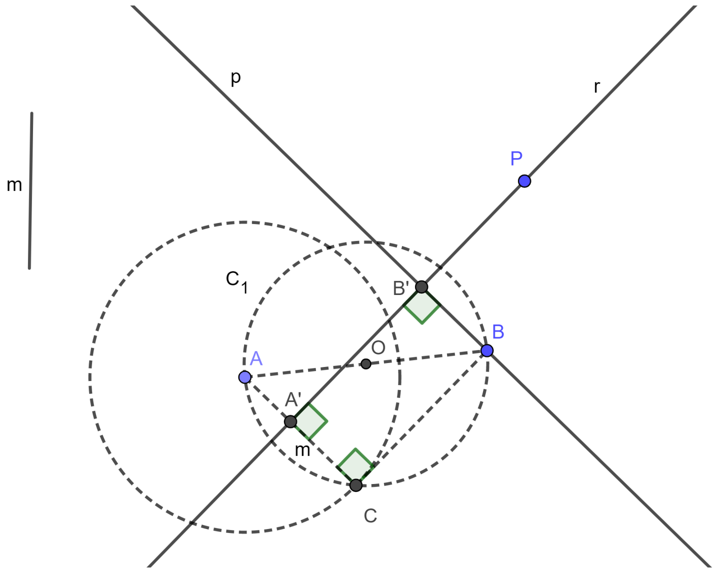
2. Determine a reta perpendicular ao segmento $\overline{AC}$ pelo ponto P. Essa é a reta r desejada.



Justificativa:

Note que os pontos A e B pertencem a semiplanos distintos determinados pela reta r, por construção.

Observe a figura abaixo:

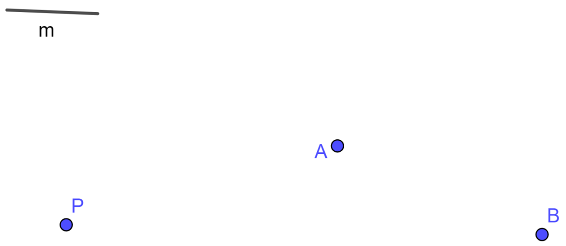


Determinando uma reta p paralela ao segmento $\overline{AC}$, note que p intersectará a reta r perpendicularmente no ponto que chamaremos de B'. Denote também, o ponto A', ponto de intersecção entre a reta r e o segmento $\overline{AC}$.

Assim:

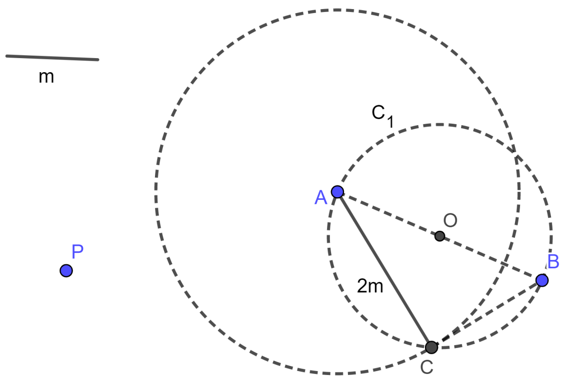
$AA' + B'B = AA' + A'C = AC = m$ como queríamos.

Exercício 4.0.46. Dados, em posição, os pontos A, B e P, e dado também um segmento de comprimento m, traçar, pelo ponto P, uma reta r de modo que os pontos A e B pertençam a um dos semiplanos determinados pela reta r e cuja diferença das distâncias dos pontos A e B à reta r sejam iguais a $2m$ (veja a figura abaixo).

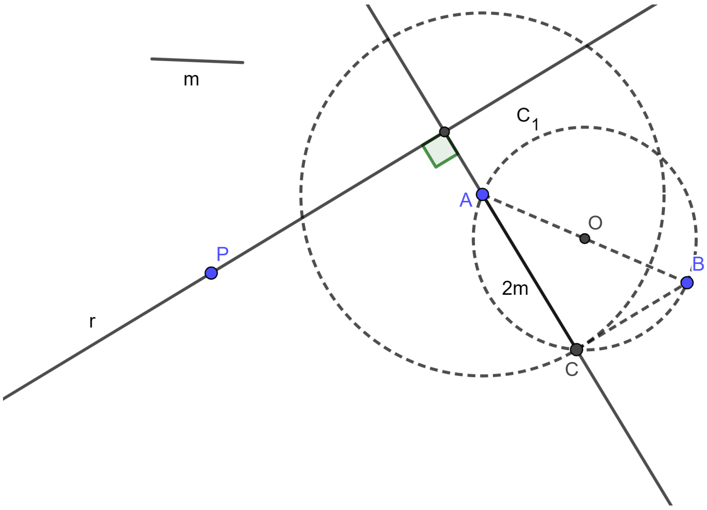


Resolução:

1. Utilizando a figura dada, determine o ponto C tal que o triângulo $\triangle ABC$ formado, seja retângulo, com o segmento $\overline{AB}$ sendo sua hipotenusa, e $AC = 2m$ (vide exercício anterior).



