UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

FRANCISCO JAIR FELISMINO MENESES

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E ALGUMAS APLICAÇÕES

FORTALEZA

2022

FRANCISCO JAIR FELISMINO MENESES

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E ALGUMAS APLICAÇÕES

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Educação Matemática.

Orientadora: Prof. Dra. Fernanda Ester Camillo Camargo.

FORTALEZA

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M488e Meneses, Francisco Jair Felismino.
Equações diferenciais e algumas aplicações / Francisco Jair Felismino Meneses. – 2022.
57 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2022.
Orientação: Profa. Dra. Fernanda Ester Camillo Camargo.

1. Equações diferenciais. 2. Ciências - Modelos matemáticos. 3. Matemática aplicada. I. Título.
CDD 510

FRANCISCO JAIR FELISMINO MENESES

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E ALGUMAS APLICAÇÕES

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Educação Matemática.

Aprovada em: 22/08/2022.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dra. Fernanda Ester Camillo Camargo (Orientadora)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Aldemir José da Silva Pinto
Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Prof. Dra. Neilha Marcia Pinheiro
Universidade Federal do Amazonas (UFAM)

A meus pais, que sempre mostraram-me que a educação seria o melhor caminho;
Aos meus filhos, que serviram de apoio durante os dias tenebrosos;
Minha esposa, que desde o início de minha jornada esteve ao meu lado;
Deus, que me concebeu tudo o que precisei.

AGRADECIMENTOS

A Deus, que me concedeu tudo!

A minha família,

Aos meus professores do ensino básico, em especial ao Professor Diex, que em fez amar a matemática, e a professora Daniele pelos incentivos dados a mim.

Aos meus amigos Neto Vasconcelos e Júlio César, que caminharam comigo durante minha graduação.

Aos professores de minha graduação, em especial ao Professor Francisco Bitu (in memoriam).

Ao José Edézio que foi essencial para que minha graduação fosse concluída.

Aos meus professores da Universidade Federal do Ceará - UFC, em especial minha orientadora, Professora Fernanda Camargo, que subsidiaram minha mente com conhecimento, tornando-me apto a concluir este trabalho.

“Compreender é algo que se parece muito com sexo. Tem um objetivo prático, mas normalmente não é pensando nisso que as pessoas o fazem.” (OPPENHEIMER)

RESUMO

A busca dos discentes pelo uso da matemática no dia a dia está presente em todas as etapas de ensino, com base nisso, buscamos apresentar aplicações de um campo específico: as equações diferenciais ordinárias. Inicialmente, mostramos alguns conceitos básicos, como definição e classificação, em seguida, falamos das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem e de segunda ordem e seus métodos de resolução, uma vez que as modelagens usadas são nessas formas. Os modelos desenvolvidos nesse trabalho abordam dois campos das ciências: a matemática e a física, especificamente, modelamos o juro, o sistema massa mola e o circuito elétrico. A modelagem seguiu um conjunto de restrições e especificidade para que o objetivo do trabalho fosse alcançado, que era a simples demonstração do uso das equações diferencias ordinárias no desenvolvimento das ciências e na frequência que esses assuntos são utilizados em objetos simples e usuais, como aparelhos eletrônicos e amortecedores.

Palavras-chave: aplicações; equação diferencial; modelagem; ciências.

ABSTRACT

The students' search for the use of mathematics in everyday life is present in all stages of teaching, based on this, we seek to present applications in a specific field: ordinary differential equations. Initially, we show some basic concepts, such as definition and classification, then we talk about the first-order and second-order ordinary differential equations and their resolution methods, since the models used are in these forms. The models developed in this work address two fields of science: mathematics and physics, specifically, we model interest, the spring mass system and the electric circuit. The modeling followed a set of restrictions and specificity so that the objective of the work was achieved, which was the simple demonstration of the use of ordinary differential equations in the development of sciences and in the frequency that these subjects are used in simple and usual objects, such as electronic devices. and shock absorbers.

Keywords: applications; differential equation; modeling; sciences.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE SÍMBOLOS

Ae	Área efetiva da antena
B	Largura de faixa em que o ruído é medido em Hertz
d	Distância em metros
E	Campo elétrico
FA	Fator da antena
Gr	Ganho de recepção
h	Altura efetiva ou comprimento efetivo de uma antena
I	Corrente elétrica
k	Constante de Boltzmann's
K	Eficiência de irradiação
M	Variação do patamar de ruído em função da RBW
N	Condutor de neutro
NF	Figura de ruído
Ni	Potência do ruído na entrada
No	Potência do ruído na saída
P	Potência
R	Resistência
Si	Potência do sinal na entrada
So	Potência do sinal na saída
t	Tempo
V	Tensão
ZL	Impedância da antena
Zo	Impedância de referência (50Ω)
λ	Comprimento de onda
Γ	Coeficiente de reflexão

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A matemática, quando é apresentada aos discentes em sala de aula, levanta um questionamento frequente: *onde vou usar esse assunto no meu dia a dia?* Os professores, por diversas vezes, apresentam, situações cotidianas em que o assunto estudado está presente. No ensino básico, mostrar a aplicação de assunto matemático para os alunos é uma tarefa, em sua grande maioria, de simples compreensão, os docentes podem citar aplicações do conteúdo que são compatíveis com a etapa de ensino em que o aluno está inserido. Se o questionamento for feito sobre as operações fundamentais, por exemplo, os professores possuem diversas situações sobre o uso para os alunos de qualquer idade, basta citar o uso de dinheiro, o compartilhamento de objetos, as medições de grandezas, dentre outros. Já no ensino médio, alguns assuntos não aparentam possuir utilidade para os alunos. Como explicar para os alunos do ensino médio a aplicação das matrizes (sem citar a tabulação de números)? Ou, como falar sobre as raízes polinomiais? Sendo que a demostração de tal uso deveria está no nível de compreensão para aquela etapa de ensino, a tarefa do professor fica mais complicada.

A dificuldade dos professores em falar sobre a aplicação de diversos conteúdos, deixa com os alunos, até mesmo para aqueles que continuam a estudar na área da matemática, a sensação de que muitos assuntos não possuem aplicações explícitas em nosso cotidiano. Esse trabalho busca desfazer tal impressão sobre um assunto específico: equações diferenciais ordinárias. Sendo assim, buscamos expor as algumas aplicações responsáveis pelo funcionamento de objetos e sistemas presentes nas vidas dos seres humanos, e consequentemente, contribuições de tais equações para o desenvolvimento das ciências.

O sistema de amortecimento presente nos edifícios construídos nas áreas com incidência frequente de terremotos evita prejuízos econômicos e que vidas sejam perdidas com desastres na construção civil, esse mesmo sistema é responsável pelo conforto ofertado por veículos automotores enquanto transitam. A variedade de aparelhos que fazem uso de eletricidade, desde aos mais simples até os mais avançados, que estão presentes na sociedade é imensurável, assim como a participação e influência que eles exercem nas vidas de seus usuários. E o que falar no mercado financeiro? As movimentações financeiras que as pessoas físicas promovem, que empresas globalizadas são responsáveis, e até as transações que as nações (países) fazem, esses fatos nos direcionam para o impacto que o mercado financeiro causa no desenvolvimento da sociedade. As equações diferenciais ordinárias são utilizadas na modelagem desses três exemplos citados: sistema massa mola, circuitos elétricos e juro.

As modelagens feitas nesse trabalho buscaram a demostração do uso das equações diferenciais nos assuntos citados, no entanto, é preciso destacar que são modelos básicos e restritos, cujo objetivo é a efetiva aplicação de tais equações. É possível construir modelos mais completos e abrangentes, mas seria necessário aprofundar os conceitos e teorias de matemática financeira e da física.

2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

A humanidade se desenvolve rodeada de relações que são regidas por taxas ou parâmetros, podemos citar, por exemplo, no âmbito econômico a (des)valorização de um produto, e no contexto epidemiológico, a taxa de contaminação pelo Sars-Cov-2, o que determinou as medidas sanitárias que foram tomadas pelos agentes públicos. Podemos afirmar que essas relações são equações, e as taxas são derivadas. Desse modo, o mundo físico é regido por modelos matemáticos que envolvem equações e suas derivadas. Esses modelos matemáticos, ou simplesmente, essas equações são chamadas de Equações Diferenciais.

Em termos matemáticos, as equações da forma

$$F(x, f', f'', ..., f^n) = 0 \tag{2.1}$$

são Equações Diferenciais.

2.1 Classificação

As Equações Diferenciais são classificadas considerando os seguintes critérios: o número de variáveis independentes da função desconhecida, o número de funções desconhecidas, a ordem da equação e a estrutura da equação.

2.1.1 Quanto ao tipo

As equações em que a função desconhecida depende de uma única variável independente, portanto, aparecem derivadas simples, é chamada de Equação Diferencial Ordinária.

Exemplos de equações diferenciais ordinárias são as equações

$$f' + 8x = e^x$$

e

$$y''' + 2e^x y'' + yy' = x^4$$

As equações em que a função desconhecida depende de várias variáveis independentes, portanto, aparecem derivadas parciais, é chamada de Equação Diferencial Parcial.

Por exemplo, a equação da onda

$$a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

é uma equação diferencial parcial.

2.1.2 Quanto a ordem

A ordem de uma Equação diferencial é dada pela derivada de maior ordem que aparece na equação. A equação $y' + 8x = e^x$ é uma Equação Diferencial Ordinária de Primeira Ordem, já a equação $xy' + 4e^x = yy''$ é uma Equação Diferencial Ordinária de Segunda Ordem. A equação (2.1) é uma Equação Diferencial Ordinária de Ordem n.

2.1.3 Quanto a linearidade

A equação é dita linear quando a incógnita e suas derivadas aparecem de forma linear na equação.

Então, equações na forma

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_0(x)y = g(x) \tag{2.2}$$

são as equações ordinárias lineares, e por conseguinte, as equações que não são desta forma são as Equações Ordinárias não-lineares.

2.2 Solução de uma Equação Diferencial

Considere a equação

$$y' - 2y = x^2e^{2x} \tag{2.3}$$

onde $y = f(x)$, tomaremos a função $y = \dfrac{x^3e^{2x}}{3}$ e substituiremos na equação (2.3), vejamos

$$\left(\frac{x^3e^{2x}}{3}\right)' - 2\left(\frac{x^3e^{2x}}{3}\right) = \left(\frac{3x^2e^{2x} + 2x^3e^{2x}}{3}\right) - \left(\frac{2x^3e^{2x}}{3}\right) = x^2e^{2x}$$

Portanto a função $f(x) = \dfrac{x^3e^{2x}}{3}$ é solução da equação (2.3).

É preciso destacar que a solução da equação (2.3) é uma *função real*. Portanto, sem a aplicação de alguma restrição, as equações diferenciais poderão possuir infinitas soluções, dependendo da definição de f. Considerando o que foi abordado no início deste capítulo, onde as equações diferenciais são aplicações de modelos matemáticos que regem o mundo, observamos que modelos matemáticos, ou simplesmente, taxas de variações, são construídos através de um ponto de partida, o que nos leva a utilizar equações diferenciais com "esse ponto de partida"que chamaremos de *Valor Inicial*.

Considere a equação

$$y' - y = 2xe^{2x} \tag{2.4}$$

onde $f(x) = y$, teremos $y = 2e^{2x}(x-1) + 2e^{x}c$, onde c é uma constante real. Na equação (2.4) existirão infinitas soluções, de acordo com os valores de c e com a variação de x. No entanto, considerando a equação (2.4) com o valor inicial $f(0) = 1$, ou seja, quando $x = 0$ implica em $y = 1$, substituindo esses valores na solução da equação (2.4) encontraremos uma única constante c e, teoricamente, teremos a unicidade de solução, nas condições dadas. Veremos,

$$\begin{aligned} y &= 2e^{2x}(x-1) + 2e^{x}c \\ 1 &= 2e^{0}(0-1) + 2e^{0}c \\ 1 &= -2 + 2c \\ c &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Daí, a solução da equação (2.4) é $y = 2e^{2x}(x-1) + 3e^{x}$.

Resta-nos avaliar se, com o valor inicial dado, a solução será única, e faremos isso posteriormente, após estudarmos métodos para encontrarmos as soluções.

3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM

Neste capítulo, estudaremos as equações diferenciais de primeira ordem, isto é, da forma

$$F(x, f') = 0,$$

ou ainda

$$f' = F(x, y), \tag{3.1}$$

onde F é uma função de duas variáveis, e buscaremos, através de uma análise minuciosa, responder um questionamento: como encontrar as soluções de uma equação diferencial? Como já vimos na seção 2.2, precisamos encontrar funções diferenciáveis $y = \phi(x)$ que satisfaçam a equação (3.1), e a gama de equações diferenciais pode dificultar a resposta. Com base nisso, focaremos em tipos específicos de equações lineares, a fim de formular métodos para encontrar suas soluções. Em todos os casos, as funções encontradas estarão sujeitas a parâmetros, fazendo-as serem chamadas de soluções gerais, então para que possamos encontrar soluções específicas das equações diferenciais de primeira ordem precisamos usar o problema de valor inicial.

O *Problema de Valor Inicial* de uma equação diferencial de primeira ordem é dado por

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

onde x_0, y_0 são valores dados. A solução $y = \phi(x)$ deste problema é uma solução da equação diferencial $y' = f(x, y)$ que também satisfaz a condição inicial $\phi(x_0) = y_0$.

3.1 Equações Lineares: método do Fator Integrante

Iniciaremos analisando a função de duas variáveis F que aparece em (3.1). Como caso inicial, consideramos a situação em que a variável x não aparece, ou seja,

$$F(x, y) = ay + b \tag{3.2}$$

onde a e b são constantes dadas. Usando a equação (3.2) na equação (3.1) temos,

$$f' = ay + b$$
$$\frac{dy}{dx} = ay + b$$

Tomando $a \neq 0$ e $y \neq -\dfrac{b}{a}$,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= a\left(y+\frac{b}{a}\right) \\ \frac{1}{y+\frac{b}{a}}\frac{dy}{dx} &= a \end{aligned}$$

Integrando em ambos os lados, temos:

$$\ln|y+\frac{b}{a}| = ax+C$$

e daí, temos que $y+\dfrac{b}{a} = e^{ax}k$, ou ainda, $y = -\frac{b}{a}+ke^{ax}$ é uma solução da equação (3.2), onde $k = +-c$.

