Universidade Estadual de Londrina

FÁBIO LUÍS BACCARIN

CONJUNTOS INFINITOS E SUAS SURPRESAS:
UMA SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

Londrina-PR
2013

FÁBIO LUÍS BACCARIN

CONJUNTOS INFINITOS E SUAS SURPRESAS:
UMA SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

Dissertação de mestrado apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática.

Orientador: Profª. Dra. Ana Lúcia da Silva

Londrina-PR
2013

FÁBIO LUÍS BACCARIN

CONJUNTOS INFINITOS E SUAS SURPRESAS:
UMA SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

Dissertação de mestrado apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

____
Profª. Dra. Ana Lúcia da Silva
Universidade Estadual de Londrina

____
Profª. Dra. Elaine Cristina Ferruzzi
Universidade Tecnólogica Federal do Paraná

____
Profª. Dra. Regina Célia Guapo Pasquini
Universidade Estadual de Londrina

Londrina, 15 de março de 2013.

Dedico este trabalho à minha esposa, aos meus filhos e aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha orientadora, não só pela constante direção neste trabalho, mas sobretudo pela sua amizade e compreensão das minhas limitações.

Aos colegas de mestrado, pelos momentos de aprendizagem, companheirismo, amizade e conforto nas dificuladades. Em especial aos amigos, Alceu, André, Chiréia, Cláudia e Ivan.

Aos meus pais, pelo apoio incondicional e a quem devo tudo.

À minha esposa Ionara, pelo amparo, pela compreensão nos muitos momentos de ausência e pelo apoio durante todo o trabalho, sem o qual eu não teria conseguido vencer mais esta etapa.

A Deus, pela minha vida e de minha família.

"Deus criou o infinito pra vida ser sempre mais!"

Ir. Cecília Vaz de Castilho

BACCARIN, Fábio Luís. **Conjuntos infinitos e suas surpresas:** Uma sequência de atividades. 2013. 89 páginas. Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional– Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo apresentar uma sequência de atividades para o ensino de matemática, direcionadas a professores e estudantes do Ensino Médio. Baseadas na Teoria de Georg Cantor sobre conjuntos infinitos, o resultado deste trabalho são sete atividades estruturadas para serem aplicadas em sala de aula. A fundamentação teórica para o desenvolvimento de cada proposta está presente, de forma sequencial, na construção dos temas. Inicia-se com uma retomada dos conteúdos de conjuntos numéricos e de funções para, em seguida, expor o significado de contagem para conjuntos finitos e infinitos. Um breve passeio a história do infinito faz a sintonia do ontem com o hoje. E nesta história Georg Cantor surpreende o mundo mostrando a existência de infinitos de tamanhos diferentes. Uma visão geométrica sobre algumas equivalências também são exploradas e causando possivelmente inquietações agradáveis naqueles que buscam novos conhecimentos. Uma brincadeira para sala de aula esta reservada para a comprovação da escassez dos números racionais quando comparados com os números irracionais. E, finalizando, é proposto uma investigação matemática sobre a cardinalidade do conjunto de Cantor. Esta metodologia investigativa é enfatizada no desenvolvimento de cada atividade, na qual o estudante deve ser o sujeito ativo, refletir e se envolver com a questão proposta.

Palavras-chave: Números. Contagem. Conjuntos Infinitos. Bijeção. Cardinalidade.

BACCARIN, Fábio Luís. **Infinite sets and its surprises:** A sequence of activities. 2013. 89 páginas. Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional– Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

ABSTRACT

This paper aims to present a sequence of activities for teaching mathematics, aimed at teachers and high school students. Based on the theory of infinite sets of Georg Cantor, the results of this work are seven structured activities to be implemented in the classroom. The theoretical foundation for the development of each proposal is present, sequentially, in the construction of themes. It begins with a revival of the contents of numerical sets and functions to then expose the meaning of counting for finite and infinite sets. A brief tour of the history of infinity makes the tune of yesterday with today. And this story Georg Cantor surprises the world showing the existence of infinities of different sizes. A geometric view on some equivalence are also explored and possibly causing inquitações pleasing those who seek new knowledge. A joke for the classroom is reserved for attesting the lack of rational numbers when compared with the irrational numbers. And finally we propose a mathematical investigation on the cardinality of the Cantor set. This research methodology is emphasized in the development of each activity in which the student must be the active subject, reflect and engage with the question proposed.

Key words: Numbers. Score. Infinite sets. Bijection. Cardinality.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

$\mathbb{N}$ - Conjunto dos números naturais

$\mathbb{Z}$ - Conjunto dos números inteiros

$\mathbb{Q}$ - Conjunto dos números racionais

$\mathbb{R}$ - Conjunto dos números reais

$(\mathbb{R}$-$\mathbb{Q})$ - Conjunto dos números irracionais

$n(A)$ – Número de elementos do conjunto finito A.

$card(A)$ – Cardinalidade do conjunto A.

PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais.

DCE – Diretrizes Curriculares da Educação Básica.

UNICAMP – Universidade Estadual de Campinas.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O grande desafio de professores no ensino da Matemática é encantar seus alunos, cativar-lhes o interesse pelo conhecimento proposto, sem fugir das abstrações intrínsecas à formação matemática. Neste sentido, proponho uma sequência de atividades, com aplicações para a sala de aula, construídas para despertar a curiosidade, prestigiando as surpresas encontradas na discussão de conjuntos infinitos. Contá-los ou compará-los reservam inusitadas descobertas. “Contar é falar a linguagem dos números”, afirma Kasner (1968, p. 38).

> Na Educação Básica, no contexto de Educação Matemática, é necessário que os Números e a Álgebra sejam compreendidos de forma ampla, para que se analisem e descrevam relações em vários contextos onde se situam as abordagens matemáticas, explorando os significados que possam ser produzidos a partir destes conteúdos (PARANÁ, 2008, p. 53).

Professores e estudantes do Ensino Médio da educação brasileira, em busca do aprofundamento de conhecimento, são os focos deste trabalho. Os requisitos necessários para o entendimento são os conteúdos estruturantes da matemática do Ensino Fundamental.

> Entende-se por Conteúdos Estruturantes os conhecimentos de grande amplitude, os conceitos e as práticas que identificam e organizam os campos de estudos de uma disciplina escolar, considerados fundamentais para sua compreensão (PARANÁ, 2008, p. 49).

A motivação para o tema proposto surgiu do contato com o conjunto de Cantor, suas estranhas propriedades me proporcionaram descobertas importantes e uma reflexão sobre a intuição geométrica no tratamento de conjuntos infinitos. “um conjunto de tão simples construção […] soa como um alerta: a intuição geométrica tão presente e útil como guia, pode enganar ou não revelar toda a riqueza de detalhes sobre um objeto de estudo” (ROSA, 2004, p. 51).

Percebi que, no exercício do meu magistério, algumas questões sobre conjuntos infinitos estavam sem respostas, como a do aluno citado pelo professor Bongiovanni (1993, p. 16).

> Certa vez, numa sala de aula para o terceiro colegial surgiu a pergunta: Quantos são os racionais entre 0 e 1 e quantos são os reais entre 0 e 1? Os alunos concordaram que em ambos os casos há infinitos números, mas um aluno não se conformou com esta resposta: Se todos os racionais são também reais e há mais reais do que racionais como podem ser contados pelo mesmo número? O todo não é sempre maior do que qualquer de suas partes?

Em minhas reflexões surgiram outras dúvidas como: É possível ampliar o conceito de contagem para um conjunto com infinitos elementos? É possível comparar dois conjuntos infinitos? A busca das respostas, às estas perguntas e dos conceitos matemáticos envolvidos na construção do conjunto de Cantor e suas teorias, me proporcionaram novos aprendizados e desencadearam o produto deste trabalho. Uma sequência de atividades que aborda conteúdos matemáticos presentes na Educação Básica.

No desenvolvimento do presente trabalho são propostas sete atividades, que passo a chamá-las de temas. No primeiro tema, “Organizando as ideias”, o objetivo é frisar as noções essenciais sobre conjuntos e funções; pré-requisitos para os demais e, dispensável dependendo do grau de conhecimento do leitor. Porém, é importante salientar o primeiro contato com um teorema, demonstrado de forma direta e de fácil compreensão. Valorizar o raciocínio lógico, presente nas demonstrações, acredito ser uma possibilidade de estimular o conhecimento, e será exaltado, sem excessos, ao longo deste trabalho. Ao final de cada atividade é sugerido o item “Refletindo sobre o tema” com o intuito de provocar no leitor ponderações sobre o assunto abordado.

“Vamos contar até o infinito”, segundo tema proposto, é uma provocação sobre o processo de contagem. Aprender a contar é aprender a comparar, afirma Kasner (1968). Os números são a linguagem nesta ação, segundo Lima (2006, p. 25) “números são entes abstratos, desenvolvidos pelo homem como modelos que permitem contar e medir, portanto avaliar as diferentes quantidades de uma grandeza”. As primeiras surpresas aparecem no tratamento de conjuntos infinitos. A percepção da existência de uma bijeção entre o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números pares positivos, deverá, possivelmente, despertar nos estudantes curiosidades. No intuito que estas façam com que o conhecimento seja buscado, enriquecido, decifrado, tudo aquilo que é procurado no desenvolvimento da educação. Ao final do segundo tema, propõe-se uma atividade para a sala de aula, chamada “Envolvendo os alunos”, com o propósito de envolver ativamente os participantes em forma de investigação.

> Em contextos de ensino, aprendizagem ou formação, investigar não significa necessariamente lidar com problemas na fronteira do conhecimento nem com problemas de grande dificuldade. Significa, apenas, trabalhar a partir de questões que nos interessam e que se apresentam inicialmente confusas, mas que conseguimos clarificar e estudar de modo organizado (PONTE, 2003, p. 2).

Para reforçar a diferença entre um número muito grande e o infinito, é proposta a seguinte investigação: Os grãos de areia da orla de Balneário Camboriú formarão um conjunto finito ou infinito? A finalidade é a participação intensa de todos os alunos no desenvolvimento de estratégias para contá-los.

Os enigmas do infinito provocaram o pensamento humano durante toda a história. As divergências sobre a aceitação ou não deste objeto matemático começam na Grécia antiga com os paradoxos de Zenão de Eléia (495-435 a.C.) e não pararam mais. Um breve passeio à história do infinito é o título da terceira atividade que tem como objetivo principal abordar as contribuições de alguns pensadores ao longo da história na construção da caracterização dos conjuntos infinitos.

Em “Refletindo sobre o tema”, são sugeridas análises sobre dois paradoxos: a Dicotomia e o Hotel de Hilbert. O primeiro com a suposição de que o movimento é impossível, pois o tempo e o espaço são infinitamente divisíveis. O segundo, as espantosas conclusões quando se tem um hotel com uma infinidade de quartos, pois, mesmo estando lotado, é sempre possível acomodar mais um hóspede.

Georg Cantor (1845-1918) surpreende o mundo mostrando a existência de infinitos com “tamanhos” diferentes. Como ele chegou a esta descoberta é a proposta do quarto tema. Adotando os passos de Cantor, primeiramente “contamos” os números racionais. E, em seguida, verificamos a impossibilidade de enumerar todos os números reais. Oportunidade para reforçar a técnica do método de redução ao absurdo, muito utilizada em comprovações de resultados matemáticos. Em “Envolvendo os alunos” deste tema, propõe-se a discussão da equivalência entre um intervalo real e a reta, investigando a função tangente. A proposta é que esta atividade seja feita com o auxílio de um software educacional, importante ferramenta metodológica neste momento para o processo de ensino-aprendizagem.

Em “Conjuntos Infinitos: Um tratamento geométrico” o objetivo é reforçar a propriedade fundamental dos conjuntos infinitos apresentando geometricamente alguns exemplos de curiosas bijeções. Novamente, a utilização de um software de geometria dinâmica ajudará verificar as equivalências propostas.

No sexto tema, “Sorteando aleatoriamente um número na reta real qual a probabilidade de que este número seja um racional?”, o objetivo será esclarecer a ordem na comparação do “tamanho” dos conjuntos dos números racionais e irracionais.

> Como se sabe, é muito maior a presença dos racionais nas atividades cotidianas, mesmo as escolares, onde os números irracionais surgem como casos excepcionais. Dentre eles, os transcendentes não parecem passar de três ou quatro exóticos exemplos. Assim, é natural que, a despeito das demonstrações formais de enumerabilidade ou não-enumerabilidade, estabeleça-se uma forte impressão de abundância dos racionais e de escassez de irracionais (MACHADO, 1991, p. 89).

Em “Envolvendo os alunos”, propõe-se uma brincadeira com o intuito de convencer os alunos sobre a escassez dos números racionais quando comparados aos irracionais.

No último tema, a proposta é uma investigação sobre o chamado conjunto de Cantor e sua cardinalidade. O professor terá papel de mediador nesta atividade, propondo a construção do conjunto e instigando algumas perguntas. Ao final, espera-se que diversas propriedades surpreendentes possam surgir como resultado das investigações.

ATIVIDADE 1 - ORGANIZANDO AS IDEIAS

Neste primeiro contato serão organizadas as ideias básicas sobre conjuntos e funções utilizadas ao longo das próximas atividades. O objetivo é comentar sobre a noção de conjunto, as relações de pertinência, inclusão, união, interseção e função, encontradas com maiores detalhes em Lima (2004), Halmos (1970) e Lipschutz (1972). É importante salientar que concordamos com o pensamento de Ávila (2011) a qual não recomenda um tratamento excessivamente longo para o assunto.

> […] o objetivo de todo ensino, seja de Matemática ou de qualquer outra disciplina, é transmitir ideias, estimular o pensamento independente e a criatividade. Linguagem e simbolismo são muito úteis e indispensáveis enquanto ajudam na transmissão e agilização das ideias. Infelizmente, o que muito acontece no ensino é que a linguagem de conjuntos e o excesso de simbolismo e terminologia, além de não ajudarem, só atrapalham (ÁVILA, 2011, p. 81).

Lima (2006) afirma que é necessário familiarizarmos com os rudimentos da linguagem e da notação de conjuntos. A precisão dos conceitos é uma ajuda indispensável para a clareza de ideias. Conjuntos são ferramentas auxiliares e devem ser introduzidos quando necessários aos objetivos do estudo que se pretenda fazer. É neste sentido, evitando excessos, porém com o cuidado na formalidade, que será abordado este tema.

Um conjunto é formado por seus elementos. A relação básica entre um elemento e um conjunto é a relação de pertinência. Os conjuntos serão designados, em geral, por letras maiúsculas e os seus elementos por letras minúsculas.

A notação "$x \in A$" significa que x é um elemento de A e se lê "$x\ pertence\ a\ A$". A negação é "$x \notin A$", que se lê "$x\ não\ pertence\ a\ A$". Um conjunto A fica definido (ou determinado, ou caracterizado) pela simples listagem de seus elementos entre chaves ou pela especificação de uma regra que permita decidir se um objeto arbitrário x pertence ou não a A.

A maioria dos conjuntos encontrados em matemática é definida por uma propriedade P comum e exclusiva dos seus elementos.

Escreve-se A = $\{x: x\ goza\ da\ propriedade\ P\}$.

Lê-se: A é o conjunto dos elementos x tais que x goza da propriedade P.

Exemplo (1.1): Seja A o conjunto dos estados da Região Sul do Brasil. O conjunto A está bem definido: um objeto x pertence a A quando é um estado brasileiro e, além disso, for da região sul. Se x não for um estado brasileiro da região sul, então x não pertence a A. Usam-se as seguintes notações:

A = $\{Rio\ Grande\ do\ Sul,\ Santa\ Catarina,\ Paraná\}$;
A = $\{x: x$ é $um\ estado\ da\ Região\ Sul\ do\ Brasil\}$

A representação de um conjunto pode ser feita através do diagrama de Venn, conforme Figura 1. Em homenagem ao seu criador, o matemático inglês John Venn (1834-1923).

Figura 1: Diagrama de Venn

Exemplo (1.2): Conjunto I dos números ímpares positivos.

$I = \{1, 3, 5, 7, ...\}$, ou $I = \{2n + 1: n = 0, 1, 2, 3, ...\}$, ou

$I = \{2n - 1: n = 1, 2, 3, ...\}$.

Exemplo (1.3): Conjunto P dos números pares.

$P = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, ...\}$, ou $P = \{2n: n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\}$

1.1 CONJUNTOS

> A Matemática se ocupa primordialmente de números e do espaço. Portanto, os conjuntos mais frequentemente encontrados na Matemática são os conjuntos numéricos, as figuras geométricas (que são conjuntos de pontos) e os conjuntos que se derivam destes, como os conjuntos de funções, de matrizes etc (LIMA, 2006, p. 1).

Usualmente os conjuntos numéricos têm sua identificação própria, como segue nos próximos exemplos.

Exemplo (1.4): O conjunto dos ***números naturais*** 1, 2, 3, ... será representado pelo símbolo $\mathbb{N}$. Assim,

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Exemplo (1.5): O conjunto dos ***números inteiros*** será indicado pelo símbolo $\mathbb{Z}$, do alemão *Zahl*, que significa número.

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Exemplo (1.6): Todo número que pode ser escrito como a razão p/q, onde *p* e *q* pertencem $\mathbb{Z}$, e $q \neq 0$ será chamado de número racional. E o conjunto dos ***números racionais*** será indicado pelo símbolo $\mathbb{Q}$.

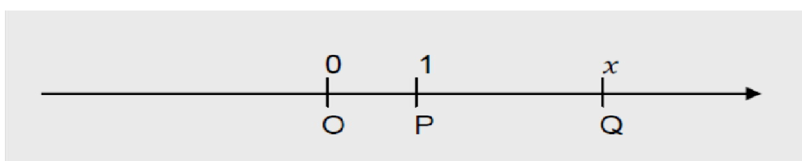
$$\mathbb{Q} = \{p/q : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$$

Lê-se: "$\mathbb{Q}$ é o conjunto das frações p/q tais que *p* e *q* pertencem a $\mathbb{Z}$ e *q* diferente de zero". É importante frisar a leitura correta do conjunto quando este está caracterizado por sua propriedade por facilitar a identificação dos elementos a ele pertencente.

Efetuando a divisão de p por q obtemos as representações decimais das frações p/q que são de dois tipos: decimais finitas e decimais periódicas. Uma ***expressão decimal***, segundo Lima (2006) é um símbolo da forma $\alpha = a_0, a_1a_2 \dots a_n \dots$, onde a_0 é um número inteiro e $a_1a_2 \dots a_n \dots$ são dígitos, isto é, números inteiros tais que $0 \leq a_n \leq 9$. Se a partir de certo ponto todos os dígitos a_n se tornam iguais a zero tem-se um decimal finito, ou seja, uma fração decimal. Os decimais periódicos têm na expressão decimal os dígitos se repetindo indefinidamente na mesma ordem a partir do dígito a_p, onde $p \in \mathbb{N}$.