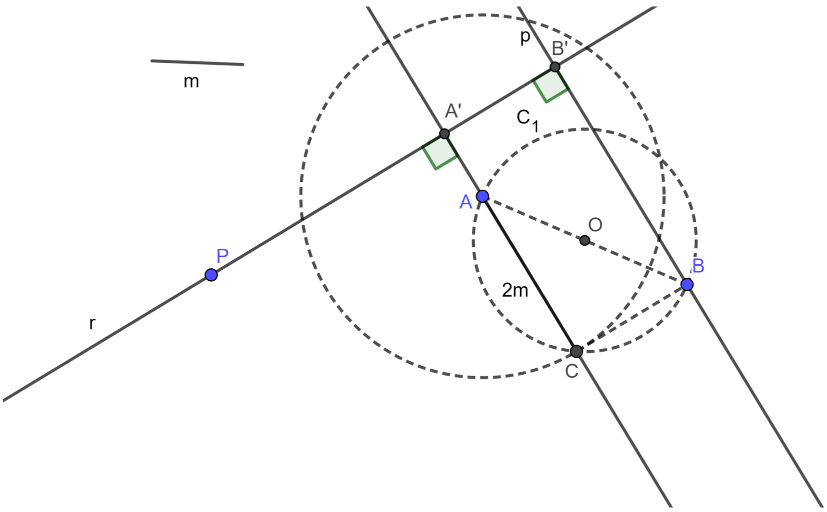
2. Determine a reta perpendicular ao segmento $\overline{AC}$ pelo ponto P. Essa é a reta r desejada.



Justificativa:

Note que os pontos A e B pertencem ao mesmo semiplano determinado pela reta r, por construção.

Observe a figura abaixo:



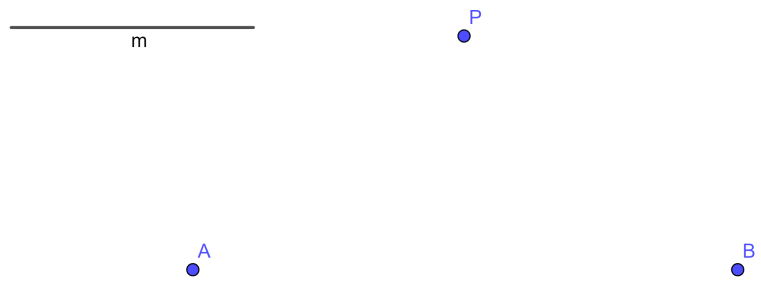
Determinando uma reta p paralela à reta $\overleftrightarrow{AC}$, note que a reta p intersectará a reta r perpendicularmente no ponto que chamaremos de B'. Denote também, o ponto A', ponto de intersecção entre as retas r e $\overleftrightarrow{AC}$.

Assim:

$BB' - A'A = A'A + AC - A'A = AC = 2m$, como queríamos.

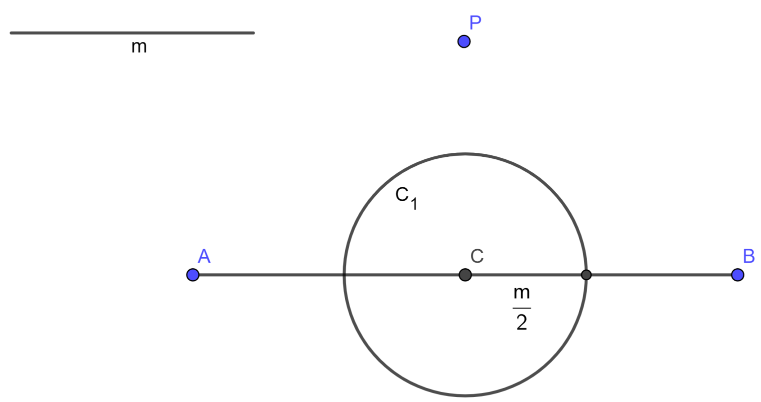
Exercício 4.0.47. Dados em posição os pontos A, B e P, e dado também, um segmento de comprimento m (veja a figura abaixo), traçar pelo ponto P, uma reta r, de maneira que os pontos

A e B fiquem em semiplanos distintos, determinados pela reta r, e que a diferença das distâncias do ponto A até a reta r e do ponto B até a reta r seja m.

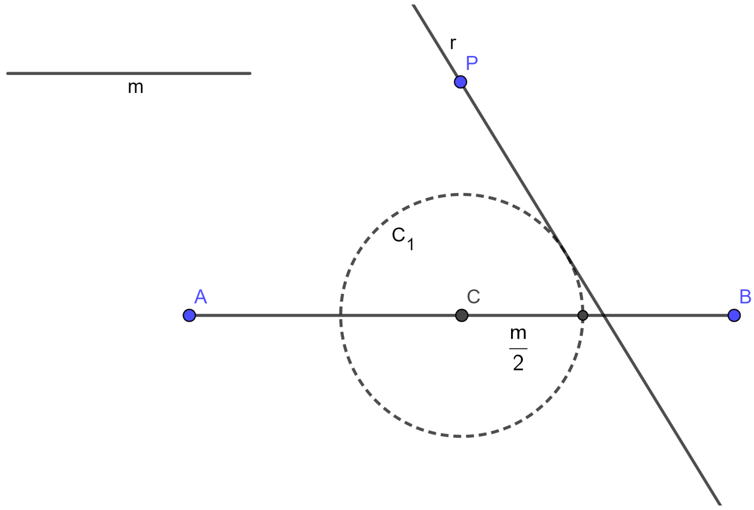


Resolução:

1. Determine o ponto C, ponto médio do segmento $\overline{AB}$ e em seguida construa a circunferência C_1 com centro no ponto C e raio um segmento de comprimento igual a $\dfrac{m}{2}$.