Analisemos agora, equações em que apareçam funções no lugar de a e b , ou seja,

$$F(x,y) = g(x)-h(x)y$$

onde g e h são funções dependentes da variável x, de modo que obtemos

$$\frac{dy}{dx}+h(x)y = g(x) \tag{3.3}$$

a qual representa a forma geral das equações diferenciais lineares de primeira ordem.

O método empregado para resolver a equação (3.2) não poderá ser aplicado para a equação (3.3), pois não podemos integrar facilmente o lado esquerdo da equação (3.3). No entanto, observe:

lado esquerdo da equação (3.3) - $y'+h(x)y$

derivação de um produto - $(\phi(x)y)' = (\phi(x))'y+\phi(x)y'$

Percebe-se que, nos dois casos, em uma das parcelas aparece a função y e na outra parcela a função y', desta forma, precisaríamos manipular a equação (3.3) de modo a "transformá-la"numa derivada de produto, em outras palavras, precisamos encontrar uma função que permitirá a integração do lado esquerdo da equação diferencial, independentemente de quais funções apareçam nessa equação.

Para isso, utiliza-se uma função μ de modo que

$$\mu(x).h(x) = (\mu(x))' \tag{3.4}$$

pois

$$\mu(x)y' + \mu(x)h(x)y = \mu(x)g(x)$$
$$\mu(x)y' + (\mu(x))'y = \mu(x)g(x)$$

chamaremos μ de ***Fator integrante***. Surge, então, mais um questionamento: de que modo escolheremos o fator integrante? Como h é conhecida, usaremos a equação (3.4) para determinamos o fator integrante em função de h.

Vamos supor, inicialmente, que μ seja positiva, e a partir da equação (3.4) podemos escrever

$$\frac{(\mu(x))'}{\mu(x)} = h(x)$$

Integrando em ambos os membros, temos

$$\ln \mu(x) = \int h(x)dx + C$$

Logo,

$$\mu(x) = k.exp \int h(x)dx \tag{3.5}$$

onde $k = e^C$.

No Teorema (3.1) veremos que esse método nos dá todas as soluções de uma equação diferencial de primeira ordem. Vejamos alguns exemplos do uso do fator integrante.

Exemplo 3.1 *Encontre uma solução da equação $xy' + 2y = senx$.*

Solução:

Sendo x um número real, precisamos analisar duas situações. A primeira, se $x = 0$, a equação terá a forma $2y = 0$, então, $y = 0$ será a solução da equação diferencial.

Se $x \neq 0$, podemos dividir a equação por x a fim de escrevê-la no formato da equação (3.3), obtendo:

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{senx}{x}$$

Então, conseguimos determinar que $h(x) = \dfrac{2}{x}$ e de acordo com a relação (3.5) temos que

$$\begin{aligned}
\mu(x) &= exp\int \frac{2}{x}dx \\
\mu(x) &= e^{2ln|x|} \\
\mu(x) &= x^2
\end{aligned}$$

Multiplicando a equação por μ, obtemos

$$\begin{aligned}
y'x^2 + x^2.\frac{2}{x}.y &= x^2.\frac{senx}{x} \\
y'x^2 + 2xy &= x.senx
\end{aligned}$$

Como $(yx^2)' = y'x^2 + 2xy$, temos que

$$(yx^2)' = xsenx$$

Integrando em ambos os lados, temos

$$yx^2 = \int xsenxdx$$

sendo necessário aplicar a integração por partes no lado direito da equação. Assumindo $u = x$ e $dv = senxdx$, temos que

$$\begin{aligned}
\int xsenxdx &= x(-cosx) - \int(-cosx)dx \\
&= -xcosx + senx + C
\end{aligned}$$

daí, temos que

$$\begin{aligned}
y = x^{-2}(-x)cosx + x^{-2}senx + x^{-2}C \\
y = -x^{-1}cosx + x^{-2}senx + Cx^{-2}
\end{aligned}$$

são soluções!

As soluções da equação diferencial do Exemplo 3.1 são na forma

Exemplo 3.2 *Encontre a solução da equação $y' - y = 2xe^{2x}$, com valor inicial $y(0) = 1$.*

Solução:

Neste caso, temos que $h(x) = -1$, então

$$\begin{aligned}
\mu(x) = exp\int -dx \\
\mu(x) = e^{-x}
\end{aligned}$$

daí, usando o fator integrante, temos

$$e^{-x}y' - e^{-x}y = 2xe^{2x}e^{-x}$$
$$(ye^{-x})' = 2xe^{x}$$

integrando em ambos os lados, temos que

$$ye^{-x} = \int 2xe^{x}dx$$

aplicando integração por partes, assumindo $u = 2x$ e $dv = e^{x}dx$ temos que

$$\int 2xe^{x}dx = 2xe^{x} - \int e^{x}2dx$$
$$\int 2xe^{x}dx = 2xe^{x} - 2e^{x} + C$$
$$\int 2xe^{x}dx = 2e^{x}(x-1) + C$$

desta forma

$$ye^{-x} = 2e^{x}(x-1) + C$$
$$y = e^{x}2e^{x}(x-1) + Ce^{x}$$
$$y = 2e^{2x}(x-1) + Ce^{x}$$

usando o valor inicial $y(0) = 1$, temos

$$1 = 2e^{2.0}(0-1) + Ce^{0}$$
$$1 = -2 + C$$
$$C = 3$$

Podemos, então, escrever a solução da equação, conforme solicitado:

$$y = 2(x-1)e^{2x} + 3e^{x}$$

O Exemplo 3.1 nos fornece uma família de soluções, pois a cada valor que C assumir, teremos uma solução diferente. No entanto, o Exemplo 3.2 atribui um valor fixo a constante C, e então, surgem alguns questionamentos: dado um valor inicial, sempre existirá solução? Existindo solução, ela será única? Para responder tais questionamentos, vejamos o teorema a seguir:

Teorema 3.1 *Considere as funções g e h, contínuas no intervalo aberto I:* $\alpha < x < \beta$, *contendo o ponto* $x = x_0$, *então existe uma única função* $\delta = y(x)$, *que satisfaz a equação diferencial*

$$y' + yh(x) = g(x) \tag{3.6}$$

para cada x em I e que também satisfaz a condição inicial $y(x_0) = y_0$, *onde* y_0 *é um valor inicial arbitrário prescrito.*

Demonstração: Vale destacar que a demonstração deste resultado garantirá tanto a existência quanto a unicidade da solução das equações diferenciais que são resolvidas através do fator integrante.

Tomando a equação

$$y' + h(x)y = g(x)$$

e usando o fator integrante

$$\mu(x) = exp \int h(x)dx$$

sendo que h é contínua para $\alpha < x < \beta$, então $\mu(x)$ é definida nesse intervalo e é uma função diferenciável não-nula. Multiplicando a Equação (3.6) por $\mu(x)$ temos a igualdade

$$\begin{aligned} \mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)h(x)y &= \mu(x)g(x) \\ \frac{d}{dx}[\mu(x)y] &= \mu(x)g(x) \end{aligned} \tag{3.7}$$

onde C é uma constante arbitrária. Analisando a Equação (3.7) temos que as funções μ e g são contínuas, a função μg é integrável, e daí

$$\mu(x)y = \int \mu(x)g(x)dx + C \tag{3.8}$$

pela Equação 3.8 temos que a integral de μg é diferenciável, logo

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int \mu(x)g(x) + C\right] \tag{3.9}$$

de modo que y existe e é diferenciável no intervalo $\alpha < x < \beta$. A condição inicial determina a constante C de maneira única, de modo que existe apenas uma solução da equação, completando a demonstração.

3.2 Equações Separáveis

As equações diferenciais de primeira ordem são escritas, de modo geral, como $\frac{dy}{dx} = F(x,y)$. Tomemos o caso em que $F(x,y)$ é definido por $f(x,y) = g(x)h(y)$, e ainda, $h(y) = \frac{1}{s(y)}$, sendo $s(y) \neq 0$, temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{s(y)} \tag{3.10}$$

e daí,

$$s(y)\frac{dy}{dx} = g(x)$$

integrando em relação a x, obtemos

$$\int s(y)\frac{dy}{dx}dx = \int g(x)dx + C$$

como $\frac{dy}{dx}dx = dy$, escrevemos

$$\int s(y)dy = \int g(x)dx + C$$

fornecendo então o método de solução das equações escritas na forma da equação (3.10).

Com efeito, a equação (3.10) é pode ser escrita na forma

$$s(y)dy = g(x)dx \tag{3.11}$$

para facilitar a compreensão da resolução.

As equações diferenciais que podem ser escritas na forma da Equação (3.10) são ditas **Equações Separáveis** e o método de solução consiste em separar as variáveis nos membros da equação, conforme a equação (3.11), em seguida integrar a equação em relação a x. É claro que, nem sempre a integração será simples, e nesses casos, é aconselhável que deixe a equação com a integral, e que para aplicações da equação, utiliza-se ferramentas tecnológicas para aproximação da solução

Vejamos alguns exemplos práticos de solução de equação separável.

Exemplo 3.3 *Resolva a equação diferencial* $y' + y^2 \sin x = 0$

Solução:

Podemos escrever a equação na forma: $\frac{dy}{dx} + y^2 \sin x = 0$, e a partir daí, temos

$$\frac{dy}{dx} = -y^2 \sin x$$

Se $y = 0$, temos que $\dfrac{dy}{dx} = 0$, e então, conclui-se que $y = c$, onde c é uma constante real.

Se $y \neq 0$, podemos escrever a equação dada na forma da Equação 3.10, segue que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sin x}{y^{-2}}$$

e daí, temos

$y^{-2}dy = -\sin x dx$

Integrando o lado esquerdo da equação em função de y e integrando o lado direito em função de x, temos

$$\begin{aligned} -y^{-1} &= \cos x + C \\ -\frac{1}{y} &= \cos x + C \\ y &= -\frac{1}{\cos x + C} \end{aligned}$$

É importante destacar que esse exemplo requer a família de soluções, já que não foi dado um valor inicial da função diferencial.

Exemplo 3.4 *Encontre a solução da equação* $y' = (1-2x)y^2$, *onde* $y(0) = -\dfrac{1}{6}$

Solução:

$$\begin{aligned} y' &= (1-2x)y^2 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{(1-2x)}{y^{-2}} \\ y^{-2}dy &= (1-2x)dx \end{aligned}$$

Integrando, temos

$$\begin{aligned} -y^{-1} &= x - x^2 + C \\ -y^{-1} - x + x^2 &= C \\ -y^{-1} - x + x^2 &= C \end{aligned} \tag{3.12}$$

Aplicando o valor inicial, temos:

$$\begin{aligned} -\left(\frac{1}{6}\right)^{-1} - 0 + 0^2 &= C \\ C &= -6 \end{aligned}$$

Usando a Equação 3.12 e substituindo o valor de C, temos:

$$\begin{aligned}
-y^{-1} - x + x^2 &= -6 \\
y^{-1} &= 6 - x + x^2 \\
y &= \frac{1}{x^2 - x + 6}
\end{aligned}$$

4 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE SEGUNDA ORDEM

Neste capítulo, vamos tratar de Equações Diferenciais lineares de segunda ordem, especificamente, das equações da forma

$$y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = R(x) \tag{4.1}$$

onde P_1 e P_2 são os coeficientes da equação. No capítulo anterior, estudamos as soluções de equações ordinárias lineares de primeira ordem, onde pudemos modelar relações para encontrar todas as soluções das equações. Aqui, não é possível tal feito, então vamos nos restringir aos casos em que os coeficientes da equação são constantes.

Seja a equação diferencial linear de segunda ordem $y'' + ay' + by = R(x)$, $a, b \in \mathbb{R}$, as condições iniciais usadas para encontrar as soluções da equação são $y(x_0) = y_0$ e $y'(x_0) = y_1$, onde x_0, y_0 e y_1 são valores dados.

4.1 Equações Diferenciais de Segunda Ordem Homogêneas

Considere uma equação diferencial linear homogênea, que significa que $R(x) = 0$, com coeficientes constantes, que escreveremos como

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{4.2}$$

Vamos procurar todas as soluções desta equação em todo o eixo real, se existirem. Não podemos deixar de citar a solução trivial $y = 0$. Inicialmente, vamos considerar $a = 0$ e verificar a existência de soluções nas equações do tipo

$$y'' + by = 0 \tag{4.3}$$

de acordo com os valores que b assumirá. Temos que analisar três situações: $b < 0$, $b = 0$ e $b > 0$. No caso $b = 0$, a equação é escrita como

$$y'' = 0$$

Supondo que exista uma função y que satisfaça $y'' = 0$, podemos concluir que a derivada de y é uma constante, ou seja, $y' = C$ que é uma equação diferencial de primeira ordem, e para resolver essa equação, basta integrar em ambos os lados, obtendo

$$y = Cx + C_1$$

onde C e C_1 são constantes. Por outro lado, quaisquer valores reais que C e C_1 venham a assumir, a função afim $f(x) = Cx + C_1$ satisfará a equação $y'' = 0$. Assim, encontramos todas as equações para este caso.

Se $b < 0$, vamos tomar $k > 0$ de modo que $b = -k^2$ e a equação diferencial assume a forma

$$\begin{aligned} y'' - k^2 y &= 0 \\ y'' &= k^2 y \end{aligned} \tag{4.4}$$

Analisando a equação (4.4), o resultado que procuramos é uma função que conserva sua forma em suas derivações, e a função exponencial possui essa característica. Considerando o coeficiente k^2 que aparece na equação (4.4), vamos supor que a solução seja uma função da forma $f(x) = e^{g(x)}$ onde g é uma função linear no formato $g(x) = kx$.