Exemplo (1.7): O conjunto $\mathbb{R}$, dos ***números reais***, através de uma identificação geométrica, são os pontos de uma reta, chamada reta real. Cada elemento deste conjunto é associado a um ponto da reta de forma única. Para isso, toma-se um ponto qualquer de uma reta e a ele associa-se o número zero; esse ponto é chamado origem O. Adota-se o sentido positivo para os pontos a direita da origem. E neste sentido escolhe-se um ponto P distinto da origem a qual corresponderá ao número 1. A distância entre estes dois pontos, O e P, é a unidade de comprimento (Figura 2). O número x é chamado de coordenada do ponto Q e é a medida do segmento OQ, orientada pelo sentido à esquerda ou direita da origem. A cada ponto desta reta está associado um único número x e o conjunto $\mathbb{R}$, dos números reais, é a coleção de todos os números associados aos pontos da reta.

Figura 2: Reta Real



Neste trabalho, quando se falar em número, sem qualquer distinção, estamos nos referindo a um número real. Note que todo número racional é real, mas nem todo real é racional.

Dados dois números a e b, com $a \leq b$, chama-se ***intervalo*** os subconjuntos de $\mathbb{R}$ abaixo:

i. Intervalo aberto: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}: a < x < b\}$
ii. Intervalo fechado: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x \leq b\}$
iii. Intervalo fechado à esquerda: $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x < b\}$
iv. Intervalo fechado à direita: $(a, b] = \{x \in \mathbb{R}: a < x \leq b\}$
v. Semirreta esquerda, fechada, de origem em b: $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}: x \leq b\}$
vi. Semirreta esquerda, aberta, de origem em b: $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R}: x < b\}$

vii. Semirreta direita, fechada, de origem em a: $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}: x \geq a\}$
viii. Semirreta direita, aberta, de origem em a: $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}: x > a\}$
ix. Eixo real: $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

O intervalo $[a, a]$ consiste em um único ponto a e chama-se ***intervalo degenerado***.

Quando todo elemento de A é também elemento de B, dizemos que A é ***subconjunto*** de B, ou que "A está contido em B", e a notação é $A \subset B$. Se existir algum elemento de A não pertencente a B, então "A não está contido em B", $A \not\subset B$. Quando ocorrer simultaneamente $A \subset B$ e $B \subset A$, significa a ***igualdade*** dos conjuntos e se escreve $A = B$. Diz-se que A é ***subconjunto próprio*** de B, denotado por $A \subsetneq B$, se $A \subset B$, porém $A \neq B$, isto é, existe algum elemento de B que não está em A.

Exemplo (1.8): O conjunto P dos números pares positivos é um subconjunto próprio do conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, pois todo número par positivo é um número natural. Assim, $P \subset \mathbb{N}$.

Note que se A é subconjunto de B e B subconjunto de C, então A é subconjunto de C. Esta afirmação está escrita na forma de um teorema. Reescrito a seguir em (1.9).

> Um teorema é uma sentença matemática válida, cuja validade está garantida por uma demonstração matemática. [...] Quando se estuda Matemática, percebe-se que ela é repleta de teoremas (MORAIS FILHO, 2012, p.113-114).

A sentença matemática escrita anteriormente está na forma condicional *Se P, então Q*, onde a sentença *P* chama-se *hipótese* do teorema e a sentença *Q* chama-se *tese* do teorema. Muito utilizada também a forma implicativa *P⇒Q*. Uma técnica de demonstração para esse tipo de teorema, chamada demonstração direta, consiste em deduzir a tese utilizando implicações verdadeiras a partir da hipótese[1]. Ao longo deste estudo alguns teoremas e suas demonstrações são apresentados e de forma oportuna devem ser também explorados em sala de aula.

[1] Para maiores detalhes sobre técnicas de demonstrações, ver Morais Filho (2012).

Teorema (1.9): Se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$.

Demonstração:

Hipóteses: A é subconjunto de B e B é subconjunto de C.

Tese: A é subconjunto de C.

Seja x um elemento de A. Como A é subconjunto de B, x também pertence a B. Mas por hipótese, $B \subset C$. Assim, qualquer elemento de B, que inclui x, é um elemento de C. Mostramos que $x \in A$ implica em $x \in C$. Consequentemente $A \subset C$.

O conjunto que não possui elemento chama-se ***conjunto vazio*** e denotado pelo símbolo $\emptyset$. Isto ocorre quando nenhum elemento possui a propriedade que caracteriza o conjunto. Por outro lado, refere-se a ***conjunto universo*** de um estudo aquele ao qual pertencem todos os elementos desse estudo.

Exemplo (1.10): O conjunto $A = \{x \in \mathbb{N}: 3 < x < 4\}$ é um conjunto vazio. Pois, qualquer que seja $x \in \mathbb{N}$, tem-se $x \notin A$. Mas cuidado, note que $B = \{x \in \mathbb{R}: 3 < x < 4\}$ não é um conjunto vazio, pois o conjunto universo neste caso é o conjunto dos números reais. É importante estar atento à propriedade que caracteriza os elementos em questão.

Dado um conjunto A, indica-se com $P(A)$ o conjunto cujos elementos são subconjuntos de A e chamaremos de ***conjunto das partes*** de A.

$$P(A) = \{X: X \subset A\}$$

Exemplo (1.11): Seja $A = \{1,2,3\}$.

Então, $P(A) = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, A\}$

Note que $\emptyset \in P(A)$ e $A \in P(A)$. Cuidado! O conjunto vazio e o próprio conjunto A são elementos do conjunto $P(A)$.

Dados dois conjuntos A e B, define-se a ***união,*** $A \cup B$, como o conjunto de todos os elementos que estão em pelo menos um dos conjuntos A e B. A ***interseção*** $A \cap B$ é definida como o conjunto de todos os elementos que estão em A e em B simultaneamente. A ***diferença*** entre os conjuntos A e B é o conjunto $A - B$, formado pelos elementos de A que não pertencem a B. Quando se tem A subconjunto de U, conjunto universo, a diferença $U - A$ chama-se ***complementar*** de A em relação a U. Representam-se estas operações simbolicamente como:

$$A \cup B = \{x: x \in A \; ou \; x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x: x \in A \; e \; x \in B\}$$

$$A - B = \{x \in A: \; x \notin B\}$$

Se $A \subset U$, então $A^c = U - A = \{x \in U: x \notin A\}$

Exemplo (1.12): Sejam os conjuntos $A = \{2n: n \in \mathbb{N}\}$ e $B = \{2n - 1: n \in \mathbb{N}\}$ então $A \cup B = \mathbb{N}$ e $A \cap B = \emptyset$. Neste caso, A e B são chamados conjuntos ***disjuntos***, pois a interseção entre eles é vazia.

As propriedades envolvendo operações com conjuntos foram omitidas no desenvolvimento deste trabalho por não serem o foco desta atividade, porém, podem ser consultadas nas bibliografias citadas inicialmente.

Um ***par ordenado*** consiste de dois elementos sendo a ordem a qual aparecem fator de diferenciação. Um par ordenado dos quais um, digamos *a*, é designado como primeiro elemento e o outro, *b*, como segundo elemento é representado por (a, b). O ***produto cartesiano*** dos conjuntos A e B é o conjunto $A \times B$ cujos elementos são todos os pares ordenados cuja primeira coordenada pertence a A e a segunda a B. Portanto:

$$A \times B = \{(a, b): a \in A \; e \; b \in B\}.$$

Quando $A = B$, tem-se o produto cartesiano $A^2 = A \times A$.

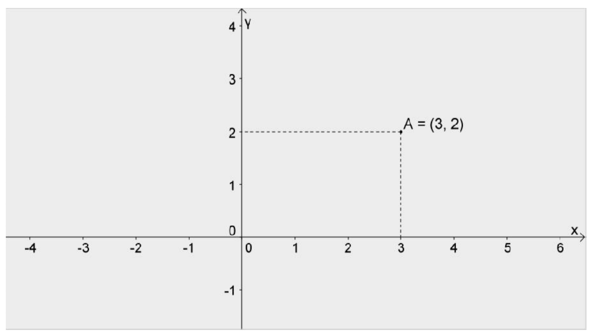
Exemplo (1.13): Seja $A = \{1,2,3\}$. Então,

$$A \times A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$$

A introdução de coordenadas cartesianas no plano faz com que cada ponto seja representado por um par ordenado (x, y), onde x é a abscissa e y é a ordenada. Isto significa o plano como produto cartesiano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y): x, y \in \mathbb{R}\}$.

Exemplo (1.14): O ponto $A = (3,2) \in \mathbb{R}^2$, pois $3 \in \mathbb{R}$ e $2 \in \mathbb{R}$. Conforme Figura 3.

Figura 3: Coordenadas do ponto $\boldsymbol{A}$



1.2 FUNÇÃO

Uma relação entre dois conjuntos A e B é chamada de ***função***, denotada por $f: A \rightarrow$ B, quando três fatores são estabelecidos: um conjunto A, chamando o domínio da função; um conjunto B, chamado o contradomínio da função; e uma regra que permite associar, de modo bem determinado, a cada elemento $x \in A$, um único elemento $f(x) \in B$, chamado o valor que a função assume em x. Usa-se a notação $x \longmapsto f(x)$ para indicar que f faz corresponder a x o valor $f(x)$.

O ***gráfico*** de uma função $f: A \rightarrow B$ é o subconjunto $G_r(f)$ do produto cartesiano $A \times B$ formado por todos os pares ordenados (x, y), onde x é um ponto qualquer de A e $y = f(x)$. Assim,

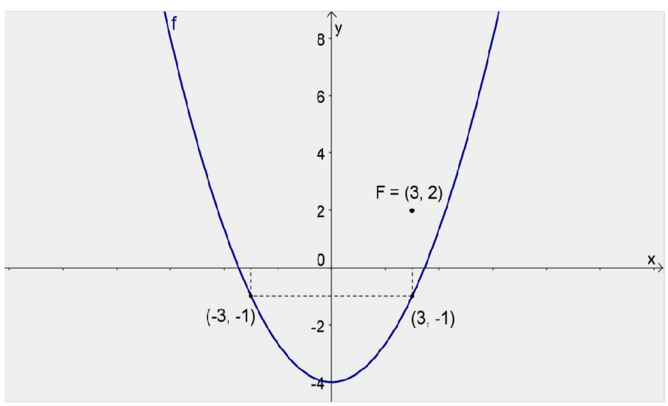
$$G_r(f) = \{(x, f(x)) \in A \times B: x \in A \text{ e } f(x) \in B\}$$

Diz-se que uma função $f: A \to B$ é ***injetora,*** quando elementos diferentes em A são transformados por f em elementos diferentes em B, isto é, quando $x_1 \neq x_2$ em A implica em $f(x_1) \neq f(x_2)$ em B. Equivalentemente, na forma contrapositiva[2], dados quaisquer x_1, x_2 em A, $f(x_1) = f(x_2)$ implica em $x_1 = x_2$.

Diz-se que uma função $f: A \to B$ é ***sobrejetora*** quando para cada elemento $y \in B$, pode-se encontrar pelo menos um elemento $x \in A$ tal que $y = f(x)$.

Exemplo (1.15): Considerando os conjuntos $A = B = \mathbb{R}$ e a função $f: A \to B$ definida por $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 4$. O gráfico de f está representado na Figura 4 pelos pontos que definiram a curva azul. Observe também que o ponto $F = (3,2)$ não pertence a $G_r(f)$ pois $f(3) \neq 2$.

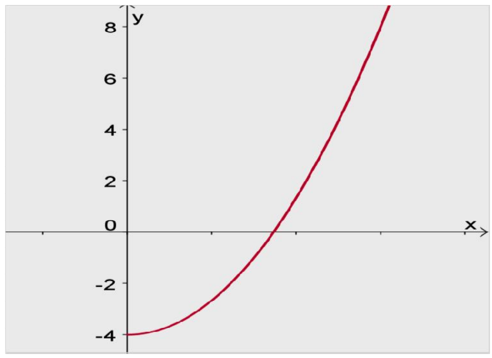
Figura 4: O gráfico da função ***f***



Note que f não é uma função injetora, pois $-3 \neq 3 \Rightarrow f(-3) = f(3) = -1$. E f também não é sobrejetora, pois $-5 \in B$ e não existe $x \in A$ tal $f(x) = -5$. Porém, restringindo o domínio e o contradomínio desta função para, por exemplo, $A = [0, +\infty)$ e $B = [-4, +\infty)$ tem-se uma função injetora e sobrejetora, conforme Figura 5.

[2] Uma sentença condicional *Se P, então Q* é equivalente à sentença condicional *Se não Q, então não P*, chamada contrapositiva.

Figura 5: O gráfico de uma função injetora e sobrejetora



Exemplo (1.16): Considere os conjuntos A= $\{1, 2, 3, 4\}$ e B= $\{1, 4, 9, 16, 25\}$. Note que existe uma função $f: A \rightarrow B$ definida por $f(x) = x^2$. O conjunto $f(A) = \{1,4,9,16\} \subset B$ é chamado o ***conjunto imagem*** da função *f*. Note também que a função é injetora, porém, não é sobrejetora pois, existe $25 \in B$ e não se tem $x \in A$ tal que $f(x) = 25$.

1.3 Refletindo Sobre o Tema

- É possível representar qualquer conjunto através de um diagrama de Venn? Pense no conjunto $I = \{x \in \mathbb{R}: 1 < x \leq 3\}$. Como pode este conjunto ser representado?

- Sejam P o conjunto dos polígonos do plano e $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais. Considerem as funções $f: P \rightarrow \mathbb{N}$ que associa a cada polígono x seu número de lados $f(x)$ e $g: P \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ que associa a cada polígono x seu número de diagonais $g(x)$. REFLITA. Existe uma expressão matemática que represente a lei de formação para cada uma destas funções? As funções f e g como estão definidas são injetoras? São sobrejetoras? É possível torná-las injetoras e/ou sobrejetoras?

- Considerem A, B e C subconjuntos quaisquer de um conjunto universo. Justifiquem matematicamente a validade ou não da igualdade

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

Observe que para justificar a igualdade anterior significa demonstrá-la, se for verdadeira. Neste caso, lembre-se que $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ quando $(A \cup B)^c \subset A^c \cap B^c$ e $A^c \cap B^c \subset (A \cup B)^c$. Se a afirmativa for falsa, basta exibir um contraexemplo, isto é, um exemplo que mostra não ser possível a igualdade.

- Considerem os conjuntos
$A = \{x \in \mathbb{R}: 0 < x < 1\} = (0,1)$ e $B = \{x \in \mathbb{R}: 0 < x < 2\} = (0,2)$
a) Represente geometricamente os conjuntos $A \times B$ e A^2.
b) Existe uma função $f: A \to B$ que seja injetora e sobrejetora? Mostre-a.
c) É possível exibir uma função $f: A^2 \to A$. Poderá esta ser injetora?

ATIVIDADE 2 - VAMOS CONTAR ATÉ O INFINITO

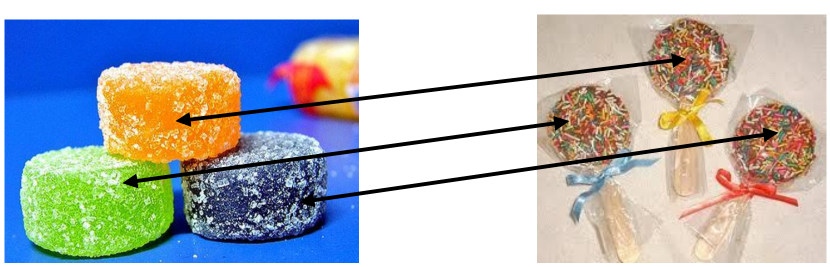
> Contar é falar a linguagem dos números. Aprender a comparar é aprender a contar. Os números são um artifício, uma abstração. Contar, confrontar, comparar são quase inatos no homem quanto seus dedos. Sem a faculdade de comparar, como sem os dedos, não é provável que ele chegasse aos números (KASNER, 1968, p.38-39).

O objetivo desta atividade é entender o processo de contagem fazendo uma provocação “vamos contar até o infinito”. Este processo chama-se colocar os conjuntos em correspondência biunívoca, contar é comparar como afirmou Kasner (1968). Os números naturais são os objetos deste processo de contagem, do qual o resultado é chamado a cardinalidade do conjunto.

2.1 CORRESPONDÊNCIA BIUNÍVOCA

Uma criança, mesmo que ainda não saiba o processo formal de contagem, é capaz de comparar duas classes de objetos. Basta lhe mostrar um pacote com três balas e outro com três pirulitos, que ela concluirá ser possível corresponder os elementos de um pacote com os elementos de outro, de maneira um a um.

Figura 6- Processo de Contagem

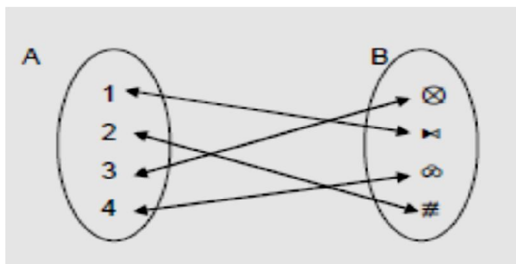


Este processo de confrontar, que é a base da contagem, chama-se colocar os conjuntos em *correspondência biunívoca* um com o outro.

Uma função $f: A \rightarrow B$ chama-se uma ***bijeção***, ou uma ***correspondência biunívoca*** entre A e B quando é ao mesmo tempo injetora e sobrejetora.

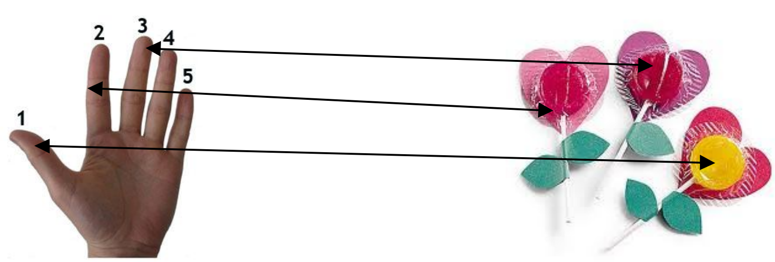
Exemplo (2.1): Note na Figura 7 que a função f de $A = \{1, 2, 3, 4\}$ em $B = \{\otimes, \bowtie, \infty, \not\equiv\}$ dada por $f(1) = \bowtie$, $f(2) = \not\equiv$, $f(3) = \otimes$ e $f(4) = \infty$ é uma bijeção. Pois quaisquer dois elementos distintos de A são levados em imagens distintas, isto é, a função f é injetora. E também é sobrejetora, pois, todo elemento de B é imagem de algum elemento de A. Observe também que existem outras bijeções possíveis entre estes conjuntos, como mostram os pares $(1, \otimes)$, $(2, \bowtie)$, $(3, \infty)$ e $(4, \not\equiv)$.