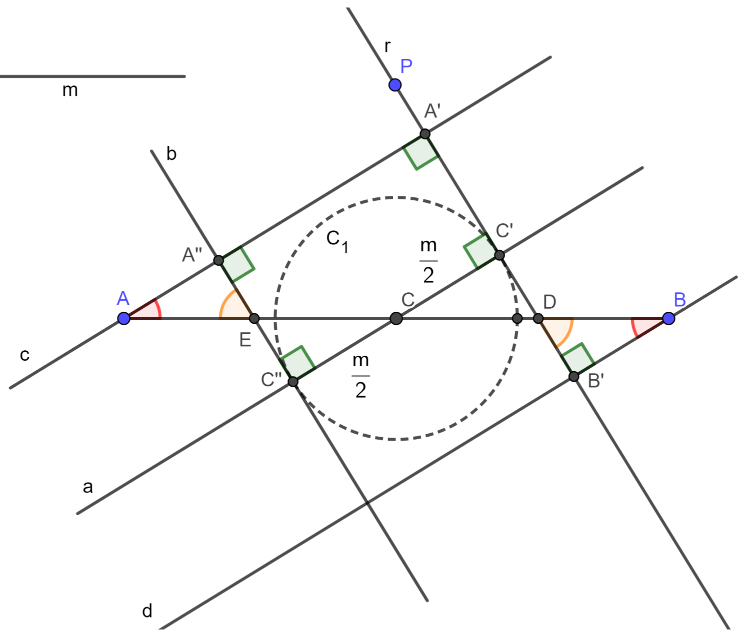
2. Trace a reta tangente à circunferência C_1 pelo ponto P, esta é a reta r desejada.



Justificativa:

Note que os pontos A e B pertencem a semiplanos distintos determinados pela reta r, por construção.

Observe a figura abaixo:



Em que foi determinado:

- o ponto de intersecção entre a reta r e a circunferência C_1, o ponto C';
- a reta a, perpendicular à reta r pelo ponto C';
- o ponto C'', ponto de intersecção entre a reta a e a cirunferência C_1;
- a reta b, paralela à reta r pelo ponto C'';

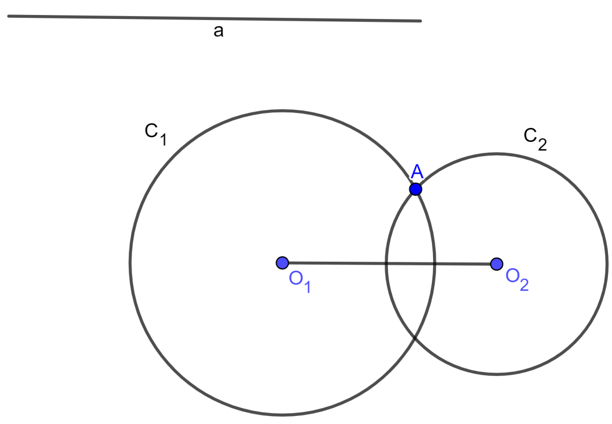
- a reta c, perpendicular à reta b pelo ponto A'';
- os pontos A' e A'' de intersecção com as retas r e b, com a reta c, respectivamente;
- a reta d, paralela à reta c pelo ponto B;
- o ponto B' de intersecção entre as retas r e d;
- o ponto E de intersecção entre o segmento $\overline{AB}$ e a reta b;
- o ponto D de intersecção entre o segmento $\overline{AB}$ e a reta r;

Note que os triângulos $\triangle AA''E$ e $\triangle BB'D$ são semelhantes, logo os segmentos $\overline{AA''} \equiv \overline{BB'}$.

Assim:

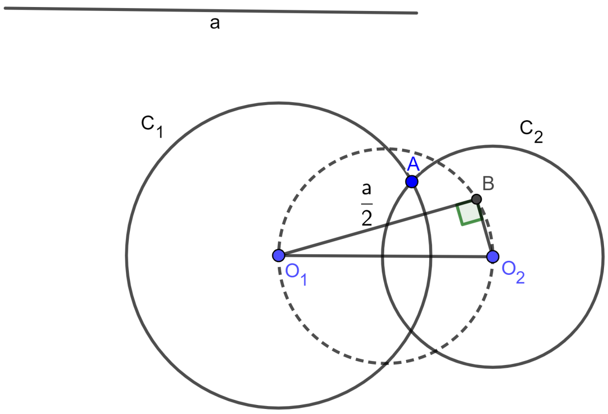
$AA' - AA'' = AA' - B'B = m$, como queríamos.

