UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE BRAGANÇA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

JULIO CEZAR ARAÚJO NASCIMENTO

UMA APLICAÇÃO LÓGICA DO JOGO CARTEADO DA DIVISIBILIDADE E DA CONGRUÊNCIA MODULAR NA EDUCAÇÃO BÁSICA E NO ENSINO SUPERIOR.

BRAGANÇA – PA
2022

JULIO CEZAR ARAÚJO NASCIMENTO

UMA APLICAÇÃO LÓGICA DO JOGO CARTEADO DA DIVISIBILIDADE E DA CONGRUÊNCIA MODULAR NA EDUCAÇÃO BÁSICA E NO ENSINO SUPERIOR.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) na Universidade Federal do Pará oferecido em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

BRAGANÇA – PA

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

N244a NASCIMENTO, JULIO CEZAR ARAUJO.
Uma aplicação lógica do jogo carteado da divisibilidade e da congruência modular na educação básica e no ensino superior / JULIO CEZAR ARAUJO NASCIMENTO. — 2022.
71 f. : il. color.

Orientador(a): Profª. Dra. Marly dos Anjos Nunes
Coorientador(a): Prof. Me. Oseas Guimarães Ferreira Neto
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de Bragança, Programa de Mestrado Profissional em Ensino da Matemática, Bragança, 2022.

1. Divisibilidade. 2. Divisão Euclidiana. 3. Critérios de divisibilidade. 4. Carteado da divisibilidade. I. Título.

CDD 372.73044

JULIO CEZAR ARAÚJO NASCIMENTO

UMA APLICAÇÃO LÓGICA DO CARTEADO DA DIVISIBILIDADE E DA CONGRUÊNCIA MODULAR NA EDUCAÇÃO BÁSICA E NO ENSINO SUPERIOR.

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Pará, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

DATA DA APROVAÇÃO: 29/08/2022

COMISSÃO EXAMINADORA

Marly dos Anjos Nunes.

Profª. Drª. Marly dos Anjos Nunes

Orientadora – UFPA

OSÉAS GUIMARÃES FERREIRA NETO.

Profº. Msc. Oséas Guimarães Ferreira Neto

Coorientador – Membro Externo – SEDUC - PA

Edson Jorge de Matos

Profº. Dr. Edson Jorge de Matos

Membro Interno – UFPA

Edilene Farias Rozal

Profª. Drª Edilene Farias Rozal

Membro Interno – UFPA

Andréia Gomes Pinheiro

Profª. Drª. Andréia Gomes Pinheiro

Membro Externo – IFPA

DEDICATÓRIA

Ao meu poderoso DEUS que me deu esta oportunidade.

Aos meus pais: Jose de Anchieta e Joana Ramos que sempre me educaram e incentivaram nesta caminhada.

À minha esposa Adriane Braga e aos meus filhos Talles Cezar, Hevelyn Cunha, Darwin Cezar e Lucas Cezar.

Aos meus irmãos e demais familiares que me apoiaram.

A todos os meus professores que nãos mediram esforços para me ensinar durante esta trajetória.

AGRADECIMENTOS

A Deus por permitir concluir este curso de Mestrado quando tantos outros não são alfabetizados.

Em especial aos meus pais, irmãos, esposa, filhos e demais familiares que nos ajudaram na construção do nosso futuro nos proporcionando sempre as melhores condições de estudo.

Aos colegas deste curso que nos acompanharam nesta trajetória e contribuíram de forma direta ou indireta, em especial ao Professor Coorientador Me. Oseas Guimarães.

Aos nossos amigos, fora do meio acadêmico, pelo respeito, confiança e consideração.

Em especial a Professora Drª. Marly dos Anjos, minha orientadora, aos Professores de cada disciplina desse curso, ao coordenador local da UFPA, o professor Dr. Edson Matos que muito contribuíram para desenvolvimento deste trabalho e estudo.

A todos da Comissão Examinadora, que de certa forma se disponibilizarão a analisar e dar suas contribuições a este trabalho.

A Universidade do Federal do Pará em especial ao Campus de Bragança-PA por participar do programa PROFMAT e que assim contribuíram nesta formação acadêmica em nível de Mestrado.

Ao programa de Mestrado Profissional – PROFMAT, pela oportunidade de oferta do curso em Bragança-PA.

Aos Professores que nos ajudaram e contribuíram em nossa formação.

À Gestão da Prefeitura Municipal de Garrafão do Norte-PA, Direção da Escola Municipal Elza Maria Corrêa Dantas e demais colegas de trabalho deste município pelo apoio.

Às Direções das Escolas Estaduais: Professora Terezinha Bezerra Siqueira e Osvaldo Cruz pelo apoio.

"A matemática, quando a compreendemos bem, possui não somente a verdade, mas também a suprema beleza."

Bertrand Arthur William Russell (1872 – 1970)

RESUMO

Esta dissertação apresenta uma aplicação lógica do carteado da divisibilidade e da congruência modular na educação básica e no ensino superior, partindo da problemática encontrada nas operações de divisão e suas ramificações desde o ensino fundamental e até o nível superior. O objetivo deste trabalho é aplicar o jogo Carteado da Divisibilidade e da Congruência Modular como estratégia criativa e inovadora a ser utilizado na educação básica sendo um material de baixo custo e de fácil aplicação, podendo ser estendida ao ensino superior, seguindo os padrões da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), oferecendo como fonte de pesquisas para novos trabalhos acadêmicos. O mesmo foi elaborado por meio de pesquisa bibliográfica para fortalecer o fundamento teórico acerca da divisibilidade, divisão euclidiana, critérios de divisibilidade e congruência modular. Neste sentido, foi elaborado o jogo carteado da divisibilidade e da congruência modular com intuito de amenizar as dificuldades dos alunos na operação de divisão, sendo aplicado em quatro turmas: duas turmas de ensino fundamental e duas turmas de ensino médio. O jogo teve aceitação pelas turmas por sua semelhança ao jogo de cartas UNO, além disso, o carteado proporcionou fixação e/ou melhorou o entendimento acerca dos critérios de divisibilidade, ou seja, a aplicação do lúdico fez sentido aos alunos, garantindo o ensino e aprendizagem por meio de jogos. O conteúdo quando exemplificado e associado as situações cotidianas, melhora o entendimento dos alunos e o lúdico ajuda o mesmo a enfrentar as dificuldades do dia a dia. Enfim, a aplicação do carteado ofereceu ao aluno um mecanismo de ensino e fortalecimento do conteúdo de divisão e critério de divisibilidade de maneira atraente e divertida.

Palavras-chaves: Divisibilidade; Divisão Euclidiana; Critérios de Divisibilidade; Carteado da divisibilidade..

ABSTRACT

This dissertation presents a logical application of the card of divisibility and modular congruence in basic education and higher education, starting from the problem found in division operations and their ramifications from elementary school to higher education. The objective of this work is to present the Divisibility and Modular Congruence Carteado as a creative and innovative strategy to be used in basic education, which can be extended to higher education, offering teachers of both cycles a low-cost and easy-to-apply material for classes on divisibility criteria at Elementary II and Middle levels, as well as promoting an analysis of divisibility criteria through modular congruence in higher education, according to the National Common Curricular Base (BNCC), offering as a source of research for new academic works. The same was prepared through bibliographic research to strengthen the theoretical foundation about divisibility, Euclidean division, divisibility criteria and modular congruence. In this sense, the card game of divisibility and modular congruence was developed in order to alleviate the difficulties of students in the division operation, being applied in four classes: two elementary school classes and two high school classes. The application of cards offered the student a mechanism for teaching and strengthening the content of division and divisibility criteria in an attractive and fun way.

KEYWORDS: Divisibility; Euclidean Division; Divisibility Criteria; Card of divisibility.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

1 Figura 01: Protótipo das cartas Divisoras 51
2 Figura 02: Protótipo das cartas Dividendo 51
3 Figura 03: Cartas Divisoras 52
4 Figura 04: Cartas dividendo dos níveis 1, 2 e 3 respectivamente 52
5 Figura 05: Cartas dividendo do nível 4 52
6 Figura 06: Alunos da turma F7A resolvendo por critérios 68
7 Figura 07: Alunos da turma F7A descartando as cartas 68
8 Figura 08: Alunos da turma F7B calculando 68
9 Figura 09: Alguns alunos F7B rindo dos erros do descarte 69
10 Figura 10: Alunos da turma M3A descartando as cartas 69
11 Figura 11: Alunos da turma M3A se divertindo com o carteado 69
12 Figura 12: Alunos da turma M3B calculando as divisões 70
13 Figura 13: Alunos da turma M3B após o descarte 70
14 Figura 14: Aplicação do Carteado da Divisibilidade Nível 1 na turma do POTI 70
15 Figura 15: Aplicação do Carteado da Divisibilidade Nível 2 na turma do POTI 71
16 Figura 16: Aplicação do Carteado da Divisibilidade Nível 2 na turma do PROFMAT 71

LISTA DE TABELAS

Tabela 01: Generalização dos Critérios para Números Compostos ····· 39
Tabela 02: Tempo de duração da partida entre os níveis de ensino ····· 58
Tabela 03: Comparativo entre o número de vencedores ····· 59
Tabela 04: Cartas dividendo Nível 1 ····· 65
Tabela 05: Cartas dividendo Nível 2 ····· 65
Tabela 06: Cartas dividendo Nível 3 ····· 65
Tabela 07: Cartas dividendo Nível 4 ····· 65

LISTA DE SIMBOLOS

$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais.
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros.
$\Rightarrow$	Implicação.
$\Leftrightarrow$	Equivalente.
$=$	Igual.
$\neq$	Diferente.
$>$	Maior.
$<$	Menor.
$\geq$	Maior ou igual.
$\leq$	Menor ou igual.
$\in$	Pertence.
$\equiv$	Congruente.
$\not\equiv$	Não congruente.
$\mid$	Divide.
$\nmid$	Não Divide.
$\blacksquare$	Indica o fim de uma demonstração.
$\mid\,\mid$	Módulo.
$\cup$	União.
$\emptyset$	Conjunto vazio.
$\{\ \}$	Conjuntos.
$\forall$	Para todo.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO **13**

2 DIVISIBILIDADE **17**
2.1 Divisão Euclidiana 22

3 CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE **27**
3.1 Divisibilidade por 2 28
3.2 Divisibilidade por 3 29
3.3 Divisibilidade por 4 30
3.4 Divisibilidade por 5 31
3.5 Divisibilidade por 6 32
3.6 Divisibilidade por 7 33
3.7 Divisibilidade por 8 34
3.8 Divisibilidade por 9 35
3.9 Divisibilidade por 10 36
3.10 Divisibilidade por 11 37

4 CONGRUÊNCIA MODULAR **41**
4.1 Aritmética dos Restos 41
4.1.1 Relação de Equivalência 41
4.1.2 Sistema Completo de Resíduos 43
4.1.3 Algumas Propriedades de Congruência 43

5 CARTEADO DE DIVISIBILIDADE E DA CONGRUÊNCIA MODULAR NA EDUCAÇÃO BÁSICA E NO ENSINO SUPERIOR **49**
5.1 Elaboração do Carteado 49
5.2 Regras do Jogo 53
5.3 Aplicação do Carteado 53
5.4 Nível 1 (sexto e sétimo ano do ensino fundamental) 55
5.5 Nível 3 (ensino médio) 56
5.6 Análise dos Resultados 58
5.6.1 Duração da Partida 58
5.6.2 Número de vencedores 59
5.6.3 Engajamento no Jogo 60
5.6.4 Concretização do Estudo 61

6 Considerações Finais **62**

7 Referências **65**

A ANEXO **67**

1 INTRODUÇÃO

Sou professor da educação básica desde 2006, quando ainda estava no primeiro semestre do curso de Licenciatura em Matemática, pela necessidade do município, por alguns anos seguia o cronograma dos conteúdos do planejamento sem ver a necessidade de cada turma. Com o passar do tempo fui deixando de ministrar alguns assuntos da grade curricular local, um desses assuntos era o critério de divisibilidade, por perceber em sala de aula a dificuldade dos alunos e o desânimo ao se tratar da operação de divisão. Essa decisão de excluir alguns assuntos repetiu-se por vários anos.

Em 2018, fui aprovado no Exame Nacional de Acesso (ENA) do Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), no município de Bragança-PA. O curso iniciou em 2019 e durante as aulas percebi modelos de resoluções explicativos, o passo a passo, com estratégias diferentes do campo de atuação. No início, tive dificuldades de dissertar em cada problema que tinha que resolver, mas à medida que íamos construindo as resoluções, as habilidades se aprimoravam. Na disciplina de Aritmética, nos momentos de estudos em sala de aula, deparei-me com os critérios de divisibilidade, mas de maneira bem explicativa e com aplicações em problemas, não apenas de forma abstrata como ministrado antes em sala de aula, isto é, uma outra visão de resolução estava ampliando as minhas informações, isso possibilitou-me o início do uso dessas práticas no ensino básico.

A professora desta disciplina utilizando da sua metodologia didática mostrou a importância de resolver problemas detalhadamente, como se tivesse conversando com o problema, ou seja, resolvendo com clareza. Este formato é interessante e importante, pois mesmo com o passar do tempo, ao ler novamente o problema e a sua resolução, podemos novamente entender o processo, motivo este que me fez rever as estratégias de resolução de problemas.

No ano de 2022, voltei a ensinar os critérios de divisibilidade utilizando-se da ferramenta didática explicativa, além disso, a orientadora e o coorientador propuseram a ideia da aplicação do carteado da divisibilidade no ensino básico, uma ferramenta recém construída, que estava em fase de testes e que havia sido submetido ao evento nacional X Bienal de Matemática, porém o jogo ainda não havia sido usado em salas de aulas convencionais. Quando recebi a primeira explicação do carteado, fiz a associação direta com o jogo de cartas UNO. Mesmo percebendo que os alunos têm deficiência quando estão diante da operação de divisão, aceitei o desafio de aplicar o carteado em sala de aula.

Dessa forma, esse trabalho surge da necessidade de oferecer alternativas metodológicas práticas ao ensino de matemática, em especial a unidade temática Números, conforme a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) de 2018, pois os conteúdos de Aritmética na sua imensa maioria se concentram nessa unidade. Com essa estrutura curricular, os conteúdos são abordados dentro de uma visão de progressão vertical em torno

dos objetos de conhecimento e habilidades, isto é, à medida que o aluno avança nas séries o grau de complexidade evolui junto, permitindo que as construções e procedimentos acerca dos conceitos sejam conectados e ampliados ao longo de todo o processo. Nesse sentido:

> "A unidade temática **Números** tem como finalidade desenvolver o pensamento numérico, que implica o conhecimento de maneiras de quantificar atributos de objetos e de julgar e interpretar argumentos baseados em quantidades. No processo da construção da noção de número, os alunos precisam desenvolver, entre outras, as ideias de aproximação, proporcionalidade, equivalência e ordem, noções fundamentais da Matemática. Para essa construção, é importante propor, por meio de situações significativas, sucessivas ampliações dos campos numéricos. No estudo desses campos numéricos, devem ser enfatizados registros, usos, significados e operações." (BRASIL, 2018. p.270)

No entanto, no do contexto escolar o que se percebe é uma abordagem do eixo de Números voltada principalmente para a resolução de algoritmos, com escassa ênfase ao olhar qualitativo, investigativo e associativo em torno das propriedades que os envolvem, isto é, uma abordagem pouco atrativa, gerando o desamino que encontrava nas minhas aulas durante muito tempo.

É no ensino fundamental II, que assuntos importantes da Aritmética, tais como: múltiplos, divisores, divisão euclidiana e critérios de divisibilidade são apresentados, porém o que se verifica na prática é que essa apresentação está voltada apenas a exposição simples de um conjunto de regras e cálculos desconectados de situações cotidianas, concretas, não proporcionando ao aluno percepções de implicações gerais que os seus conceitos e ideias podem proporcionar.