Figura 7: Bijeção entre os conjuntos A e B



Kasner (1968) enfatiza que para contar qualquer conjunto de objetos, este é o método empregado. Um conjunto B contém os objetos que devem ser contados, o outro são os números naturais: $1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n, \ldots$. Confrontando, de forma biunívoca, os elementos do primeiro conjunto com o dos números naturais, o último número n necessário para completar os pares $(n, f(n))$ indica "quantos" elementos há neste conjunto B. Isto justifica o emprego dos números naturais como ***números cardinais***, resultado de uma operação de contagem.

Figura 8- A relação dos números naturais com o processo de contagem



Afirma Lima (2006, p.38) que a importância dos números naturais provém do fato de que eles constituem o modelo matemático que torna possível o processo de contagem. Em outras palavras, eles respondem a perguntas do tipo:

“Quantos elementos tem este conjunto?”. Por outro lado, os números naturais também podem ser empregados como números ordinais, se referindo à ordem que os objetos ocupam num determinada sequência.

2.2 A Cardinalidade de um Conjunto

Diz-se que B é um ***conjunto finito***, e que B tem n elementos, $n \in \mathbb{N}$, quando se pode estabelecer uma correspondência biunívoca $f: I_n \to B$, para $I_n = \{1, 2, 3, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$. O número natural $\boldsymbol{n}$ chama-se então o ***número cardinal*** do conjunto B. A bijeção $f: I_n \to B$ chama-se uma ***contagem*** dos elementos de B, e denotaremos por $n(B)$, o seu número de elementos.

Observação: Admite-se o conjunto vazio como um conjunto finito, o qual é associado o zero como número de elementos.

Exemplo (2.2): O conjunto L formado pelas letras da palavra Isabely pode ser posto em correspondência biunívoca com o conjunto $I_7 = \{1, 2, \dots, 7\}$. Desta forma, dizemos que este conjunto L tem sete elementos, e denotaremos por $n(L) = 7$.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ I & s & a & b & e & l & y \end{array}$$

O número de elementos de um conjunto finito possui algumas propriedades mencionadas a seguir. As justificativas podem ser consultadas em Lima (2006, p.46):

I. O número de elementos de um conjunto finito é o mesmo, seja qual for a contagem que se adote. Isto é, se $f: I_n \to B$ e $g: I_m \to B$ são bijeções então $n = m$. O exemplo (2.1) ilustra esta propriedade.

II. Todo subconjunto B de um conjunto finito A é finito e $n(B) \leq n(A)$. Tem-se $n(B) = n(A)$ somente quando $A = B$. Considerando, por exemplo, o conjunto finito $A = \{L, e, t, y, c, i, a\}$ cujo $n(A) = 7$ e o subconjunto $B = \{L, t, c\} \subset A$ conclui-se que $n(B) = 3 < n(A)$. Tal fato ocorre para todo subconjunto próprio de A.

III. Se A e B são finitos então $A \cup B$ é finito e tem-se $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$. Para ilustrar esta propriedade toma-se, por exemplo, os conjuntos finitos $A = \{L, e, t, y, c, i, a\}$ e $B = \{G, u, s, t, a, v, o\}$ de forma que $n(A) = n(B) = 7$. Note que $A \cup B = \{L, e, t, y, c, i, a, G, u, s, v, o\}$ e $A \cap B = \{t, a\}$ assim $n(A \cap B) = 2$ e $n(A \cup B) = 7 + 7 - 2 = 12$.

IV. Sejam A e B conjuntos finitos. Se $n(A) > n(B)$ nenhuma função $f: A \to B$ é injetora e nenhuma função $g: B \to A$ é sobrejetora.

Exemplo (2.3): É impossível ocupar quatro vagas de garagem com apenas três carros.

Figura 9: Garagem antiga de plástico[3].

Para justificar tal fato basta tomar A como o conjunto de carros $A = \{c1, c2, c3\}$, e B o conjunto das vagas disponíveis, $B = \{v1, v2, v3, v4\}$, assim $n(A) = 3$ e $n(B) = 4$. Como $n(A) < n(B)$ então é impossível uma função $g: A \to B$ ser sobrejetora. Isto é, qualquer maneira que se disponha cada carro, elemento de A, em uma garagem sempre sobrará uma vaga, elemento de B.

Um conjunto B é ***infinito*** quando ele não é finito. Isto é, B não é vazio e não existe correspondência biunívoca $f: I_n \to B$ qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo (2.4): O conjunto dos números naturais é infinito.

[3] Disponível em: http://produto.mercadolivre.com.br/MLB-445007530-garagem-antiga-de-plastico-rarissma-e-3-carros-mimo-_JM. Acesso em 10/02/2013. Garagem em inglês é *garage*.

Demonstração: Dada qualquer função $f: I_n \to \mathbb{N}$, não importa qual n se fixou, pomos $k = f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$ e vemos que, para todo $x \in I_n$ tem-se $f(x) < k$, logo não existe $x \in I_n$ tal que $f(x) = k$. Assim nenhuma função $f: I_n \to \mathbb{N}$ é sobrejetora, logo não será bijetora. Em outras palavras não existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto finito $I_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ qualquer que seja n natural e o conjunto dos naturais. Portanto, realmente $\mathbb{N}$ é infinito.

É bem simples a ideia da contagem quando se trata de conjuntos finitos, afirmar quem tem mais ou menos elementos. Porém, este conceito pode ser estendido para conjuntos infinitos. Neste caso, fala-se na ***cardinalidade*** do conjunto. É este o ponto surpreendente, pois de forma análoga a comparação entre conjuntos finitos, conjuntos infinitos também podem ser confrontados quanto ao seu tamanho.

Dois conjuntos quaisquer A e B tem a mesma ***cardinalidade***, ou tamanho, ou são equivalentes, e escrevemos $\boldsymbol{card(A)} = \boldsymbol{card(B)}$ quando existe uma função bijetora $f: A \to B$ ou quando $A = B = \emptyset$.

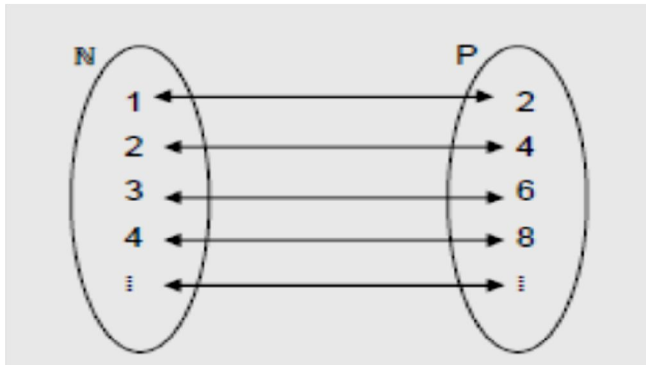
Exemplo (2.5): Os conjuntos $A = \{a, b, c, d, e\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ tem a mesma cardinalidade pois, por exemplo, $f: A \to B$ dada por $f(a) = 1$, $f(b) = 2$, $f(c) = 3$, $f(d) = 4$ e $f(e) = 5$ é uma bijeção de A em B. Logo, $card(A) = card(B) = 5$.

Até aqui nenhuma novidade, porém surpreenda-se com o próximo exemplo. Ele mostra que o conjunto P dos números pares positivos e o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais tem o mesmo “tamanho”.

Exemplo (2.6): O conjunto P dos números pares positivos é equivalente ao conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais. Isto é, $card(P) = card(\mathbb{N})$.

Demonstração: Note que existe uma bijeção $f: \mathbb{N} \to P$ que faz corresponder cada elemento $n \in \mathbb{N}$ com um elemento $y \in P = \{2, 4, 6, \ldots\}$ pela regra $y = 2n$. Portanto, $card(P) = card(\mathbb{N})$.

Figura 10: A equivalência entre o conjunto dos números naturais e o dos números pares positivos



Esta bijeção garante que estes conjuntos são equivalentes, como $\mathbb{N}$ é infinito, concluímos que o conjunto dos números pares também é infinito.

Espere um pouco, pense! Este exemplo mostra que o conjunto dos números pares e o conjunto dos números naturais possuem a mesma cardinalidade. Isto é, existe uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e um subconjunto próprio de $\mathbb{N}$. Esta descoberta assustadora, num primeiro momento, teve seu primeiro episódio no início do século XVII. Um passeio a esta incrível história sobre conjuntos infinitos será o objetivo da próxima atividade.

Continuando, o conjunto I dos números ímpares positivos, o conjunto T dos múltiplos de três positivos, o D das potências de dez e o conjunto F dos fatoriais de n são outros exemplos de conjuntos infinitos que também podem ser postos em equivalência com o conjunto dos números naturais. (Tabela 1)

$$I = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots, 2n - 1, \dots\}$$

$$T = \{3, 6, 9, 12, \dots, 3n, \dots\}$$

$$D = \{10, 100, 1000, \dots, 10^n, \dots\}$$

$$F = \{1, 2, 6, 24, 120, \dots, n!, \dots\}$$

Tabela 1: Bijeção entre $\mathbb{N}$ e alguns subconjuntos próprios infinitos.

$\mathbb{N}$	1	2	3	4	5	6	...	n	...
	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$		$\updownarrow$	
I	1	3	5	7	9	11	...	$2n-1$	...
T	3	6	9	12	15	18	...	$3n$	...
D	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	...	10^n	...
F	1	2	6	24	120	720	...	$n!$	...

Fonte: O autor

Realmente uma aparente contradição. De um lado é fato que o "tamanho" do conjunto dos números naturais é maior do que, por exemplo, o do conjunto I dos números ímpares, pois a estes lhes faltam os pares. Por outro, é fato a existência de uma correspondência um a um de cada natural a um número ímpar, pela relação $2n-1$. Mesmo surpresos concluímos que $card(I) = card(T) = card(F) = card(\mathbb{N})$, embora para formar cada conjunto foram retirados elementos do conjunto dos naturais.

Os conjuntos finitos ou equivalentes ao conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais são chamados de ***conjuntos enumeráveis*** (em inglês chamam-se *countable* - que se podem contar).

Exemplo (2.7): Os conjuntos $X = \{1,2,3,4\}$ e $Y = \{1,4,9,16,25\}$ são enumeráveis, pois são conjuntos finitos.

Exemplo (2.8): O conjunto $C = \{1,4,27,64,\ldots,n^n,\ldots\}$ é enumerável. Pois, existe uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e C.

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots & n \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow \\ 1 & 4 & 27 & 64 & 125 & 216 & \cdots & n^n \cdots \end{array}$$

Teorema (2.9): Todo subconjunto de $\mathbb{N}$, finito ou infinito, é um conjunto enumerável.

Demonstração: ver Lima (2004, p. 49).

Exemplo (2.10): O conjunto $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ dos números inteiros é enumerável.

SURPREENDENTE, mas é possível verificar a equivalência entre o conjunto dos números inteiros e o conjunto dos números naturais como apresentado a seguir.

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & \cdots \end{array}$$

Ou também pela expressão

$$f(n) = \begin{cases} m & se \quad n = 2m, \qquad m = 1,2,3,\ldots \\ -m & se \quad n = 2m+1, \qquad m = 0,1,2,\ldots \end{cases}$$

Portanto, como existe uma bijeção $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ conclui-se que o conjunto dos números inteiros é enumerável e $card(\mathbb{Z}) = card(\mathbb{N})$.

Para pensar! É possível definir de outra bijeção $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$? Como?

Espero do estudante, ao final desta atividade, a conclusão de que o processo de contagem dos elementos de um conjunto é uma equiparação com o conjunto dos números naturais. E este fato se estende também para a contagem de conjunto infinitos, chamada de cardinalidade do conjunto. Surpreende o fato de subconjuntos infinitos dos naturais e o conjunto dos números inteiros terem a cardinalidade de $\mathbb{N}$. Concluindo que estes conjuntos são contáveis. Neste momento é interessante perguntar-se: Existem conjuntos que não são enumeráveis? O objetivo das próximas atividades é buscar a resposta para esta pergunta.

2.3 Refletindo Sobre o Tema

- É possível existir uma bijeção $f: A \to B$ de um conjunto finito A sobre B, onde $B \subsetneq A$? Justifique.

- O conjunto dos números primos é infinito? É enumerável? Reflita!

  Euclides de Alexandria (360-295 a.C.) matemático grego, cujo maior legado foi a obra *"Os Elementos"*, uma das mais influentes de toda a história da matemática, argumentara matematicamente sobre esta indagação a aproximadamente 2300 anos, justifique você também.
  Ver comentários no Apêndice C

Figura 11: Euclides de Alexandria (360-295 a.C.)[4]

- Se $A \neq \emptyset$ é um conjunto finito com n elementos então é possível encontrar o número de elementos do conjunto $P(A)$, o conjunto das partes de A? Como?

  É possível criar uma bijeção $f: \mathrm{A} \to P(\mathrm{A})$?

  i. Dê um exemplo e tente argumentar defendendo seu ponto de vista.
  ii. Agora procure justificar matematicamente a resposta deste fato.

2.4 Envolvendo os Alunos

> Uma investigação é um problema em aberto e, por isso, as coisas acontecem de forma diferente do que na resolução de problemas e exercícios [...] Na investigação o aluno é chamado a agir como um matemático não apenas porque é solicitado a propor questões, mas principalmente, porque formula conjecturas a respeito do que está investigando (PARANÁ, 2008, p.67).

Para reforçar a diferença entre um número muito grande e o infinito propomos a seguinte investigação:

---

[4] Disponível em: http://pt.wikipedia.org/wiki/euclides Acesso em 16/01/2013.

O conjunto formado pelos grãos de areia da orla de Balneário Camboriú formará um conjunto finito ou infinito? Monte uma estratégia para poder contá-los.

O objetivo desta investigação é reconhecer que um conjunto aparentemente infinito pode não sê-lo. Podemos montar diferentes estratégias para enumerar os grãos de areia e concluir que este conjunto terá uma quantidade finita de elementos. Espera-se dos alunos a descoberta destas estratégias.

Antes de iniciar a discussão desta atividade, trazemos um pouco de história, um recorte de Kasner (1968). Em 1938, o matemático Edward Kasner, da Universidade da Columbia, pediu ao seu sobrinho Milton Sirotta (1929-1981), então com oito anos, que inventasse um nome para dar a um número muito grande. Foi então apresentado em seu livro Matemática e Imaginação o "*googol*", (bem familiar, não é?) como sendo a centésima potência de 10, isto é, 10^{100}. Realmente um número muito grande, para se ter ideia da sua grandeza desde o surgimento da Terra, há aproximadamente 4,5 bilhões de anos, ainda não se passaram um *googol* de segundos, na verdade não é nem perto disso, se passaram "apenas" aproximadamente 10^{17} segundos.

Para simular a contagem dos grãos de areia, o professor poderá propor algo análogo. Trazer para a sala de aula um recipiente, preferencialmente com formato de um paralelepípedo reto, cheio de grãos de arroz e lhes fazer a mesma pergunta.

Separe os alunos em grupos e disponibilize a cada um, ferramentas diferentes. A uns apenas a régua, a outros um caixinha de fósforos e uma régua e a outros uma caixa de fósforos e uma balança.

Diferentes estratégias para a contagem deveram surgir, porém espera-se daqueles que estiverem apenas com a régua efetuarem o desenho de um quadrado, por exemplo, de 5 cm de lado. Cobri-lo com os grãos de arroz e depois contá-los. Em seguida, estima-se a quantidade de grãos para a área da base do recipiente e para o volume, considerando a altura de um grão de arroz. Finalmente para encontrar o resultado utiliza-se a proporcionalidade do volume e a quantidade de grãos determinados com o volume do recipiente.

Dos grupos com outras ferramentas espera-se algo similar. Daqueles com a caixa de fósforos e a régua espera-se que primeiramente completem a caixinha com os grãos de arroz e conte-os. Em seguida, com a régua encontre as medidas da caixa e do recipiente e determinem seus volumes. Finalmente façam a proporção entre os volumes, estimando o total de grãos do recipiente.

Aos estudantes que dispuserem da balança também se espera o uso da proporcionalidade. Primeiramente auferem a massa dos grãos de arroz da caixinha de fósforo e a do recipiente. Em seguida, contam a quantidade de grãos presente na caixinha e façam a proporção. A vantagem desta ferramenta será para outros tipos de recipientes, onde o volume não é calculado trivialmente.

Deverá ser frisado com os envolvidos nesta investigação que os valores encontrados são aproximados. E mais, os números encontrados são grandes, porém, a quantidade de grãos de arroz é finita.

Com estas estratégias de contagem agora os envolvidos estão capacitados para abstrair e formular táticas para enumerar os grãos de areia. Ficando claro que o número encontrado deverá ser enorme, se maior ou menor do que um *“googol”* é uma boa pergunta, mas com certeza este número será finito.

ATIVIDADE 3 - UM BREVE PASSEIO AO INFINITO

David Hilbert (1862-1943), matemático alemão, considerado um dos mais notáveis do século XX, se referindo ao infinito, disse que desde sempre

> o infinito agitou o ânimo da humanidade mais profundamente que outra qualquer questão. O infinito atuou incitante e fecundamente sobre o entendimento talvez mais que outra qualquer ideia. Porém o infinito necessita de esclarecimento mais que outro qualquer conceito (HILBERT, 1926, p. 163).

Figura 12: David Hilbert (1862-1943)[5]

O objetivo principal desta atividade é abordar as contribuições de alguns pensadores ao longo da história na construção da caracterização dos conjuntos infinitos. Instigar o pensamento com os clássicos paradoxos sobre o infinito; enfatizar, dentro do contexto histórico, os temas de correspondência biunívoca, cardinalidade, conjuntos enumeráveis e apresentar as contribuições de Georg Cantor sobre conjuntos infinitos completam os desígnios específicos deste tema.