Exercício 4.0.48. São dadas as circunferências C_1 e C_2 como na figura abaixo. Traçar pelo ponto A dado, uma reta secante $\overleftrightarrow{PAQ}$ a essas circunferências, onde o ponto P pertença à circunferência C_1 e o ponto Q pertença à circunferência C_2, de forma que o segmento $\overline{PQ}$ tenha comprimento igual a a (dado).

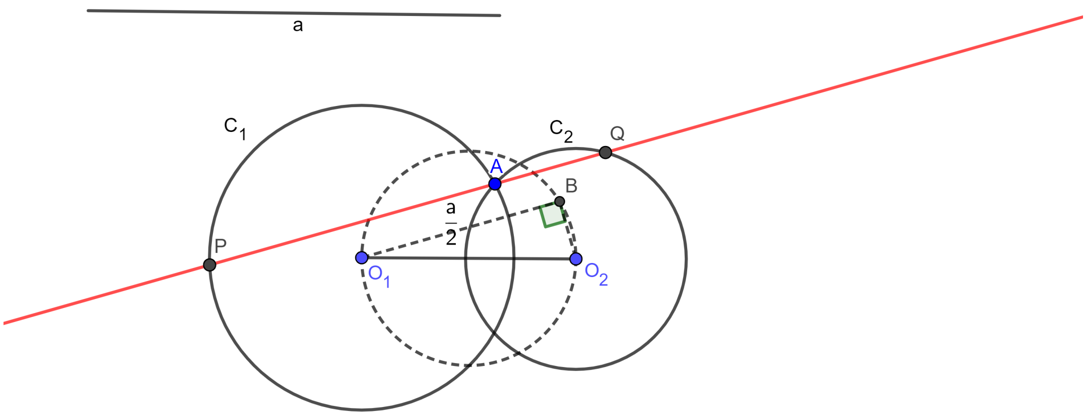


Resolução:

1. A partir da figura dada, determine o ponto B tal que o triângulo $\triangle O_1O_2B$ formado, seja retângulo, com o segmento $\overline{O_1O_2}$ sendo sua hipotenusa e $O_1B = \dfrac{a}{2}$.

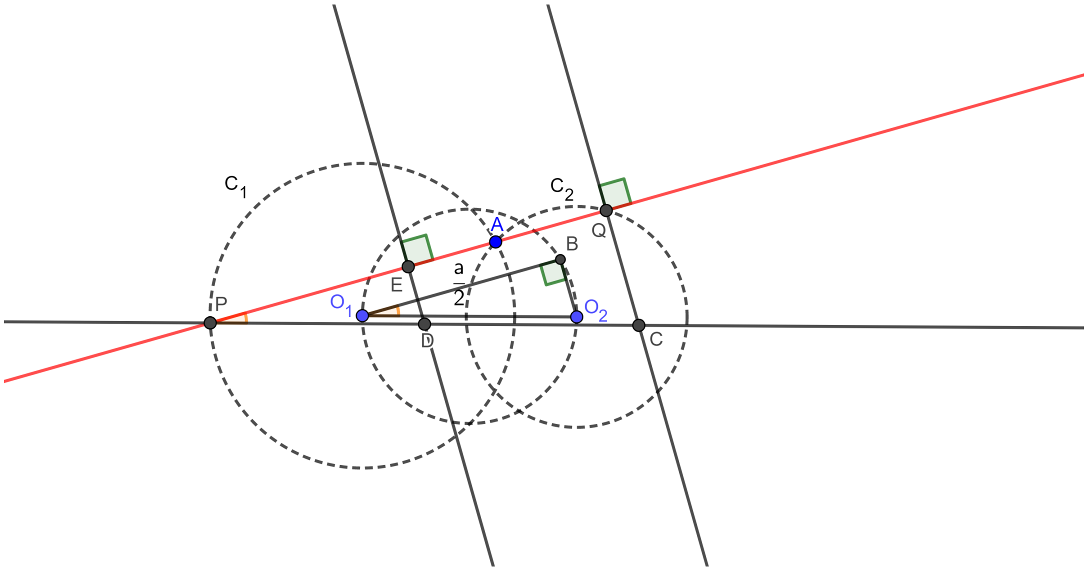


2. Trace uma reta paralela ao segmento $\overline{O_1B}$ pelo ponto A. Esta é a reta secante pelos pontos P e Q desejada, com $PQ = a$.



Justificativa:

Observe a imagem abaixo:



Note que por construção temos:

- os segmentos $\overline{ED} \| \overline{QC}$, $\overline{O_1O_2} \| \overline{PC}$, $\overline{PQ} \| \overline{O_1B}$ são paralelos.
- os ângulos $\widehat{QPC}$, $\widehat{BO_1O_2}$ e $\widehat{EPD}$ são congruentes.
- o ponto D é o ponto médio do segmento $\overline{PC}$, ou seja, $PC = 2 \cdot PD \rightarrow \dfrac{PC}{PD} = 2$.
- os triângulos $\triangle PQC$, $\triangle O_1BO_2$ e $\triangle PED$ são congruentes pelo caso AAA.