Essas implicações apontam para uma preocupação concreta sobre o ensino da matemática, no que se configura uma abordagem fragmentado e independente dos tópicos presentes no eixo Números do currículo. Nessa perspectiva, verifica-se a causa de uma série de paradigmas e insucessos relacionados ao interesse e aprendizagem matemática. Dessa forma, observamos no uso do jogo de cartas a possibilidade de explorar conceitos e resultados matemáticos de grande importância, pois usamos a ludicidade para conectar conteúdos e promover um uso prático dos tópicos abordados, conforme verificado nos documentos oficiais em BRASIL.

Mas devemos tomar muito cuidado para que o jogo tenha um propósito matemático de ajudar enquanto ferramenta de obtenção de habilidades dessa área de conhecimento, fazendo com que favoreça a aprendizagem significativa e o desenvolvimento de competências e habilidades, como afirma Smole:

> O trabalho com jogos nas aulas de matemática, quando bem planejado e orientado, auxilia o desenvolvimento de habilidades como observação, análise, levantamento de hipóteses, busca de suposições, reflexão, tomada de decisão, argumentação e organização, as quais estão estreitamente relacionadas ao assim chamado raciocínio lógico. (SMOLE, 2007, p. 9)

Esse planejamento na utilização dos jogos como recurso didático também recebe destaque nas palavras de Borin.

> Queremos salientar que a atividade de jogar, se bem orientada, tem papel importante ao desenvolvimento de habilidades de raciocínio como organização, atenção e concentração, tão necessárias para o aprendizado, em especial da Matemática, e para a resolução de problemas em geral. (BORIN, 2002, p. 8)

Outra importante contribuição do uso do jogo está na conexão dos conteúdos abordados até o ensino superior, uma vez que ele também pode ser usado nesse nível de ensino com a devida adequação para a notação de congruências, reforçando assim a sua importância na sequência didática do ensino vertical que encontramos nos currículos enquanto prática metodológica.

Diante de tais experiências foi natural então nos perguntarmos:

De que forma é possível minimizar as dificuldades encontradas na operação de divisão com o uso dos critérios de divisibilidade?

É possível ensinar os critérios de divisibilidade por meio de um jogo de cartas?

O uso do jogo Carteado da Divisibilidade traz benefícios na relação ensino e aprendizagem?

A experiência adquirida como docente do ciclo básico e discente na pós-graduação oportunizou o entendimento, a reflexão e a utilização de alternativas que viessem de encontro a essas problemáticas. Nesse momento percebemos que o uso dos critérios de divisibilidade são os elementos centrais nesse procedimento, pois além de dinamizar a divisão, também possibilita um maior engajamento por parte dos discente na participação das aulas.

Nosso objetivo geral é aplicar o jogo Carteado da Divisibilidade e da Congruência Modular como estratégia criativa e inovadora a ser utilizado na educação básica sendo um material de baixo custo e de fácil aplicação, podendo ser estendida ao ensino superior.

Os nossos objetivos específicos são:

• Apresentar o carteado da divisibilidade como estratégia lúdica para consolidar os critérios de divisibilidade;

• Mostrar a importância dos critérios de divisibilidade no ciclo básico e superior como ferramenta auxiliar para o entendimento da operação de divisão;

• Estabelecer e relacionar os critérios de divisibilidade com congruência modular.

Estruturalmente, este trabalho está organizado em 6 (seis) capítulos, contados a partir da introdução (capítulo 1) até as considerações finais (capítulo 6). No capítulo 2 iremos abordar a divisibilidade no conjunto dos números inteiros e o algoritmo divisão euclidiana, no capítulo 3 serão apresentados e demonstrados os critérios de divisibilidade dos números usados no carteado. No capítulo 4 apresentaremos a notação de congruência modular com definições e demonstrações das principais propriedades, por fim, no capítulo 5 vamos apresentar os relatos e considerações da aplicação do jogo em quatro turmas, duas do ciclo fundamental e duas do nível médio nos municípios de Garrafão do Norte e Capitão Poço, respectivamente.

2 DIVISIBILIDADE

Neste capítulo apresentamos a teoria abordando teoremas, conceitos e definições envolvendo a divisibilidade no conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$). Encontraremos também o mais importante teorema denominado Teorema da Divisão Euclidiana.

Definição 2.1. *Dados dois números inteiros a e b, dizemos que a divide b, quando existir um $c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ac$. Neste caso diremos também que a é um divisor de b, ou ainda, que b é divisível por a.*

Notação: $a \mid b$, lê-se a divide b.

Observe que a notação não representa nenhuma operação em $\mathbb{Z}$, nem representa uma fração. Trata-se de uma sentença que diz ser verdade que b é múltiplo de a. A negação desta sentença é representada por $a \nmid b$.

Proposição 2.1. *Sejam a, b e $c \in \mathbb{Z}$, Tem-se que*

(i) $1 \mid a$, $a \mid a$ *e* $a \mid 0$

(ii) $0 \mid a \Leftrightarrow a = 0$

(iii) $a \mid b \Leftrightarrow |a| \mid |b|$

(iv) Se $a \mid b$ *e* $b \mid c$, *então* $a \mid c$.

Demonstração.

(i) Isto decorre das igualdade $a = 1a$, $a = a1$ e $0 = a0$. ■

(ii) Suponhamos que $0 \mid a$, logo existe um $b \in \mathbb{Z}$ onde $a = 0b \Rightarrow a = 0$. Reciprocamente, basta observar que $0 \mid 0$, que foi provado no item anterior. ■

(iii) Suponhamos que $a \mid b$ então existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\begin{aligned} b &= ac \\ |b| &= |ac| \\ |b| &= |a||c|. \end{aligned}$$

Logo $|a| \mid |b|$. Reciprocamente, temos que se $|a| \mid |b|$ existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que

$$|b| = |a|c$$

$$|b| = |ac|$$

$$b = ac \text{ ou } b = -ac,$$

de qualquer forma $a \mid b$. ■

(iv) Se $a \mid b$, então existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $b = aq$, e se $b \mid c$ então existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $c = bp$. Assim, temos que $c = aqp \Rightarrow c = at$, com $t = qp$. Portanto $a \mid c$. ■

Do item (i) e (iii) temos que qualquer número inteiro é divisível por ± 1, por ele mesmo, e seu oposto. Note que $0 \mid 0$, portanto, todo número inteiro divide zero. Sendo assim, zero tem infinitos divisores. Suponha que $a \mid b$ e seja um $q \in \mathbb{Z}$ tal que $b = aq$, com a e $b \in \mathbb{Z}$ e $a \neq 0$. O número inteiro q é chamado de **quociente** de b por a e denotado por $q = \dfrac{b}{a}$. Observe que $b = a$ só está definido quando $a \neq 0$ e $a \mid b$.

Proposição 2.2. *Sejam a, b, c e $d \in \mathbb{Z}$. Se $a \mid b$ e $c \mid d$ então $ac \mid bd$.*

Demonstração.

De fato, se $a|b$ e $c|d$, então existem q e $p \in \mathbb{Z}$ tal que $b = aq$ e $d = cp$. Logo, temos então

$$bd = (aq)(cp)$$

$$ac \cdot qp = ac \cdot t, \text{ com } t = qp.$$

Portanto, $ac|bd$. Em particular, se $a|b$, então $ac|bc$, para todo $p \in \mathbb{Z}$. A demonstração é análoga a proposição acima. ■

Proposição 2.3. *Sejam a, b e $c \in \mathbb{Z}$, tais que $a|(b \pm c)$. Então, $a|b \Leftrightarrow a|c$.*

Demonstração.

Suponhamos que $a|(b \pm c)$, então

$$b \pm c = aq, \text{ com } q \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Agora, se $a|b$, então

$$b = ap, \text{ com } p \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Substituindo (2) na (1), temos que

$$\begin{aligned} ap \pm c &= aq \\ c &= a(q \pm p) \\ c &= at \end{aligned}$$

com $t = q \pm p$. Então $a|c$. A prova da volta da implicação é análoga. ■

Proposição 2.4. *Sejam a, b e $c \in \mathbb{Z}$ tais que $a|b$ e $a|c$, então para todo x e $y \in \mathbb{Z}$, $a|(bx + cy)$.*

Demonstração.

Como $a|b$ e $a|c$, então existe p e $q \in \mathbb{Z}$ onde $b = ap$ e $c = aq$.

$$bx + cy = ap \cdot x + aq \cdot y$$
$$a \cdot (px + qy) = at, comt = px + qy.$$

Portanto $a|(bx + cy)$. ■

Proposição 2.5. *Dados a, $b \in \mathbb{Z}$, onde $b \neq 0$, temos que $a|b \Rightarrow |a| \leq |b|$.*

Demonstração.

Suponha que $a|b$, então existe um $q \in \mathbb{Z}$ onde $b = aq$ como $b \neq 0$, então $q \neq 0$. Aplicando módulo, temos que $|b| = |a||q|$, desde que $1 \leq |q|$, $|a \leq |a| \cdot |q|$ e como $|a||q| = |b|$. Portanto $|a| \leq |b|$. ■

Proposição 2.6. *Sejam a e $b \in \mathbb{Z}$, temos que $a - b \mid a^n - b^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração.

Mostraremos por indução em "n". Como $a - b \mid a - b$, então para $n = 1$ a afirmação é verdadeira. Suponhamos então, que valha para n. Como $a - b \mid a^n - b^n$ então $a^n - b^n = (a - b)q$ com $q \in \mathbb{Z}$. Temos que

$$a^n - b^n = (a - b)q$$
$$a^n = (a - b)q + b^n.$$

Mostraremos que vale para $n + 1$. E como

$$a^{n+1} - b^{n+1} = a^n.a - b^{n+1}$$

Substituindo o valor de a^n, teremos então

$$\begin{aligned}
a^{n+1} - b^{n+1} &= [(a - b)q + b^n]a - b^{n+1} \\
a^{n+1} - b^{n+1} &= (a - b)aq + ab^n - b^{n+1} \\
a^{n+1} - b^{n+1} &= (a - b)aq + (a - b)b^n \\
a^{n+1} - b^{n+1} &= (a - b)(aq + b^n) \\
a^{n+1} - b^{n+1} &= (a - b)t, \text{ com } t = (aq + b^n).
\end{aligned}$$

Logo $a - b|a^{n+1} - b^{n+1}$. Portanto $a - b|a^n - b^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Proposição 2.7. *Sejam a e $b \in \mathbb{Z}$, temos que $a+b|a^{2n+1}+b^{2n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:*

Demonstração.

Demonstraremos por indução em "n". Para $n = 0$ é, obviamente, uma afirmação verdadeira, pois

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = a^{2.0+1} + b^{2.0+1} = a + b$$

e

$$a + b \mid a + b$$

Suponhamos que valha para n. Então

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)q, \text{ com } q \in \mathbb{Z}.$$

Daí, tem-se

$$\begin{aligned} a^{2n+1} + b^{2n+1} &= (a+b)q \\ a^{2n+1} &= (a+b)q - b^{2n+1}. \end{aligned} \tag{3}$$

Agora mostraremos que vale para $n+1$. Como temos que

$$\begin{aligned} a^{2(n+1)+1} + b^{2(n+1)+1} &= \\ a^{2n+3} + b^{2n+3} &= \\ a^{2n+1} \cdot a^2 + b^{2n+3}, \end{aligned} \tag{4}$$

Substituindo (3) em (4), temos então

$$\begin{aligned} a^{2(n+1)+1} + b^{2(n+1)+1} &= \\ [(a+b)q - b^{2n+1}]a^2 + b^{2n+3} &= \\ (a+b)a^2q - a^2b^{2n+1} + b^{2n+3} &= \\ (a+b)a^2q - a^2b^{2n+1} + b^2b^{2n+1} &= \\ (a+b)a^2q - b^{2n+1}(a^2 - b^2) \end{aligned}$$

e como $(a^2 - b^2) = (a-b)(a+b)$, segue que

$$\begin{aligned} a^{2(n+1)+1} + b^{2(n+1)+1} &= \\ (a+b)a^2q - b^{2n+1}(a-b)(a+b) &= \\ (a+b)a^2q - b^{2n+1}(a-b)]. \end{aligned}$$

Portanto $a + b \mid a^{2n+1} + b^{2n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Proposição 2.8. *Sejam a e $b \in \mathbb{Z}$, temos que $a+b \mid a^{2n} - b^{2n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração.

Novamente iremos usar indução em n. Veja como a afirmação é válida para $n = 1$, pois

$$a^{2n} - b^{2n} = a^{2.1} - b^{2.1} = (a-b)(a+b)$$

e de fato,

$$a+b \mid (a-b)(a+b).$$

Suponhamos que valha para n, então temos que

$$a^{2n} - b^{2n} = (a+b)\,\mathrm{q} \text{ com } q \in \mathbb{Z},$$

temos que

$$\begin{aligned} a^{2n} - b^{2n} &= (a+b)q \\ a^{2n} &= (a+b)q + b^{2n}, \end{aligned} \tag{5}$$

Iremos mostrar que vale para $n+1$, isto é, $a+b \mid a^{2n+2} - b^{2n+2}$. Sabemos que

$$\begin{aligned} a^{2(n+1)} - b^{2(n+1)} &= \\ a^{2n+2} - b^{2n+2} &= \\ a^{2n}a^2 - b^{2n+2}, \end{aligned} \tag{6}$$

Substituindo (4) em (5), teremos então

$$\begin{aligned} a^{2n+2} - b^{2n+2} = a^{2n}a^2 - b^{2n+2} &= \\ [(a+b)q + b^{2n}]a^2 - b^{2n+2} &= \\ (a+b)qa^2 + a^2b^2n - b^{2n+2} &= \\ (a+b)qa^2 + a^2b^{2n} - b^2b^{2n} &= \\ (a+b)qa^2 + (a^2 - b^2)b^{2n} &= \\ (a+b)qa^2 + (a+b)(a-b)b^{2n} &= \\ (a+b)[qa^2 + (a-b)b^{2n}], \end{aligned}$$

ou seja,

$$a^{2n+2} - b^{2n+2} = (a+b)p$$

com $p = [qa^2 + (a-b)b^{2n}]$, $p \in \mathbb{Z}$. Portanto $a+b \mid a^{2n} - b^{2n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Exemplo 2.1. *Mostre que* $13 \mid 2^{70} + 3^{70}$.

Solução:

Perceba que podemos escrever

$$13 = 4 + 9 = 2^2 + 3^2.$$

E podemos escrever também

$$2^{70} + 3^{70} = 2^{2(35)} + 3^{2(35)},$$

sendo assim, utilizando-se da proposição 2.7, temos que

$$\begin{aligned} 2^2 + 3^2 &= 13 \\ 13 \mid 2^{2(35)} + 3^{2(35)} &= 2^{70} + 3^{70}. \end{aligned}$$

Logo, $13 \mid 2^{70} + 3^{70}$.

Exemplo 2.2. *Sabe-se que* $9 \mid 36$ *e ainda* $9 \mid 45$*, mostre que* $9 \mid 1872$.

Solução:

Podemos escrever $1872 = 17 \cdot 36 + 28 \cdot 45$ e utilizando a proposição 2.4, temos que $9 \mid 1872$.

2.1 Divisão Euclidiana

Mesmo quando um número inteiro $a \neq 0$ não divide um $b \in \mathbb{Z}$, Euclides, no seu livro Elementos, sem um enunciado específico, traz o fato de que é sempre possível fazer a divisão de b por a, com resto. Esse resultado, cuja a demonstração faremos abaixo, não é só importante na obra de Euclides, como também é um resultado central da teoria.