3.1 OS FAMOSOS PARADOXOS[6] SOBRE O INFINITO

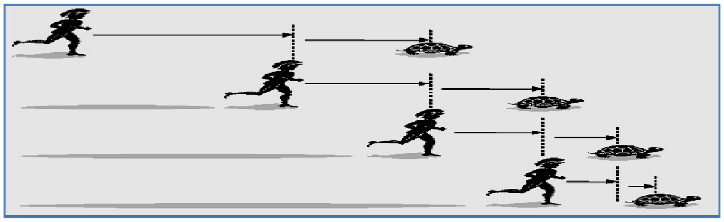
Zenão de Eléia (495-435 a.C.), filósofo grego, conseguiu produzir paradoxos famosos utilizando a ideia de infinito. Em dois deles conhecidos como: a

[5] Disponível em: http://en.wikipedia.org/wiki/David_Hilbert Acesso em 16/01/2013.
[6] É uma declaração aparentemente verdadeira que leva a uma contradição lógica, ou a uma situação que contradiz a intuição comum. Em termos simples, um paradoxo é "o oposto do que alguém pensa ser a verdade".

Dicotomia[7] e o Paradoxo de Aquiles[8], Zenão argumentou que o tempo e o espaço são infinitamente divisíveis e, por conseguinte, o movimento seria impossível, afirma Boyer (1974, p.55).

No Paradoxo de Aquiles, o herói grego de corpo atlético, correndo atrás de uma tartaruga, deve primeiro, atingir o lugar de onde ela começou, mas ela já partiu. Esta situação se repete indefinidamente. Quando Aquiles chega a cada ponto da corrida, a tartaruga, tendo estado ali, já partiu. Aquiles está então impossibilitado de apanhá-la.

Figura 13- Aquiles e a tartaruga[9]



Zenão conseguiu, através de problemas como o citado, instigar o pensamento no sentido de que um segmento de reta finito pode ser dividido em infinitos segmentos de reta também de comprimentos finitos. Estes argumentos conduziram os filósofos da época a discussões ardentes sobre o infinito atual e o infinito potencial, afirma Sampaio (2008). Estamos falando de infinito atual a partir do momento que se aceita que a decimal infinita e periódica 0,999... é igual a 1, infinito como objeto, isto é, o número 1. Se pensarmos que é sempre possível acrescentar mais um dígito 9 e que esse processo nunca termina, estamos pensando no infinito potencial, o infinito como processo. É o que o paradoxo de Aquiles propõe. Para Aristóteles (384-322 a.C.) o infinito potencial era apenas uma construção da mente humana, necessária para resolver problemas que envolvessem grandezas contínuas infinitamente pequenas ou números infinitamente grande.

> Aristóteles recusava o infinito em ato (ou infinito real), isto é, considerado como entidade. Ele negava toda a existência física ao infinito, mas lhe reconhecia certa existência matemática. Por exemplo, cada natural é seguido de um outro, nenhum ponto é o

[7] Divisão em duas partes; classificação que se baseia na divisão e subdivisão sucessiva em dois.
[8] Da mitologia grega Aquiles é um herói de corpo atlético, apenas vulnerável em seu calcanhar.
[9] Disponível em: http://aristocratas.wordpress.com/2012/07/24/monotonia-em-serie/. Acesso em: 03/11/2012.

> último de uma reta. Os matemáticos tentaram se contentar com esse infinito em potência, evitando tanto quanto possível o infinito em ato (ANDRADE, 2010, p.1).

A Matemática do infinito não progrediu como se esperava depois da época de Zenão. Nenhum dos problemas por ele propostos foi estruturado logicamente na Antiguidade. O conceito de infinito volta a ser estudado e discutido somente durante o Renascimento (sec. XVI), porém, com muitas falhas. Giordano Bruno (1548-1600) em sua obra *Acerca do Infinito, do Universo e dos Mundos*, propunha que o Universo era infinito e que continha um número infinito de sistemas solares heliocêntricos.

Em sua última obra *Discursos* publicada na forma de diálogos, Galileu Galilei (1564-1642), provoca por meio de seus personagens Salviati e Simplício a questão da equicardinalidade do conjunto dos números naturais e o do conjunto dos quadrados perfeitos[10].

Galileu propôs na época a existência de uma bijeção entre o conjunto de todos os números naturais, com um dos seus subconjuntos infinitos, o dos quadrados perfeitos, conforme Figura 14. Uma relação que associa cada número natural (n) ao seu quadrado perfeito (n^2) de forma a estabelecer uma correspondência elemento a elemento.

Figura 14: Bijeção proposta por Galileu Galilei

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & \dots & n^2 \cdots \end{array}$$

Imagine a loucura que foi aceitar esta proposta aparentemente contraditória. Pois aceitá-la era admitir que mesmo ao retirar infinitos de seus elementos, neste caso aqueles números que não são quadrados, este subconjunto ainda assim terá o mesmo tamanho que o conjunto dos naturais. Galileu conclui que os conceitos de menor, igual e maior só se aplicavam a conjuntos finitos, e não tinham sentido aplicados a conjuntos infinitos.

---

[10] Um quadrado perfeito é simplesmente o quadrado de um número natural. Exemplo 16 é um quadrado perfeito, pois $4^2=16$.

Em uma pequena obra encontrada postumamente, em 1851, Bernhard Bolzano (1781-1848) enuncia propriedades importantes sobre conjuntos infinitos. E, referenciando os resultados de Galileu mostra que existem tantos números, no intervalo [0,1] quanto em [0,2] percebendo a correspondência biunívoca entre estes conjuntos. Uma loucura para a época. Pois, a confiança de que o todo é maior que a parte deixa de valer, na discussão de conjuntos infinitos. Bolzano propõe que se vejam essas correspondências bijetoras entre o todo e uma de suas partes, como a marca característica das totalidades infinitas.

3.2 Propriedade Fundamental dos Conjuntos Infinitos

Richard Dedekind[11] (1831-1916) e Georg Cantor (1845-1918) em trabalhos independentes conduziram o desenvolvimento sobre os fundamentos da matemática do infinito.

Figura 15: Richard Dedekind (1831-1916)[12]

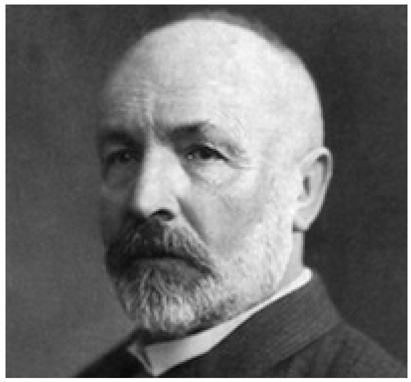
Afirma Boyer (1974) que Dedekind viu nos paradoxos de Bolzano não uma anomalia mas uma propriedade universal dos conjuntos infinitos que tomou como definição, estabelecendo que:

Um ***conjunto é infinito*** se ele puder ser colocado em correspondência biunívoca com alguma de suas partes próprias.

[11] Dedekind elaborou uma teoria rigorosa sobre irracionais, tendo como fonte de inspiração a teoria das proporções de Eudoxo de Cnido (408-347 a.C.). Criou os números reais e estabeleceu uma correspondência biunívoca entre pontos da reta e os números reais.
[12] Disponível em: http://en.wikipedia.org/wiki/Richard_Dedekind Acesso em 16/01/2013.

Mas é a Cantor que a Matemática do infinitamente grande deve sua maioridade.

Figura 16: Georg Cantor (1845-1918)[13]



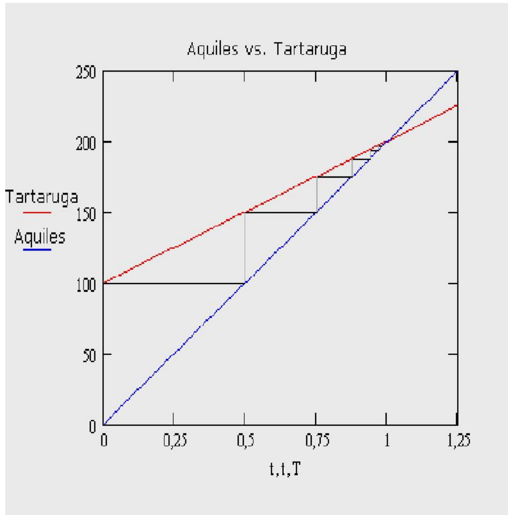
Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor nasceu em S. Petersburgo, em 1845, embora nascido na Rússia, viveu a maior parte de sua vida na Alemanha, onde ensinou na Universidade de Halle. Ele como Dedekind reconheceram a ***propriedade fundamental dos conjuntos infinitos***:

Um conjunto infinito tem a propriedade singular de que o todo não é maior que algumas de suas partes.

Cantor esclarece finalmente o paradoxo de Aquiles e a tartaruga. Aquiles não tem de percorrer mais pontos do que a tartaruga. Ele tem de percorrer exatamente os mesmos: conjuntos infinitos de pontos equivalentes. Supondo a velocidade de Aquiles o dobro da tartaruga a Figura 17 representa este fato.

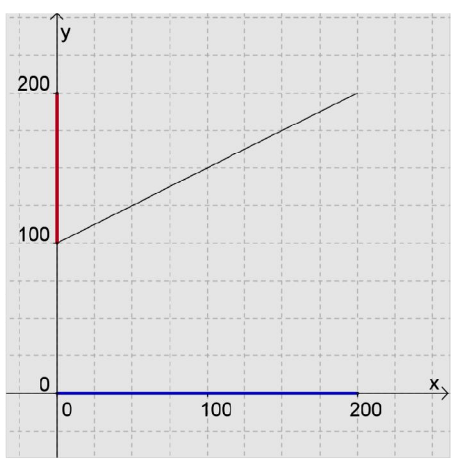
Figura 17: Paradoxo de Aquiles [14]

[13] Disponível em: http://en.wikipedia.org/wiki/Georg_Cantor Acesso em 16/01/2013.
[14] Disponível em: http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Paradoxo_de_Zen%C3%A3o.PNG. Acesso em 11/02/2013.



Exemplo (3.1): A história foi revelando esta curiosa propriedade que caracteriza os conjuntos infinitos. A bijeção citada por Galileu entre o conjunto dos números naturais e seu subconjunto o dos quadrados perfeito foi o primeiro exemplo. Depois Bolzano também revela a existência de uma bijeção entre o intervalo [0,2] e o intervalo [0,1]. Ou como mostram as Figuras 17 e 18, uma equivalência entre os intervalos [0,200] e [100,200] ilustrando respectivamente a distância percorrida por Aquiles e a tartaruga até se encontrarem. Esta equivalência pode ser expressa pela bijeção $f\colon [0{,}200] \to [100{,}200]$ definida por $f(x) = \frac{x}{2} + 100$, conforme ilustra Figura 18.

Figura 18: A equivalência entre dois intervalos da reta



“A propriedade fundamental dos conjuntos infinitos é tão essencial para a Matemática do Infinito quanto a de que o todo é maior que qualquer de suas partes o é para a aritmética finita”, afirma Kasner (1968, p.52). No caso finito, o conceito de cardinalidade é tranquilo, pois dois conjuntos quaisquer com o mesmo número de elementos têm a mesma cardinalidade. Porém, Cantor estende este conceito de números de elementos de um conjunto, para os conjuntos infinitos, criou, assim, um novo tipo de número: o ***transfinito***.

Como nenhum número natural seria adequado para descrever a cardinalidade, o tamanho, de todos os naturais, foi criado o primeiro dos números transfinitos Aleph[15] zero, representado pelo símbolo $\aleph_0$. Estabelecendo que todos os conjuntos que possam ser postos em correspondência biunívoca com o conjunto dos naturais terão a mesma cardinalidade. Isto é, aos conjuntos enumeráveis atribuiu-se o menor cardinal transfinito $\aleph_0$. Assim, $card(\mathbb{N}) = card(\mathbb{Z}) = \cdots = \aleph_0$.

Uma dúvida perturbaria até mesmo a Cantor: É possível estabelecer uma bijeção entre dois quaisquer conjuntos infinitos? E diante de uma resposta afirmativa, todos os conjuntos teriam a mesma cardinalidade, caso contrário conclui-se, surpreendentemente, a existência de infinitos de tamanhos diferentes. Será? Este é o ponto que discutiremos no próximo tema.

3.3 Refletindo sobre o tema

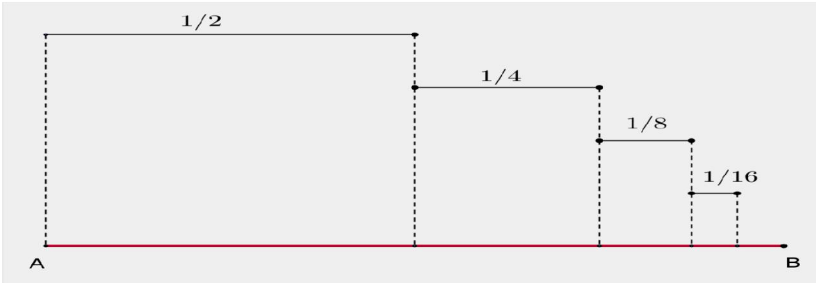
3.3.1 Paradoxo da Dicotomia

O Paradoxo da Dicotomia estabelece que seja impossível cobrir qualquer distância dada. Pois antes que um objeto possa percorrer esta distância, deve percorrer sua metade; depois deve percorrer a metade do que falta; em seguida a metade do restante e assim por diante, através de uma infinidade de subdivisões, conforme a Figura 19. O corredor que quer cobrir todo o percurso precisa percorrer infinitas partes.

---

[15] Primeira letra do alfabeto hebraico.

Figura 19: O Paradoxo da Dicotomia



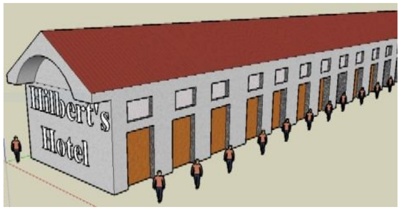
A suposição de Zenão era que o total composto por um número infinito de partes, $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$, deve, ele também, ser infinito. Reflita sobre este paradoxo grego. Realmente será impossível completar o percurso? Justifique.

3.3.2 O Hotel de Hilbert

"Do paraíso que Cantor criou para nós, não deverá ninguém poder expulsar-nos" afirma Hilbert (1926, p.171) se referindo ao novo tratamento sobre o infinito que Cantor expôs com sua Teoria.

O paradoxo do Hotel de Hilbert é um fato matemático sobre conjuntos infinitos chamado de paradoxo devido ao resultado não intuitivo. Preste atenção e reflita sobre esta curiosa brincadeira, baseada em Lima (2006, p.48).

Figura 20: Hotel de Hilbert[16]



O Hotel de Hilbert tem uma infinidade de quartos todos numerados pelos números naturais e num dado final de semana está lotado. Então, chega um novo cliente e o gerente prontamente lhe responde:

[16] Disponível em: http://clavedepi.blogspot.com.br/2011/08/hotel-de-hilbert-mesmo-lotado-ainda-ha.html. Acesso em: 08/01/2013

- Bom tarde, senhor! O Hotel Hilbert está lotado, aguarde um minuto, pois farei um remanejamento e você se hospedará no quarto número 1. Pedirei ao hóspede do quarto um que vá para o quarto 2; o do quarto 2 para o quarto 3, e assim por diante.

A recepcionista ficou muito surpresa com a habilidade do gerente. Porém, o hotel dispõe de um aparelho que comunica todos os hóspedes simultaneamente. Assim, através deste sistema o gerente solicita ao cliente do quarto n que se transfira para o quarto $n + 1$. Portanto, o novo hóspede pode ser recebido e acomodado no quarto um, pois este ficou vago.

Mais tarde, chega um ônibus com trinta novos clientes querendo passar a noite no Hotel. Se você fosse o gerente deste hotel seria capaz de atender estes novos clientes? Como?

Pouco tempo depois, chega um grupo mais numeroso, um ônibus com uma infinidade de lugares trazendo a bordo infinitos passageiros. O gerente do hotel prontamente responde:

- Sem problemas, eu os acomodarei aqui, pois no Hotel de Hilbert sempre cabe mais um.

Reflita. Como o gerente fará tal proeza?

Após algumas reflexões sobre o tema assista ao vídeo de autoria da Equipe M3 da UNICAMP sobre o Hotel de Hilbert[17].

[17] Vídeo disponível em: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1117. Acesso em 11/01/2013.

ATIVIDADE 4 - A DESCOBERTA DE GEORG CANTOR

Cantor surpreende o mundo e mostra que o conjunto dos números naturais não pode ser posto em correspondência biunívoca com os números reais, conclui então que realmente existem infinitos de tamanhos diferentes. Apresentar esta descoberta de Georg Cantor; incentivar o estudante a pensar de forma abstrata, apresentando algumas demonstrações e discutir a bijeção entre (0,1) e a reta são os objetivos desta atividade.

4.1 O Conjunto dos Números Racionais é Enumerável

Primeiramente Cantor mostra, de forma elegante, que as frações formam uma sequência enumerável, infinita, e equivalente ao conjunto dos números naturais, isto é, $card(\mathbb{Q}) = card(\mathbb{N})$. Você deve estar se perguntando como Cantor construiu esta sequência? Calma! Antes de responder, é preciso pensar em pares ordenados.

O conjunto de todos os pares ordenados de números naturais é infinito e enumerável. De fato, note que a bijeção a seguir comprova a veracidade da afirmação.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
(1,1)	(1,2)	(2,1)	(1,3)	(2,2)	(3,1)	(1,4)	(2,3)	(3,2)	(4,1)	(1,5)	...

Ou seja, ordenam-se os pares conforme a soma de suas coordenadas sendo as primeiras em ordem crescente. A menor soma é dois, referente ao par (1,1), corresponde ao número um. A segunda soma é três, são os pares (1,2) e (2,1), correspondem respectivamente aos números 2 e 3. Posteriormente temos os pares de soma quatro, são eles, (1,3), (2,2) e (3,1) que são as imagens do número 4, 5 e 6 respectivamente. Seguindo este raciocínio conclui-se pela bijeção $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Agora fica fácil de verificar que o conjunto dos números racionais positivos é enumerável. Admita que cada par ordenado (a, b) corresponde ao número ${}^{a}/_{b}$, ou seja, a primeira coordenada como sendo o numerador e a segunda como sendo o denominador. Retire as repetições, isto é, tome apenas uma das frações equivalentes, por exemplo, 1 = $\frac{2}{2}$ = $\frac{3}{3}$ = $\cdots$.