Logo,

$$\frac{PQ}{O_1B} = 2$$

Como $O_1B = \dfrac{a}{2}$, por construção, temos:

$$\frac{PQ}{\frac{a}{2}} = 2$$

$PQ = a$, como queríamos demonstrar.

CAPÍTULO

5

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O tema foi escolhido no anseio de fornecer um material de estudo, mas antes disso, foi um momento de aprendizado, de reflexão, de satisfação e evolução pessoal (do ponto de vista matemático), pois me proporcionou um aprimoramento do conhecimento de geometria plana focado em construções básicas, mas nada triviais, e de suma importância para itens relevantes da geometria e da matemática, reafirmando a importância da disseminação do conhecimento e desenvolvimento da geometria no meio educacional de níveis básico e superior.

Outro ponto importante foi o uso do software GeoGebra para a elaboração das imagens das construções abordadas neste trabalho. GeoGebra é um software de matemática gratuito e possível de usar em todos os níveis de ensino, deixando o estudo da geometria mais dinâmico e agradável. Ele pode ser usado nas versões online ou offline. O leitor interessado poderá encontrar nas referências digitais algumas construções elaboradas pela autora neste trabalho, utilizando o GeoGebra.

Após este estudo, esperamos um olhar diferenciado para a abordagem da geometria e para os diferentes manuseios da régua e compasso, poisnota-se que a régua vai muito além de um instrumento de medidas, evidenciando a beleza das construções, nos remetendo um pouquinho ao modo de como os matemáticos da antiguidade faziam.

REFERÊNCIAS

NETO, A. C. M.; CAMINHA, A. **Geometria-Coleção Profmat**. [S.l.]: SBM, 2013. Citado na página 46.

NETO, A. P. Geometria plana e construções geométricas. **Fortaleza: UAB/IFCE**, 2017. Nenhuma citação no texto.

PONTO, reta, plano e espaço. 2019. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/matematica/ponto-reta-plano-espaco.htm.> Citado na página 23.

SANTOS, F. K. C. B. Construções geométricas e equivalência de áreas. **Revista de Matemática**, v. 5, n. 2, 2018. Nenhuma citação no texto.

SBM. **PROFMAT: Uma reflexão e alguns resultados**. [S.l.], 2017. Disponível em: <https://www.profmat-sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/23/2017/07/PROFMAT-relatorio_DIGITAL.pdf>. Citado na página 19.

SILVA, A. G. d. *et al.* Construções geométricas com régua e compasso. Universidade Federal de Alagoas, 2013. Nenhuma citação no texto.

SOUZA, C. S. d.; PIMENTA, M. M. D.; ARNAUT, R. G. T. Construções geométricas. **Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ**, 2005. Nenhuma citação no texto.

WAGNER, E. **Construções Geométricas**. Rio de Janeiro: SBM, 2007. Citado na página 19.

____. Uma introdução às construções geométricas. **Rio de Janeiro**, 2009. Citado na página 24.

APÊNDICE

A

TEOREMA DE TALES

A.1 História

Tales nasceu na cidade grega Mileto, aproximadamente no ano 625 a.C. (atual região da Turquia) e faleceu por volta de 546 a.C. também em Mileto.

Tales era um comerciante de sucesso, o que lhe permitiu fazer diversas viagens e conhecer várias culturas diferentes. Estima-se que ele tenha passado por terras egípcias e por diversos povoados e cidades do Oriente Médio, o que lhe proporcionou o contato com a matemática e a engenharia egípcia, bem como com a astronomia babilônica.

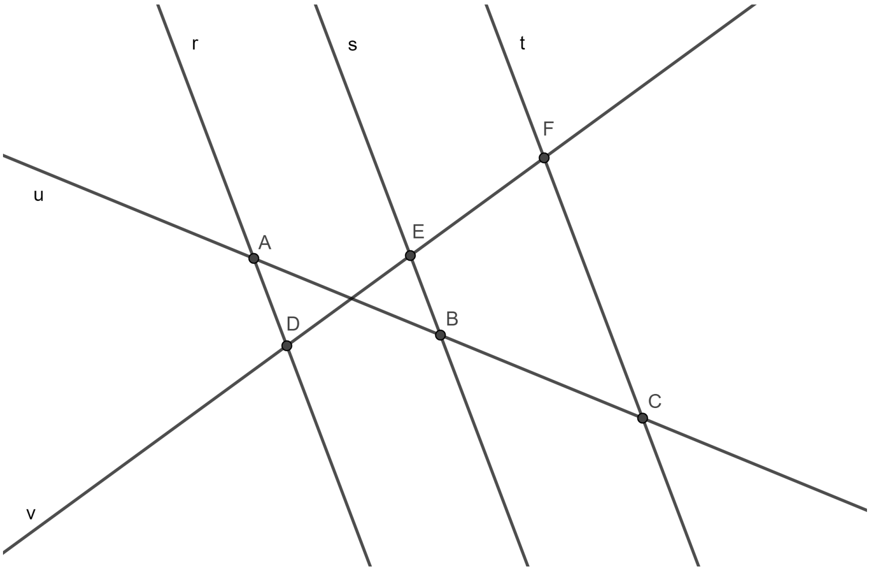
Tales, ao trazer a Matemática para a Grécia, iniciou um modo de cultivo sistemático do conhecimento matemático, o que lhe proporcionou uma maior precisão para os estudos astronômicos e lhe permitiu formular o Teorema de Tales, resultado que na época permitia descobrir a altura de uma pirâmide a partir do comprimento de retas paralelas e das retas transversais da construção.