Teorema 2.1. *Teorema da Divisão Euclidiana*

Sejam a e b dois números inteiros com $b \neq 0$. Existem dois únicos números inteiros q e r tais que

$$a = bq + r, \text{ com } 0 \leq r < b. \tag{7}$$

Demonstração.

Primeiro vamos definir um conjunto que denominaremos de S

$$S = \{a - bx;\ x \in \mathbb{Z}, a - bx \geq 0\}$$

isto é, S é o conjunto de todos os inteiros não negativos de forma $a - bx$.

Agora mostraremos que $S \neq \emptyset$.

De fato, sendo $b > 0$, então $b \geq 1$ e tomando $x = -|a|$, resulta que

$$a - bx = a - b(-|a|) =$$
$$a + b|a| \geq a + 1|a| \geq 0$$

Observe que S é limitado inferiormente por 0, assim pelo Princípio da Boa Ordenação, S possui um menor elemento. Seja r o elemento mínimo de S tal que,

$$r \geq 0$$

e

$$r = a - bq$$

sendo $q \in \mathbb{Z}$. Assim,

$$a = bq + r.$$

Até o presente momento, obtemos a existência de q e r com

$$a = bq + r \text{ e } r \geq 0.$$

Agora temos que assegurar que

$$r < b$$

Se $r \geq b$, teríamos $r - b \geq 0$. Sendo assim, como $r = a - bq$, tem-se

$$r - b = a - bq - b = a - b(q + 1) < a - bq = r,$$

o que contraria o fato de r ser o menor elemento de S.

O teorema garante a existência e unicidade dos inteiros q e r. Para provarmos a unicidade de q e r, suponha que existam dois pares diferentes de inteiros q e q_1, r e r_1 que satisfaçam

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < b$$

e

$$a = bq_1 + r_1, \quad 0 \leq r_1 < b.$$

Desde que

$$\begin{aligned} a &= a \\ bq + r &= bq_1 + r_1 \\ r - r_1 &= b(q_1 - q), \end{aligned} \tag{8}$$

o que implica

$$b \mid (r - r_1).$$

Por outro lado, temos

$$0 \leq r < b,$$

Multiplicando por (-1), tem-se

$$0 \geq -r > b \Rightarrow -b < -r \leq 0,$$

somando com

$$0 \leq r_1 < b,$$

obtemos

$$\begin{aligned} -b \leq -r \leq 0 \\ 0 \leq r_1 < b \\ -b < r_1 - r < b, \end{aligned}$$

logo,

$$|r_1 - r| < b$$

Por hipótese, $b > 0$, então

$$\begin{aligned} r_1 - r &= 0 \\ r_1 &= r \end{aligned}$$

E desde que $b \neq 0$, temos por (8) que

$$r_1 - r = (q - q_1)b,$$

logo,

$$q - q_1 = 0$$
$$q = q_1.$$

■

Os números q e r que aparecem no teorema acima são chamados respectivamente de quociente e resto da divisão de a por b.

Dessa forma, da divisão euclidiana, temos que o resto da divisão de a por b é zero se, e somente se, b divide a. Além do mais, quando o resto da divisão for zero dizemos que a divisão é exata.

Exemplo 2.3. *Iremos mostrar que o resto da divisão de* 10^n *por* 9*, representado por* $r_9(10^n)$*, é sempre* 1*, qualquer que seja o* $n \in \mathbb{N}$*.*

Solução:

Será feito por indução. Para $n = 1$ a afirmação é verdadeira, pois $10^1 = 10 = 9.1+1$ com $q = 1$ e $r = 1$.

Suponha que o resultado é válido para um $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $10^n = 9q + 1$.

Iremos mostrar que pra $n + 1$ a afirmação também é válida. Considere que

$$10^{n+1} = 10^n.10 =$$
$$(9 + 1).10^n = 9.10^n + 10^n.$$

Substituindo o valor de 10^n, temos então

$$10^{n+1} = 9.10^n + 9q + 1 =$$
$$9.(10^n + q) + 1,$$

ou seja, chamando $q' = 10^n + q$, obtemos $10^{n+1} = 9.q' + 1$, com $r = 1$. Provamos que o resultado vale para $n + 1$ e, consequentemente, vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2.4. *Quantos múltiplos de 7 compreendidos entre 25 e 400?*

Solução:

Utilizando-se do algoritmo da divisão euclidiana, temos que

$$b = a.q + r$$

$$400 = 7.57 + 1,$$

assim, temos que o maior múltiplo de 7 menor que 400 é o $7 \cdot 57 = 399$, onde 57 é o quociente da divisão de 400 por 7.

Portanto, os múltiplos de 7, entre 25 e 400 são,

$$4 \cdot 7 = 28;$$

$$5 \cdot 7 = 35;$$

$$\vdots$$

$$56\cdot = 392;$$

$$57 \cdot 7 = 399,$$

ou seja, temos 57-3=54. Logo, existem 54 múltiplos de 7 distintos compreendidos entre 25 e 400.

3 CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) já contempla os critérios de divisibilidade, visto que eles serão utilizados em outras áreas da matemática, como Geometria e Álgebra. Essa abordagem deve ser feita logo no início do Ensino Fundamental II, possibilitando as habilidades

> "(EF06MA05) Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos "é múltiplo de", "é divisor de", "é fator de", e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000. (BRASIL, 2018. p.301)"

Fica evidente que esse conjunto de regras a serem memorizadas e aplicadas de maneira direta, só é útil quando for mais simples que a própria divisão, razão pela qual os alunos lembram com frequência dos critérios de divisibilidade do 2, 3, 5 e 10, por exemplo e raramente dos critérios do 7 e 11.

Porém, o aluno que desenvolve a habilidade de usar com frequência as regras de divisibilidade, em especial na resolução de problemas, tem como consequência imediata a memorização dos critérios e o desenvolvimento de uma velocidade de raciocínio. Esse segundo ponto, inclusive, se mostrará muito útil ao longo de todo o restante do ciclo básico de ensino, pois usamos muito os critérios de divisibilidade para simplificar resultados, pois é comum nos exames seletivos as repostas serem dadas na forma de frações irredutíveis, ou seja, frações que não podem ser simplificadas.

De modo geral, podemos definir de forma direta que os critérios de divisibilidade são as regras que nos permitem, sem efetuar a divisão, saber se um dado número é, ou não, divisível por outro.

Neste capítulo apresentaremos os critérios de divisibilidade de todos os números primos menores ou igual a 11, bem como dos números compostos 4, 6, 8, 9 e 10 que foram aplicados no carteado de divisibilidade.

3.1 Divisibilidade por 2

O critério de divisibilidade por 2, é considerado um dos clássicos. Um número é divisível por 2, se o seu algarismo da unidade for divisível por 2.

Demonstração.

Considere

$$N = a_n a_(n-1) \cdots a_2 a_1 a_0 \tag{9}$$

um número formado por n algarismos escritos na base 10. Explicitando esse número na forma polinômica, teremos

$$N = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \cdots + 10^2 a_2 + 10 a_1 + a_0.$$

Suponhamos que $2 \mid N$, então

$$10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \cdots + 10^2 a_2 + 10 a_1 + a_0 = 2q,$$

com $q \in \mathbb{Z}$, utilizando o dez como fator comum da forma polinômica de $\mathbb{N}$, temos

$$10(10^{n-1} a_n + 10^{n-2} a_{n-1} + \cdots + 10 a_2 + a_1) + a_0 = 2q.$$

Em seguida, isolando o fator que representa as unidades de N

$$a_0 = 2q - 10(10^{n-1} a_n + 10^{n-2} a_{n-1} + \cdots + 10 a_2 + a_1)$$

observamos que podemos ter o 2 como fator comum, assim

$$a_0 = 2[q - 5(10^{n-1} a_n + 10^{n-2} a_{n-1} + \cdots + 10 a_2 + a_1)]$$

e chamando $q' = [q - 5(10^{n-1} a_n + 10^{n-2} a_{n-1} + \cdots + 10 a_2 + a_1)]$, com $q' \in \mathbb{Z}$ obtemos

$$a_0 = 2q'.$$

■

Exemplo 3.1. *Verifique se o número 3978 é divisível por 2.*

Solução:

Temos que o algarismo das unidades do número dado é o 8, e como $8 = 2 \cdot 4$, ou seja, $2 \mid 8$. Logo, 3978 é divisível por 2.

Exemplo 3.2. *Verifique se o número 8147 é divisível por 2.*

Solução:

Temos que o algarismo das unidades do número dado é o 7, e como $7 = 2 \cdot 3 + 1$, ou seja, $2 \nmid 7$. Logo, 8147 não é divisível por 2.

3.2 Divisibilidade por 3

Um número é divisível por 3 se, a soma dos seus algarismos formar um número que é divisível por 3.

Demonstração.

Utilizando a expressão (9) na forma polinômica e admitindo que $3 \mid N$, então

$$10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \cdots + 10^2 a_2 + 10 a_1 + a_0 \quad = \quad 3q, \text{com } q \in \mathbb{Z}$$

Fazendo uso do princípio aditivo, somamos $9a_0$ nos dois membros da igualdade, teremos

$$\begin{aligned} 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \cdots + 10^2 a_2 + 10 a_1 + a_0 + 9a_0 &= 3q + 9a_0 \\ 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \cdots + 10^2 a_2 + 10 a_1 + 10a_0 &= 3(q + 3a_0) \\ 10(10^{n-1} a_n + 10^{n-2} a_{n-1} + \cdots + 10 a_2 + a_1 + a_0) &= 3(q + 3a_0) \end{aligned}$$

Como 3 é primo e $3 \nmid 10$, então para que $3 \mid N = a_n a_(n-1) \cdots a_2 a_1 a_0$, o termo

$$(10^{n-1} a_n + 10^{n-2} a_{n-1} + \cdots + 10 a_2 + a_1 + a_0)$$

deve ser divisível por 3. Mas como $(10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \cdots + 10^2 a_2 + 10 a_1 + a_0 = a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0$ então está provado que para o número ser divisível por 3, a soma dos seus algarismos deve resultar em um número que é divisível por 3.

Exemplo 3.3. *Verifique se o número 29754 é divisível por 3.*

Solução:

Temos que a soma dos algarismos do número 29754 é

$$2 + 9 + 7 + 5 + 4 = 27$$

e

$$27 = 3 \cdot 9,$$

ou seja, $3 \mid 27$ .Logo, 29754 é divisível por 3.

Exemplo 3.4. *Verifique se o número 185779 é divisível por 3.*

Solução:

Temos que a soma dos algarismos do número 185779 é

$$1 + 8 + 5 + 7 + 7 + 9 = 37$$

e

$$37 = 3 \cdot 12 + 1,$$

ou seja, $3 \nmid 37$.Logo, 185779 não é divisível por 3.

3.3 Divisibilidade por 4

Um número com mais de dois algarismos será divisível por 4 se, e somente se, o número formado por seus dois últimos algarismos for divisível por 4.

Demonstração.

Utilizando a expressão (9) na forma polinômica e admitindo que $4 \mid N$, então

$$10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \cdots + 10^2 a_2 + 10a_1 + a_0 = 4q, \text{ com } q \in \mathbb{Z},$$

logo podemos reescrever esse número na forma,

$$100(10^{n-2} a_n + 10^{n-3} a_{n-1} + \cdots + a_2) + 10a_1 + a_0 = 4q,$$

e chamando de $k = (10^{n-2} a_n + 10^{n-3} a_(n-1) + \cdots + a_2)$, obtemos

$$100k + (10a_1 + a_0) = 4q \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

Assim como 4 divide 100, então $a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0 = 100k + (10a_1 + a_0)$ será divisível por 4 se, e somente se, $10a_1 + a_0$ for divisível por 4, isto é, $4 \mid a_1 a_0$. ■

Exemplo 3.5. *Verifique se o número 1500 é divisível por 4.*

Solução:

Temos que o número $1500 = 15 \cdot 100$, e como $4 \mid 100$, logo, $4 \mid 15 \cdot 100 = 1500$ então, 1500 é divisível por 4. Assim, todo número em que os dois últimos algarismos forem 00 sempre será divisível por 4.

Exemplo 3.6. *Verifique se o número 8524 é divisível por 4.*

Solução:

Temos que o número

$$8524 = 8500 + 24 = 85 \cdot 100 + 24,$$

e como

$$4 \mid 85 \cdot 100 \text{ e } 4 \mid 24 \ (24 = 4.6).$$

Logo, 8524 é divisível por 4. Assim, como os dois últimos algarismos é 24 que é divisível por 4, portanto, o número 8524 é divisível por 4.

Exemplo 3.7. *Verifique se o número 27514 é divisível por 4.*

Solução:

Temos que o número

$$27514 = 27500 + 14 = 275 \cdot 100 + 14,$$

e como

$$4 \mid 275 \cdot 100 \text{ e } 4 \nmid 14 \ (14 = 4.3 + 2).$$

Logo, 27514 não é divisível por 4.

3.4 Divisibilidade por 5

Um número é divisível por 5 se o seu último algarismo é também divisível por 5, isto é, se for 0 ou 5.

Demonstração.

Utilizando a expressão (10) na forma polinômica e admitindo que $5 \mid N$, então

$$10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \cdots + 10^2 a_2 + 10 a_1 + a_0 = 5q, \quad \text{com } q \in \mathbb{Z}$$

logo podemos reescrever esse número na forma,

$$10(10^{n-1} a_n + 10^{n-2} a_{n-1} + \cdots + 10 a_2 + a_1) + a_0 = 5q,$$

isolando o algarismo das unidades, encontramos

$$a_0 = 5q - 10(10^{n-1} a_n + 10^{n-2} a_{n-1} + \cdots + 10 a_2 + a_1)$$
$$a_0 = 5[q - 2(10^{n-1} a_n + 10^{n-2} a_{n-1} + \cdots + 10 a_2 + a_1)]$$

e chamando de $q' = [q - 2(10^{n-1} a_n + 10^{n-2} a_{n-1} + \cdots + 10 a_2 + a_1)]$, com $q' \in \mathbb{Z}$ obtemos que

$$a_0 = 5q',$$

ou seja, para um número ser divisível por 5, o seu último algarismo também deve ser divisível por 5. ■

Exemplo 3.8. *Verifique se o número 7648310 é divisível por 5.*

Solução:

Segundo o critério de divisibilidade, se o algarismo da unidade for divisível por 5, então o número é divisível por 5. Como $5 \mid 0$, então $5 \mid 7648310$, ou seja, 7648310 é divisível por 5.

Exemplo 3.9. *Verifique se o número 1875 é divisível por 5.*

Solução:

Segundo o critério de divisibilidade, se o algarismo da unidade for divisível por 5, então o número é divisível por 5. Como $5 \mid 5$, então $5 \mid 1875$, ou seja, 1875 é divisível por 5.

Exemplo 3.10. *Verifique se o número 859302 é divisível por 5.*

Solução:

Seguindo o critério de divisibilidade, observando o algarismo da unidade, percebemos que 2 não é divisível por 5. Portanto $5 \nmid 859302$.

3.5 Divisibilidade por 6

Um número é divisível por 6 se, e somente se, esse número for divisível por 2 e por 3 simultaneamente, pois na decomposição em fatores primos, obtemos $6 = 2 \cdot 3$. A demonstração segue diretamente das divisibilidades por 2 e por 3.

Exemplo 3.11. *Verifique se o número 489324 é divisível por 6.*

Solução:

Temos que o algarismo das unidades do número dado é o 4, e como $4 = 2 \cdot 2$, ou seja, $2 \mid 4$ então 489324 é divisível por 2. Agora, temos que a soma dos algarismos do número 489324 é

$$4 + 8 + 9 + 3 + 2 + 4 = 30$$

e

$$30 = 3.10,$$

ou seja, $3 \mid 30$ então 489324 é divisível por 3. Logo, o número 489324 é divisível por 6.