A função

$$y = e^{kx}$$

é solução, pois

$$y' = (kx)'e^{kx} = ke^{kx}$$

$$y'' = (ke^{kx})' = k(ke^{kx}) = kke^{kx} = k^2 e^{kx} = k^2 y$$

Outra solução seria a função $y = e^{-kx}$, pois

$$y' = (-kx)'e^{-kx} = -ke^{-kx}$$

$$y'' = (-ke^{-kx})' = -k(-ke^{-kx}) = (-k)(-k)e^{-kx} = k^2 e^{-kx} = k^2 y$$

Além disso, qualquer combinação linear das duas soluções também é solução, então

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx} \tag{4.5}$$

onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias, é solução, pois

$$y' = (C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx})' = (C_1 e^{kx})' + (C_2 e^{-kx})' = C_1 k e^{kx} - C_2 k e^{-kx}$$

$$y'' = (C_1 k e^{kx} - C_2 k e^{-kx})' = (C_1 k e^{kx})' + (-C_2 k e^{-kx})' = C_1 k^2 e^{kx} + C_2 k^2 e^{-kx} = k^2 (C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx}) = k^2 y$$

Resta-nos analisar $b > 0$, e desta vez, tomaremos $k > 0$ de modo que $b = k^2$, a equação diferencial assume a forma

$$\begin{aligned} y'' + k^2 y &= 0 \\ y'' &= -k^2 y \end{aligned} \tag{4.6}$$

Para encontrarmos as soluções da equação (4.6), vamos em busca através das funções trigonométricas, então vamos verificar se a função $y = \cos kx$ é solução:

$$y' = (\cos kx)' = (kx)'(-\sin kx) = -k \sin kx$$

$$y'' = (-k \sin kx)' = -k(kx)'(\sin kx)' = -kk \cos kx = -k^2 \cos kx = -k^2 y$$

concluímos, então, que $y = \cos kx$ é solução da equação (4.6).

Outra solução seria a função $y = \sin kx$, vejamos:

$$y' = (\sin kx)' = (kx)'(\cos kx) = k \cos kx$$

$$y'' = (k \cos kx)' = k(kx)'(-\sin kx) = -k^2 \sin kx = -k^2 y$$

A partir daí, vamos verificar de qualquer combinação linear dessas duas soluções também é solução da equação (4.6). Seja a função

$$y = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx \tag{4.7}$$

onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias, temos:

$$\begin{aligned} y' &= (C_1 \cos kx + C_2 \sin kx)' \\ y' &= C_1 (kx)'(-\sin kx) + C_2 (kx)'(\cos kx) \\ y' &= -kC_1 \sin kx + kC_2 \cos kx \\ y'' &= (-kC_1 \sin kx + kC_2 \cos kx)' \\ y'' &= (-kC_1)(kx)'(\cos kx) + (kC_2)(kx)'(-\sin kx) \\ y'' &= -k^2 C_1 \cos kx - k^2 C_2 \sin kx \\ y'' &= -k^2 (C_1 \cos kx + C_2 \sin kx) \\ y'' &= -k^2 y \end{aligned}$$

Então, a equação (4.7) é solução da equação (4.6). Essas verificações permite-nos enunciar o seguinte resultado.

Teorema 4.1 *A solução geral da equação diferencial linear homogênea $y'' + by = 0$ é:*

- *Se $b = 0$, então $y = Cx + C_1$*
- *Se $b < 0$, então $y = C_1e^{kx} + C_2e^{-kx}$*
- *Se $b > 0$, então $y = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx$*

onde C, C_1 e C_2 são constantes arbitrárias e k é um numero real.

Vamos usar tal resultado nos exemplos a seguir.

Exemplo 4.1 *Resolva a equação diferencial $y'' + 4y = 0$.*

Solução: Temos que $a = 0$, $b = 4 > 0$, daí, usaremos $b = k^2$, $k > 0$, portanto, $k = 2$. Teremos, então, que sendo y uma solução da equação, a função y terá a forma da equação (4.7), assim $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$, onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias.

Exemplo 4.2 *Dada a equação diferencial $y'' + 25y = 0$, encontre a solução particular que satisfaça as condições iniciais $y(3) = -1$ e $y'(3) = 0$*

Solução: Temos que $a = 0$, $b = 25 > 0$, daí temos que $k = 5$, então $y = C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x$ é a solução geral. No entanto, o exemplo requer uma solução em particular. Temos que $y' = -5C_1 \sin 5x + 5C_2 \cos 5x$. Usando a identidade $y(3) = -1$, temos

$$C_1 \cos 15 + C_2\ sin 15 = -1$$

usando a soma e subtração de arcos, encontramos que $\sin 15 = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ e $\cos 15 = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, daí

$$\begin{aligned}
C_1\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) + C_2\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) &= -1 \\
C_1(\sqrt{6}+\sqrt{2}) + C_2(\sqrt{6}-\sqrt{2}) &= -4 \\
C_1 + C_2\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\right) &= \frac{-4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

Agora usando a identidade $y'(3) = 0$ e os valores de $\sin 15$ e $\cos 15$ temos

$$\begin{aligned}
-5C_1\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) + 5C_2\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) &= 0 \\
-C_1\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) + C_2\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) &= 0 \\
-C_1 + C_2\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\right) &= 0 \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

Somando as equações (4.8) e (4.9) obteremos

$$\begin{aligned} C_2\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\right) &= \frac{-4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} \\ 3C_2 &= \frac{-4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} \\ C_2 &= \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{3} \qquad (4.10) \end{aligned}$$

aplicando a equação (4.10) na equação (4.9), temos

$$\begin{aligned} C_2\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\right) &= C_1 \\ C_1 &= \left(\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\right) \\ C_1 &= \frac{-4}{3(\sqrt{6}-\sqrt{2})} \\ C_1 &= \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

Logo, a solução da equação diferencial $y''+25y=0$, nas condições iniciais apresentadas é a função

$$y=\left(\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{3}\right)\cos 5x+\left(\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{3}\right)\sin 5x$$

Vimos que as equações diferenciais do tipo $y''+by=0$ têm soluções, então, analisaremos a partir de agora a possibilidade de reduzir a equação (4.2) para o formato da equação (4.3). Caso exista um modo disso ser feito, poderemos resolver praticamente todas as equações diferenciais homogêneas.

Suponha que existam funções reais u e v tais que $y=uv$. Calculando as derivadas de y em função de u e v temos que $y'=uv'+u'v$ e $y''=uv''+2u'v'+u''v$, substituindo essas identidades na equação (4.2) temos

$$\begin{aligned} y''+ay'+by &= 0 \\ &= uv''+2u'v'+u''v+a(uv'+u'v)+buv \\ &= vu''+(2v'+av)u'+(v''+av'+bv)u \qquad (4.11) \end{aligned}$$

Vamos escolher a função v de modo que torne o coeficiente de u' igual a zero, e dessa forma, possamos encontrar valores de u seguindo as relações que mostramos anteriormente. De

$$\begin{aligned} 2v' + av &= 0 \\ 2v' &= -av \\ v' &= -\frac{av}{2} \end{aligned}$$

A partir daí, podemos escolher $v = e^{\frac{-ax}{2}}$, e consequentemente, temos $v'' = \dfrac{a^2 v}{4}$. Substituindo esses valores na equação (4.11), o coeficiente de u assume a forma

$$\begin{aligned} v'' + av' + bv &= \frac{a^2 v}{4} - \frac{a^2 v}{2} + bv \\ &= \left(\frac{a^2}{4} - \frac{2a^2}{4} + \frac{4b}{4}\right) v \\ &= \left(\frac{4b - a^2}{4}\right) v \end{aligned}$$

e, consequentemente, fica a equação (4.11) escrita como

$$y'' + ay' + by = \left(u'' + \frac{4b - a^2}{4} u\right) v$$

A função v, do modo que foi escolhida, nunca se anula, então y satisfaz a equação (4.2) se, e somente se $u'' + \left(\dfrac{4b - a^2}{4}\right) u = 0$. Com base nessa explanação, podemos enunciar o seguinte resultado, cuja prova acabou de ser escrita.

Teorema 4.2 *Sejam y e u duas funções tais que $y = ue^{\frac{-ax}{2}}$. Então, no eixo real, y satisfaz a equação diferencial $y'' + ay' + by = 0$ se, e somente se, u satisfaz a equação diferencial*

$$u'' + \frac{4b - a^2}{4} u = 0$$

Usando esse teorema, poderemos reduzir as equações da forma $y'' + ay' + by = 0$ para a forma $y'' + by = 0$, sendo que nesta última forma, conhecemos dispositivos para encontrar as soluções.

Exemplo 4.3 *Resolva a equação diferencial $y'' - 2y' + 3y = 0$.*

Solução: Usando o teorema (4.2), temos que a solução dessa equação terá a forma $y = ue^{\frac{-ax}{2}}$, onde u satisfará a seguinte equação $u'' - \dfrac{4b - a^2}{4} u$, assim

$$\begin{aligned} u'' - \frac{4.3 - (-2)^2}{4} u &= 0 \\ u'' - 2u &= 0 \end{aligned}$$

Usando o Teorema (4.3) temos que $u = C_1 \cos\sqrt{2}x + C_2 \sin\sqrt{2}x$ e, então, a solução da equação diferencial $y'' - 2y' + 3y = 0$ é $y = e^{-ax}(C_1 \cos\sqrt{2}x + C_2 \sin\sqrt{2}x)$.

Mostramos a existência de soluções para as equações de segunda ordem homogêneas, no entanto, ainda nos falta verificar a unicidade dessas soluções. Para isso, sejam as funções g e h soluções da equação diferencial $y'' + by = 0$ em $\mathbb{R}$, a unicidade será garantida se $g(x) = h(x)$. Definimos f de modo que $f(x) = g(x) - h(x)$, e mostraremos que $f(x) = 0$. Como $f(0) = 0$, temos $g(x) - h(x) = 0$ daí $g(0) = h(0)$, e $f'(0) = 0$, logo $g'(0) - h'(0) = 0$ e daí $g'(0) = h'(0)$.

Observe que

$$
\begin{aligned}
y'' &= -by \\
y^{(3)} &= -by' \\
y^{(4)} &= -by'' = (-b)(-by) = b^2 y \\
y^{(5)} &= b^2 y' \\
y^{(6)} &= b^2 y'' = b^2(-by) = -b^3 y \\
y^{(7)} &= -b^3 y'
\end{aligned}
$$

É perceptível um padrão nas derivadas, para comprová-lo, usaremos indução.

As derivadas de ordem par são dadas por $y^{(2n)} = (-1)^n b^n y$. Quando $n = 1$, temos que $y'' = -by$. Quando $n = k$ temos $y^{(2k)} = (-1)^k b^k y$, verifiquemos para $n = k+1$

$$
\begin{aligned}
y^{(2k+1)} &= (-1)^k b^k y' \\
y^{(2(k+1))} = y^{(2k+2)} = y^{((2k+1)+1)} &= ((-1)^k b^k y')' = (-1)^k b^k y'' = (-1)^k b^k(-by) = (-1)^{k+1} b^{k+1} y
\end{aligned}
$$

As derivadas de ordem ímpar são dadas por $y^{(2n-1)} = (-1)^{n-1} b^{n-1} y'$, e também por indução, temos que para $n = 2$, temos que $y^{(3)} = -by'$. Quando $n = k$ temos $y^{(2k-1)} = (-1)^{k-1} b^{k-1} y'$, quando $n = k+1$ temos que

$$
y^{(2(k+1)-1)} = y^{(2k+2-1)} = y^{(2k+1)} = (-1)^k b^k y' = (-1)^{(k-1)+1} b^{(k+1)-1} y'
$$

Como $f(0)$ e $f'(0) = 0$ todas as derivadas $f^{(0)}(0) = 0$, então cada polinômio de Taylor gerado por f tem todos os seus coeficientes 0. Usando a fórmula de Taylor, o polinômio é dado pela expressão

$$
f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + E_n(x)
$$

onde

$$E_n(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$$

usaremos um polinômio de aproximação de grau ímpar $2n-1$, chegando a conclusão de que $f(x) = E_{2n-1}(x)$, ou seja,

$$f(x) = \frac{1}{(2n-1)!}\int_0^{2n-1} (x-t)^{2n-1} f^{(2n)}(t)dt$$

Se o erro da aproximação se aproximar de zero quando o n for muito grande, chegaremos a constatação desejada. Para verificarmos isso, é necessário termos uma estimativa do tamanho da derivada $f^{(2n)}$. Considere um intervalo finito $[-c,c]$. onde $c > 0$, uma vez que f é contínua no intervalo, a função é limitada nesse intervalo, ou seja, $|f(x)| \leq M$. Como $f^{(2n)}(x) = (-1)^n b^n f(x)$, estimamos $|f^{(2n)}(x)| \leq M|b|^n$ em $[-c,c]$. Então, no intervalo definido, temos a estimativa

$$0 \leq |f(x)| \leq \frac{M|b|^n x^{2n}}{(2n)!} \leq \frac{M|b|^n c^{2n}}{(2n)!} - \frac{MA^{2n}}{(2n)!} \tag{4.12}$$

onde $A = |b|^{\frac{1}{2}}c$. Agora, precisamos mostrar que $\frac{A^m}{m!}$ tende a zero quando m tende ao infinito. Para $0 \leq A \leq 1$ é óbvia a constatação. Se $A \geq 1$, podemos escrever

$$\frac{A^m}{m!} = \frac{A}{1}.\frac{A}{2}.\frac{A}{3}\cdots\frac{A}{k}.\frac{A}{k+1}\cdots\frac{A}{m} \leq \frac{A^k}{k!}\left(\frac{A}{k+1}\right)^{m-k}$$

e

$$\frac{A}{k+1} < 1$$

onde $k < m$. Se escolhermos k como o maior inteiro $\leq A$, então $A < k+1$ e o último fator tende a zero quando m tende ao infinito. Portanto $\frac{A^m}{m!}$ tende a zero quando m tende ao infinito, e a desigualdade (4.12) mostra que $f(x) = 0$ para todo x em $[-c,c]$. Mas, como o c é arbitrário, segue que $f(x) = 0$ para todo x real. Esse resultado garante a unicidade da solução de equações diferenciais de segunda ordem, então, enunciamos o teorema.