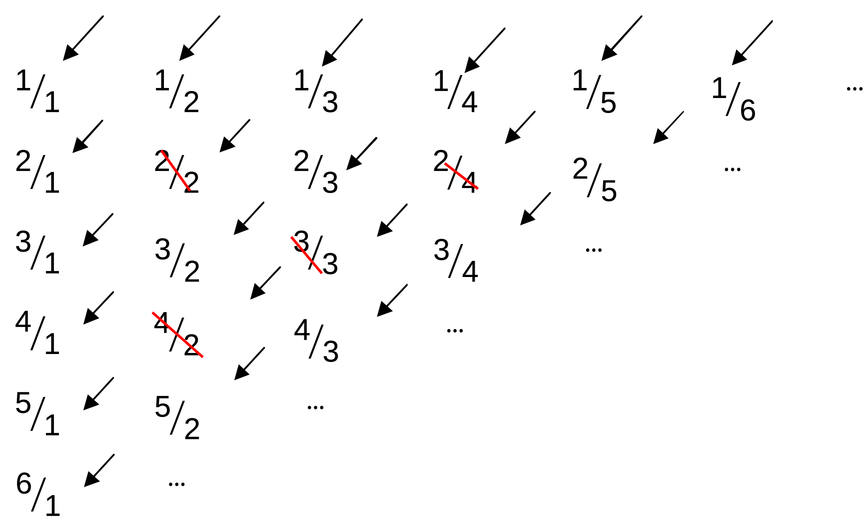
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	...
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
(1,1)	(1,2)	(2,1)	(1,3)	(~~2,2~~)	(3,1)	(1,4)	(2,3)	(3,2)	(4,1)	(1,5)	(~~2,4~~)	(~~3,3~~)	(~~4,2~~)	...

E reenumere.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	...
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
(1,1)	(1,2)	(2,1)	(1,3)	(3,1)	(1,4)	(2,3)	(3,2)	(4,1)	(1,5)	(5,1)	(1,6)	(2,5)	(3,4)	...

Outra forma de apresentar tal enumeração está na Figura 21. Utilizando o mesmo raciocínio anterior.

Figura 21: Enumeração do conjunto dos números racionais



Observe que todos os números racionais positivos aparecerão, pois $\mathbb{Q}^{+}$ = $\{{}^{a}/_{b} : a, b \in \mathbb{N}\}$. Portanto, com esta elegante construção Cantor demonstra a enumerabilidade dos racionais positivos.

Mas e o restante dos racionais? Calma! O conjunto dos números racionais é a união dos racionais positivos, negativos e o zero, isto é, $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^- \cup \{0\}$.

Elencando os resultados tem-se:

- ✓ $\mathbb{Q}^+$ é enumerável.
- ✓ Analogamente $\mathbb{Q}^-$ é enumerável. Pois, basta fazer $(a, b) = (-a, b)$.
- ✓ O conjunto $\{0\}$ tem apenas um elemento, o zero. Logo enumerável.

Agora é preciso informações sobre a união destes conjuntos. De Figueiredo (2011), segue os seguintes resultados.

Teorema (4.1). A união de um conjunto finito com um conjunto enumerável é enumerável.

Demonstração: Seja $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ o conjunto finito e $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$ o conjunto enumerável. O conjunto $A \cup B$ é enumerável. De fato, a correspondência biunívoca entre $\mathbb{N}$ e $A \cup B$ será assim:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & \ldots & n & n+1 & n+2 & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n & b_1 & b_2 & \cdots \end{array}$$

Teorema (4.2). A união de dois conjuntos enumeráveis é enumerável.

Demonstração: Se $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ e $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$ são dois conjuntos enumeráveis, então $A \cup B$ é enumerável, bastando fazer a correspondência biunívoca definida abaixo:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ a_1 & b_1 & a_2 & b_2 & a_3 & b_3 & \cdots \end{array}$$

$$\vdots$$

Ou seja $f(a_n) = 2n - 1$, e $f(b_n) = 2n$.

Dos Teoremas (4.1) e (4.2) conclui-se que os racionais são enumeráveis. Incrível, $card(\mathbb{Q})$ = $card(\mathbb{N})$. Porém, a inquietação continua: todos os conjuntos infinitos são enumeráveis?

4.2 A NÃO ENUMERABILIDADE DO CONJUNTO $\mathbb{R}$ DOS NÚMEROS REAIS

A noção de cardinalidade seria desnecessária caso os reais fossem enumeráveis. E Cantor surpreende, em 1874, demonstrando não ser possível uma bijeção entre naturais e reais.

Teorema (4.3): O conjunto dos números reais não é enumerável.

Demonstração:

Hipótese: (0,1) $\subset \mathbb{R}$ é um intervalo de números reais.

Tese: (0,1) não é enumerável.

Cantor utilizou-se do método de redução ao absurdo (Ver Apêndice A) para demonstrar o teorema.

1. Suponha que o intervalo (0,1) $\subset \mathbb{R}$ é infinito enumerável.
2. Cada número pertencente ao intervalo (0,1) tem uma representação decimal da forma 0, $a_{i1}a_{i2}a_{i3}$ ... onde a_{ij} são algarismos de zero a 9. Observe que alguns números têm mais de uma representação decimal, como 0,3 e 0,2999.... Para tais números, fora escolhido nesta demonstração aquele com representação finita. Supondo este intervalo enumerável então é possível construir uma bijeção entre os naturais e cada elemento deste intervalo, como segue:

$$1 \leftrightarrow 0, \boldsymbol{a_{11}} a_{12} a_{13} a_{14} \ldots a_{1n} \ldots$$
$$2 \leftrightarrow 0, a_{21} \boldsymbol{a_{22}} a_{23} a_{24} \ldots a_{2n} \ldots$$
$$3 \leftrightarrow 0, a_{31} a_{32} \boldsymbol{a_{33}} a_{34} \ldots a_{3n} \ldots$$
$$4 \leftrightarrow 0, a_{41} a_{42} a_{43} \boldsymbol{a_{44}} \ldots a_{4n} \ldots$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

3. Construindo um número que x do intervalo (0,1) que não esteja na lista acima se tem uma contradição. Seja a decimal $x = 0, b_1 b_2 b_3 \ldots$ construída de modo que todos os b_i, s sejam diferentes de 0 ou 9 e $b_i \neq a_{ij}$ onde $i = j$.

4. Note que $x = 0, b_1 b_2 b_3 \ldots$ é diferente de $0, a_{n1} a_{n2} a_{n3} \ldots$ para todo n, pois $b_n \neq a_{nn}$.

5. Como $x = 0, b_1 b_2 b_3 \ldots$ não está na bijeção proposta tem-se uma contradição com a suposição inicial. Assim, a hipótese é rejeitada e conclui-se que o conjunto (0,1) não é enumerável.

6. Portanto, o conjunto $\mathbb{R}$ de todos os números reais também não é enumerável, pois contém o intervalo (0,1).

Este argumento passou a ser chamado de ***processo diagonal de Cantor.*** E prova de modo conclusivo que não existe meio de incluir todos os decimais em uma possível equivalência com os inteiros positivos.

SURPREENDENTE. Cantor estabelece com essa descoberta que existem pelo menos dois tipos diferentes de infinito: o do conjunto dos números naturais e o do conjunto dos números reais.

A ideia agora é estabelecer as regras para ordenar o infinito. Dados dois conjuntos A e B, a cardinalidade de A é menor ou igual a cardinalidade de B, $\boldsymbol{card(A) \leq card(B)}$, quando existe uma função injetora $f: A \rightarrow B$ (equivalentemente, existe uma função sobrejetora $g: B \rightarrow A$) ou quando $A = \emptyset$. Se existir uma bijeção de A em B tem-se $card(A) = card(B)$, caso contrário, temos a desigualdade estrita.

Teorema (4.4): se $A \subset B$, então $card(A) \leq card(B)$.

Demonstração: Por hipótese A é subconjunto de B então $f: A \rightarrow B$ dada por $f(a) = a$, $\forall a \in A$ é uma função injetora, pois, quaisquer a_1, a_2 distintos em A tem-se $f(a_1) = a_1 \neq a_2 = f(a_2)$. Portanto, $card(A) \leq card(B)$.

Em particular, como $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, então $card(\mathbb{N}) < card(\mathbb{R})$, pois conforme o Teorema (4.3) é impossível uma bijeção entre estes conjuntos. Ordenando o tamanho do infinito, Cantor deu, ao segundo número transfinito, o nome de *continuum*, e utilizou a letra $\boldsymbol{c}$ para identificá-lo.

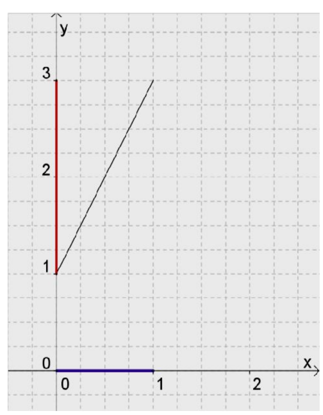
Considerando A um intervalo não degenerado da reta o que é aceitável afirmar quando se compara $card(A)$ e $card(\mathbb{R})$? Analisando os exemplos seguintes é possível argumentar sobre esta pergunta.

Exemplo (4.5): Sejam os intervalos $A = (0,1)$ e $B = (a, b)$ com $a, b \in \mathbb{R}$, e $a < b$. Então $card(A) = card(B)$.

Para comprovar este fato basta exibir uma bijeção entre A e B. Observe que a função $f: A \to B$, definida por $f(x) = (b - a)x + a$ é uma bijeção, pois é uma função afim, logo $card(A) = card(B)$. Podemos também concluir que o intervalo B é não enumerável.

Em particular, o intervalo $B = (1,3)$ é não enumerável, pois conseguimos exibir uma bijeção $f: A \to B$ definida por $f(x) = 2x + 1$ (Figura 22). Isto significa que existe a mesma quantidade de pontos nos intervalos $A = (0,1)$ e $B = (1,3)$. Surpresos? Não esqueça a propriedade fundamental dos conjuntos infinitos que o todo não é maior que algumas de suas partes, já comentada no tema anterior.

Figura 22: A equivalência entre dois intervalos da reta

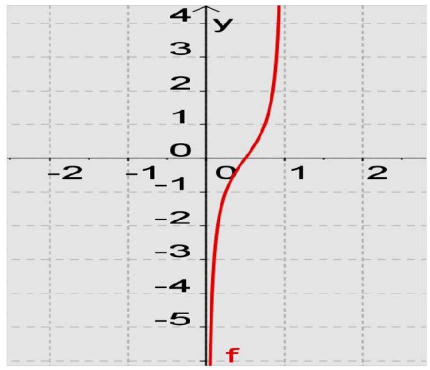


O próximo passo é mostrar uma bijeção entre intervalo (0,1) e o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais e concluir que a $card[(0,1)] = card(\mathbb{R})$.

Exemplo (4.6): Existe uma bijeção $f: (0,1) \to (-\infty, +\infty)$.

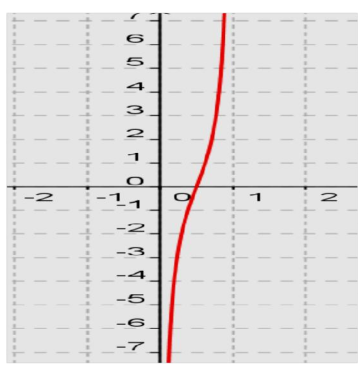
Note que a função $f(x) = \tan(\pi x - \frac{\pi}{2})$ é uma bijeção entre o intervalo $(0,1)$ e o conjunto dos números reais (Figura 23). A discussão mais detalhada desta bijeção está proposta, em forma de investigação sobre a função tangente, ao final desta atividade no "Envolvendo os alunos".

Figura 23: Gráfico da função ***f***



Outras funções também podem mostrar a existência desta bijeção, note que a função $g: (0,1) \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$, cujo gráfico está exposto na Figura 24, é uma correspondência biunívoca.

Figura 24: Gráfico da função g



Nestes dois exemplos o *software Geogebra*[18] pode ser utilizado, para de modo intuitivo, visualizar as bijeções.

[18] Software livre que pode ser encontrado em: www.**geogebra**.org.

Nos últimos anos de vida, Cantor tentou provar, sem o conseguir, a "*hipótese do continuum*", ou seja, que não existe nenhum conjunto com mais elementos do que o conjunto dos números naturais e menos elementos do que o conjunto dos números reais. Em 1963, Paul Cohen (1934-2007), matemático estadunidense, mostrou que é impossível responder a essa pergunta com os axiomas usuais da Teoria dos Conjuntos.

Com o processo de diagonalização Cantor provou ser sempre possível encontrar conjuntos maiores, ou seja, que não existe um conjunto infinito maior de todos. Assim, o conjunto dos números transfinitos é infinito. E ordenou-os conforme sua cardinalidade, da mesma maneira que se ordenam os conjuntos finitos de acordo com o número de seus elementos. Este resultado ficou conhecido como:

Teorema de Cantor (4.7): Seja A um conjunto, então a cardinalidade de A é menor do que a cardinalidade do conjunto das partes de A.

Outro resultado também bastante curioso demonstrado por Cantor diz que a cardinalidade do conjunto dos números reais é igual à cardinalidade do conjunto das partes do conjunto dos naturais. Isto é, $\boldsymbol{c} = card(P(\mathbb{N}))$.

Estes resultados tornam possível a construção de uma sequência infinita crescente de números transfinitos, como segue:

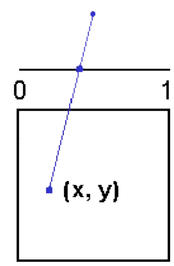
$$\aleph_0 < c < card(P(P(\mathbb{N}))) < card\left(P(P(P(\mathbb{N})))\right) < \cdots$$

Fogem ao objetivo deste trabalho estas demonstrações que podem ser consultadas em Ferreira (2011).

4.3 Refletindo Sobre o Tema

Em 1877, em uma carta endereçada ao matemático alemão Richard Dedekind, Cantor escreve: “Estou vendo, mas não acredito”. Preocupado em classificar os infinitos descobriu que o número de pontos de um segmento de reta é o mesmo que na área. Isto é, existe uma bijeção entre $(0,1)$ e $(0,1) \times (0,1)$. De fato, a função $f: (0,1)^2 \rightarrow (0,1)$ definida por $f[(0, x_1x_2 \ldots, 0, y_1y_2 \ldots)] = 0, x_1y_1x_2y_2x_3y_3 \ldots$ é bijetora. Pois é injetora, isto é, $(0, x_1x_2 \ldots, 0, y_1y_2 \ldots) \neq (0, x_1'x_2' \ldots, 0, y_1'y_2' \ldots) \in (0,1)^2 \Rightarrow 0, x_1y_1x_2y_2x_3y_3 \ldots \neq 0, x_1'y_1'x_2'y_2'x_3'y_3' \ldots$ e como todo elemento $0, x_1y_1x_2y_2x_3y_3 \ldots \in (0,1)$ é imagem de algum elemento de $(0,1)^2$, f também é sobrejetora. Assim, os conjuntos, $(0,1)^2$ e $(0,1)$ são equivalentes. A Figura 25 possibilita, de modo intuitivo, a visualização geométrica desta bijeção.

Figura 25: Bijeção entre a reta e o plano[19]



Como a cardinalidade do intervalo (0,1) é a mesma do conjunto dos reais, conclui-se que o plano $\mathbb{R}^2$ e a reta são conjuntos infinitos de mesma cardinalidade, isto é, $card(\mathbb{R}^2) = card(\mathbb{R})$. Este mesmo argumento pode ser utilizado para mostrar a equivalência entre o espaço tridimensional e a reta. Defina, de modo análogo a bijeção anterior, uma bijeção entre $(0,1)^3$ e $(0,1)$ e conclua que o número de pontos de uma reta é o mesmo que o número de pontos em todo o volume do universo. Após estas reflexões assista ao vídeo[20] de autoria da Equipe M3 da UNICAMP sobre o Os Infinitos de Cantor.

4.4 ENVOLVENDO OS ALUNOS

O objetivo é envolver os alunos na investigação sobre a função $f_2(x) = \tan\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)$, uma bijeção entre o intervalo (0,1) e o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. É momento de exercitar a utilização do *Geogebra* que ajudará na analise gráfica.

[19] Disponível em: http://www.searadaciencia.ufc.br/especiais/matematica/transfinitos/transfinitos4.htm. Acesso em 10/01/2013.
[20] Disponível em: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1120. Acesso em 10/01/2013.

Vamos pensar sobre a função tangente, investigando-a. Algumas indagações são sugeridas em cada passo.

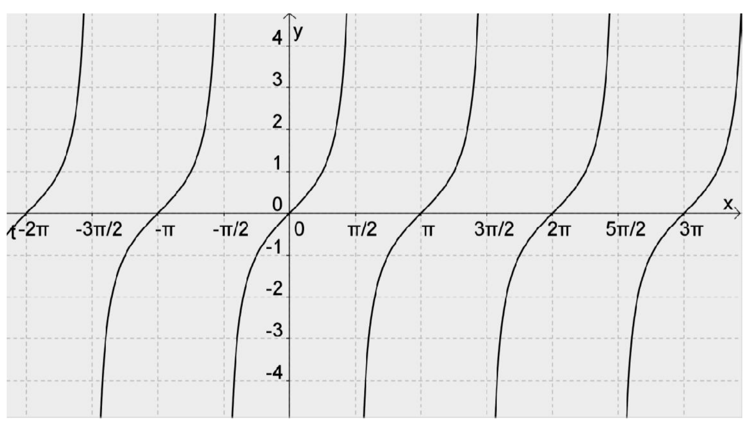
1º Passo: Qual o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ sobre o qual a função $f(x) = \tan(x)$ pode ser definida?

A função tangente é definida como uma razão entre as funções seno e cosseno, isto é, $f(x) = \frac{sen(x)}{\cos(x)}$. Desta forma, está definida para todos os valores de x onde $\cos(x) \neq 0$. Portanto, o domínio de f é o conjunto $D = \{x \in \mathbb{R}: x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Uma função f é dita ***periódica*****,** se existe um número $p \neq 0$ tal que $f(x+p) = f(x)$ para todo $x \in D$. Se isto ocorre, então $f(x+kp) = f(x)$ para todo $x \in D$ e todo $k \in \mathbb{Z}$. O menor número $p > 0$ que satisfaça a igualdade chama-se o *período* da função f. Note que a função tangente é períodica de período $p = \pi$. Pois,

$$f(x+\pi) = \tan(x+\pi) = \frac{\tan(x) + \tan(\pi)}{1 - \tan(x).\tan(\pi)} = \tan(x)$$

Figura 26: Gráfico da função tangente



2º Passo: É uma função injetora? Em caso negativo, é possível torná-la? É sobrejetora?