Exemplo 3.12. *Verifique se o número 3518 é divisível por 6.*

Solução:

Temos que o algarismo das unidades do número dado é o 8, e como $8 = 2 \cdot 4$, ou seja, $2 \mid 8$ então 3518 é divisível por 2. Agora, temos que a soma dos algarismos do número 3518 é

$$3 + 5 + 1 + 8 = 17$$

e

$$17 = 3.5 + 2,$$

ou seja, $3 \nmid 17$ então 3518 não é divisível por 3. Portanto, o número 3518 não é divisível por 6.

$$10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \cdots + 10^2 a_2 + 10 a_1 + a_0 = 5q, \quad \text{com } q \in \mathbb{Z}$$

3.6 Divisibilidade por 7

Um número é divisível por 7, se o quíntuplo do seu algarismo da unidade somado com o número formado pelos outros algarismos for divisível por 7.

Demonstração.

Utilizando a expressão (9) na forma polinômica e admitindo que $7 \mid N$, então

$$10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \cdots + 10^2 a_2 + 10a_1 + a_0 = 7q, \quad \text{com } q \in \mathbb{Z}$$

Fazendo uso do princípio aditivo somamos $49a_0$ nos dois membros da igualdade, e teremos

$$\begin{aligned} 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \cdots + 10^2 a_2 + 10a_1 + a_0 + 49a_0 &= 7q + 49a_0 \\ 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \cdots + 10^2 a_2 + 10a_1 + 50a_0 &= 7q + 49a_0 \\ 10(10^{n-1} a_n + 10^{n-2} a_(n-1) + \cdots + 10a_2 + a_1 + 5a_0) &= 7(q + 7a_0). \end{aligned}$$

Sabemos que $10^{n-1}a_n + 10^{n-2}a_{n-1} + \cdots + 10a_2 + a_1 + 5a_0 = a_n a_(n-1 \cdots a_2 a_1 + 5a_0$. Como $7 \nmid 10$, então $7 \mid a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 + 5a_0$, provando o critério. ■

Se aplicarmos o critério acima em um número de muitos dígitos e ainda sim, for difícil de visualizar, podemos repetir o processo até chegarmos em um número menor, o qual se possa afirmar que é ou não divisível por 7.

Exemplo 3.13. *Verifique se o número 18823 é divisível por 7.*

Solução:

Utilizando o critério temos,

$$1882 + 5 \cdot 3 = 1897,$$

como o resultado ainda é grande, aplicando novamente o critério, assim temos

$$189 + 5 \cdot 7 = 224,$$

aplicando novamente

$$22 + 5 \cdot 4 = 42$$

e $7 \mid 42$. Portanto, 18823 é divisível por 7.

Exemplo 3.14. *Verifique se o número 5728 é divisível por 7.*

Solução:

Temos que

$$572 + 5 \cdot 8 = 612$$

que ainda é um número muito grande, aplicando novamente o critério até chegar no resultado fácil de concluir a divisão por 7, então

$$61 + 5 \cdot 2 = 71$$

e

$$71 = 7 \cdot 10 + 1,$$

ou seja, $7 \nmid 71$. Logo 5728 não é divisível por 7.

3.7 Divisibilidade por 8

Um número com mais de três algarismos, é divisível por 8 se, e somente se, o número formado por seus três últimos algarismos for divisível por 8.

Demonstração:

Utilizando a expressão (9) na forma polinômica e admitindo que $8 \mid N$, então

$$10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \cdots + 10^2 a_2 + 10a_1 + a_0 = 8q, \quad \text{com } q \in \mathbb{Z}$$

desta forma colocamos 1000 em evidência, ou seja,

$$1000(10^{n-3} a_n + 10^{n-4} a_{n-1} + \cdots + a_3) + 10^2 a_2 + 10a_1 + a_0 = 8q,$$

e tomando $k = 10^{n-3} a_n + 10^{n-4} a_{n-1} + \cdots + a_3)$, obtemos

$$1000k + (10^2 a_2 + 10a_1 + a_0) = 8q \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

Assim, como 1000 é divisível por 8, então o número

$$a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0 = 1000k + (10^2 a_2 + 10a_1 + a_0)$$

será divisível por 8 se, e somente se, $10^2 a_2 + 10a_1 + a_0$ for divisível por 8, ou seja, se $8 \mid a_2 a_1 a_0$. ■

Exemplo 3.15. *Verifique se o número 34000 é divisível por 8.*

Solução:

Temos que o número $3400 = 34 \cdot 1000$, e como $8 \mid 1000$, logo $8 \mid 34 \cdot 1000 = 34000$ então, 34000 é divisível por 8. Assim, todo número em que os três últimos algarismos forem 000 sempre será divisível por 8.

Exemplo 3.16. *Verifique se o número 85120 é divisível por 8.*

Solução:

Temos que o número

$$85120 = 85000 + 120 = 85 \cdot 1000 + 120,$$

e como

$$8 \mid 85 \cdot 1000 \text{ e } 8 \mid 120 \ (120 = 8 \cdot 15).$$

Logo, 85120 é divisível por 8. Assim, como os três últimos algarismos é 120 que é divisível por 8, portanto, o número 85120 é divisível por 8.

Exemplo 3.17. *Verifique se o número 27018 é divisível por 8.*

Solução:

Temos que o número

$$27018 = 27000 + 18 = 27 \cdot 1000 + 18,$$

e como

$$8 \mid 27 \cdot 1000 \text{ e } 8 \nmid 18 \ (18 = 8 \cdot 2 + 2).$$

Logo, 27018 não é divisível por 8.

3.8 Divisibilidade por 9

Um número é divisível por 9 se, o resultado da soma dos algarismos que compõe esse número, for divisível por 9.

Demonstração:

Utilizando a expressão (9) na forma polinômica e admitindo que $9 \mid N$, então

$$10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \cdots + 10^2 a_2 + 10 a_1 + a_0 = 9q, \quad \text{com } q \in \mathbb{Z}$$

Fazendo uso do princípio aditivo, somamos $9a_0$ nos dois membros da igualdade e teremos

$$10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \cdots + 10^2 a_2 + 10 a_1 + a_0 + 9a_0 = 9q + 9a_0,$$

retirando os fatores comuns, obtemos

$$10(10^{n-1} a_n + 10^{n-2} a_{n-1} + \cdots + 10 a_2 + a_1 + a_0) = 9(q + a_0).$$

Como $9 \nmid 10$, então para $9 \mid N$, temos que $(10^{n-1} a_n + 10^{n-2} a_{n-1} + \cdots + 10 a_2 + a_1 + a_0)$ deve ser divisível por 9.

E como $(10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \cdots + 10^2 a_2 + 10 a_1 + a_0 = a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0$ então está provado que para o número ser divisível por 9, soma dos algarismos que compõe esse número deve dividir 9. ■

Exemplo 3.18. *Verifique se o número 297585 é divisível por 9.*

Solução:

Temos que a soma dos algarismos do número 29754 é

$$2 + 9 + 7 + 5 + 8 + 5 = 36$$

e

$$36 = 9 \cdot 4,$$

ou seja, $9 \mid 36$ então 297585 é divisível por 9.

Exemplo 3.19. *Verifique se o número 18578 é divisível por 9.*

Solução:

Temos que a soma dos algarismos do número 18577 é

$$1 + 8 + 5 + 7 + 8 = 29$$

e

$$29 = 9.3 + 2,$$

ou seja, $9 \nmid 29$ então 18578 não é divisível por 9.

3.9 Divisibilidade por 10

Um número é divisível por 10 se, o algarismo das unidades é também divisível por 10, isto é, se for 0.

Demonstração:

Utilizando a expressão (9) na forma polinômica e admitindo que $10 \mid N$, então

$$10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \cdots + 10^2 a_2 + 10 a_1 + a_0 = 10q, \quad \text{com } q \in \mathbb{Z}$$

reescrevendo esse número na forma,

$$10(10^{n-1} a_n + 10^{n-2} a_{n-1} + \cdots + 10 a_2 + a_1) + a_0 = 10q,$$

isolando o algarismo das unidades, encontramos

$$\begin{aligned} a_0 &= 10q - 10(10^{n-1} a_n + 10^{n-2} a_{n-1} + \cdots + 10 a_2 + a_1) \\ a_0 &= 10[q - (10^{n-1} a_n + 10^{n-2} a_{n-1} + \cdots + 10 a_2 + a_1)] \end{aligned}$$

chamando de $q' = [q - (10^{n-1} a_n + 10^{n-2} a_{n-1} + \cdots + 10 a_2 + a_1)]$ com $q' \in \mathbb{Z}$, obtemos que $a_0 = 10q'$,ou seja, para um número ser divisível por 10, o algarismo das unidades também deve ser divisível por 10. ■

Exemplo 3.20. *Verifique se o número 6483100 é divisível por 10.*

Solução:

Segundo o critério de divisibilidade, se o algarismo da unidade for divisível por 10,

então o número é divisível por 10. Como $10 \mid 0$, então $10 \mid 6483100$, ou seja, 6483100 é divisível por 10.

Exemplo 3.21. *Verifique se o número 259308 é divisível por 10.*

Solução:

Seguindo o critério de divisibilidade, observando o algarismo da unidade, percebemos que 8 não é divisível por 10. Portanto $10 \nmid 259308$.

3.10 Divisibilidade por 11

Um número é divisível por 11, se o número formado pelos algarismos excluindo o algarismo das unidades e efetuando a subtração desse novo número com o algarismo das unidades que foi excluído anteriormente, for divisível por 11.

Demonstração:

Utilizando a expressão (9) na forma polinômica e admitindo que $11 \mid N$, então

$$10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \cdots + 10^2 a_2 + 10a_1 + a_0 = 11q, \quad \text{com } q \in \mathbb{Z}$$

Subtrai-se então $11a_0$ nos dois membros da igualdade e teremos

$$10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \cdots + 10^2 a_2 + 10a_1 + a_0 - 11a_0 = 11q - 11a_0$$

retirando os fatores comuns, obtemos

$$10(10^{n-1} a_n + 10^{n-2} a_{n-1} + \cdots + 10a_2 + a_1 - a_0) = 11(q - a_0).$$

Como $11 \nmid 10$, então para $11 \mid a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0$, temos que

$$(10^{n-1} a_n + 10^{n-2} a_{n-1} + \cdots + 10a_2 + a_1 - a_0)$$

deve ser divisível por 11.

E como $(10^{n-1} a_n + 10^{n-2} a_{n-1} + \cdots + 10a_2 + a_1 - a_0) = a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 - a_0$ então está provado que para o número ser divisível por 11, se o número formado pelos algarismos excluindo o algarismo das unidades e efetuando a subtração desse novo número com o algarismo das unidades que foi excluído anteriormente, for divisível por 11. ■

Se aplicarmos o critério acima em um número de muitos dígitos e ainda sim, for difícil de visualizar, podemos repetir o processo até chegarmos em um número menor o qual se possa afirmar que é ou não divisível por 11.

Exemplo 3.22. *Verifique se o número 28523 é divisível por 11.*

Solução:

Aplicando o critério de divisibilidade, temos então

$$2852 - 3 = 2849,$$

ainda não conseguimos definir a divisibilidade pelo resultado ainda ser grande, faremos novamente a aplicação do processo até que o resultado seja suficiente para definir se é ou não divisível por 11,

$$284 - 9 = 275,$$

aplicando novamente,

$$27 - 5 = 22 \;\; e \;\; 11|22.$$

Logo, 28523 é divisível por 11.

Exemplo 3.23. *Verifique se o número 625908 é divisível por 11.*

Solução:

Aplicando o critério de divisibilidade, temos então

$$62590 - 8 = 62582,$$

$$6258 - 2 = 6256,$$

$$625 - 6 = 619,$$

$$61 - 9 = 52 \text{ e } 11 \nmid 52.$$

Portanto, 625908 não é divisível por 11.

Vale ressaltar que os critérios apresentados, demonstrados e exemplificados anteriormente, também podem ser combinados para formar o critério de divisibilidade de números compostos, conforme visto no item 3.5, ou seja, se um número n é formado pelos primos $p_1, p_2, \cdots, p_n$, o critério de divisibilidade desse número n é a combinação simultânea dos critérios de $p_1, p_2, \cdots, p_n$. A tabela a seguir exemplifica essa ampliação.

Tabela 01: Generalização dos Critérios para Números Compostos

NÚMERO	FATORES PRIMOS	FORMATO
15	3 e 5	$\frac{N}{15} = \frac{N}{3 \times 5}$
21	3 e 7	$\frac{N}{21} = \frac{N}{3 \times 7}$
22	2 e 11	$\frac{N}{22} = \frac{N}{2 \times 11}$
33	3 e 11	$\frac{N}{33} = \frac{N}{3 \times 11}$
35	5 e 7	$\frac{N}{35} = \frac{N}{5 \times 7}$
55	5 e 11	$\frac{N}{55} = \frac{N}{5 \times 11}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$p_1, p_2, \cdots, p_n$	$\frac{N}{n} = \frac{N}{p_1 \times p_2 \times \cdots p_n}$

Fonte: O Autor

Para ratificarmos essa generalização enunciaremos e demonstraremos o teorema, base de sustentação, uma vez que os demais se fazem presentes nele, assim como a condição geral de multiplicidade, permite-nos justificar certos critérios de divisibilidade já estudados, mas também permite enunciar outros.

Teorema 3.1. *Se um número for divisível por vários outros primos entre si, dois a dois, então será divisível pelo produto deles.*

Demonstração.

Seja N um número dado e $a, b, c, \cdots$ vários números primos entre si, dois a dois.

$$\frac{N}{a} = q_1 \Rightarrow N = a \times q_1$$
$$\frac{N}{b} = q_2 \Rightarrow N = b \times q_2$$
$$\frac{N}{c} = q_3 \Rightarrow N = c \times q_3$$

e assim por diante. Queremos mostrar que $N = (a \times b \times c \times \cdots) \times q$, onde $q = q_1 \times q_2 \times q_3 \times \cdots$. Como $N = a \times q_1$, implica que $a \times q_1$ será divisível por b e, sendo b primo com a, então b dividirá q_1, logo,

$$q_1 = b \times q',$$

ou ainda,

$$N = a \times b \times q', \text{onde } q' = q_1 \times q_2.$$

Como $a \times b \times q'$ é divisível por c, e c é primo com a e b, então, N será primo com

$a \times b$, assim, c dividir q', logo, $q' = c \times q''$, portanto,

$$N = a \times b \times c \times q'',$$

ou ainda

$$q'' = q_1 \times q_2 \times q_3$$

$$N = (a \times b \times c)q''$$

Seguindo o mesmo raciocínio adotado, teremos que

$$N = (a \times b \times c \times \cdots) \times q.$$

■

4 CONGRUÊNCIA MODULAR

Neste Capítulo, apresentaremos uma das noções mais fecundas da aritmética, introduzida por Gauss no seu livro Disquisitiones Arithmericae, de 1801. Trata-se da realização de uma Aritmética envolvendo restos da divisão euclidiana por um número fixado, objeto de estudo dentro do campo da Teoria dos Números, sendo nomeado como Aritmética dos Restos. Veremos também, a relação de equivalência, sistema completo de resíduos e algumas propriedades de congruência modular abordando conceitos e definições.

4.1 Aritmética dos Restos

Seja m um número natural. Diremos que dois números inteiros a e b são congruentes módulo m se os restos de sua divisão euclidiana por m são iguais. Quando os inteiros a e b são congruentes módulo m, escreve-se: $a \equiv b \; mod \; m$

Por exemplo, $21 \equiv 13 \; mod \; 2$, já que os restos da divisão de 21 e de 13 por dois são iguais a 1.