Teorema 4.3 *Sejam duas funções g e h que satisfaçam a equação diferencial* $y'' + by = 0$*, em* $\mathbb{R}$*, e que satisfaçam as identidades* $g(0) = h(0)$ *e* $g'(0) = h'(0)$*. Então,* $g(x) = h(x)$ *para todo x.*

Unindo as deduções feitas e esse teorema que garante a unicidade das soluções, é possível caracterizar as soluções das equações diferenciais de segunda ordem homogêneas. Os próximos dois teoremas farão isso.

Teorema 4.4 *Sejam as funções u_1 e u_2 em $\mathbb{R}$ e o número real $k > 0$, as soluções das equações diferenciais $y'' + by = 0$ tem a forma*

$$y = C_1u_1(x) + C_2u_2(x)$$

, onde C_1 e C_2 são contantes, de modo que:

1. *Se $b = 0$, temos $u_1(x) = 1$ e $u_2(x) = x$*
2. *Se $b < 0$, escreveremos $b = -k^2$, $u_1(x) = e^{kx}$ e $u_2(x) = e^{-kx}$*
3. *Se $b > 0$, escreveremos $b = k^2$, $u_1(x) = \cos kx$ e $u_2(x) = \sin kx$.*

Prova:

Seja $y = f(x)$ uma solução da equação $y'' + by = 0$. Supondo que existam constantes C_1 e C_2 e que elas satisfazem as igualdades

$$C_1u_1(0) + C_2u_2(0) = f(0) \tag{4.13}$$

$$C_1u_1'(0) + C_2u_2'(0) = f'(0) \tag{4.14}$$

temos que $C_1u_1 + C_2u_2$ também é uma solução de $y'' + by = 0$. No entanto, pelo teorema (4.3), que garante a unicidade da solução, temos que $f = C_1u_1 + C_2u_2$. A verificação da existência das constantes para $b = 0$ já foi feita no início do capítulo, então vamos assumir que $b \neq 0$. No item 2, temos que $u_1(0) = u_2(0) = 1$ e $u_1'(0) = k$, $u_2'(0) = -k$. Aplicando esses valores nas equações (4.13) e (4.14) temos as equações $C_1 + C_2 = f(0)$ e $C_1 - C_2 = \frac{f'(0)}{k}$. Associando as equações e resolvendo-as, temos que $C_1 = \frac{1}{2}f(0) + \frac{f'(0)}{2k}$ e $C_2 = \frac{1}{2}f(0) - \frac{f'(0)}{2k}$.

No item 3, temos que $u_1(0) = 1$, $u_2(0) = u_1'(0) = 0$ e $u_2'(0) = k$, e analogamente ao item 2, encontramos as soluções $c_1 = f(0)$ e $c_2 = \frac{f'(0)}{k}$, assim garantimos a existência das constantes C_1 e C_2, desta forma a prova está completa!

Teorema 4.5 *Seja $d = a^2 - 4b$ o discriminante das equações diferenciais lineares homogêneas $y'' + ay' + by = 0$. As soluções desta equação, em $\mathbb{R}$, tem a forma*

$$y = e^{\frac{-ax}{2}}[C_1u_1(x) + C_2u_2(x)]$$

onde C_1 e C_2 são constantes, e as funções u_1 e u_2 são determinadas de acordo com o sinal do discriminante:

1. *Se $d = 0$, então $u_1 = 1$ e $u_2 = x$*
2. *Se $d < 0$, então $u_1 = \cos kx$ e $u_2 = \sin kx$, onde $k = \frac{\sqrt{-d}}{2}$*

3. *Se* $d > 0$*, então* $u_1 = e^{kx}$ *e* $u_2 = e^{-kx}$*, onde* $k = \dfrac{\sqrt{d}}{2}$

Prova: Para provar esse resultado, vamos assumir que $a \neq 0$, pois, caso contrário, cairíamos no teorema (4.4). Sejam v_1 e v_2 quaisquer duas soluções da equação diferencial $y'' + ay' + by = 0$, tal que $\dfrac{v_1}{v_2}$ não é constante, supondo que existam constantes C_1 e C_2 que satisfaçam as igualdades

$$C_1 v_1(0) + C_2 v_2(0) = f(0) \tag{4.15}$$

$$C_1 v_1'(0) + C_2 v_2'(0) = f'(0) \tag{4.16}$$

então a combinação linear $C_1 v_1 + C_2 v_2$ também será solução da equação diferencial. Daí, temos que as soluções terão a forma $y = C_1 v_1 + C_2 v_2$, desde que possamos garantir a existência das constantes. Usando o Teorema 4.2, tomamos $v_1 = e^{\frac{-ax}{2}} u_1$ e $v_2 = e^{\frac{-ax}{2}} u_2$, onde u_1 e u_2 satisfazem a equação $u'' + \left(\dfrac{4b - a^2}{4}\right) u = 0$.

Verificaremos a existência das constantes, usando os valores atribuídos as funções u_1 e u_2 de acordo com o sinal do discriminante $d = a^2 - 4b$. Para $d = 0$, temos que $u_1 = 0$ e $u_2 = x$ e, então, $v_1(0) = v_2(0) = 0$, $v_1'(0) = 0$ e $v_2'(0) = 1$. Substituindo esses valores nas equações (4.15) e (4.16) obtemos $f(0) = 0$ e $C_2 = f'(0)$. Com isso, concluímos que $f(x) = C_1 x$.

Para $d < 0$, temos que $u_1 = \cos kx$ e $u_2 = \sin kx$ e assim, $v_1(0) = 1$, $v_2(0) = 0$, $v_1'(0) = -\dfrac{a}{2}$ e $v_2'(0) = k$. Portanto $C_1 = f(0)$ e $C_1\left(-\dfrac{a}{2}\right) + C_2 k = f'(0)$ e daí, $C_2 = \dfrac{f'(0) + \dfrac{af(0)}{2}}{k}$.

Para $d > 0$, $u_1 = e^{kx}$, $u_2 = e^{-kx}$ e, portanto $v_1(0) = v_2(0) = 1$, $v_1'(0) = k - \dfrac{a}{2}$ e $v_2'(0) = -k - \dfrac{a}{2}$, daí, $C_1 + C_2 = f(0)$ e $C_1 - C_2 = \dfrac{f'(0)}{k - \dfrac{a}{2}}$. Somando essas duas últimas equações, temos que $C_1 = \dfrac{f(0)(k - \frac{a}{2}) + f'(0)}{2k - a}$ e, consequentemente, $C_2 = \dfrac{f(0)(k - \frac{a}{2}) - f'(0)}{2k - a}$. Garantimos, assim, a existência das constantes e, consequentemente, que $y = C_1 v_1 + C_2 v_2$ é a forma de todas as soluções, pelo teorema de unicidade.

Assim, a equação $y = e^{-\frac{ax}{2}} [C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x)]$ é a solução das equações da forma $y'' + ay' + by = 0$. Assim, concluímos a prova!

Exemplo 4.4 *Dada a equação diferencial* $y'' - 4y' - y = 0$*, encontre a solução que satisfaz as condições inciais* $y(1) = 2$ *e* $y'(1) = -1$.

Solução: Usando o Teorema 4.5 temos que $d = a^2 - 4b = (-4)^2 - 4.1 = 12 > 0$.Logo, a solução geral da equação diferencial é

$$y = e^{-2x}(C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx})$$

, ou ainda,

$$y = C_1 e^{-2x+kx} + C_2 e^{-2x-kx}$$

.

Usando a identidade $y(1) = 2$ temos

$$\begin{aligned}
C_1 e^{-2+k} + C_2 e^{-2-k} &= 2 \\
C_1 + C_2 \left(\frac{e^{-2-k}}{e^{-2+k}}\right) &= \frac{2}{e^{-2+k}} \\
C_1 + C_2 e^{-2k} &= \frac{2}{e^{-2+k}} \qquad (4.17)
\end{aligned}$$

Sendo $y' = C_1(-2+k)e^{-2x-kx} + C_2(-2-k)e^{-2x-kx}$, e aplicando $y(1) = -1$, temos

$$\begin{aligned}
C_1(-2+k)e^{-2+k} + C_2(-2-k)e^{-2+k} &= -1 \\
C_1 + C_2 \left(\frac{(-2-k)e^{-2-k}}{(-2+k)e^{-2+k}}\right) &= \frac{-1}{(-2+k)e^{-2+k}} \\
C_1 + C_2 \left(\frac{-2-k}{-2+k}\right) e^{-2k} &= \frac{-1}{(-2+k)e^{-2+k}} \qquad (4.18)
\end{aligned}$$

Subtraindo as equações (4.17) e (4.18) temos

$$\begin{aligned}
C_2 e^{-2k} \left(1 - \left(\frac{-2-k}{-2+k}\right)\right) &= \frac{2}{e^{-2+k}} - \frac{-1}{(-2+k)e^{-2+k}} \\
C_2 e^{-2k} \left(\frac{2k}{-2+k}\right) &= \frac{-3+2k}{(-2+k)e^{-2+k}} \\
C_2 &= \frac{(-3+2k)(-2+k)}{(-2+k)e^{-2+k}e^{-2k}} \\
C_2 &= \frac{-3+2k}{e^{-2-k}} \\
C_2 &= (-3+2k)e^{2+k}
\end{aligned}$$

Usando esse valor na equação (4.17), temos

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{2}{e^{-2+k}} - (-3+2k)e^{2+k}e^{-2k} \\
C_1 &= \frac{2 - (-3+2k)e^{2+k}e^{-2k}e^{-2+k}}{e^{-2+k}} \\
C_1 &= \frac{5-2k}{e^{-2+k}} \\
C_1 &= (5-2k)e^{2-k}
\end{aligned}$$

Logo, a solução da equação diferencial $y'' - 4y' - y = 0$ é

$$
\begin{aligned}
y &= (5-2k)e^{2-k}e^{-2x+kx} + (-3+2k)e^{2+k}e^{-2x-kx} \\
y &= (5-2k)e^{(2-k)-(2-k)x} + (-3+2k)e^{(2+k)-(2+k)x} \\
y &= (5-2k)e^{(2-k)(1-x)} + (-3+2k)e^{(2+k)(1-x)}
\end{aligned}
$$

4.2 Equações diferenciais de segunda ordem lineares não-homogêneas

Na seção anterior, encontrar soluções para as equações diferenciais lineares homogêneas com coeficientes reais, ou seja, equações da forma $y'' + ay' + by = 0$. Agora, vamos analisar equações na forma

$$y'' + ay' + by = R \tag{4.19}$$

onde R é qualquer função contínua definida nos reais, e a e b são constantes.

Vamos definir um operador L que transforma qualquer função f, sendo que f derivável até a segunda ordem, em uma outra função, definida pela equação

$$L(f) = f'' + af' + bf \tag{4.20}$$

Tomando a função $f = y$ e aplicando na equação (4.20), temos que $L(y) = R$. Para a completude dessa definição, vamos verificar a linearidade do operador L.

1. $L(f_1 + f_2) = L(f_1) + L(f_2)$

$$
\begin{aligned}
L(f_1+f_2) &= (f_1+f_2)'' + a(f_1+f_2)' + b(f_1+f_2) \\
L(f_1+f_2) &= f_1'' + f_2'' + af_1' + af_2' + bf_1 + bf_2 \\
L(f_1+f_2) &= (f_1'' + af_1' + bf_1) + (f_2'' + af_2' + bf_2) \\
L(f_1+f_2) &= L(f_1) + L(f_2)
\end{aligned}
$$

2. $L(cf) = cL(f)$, para toda constante c

$$
\begin{aligned}
L(cf) &= (cf)'' + a(cf)' + b(cf) \\
L(cf) &= cf'' + acf' + bcf \\
L(cf) &= c(f'' + af' + bf) \\
L(cf) &= cL(f)
\end{aligned}
$$

Sejam y_1 e y_2 soluções da equação $L(y) = R$, então $L(y_1) = L(y_2) = R$, e a linearidade nos dá que $L(y_2 - y_1) = L(y_2) - L(y_1) = R - R = 0$. Então, $y_2 - y_1$ é uma solução da equação homogênea $L(y) = 0$. De acordo com o Teorema 4.5, as soluções das equações homogêneas tem a forma $c_1v_1 + c_2v_2$, assim, podemos dizer que $y_2 - y_1 = c_1v_1 + c_2v_2$, onde $v_1 = e^{-\frac{ax}{2}}u_1(x)$ e $v_2 = e^{-\frac{ax}{2}}u_2(x)$ e, consequentemente, $y_2 = c_1v_1 + c_2v_2 + y_1$. Essa equação será satisfeita para todo par de soluções y_1 e y_2 de equações diferenciais não homogêneas $L(y) = R$. Desta forma, podemos determinar uma solução particular da equação não homogênea, e todas as soluções terão a forma

$$y = c_1v_1 + c_2v_2 + y_1 \tag{4.21}$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias. Da equação $L(y) = R$, temos que $L(c_1v_1 + c_2v_2 + y_1) = L(c_1v_1 + c_2v_2) + L(y_1) = 0 + L(y_1) = 0 + R = R$, então, conclui-se que cada um dos y é solução particular da equação $L(y) = R$. Uma vez que todas as soluções de $L(y) = R$ são encontradas na equação (4.21), a combinação linear $c_1v_1 + c_2v_2 + y_1$ é chamada solução geral da equação (4.19). Com base nisso, podemos enunciar o seguinte teorema, cuja prova acaba de ser apresentada.