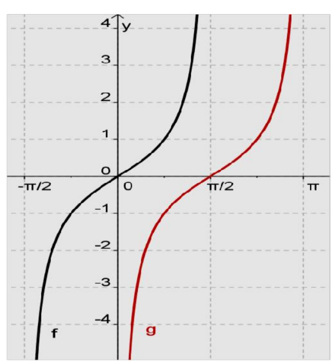
Definida em D a função tangente não é injetora, pois basta notar que $\frac{\pi}{4} \neq \frac{5\pi}{4} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right) = f(\frac{5\pi}{4})$. Porém, em cada um dos intervalos $(k\pi - \frac{\pi}{2}\cdot, k\pi + \frac{\pi}{2})$, para

$k \in \mathbb{Z}$ a função é *crescente*[21] logo injetora. Por exemplo, f é injetora no intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Como para todo $y \in f(D)$ existe um $x \in D$ tal que $f(x) = y$, então f é sobrejetora. Analisando o gráfico da função tangente note que $f(D) = (-\infty, +\infty)$, isto é, o conjunto imagem de f é o conjunto dos números reais. Note que no intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, por exemplo, a função tangente é bijetora. Isto nos garante que existem a mesma quantidade de pontos no intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e na reta. Como o objetivo é mostrar a bijeção entre o intervalo $(0,1)$ e a reta basta manipular a função tangente, fazendo uma translação e alterando o seu período. Nos passos seguintes será discutida esta situação.

3º Passo: O que ocorre quando é acrescentada (ou subtraído) uma constante ao argumento da função, isto é, $g(x) = tan\,(x + c)$ onde $c \in \mathbb{R}$? Faça o gráfico para $c = -\frac{\pi}{2}$.

Esta constante c simplesmente fará uma translação horizontal do gráfico de $f(x) = tan(x)$. Isto é, ocorrerá um deslocamento horizontalmente para direita ou para esquerda em c unidades. No caso de $c < 0$ então o gráfico de g será deslocado para direita e para $c > 0$ para esquerda. Observe, na Figura 27 os gráficos de f e g com domínio respectivamente nos intervalos $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e $(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = (0, \pi)$.

Figura 27: Translação da função ***f***



---

[21] Uma função $f: D \to \mathbb{R}$, com $D \subset \mathbb{R}$ é crescente quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Se uma função f é crescente então f é injetiva.

4º Passo: O que ocorre quando se multiplica o argumento da função tangente por um número real a? Analise a função $f_1(x)$ = tan (πx).

Esta constante provocará uma compressão horizontal, caso $a > 1$, e uma dilatação horizontal para $0 < a < 1$, ou seja, ocorre mudança no período da função tangente. Assim, se f é periódica com período p e se $g(x) = f(ax)$, $a > 0$ então g tem período $\frac{p}{a}$. De fato, se f tem período p então, para todo $x \in D$, $f(x + p) = f(x)$. Logo,

$$g\left(x + \frac{p}{a}\right) = f[a\left(x + \frac{p}{a}\right)]$$

$$= f(ax + p)$$

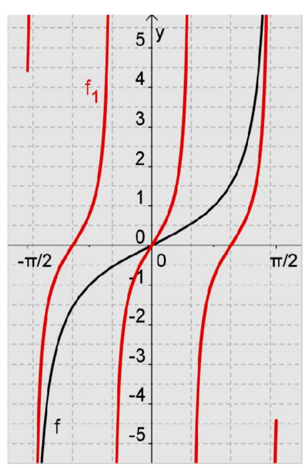
$$= f(ax)$$

$$= g(x)$$

o que mostra que g tem período $\frac{p}{a}$.

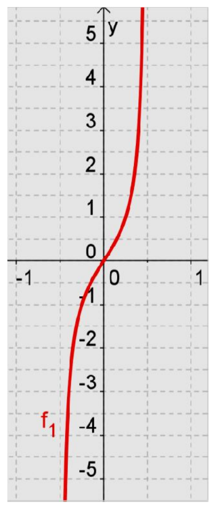
Considerando a função $f_1(x)$ = tan (πx), como $a = \pi > 1$, o gráfico desta função comprime-se em relação à função $f(x)$ = tan (x), o período $p = \frac{\pi}{\pi} = 1$ da função f_1 é menor do que o período da função f. Observe esta transformação na Figura 28, sendo $D = D_{f_1} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Figura 28: Compressão da função ***f***



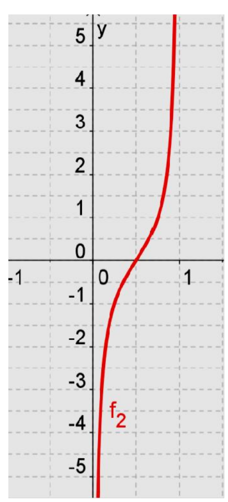
Note também que definindo a função $\boldsymbol{f_1}$ de $(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}})$ em $\mathbb{R}$, esta será bijetora. Intuitivamente podemos visualizar na Figura 29. É análoga a análise para $\boldsymbol{a} < 0$, porém, o gráfico fica simétrico em relação ao eixo OY.

Figura 29: Gráfico da função $\boldsymbol{f_1}$



5º Passo: Tomando a função $f_2(x) = \tan(\pi x - \frac{\pi}{2})$ tem-se uma bijeção entre o intervalo $(0,1)$ e o conjunto dos números reais. Pois, em relação à função f comprimiu-se o período para um e transladou-se horizontalmente para direita em $\frac{\pi}{2}$ unidades. Observe a Figura 30.

Figura 30: Gráfico da função $\boldsymbol{f_2}$



ATIVIDADE 5 - CONJUNTOS INFINITOS: UM TRATAMENTO GEOMÉTRICO

O objetivo deste tema é reforçar a propriedade fundamental dos conjuntos infinitos, de que o todo não é maior do que algumas de suas partes, apresentando geometricamente alguns exemplos de curiosas bijeções. A utilização de um *software* de geometria dinâmica ajudará visualizar as equivalências propostas.

Exemplo (5.1): Uma equivalência bastante interessante sugerida por Kubrusly (1999) mostra que uma semirreta contém o mesmo número de pontos do que um segmento qualquer. Primeiramente, comenta o Kubrusly (1999) que "é preciso entender a diferença entre pontos físicos e pontos matemáticos". Pontos físicos são pedaços de matéria que compõe o todo e pontos matemáticos são entidades matemáticas puramente abstratas, completa Kubrusly. Da geometria euclidiana, ponto não tem tamanho ou medida e por não ocupar espaço será possível amontoar uma infinidade deles em qualquer segmento de reta. A Figura 31 representa esta equivalência, construída conforme os passos a seguir.

1º Passo: Construa uma semirreta $\overrightarrow{AB}$ e um quadrado $AEDC$ de lado um.

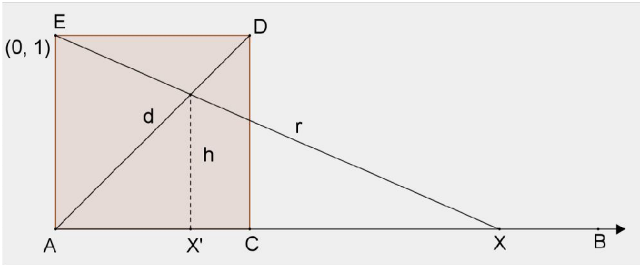
2º Passo: Une-se o vértice $E = (0,1)$ do quadrado de lado 1 a um ponto X qualquer da semirreta $\overrightarrow{AB}$ pelo segmento r.

3º Passo: Baixa-se a perpendicular desde a interseção de r com a diagonal d até o segmento AC.

4º Passo: Determina-se o ponto X' pertencente a AC.

Note que cada ponto X da semirreta $\overrightarrow{AB}$ tem um correspondente X' no segmento AC. A utilização do *Geogebra* permite, de forma intuitiva, visualizar esta correspondência é biunívoca.

Figura 31: A equivalência entre um segmento e uma semirreta



Brito (2007), em seu artigo, apresenta alguns exemplos que apresentados a seguir, com algumas adaptações.

Exemplo (5.2): Dois segmentos quaisquer $\overline{XY}$ e $\overline{PQ}$ têm a mesma quantidade de pontos. Suponha, por exemplo, $\overline{XY}$ = 1 cm e o segundo $\overline{PQ}$ = 3 cm.

1º Passo: Construa os segmentos paralelamente.

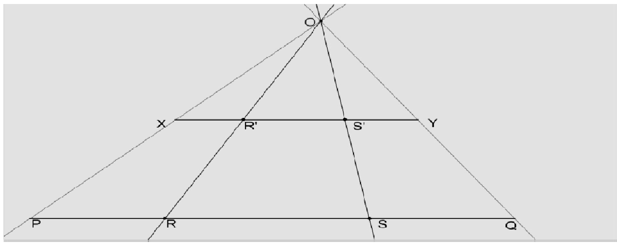
2º Passo: Trace as retas $\overleftrightarrow{XP}$ e $\overleftrightarrow{YQ}$ determinando o ponto O na interseção.

3º Passo: Tome um ponto R qualquer de $\overline{PQ}$ e trace a reta $\overleftrightarrow{OR}$.

4º Passo: Note, conforme Figura 32, que este ponto fica associado a um único ponto R' de $\overline{XY}$.

5º Passo: Observe que cada ponto S' de $\overline{XY}$ é relacionado com um único ponto S de $\overline{PQ}$ determinando uma correspondência biunívoca entre os segmentos.

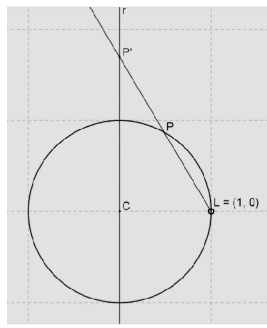
Figura 32: Segmentos equivalentes



Exemplo (5.3): Retirando de uma circunferência um ponto qualquer, esta passará a ter a mesma quantidade de pontos que uma reta. Interessante! Vamos construir esta bijeção.

Novamente com o auxílio do *Geogebra* (Figura 33). Construa uma circunferência λ, suponha centro C = (0,0) e raio 1, cuja equação será $x^2 + y^2 = 1$. Retire um ponto qualquer de λ, por exemplo, L = (1,0).

Figura 33: A equivalência entre a circunferência e a reta.

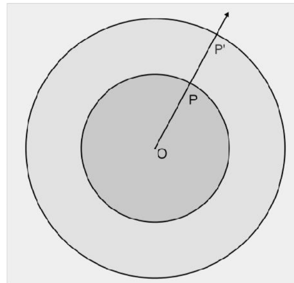


Trace a reta r, que contenha o centro da circunferência, de equação x = 0. Escolha um ponto qualquer $P \in \lambda$ diferente de L, e trace a semirreta $\overrightarrow{LP}$, note que esta reta não será paralela à reta r, pois $P \neq L$. Portanto, a semirreta $\overrightarrow{LP}$ interceptará a reta r em um único ponto P'. E qualquer ponto de r terá um único correspondente, diferente de L, na circunferência. Portanto, a cardinalidade destes objetos é igual.

5.1 Refletindo Sobre o Tema

- Duas circunferências quaisquer têm o mesmo número de pontos, independentemente de seus raios? Reflita. Observe a Figura 34, e tente mostrar a existência, ou não, desta equivalência.

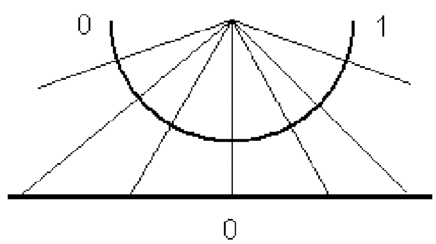
Figura 34: As circunferências são equivalentes?



- Reflita agora sobre a equivalência, ou não, entre a trajetória que a Terra descreve em torno do Sol e uma circunferência qualquer.

- É possível existir uma bijeção entre uma semicircunferência e uma reta? Observe a Figura 35 e justifique.

Figura 35: Uma semicircunferência e uma reta[22]



[22] Disponível em: http://www.searadaciencia.ufc.br/especiais/matematica/transfinitos/transfinitos3.htm Acesso em 10/01/2013.

ATIVIDADE 6 - SORTEANDO ALEATORIAMENTE UM NÚMERO NA RETA REAL QUAL A PROBABILIDADE DE QUE ESTE NÚMERO SEJA UM RACIONAL?

Os resultados das atividades anteriores mostraram que o conjunto dos números racionais é enumerável e o conjunto dos números reais é não enumerável. Uma conclusão é: existem números reais que não são racionais. A estes são chamados de ***números de irracionais***. São números com representação decimal infinita e não periódica.

O objetivo desta atividade será esclarecer a ordem na comparação do tamanho dos conjuntos dos números racionais e irracionais.

6.1 O Conjunto dos Números Irracionais

A recomendação dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (1998) é que a introdução do estudo dos números irracionais seja feita a partir do quarto ciclo do Ensino Fundamental, 8º e 9º ano. Os conceitos e procedimentos sugerem:

> Identificação de um número irracional como um número de representação decimal infinita, e não-periódica, e localização de alguns deles na reta numérica, com régua e compasso.
> Constatação que existem situações-problema, em particular algumas vinculadas à Geometria e medidas, cujas soluções não são dadas por números racionais (BRASIL, 1998, p. 87).

"No Ensino Médio, há necessidade de aprofundar o estudo dos números, de modo a ampliar o conhecimento e domínio deste conteúdo …" afirma as Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná (PARANÁ, 2008, p.52).

O ***conjunto dos números irracionais*** será denotado por $\mathbb{R}$-$\mathbb{Q}$. Observe que a notação utilizada enfatiza a característica dos elementos deste conjunto, pois, se $x \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$, então $x \in \mathbb{R}$ e $x \notin \mathbb{Q}$. Isto é, um número irracional é um número real, mas não é racional. Significa também que estes conjuntos, o dos números irracionais e dos racionais são disjuntos e sua união é o conjunto dos números reais.

Para produzir exemplos de números irracionais, basta uma regra de formação que não permita aparecer período.

Exemplo (6.1): 0,2571250187920028941... é um número irracional. Pois, este número tem expansão decimal infinita e não periódica.

Exemplo (6.2): 7,010010001000001... é um número irracional. Pois, este número tem expansão decimal infinita e não periódica, note que a quantidade de zeros entre cada dígito um está aumentando.

Exemplo (6.3): $\sqrt{2}$ é um número irracional.

A escola pitagórica (séc. VI a.C) acreditava que toda grandeza pudesse ser expressa como a razão entre dois segmentos inteiros, isto é, que todos os números eram racionais. Descreve Ávila (2006, p. 53) que "a descoberta de grandezas incomensuráveis foi feita pelos próprios pitagóricos; e representou um momento de crise na Matemática". Na tentativa de expressar pela razão de dois segmentos inteiros o lado e a diagonal de um quadrado os pitagóricos são levados a aceitar os números que hoje chamamos de irracionais. Tomando, por exemplo, o quadrado de lado um, sua diagonal d é a solução da igualdade $d^2 = 1^2 + 1^2$, que é um número irracional. Sua representação decimal tem infinitos algarismos não periódicos e é simbolizado por $\sqrt{2}$. Tal fato pode ser justificado utilizando o método de redução ao absurdo como mostra a demonstração a seguir.

Demonstração: Suponha que $\sqrt{2}$ seja um número racional, então existem inteiros p e q, $q \neq 0$ tal que o quadrado da fração irredutível ${}^{p}/_{q}$ seja igual a 2. Assim, $\frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow p^2$ é par[23] $\Rightarrow p$ é $par \Rightarrow p = 2n$, $onde\ n \in \mathbb{Z}$. Logo, $(2n)^2 = 2q^2 \Rightarrow 2n^2 = q^2 \Rightarrow q^2$ é $par \Rightarrow q$ é par. Uma contradição, p e q simultaneamente números pares, pois afirmamos ${}^{p}/_{q}$ é irredutível. Assim, não

[23] p^2 é par, pois é igual ao dobro de q^2. E conclui-se que p é par, pois se fosse ímpar seu quadrado também seria ímpar.

podemos aceitar a suposição inicial, portanto concluímos que $\sqrt{2}$ é um número irracional.

Comprovamos que $\sqrt{2}$ é um número irracional, a dúvida agora é qual a representação decimal desse número. Escrever a expansão decimal de um número irracional é impossível, pois é infinita e não periódica. Porém, é possível encontrar aproximações por números racionais da seguinte forma:

$1{,}4^2 = 1{,}96 < 2$

$1{,}41^2 = 1{,}9881 < 2$

$1{,}414^2 = 1{,}999396 < 2$

$1{,}4142^2 = 1{,}99996164 < 2$

$1{,}414213562373^2 = 1{,}9999999999997 < 2$

$\vdots$

Assim uma boa aproximação para $\sqrt{2}$ é 1,414213562373. Pois, sendo um número irracional sua expansão decimal é infinita.

Exemplo (6.4): $\sqrt{p}$ é um número irracional, onde p é um número primo.

Utilizando o mesmo argumento do exemplo anterior conseguimos citar e demonstrar infinitos números irracionais. Pois o conjunto dos números primos é infinito (ver 2.5).

Teorema (6.5): A soma ou diferença entre um número racional e um número irracional é um irracional.

Demonstração: Sejam a um número racional e α um número irracional. Se $x = a + \alpha$ fosse racional, então $\alpha = x - a$ seria racional, o que é absurdo, pois a diferença de dois racionais é um racional. Assim, concluímos que $a + \alpha$ é irracional.

Cuidado! O produto de dois irracionais pode ser um racional. Basta notar que $\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$ dois irracionais cujo produto $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$, um racional.

Qualquer solução de uma equação polinomial da forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

onde os coeficiente são números inteiros, é chamado um ***número algébrico***.

Exemplo (6.6): 5 é um número algébrico, pois cinco é solução da equação $2x - 10 = 0$.

Exemplo (6.7): $\sqrt{3}$ é um número algébrico, pois $\sqrt{3}$ é solução da equação $4x^2 - 12 = 0$.

Os irracionais algébricos são sempre raízes de alguma equação algébrica onde todos os coeficientes são números inteiros.

Teorema (6.8): O conjunto de todos os números algébricos é enumerável. (Ver Apêndice B)

Um número que não seja algébrico é chamado ***transcendente***. Não existe equação algébrica com coeficientes inteiros que o tenha como raiz. São números "estranhos" afirma Machado (1991). Os irracionais transcendentes são exemplos delicados, pois, não é trivial demonstrar este fato completa Machado. Os mais conhecidos são os números $\pi = 3{,}1415\ldots$ (razão entre o comprimento e o diâmetro de qualquer circunferência) e o número de Euler $e = 2{,}7182\ldots = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \ldots.$

Exemplo (6.9): São números irracionais transcendentes: $2^{\sqrt{2}}$, $\log_{10} 2$, $sen(a)$, $cos(a)$, $tan(a)$, $sec(a)$, $cossec(a)$, $cotan(a)$, se a (em radianos) é algébrico e não nulo.