Quando a relação $a \equiv b \; mod \; m$ for falsa, diremos que a e b não são congruentes, ou que são incongruentes, módulo m. escrevemos, nesse caso, $a \not\equiv b \; mod \; m$.

Como o resto da divisão de um número inteiro qualquer por 1 é sempre nulo, temos que $a \equiv b \; mod \; 1$, quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Isso torna desinteressante a aritmética dos restos módulo 1. Portanto, doravante, consideraremos sempre $m > 1$.

4.1.1 Relação de Equivalência

Proposição 4.1. *Seja $m \in \mathbb{N}$. Para todos $a, b, c \in \mathbb{Z}$, tem-se que*

(i) $a \equiv a \; mod \; m$ *(Reflexiva),*

(ii) $a \equiv b \; mod \; m$*, então* $b \equiv a \; mod \; m$ *(Símétrica)*

(iii) $a \equiv b \; mod \; m$ *e* $b \equiv c \; mod \; m$*, então* $a \equiv c \; mod \; m$ *(Transitiva).*

Demonstração.

(i) Como m divide 0, então m divide $(a - a)$, ou seja, $a \equiv a \; mod \; m$. ■

(ii) Se $a \equiv b \; mod \; m$, então $a - b = qm$, com $q \in \mathbb{Z}$. Portanto, $b - a = -(q)m \Rightarrow b \equiv a \; mod \; m$. ■

(iii) Se $a \equiv b \; mod \; m$ e $b \equiv c \; mod \; m$, então existem q e q', tais que

$$a - b = qm$$

e

$$b - c = q'm.$$

Somando membro a membro as duas equações, temos que

$$a - b + b - c = qm + q'm \Rightarrow$$

$$a - c = m(q + q'),$$

ou seja, $a \equiv c \; mod \; m$. ■

Para verificar se dois números são congruentes módulo m, não é necessário efetuar a divisão euclidiana de ambos por m para depois comparar os seus restos. É suficiente aplicar o seguinte resultado.

Proposição 4.2. *Suponha que $a, b, m \in \mathbb{Z}$, com $m > 1$. Tem-se que $a \equiv b \; mod \; m$ se, e somente se, $m \mid b - a$.*

Demonstração.

Sejam

$$a = mq + r, \text{ com } 0 \leq r < m$$

e

$$b = mq' + r', \text{ com } 0 \leq r' < m,$$

as divisões euclidianas de a e b por m, respectivamente.
Logo, $b - a = m(q^{'} - q) + (r^{'} - r)$.

Portanto, $a \equiv b \; mod \; m$ se, e somente se, $r - r'$, o que, em vista da igualdade acima, é equivalente a dizer que $m \mid b - a$, já que $|r - r'| < m$.

Note que todo número inteiro é congruente módulo m ao seu resto pela divisão euclidiana por m e, portanto, é congruente módulo m a um dos números $0, 1, \cdots, m - 1$. Além disso, dois desses números distintos não são congruentes módulo m.

Portanto, para achar o resto da divisão de um número a por m, basta achar o número natural r dentre os números $0, 1, \cdots, m - 1$ que seja congruente a a módulo m ■

4.1.2 Sistema Completo de Resíduos

Chamaremos de sistema completo de resíduos módulo m a todo conjunto de números inteiros cujos restos pela divisão por m são os números $0, 1, \cdots, m-1$, sem repetições e numa ordem qualquer.

Portanto, um sistema completo de resíduos módulo m possui m elementos.

É claro que, se $a_1, \cdots, a_m$ são m números inteiros, dois a dois não congruentes módulo m, então eles formam um sistema completo de resíduos módulo m. De fato, os restos da divisão dos a_i por m são dois a dois distintos, o que implica que são os números $0, 1, \cdots, m-1$ em alguma ordem.

Em particular, um conjunto formado por m inteiros consecutivos é um sistema completo de resíduos módulo m.

Seja R um sistema completo de resíduos módulo m, então a divisão euclidiana por m pode ser generalizada como segue:

Para todo $a \in \mathbb{Z}$ existem inteiros q e r univocamente determinados tais que $a = mq + r$, com $r \in \mathbb{R}$.

Nessa situação, dizemos tratar-se da divisão com resto em R.

A divisão euclidiana corresponde ao caso em que $R = \{0, 1, \cdots, m-1\}$. Se tomarmos $R = \{r \in \mathbb{Z};\ \frac{-m}{2} \leq r < \frac{m}{2}\}$, o que é um conjunto de m inteiros consecutivos, a correspondente divisão será chamada de divisão com menor resto.

O que torna útil e poderosa a noção de congruência é o fato de ser uma relação de equivalência compatível com as operações de adição e multiplicação nos inteiros, conforme veremos na proposição a seguir.

4.1.3 Algumas Propriedades de Congruência

Proposição 4.3. *Seja $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, com $m > 1$.*

(i) $a \equiv b \ mod\ m$ e $c \equiv d \ mod\ m$, então $a + c \equiv b + d \ mod\ m$.

(ii) $a \equiv b \ mod\ m$ e $c \equiv d \ mod\ m$, então $ac \equiv bd \ mod\ m$.

Demonstração

Suponhamos que $a \equiv b \ mod\ m$ e $c \equiv d \ mod\ m$. Logo, temos que $m \mid b - a$ e $m \mid d - c$.

(i) Basta observar que $m \mid (b - a) + (d - c)$ e, portanto, $m \mid (b + d) - (a + c)$, o que prova essa parte do resultado. ■

(ii) Basta notar que $bd - ac = d(b - a) + a(d - c)$ e concluir que $m \mid bd - ac$. ■

Corolário 4.1. *Para todos $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \equiv b \ mod \ m$, então tem-se que $a^n \equiv b^n \ mod \ m$.*

Demonstração

Temos que, da Proposição 4.2,

$$a \equiv b \ mod \ m \Leftrightarrow m \mid b - a = -(a - b)$$

e temos também, da Proposição 2.6 que

$$a - b \mid a^n - b^n$$

e por transitividade podemos afirmar que

$$a - b \mid a^n - b^n = -(b^n - a^n).$$

Logo, Para todo $n \in \mathbb{N}$, se $a \equiv b \ mod \ m \Rightarrow a^n \equiv b^n \ mod \ m$. ■

Proposição 4.4. *Sejam $a, b, c, m \in \mathbb{Z}$, com $m > 1$. Tem-se que $a + c \equiv b + c \ mod \ m \Leftrightarrow a \equiv b \ mod \ m$.*

Demonstração

Se temos que $a \equiv b \ mod \ m$ e pela proposição 4.2 temos que $c \equiv c \ mod \ m$, sendo assim, pela proposição 4.3, item (i), temos que $a + c \equiv b + c \ mod \ m$. Para a volta, se $a + c \equiv b + c \ mod \ m$ temos então que

$$m \mid (b + c) - (a + c),$$

e

$$(b + c) - (a + c) = b - a + c - c = b - a,$$

então $m \mid b - a$, consequentemente, $a \mid b \ mod \ m$.

A proposição acima nos diz que, para as congruências, vale o cancelamento com relação à adição. Entretanto, não vale, em geral, o cancelamento para a multiplicação, vamos verificar, por exemplo, que $6 \cdot 9 - 6 \cdot 5 = 24$ e $8 \mid 24$, então temos proposição que $6 \cdot 9 \equiv 6 \cdot 5 \ mod \ 8$, e, no entanto, $9 \not\equiv 5 \ mod \ 8$. ■

Proposição 4.5. *Sejam $a, b, c, m \in \mathbb{Z}$, com $m > 1$. Temos que $ac \equiv bc \ mod \ m \Leftrightarrow a \equiv b \ mod \ \dfrac{m}{(c, m)}$.*

Demonstração

Se

$$ac \equiv bc \ mod \ n \Rightarrow n \mid bc - ac \Rightarrow$$

$$n \mid (a - b)c \Rightarrow (a - b)c = nq \Rightarrow$$

$$(a-b)\frac{c}{c,n} = \frac{c}{c,n}q,$$

pois $(c,n) \neq 0$, logo $\frac{n}{(c,n)} \mid (a-b)\frac{c}{(c,n)}$, como $\frac{n}{(c,n)}$ e $\frac{c}{(c,n)}$ são primos entre si, então $\frac{n}{(c,n)} \mid (a-b)$ e, portanto, $a \equiv b \; mod \; \frac{n}{(c,n)}$.

A volta da implicação é análoga. ■

Corolário 4.2. *Sejam $a, b, c, m \in \mathbb{Z}$, com $m > 1$ e $(c,m) = 1$. Temos que $ac \equiv bc \; mod \; m \Leftrightarrow a \equiv b \; mod \; m$.*

Demonstração

Se

$$a \equiv b \; mod \; n,$$

então $n \mid (a-b)$, isto é,

$$(a-b) = nq \Rightarrow$$

$$(a–b)c = nqc \Rightarrow$$

$$ac - bc = nq',$$

com $q' = qc$. Logo $n \mid (ac - bc)$ e, portanto, $ac \equiv bc \; mod \; n$.

Para a volta da implicação, por hipótese temos que, $(c,n) = 1$ e

$$ac \equiv bc \; mod \; n,$$

isto é,

$$n \mid (ac - bc) \Rightarrow n \mid (a-b)c,$$

como $n \nmid c$ então $n \mid (a-b) \Rightarrow a \equiv b \; mod \; n$. ■

Daremos, a seguir, propriedades adicionais das congruências relacionadas com a multiplicação.

Proposição 4.6. *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Se $m, n, m_1, \cdots, m_r$ são inteiros maiores do que 1, temos que*

(i) se $a \equiv b \; mod \; m$ e $n \mid m$, então $a \equiv b \; mod \; n$;

(ii) $a \equiv b \; mod \; m_i$, $\forall i = 1, \cdots, r \Leftrightarrow a \equiv b \; mod; [m_1, \cdots, m_r]$;

(iii) se $a \equiv b \; mod \; m$, então $(a,m) = (b,m)$.

Demonstração

(i) Se $a \equiv b \; mod \; m$, então $m \mid b - a$. Como $n \mid m$, segue-se que $n \mid b - a$. Logo, $a \equiv b \; mod \; n$. ■

(ii) Se $a \equiv b \ mod \ m_i$, $i = 1, \cdots, r$, então $m_i \mid b - a$, para todo i. Sendo $b - a$ um múltiplo de cada m_i, segue-se que $[m_1, \cdots, m_r] \mid b - a$, o que prova que $a \equiv b \ mod \ [m_1, \cdots, m_r]$. A recíproca decorre do item (i). ■

(iii) Se $a \equiv b \ mod \ m$, então $m \mid b - a$ e, portanto, $b = a + tm$ com $t \in \mathbb{Z}$. Logo, pelo Lema de Euclides (Unidade 5 do livro de Aritmética da Coleção PROFMAT 2016, p.75) temos que $(a, m) = (a + tm, m) = (b, m)$. ■

Exemplo 4.1. *Vamos achar o menor múltiplo positivo $7u$ de 7 que deixa resto 1 quando dividido por 2,3,4,5 e 6.*

Solução:

Portanto, queremos achar a menor solução positiva u do seguinte sistema de congruências:

$$7X \equiv 1 \ mod 2, mod 3, mod 4, mod 5 \text{ e } mod 6.$$

Pela Proposição 4.6(ii), temos que toda solução simultânea das congruências acima é solução da congruência

$$7X \equiv 1 \ mod [2, 3, 4, 5, 6],$$

e reciprocamente.

Portanto, devemos achar a solução positiva mínima u da congruência

$$7X \equiv 1 \ mod \ 60.$$

Por outro lado, resolver a congruência

$$7X \equiv 1 \ mod \ 60$$

é equivalente a resolver a equação diofantina

$$7X - 60Y = 1.$$

Pelo Algoritmo de Euclides, temos que

$$60 = 7 \cdot 8 + 4$$

$$7 = 4 \cdot 1 + 3$$

$$4 = 3 \cdot 1 + 1.$$

Portanto,

$$1 = 4 - 3 \cdot 1 = 4 - (7 - 4) =$$

$$2 \cdot 4 - 7 = 2(60 - 7 \cdot 8) - 7 =$$

$$7 \cdot (-17) - 60 \cdot (-2).$$

Decorre daí que $x_0 = -17$ e $y_0 = -2$ é uma solução particular da equação diofantina $7X - 60Y = 1$. Logo, a solução geral é dada por

$$x = -17 + t60 \text{ e } y = -2 - t7, \text{ com } t \in \mathbb{Z}.$$

Portanto, o menor valor positivo de u de modo que exista v para os quais u, v é uma solução da equação diofantina

$$7X - 60Y = 1$$

é

$$u = -17 + 1 \cdot 60 = 43.$$

Segue-se, então, que o número procurado é $7 \cdot 43 = 301$.

No capítulo 3 deste trabalho discutimos critérios de divisibilidade. Revisaremos aqui esses alguns desses critérios, agora, utilizando a noção de congruência.

Exemplo 4.2. *Critérios de divisibilidade por 2, 5 e 10.*

Solução:

Notando que $10 \equiv 0 \; mod \; 2$, $10 \equiv 0 \; mod \; 5$ e $10 \equiv 0 \; mod \; 10$, temos que

$$n_i 10^i \equiv 0 \; mod \; 2,$$

$$n_i 10^i \equiv 0 \; mod \; 5$$

e

$$n_i 10^i \equiv 0 \; mod \; 10; \quad i \geq 1;$$

Portanto, dado um número $n \equiv n_r n_{r-1} \cdots n_0$, na base 10, temos que

$$n \equiv n_0 \; mod \; 2,$$

$$n \equiv n_0 \; mod \; 5$$

e

$$n \equiv n_0 \; mod \; 10,$$

o que nos diz que n é divisível por 2, 5 e 10 se, e somente se, n_0 é divisível por 2, 5 e 10.

Exemplo 4.3. *Critérios de divisibilidade por 3 e 9.*

Solução:

Como $10 \equiv 1 \; mod \; 3$ e $10 \equiv 1 \; mod \; 9$, segue-se que

$$n_i 10^i \equiv n_i \; mod \;\; 3$$

e

$$n_i 10^i \equiv n_i \; mod \; 9.$$

Isso mostra que, se n é representado na base 10 como

$$n = n_r + n_(r - 1) + ... + n_0,$$

então

$$n \equiv n_r + n_{r-1} + \cdots + n_0 \; mod \; 3$$

e

$$n \equiv n_r + n_{r-1} + \cdots + n_0 \; mod \; 9,$$

o que prova que n é divisível por 3 ou 9 se, e somente se, $n_r + n_{r-1} + \cdots + n_0$ é divisível, respectivamente, por 3 ou por 9.

5 CARTEADO DE DIVISIBILIDADE E DA CONGRUÊNCIA MODULAR NA EDUCAÇÃO BÁSICA E NO ENSINO SUPERIOR

Neste capítulo apresentaremos a importância de levar o lúdico para sala de aula como estratégia inovadora e atraente para os alunos, além disso, teremos a elaboração, as regras e a aplicação do jogo Carteado da Divisibilidade em seis turmas do ensino básico ao superior.

5.1 Elaboração do Carteado

O jogo de mesa Carteado da Divisibilidade e Congruência foi elaborado para ser aplicado em sala de aula do ensino básico ao superior. O jogo foi construído tendo como base a disciplina de Teoria dos Números com enfoque nos critérios de divisibilidade de números primos e compostos e na teoria das congruências, com destaque as propriedades operatórias.