Teorema 4.6 *Se y_1 é uma solução particular da equação não homogênea $L(y) = R$, a solução geral é obtida adicionando a y_1 a solução geral da equação homogênea correspondente $L(y) = 0$.*

Para que possamos, de fato, ter a solução geral das equações não homogêneas, precisamos construir a função y_1, pois, de acordo com o Teorema 4.5, a solução geral da equação homogênea tem a forma $y = c_1v_1 + c_2v_2$, onde $v_1 = e^{-\frac{ax}{2}}u_1$ e $v_2 = e^{-\frac{ax}{2}}u_2$ e as funções u_1 e u_2 são definidas pelo discriminante da equação. A construção de y_1 envolve uma função W definida pela equação

$$W(x) = v_1(x)v_2'(x) - v_2(x)v_1'(x) \tag{4.22}$$

A fim de enunciar o próximo resultado, precisamos mostrar que $W(x)$ nunca será igual a zero. Tomando a equação $y = c_1v_1 + c_2v_2$ e sua derivada $y' = c_1v_1' + c_2v_2'$ temos um sistema algébrico nas variáveis c_1 e c_2 dado por

$$\begin{cases} c_1v_1 + c_2v_2 = f \\ c_1'v_1' + c_2v_2' = f' \end{cases}$$

e o Teorema 4.4 garante a existência de c_1 e c_2. Sendo assim, o sistema acima tem solução, ou seja,

$$D = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1' & v_2' \end{vmatrix} \neq 0$$

então, $v_1v_2' - v_2v_1' \neq 0$.

Teorema 4.7 *Sejam v_1 e v_2 soluções da equação $L(y) = 0$, onde $v_1 = e^{-\frac{ax}{2}}u_1$ e $v_2 = e^{-\frac{ax}{2}}u_2$ e $L(y) = y'' + ay' + by$. Seja $W(x) = v_1(x)v_2'(x) - v_2(x)v_1'(x)$, então a equação não homogênea tem uma solução particular y_1 dada pela fórmula*

$$y_1(x) = t_1(x)v_1(x) + t_2(x)v_2(x)$$

onde $t_1(x) = -\int v_2(x)\dfrac{R(x)}{W(x)}dx$ e $t_2(x) = \int v_1(x)\dfrac{R(x)}{W(x)}dx$.

Prova: Procuramos funções t_1 e t_2 de modo que a combinação linear $y_1 = t_1v_1 + t_2v_2$ satisfaça a equação $L(y_1) = R$. Temos que

$$y_1' = t_1v_1' + t_2v_2' + t_1'v_1 + t_2'v_2$$

e

$$y_1'' = t_1v_1'' + t_2v_2'' + t_1'v_1' + t_2'v_2' + (t_1'v_1 + t_2'v_2)'$$

e daí,

$$\begin{aligned} L(y_1) &= y_1'' + ay_1' + by_1 \\ L(y_1) &= [t_1v_1'' + t_2v_2'' + t_1'v_1' + t_2'v_2' + (t_1'v_1 + t_2'v_2)'] + a(t_1v_1' + t_2v_2' + t_1'v_1 + t_2'v_2) + b(t_1v_1 + t_2v_2) \end{aligned}$$

Como $L(v_1) = L(v_2) = 0$, temos que $L(y_1) = t_1'v_1' + t_2'v_2' + (t_1'v_1 + t_2'v_2)' + a(t_1'v_1 + t_2'v_2)$ e, para que tenhamos a equação $L(y_1) = R$, precisamos escolher t_1 e t_2 de modo que

$$t_1'v_1 + t_2'v_2 = 0$$

e

$$t_1'v_1' + t_2'v_2' = R$$

A partir disso, obtemos um sistema de equações algébricas de t_1 e t_2

$$\begin{cases} t_1'v_1 + t_2'v_2 = 0 \\ t_1'v_1' + t_2v_2' = R \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, temos que

$$D = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1' & v_2' \end{vmatrix} = v_1v_2 - v_1v_2 = W(x)$$

$$D_{t_1} = \begin{vmatrix} 0 & v_2 \\ R & v_2' \end{vmatrix} = -Rv_2$$

$$D_{t_2} = \begin{vmatrix} v_1 & 0 \\ v_1' & R \end{vmatrix} = Rv_1$$

e, portanto,

$$t_1' = -v_2 \frac{R}{W}$$

e

$$t_2' = v_1 \frac{R}{W}$$

integrando essas relações, obtemos as equações enunciadas no teorema.

Exemplo 4.5 *Dada a equação $y'' + y' - 2y = e^x$, encontre uma solução particular e, consequentemente, a solução geral dessa equação.*

Solução: De acordo com o Teorema 4.7, para determinarmos uma solução particular da equação, devemos encontrar as funções v_1, v_2, t_1 e t_2. Para encontrar as duas primeiras funções, precisamos encontrar as funções u_1 e u_2 e, para isso, aplicamos o Teorema 4.5, sendo que $d = 9$ e, consequentemente, $k = \frac{3}{2}$. Logo, $u_1(x) = e^{\frac{3x}{2}}$ e $u_2(x) = e^{\frac{-3x}{2}}$ e, consequentemente,

$$v_1(x) = e^{\frac{-x}{2}}.e^{\frac{3x}{2}} = e^x$$

e

$$v_2(x) = e^{\frac{-x}{2}}.e^{\frac{-3x}{2}} = e^{-2x}.$$

Também,

$$\begin{aligned}
W(x) &= v_1(x)v_2'(x) - v_2(x)v_1'(x) \\
W(x) &= e^x(-2e^{-2x}) - e^{-2x}e^x \\
W(x) &= -2e^{-x} - e^{-x} \\
W(x) &= -3e^{-x}
\end{aligned}$$

Agora, iremos determinar as funções t_1 e t_2,

$$\begin{aligned}
t_1(x) &= -\int e^{-2x}\frac{e^x}{-3e^{-x}}dx \\
t_1(x) &= -\left(-\frac{1}{3}\right)\int dx \\
t_1(x) &= \frac{x}{3}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
t_2(x) &= \int e^x\frac{e^x}{-3e^{-x}}dx \\
t_2(x) &= -\frac{1}{3}\int e^{3x}dx \\
t_2(x) &= -\frac{e^{3x}}{9}
\end{aligned}$$

Logo, uma solução particular é

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= \frac{x}{3}e^x + \left(-\frac{e^{3x}}{9}\right)e^{-2x} \\
y_1(x) &= \frac{xe^x}{3} - \frac{e^x}{9}
\end{aligned}$$

Portanto, a solução geral é dada pela equação (4.21),

$$y = c_1e^x + c_2e^{-2x} + \frac{xe^x}{3} - \frac{e^x}{9}$$

5 APLICAÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Um dos maiores desafios dos professores de matemática na educação é quando um aluno faz a seguinte pergunta: *Onde que vou usar isso na minha vida?* Não seria ousadia afirmar que qualquer professor de matemática, em qualquer nível de ensino, já ouviu essa pergunta. Neste capítulo, onde escrevemos a essência desse trabalho, buscamos mostrar algumas aplicações de um assunto da matemática, especificamente, das Equações Diferenciais, que dependendo da abordagem que seja feita durante seu estudo não é fácil ver sua aplicação, e como veremos, ela está presente em diversas áreas de ensino e em várias situações do nosso cotidiano. Vamos dar enfoque na abordagem de três situações específicas: os juros, o sistema massa-mola, os circuitos elétricos.

5.1 Juros Compostos

Durante o ensino médio, aprendemos que os juros produzidos por uma aplicação financeira pode ser obtido por uma relação, a saber, $M = C(1+i)^t$, onde M é o capital investido adicionado aos juros produzidos, C é o capital investido (ou o empréstimo adquirido), ou seja, o valor da aplicação, i é a taxa de juro e t é o tempo que durará a aplicação. Essa relação sugere que o indivíduo faça a aplicação e espere o período de tempo findar para fazer qualquer alteração ou, em último caso, interrompa a aplicação e retire o rendimento. Esse modelo não prevê, por exemplo, saques ou depósitos periódicos. Vamos usar as equações diferenciais para modelar uma relação que possua robustez, ou seja, estará apta a vários movimentos do indeciso investidor.

Nas aplicações financeiras, a quantia de dinheiro S depende do tempo t de aplicação, assim, definimos S como variável dependente e t como variável independente. A taxa de variação da quantia de dinheiro, ou seja, $\frac{dS}{dt}$ será igual a taxa de juros r vezes o valor do investimento S, ou seja,

$$\frac{dS}{dt} = rS \tag{5.1}$$

algo que não pode ser esquecido por nós, é que a aplicação financeira exige um instante inicial, que é justamente o momento exato de início dela, ou seja, a variável t terá que assumir o valor zero, e justamente nesse instante $t = 0$, a quantia de dinheiro será a quantia inicial da aplicação, que denotaremos por S_0, ou seja,

$$S(0) = S_0 \tag{5.2}$$

Se olharmos para as equações (5.1) e (5.2) temos uma equação diferencial linear e separável com um valor inicial e, ao resolvermos essa equação diferencial, teremos a função S que nos dirá a quantia de dinheiro da aplicação em qualquer instante durante o investimento.

Exemplo 5.1 *Resolva a equação $S' - rS = 0$, com valor inicial $S(0) = S_0$*

Solução: Podemos reescrever a equação da seguinte maneira:

$$\frac{dS}{dt} = rS$$
$$\frac{dS}{S} = rdt$$

integrando em ambos os lados, temos:

$$ln|S| + C_1 = rt + C_2$$

onde C_1 e C_2 são constantes reais. Aplicando a exponencial em ambos os lados, temos:

$$\begin{aligned} e^{ln|S|+C_1} &= e^{rt+C_2} \\ e^{C_1}S &= e^{C_2}e^{rt} \\ S &= e^{rt}\frac{e^{C_2}}{e^{C_1}} \\ S &= Ce^{rt} \end{aligned}$$

onde C, e^{C_1} e e^{C_2} são constantes. Atribuindo o valor inicial da equação, temos que

$$\begin{aligned} C &= \frac{S}{e^{rt}} \\ C &= \frac{S_0}{e^{r0}} \\ C &= S_0 \end{aligned}$$

tendo como solução geral do exemplo (5.1) a equação

$$S(t) = S_0e^{rt} \tag{5.3}$$

A equação (5.3) é o modelo que procurávamos, ou seja, que poderá determinar a quantidade de dinheiro em qualquer instante da aplicação. Até este momento, a equação que encontramos não contempla movimentações periódicas, ou seja, se o investidor desejar depositar mensalmente para acrescentar no capital da aplicação, a equação (5.3) não consegue cumprir com aquilo que dissemos, desse modo, é necessário modelar uma outra equação.

Vamos supor que, os saques ou depósitos sejam constantes (semelhante a uma parcela de contribuição previdenciária por exemplo), então, vamos atribuir a constante k para essa movimentação, sendo que k será negativa para saque e positiva para depósito. Desse modo, a taxa de variação da quantia de dinheiro será expressa por

$$\frac{dS}{dt} = rS + k \tag{5.4}$$

e, do mesmo modo que na equação (5.1) deve-se considerar que a solução dessa equação diferencial nos fornecerá o modelo matemático que procuramos, e ainda, devemos considerar o valor inicial exposto na equação (5.2). Munidos dstas informações, vamos resolver a equação (5.4) com o valor inicial (5.2).

A equação (5.4) é uma equação linear do formato da equação (3.3). Por conta disso, usaremos o método do fator integrante. A equação (5.4) pode ser escrita como

$$\frac{dS}{dt} - rS = k$$

e, de acordo com a equação 3.5, o fator integrante dessa equação é

$$\mu(t) = exp \int (-r)dt$$

, ou seja, $\mu(t) = e^{-rt}$. A partir disso, temos:

$$S'e^{-rt} - rSe^{-rt} = ke^{-rt}$$
$$(Se^{-rt})' = ke^{-rt}$$

Integrando, temos

$$Se^{-rt} = \int ke^{-rt}dt$$
$$Se^{-rt} = k\left(\frac{e^{-rt}}{-r}\right) + C$$
$$S = k\left(\frac{e^{-rt}}{-r}\right)\left(\frac{1}{e^{-rt}}\right) + C\left(\frac{1}{e^{-rt}}\right)$$
$$S = Ce^{rt} - \frac{k}{r} \tag{5.5}$$

, sendo C uma constante,da condição inicial temos:

$$S_0 = Ce^{r0} - \frac{k}{r}$$
$$C = \frac{k}{r} + S_0 \tag{5.6}$$

Aplicando a equação (5.6) na equação (5.5), temos:

$$\begin{aligned}
S(t) &= \left(\frac{k}{r}+S_0\right)e^{rt}-\frac{k}{r} \\
S(t) &= \frac{k}{r}e^{rt}+S_0e^{rt}-\frac{k}{r} \\
S(t) &= S_0e^{rt}+\frac{k}{r}(e^{rt}-1) \qquad (5.7)
\end{aligned}$$

A equação (5.7) é o modelo que procurávamos, que permite que o investidor faça saque ou depósitos durante a aplicação.

Exemplo 5.2 *Uma pessoa abre uma conta para que seu filho, quando atingir a maioridade, possa investir em um negócio próprio e ter independência financeira. No momento que abriu a conta, foi depositado o valor de R$ 2000,00 e, a cada mês, é feito um depósito de R$ 200,00, sendo que a taxa de rendimento de 0,5% ao mês. Sabendo que a taxa será fixa ao longo da aplicação, qual o valor que deve ser retirado pelo filho quando atingir sua maioridade?*

Solução: Vamos usar a equação (5.7) e extraindo os valores, temos que $S_0 = R\$\ 2000,00$, $k = R\$\ 200,00$, $r = 0,005$ e $t = 216$ meses, daí:

$$\begin{aligned}
S(216) &= 2000e^{0,005.216}+\frac{200}{0,005}(e^{0,005.216}-1) \\
S(216) &= 2000e^{1,08}+(40000)(e^{1,08}-1) \\
S(216) &= 5889,359+77787,182 \\
S(216) &= 83676,54
\end{aligned}$$

O valor a ser retirado é $R\$\ 83676,54$

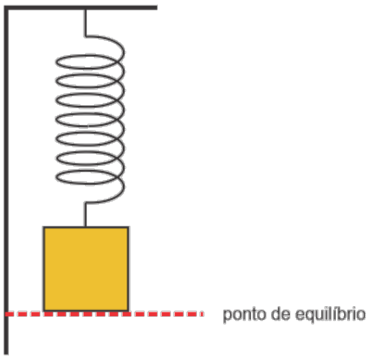
5.2 Sistema massa-mola

Na formação da matéria, os átomos se agrupam e formam cadeias moleculares que, dependendo da distância e flexibilidade, determinam a rigidez da matéria constituída, ou seja, determinam se o corpo é rígido ou flexível. Até mesmo os corpos mais rígidos que se possam imaginar, é possível modificar suas dimensões, através de aplicação de forças externas (puxando, empurrando, torcendo ou comprimindo). A mudança das dimensões dos corpos é chamada de elasticidade, grandeza determinante em muitos campos físicos e de engenharia. Por exemplo, a resistência das asas de um avião as forças externas de modo que não sejam rompidas e apenas vibrem para manter o avião no ar é determinada através do estudo da elasticidade e das oscilações.