$\log_e a = \ln a$, se a é algébrico e $a \neq 0$ e $a \neq 1$.

A impressão é de que estes números parecem ser exceções, e que são poucos diante dos infinitos números reais. Cuidado com a intuição. O próximo teorema nos garante a existência de infinitos transcendentes.

Teorema (6.10): Existem infinitos números transcendentes.

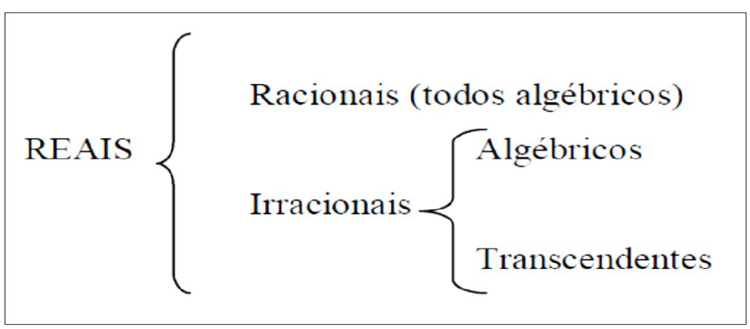
Demonstração: Do Teorema (4.2) sabemos que a união de enumeráveis é um enumerável. Sendo $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ um conjunto não enumerável e $\mathbb{Q}$ enumerável então $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ é não enumerável. Este resultado garante que os números irracionais são incontáveis. Do Teorema (6.8) segue que o conjunto dos números algébricos é enumerável, então o conjunto dos transcendentes é não enumerável.

Resultado do Teorema (6.10) é surpreendente, e contraintuitivo, a respeito da aparente escassez dos transcendentes. Podemos concluir que existem mais irracionais transcendentes do que algébricos. Segundo Machado (1991)

> apesar de, ao longo de toda a vida escolar, não termos contato senão com alguns poucos números transcendentes, alias poucos irracionais, quase todos os números reais são irracionais e quase todos os números irracionais são transcendentes.

Na próxima seção é proposta uma brincadeira para desmistificar tal fato. Na Figura 36 está representada a classificação para os números reais.

Figura 36: Classificando os números reais



6.2 REFLETINDO SOBRE O TEMA

- Dona Rosa tem uma mesa de tampo quadrado de um metro de lado. Ela precisa de uma nova mesa, também de tampo quadrado, porém com o dobro da área da atual. É possível que o marceneiro de confiança desta senhora consiga atendê-la de forma matematicamente correta? Justifique. Este questionamento tem como objetivo a reflexão sobre a representação concreta de uma grandeza expressa por um número irracional.

- Existem números racionais e irracionais nos intervalos $A = \left(\frac{1}{100}, \frac{1}{10}\right)$ e $B = \left(\sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$? Em caso afirmativo, exiba pelo menos cinco deles e explique sua estratégia para encontrá-los.

- Considere a função $f\colon (0,1) \to (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x & se \quad x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ x + \sqrt{2} & se \quad x \in \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Note que f está bem definida, os irracionais são levados por uma relação de identidade e os racionais são transformados em uma soma com a $\sqrt{2}$, logo uma imagem irracional também. Justifique a injetividade da função f.

Relembrando que:

✓ Dados dois conjuntos A e B, tem-se $card(A) \leq card(B)$ quando existe uma função injetora $f\colon A \to B$ (Ver página 52).

✓ Se $A \subset B$, então $card(A) \leq card(B)$ (Teorema (4.4)).

✓ $card[(0,1)] = card(\mathbb{R})$

Com estas informações como justificar que $card(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = card(\mathbb{R})$?

6.3 ENVOLVENDO OS ALUNOS

- Vamos brincar

Frisando que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é enumerável e o conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ dos números irracionais é não enumerável. Este resultado garante que os números irracionais são “incontáveis”; sua cardinalidade maior do que a do conjunto dos racionais. Isto é, existem muito mais irracionais do que racionais. Vamos nos convencer deste fato através de uma brincadeira.

A brincadeira será sortear um número. Dois jogadores apostam no resultado deste sorteio. Um concorrerá para o resultado ser um número racional e o outro um número irracional. Restringiremos os números ao intervalo (0,1), como este conjunto é equivalente à reta, o que acontecer neste intervalo generalizaremos para a reta toda. Sabemos que um número pertencente a este intervalo tem expansão decimal como $0, x_1x_2x_3x_4x_5$ ....

Preparamos o jogo enumerando dez fichas com os algarismos de 0 a 9 e as colocamos numa urna. Feitas as apostas sorteamos uma ficha após a outra, com a reposição destas após cada sorteio, e vamos construindo o número decimal conforme a sequência numeral das fichas. Isto é, o algarismo que aparecer no sorteio da primeira ficha corresponderá ao dígito x_1, o algarismo da ficha dois corresponderá ao x_2, e assim sucessivamente repetimos o processo infinitamente.

1ª Aposta: Sorteia-se a primeira ficha, algarismo número dois. Sorteia-se a segunda ficha, algarismo três. Ficha três, algarismo dois. Ficha quatro, algarismo três. Ficha cinco algarismo dois. Ficha seis, algarismo três. Os resultados se repetindo indefinidamente, alternando as fichas com posição ímpar, aparecendo o algarismo dois, nas posições pares, o algarismo três. Portanto, o jogador que apostou em racional saiu vitorioso, pois o resultado final gerou o número 0,232323 ... que é uma expansão infinita periódica representada pela fração $\frac{23}{99}$.

Os jogadores gostaram da brincadeira e resolveram fazer nova aposta. O resultado segue no exemplo a seguir.

2ª Aposta: Na primeira ficha sorteada apareceu o algarismo número cinco. Nas fichas sucessivas todas constaram o algarismo zero. Assim, o número formado foi $0{,}5000\ldots = 0{,}5 = \frac{1}{2}$, novamente um número racional. Lembre-se toda representação decimal finita de um número racional pode ser associada a representações infinitas. Por exemplo, $0{,}5 = 0{,}49999\ldots = 0{,}5000\ldots$.

3ª Aposta: Inconformado com as duas derrotadas e desconfiado dos resultados o apostador solicitou, outro método para o sorteio das fichas. A desconfiança estava na falta de aleatoriedade do sorteio. Desta forma, combinaram utilizar uma planilha eletrônica para gerar estes números aleatoriamente, vejam os resultados na Tabela 2. Cada um dos 20 primeiros dígitos foi gerado aleatoriamente de forma eletrônica, como no caso das fichas.

Tabela 2: O sorteio de vinte algarismos formando dez números

	0	,	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}	x_{19}	x_{20}	
1º Núm.	0	,	3	4	4	9	1	6	5	2	6	7	0	6	7	7	4	3	2	9	7	5	..
2º Núm.	0	,	8	7	7	4	5	4	6	5	6	4	9	7	5	7	4	4	0	2	2	4	..
3º Núm.	0	,	6	3	7	0	0	1	0	8	9	8	2	1	8	8	0	7	3	1	1	7	..
4º Núm.	0	,	9	1	0	6	4	1	5	4	0	3	7	1	2	3	3	0	6	8	0	6	..
5º Núm.	0	,	1	4	2	1	3	5	5	8	6	1	9	7	2	9	7	7	5	4	8	8	..
6º Núm.	0	,	1	5	6	0	7	3	8	8	8	3	3	5	1	6	4	8	0	4	1	0	..
7º Núm.	0	,	3	1	3	0	8	5	9	9	7	4	4	8	6	9	5	4	3	3	2	0	..
8º Núm.	0	,	8	0	0	3	8	6	7	7	7	2	2	8	3	8	1	8	1	6	3	4	..
9º Núm.	0	,	4	4	5	3	9	2	7	4	4	2	0	3	2	8	6	4	7	7	2	0	..
10º Núm.	0	,	3	0	3	6	8	7	9	3	4	1	5	9	8	4	9	2	4	3	9	8	...

Fonte: O autor

Os números formados são:

$$0{,}34491652670677432975\ldots$$

$$0{,}87745465649757440224\ldots$$

$$0{,}63700108982188073117\ldots$$

$$0{,}91064154037123306806\ldots$$

$$\vdots$$

Ah! Agora os números gerados pela sequência das vinte primeiras fichas mostram não existir periodicidade, logo se o processo for repetido infinitamente teremos números irracionais. Friso aqui, e é importante que fique bem claro, se o processo for finito o número gerado será sempre racional. Mas, não esqueça, a brincadeira são infinitos sorteios. Parece que a brincadeira perdeu a graça para aquele que estava apostando em resultados que apresentassem números racionais.

Estes dez exemplos nos parece pouco para concluir a existência de uma quantidade infinitamente maior de números irracionais comparados aos racionais. Mas se repetirmos este processo quarenta ou quatrocentas vezes você talvez vá se convencer de tal fato. O objetivo desta brincadeira não é provar que a quantidade de irracionais é infinitamente superior ao dos racionais, mesmo porque exemplos não demonstram a veracidade de uma proposição. Mas sim ilustrar a representatividade dos irracionais na reta a ponto de podermos afirmar que devido à correspondência biunívoca dos reais com a reta, se retirarmos desta os números irracionais ela se restringirá a uma levíssima poeira imperceptível.

Respondendo ao questionamento inicial desta atividade Moreira (2006) afirma que

> Na primeira metade do século XX o matemático russo A. Kolmogorov[24] estabelece de forma rigorosa a teoria da probabilidade […] e mostrou que conjuntos enumeráveis são irrelevantes do ponto de vista probabilístico. Em particular, como os racionais são enumeráveis, segue que a escolha aleatória de um número num intervalo real nunca resultará num número racional.

- Ainda comparando a cardinalidade do conjunto dos números racionais e dos irracionais

Outra brincadeira, conhecida como cabra-cega, pode ajudar nesta comparação. Sugestão proposta por Nilson José Machado em artigo intitulado “A Alegoria em Matemática” (1991). Imagine a reta real estendida como um varal esticado horizontalmente, à altura dos olhos. Munidos de uma agulha de ponta bem fina e com os olhos vendados, “espete” um número ao acaso; terá sido ele racional ou irracional? Qual a probabilidade de ser racional? Qual a probabilidade de ser irracional? Pense nesta brincadeira e argumente suas considerações.

[24] Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987) matemático russo que contribui com descobertas na área de probabilidade e estatística no decorrer do século XX.

ATIVIDADE 7 - INVESTIGANDO O CONJUNTO DE CANTOR

"As investigações matemáticas envolvem, naturalmente, conceitos, procedimentos e representações matemáticas, mas o que mais fortemente as caracteriza é o estilo de conjectura, teste e demonstração", afirma Ponte (2006). Neste sentido esta atividade propõe investigar o conjunto de Cantor, tendo como objetivo principal discutir a sua cardinalidade. Porém, na construção do conjunto surgirão desde problemas simples como operações de frações, reconhecimento de padrões até conceitos e propriedades mais sofisticadas, como as referentes à topologia do conjunto. Mas o contato com o infinito é que fará surgir as intrigantes constatações.

O desenvolvimento deste tema é uma descrição de como o educador pode estar explorando esta atividade.

7.1 A Construção

O conjunto de Cantor dos terços médio aqui chamado de conjunto de Cantor, e nomeado pela letra C, é um famoso conjunto construído primeiramente por Georg Cantor em 1883. Ele é simplesmente um subconjunto do intervalo [0,1], mas com propriedades interessantes. Inicia-se descrevendo a construção do conjunto.

1º Passo: Considere o intervalo $F_0 = [0,1]$.

2º Passo: Retire do intervalo [0,1] seu terço médio aberto $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$, obtendo:

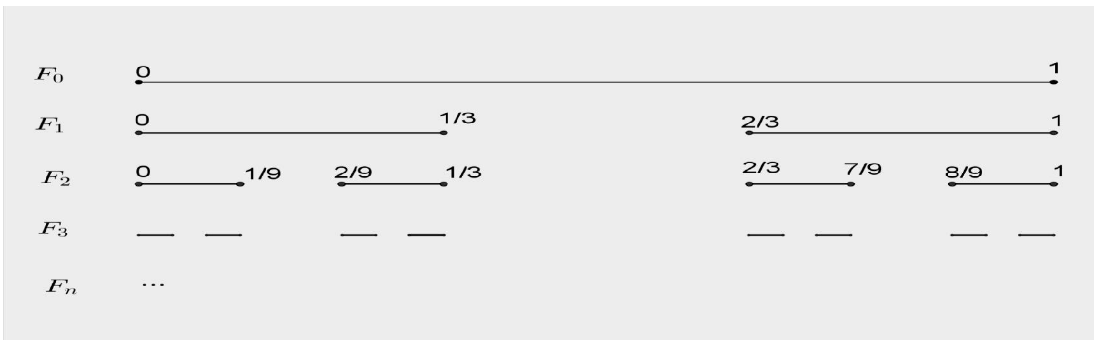
$$F_1 = \left[0,\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3},1\right].$$

3º Passo: Retire novamente o terço médio aberto de cada um dos intervalos restantes, obtendo:

$$F_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

Próximos passos: Repete-se o processo indefinidamente sempre retirando os terços médios abertos dos intervalos restantes da etapa anterior, obtendo $F_3, F_4, \ldots$. O conjunto C dos pontos não retirados é o conjunto de Cantor. Observe na Figura 37 a construção das primeiras etapas.

Figura 37: Primeiras etapas na construção do conjunto de Cantor



Note que $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \cdots$ e para cada $n \in \mathbb{N}$, F_n é a união de 2^n intervalos fechados, cada um com comprimento $\left(\frac{1}{3}\right)^n$. Assim, $C = \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$ é o conjunto de Cantor. Ou também, C é o conjunto de todos os pontos não removidos após a retirada de infinitos intervalos abertos.

O momento da construção de cada etapa é propício para recordar operações com frações, o conceito de intervalo aberto, a diferença entre conjuntos, a união de intervalos e o conceito de intervalos disjuntos. A relação de pertinência pode ser explorada questionando, por exemplo, se ¼ é ou não elemento de C_n, n-ésima etapa da construção do conjunto. Naturalmente, algumas indagações surgem ou podem ser instigadas pelo professor, tais como:

- ✓ Sobram elementos neste conjunto após infinitas iterações?
- ✓ Se existem quem são eles? São infinitos?
- ✓ C é enumerável?
- ✓ Qual a sua cardinalidade?

7.2 PROPRIEDADES INTRIGANTES.

As perguntas que ao longo da construção do conjunto foram aparecendo devem ser fonte para a inserção das curiosas propriedades deste conjunto e, desta forma, sendo respondidas.

Propriedade 1: O conjunto C de Cantor não é vazio. Pelo contrário possui infinitos elementos.

Em cada passo da sua construção são removidos apenas os pontos interiores dos intervalos restantes da etapa anterior, isto é, pelo menos os extremos destes intervalos, como 0, 1/3, 2/3, 1/9, 1, etc. são sempre elementos do conjunto, logo C não é vazio. E mais estes pontos são infinitos e formam um subconjunto enumerável de C. De fato, são infinitos, pois estes pontos são extremos de intervalos e cada etapa o número de intervalos dobra em relação ao anterior. Observe também que todo extremo é um número racional, e como o conjunto Q é enumerável, segue que o conjunto dos extremos é infinito e enumerável.

Propriedade 2: C não possui intervalos.

Na construção de C após a n-ésima etapa resta apenas intervalos de comprimento $\left(\frac{1}{3}\right)^n$, ou seja, com comprimento tendendo a zero. Daí segue que o conjunto de Cantor não contém intervalos, pois por menor que seja um intervalo deverá ter comprimento maior que zero.

Propriedade 3: A soma dos comprimentos dos intervalos removidos converge para um.

De fato, se somarmos o tanto que se retira em cada etapa, ou seja, o comprimento do que removemos temos:

$$\mathbf{1}\cdot\frac{1}{3}+\mathbf{2}\cdot\frac{1}{9}+\mathbf{4}\cdot\frac{1}{27}+\mathbf{8}\cdot\frac{1}{81}+\mathbf{16}\cdot\frac{1}{243}+\cdots$$

Uma soma infinita de uma progressão geométrica[25] de razão $r = \frac{2}{3} < 1$, logo convergente para $\frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 1$.

Surpreendente quando se analisa a diferença entre o comprimento do intervalo [0,1] e a somatória dos intervalos removidos, concluindo que o conjunto C tem comprimento zero, mesmo como uma infinidade de elementos.

Propriedade 4: Todo elemento pertencente ao conjunto de Cantor é escrito na base três apenas com os algarismos zero e dois.

Dado $x \in [0,1]$, representar x na base 3, significa escrever $x = 0, x_1 x_2 x_3 \ldots$, onde cada um dos dígitos x_n é igual a 0, 1 ou 2 de tal modo que:

$$x = x_1 \cdot \frac{1}{3} + x_2 \cdot \frac{1}{3^2} + \cdots + x_n \cdot \frac{1}{3^n} + \cdots = (0, x_1 x_2 x_3 \ldots)_3$$

Exemplo (7.1):

$$1 = 2 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3^2} + 2 \cdot \frac{1}{3^3} + \cdots + 2 \cdot \frac{1}{3^n} + \cdots = (0{,}222\ldots)_3$$

$$\frac{8}{9} = 2 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3^2} = (0{,}22)_3 = 2 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3^2} + 2 \cdot \frac{1}{3^3} + \cdots + 2 \cdot \frac{1}{3^n} + \cdots = (0{,}21222\ldots)_3$$

$$\frac{1}{3} = 0 + 1 \cdot \frac{1}{3} = (0{,}1)_3 = 0 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3^2} + 2 \cdot \frac{1}{3^3} + \cdots + 2 \cdot \frac{1}{3^n} + \cdots = (0{,}0222\ldots)_3$$

Observe que todo número, em qualquer base, tem pelo menos uma escrita infinita. Por exemplo, o número 1 pode ser escrito, na base dez de duas maneiras, como $1{,}000\ldots$ ou $0{,}999\ldots$, na base três, apenas pela representação $0{,}222\ldots$. O número $\frac{1}{3}$ na base decimal tem apenas a expansão infinita 0,333..., porém, na base ternária tem a expansão finita $\frac{1}{3} = (0{,}1)_3$ ou a expansão infinita

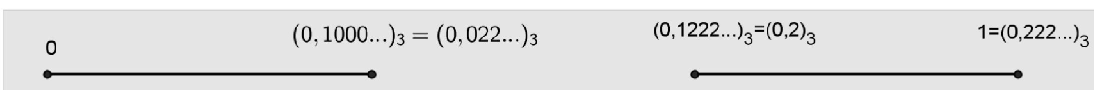
[25] A soma de uma progressão geométrica de $|r| < 1$ e primeiro termo a_1 é igual ao limite das somas parciais S_n, isto é, $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-r}$.