Essa atividade é uma alternativa metodológica prática para o ensino da Matemática, nos mais variados níveis de aprendizagem, além de possibilitar e fortalecer habilidades diversas, como atenção, interação, memória, raciocínio lógico, planejamento, tomadas de decisão de modo a minimizar as dificuldades apresentadas nos conteúdos mencionados acima.

O jogo é de fácil compreensão, visto que utilizamos a mesma estrutura lógica do "jogo de cartas UNO", ou seja, uma atividade que já faz parte da rotina da grande maioria dos estudantes, o que favorece a receptividade dos alunos e promove maior engajamento na atividade.

Outro aspecto que vale destacar é que no referido jogo podemos promover variações que dependem do número de participantes, dos critérios de divisibilidades envolvidos, das propriedades operatórias de congruência e da quantidade de cartas envolvidas, ampliando assim as possibilidades lúdicas metodológicas do jogo.

O jogo tem por objetivo fornecer ao professor, seja da educação básica ou mesmo do ensino superior, um produto educacional (jogo) de baixo custo de modo a promover uma alternativa didática metodológica que possibilite uma melhoria da qualidade do ensino dos conteúdos relacionados.

Conforme Lara (2011, p.17),

> Os jogos, ultimamente, vêm ganhando espaço dentro de nossas escolas numa tentativa de trazer o lúdico para dentro da sala de aula. A pretensão da maioria dos professores com a sua utilização é a de tornar as aulas mais agradáveis com o intuito de fazer com a aprendizagem torne-se algo fascinante. Além disso, as atividades lúdicas podem ser consideradas como uma estratégia que estimula o raciocínio levando o aluno a enfrentar situações conflitantes relacionadas com seu cotidiano.

A autora apresenta e reforça a importância do lúdico em sala de aula, visto que os alunos são estimulados quando estão participando de jogos e brincadeiras.

Tendo em vista a proposta de um trabalho que relacione o ensino superior e o ambiente de sala de aula da educação básica, planejamos este material, em parceria com o Laboratório Pedagógico de Informática e Matemática (LAPINMAT)[1], a fim de envolver a congruência modular, abordada na disciplina de Aritmética (PROFMAT) e divisão euclidiana da educação básica, mais precisamente, os critérios de divisibilidade. Obtemos como fruto dessas relações o que denominamos de "Carteado da divisibilidade e da congruência modular".

Assim, podemos atrelar uma metodologia de ensino diferenciada com alunos motivados e estimulados a aprender, compreender, discutir e interagir de um modo mais dinâmico e divertido. Segue abaixo as etapas desenvolvidas para efetuar o trabalho:

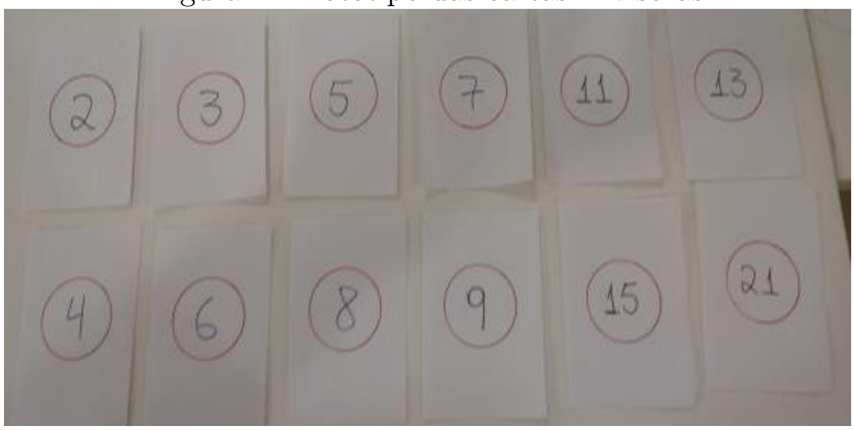
1ª Etapa – Discutir acerca do assunto colocado em pauta proposto pela orientadora e pelo coorientador em consonância com o que se ensina a estudar em sala de aula, decidimos então abordar a divisibilidade e congruência modular com a finalidade de criar um material concreto de baixo custo que pudesse ser utilizado em aulas por docentes e para os discentes como forma de aprendizado diferenciado.

2ª Etapa – Foi pensado em um jogo que fosse de fácil acesso e que a maioria tivesse algum conhecimento prévio sobre o tipo de jogo, assim foi escolhido o carteado, pois se avaliou que a estrutura é bastante popular, puderam ser feitas as modificações necessárias para o conteúdo que queríamos esclarecer.

3ª Etapa – Confeccionou-se um protótipo do "Carteado da Divisibilidade", usando papel A4 (ver figura 1) com formato retangular em tamanho 8,5 cm por 4,85 cm, onde as cartas eram divididas em dois grupos: as cartas divisoras (ver figura 1) e as cartas dividendo (ver figura 2), sendo todas as cartas do mesmo tamanho, mas de fácil diferenciação.

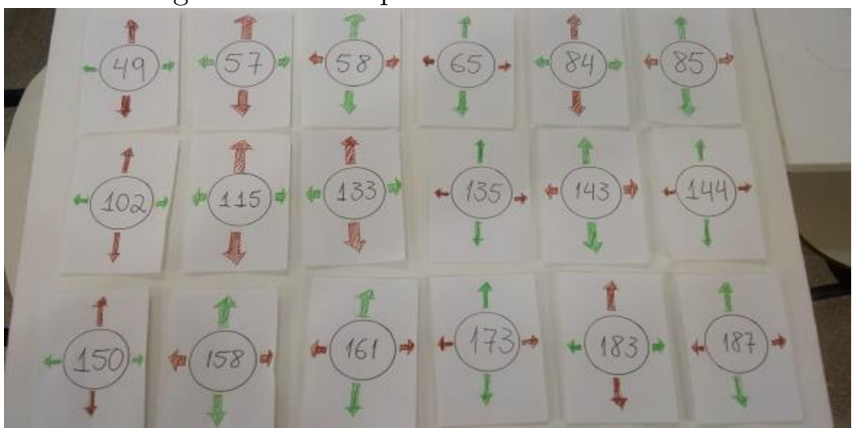
[1]O LAPINMAT é um Laboratório Pedagógico de Informática e Matemática destinada a comunidade acadêmica e tem como objetivos: desenvolver pesquisas sobre informática, produzir materiais e vídeo aulas para serem utilizadas em Matemática desde o fundamental ao superior, além de envolver as escolas públicas no laboratório. O LAPINMAT é aberto ao público em geral para desenvolvimento de seus trabalhos e pesquisas.

Figura 1: Protótipo das cartas Divisoras



Fonte: LAPINMAT

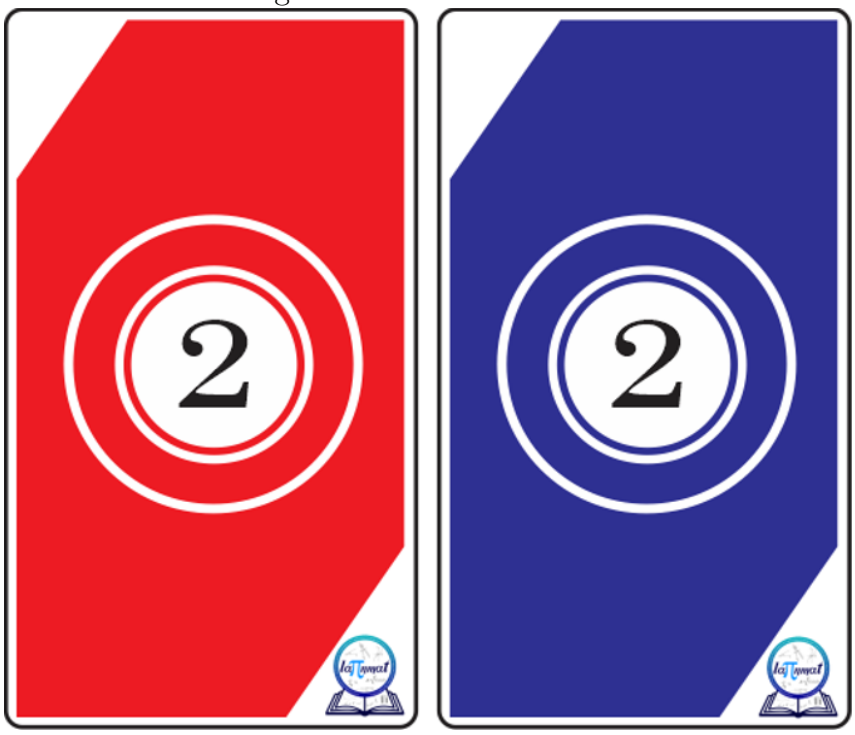
Figura 2: Protótipo das cartas Dividendo



Fonte: LAPINMAT

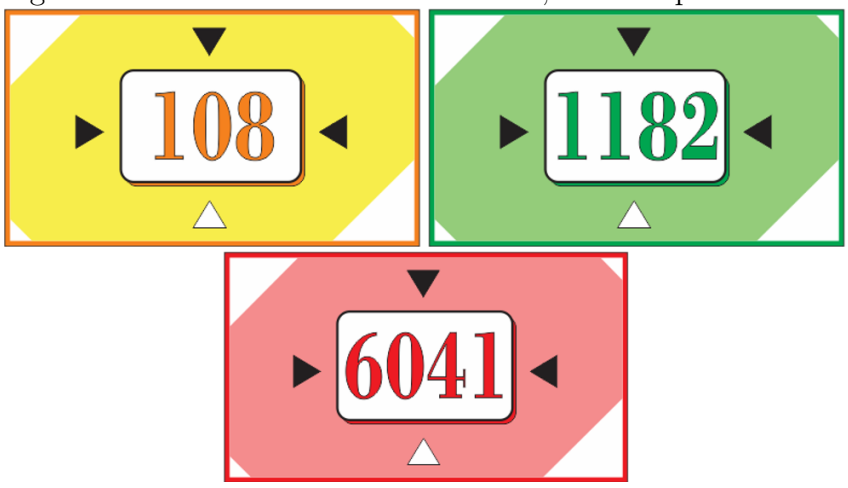
4ª Etapa – Em outro momento, foi utilizado o programa CorelDraw 2020, para confeccionar as cartas na forma digital (ver figuras 3, 4 e 5) e foi nesse momento que houve a inclusão das cartas em notação de congruência modular e separando o jogo em níveis conforme o ciclo de ensino, surgiu então o nome do jogo "Carteado da Divisibilidade e Congruência Modular".

Figura 3: Cartas Divisoras



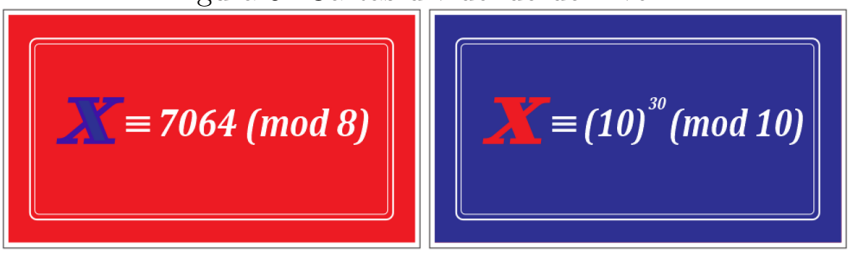
Fonte: LAPINMAT

Figura 4: Cartas dividendo dos níveis 1, 2 e 3 respectivamente



Fonte: LAPINMAT

Figura 5: Cartas dividendo do nível 4



Fonte: LAPINMAT

5.2 Regras do Jogo

- A partida pode ser disputada por até seis participantes ou grupos;
- Os jogadores ou grupos recebem as mesmas cartas, inclusive em quantidade, de acordo com o nível: Nível 1 (12 cartas), Nível 2 (15 cartas), Nível 3 (20 cartas) e Nível 4 (25 cartas);
- O primeiro jogador retira uma carta dividendo e em seguida todos os jogadores descartam os divisores que possuem condizente com o maior divisor para o dividendo que está na mesa;
- Caso o jogador descarte uma carta que seja divisor, mas não é o maior divisor em mãos, a carta retorna ao jogador;
- Caso o jogador descarte uma carta que não seja divisor da carta dividendo, a referida carta retorna para as mãos do jogador e o mesmo é obrigado a comprar uma nova carta divisora;
- Não é permitido descartar mais de uma carta por divisor numa mesma jogada;
- A partida se desenvolve com os demais participantes se alternando nas jogadas;
- O jogador que descartar todas as suas cartas primeiro será o vencedor podendo ter mais de um vencedor por partida;

5.3 Aplicação do Carteado

A partir do momento que o carteado estava pronto, o mesmo passou a fase de testes, sendo aplicado em níveis e realidades diferentes. A primeira aplicação se deu entre os próprios alunos do LAPINMAT, em seguida foi aplicado com os alunos do Programa Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo (POTI) que funciona na própria UFPA campus Bragança, ver anexo A figura 13 e 14. Num terceiro momento o carteado foi aplicado aos alunos do PROFMAT, turma 2021, ver anexo A figura 15. Essas aplicações foram suficientes e motivadoras para submetermos o jogo até a X Bienal de Matemática, um evento de âmbito nacional que avaliávamos ser necessário para experimentarmos o jogo em outra realidade.

Enquanto aguardávamos a Bienal, levamos e aplicamos o carteado da divisibilidade em quatro turmas de escolas públicas: duas turmas de sétimo ano da Escola de Ensino Fundamental A, no município de Garrafão do Norte-PA e duas turmas de terceiro ano de ensino médio da Escola Estadual B, no município de Capitão Poço-PA. Foram escolhidas duas turmas de cada nível para realizar a aplicação do carteado, e de maneira intencional, apenas uma turma de cada nível teve contato com o estudo dos critérios de divisibilidade

em sala de aula. Vale ressaltar também que nessa aplicação utilizamos apenas os critérios de divisibilidade descritos neste trabalho.

Em cada turma, foi feito a seguinte pergunta: Vocês já jogaram ou jogam algum tipo de jogo de cartas? Nas turmas de sétimo ano percebeu que cerca de 40% jogam ou conhecem o jogo de cartas UNO. Já nas turmas de terceiro ano a quantidade de alunos que conhecem ou jogam cartas, tendo como principal o UNO, é de aproximadamente 70%. Notamos que boa parte dos alunos jogam o UNO, nas recreações e nos intervalos de aula, citado por alguns alunos.

Posteriormente apresentamos o Carteado de divisibilidade, mostramos a semelhança com o UNO, mas com suas regras próprias, tendo como particularidade o descarte da carta divisora por todos os envolvidos ao mesmo tempo, gerando a possibilidade de ter mais de um vencedor, utilizando os critérios de divisibilidade como solução para o descarte da carta divisora. Por se tratar de divisão, operação em que apresentam dificuldades, observamos inicialmente um certo descontamento, não com o jogo em si, mas com a proposta de solução, assunto este de difícil compreensão pela maioria dos alunos. Lembrando que em cada nível tínhamos turmas que estudaram os critérios e outras que não tiveram um contato direto com os critérios, ou seja, mais um desafio para os que não estudaram o assunto, já para os que estudaram os critérios, colocaram em prática a teoria.

Mesmo se tratando de divisão, alguns alunos estavam ansiosos e entusiasmados em participar do jogo carteado, por sua comparação ao UNO e ver de fato o funcionamento e aplicação da divisibilidade (para os alunos que estudaram).

Para efeito de distinção de cada turma, chamaremos as turmas de sétimo ano e terceiro ano que tiveram contato com os critérios de divisibilidade, de F7A e M3A e as que não tiveram contato com a temática, de F7B e M3B, respectivamente.

Um caso interessante, foi que após o início do jogo, todas as turmas demoraram nas primeiras jogadas, devido ao primeiro contato com o carteado, e também tinham dez critérios de divisibilidade nas mãos tendo que verificar dos números mais altos para os mais baixos, mas depois tiveram desenvolvimentos diferentes no decorrer do jogo.