Nesta seção, estudaremos, especificamente, o sistema massa-mola, que está dentro do campo das oscilações.

Vamos considerar um corpo de massa m fixado a uma mola com constante elástica k, sendo que a mola, na outra extremidade, está presa a um ponto fixo, uma parede por exemplo, inicialmente, em repouso, conforme a figura a seguir 1

Figura 1 – Sistema massa mola



Fonte: elaborada pelo autor

Suponha que uma força aja sobre o corpo de massa m, fazendo com que o corpo se desloque a uma certa distância x. De acordo com o sentido da força, temos duas situações. A primeira, conforme a figura, a força é exercida na direção contrária do ponto fixo, no mesmo instante, a mola exerce uma força sobre o corpo, a qual chamaremos de força elástica F_{el}, e que pode ter a intensidade calculada pela lei de Hooke

$$F_{el} = -kx \tag{5.8}$$

. Sabendo que $k > 0$, temos que, se $x > 0$ então $F_{el} < 0$, e concluímos que a F_{el} age na direção do ponto fixo, veja a figura 2.

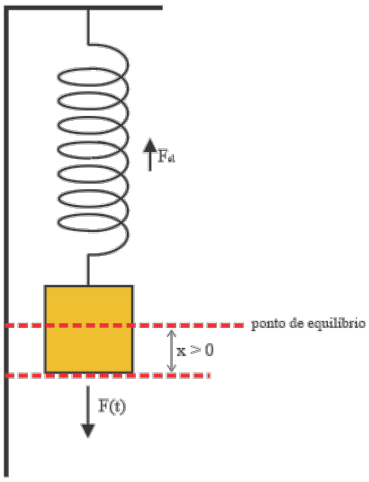
A segunda situação é que a força externa age na direçaõ do ponto fixo, portanto, temos que $x < 0$, e como $k > 0$, $F_{el} > 0$, ou seja, a força elástica agirá na direção contrária ao ponto fixo, veja a Figura 3.

Se após a mola ser esticada ou comprimida, o corpo for solto, supõe-se que ocorrerá um movimento harmônico simples, e vamos procurar modelar o comportamento desse oscilador harmônico.

A segunda lei de Newton afirma que as forças que atuam num corpo é igual a massa do corpo multiplicada pela aceleração, ou seja,

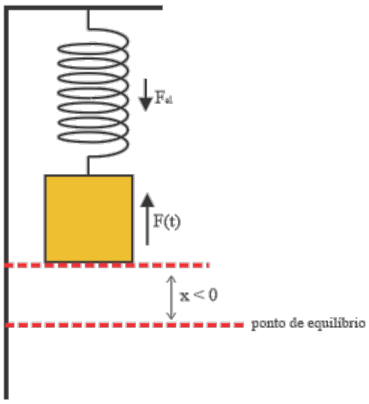
$$F = ma \tag{5.9}$$

Figura 2 – Sistema com a mola sendo esticada



Fonte: elaborada pelo autor

Figura 3 – Sistema com a mola sendo contraída



Fonte: elaborada pelo autor

e essa equação pode ser escrita de outra forma, ao considerarmos que $a = x''(t)$ (onde o deslocamento x varia de acordo com o tempo t) e que $F = F_{el} + F(t)$, onde $F(t)$ é a força externa que esticava ou contraía a mola, então, temos:

$$\begin{aligned} F_{el} + F(t) &= m.x'' \\ -kx + F(t) &= m.x'' \\ F(t) &= m.x''(t) + kx \end{aligned} \tag{5.10}$$

a equação (5.10) é uma equação diferencial de segunda ordem e para definir as soluções dessa equação é necessário atribuir valores iniciais.

Para modelarmos o comportamento do corpo, vamos considerar dois casos: o primeiro é que não haverá força externa agindo sobre o corpo, ou seja, $F(t) = 0$, e posteriormente, consideraremos a existência de forças externas. Tomando $F(t) = 0$, a equação (5.10) é reescrita como

$$mx'' + kx = 0$$

e, como o corpo estava em repouso, temos que $x(0) = 0$ e $x'(0) = v_0$. Iniciando o processo de resolução, iremos dividir a equação por m e, então, temos

$$x'' + \frac{k}{m}x = 0 \tag{5.11}$$

como $\frac{k}{m} > 0$, de acordo com o Teorema 4.4 a solução é

$$x = C_1 \cos t\sqrt{\frac{k}{m}} + C_2 \sin t\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{5.12}$$

Uma grandeza física presente no movimento harmônico simples é a *frequência angular* ω que pode ser calculada através da relação

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

então a equação (5.12) pode ser escrita como

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \tag{5.13}$$

A inexistência de forças externas ao sistema nos afasta da realidade, e como estamos voltados para aplicações, precisamos trabalhar com a existência destas forças, no entanto, para efeito de simplicidade, continuaremos supondo que a mola age linearmente e que não há dissipação de energia no sistema. Cabe destacar, ainda, que existem muitas forças que podem agir sobre esse sistema, e para cada uma delas, existirá uma equação diferencial para modelar, por isso, vamos supor uma força externa periódica e harmônica, do tipo $F(t) = \cos \omega t$

Seja ω_0 a *frequência angular natural* e

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{5.14}$$

assim, vamos reescrever a equação (5.11) como

$$x'' + (\omega_0)^2 x = F(t) \tag{5.15}$$

Supondo que a frequência da força externa é diferente da frequência natural, ou seja, $\omega \neq \omega_0$, temos

$$x'' + (\omega_0)^2 x = \cos \omega t$$

.

Pelo Teorema 4.6, as soluções da equação (5.15) têm a forma $x = C_1 v_1 + C_2 v_2 + x_1$, onde x_1 é uma solução particular da equação não homogênea. Usando o Teorema 4.7, precisamos encontrar as funções v_1, v_2, s_1 e s_2 e, como $a = 0$ e o discriminante $d < 0$ temos que $v_1(t) = u_1(t) = \cos kt$ e $v_2(t) = u_2(t) = \sin kt$. Temos, ainda, que $k = \dfrac{\sqrt{-d}}{2} = \dfrac{\sqrt{-(-4\omega_0)}}{2} = \omega_0$.

Para encontrarmos as funções s_1 e s_2 é necessário conhecer a função W, logo

$$\begin{aligned}
W(t) &= v_1(t)v_2'(t) - v_2(t)v_1'(t)\\
W(t) &= \cos\omega_0 t\cos\omega_0 t - \sin\omega_0 t(-\sin\omega_0 t)\\
W(t) &= \cos^2\omega_0 t + \sin^2\omega_0 t\\
W(t) &= 1
\end{aligned}$$

A partir disso, temos

$$s_1(t) = -\int \sin\omega_0 t\cos\omega t dt$$

e

$$s_2(t) = \int \cos\omega_0 t\cos\omega t dt$$

Para resolver as integrais das funções s_1 e s_2 utilizaremos as duas identidades que seguem:

$$\begin{aligned}
\sin(a-b)+\sin(a+b) &= (\sin a\cos b - \cos a\sin b) + (\sin a\cos b + \cos a\sin b)\\
\sin(a-b)+\sin(a+b) &= 2\sin a\cos b\\
\frac{1}{2}[\sin(a-b)+\sin(a+b)] &= \sin a\cos b \qquad (5.16)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\cos(a-b)+\cos(a+b) &= (\cos a\cos b + \sin a\sin b) + (\cos a\cos b - \sin a\sin b)\\
\cos(a-b)+\cos(a+b) &= 2\cos a\cos b\\
\frac{1}{2}[\cos(a-b)+\cos(a+b)] &= \cos a\cos b \qquad (5.17)
\end{aligned}$$

então,

$$
\begin{aligned}
s_1(x) &= -\int \sin\omega_0 t\cos\omega t dt \\
s_1(x) &= -\int \frac{1}{2}[\sin(\omega_0 t-\omega t)+\sin(\omega_0 t+\omega t)] \\
s_1(x) &= -\frac{1}{2}\left[\int \sin(\omega_0-\omega)t dt+\int \sin(\omega_0+\omega)t dt\right] \\
s_1(x) &= -\frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(\omega_0-\omega)t}{\omega_0-\omega}-\frac{\cos(\omega_0+\omega)t}{\omega_0+\omega}\right]+C \\
s_1(x) &= \frac{1}{2}\left[\frac{\cos t(\omega_0-\omega)}{(\omega_0-\omega)}+\frac{\cos t(\omega_0+\omega)}{(\omega_0+\omega)}\right]+C \\
s_1(x) &= \frac{1}{2}\left[\frac{(\omega_0+\omega)(\cos\omega_0 t\cos\omega t+\sin\omega_0 t\sin\omega t)+(\omega_0-\omega)(\cos\omega_0 t\cos\omega t-\sin\omega_0 t\sin\omega t)}{(\omega_0-\omega)^2}\right]+C \\
s_1(x) &= \frac{1}{2}\left[\frac{(\cos\omega_0 t\cos\omega t)(\omega_0+\omega+\omega_0-\omega)+(\sin\omega_0 t\sin\omega t)(\omega_0+\omega-\omega_0+\omega)}{(\omega_0-\omega)^2}\right]+C \\
s_1(x) &= \frac{\omega_0(\cos\omega_0 t\cos\omega t)+\omega(\sin\omega_0 t\sin\omega t)}{(\omega_0-\omega)^2}+C \qquad (5.18)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
s_2(x) &= \int \cos\omega_0 t\cos\omega t dt \\
s_2(x) &= \int \frac{1}{2}[\cos(\omega_0-\omega)t+\cos(\omega_0+\omega)t]dt \\
s_2(x) &= \frac{1}{2}\left[\int \cos(\omega_0-\omega)t dt+\int \cos(\omega_0+\omega)t dt\right] \\
s_2(x) &= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(\omega_0-\omega)t}{\omega_0-\omega}+\frac{\sin(\omega_0+\omega)t}{\omega_0+\omega}\right]+C \\
s_2(x) &= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin t(\omega_0-\omega)}{\omega_0-\omega}+\frac{\sin t(\omega_0+\omega)}{\omega_0+\omega}\right]+C \\
s_2(x) &= \frac{1}{2}\left[\frac{(\omega_0+\omega)(\sin\omega_0 t\cos\omega t-\sin\omega t\cos\omega_0 t)+(\omega_0-\omega)(\sin\omega_0 t\cos\omega t+\sin\omega t\cos\omega_0 t)}{(\omega_0-\omega)^2}\right]+C \\
s_2(x) &= \frac{1}{2}\left[\frac{(\sin\omega_0 t\cos\omega t)(\omega_0+\omega+\omega_0-\omega)+(\sin\omega t\cos\omega_0 t)(-\omega_0-\omega+\omega_0-\omega)}{(\omega_0-\omega)^2}\right]+C \\
s_2(x) &= \frac{\omega_0(\sin\omega_0 t\cos\omega t)-\omega(\sin\omega t\cos\omega_0 t)}{(\omega_0-\omega)^2}+C \qquad (5.19)
\end{aligned}
$$

A partir disso, temos uma solução particular da equação (5.15)

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= (\cos\omega_0 t)\left(\frac{\omega_0(\cos\omega_0 t\cos\omega t)+\omega(\sin\omega_0 t\sin\omega t)}{(\omega_0-\omega)^2}\right)+ \\
&+ (\sin\omega_0 t)\left(\frac{\omega_0(\sin\omega_0 t\cos\omega t)-\omega(\sin\omega t\cos\omega_0 t)}{(\omega_0-\omega)^2}\right)
\end{aligned}
$$

Usando esses resultados, concluímos que as soluções da equação (5.15) tem a forma

$$\begin{aligned} x &= C_1\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t + (\cos\omega_0 t)\left(\frac{\omega_0(\cos\omega_0 t\cos\omega t)+\omega(\sin\omega_0 t\sin\omega t)}{(\omega_0-\omega)^2}\right)+ \\ &+ (\sin\omega_0 t)\left(\frac{\omega_0(\sin\omega_0 t\cos\omega t)-\omega(\sin\omega t\cos\omega_0 t)}{(\omega_0-\omega)^2}\right) \end{aligned} \tag{5.20}$$

Supondo que a frequência da força externa seja igual a frequência natural, ou seja, $\omega = \omega_0$, temos que

$$\begin{aligned} s_1(t) &= -\int \sin\omega t\cos\omega t dt \\ s_1(t) &= -\int \frac{1}{2}(\sin 2\omega t)dt \\ s_1(t) &= -\frac{1}{4\omega}\cos 2\omega t \end{aligned} \tag{5.21}$$

e

$$\begin{aligned} s_2(t) &= \int \cos\omega t\cos\omega t dt \\ s_2(t) &= \int \cos^2\omega t dt \\ s_2(t) &= \int \frac{1}{2}(1+\sin 2\omega t)dt \\ s_2(t) &= \frac{t}{2}+\frac{1}{4\omega}\cos 2\omega t + C \end{aligned} \tag{5.22}$$

Nesse caso, a solução particular da equação diferencial é

$$x_1(t) = \cos\omega t\left(-\frac{1}{2\omega t}\cos\omega t\right)+(\sin\omega t)\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{4\omega}\cos 2\omega t\right)$$

e, a partir disso, escrevemos a solução geral

$$x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t + \cos\omega t\left(-\frac{1}{2\omega t}\cos\omega t\right)+(\sin\omega t)\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{4\omega}\cos 2\omega t\right) \tag{5.23}$$

As equações (5.20) e (5.23) determinarão o deslocamento da massa segundo a aplicação de forças em função de tempo, é preciso destacar que o uso dessas equações é dependente da frequência angular ω do sistema massa mola.