A história não tem registro de nenhum livro escrito por Tales, mas se falarmos no conjunto de pensamentos e formulações feitas por ele, temos o Teorema de Tales, a explicação sobre as cheias do Rio Nilo, a descoberta do triângulo isósceles, a previsão do eclipse solar e a filosofia.

A.2 Teorema de Tales

Teorema 3. Sejam r, s e t três retas paralelas, sejam u e v duas retas transversais que determinam sobre as retas r, s e t os pontos A, B, C e D, E, F, respectivamente (observe a figura abaixo).

Então: $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{DE}{EF}$



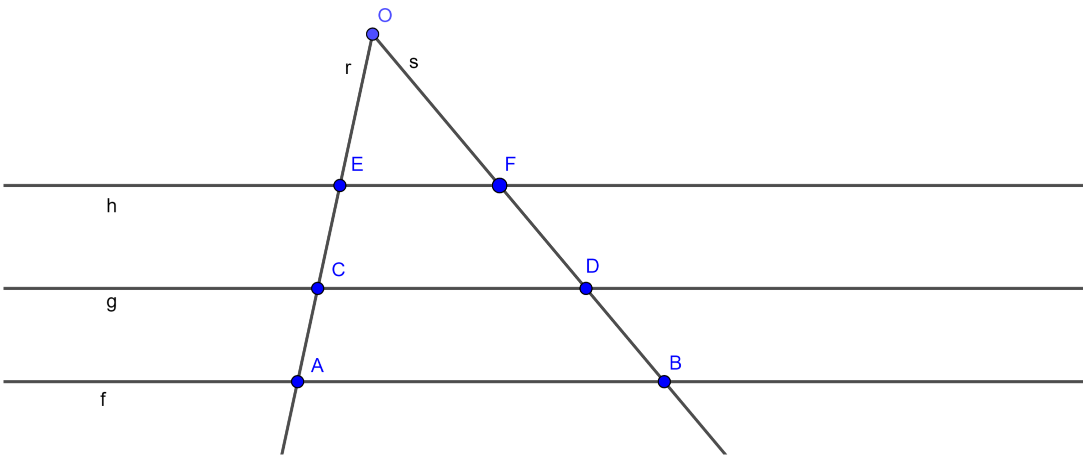
A seguir temos alguns exemplos de aplicações do Teorema de Tales.

Exemplo A.2.1. Com uso de régua e compasso divida o segmento $\overline{AB}$, dado a seguir, em cinco partes iguais.

No Capítulo 3 (vide o item 2) foi feita a divisão em três partes iguais, a resolução é análoga. Fica a cargo do leitor resolver este exemplo.

Uma aplicação direta é encontrada na semelhança de triângulo.

Exemplo A.2.2. Observe a figura abaixo em que as retas h, g e f são paralelas e as retas r e s são transversais que intersectam as retas h, g e f nos pontos E, C, A, F, D e B, respectivamente.



Pelo Teorema de Tales temos:

- $\dfrac{OE}{OC} = \dfrac{OF}{OD}$

- $\dfrac{OE}{OA} = \dfrac{OF}{OB}$

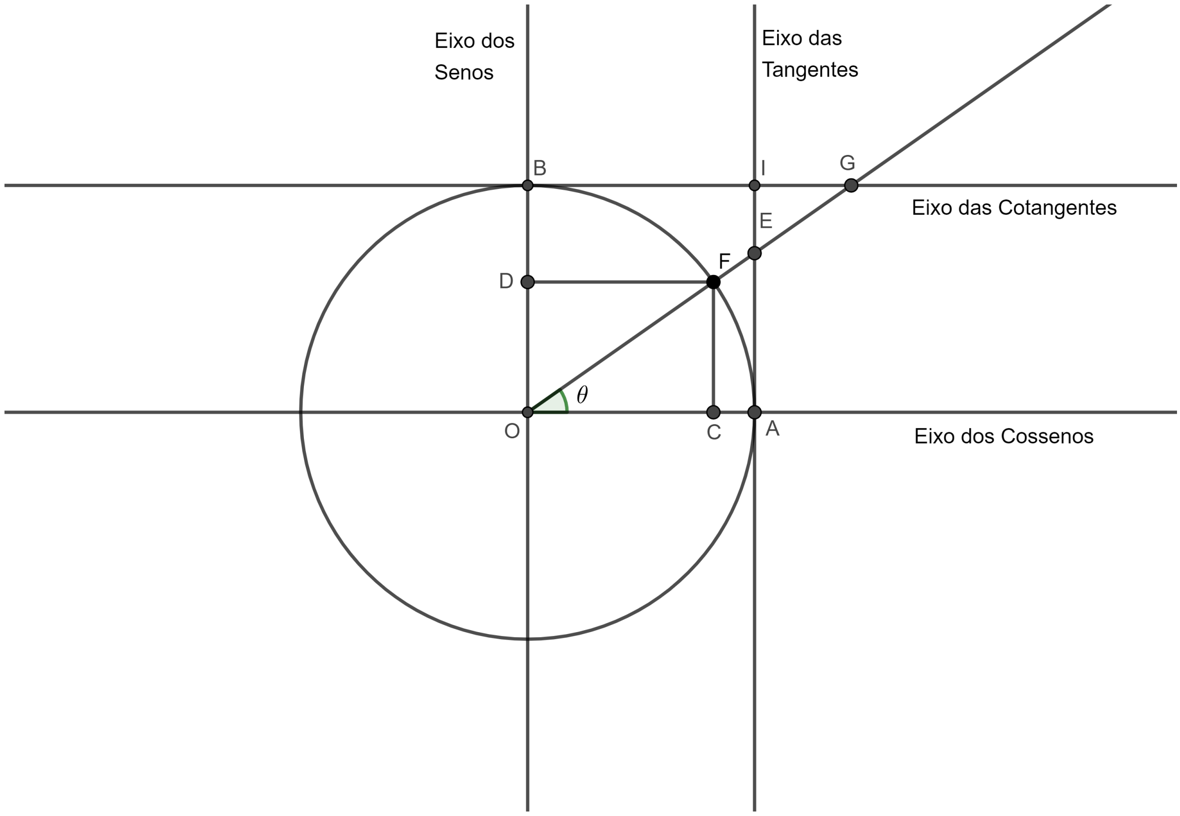
- $\dfrac{OC}{OE} = \dfrac{OD}{OF}$

Logo os triângulos $\triangle OEF$, $\triangle OCD$ e $\triangle OAB$ são congruentes pelo caso *LAL*.

Note que há várias outras razões que podemos determinar considerando o teorema citado.

Exemplo A.2.3. Uma aplicação muito importante do teorema de Tales aparece na trigonometria, a partir do uso da semelhança de triângulos (vide exemplo anterior A.2), como justificativa das definições de seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante de um ângulo dado.

Na figura abaixo, contemplamos a circunferência unitária, que apresenta algumas das definições citadas:



Agora vamos obter os elementos citados na imagem acima. Para isso vamos usar o Teorema de Tales e semelhança de triângulos.

Seja o ângulo $\widehat{AOF}$ de medida igual a θ e considere que:

- $OA = OB = OF = 1$
- $OD = CF = sen(\theta)$
- $OC = DF = cos(\theta)$

Note que os triângulos $\triangle OFC$ e $\triangle OEA$ são semelhantes.

Então temos:

$$\frac{AE}{OA} = \frac{CF}{OC}$$

$$\frac{AE}{1} = \frac{sen(\theta)}{cos(\theta)}$$

logo, $AE = tg(\theta)$.

Observe que os triângulos $\triangle OBI$ e $\triangle ODF$ também são semelhantes.

Então temos:

$\frac{BI}{OB} = \frac{DF}{OD}$

$\frac{BI}{1} = \frac{cos(\theta)}{sen(\theta)}$

logo, $BI = cotg(\theta)$.

Observe que os triângulos $\triangle OEA$ e $\triangle OFC$ também são semelhantes.

Então temos que:

$\frac{OE}{OA} = \frac{OF}{OC}$

$\frac{OE}{1} = \frac{1}{cos(\theta)}$

logo, $OE = sec(\theta)$.

Observe ainda, que os triângulos $\triangle OBG$ e $\triangle ODF$ também são semelhantes.

Então temos que:

$\frac{OG}{OB} = \frac{OF}{OD}$

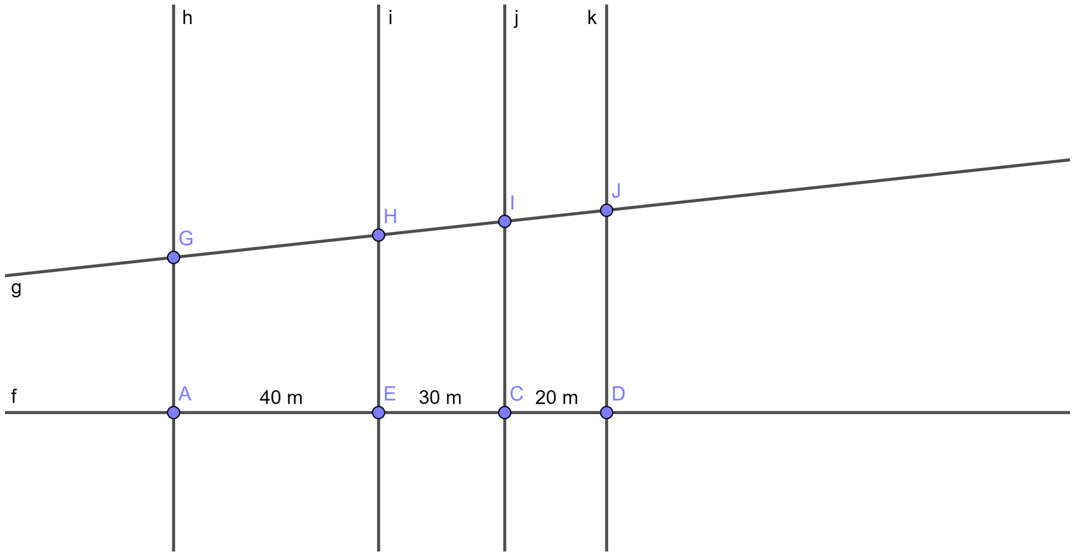
$\frac{OG}{1} = \frac{1}{sen(\theta)}$

logo, $OG = cossec(\theta)$.

Perceba que o Teorema de Tales tem um papel fundamental na semelhança de triângulos e consequentemente na trigonometria.

Exemplo A.2.4. Três terrenos têm frente para a rua A e para a rua B. As divisas laterais são perpendiculares à rua A. Qual a medida de frente para a rua B de cada lote, sabendo que a frente total para essa rua tem 180 m?

1. Observe a figura a seguir que ilustra os dados do enunciado.



As retas f e g representam, repectivamente, as ruas A e B, e as retas h, i, j e k representam as divisas laterais, logo elas são perpendiculares à reta f.

2. Como a reta g representa a rua B, o segmento GJ mede 180 metros.

   Utlizando o Teorema de Tales podemos determinar a medida da frente do primeiro terreno.
   $$\frac{AE}{GH} = \frac{AD}{GJ}$$
   Substituindo os valores, de acordo com enunciado, temos:
   $$\frac{40}{GH} = \frac{90}{180}$$
   Portanto $GH = 80$ metros

   Analogamente podemos determinar que o segundo e o terceiro terreno, respectivamente, medem 60 e 40 metros de frente para a rua B.

ANEXO A

REFERÊNCIAS DIGITAIS

A internet nos fornece um variado leque de opções para pesquisa e informação, neste item sugerimos algumas páginas interessantes para complementar seus estudos ou apenas sanar curiosidades.

<https://ogeogebra.com.br/site/> Página em português com vídeos, textos e cursos relacionados a utilização do aplicativo GeoGebra;

<https://drive.google.com/drive/folders/0B-MqHRSopldKNXZBV1FLbHFEVG8> Página do Google Drive com material geral compartilhado relacionado ao PROFMAT;

<https://www.youtube.com/c/ProgramadeInicia%C3%A7%C3%A3oCientificadaOBMEP> Canal do PIC (Programa de Iniciação Científica da OBMEP) com vídeos ricos em demonstrações e aplicações em geral.

<https://portaldaobmep.impa.br/> Página em português com vários materiais listados por tópicos. Consta também um canal no Youtube relacionado a esta página:

<https://www.youtube.com/playlist?list=PL5099CD7A78A147F4> Playlist do Youtube que consta de vários vídeos interessantes e que podem ser sugeridos a quem está iniciando na geometria plana;

<http://www.matematicando.net.br/wp-content/uploads/2017/10/15481716022012Geometria_Eucliad

Página com teoria e atividades sugeridas relacionadas a construção de retas perpendiculares, paralelas, mediatriz de segmentos, bissetriz de um ângulo dado e arco capaz de um ângulo;

<http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/midias_digitais_I/modulo_II/conteudo22.html>

Um resumo sobre triângulos;

<https://www.feis.unesp.br/Home/Extensao/teia_saber/teia2004/matematica/Apresentacoes/grupo_A.pdf>

Produção relacionada a semelhança e congruência de imagens;

<https://drive.google.com/drive/folders/1mVUAKcpHstbxgRNlsaXEfR7F0hk1fLt3?usp=sharing>

Algumas construções realizadas por esta autora, utilizando o GeoGebra, neste trabalho.

ANEXO

B

ÍNDICE REMISSIVO DOS EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Neste anexo, encontramos os exercícios resolvidos no capítulo 4, agrupados por elementos geométricos utilizados em suas resoluções.

- Emprego da construção de retas perpendiculares: 4.0.1, 4.0.3, 4.0.9, 4.0.13, 4.0.14, 4.0.21, 4.0.30, 4.0.33, 4.0.43, 4.0.45 e 4.0.46.
- Emprego da construção de mediatrizes: 4.0.8, 4.0.23, 4.0.24, 4.0.25, 4.0.26, 4.0.27, 4.0.28, 4.0.33, 4.0.38, 4.0.40 e 4.0.41.
- Emprego da construção de bissetrizes: 4.0.1, 4.0.4, 4.0.8, 4.0.29 e 4.0.30 4.0.35.
- Emprego da construção de arco capaz: 4.0.16, 4.0.17, 4.0.18, 4.0.24, 4.0.27, 4.0.31, 4.0.32 e 4.0.38.

ICMC USP
SÃO CARLOS