Percebemos a necessidade e a importância de ter o lúdico ou ferramentas similares como alternativas metodológicas para o ensino e aprendizagem de Matemática, conforme defendido por (BORIN 2002, p. 8).

Mesmo sendo uma prática já aplicada em muitas escolas é surpreendente o poder que o jogo tem na geração de entusiasmo, motivação e participação dos alunos, até porque não é comum um jogo que envolva os critérios de divisibilidade, mesmo sabendo da enorme dificuldade que os alunos, no âmbito geral, tem de realizar a operação de divisão de forma rápida e eficiente.

5.4 Nível 1 (sexto e sétimo ano do ensino fundamental)

Nas turmas de sétimo ano, cada jogador recebeu 12 cartas divisoras, as quais são, duas cartas do 2 e 3 e uma carta dos valores 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 e 11. Foi relatado primeiramente a participação dos alunos que tiveram o contato com os critérios de divisibilidade. Após o início do jogo, os alunos da F7A, apresentaram demora no desenvolvimento dos critérios de divisibilidade, pois estavam diante do jogo carteado pela primeira vez, além de contar com o nervosismo apresentado por eles. Falando sobre o tempo (demora) da jogada das cartas durante a partida, as cartas de divisibilidade do 11, 8 e 7, demoravam cerca de 8 a 12 minutos, aproximadamente, para todos finalizarem seus devidos cálculos, com dificuldade maior na divisibilidade por 7, para as cartas de divisibilidade por 3, 4, 6 e 9 demoravam entre 2 a 6 minutos, aproximadamente, já com as cartas 2, 5 e 10, todos finalizavam em menos de 2 minutos.

Na observação dos cálculos durante a partida, percebemos contagem dos dedos, calculo mental e algumas vezes tendo que recorrer ao papel e lápis para cálculos mais complexos de se resolver. No decorrer do jogo, os alunos se sentiam entusiasmado com o jogo, menos nervosos, e à medida que acertavam a jogada vibravam, principalmente quando acertavam as cartas com critérios mais difíceis, ou seja, naquele momento os alunos perceberam a importância de aprender os critérios de divisibilidade ao aplicar na prática e por meio do lúdico. O jogo na turma F7A teve uma duração aproximada de 1 hora e 20 minutos. Como houve alguns erros de cartas que não dividiam a carta dividendo e também por jogarem cartas que dividiam, porém não eram as cartas de divisores maiores que estes tinham em suas mãos. Ao final do jogo três alunos foram vencedores, ou seja, tivemos um desempenho satisfatório.

Agora, descreveremos a análise da turma F7B, que não teve contato com os critérios de divisibilidade, o que se observou, ao iniciar a partida, é a dificuldade dos alunos em compreender a divisão, ainda mais consideração que estes alunos passaram praticamente dois anos sem estudos presenciais, devido à pandemia e sabemos que a operação de divisão em si, é uma operação em que os mesmos apresentam dificuldades. Dificuldade essa que travou o jogo, eles tiveram que recorrer aos cálculos utilizando-se de papel e lápis, mesmo assim houve bastante interrupções e o autor realizou explicações sobre a divisão normal, e quantas vezes a carta divisora daria na carta da mesa, dentre outras formas, para que a partida tivesse continuidade.

Como eles tinham que encontrar o maior divisor que tinham em suas mãos, tendo que efetuar vários cálculos, por exemplo, as cartas 11, 10, 9 e 8 foram as cartas que a maioria teve dificuldade em jogar, sendo que em algumas vezes essas cartas foram jogadas sem efetuar o cálculo, resultando em vários erros por não ser a carta divisora, além disso, houve a ocorrência de descartes de divisores menores, infringindo a regra do jogo. Desse grupo de alunos, uma aluna conseguiu descartar apenas três vezes sendo as cartas

divisoras 2, 3 e 5. Nas observações dos cálculos, teve cálculos por meio de bolinhas, por palitos, por soma, na qual gerava dúvidas sobre a certeza de suas soluções, apenas dois alunos conseguiam resolver a divisão com pouca dificuldade.

Na turma F7B, o carteado de divisibilidade teve uma duração aproximada de 2 horas e 30 minutos, levando em consideração as várias vezes que o jogo pausou para explicações feitas pelo autor, o que resultou em apenas um vencedor com muita dificuldade. Na observação durante a aplicação do jogo, foi notório o desânimo por parte dos alunos por não conseguirem desenvolver os cálculos com eficiência e com isso gerando a demora em cada jogada, lembrando que em uma das jogadas, tivemos uma demora de aproximadamente 25 minutos, e em outros casos a desistência da jogada, houve também a impaciência, ou seja, alguns desses alunos estavam frustrados por sua incapacidade de solucionar a operação de divisão e algumas vezes davam risadas nos erros que aconteciam para descontrair em certos momentos.

Após o término da partida do carteado, o autor fez uma breve fala a respeito da importância de saber a operação de divisão, além disso, o mesmo fez uma breve explicação dos critérios de divisibilidade do 2, 3 e 5, mostrando o quanto seria eficaz na solução do jogo se os alunos soubessem desses critérios, após a explanação do tema, percebeu-se o entusiasmo em jogar novamente o carteado após aprender os critérios de divisibilidade.

5.5 Nível 3 (ensino médio)

Agora, relataremos a experiência dos alunos com o jogo carteado nas turmas de terceiro ano M3A e M3B, respectivamente. Cada jogador neste nível recebeu duas cartas de cada divisor, totalizando 20 cartas.

Na turma M3A onde houve o estudo dos critérios de divisibilidade, apenas um dos envolvidos não conhecia o jogo UNO, ou seja, ao explicar sobre as regras do jogo e a sua semelhança com o jogo de cartas UNO, não houve dificuldade no entendimento do jogo carteado. No entanto, o início do jogo foi demorado, além de ser o primeiro contato, a primeira carta dividendo a aparecer foi para o divisor 7, ou seja, obedecendo à regra, até chegar ao 7, eles tiveram que testar os divisores maiores, mesmo assim os alunos solucionaram seus cálculos em torno de 9 minutos.

Dessa turma, observamos que três desses alunos aplicavam os critérios de forma rápida, e com eficiência, durante a partida, a disputa entre eles começava a aparecer, os cálculos aconteciam de forma mais tranquila, houve tempo recorde de 8 segundos para definirem o divisor 10. Notou-se também a agilidade nas resoluções dos divisores 2, 3, 5 e 9 com tempo aproximado de 30 segundos a 3 minutos, já a divisibilidade do 4 e 8 demoraram em torno de 1 a 4 minutos, aproximadamente.

Na turma M3A obtiveram apenas dois erros de cartas divisoras não divisíveis, também teve jogadas de cartas divisoras que eram divisíveis, porém não obedecia a regra de jogar a carta de maior valor, mesmo assim, ao fim do jogo, resultou em quatro vencedores com duração da partida em aproximadamente 1 hora e 15 minutos. Eles apresentaram uma boa participação e entusiasmo, se divertiam enquanto jogavam, houve disputas para verificar quem conseguia ser mais rápido em encontrar a carta de acordo com o critério de divisibilidade e regras do jogo, o ambiente ficou bem participativo gerando até torcida dos demais alunos que observavam os jogadores.

Enfim, o grupo da turma M3A percebeu a importância de aprender os critérios de divisibilidade e de saber que um jogo de carteado semelhante ao UNO é interessante e prazeroso para aplicação do tema estudado.

Vamos, agora, descrever a observação na turma M3B, que não estudou tais critérios, por se tratar de uma turma de terceiro ano, era esperado que a ampla maioria soubesse o básico da operação de divisão, mas não foi o que constatamos. No início do jogo, a primeira carta dividendo foi do divisor 11, onde obtiveram dificuldades em resolver por cálculos mentais, ou seja, mais uma vez o jogo travou mesmo estando os envolvidos em outro nível de estudos, então eles recorreram aos cálculos com papel e lápis para assim tentar solucionar a divisão em si, alguns resolviam pela divisão normal, outros tentavam pela soma do divisor, outros pela tentativa de multiplicações e assim os cálculos estavam fluindo, levando em torno de 18 minutos essa primeira jogada. Quatro alunos conseguiram confirmar o divisor e um aluno permaneceu tentando calcular até que desistiu da jogada e sugeriu sair da partida, por apresentar dificuldade na operação de divisão, então o autor se propôs a auxiliar nos cálculos sugerindo algumas ideias de resoluções em cada jogada, desse modo, o aluno permaneceu na partida até o término.

O jogo continuou e por alguns momentos travava nas resoluções, o que se percebia era que nas cartas 10, 9, 8 e 7 por serem teoricamente altas, justificados por eles, traziam certa dificuldade nos cálculos, demorando em torno de 10 a 16 minutos para todos finalizarem os cálculos de cada divisor.

Nesta turma, o autor adotou uma estratégia de explicar rapidamente alguns critérios de divisibilidade depois que as duas cartas divisoras eram descartadas pelos alunos, o jogo até então estava cansativo e desinteressado, notou-se certo interesse tanto pelas jogadas seguintes quanto para saber mais sobre a próxima explicação. À medida que estavam descartando as cartas, apareciam as novas cartas dividendo que não possuem mais divisores entre os participantes e o autor mencionava que as cartas divisoras já saíram, então ocorria um fato interessante, ao serem questionados sobre o possível divisor daquela carta dividendo, a maioria percebia por meio do que aprenderam sobre os critérios de divisibilidade do 2, 3, 5 e 10, durante a partida, e respondiam corretamente e com rapidez.

O grupo da turma M3B finalizou o jogo com dois participantes vencedores em tempo aproximado de 2 horas e 10 minutos, o que se pode perceber ao jogar o carteado

sem noção dos critérios de divisibilidade, o ambiente se torna cansativo e desinteressante por parte dos alunos, visto que eles têm que efetuar cálculos de divisão por várias vezes e a divisão em si já é um empecilho na vida educacional da maioria dos alunos. Mas esta turma esboçou ânimo e interesse, quando colocados diante de alguns critérios que de certa forma ampliaram seus conhecimentos.

5.6 Análise dos Resultados

Após a conclusão da aplicação do Carteado da Divisibilidade nas quatro turmas inicialmente propostas, podemos destacar os seguintes aspectos:

5.6.1 Duração da Partida

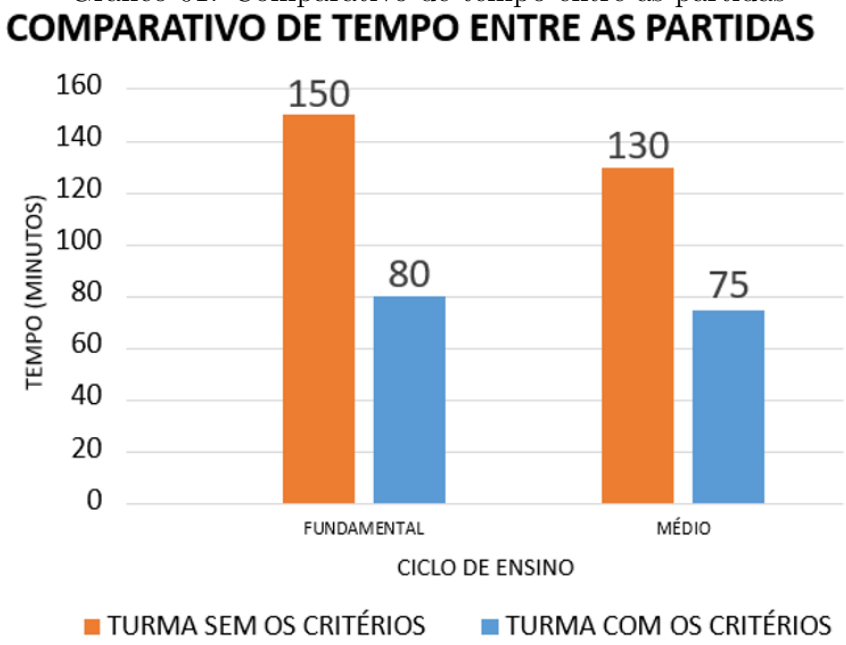
Quando dividimos as turmas entre aquelas que receberiam aulas prévias com a abordagem dos critérios de divisibilidade e as que não receberiam, nossa intenção era justamente o de estabelecer esse comparativo temporal, pois acreditávamos que o conhecimento prévio dos critérios tornavam as divisões mais rápidas, possibilitando aos participantes uma interação maior, com velocidade de raciocínio e dinamismo, isso foi sem dúvida o fator determinante que as turmas que não tiveram acesso prévio aos critérios levassem quase o dobro do tempo para terminar a sua partida, conforme pode ser visto na tabela 02.

Tabela 02: Tempo de duração da partida entre os níveis de ensino

TEMPO DA PARTIDA (MINUTOS)		
NÍVEL DE ENSINO	TURMA SEM OS CRITÉRIOS	TURMA COM OS CRITÉRIOS
FUNDAMENTAL	150	80
MÉDIO	130	75

Fonte: O Autor

Gráfico 01: Comparativo de tempo entre as partidas



Fonte: O Autor

Na leitura do gráfico percebemos que houve uma diferença de apenas 5 minutos entre as partidas dos níveis fundamental e médio para as turmas que receberam o conhecimento prévio dos critérios de divisibilidade, mesmo sabendo que as quantidades de cartas são diferentes e que os valores das cartas dividendo do nível médio são de números maiores, essa proximidade reforça que o nivelamento do jogo foi muito bem estabelecido, isto é, gerando as mesmas dificuldades equivalentes ao ciclo de ensino.

5.6.2 Número de vencedores

Outro ponto que vale destacar é o número de vencedores que tivemos em cada partida conforme Tabela 03, como relação às turmas que tinham conhecimento dos critérios de divisibilidade das que não tinham, o número de ganhadores foi maior ou igual ao dobro, nesta ordem, outro ponto importante é que a quantidade de vencedores entre os níveis é aproximadamente o mesmo, diferenciando, é claro o número de vencedores.

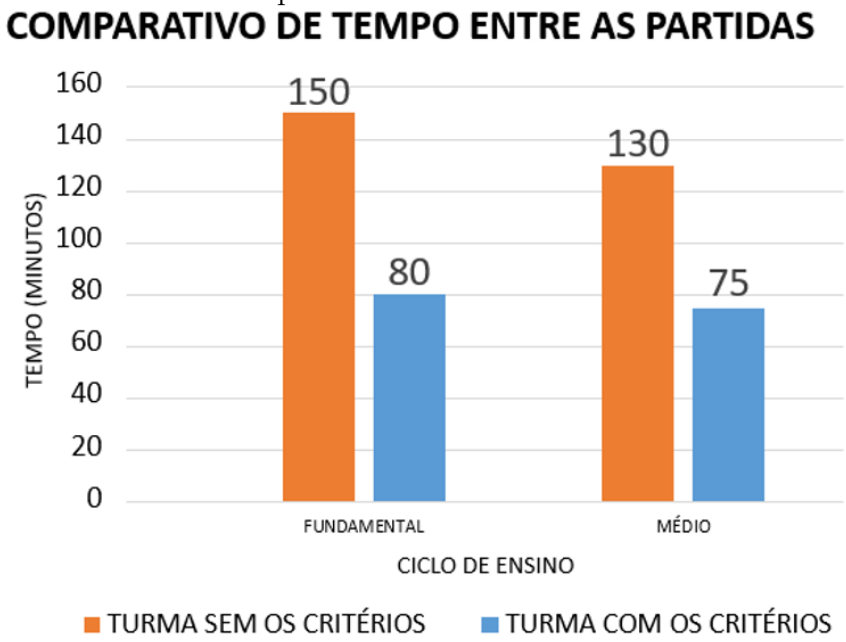
Tabela 03: Comparativo entre o número de vencedores

TEMPO DA PARTIDA (MINUTOS)		
NÍVEL DE ENSINO	TURMA SEM OS CRITÉRIOS	TURMA COM OS CRITÉRIOS
FUNDAMENTAL	150	80
MÉDIO	130	75

Fonte: O Autor

Para destacar melhor os dados do número de vencedores, foi construído um gráfico de colunas 02, pois assim podemos notar que o número de ganhadores é bem superior quando os alunos conhecem previamente os critérios de divisibilidade.