Exemplo 5.3 *Uma mola, de um sistema massa mola sem amortecimento, tem constante igual a* $3N/m$*. Pendura-se na mola uma massa de* $2kg$ *e o sistema sofre ação de uma força externa de* $\cos 3x$*. Determine a função que descreve o movimento da massa em qualquer instante* t*, considerando a posição inicial e a velocidade inicial iguais a zero.*

Solução: De acordo com a equação (5.14), a frequência natural vale $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$. A frequência da força externa é $\omega = 3$. Sendo assim, usaremos o modelo determinado pela equação (5.20).

Daí,

$$\begin{aligned}
x(t) &= C_1 \cos\sqrt{\frac{3}{2}}t + C_2 \sin\sqrt{\frac{3}{2}}t + \cos\sqrt{\frac{3}{2}}t\left(-\frac{2}{9}\cos\sqrt{\frac{3}{2}}t\cos 3t - \frac{4}{9}\sin\sqrt{\frac{3}{2}}t\sin 3t\right) + \\
&+ \sin\sqrt{\frac{3}{2}}t\left(-\frac{2}{9}\sin\sqrt{\frac{3}{2}}t\cos 3t + \frac{4}{9}\sin 3t\cos\sqrt{\frac{3}{2}}t\right)
\end{aligned}$$

Sabendo que $x(0) = 0$, temos

$$\begin{aligned}
x(0) &= C_1\cos 0 + C_2 \sin 0 + \cos 0\left(-\frac{2}{9}\cos 0\cos 0 - \frac{4}{9}\sin 0\sin 0\right) + \sin 0\left(-\frac{2}{9}\sin 0\cos 0 - \frac{4}{9}\sin 0\cos 0\right) \\
0 &= 1.C_1 + 0.C_2 + 1.\left(-\frac{2}{9}.1.1 - \frac{4}{9}.0.0\right) + 0.\left(-\frac{2}{9}.0.1 - \frac{4}{9}.0.1\right) \\
0 &= C_1 - \frac{2}{9} \\
C_1 &= \frac{2}{9}
\end{aligned}$$

Sabendo que $v(t) = x'(t)$ e a equação $x'(t)$ é escrita como

$$\begin{aligned}
x'(t) &= -\sqrt{\frac{3}{2}}C_1\sin\sqrt{\frac{3}{2}}t + \sqrt{\frac{3}{2}}C_2\cos\sqrt{\frac{3}{2}}t - \sqrt{\frac{3}{2}}C_1\sin\sqrt{\frac{3}{2}}t.F(t) + \cos\sqrt{\frac{3}{2}}t.F'(t) + \\
&+ \sqrt{\frac{3}{2}}\cos\sqrt{\frac{3}{2}}t.G(t) + \sin\sqrt{\frac{3}{2}}t.G'(t)
\end{aligned}$$

onde $F(t) = -\frac{2}{9}\cos\sqrt{\frac{3}{2}}t\cos 3t - \frac{4}{9}\sin\sqrt{\frac{3}{2}}t\sin 3t$ e $G(t) = -\frac{2}{9}\sin\sqrt{\frac{3}{2}}t\cos 3t + \frac{4}{9}\sin 3t\cos\sqrt{\frac{3}{2}}t$, usando o fato de $v(0) = 0$, temos

$$\begin{aligned}
x'(0) &= -\sqrt{\frac{3}{2}}C_1\sin 0 + \sqrt{\frac{3}{2}}C_2\cos 0 - \sqrt{\frac{3}{2}}C_1(\sin 0).F(0) + (\cos 0).F'(0) + \sqrt{\frac{3}{2}}(\cos 0).G(0) + \\
&+ (\sin 0).G'(0) \\
x'(0) &= \sqrt{\frac{3}{2}}C_2\cos 0 + (\cos 0).F'(0) + \sqrt{\frac{3}{2}}(\cos 0).G(0)
\end{aligned}$$

Sendo $G(0) = -\frac{2}{9}\sin 0\cos 0 + \frac{4}{9}\sin 0\cos 0 = 0$ e

$$\begin{aligned}
F'(t) &= -\frac{2}{9}\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\sin\sqrt{\frac{3}{2}}t\cos 3t - 3\cos\sqrt{\frac{3}{2}}t\sin 3t\right) - \frac{4}{9}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\cos\sqrt{\frac{3}{2}}t\sin 3t + 3\sin\sqrt{\frac{3}{2}}t\sin 3t\right) \\
F'(0) &= -\frac{2}{9}\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\sin 0\cos 0 - 3\cos 0\sin 0\right) - \frac{4}{9}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\cos 0\sin 0 + 3\sin 0\cos 0\right) \\
F'(0) &= 0
\end{aligned}$$

Assim, podemos reescrever a equação

$$\begin{aligned} x'(0) &= \sqrt{\frac{3}{2}}C_2\cos 0 + 0.\cos 0 + 0.\sqrt{\frac{3}{2}}\cos 0 \\ 0 &= \sqrt{\frac{3}{2}}C_2.1 \\ C_2 &= 0 \end{aligned}$$

A partir desses resultados, a equação que descreve o movimento da massa, no instante $t > 0$ é

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{2}{9}\cos\sqrt{\frac{3}{2}}t + \cos\sqrt{\frac{3}{2}}t\left(-\frac{2}{9}\cos\sqrt{\frac{3}{2}}t\cos 3t - \frac{4}{9}\sin\sqrt{\frac{3}{2}}t\sin 3t\right) + \\ &+ \sin\sqrt{\frac{3}{2}}t\left(-\frac{2}{9}\sin\sqrt{\frac{3}{2}}t\cos 3t + \frac{4}{9}\sin 3t\cos\sqrt{\frac{3}{2}}t\right) \end{aligned}$$

O uso desses modelos específicos devem ser auxiliados por softwares, já que os valores da funções trigonométricas não são inteiros (com exceção, é claro, dos ângulos nos eixos). Como já citado, a generalização dos modelos é inviável devido a variedade de formas de $F(t)$, e a cada forma que a função assumir, usa-se a equação (5.15) e encontra sua solução.

5.3 Circuitos Elétricos

O desenvolvimento da humanidade foi acelerado com a inserção das tecnologias no mundo, a facilidade e a agilidade que os equipamentos eletrônicos fornecem aos homens potencializa a produção material e intelectual. A própria evolução dos aparelhos eletrônicos passa pela capacidade de potencializar o conceito de circuitos elétricos, responsável pelo funcionamento desses aparelhos, e é justamente esse conceito que abordaremos nessa seção.

Inicialmente é necessário que conheçamos alguns conceitos básicos sobre os circuitos elétricos, isso facilitará a compreensão das aplicações.

Um *circuito elétrico* é um caminho fechado no qual os elementos elétricos do circuito estão ligados por meio de um condutor. Uma corrente elétrica passa por esses componentes causando a diferença de potencial em cada componente. Os componentes elétricos que serão utilizados são:

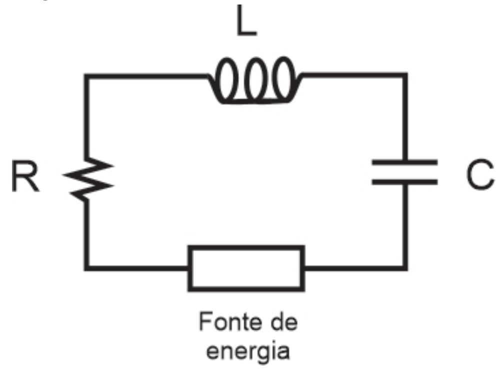
– **Resistor:** dispositivo elétrico usado para duas finalidades: transformar energia elétrica em energia térmica e limitar a corrente elétrica em um circuito, oferecendo uma oposição a passagem de corrente elétrica através de seu material. Essa oposição é chamada de *resistência elétrica* ou *impedância* e possui como unidade de medida Ω (Ohm)

– **Capacitor:** componente que armazena a carga elétrica. O capacitor poderá assumir a função de fonte do circuito

– **Indutor:** é um dispositivo elétrico que armazena energia elétrica. Quando a corrente elétrica passa por cada espira, o indutor armazena energia produzindo um campo magnético.

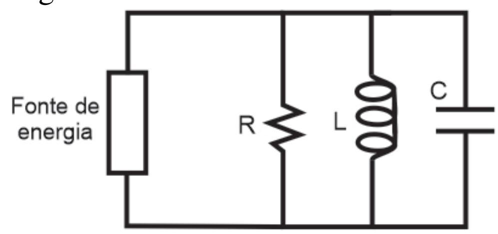
A classificação dos circuitos é dada de acordo com o uso desses componentes, bem como a disposição deles no circuito, em outras palavras, o modo que o circuito é montado. Os circuitos RL são compostos por resistores e indutores, os circuitos RC são compostos por resistores e capacitores e os circuitos RLC são compostos por resistores, indutores e capacitores. A montagem dos circuitos pode ser feita de duas maneiras: em série ou paralelo.

Figura 4 – Circuito em Série



Fonte: elaborada pelo autor

Figura 5 – Circuito Paralelo



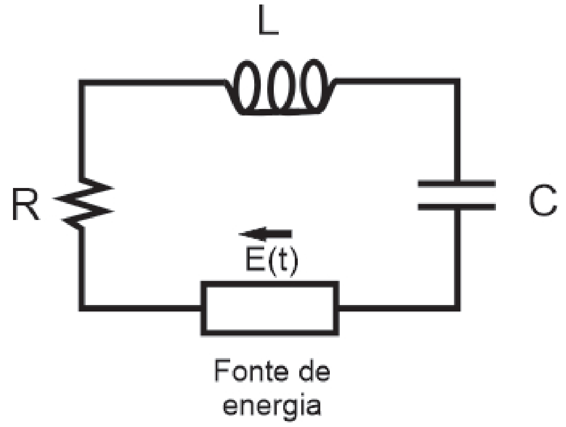
Fonte: elaborada pelo autor

Os circuitos em série apresentam características importantes: fornece apenas um caminho para a circulação da corrente elétrica, a intensidade da corrente é a mesma ao longo de todo o circuito em série e o funcionamento de qualquer dispositivo depende do funcionamento dos dispositivos restante. Diante disso, este trabalho abordará os circuitos RLC em série.

O circuito elétrico do tipo RLC representa uma unidade básica para a construção de diversos sistemas elétricos imprescindíveis no nosso dia a dia: televisão, rádio, controle remoto, máquina de lavar, GPS, e muitos outros aparelhos eletrônicos.

Considere o circuito da Figura 6, onde $E(t)$ é uma fonte de alimentação externa que libera uma corrente elétrica $I(t)$ que será conduzida através do circuito passando pelo resistor R, pelo capacitor C e pelo indutor L. Vamos modelar uma equação para determinar a corrente elétrica presente no circuito. Analisando a corrente elétrica em cada componente, temos que no

Figura 6 – Circuito em série com corrente elétrica



Fonte: elaborada pelo autor

resistor a queda de tensão é proporcional à intensidade da corrente, ou seja

$$E_R = R.I \tag{5.24}$$

onde R é a resistência elétrica (Ω). No indutor a queda de tensão é proporcional à taxa de variação da corrente em função do tempo, ou seja

$$E_L = L.\frac{dI}{dt} \tag{5.25}$$

onde L é a indutância (em henrys H). No capacitor a queda de tensão é proporcional a carga elétrica armazenada, ou seja

$$E_C = \frac{1}{C}.Q \tag{5.26}$$

onde C é a capacitância (Farad F).

Segundo a *lei de Kirchoff*, num circuito elétrico fechado, a tensão aplicada é igual a soma das quedas das tensões dos componentes, então

$$E(t) = E_R + E_L + E_C$$

e usando as equações (5.24), (5.25) e (5.26) temos

$$E(t) = R.I + L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}Q \tag{5.27}$$

A corrente elétrica é a quantidade de elétrons atravessando uma seção por unidade de tempo, ou seja, $I = \dfrac{dQ}{dt}$, então $\dfrac{dI}{dt} = \dfrac{d^2Q}{dt^2}$. Sendo assim, podemos reescrever a equação (5.27) de dois modos, com finalidades distintas. Se o objetivo for encontrar a carga do circuito usa-se a equação

$$\begin{aligned} L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{C}Q &= E(t) \\ LQ''+RQ'+\frac{Q}{C} &= E(t) \end{aligned} \tag{5.28}$$

no entanto, se o objetivo for encontrar a corrente usa-se a equação

$$\begin{aligned} L\frac{d^2I}{dt^2}+R\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}I &= \frac{dE(t)}{dt} \\ LI''+RI'+\frac{1}{C}I &= E'(t) \end{aligned} \tag{5.29}$$

É preciso destacar que as equações (5.28) e (5.29) têm relação entre si, uma vez que tendo a carga do circuito e derivando-a encontra-se a corrente e de posse da corrente e integrando-a encontra-se a carga.

Não é conveniente determinar as formas das soluções das equações (5.28) e (5.29), uma vez que a quantidade de valores que os coeficientes R, L e C podem assumir é imensa, além de que a função E também pode assumir várias formas. Então, basta-nos resolver alguns exemplos práticos do uso das equações (5.28) ou (5.29).