$\frac{1}{3}$ = $(0{,}0222\ldots)_3$. Outro exemplo, é $\frac{8}{9}$ = $(0{,}22)_3$ = $(0{,}21222\ldots)_3$. Os números irracionais tem apenas uma representação possível, a infinita, porém não periódica.

Analisando cada etapa da construção do conjunto C, note que quando se retira o primeiro terço médio, este removerá os números com expansão ternária maiores do que $(0{,}1)_3$ e menores do que $(0{,}2)_3$ (Figura 38). Isto é, da forma $(0{,}1xxx\ldots)_3$, tal que $(0{,}100\ldots)_3 < (0{,}1xxx\ldots)_3 < (0{,}1222\ldots)_3$.

Assim os números restantes da primeira etapa são da forma: $(0{,}0xxx\ldots)_3$ ou $(0{,}2xxx\ldots)_3$ que pertencem respectivamente aos intervalo $\left[0,\frac{1}{3}\right]$ e $\left[\frac{2}{3},1\right]$ na representação decimal.

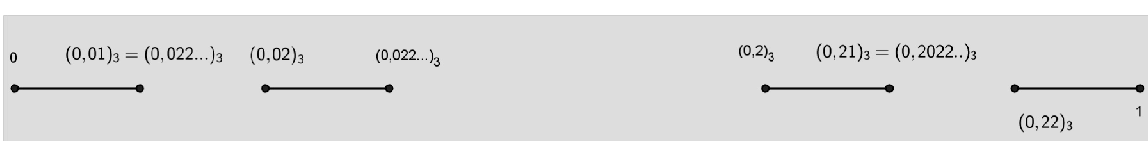
Figura 38: Números ternários restantes após a primeira etapa na construção de C.



Resumindo os números remanescentes após o primeiro passo são aqueles que admitem uma representação ternária de tal modo que o primeiro dígito após o ponto decimal não é igual a 1. Não esquecendo que os extremos de cada subintervalo têm duas representações.

O segundo passo removerá números da forma $(0{,}01xxx\ldots)_3$ e $(0{,}21xxx\ldots)_3$, não esquecendo das duas representações para os extremos de cada intervalo. Conclui-se que os números restantes são aqueles com um número ternário onde os dois primeiros dígitos não são iguais a 1.

Figura 39: Números ternários restantes após a segunda etapa na construção de C.



Continuando desta maneira, após n etapas os números restantes são aqueles com um número ternário onde os n primeiros dígitos são diferentes de

1. Para um número pertencer ao conjunto de Cantor não deverá ser excluído em qualquer etapa da sua construção, portanto temos que admitir que se $x = 0,x_1x_2x_3 \ldots \in C$, então $x_1, x_2, x_3, \ldots$ são todos iguais a 0 ou 2.

Interessante, um número pertence a C tem na sua expansão ternária apenas os dígitos 0 ou 2. Desta forma, ficou fácil citar elementos deste conjunto.

Exemplo (7.2): $(0{,}0020022)_3 = 0.\frac{1}{3} + 0.\frac{1}{3^2} + 2.\frac{1}{3^3} + 0.\frac{1}{3^4} + 0.\frac{1}{3^5} + 2.\frac{1}{3^6} + 2.\frac{1}{3^7} = \frac{170}{2187}$

Exemplo (7.3): $\frac{1}{4} \in C$.

De fato, $\frac{1}{4} = (0{,}020202\ldots)_3 = 0.\frac{1}{3} + 2.\frac{1}{3^2} + 0.\frac{1}{3^3} + 2.\frac{1}{3^4} + \cdots + 0.\frac{1}{3^n} + 2.\frac{1}{3^{n+1}} + \cdots$

Exemplo (7.4): $(0{,}020200200020000\ldots)_3$ é um número irracional pertencente ao conjunto C.

Propriedade 5: O conjunto de Cantor contém tantos pontos quanto o intervalo a qual foi retirado. Ou seja, $card(C) = card\ ([0,1])$.

Apesar de a cada nova iteração retirar-se um terço de cada segmento é possível comprovar que C é equivalente ao intervalo [0,1]. Tal fato é demonstrado utilizando o método de redução ao absurdo e a estratégia do processo diagonal de Cantor.

Demonstração: Sabendo que todos os elementos de C são escritos na base três apenas com dígitos zero e dois, conforme propriedade 4, e supondo C enumerável, podemos listá-los:

$$a_1 = 0,\boldsymbol{a_{11}}a_{12}a_{13}\ldots$$

$$a_2 = 0,a_{21}\boldsymbol{a_{22}}a_{23}\ldots$$

$$\vdots$$

$$a_k = 0,a_{k1}a_{k2}a_{k3}\ldots$$

Onde a_{ij} = 0 ou 2 para todo i, j.

Agora basta encontrar um elemento de C que não esteja nesta enumeração. Tomando $y = 0, b_1 b_2 b_3 \ldots$ onde $b_i = \begin{cases} 0 & se \quad a_{ii} = 2 \\ 2 & se \quad a_{ii} = 0 \end{cases}$. Como $y \neq a_1$, pois $b_1 \neq a_{11}$, $y \neq a_2$, pois $b_2 \neq a_{22}$ e assim por diante, tem-se que $y \notin C$. Uma contradição, pois y tem expansão ternária com todos os $b_i \in \{0,2\}$ e não está na lista. Logo, somos levados a concluir que C não é enumerável. Portanto, a mesma cardinalidade do intervalo [0,1] porque é um subconjunto não enumerável deste intervalo.

7.3 Refletindo sobre o Tema

"Um fractal é uma forma cujas partes se assemelham ao seu todo sob alguns aspectos." (FEDER, 1988, apud BARBOSA, 2005, p.18).

- Cada parte do conjunto C de Cantor é semelhante ao todo?
- É possível representar completamente este conjunto?
- Independentemente da escala a que se observa este conjunto obtém-se sempre a mesma figura?
- Tem dimensão euclidiana?
- O conjunto C de Cantor é um fractal?

CONCLUSÃO

Procurei apresentar uma sequência de atividades para o ensino de Matemática, com aplicações na Educação Básica. Em cada um dos temas apresentados o foco foi surpreender. Este, no meu entendimento, é o grande diferencial no processo ensino aprendizagem. Despertar a vontade pelo conhecimento faz a diferença entre a inércia e a ação. No final do século XIX Cantor surpreende o mundo estabelecendo as diretrizes no tratamento para o número de elementos de um conjunto. Foram estas surpresas que procurei transmitir no desenvolvimento das atividades. Considerando como de mesma cardinalidade dois conjuntos entre os quais seja possível uma bijeção, o conceito de contagem ficou assim estendido para conjuntos infinitos. Utilizando-se, para isto, a mesma ideia da contagem para o número de elementos em um conjunto finito, a comparação.

Na primeira atividade procurei organizar conceitos matemáticos necessários para entender as demais propostas. Na sequência busquei provocar o aluno sobre a possibilidade de contar até o infinito, “contar é falar a linguagem dos números” afirma Kasner (1968). Os números naturais são “o modelo que torna possível o processo de contagem” esclarece Lima (2006). Cantor define de conjuntos enumeráveis, os conjuntos equivalentes ao dos números naturais. Mostrando que não existia nenhuma anomalia na bijeção apresentada por Galilei Galileu em 1640, entre os números naturais e os quadrados perfeitos. Mas sim a caracterização para os conjuntos infinitos. Um conjunto é infinito se ele puder ser colocado em correspondência biunívoca com alguma de suas partes próprias, define Dedekind. Este passeio à construção dos conceitos sobre a teoria dos conjuntos infinitos que procurei apresentar no desenvolvimento da terceira atividade.

Em 1874 Cantor, “o homem que domou o infinito” afirma Schechter, demonstra que o conjunto dos números reais não é equivalente aos naturais, estabelecendo assim que existem pelo menos dois infinitos de “tamanhos” diferentes. Esta surpresa foi o foco da quarta atividade que Bongiovanni (1993, p.19) completa dizendo que

> a descoberta mais notável de Cantor nesse âmbito foi, entretanto, provar que se pode encontrar sempre um conjunto maior do qualquer conjunto dado. Esse resultado é conhecido como o Teorema de Cantor.

"A prática pedagógica de investigações matemáticas tem sido recomendada por diversos estudiosos como forma de contribuir para uma melhor compreensão da disciplina" (PARANÁ, 2008, p. 67). Nas seções "Envolvendo os alunos" foram propostas discussões com objetivos metodológicos de caráter investigativo. Afirma Ponte (2003, p. 2) que numa investigação matemática,

> parte-se de uma questão muito geral ou de um conjunto de informações pouco estruturadas a partir das quais se procura formular uma questão mais precisa e sobre ela produzir diversas conjecturas.

Na investigação proposta sobre a função tangente procurei esclarecer a equivalência entre um intervalo da reta e a reta. Também neste sentido sobre a metodologia das investigações matemáticas sugeri a construção do conjunto de Cantor, no desenvolvimento da última atividade. Uma questão, inicialmente, com poucas informações, porém com conjecturas interessantes.

O contato com a geometria possibilita o estudante a "conjecturar, descobrir, projetar, representar quando lida com as formas" afirma Santos (2007, p.3), a quinta atividade buscou proporcionar este aprendizado quando propomos a visualização da equivalência de conjuntos infinitos através do uso de um *software* de geometria dinâmica.

Espero que trabalhos futuros possam relatar os resultados destas atividades, apontar os acertos e as dificuldades encontradas. É com esta intenção que as sugestões de reflexões não aparecem com respostas. Avalio que o primeiro tema seja de fácil entendimento, essencial ao ensino médio, e não contem maiores problemas. Por outro lado, investigar o conjunto de Cantor será desafiador, porém acredito que reservará grande aprendizado. Aos demais, são esperadas dificuldades medianas e muito similares. Talvez diferentes reações até mesmo nos professores, pois, em geral, no ensino médio, conceitos como cardinalidade e enumerabilidade são pouco explorados.

Acredito que este trabalho possa exercer o papel de material de apoio a professores, alunos e a todos cativados pelo conhecimento matemático. Almejo também que este assunto seja fonte para o mesmo entusiasmo a que fui surpreendido. A busca incessante por mais informações sobre as contribuições de Gerorg Cantor foi enriquecedora para o meu amadurecimento matemático; a cada nova descoberta, uma imensa satisfação. É este contentamento com o aprendizado que procurei transmitir, na expectativa de ser multiplicador do conhecimento.

REFERÊNCIAS

ALENCAR, R.; ABUD, Z. Quantos tem? para conjuntos infinitos. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n.57, p. 41-48, 2005.

ANDRADE, M. G. Um breve passeio ao infinito de Cantor. **V Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática**. UFPB, 2010.

AVILA, G. A teoria dos conjuntos e o ensino de matemática. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n.4, p. 4-8, 1984.

_____ **Análise matemática para licenciatura.** 3 ed. São Paulo: Blucher, 2006.

_____ **Várias faces da matemática: tópicos para licenciatura e leitura em geral.** 2 ed. São Paulo: Blucher, 2011.

BARBOSA, R. M. **Descobrindo a Geometria Fractal – para a sala de aula.** 3 ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2005.

BONGIOVANNI, V. 1, 2, 3, ... e depois? **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n.24 , p. 16-20, 1993.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. (E. F. Gomide, Trad.) São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática**. Brasília: MEC; SEF, 1998.

_____. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio: ciências da Natureza, matemática e suas tecnologias**. Brasília: MEC; SEMTEC, 2002.

BRITO, F. R. Quantos tem? Para conjuntos Infinitos: Uma Visão Geométrica. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n.64, p. 21-24, 2007.

CAMARGO, M. A. Caracterização dos Números Racionais e Irracionais. **Revista da Olimpíada** - IME - UFG, p. 64-72, 2003.

MORAIS FILHO, D. C. **Um Convite à Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. (H. Domingues, Trad.) Campinas: UNICAMP, 2004.

FERREIRA, J. **A Construção dos Números.** 2 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

FIGUEIREDO, D. G. **Números Irracionais e Transcendentes.** 3 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

HALMOS, P. R. **Teoria Ingênua dos Conjuntos**. (I. Bicudo, Trad.) São Paulo: Polígono S.A, 1970.

HILBERT, D. Sobre o infinito. **Mathematics Annalen**. (M. Papini, Trad.). Sociedade Matemática de Westfalen. p.161-190, 1926.

KASNER, E.; NEWMAN, J. **Matemática e Imaginação**. (J. Fontes, Trad.) Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1968.

KUBRUSLY, R. S. **O tamanho do infinito**. 1999. Disponível em: http://www.dmm.im.ufrj.br/projeto/diversos/tamanho.html. Acesso em 21 dez. 2012.

LIMA, E. L. **Curso de Análise**. 11 ed. v.1. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2004.

_____ **A Matemática do Ensino Médio**. 9 ed., v.1. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIPSCHULTZ, S. **Teoria dos Conjuntos**. (F. V. Silva, Trad.) São Paulo: McGraw-Hill, 1972.

MACHADO, N. J. A Alegoria em Matemática. **Estudos Avançados**, São Paulo, v. 5, n. 13, p. 79-100, set-dez. 1991.

MOREIRA, P. C. Os Irracionais têm Medida Total. **Revista PUC-RIO**, Matemática, Rio de Janeiro, 2006.

OLIVEIRA, K. I.; FERNÁNDEZ, A. J. **Iniciação a Matemática: um curso com problemas e soluções**. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Departamento de Educação Básica. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica: Matemática**. Curitiba: SEED, 2008.

PONTE, J. P. Investigações sobre investigações matemáticas em Portugal. **Investigar em Educação**, n.2, p.93-169, 2003.

PONTE, J. P.; BROCADO, J., & OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

ROSA, R. R. Sobre as Estranhas Propriedades do Conjunto de Cantor. UFF-RJ, **Caderno Dá-Licença**, p. 43-53, dez. 2004.

SAMPAIO, P. A. Infinito uma história a contar. **Millenium,** Revista do Instituto Politécnico de Viseu, n.34, p.205-222, abril 2008.

SANTOS, M. R. Teoria de Van Hiele: uma alternativa para o Ensino da Geometria no 2ºciclo. In: **Encontro Nacional de Educação Matemática**, 9., Belo Horizonte. Anais. Belo Horizonte: SBEM, p. 1-8, 2007.

SCHECHTER, E. **Georg Cantor: The man Who tamed infinity**. Disponível em: http://www.math.vanderbilt.edu/~schectex/courses/infinity.pdf . Acesso em 14 fev. 2013.

STADLER, M. M. Curiosidades sobre el Conjunto de Cantor. **Um paseo por La Geometría y Topologia**, p.97-116, 2000.

APÊNDICES

APÊNDICE A

Método de demonstração por redução ao absurdo

Segundo Oliveira & Fernández (2010) o método de demonstração por redução ao absurdo é uma das ferramentas mais poderosas da matemática. O nome provém do latim *reductio as absurdum* e também é conhecido como *método de terceiro excluído* devido ao mesmo estar baseado na *lei do terceiro excluído* que diz o seguinte: uma afirmação que não pode ser falsa deverá ser consequentemente verdadeira. Oliveira & Fernández (2010) completa mostrando que uma demonstração por este método, de modo geral, segue o seguinte roteiro:

1. Assumimos a validade da hipótese.
2. Supomos que nossa tese é falsa.
3. Usando as duas informações anteriores conclui através de argumentos verdadeiros, uma afirmação falsa; como tal fato não pode ocorrer, então nossa tese deverá ser verdadeira.

Exemplo: A soma de qualquer número positivo com seu inverso multiplicativo é sempre maior do que ou igual a dois.

Prova:

Hipótese: x é um número positivo ($x > 0$)

Tese: $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Seja x um número positivo e suponhamos que a tese é falsa, isto é, $x + \frac{1}{x} < 2$. Usando que $x > 0$ e multiplicando por este a desigualdade anterior, obtemos $x^2 + 1 < 2x$. Daí segue-se que $x^2 - 2x + 1 < 0$ é equivalente a $(x - 1)^2 < 0$, o que é absurdo. Portanto, concluímos que a tese é verdadeira.

APÊNDICE B

O conjunto de todos os números algébricos é enumerável

Teorema: Todo número racional é algébrico.

Demonstração: De fato, seja $r = p/q$, com $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$. Então r é raiz da equação $qx - p = 0$.

Teorema (6.8): O conjunto de todos os números algébricos é enumerável.

Demonstração: Dado um polinômio com coeficientes inteiros $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ definimos sua altura como sendo o número natural $|P| = |a_n| + \cdots + |a_1| + |a_0| + n$. O teorema fundamental da álgebra nos diz que $P(x) = 0$ tem exatamente n raízes complexas. Todas, algumas ou nenhuma delas podem ser reais. Agora o número de polinômios do tipo descrito com uma dada altura é apenas um número finito. Observe que é para essa afirmação que foi incluído a parcela n na definição da altura do polinômio. Portanto, as raízes de todos os polinômios de uma dada altura formam um conjunto finito. A seguir observe que o conjunto de todas as raízes de todos os polinômios de todas as alturas forma um conjunto enumerável, pois ele é a união de um conjunto enumerável de conjuntos finitos.

APÊNDICE C

Um comentário sobre o infinidade dos números primos

Alguns comentários sobre (2.3) “Refletindo sobre o tema”

- O conjunto dos números primos é infinito?

Sim.

Demonstração: Utilizando o método de redução ao absurdo (Ver Apêndice A) temos:

1. Suponha que exista uma quantidade finita de números primos.
2. Denote-os por $p_1, p_2, \dots, p_k$.
3. Considere o número n = $p_1 \cdot p_2 \cdot \; \dots \cdot \; p_k$ + 1.
4. Note que o número n não é divisível por nenhum dos números primos $p_1, p_2, \dots, p_k$, pois o resto desta divisão será 1.
5. Logo, temos uma contradição à hipótese de termos uma quantidade finita de primos.
6. Portanto, o conjunto dos números primos é infinito.

- O conjunto dos números primos é enumerável?

Sim, pois pelo Teorema (2.10) todo subconjunto $\mathbb{N}$ é enumerável, portanto o conjunto dos números primos é enumerável.