Gráfico 02: Comparativo entre o número de vencedores



Fonte: O Autor

Observando o gráfico, percebemos que o quanto é importante aprender os critérios de divisibilidade, pois na prática, nesse caso utilizando o carteado da divisibilidade, notamos que as chances de acertar um determinado problema é bem maior.

5.6.3 Engajamento no Jogo

Nas observações, percebemos a fluidez, a dinâmica, a motivação quando os alunos tem conhecimento prévio sobre o assunto, nesse caso os critérios de divisibilidade e fazem a relação com a problemática encontrada, colocando em prática o conhecimento adquirido em sala de aula. O carteado da divisibilidade, como estratégia lúdica, conforme defende Lara (2011), trouxe aos alunos, um ambiente agradável e atraente. Borim (2002, p.8) e Smole (2007, p.9), citam em seus argumentos a importância de se levar jogos para a sala de aula, pois estimulam o raciocínio, nessa linha de pensamento, podemos frisar que a mudança do tradicional para o atraente, encontramos verdadeiros talentos.

Além disso, na BRASIL (2018, p. 276) é possível destacar que recursos didáticos como a utilização de jogos tem fundamental importância no ensino a aprendizagem e também é essencial para a compreensão e utilização das noções de matemática, com ênfase aos critérios de divisibilidade. Vale ressaltar que um jogo só faz sentido e traz motivação e ânimo quando compreendido pelo aluno, ou quando o aluno tem noção do assunto em questão, é o que se observou na aplicação do Carteado da divisibilidade nas turmas que tinham conhecimento da temática, ou seja, os mesmos sentiram motivação durante a partida.

5.6.4 Concretização do Estudo

Outro ponto relevante a ser destacado é a fixação do conteúdo estudado em sala de aula quando aliado ao jogo, pois sabemos que a operação de divisão e os critérios de divisibilidade são, dentre tantos outros assuntos, rejeitados pelos alunos, sendo assim, o ambiente desanimado toma conta da sala de aula comprometendo o ensino e aprendizagem, fato este que vem se protelando desde o fundamental I, isto é uma problemática de âmbito geral.

Algumas semanas após a aplicação do Carteado nas turmas do ensino básico das escolas públicas, o autor deste trabalho lançou perguntas orais aos alunos sobre o conteúdo de critérios de divisibilidade, onde levantou-se questionamento aos mesmos se ainda recordavam sobre o processo de cálculo de cada número estudado, eles começaram a responder discretamente na linguagem deles da seguinte forma: um número para ser dividido por 2 tem que ser par, os números terminados em 0 dividem por 10, o número para ser dividido por 5 tem que terminar com 5 ou com 0, um número para dividir por 3 a soma de cada valor (algarismo) deve dividir por 3 e o do 9 também segue o mesmo passo do 3, etc. "A dificuldade ficou em descrever os critérios, como sempre estavam no 7 e no 11", mas foram respondidos por alguns alunos com auxílio do autor, lembrando que as respostas só foram dadas pelas turmas que estudaram o assunto, exceto alguns alunos da turma M3B que lembraram em parte os critérios do 2, 5 e 10 que foram mencionados pelo autor do trabalho durante a partida do jogo Carteado da Divisibilidade que eles participaram, ou seja, podemos enfatizar que a utilização do lúdico auxiliou no desenvolvimento e na fixação dos critérios, influenciando na conexão com o processo de aprendizagem matemática.

6 Considerações Finais

A utilização do jogo Carteado da Divisibilidade em dois ciclos distintos de ensino, fundamental II e médio, evidenciou um grave problema que é a operação de divisão nas escolas Municipal Elza Maria Corrêa Dantas e Estadual Osvaldo Cruz, pois encontramos com muita frequência alunos que não dominam essa operação e consequentemente não utilizam os critérios de divisibilidade.

Além disso, percebeu-se outros aspectos no ensino fundamental II como o desestimulo a operação de divisão, uma vez que na aplicação do cronograma de Matemática, o que se nota é a mínima atenção aos critérios de divisibilidade, pois este assunto é desinteressante e entediante para os alunos, pois quando abordado de forma tradicional torna a aula cansativa, ocasionando a falta de atenção dos alunos.

Dessa forma, observamos que a melhor maneira de minimizarmos esse problema é solucionar essas dificuldades ainda no ensino fundamental, especificamente no 6º e 7º anos. No entanto, essa abordagem não deve ser feita de forma mecânica, produzindo apenas uma memorização rápida de tópicos isolados, precisamos inserir aplicações que possibilitem uma ampliação do uso da divisibilidade, permitindo uma ligação entre divisão euclidiana e critérios de divisibilidade, criando uma continuidade entre os aspectos aritméticos e algébricos que favoreçam a transposição da linguagem verbal para a simbólica matemática.

A utilização dessas aplicações também configura a possibilidade de criação ou de reavaliação de sequências didáticas no ensino fundamental, reforçando a ligação entre as unidades temáticas Números e Álgebra. Além disso, essas aplicações configuram uma fonte de pesquisa para professores do ensino básico, e para alunos do ensino superior que desejarem estabelecer uma relação entre estes conteúdos nestes ciclos de ensino. As relações oferecidas nas aplicações propostas nesse estudo tem como limites a relação entre os aspectos aritméticos e algébricos, porém isso pode ser transposto em futuros trabalhos sejam eles dentro desses campos ou com a inserção da unidade Geometria.

Obtive uma experiência ímpar no período de estudos no Curso de Mestrado do PROFMAT, em especial aos estudos de Aritmética pela metodologia aplicada e pela proximidade da relação professor-aluno. Além disso, posso destacar também a importância ao envolver o lúdico em sala de aula, no campo onde atuo como professor, onde percebemos um ensino e aprendizagem pouco atrativo, nesse caso, o novo inicialmente pode espantar, mas sair da rotina da teoria dada em sala de aula foi um desafio marcante, pois não é nada fácil propor aos alunos a resolução de divisão, não há como mensurar o quanto foi significativo aprender e reaprender com intuito de ensinar os alunos, pois não existe palavras para descrever quando se ouve dos alunos, eu consegui aprender esse assunto professor.

Minhas sinceras gratidões a todos os envolvidos neste trabalho, pois fui eu quem

mais aprendeu durante o processo e aplicação do Carteado voltado para Critérios de Divisibilidade.

Os critérios de divisibilidade tem papel fundamental na operação de divisão, na tomada de decisão, no desenvolvimento dos cálculos. Dependendo dos problemas de divisão, o aluno uma vez tendo conhecimento prévio dos critérios, pode concluir sua resposta de forma dinâmica ou construir uma ideia a partir de seus conhecimentos. A grande estratégia ao ensinar os critérios de divisibilidade, é instrumentalizar, é levar a sua aplicabilidade para fazer sentido e através disso garantir uma aprendizagem significativa.

É possível ensinar os critérios de divisibilidade com aplicação de jogos, percebi na prática como os alunos aprendem, desenvolvem e aplicam as informações adquiridas sobre o assunto, Borin (2002, p.8) enfatiza a atividade de jogar como importante para o desenvolvimento de habilidades de raciocínio. Podemos perceber ao analisar as informações, tabelas e gráficos no Capítulo 5 que confirmam que é possível ensinar o aluno utilizando jogos, assim como também é possível fixar determinado conteúdo por meio de jogos.

O Carteado da Divisibilidade, como estratégia lúdica, trouxe ao aluno melhor entendimento, pois exige que o participante saiba dos critérios para se beneficiar durante a partida, além disso, os alunos puderam fixar os critérios com mais facilidade do que sua aplicação na teoria. Lara (2011, p.17) afirma que o lúdico vem ganhando espaço, pois as aulas se tornam mais agradáveis, tornando esse ambiente prazeroso em um local fascinante, ressalta também que o lúdico ajuda o aluno a enfrentar as dificuldades do dia a dia, isto é, qual o benefício maior do que fazer com que o aluno que tem dificuldade de aprendizagem e também as situações conflitantes extra escolar, fazê-lo ao menos sorrir, imagina conseguir ensiná-lo mesmo com as adversidades.

O ensino da Matemática é fundamental para o desenvolvimento do raciocínio do aprendiz, desenvolvimento de capacidades complexas e formação da cidadania. Por isso, buscamos por meio desse estudo, compreender as ideias, os conceitos, as definições, as aplicações e resoluções ligadas à critérios de divisibilidade e congruência modular e associá-las ao jogo carteado de modo a contribuir com processo de ensino e aprendizagem da matemática no ensino básico.

É necessário que se compreenda também que a Matemática e seus conteúdos específicos devem ser desenvolvidos com métodos e técnicas que contribuam de fato para a aprendizagem do aluno, como o método relacionado aos princípios de equivalência por meio da formação em grupos ou individual, que resolverão os problemas aplicados em sala de aula, levando sempre em consideração a heterogeneidade e subjetividade de cada aprendiz. Desse modo as aulas se tornarão mais proveitosas e os alunos poderão se interessar mais pelo conteúdo proposto.

Além disso, o ensino dos conteúdos matemáticos pode se tornar bem mais eficiente e eficaz durante o seu desenvolvimento se for exemplificado e associado às várias situações vivenciadas pelo aluno em seu cotidiano.

Portanto, a realização deste trabalho proporcionou a aquisição de novas metodologias na minha formação, que serão incorporadas na minha prática de ensino, e que serão geradoras de motivação e entusiasmo por parte dos alunos no estudo da divisão e no uso dos critérios de divisibilidade. Em suma, é um estudo que poderá contribuir para a melhoria no processo de ensino aprendizagem da Matemática, bem como nas práticas cotidianas.

7 Referências

1 BORIN, J. **Jogos e resolução de problemas: uma estratégia para as aulas de matemática**. São Paulo, SP: IMEUSP, 2004. 100 p.

2 BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: `https://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_El_EF_110518_versaofinal_site.pdf`. Acesso em 05 de julho de 2022.

3 DOMINGUES NETO, Huilton José.**Critérios de Divisibilidade, TCC**.2016. 63 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Licenciatura Plena em Matemática) – Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal da Grande Dourados, Dourados, outubro de 2016.

4 FERREIRA NETO, Oséas Guimarães.**Aplicações de Divisibilidade e Congruência Modular: do Ensino Básico ao Superior, Dissertação.** (Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal da Pará, Bragança, dezembro de 2021.

5 FERREIRA NETO, Oséas Guimarães; NUNES, Marly Anjos; QUADROS, Glenda de Fátima Amorim. **Carteado da divisibilidade e da congruência modular.**. In: X Bienal de Matemática, 2022, Belém-PA. **Anais**. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 20 a 24 de junho de 2022. Páginas 262 a 266.. Disponível em: `https://sbm.org.br/bienal/wp-content/uploads/sites/2/2022/08/Anais_X_Bienal_de_Mat.pdf` Acesso em 26 de junho de 2022.

6 HEFEZ, Abramo.**Aritmética**. Coleção PROFMAT, 2. ed. SBM. Rio de Janeiro: G3 gráfica e editora, 2016.

7 LACERDA, J. C. A.**Praticando a Aritmética**. Rio de Janeiro, 8º Edição. Editora XYZ, 2014.

8 LAPINMAT. Laboratório Pedagógico de Informática e Matemática.**Elaboração e Construção do Carteado da divisibilidade e Congruência Modular**. Universidade Federal do Pará, Bragança, 2022.

9 LARA, Isabel Cristina Machado de.**Jogando com a matemática na educação infantil e séries iniciais**. 1. ed. Catanduva, SP: Editora Rêspel; São Paulo: Associação Religiosa Impressa da Fé, 2011.

10 SILVA, Talysson Paulo da.**Critérios de divisibilidade: usuais, incomuns e curiosos, Dissertação**. (Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2019.

11 SMOLE, K. C. S. DINIZ, M. I. S. V. MILANI, E. **Jogos de matemática de 6º a 9º ano**. Porto Alegre, RS: Artmed, 2007. 104 p.conteúdo...

A ANEXO

A seguir, temos as cartas dividendos organizadas em colunas de acordo com seu maior divisor, de modo a facilitar a coordenação do jogo.

Tabela 04: Cartas dividendo Nível 1

Nível	Divisor									
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
6º e 7º anos	38	36	32	35	42	35	48	36	50	44
	62	57	56	65	66	63	72	63	170	77
	86	78	84	85	78	91	96	81	190	121
	94	93	96	115	114	133	128	108	230	198
	118	141	148	195	174	161	184	144	370	308
	142	159	236	245	258	259	376	216	530	385
	346	354	356	475	354	301	424	423	590	517

Fonte: LAPINMAT

Tabela 05: Cartas dividendo Nível 2

Nível	Divisor									
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
8º e 9º anos	634	786	556	565	786	413	584	711	670	583
	878	813	692	895	822	679	712	873	890	737
	934	951	724	1135	1182	973	904	1017	970	913
	1226	1089	908	1315	1434	1253	1384	1233	1030	1243
	1514	1434	1532	1405	1662	2051	1544	1629	2390	1639
	1642	1689	1676	1735	1878	2429	1784	2007	2710	1793
	1874	1839	1948	1985	2082	3073	2696	2367	2830	2453

Fonte: LAPINMAT

Tabela 06: Cartas dividendo Nível 3

Nível	Divisor									
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ensino Médio	1966	2481	3428	3665	3138	5257	3592	3177	3470	2981
	2246	3837	4948	4415	4542	6041	4744	4149	4190	3377
	3778	4791	5708	5245	5982	7273	5224	5139	5630	4037
	4534	5982	6772	6395	6702	8813	5816	6813	6170	5533
	5378	6711	7652	7295	8166	9247	7016	7281	7510	6787
	6374	8571	9092	8095	9474	10367	8872	8271	8110	8459
	7646	10398	10852	15815	10398	13531	12872	9927	9830	10307

Fonte: LAPINMAT

Tabela 07: Cartas dividendo Nível 4

Nível	Divisor									
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Superior										

Fonte: LAPINMAT

A seguir, temos os registros por meio de fotos das aplicações dos Níveis I e III nas escolas públicas.

Figura 6: Alunos da turma F7A resolvendo por critérios

Fonte: O Autor

Figura 7: Alunos da turma F7A descartando as cartas

Fonte: O Autor

Figura 8: Alunos da turma F7B calculando

Fonte: O Autor

Figura 9: Alguns alunos F7B rindo dos erros do descarte

Fonte: O Autor

Figura 10: Alunos da turma M3A descartando as cartas

Fonte: O Autor

Figura 11: Alunos da turma M3A se divertindo com o carteado

Fonte: O Autor

Figura 12: Alunos da turma M3B calculando as divisões

Fonte: O Autor

Figura 13: Alunos da turma M3B após o descarte

Fonte: O Autor

A seguir, temos algumas imagens das aplicações no Programa POTI do nível 1 e 2 e do PROFMAT do nível 4.

Figura 14: Aplicação do Carteado da Divisibilidade Nível 1 na turma do POTI

Fonte: LAPINMAT

Figura 15: Aplicação do Carteado da Divisibilidade Nível 2 na turma do POTI

Fonte: LAPINMAT

Figura 16: Aplicação do Carteado da Divisibilidade Nível 2 na turma do PROFMAT

Fonte: LAPINMAT