Exemplo 5.4 *Num circuito fechado do tipo RC, a resistência é 2Ω, a capacitância é de $0,01F$ e a carga inicial é zero. Um gerador fornece uma voltagem de $E(t) = 10\sin 60t$. Calcule a carga e a corrente no instante t.*

Solução:

Como o circuito não possui indutor, a equação (5.28) é escrita como

$$RQ'+\frac{Q}{C}=E(t)$$

e assim, substituindo os valores

$$\begin{aligned} 2Q'+\frac{Q}{0,01} &= 10\sin 60t \\ 2Q'+100Q &= 10\sin 60t \\ Q'+50Q &= 5\sin 60t \end{aligned}$$

obtendo uma equação diferencial linear de primeira ordem. Usando o método do fator integrante, temos que $\mu(t)=e^{50t}$, logo

$$\begin{aligned} e^{50t}.Q'+50Q.e^{50t} &= e^{50t}.5\sin 60t \\ (e^{50t}.Q)' &= e^{50t}.5\sin 60t \\ e^{50t}.Q &= 5\int e^{50t}.\sin 60t\,dt \end{aligned} \tag{5.30}$$

usando integração por partes, temos $u(t)=e^{50t}$, $dv=\sin 60t$, logo $du=50e^{50t}dt$ e $v=-\dfrac{\cos 60t}{60}$. Daí,

$$\begin{aligned}
\int e^{50t}.\sin 60t dt &= e^{50t}.\left(-\frac{\cos 60t}{60}\right)-\int -\frac{\cos 60t}{60}.50e^{50t}dt\\
\int e^{50t}.\sin 60t dt &= -\frac{e^{50t}.\cos 60t}{60}+\frac{50}{60}\int e^{50t}.\cos 60t dt
\end{aligned}$$

e novamente, fazendo a integração por partes, temos $u(t)=e^{50t}$, $dv=\cos 60t$, logo $du=50e^{50t}dt$ e $v=\dfrac{\sin 60t}{60}$,

$$\begin{aligned}
\int e^{50t}.\sin 60t dt &= -\frac{e^{50t}.\cos 60t}{60}+\frac{50}{60}\left(e^{50t}.\frac{\sin 60t}{60}-\int\frac{\sin 60t}{60}50e^{50t}dt\right)\\
\int e^{50t}.\sin 60t dt &= -\frac{e^{50t}.\cos 60t}{60}+\frac{50e^{50t}\sin 60t}{360}-\frac{2500}{3600}\int e^{50t}\sin 60t dt\\
\int e^{50t}.\sin 60t dt+\frac{2500}{3600}\int e^{50t}\sin 60t dt &= -\frac{e^{50t}.\cos 60t}{60}+\frac{50e^{50t}\sin 60t}{360}\\
\int e^{50t}.\sin 60t dt &= \frac{\frac{e^{50t}.\cos 60t}{60}+\frac{50e^{50t}\sin 60t}{360}}{\frac{6100}{3600}}\\
\int e^{50t}.\sin 60t dt &= \frac{60e^{50t}.\cos 60t}{6100}+\frac{500e^{50t}\sin 60t}{6100} \qquad (5.31)
\end{aligned}$$

Substituindo a equação (5.31) na equação (5.30), temos

$$\begin{aligned}
e^{50t}.Q &= 5\left(\frac{60e^{50t}.\cos 60t}{6100}+\frac{500e^{50t}\sin 60t}{6100}\right)\\
Q &= \frac{5}{e^{50t}}\left(\frac{60e^{50t}.\cos 60t}{6100}+\frac{500e^{50t}\sin 60t}{6100}\right)\\
Q &= \frac{3\cos 60t}{61}+\frac{25\sin 60t}{61} \qquad (5.32)
\end{aligned}$$

A carga Q é dada pela expressão $Q=\dfrac{3\cos 60t}{61}+\dfrac{25\sin 60t}{61}$. Para determinar a corrente I basta encontrar a derivada da equação (5.32), então

$$\begin{aligned}
\frac{dQ}{dt} &= \left(\frac{3\cos 60t}{61}+\frac{25\sin 60t}{61}\right)'\\
I &= \frac{180\cos 60t}{61}+\frac{1500\sin 60t}{61}
\end{aligned}$$

A corrente I é igual a $I=\dfrac{180\cos 60t}{61}+\dfrac{1500\sin 60t}{61}$.

Exemplo 5.5 *Num circuito fechado o resistor mede* $40\ \Omega$*, o indutor mede* $1H$ *e o capacitor mede* $16.10^{-4}F$*. A fonte de energia é de* $100\cos 10t$*. Sabendo que a carga e a corrente inicial eram zero, determine a carga Q em qualquer instante* $t>0$.

Solução: Para encontrar a equação que determina a carga, vamos usar o Teorema 4.6 e o Teorema 4.21. Vamos usar a equação (5.28), temos que $L=1$, $R=40$, $C=16.10^{-4}$ e $E(t)=100\cos 10t$, então temos que $Q''+40Q'+625Q=100\cos 10t$. O discriminante da equação $d=40^2-4.625=1600-2500=-900<0$, logo $k=\dfrac{\sqrt{-d}}{2}=\dfrac{-(-30)}{2}=15$. Temos $u_1(t)=\cos 15t$ e $u_2(t)=\sin 15t$ e $v_1(t)=e^{-20t}\cos 15t$ e $v_2(t)=e^{-20t}\sin 15t$. Calculando o Whonskiano, temos

$$\begin{aligned}
W(t) &= e^{-20t}\cos 15t\left(-20e^{-20t}\sin 15t+e^{-20t}15\cos 15t\right)-e^{-20t}\sin 15t\left(-20e^{-20t}\cos 15t+e^{-20t}15\sin\right.\\
W(t) &= -20e^{-40t}\cos 15t\sin 15t+15e^{-40t}\cos^2 15t+20e^{-40t}\cos 15t\sin 15t+15e^{-40t}\sin^2 15t\\
W(t) &= 15e^{-40t}\left(\cos^2 15t+\sin^2 15t\right)\\
W(t) &= 15e^{-40t}
\end{aligned}$$

Usaremos esses resultados para encontrar as funções s_1 e s_2.

$$\begin{aligned}
s_1(t) &= -\int e^{-20t}\sin 15t\frac{100\cos 10t}{15e^{-40t}}dt\\
s_1(t) &= -\frac{100}{15}\int e^{20t}\cos 10t\sin 15tdt\\
s_1(t) &= -\frac{100}{15}\int e^{20t}\frac{1}{2}\left(\sin(15t-10t)+\cos(15t+10t)\right)dt\\
s_1(t) &= \frac{100}{30}\left(\int e^{20t}\sin 5tdt+\int e^{20t}\sin 25tdt\right) \qquad (5.33)
\end{aligned}$$

Vamos calcular as integrais da equação (5.33) separadamente, usando integração por partes,

$$\begin{aligned}
\int e^{20t}\sin 5tdt &= e^{20t}\left(-\frac{\cos 5t}{5}\right)+\int\frac{\cos 5t}{5}20e^{20t}dt\\
\int e^{20t}\sin 5tdt &= -\frac{e^{20t}\cos 5t}{5}+4\int e^{20t}\cos 5tdt\\
\int e^{20t}\sin 5tdt &= -\frac{e^{20t}\cos 5t}{5}+4\left(\frac{e^{20t}\sin 5t}{5}-4\int e^{20t}\sin 5tdt\right)\\
\int e^{20t}\sin 5tdt &= -\frac{e^{20t}\cos 5t}{5}+\frac{4e^{20t}\sin 5t}{5}-16\int e^{20t}\sin 5tdt\\
\int e^{20t}\sin 5tdt+16\int e^{20t}\sin 5tdt &= -\frac{e^{20t}\cos 5t}{5}+\frac{4e^{20t}\sin 5t}{5}\\
\int e^{20t}\sin 5tdt &= -\frac{e^{20t}\cos 5t}{105}+\frac{4e^{20t}\sin 5t}{105} \qquad (5.34)
\end{aligned}$$

Agora, vamos resolver a segunda parcela da equação (5.33), a integral $\int e^{20t}\sin 25tdt$, usando sempre integração por partes de modo que $u=e^{20t}$, $dv=\sin 25tdt$, $du=20e^{20t}$ e

$v=-\dfrac{\cos 25t}{25}$, fazendo as substituições temos:

$$\begin{aligned}
\int e^{20t}\sin 25t dt &= -\frac{e^{20t}\cos 25t}{25}+\frac{4}{5}\int e^{20t}\cos 25t dt\\
\int e^{20t}\sin 25t dt &= -\frac{e^{20t}\cos 25t}{25}+\frac{4}{5}\left(\frac{e^{20t}\sin 25t}{25}+\frac{4}{5}\int e^{20t}\sin 25t dt\right)\\
\int e^{20t}\sin 25t dt &= -\frac{e^{20t}\cos 25t}{25}+\frac{4e^{20t}\sin 25t}{125}+\frac{16}{25}\int e^{20t}\sin 25t dt\\
\int e^{20t}\sin 25t dt-\frac{16}{25}\int e^{20t}\sin 25t dt &= -\frac{e^{20t}\cos 25t}{25}+\frac{4e^{20t}\sin 25t}{125}\\
\frac{9}{25}\int e^{20t}\sin 25t dt &= -\frac{e^{20t}\cos 25t}{25}+\frac{4e^{20t}\sin 25t}{125}\\
\int e^{20t}\sin 25t dt &= -\frac{e^{20t}\cos 25t}{9}+\frac{4e^{20t}\sin 25t}{45} \qquad (5.35)
\end{aligned}$$

Substituindo as equações (5.34) e (5.35) na equação (5.33), temos

$$\begin{aligned}
s_1(t) &= \frac{100}{30}\left(-\frac{e^{20t}\cos 5t}{105}+\frac{4e^{20t}\sin 5t}{105}-\frac{e^{20t}\cos 25t}{9}+\frac{4e^{20t}\sin 25t}{45}\right)\\
s_1(t) &= -\frac{2e^{20t}\cos 5t}{63}+\frac{8e^{20t}\sin 5t}{63}-\frac{10e^{20t}\cos 25t}{27}+\frac{8e^{20t}\sin 25t}{27} \qquad (5.36)
\end{aligned}$$

Vamos encontrar a função s_2:

$$\begin{aligned}
s_2(t) &= \int v_1(t).\frac{R(t)}{W(t)}dt\\
s_2(t) &= \int e^{-20t}.\cos 15t.\frac{100\cos 10t}{15e^{40t}}dt\\
s_2(t) &= \frac{100}{15}\int e^{20t}\cos 10t\cos 15t dt\\
s_2(t) &= \frac{100}{15}\int e^{20t}\frac{\cos 25t.\cos 5t}{2}dt\\
s_2(t) &= \frac{100}{30}\left(\int e^{20t}\cos 25t dt+\int e^{20t}\cos 5t dt\right) \qquad (5.37)
\end{aligned}$$

Calculando as parcelas, usando a integração por partes, temos

$$\begin{aligned}
\int e^{20t}\cos 25t dt &= \frac{e^{20t}\sin 25t}{25}-\frac{20}{25}\int e^{20t}\sin 25t dt\\
\int e^{20t}\cos 25t dt &= \frac{e^{20t}\sin 25t}{25}-\frac{20}{25}\left(-\frac{e^{20t}\cos 25t}{25}-\int -\frac{\cos 25t}{25}20e^{20t}dt\right)\\
\int e^{20t}\cos 25t dt &= \frac{e^{20t}\sin 25t}{25}+\frac{20e^{20t}\cos 25t}{625}-\frac{400}{625}\int e^{20t}\cos 25t dt\\
\int e^{20t}\cos 25t dt &= \frac{e^{20t}\sin 25t}{41}+\frac{20e^{20t}\cos 25t}{1025} \qquad (5.38)
\end{aligned}$$

Calculando a segunda parcela da equação (5.37) temos:

$$\begin{aligned}
\int e^{20t}\cos 5t &= \frac{e^{20t}\sin 5t}{5} - 4\int e^{20t}\sin 5t dt \\
\int e^{20t}\cos 5t &= \frac{e^{20t}\sin 5t}{5} - 4\left(-\frac{e^{20t}\cos 5t}{5} - 4\int e^{20t}\cos 5t dt\right) \\
\int e^{20t}\cos 5t &= \frac{e^{20t}\sin 5t}{5} + \frac{4e^{20t}\cos 5t}{5} - 16\int e^{20t}\cos 5t dt \\
\int e^{20t}\cos 5t &= \frac{e^{20t}\sin 5t}{105} + \frac{4e^{20t}\cos 5t}{105} \qquad (5.39)
\end{aligned}$$

Substituindo as equações (5.38) e (5.39) na equação (5.37), temos

$$\begin{aligned}
s_2(t) &= \frac{100}{30}\left(\frac{e^{20t}\sin 25t}{41} + \frac{20e^{20t}\cos 25t}{1025} + \frac{e^{20t}\sin 5t}{105} + \frac{4e^{20t}\cos 5t}{105}\right) \\
s_2(t) &= \frac{10e^{20t}\sin 25t}{123} + \frac{8e^{20t}\cos 25t}{123} + \frac{2e^{20t}\sin 5t}{63} + \frac{8e^{20t}\cos 5t}{63} \qquad (5.40)
\end{aligned}$$

De acordo com o Teorema 4.7, a solução particular dessa equação será

$$\begin{aligned}
q_1 &= e^{-20t}.\cos 15t\left(-\frac{2e^{20t}\cos 5t}{63} + \frac{8e^{20t}\sin 5t}{63} - \frac{10e^{20t}\cos 25t}{27} + \frac{8e^{20t}\sin 25t}{27}\right) + \\
&+ e^{-20t}\sin 15t\left(\frac{10e^{20t}\sin 25t}{123} + \frac{8e^{20t}\cos 25t}{123} + \frac{2e^{20t}\sin 5t}{63} + \frac{8e^{20t}\cos 5t}{63}\right) \\
q_1 &= \cos 15t\left(-\frac{2\cos 5t}{63} + \frac{8\sin 5t}{63} - \frac{10\cos 25t}{27} + \frac{8\sin 25t}{27}\right) + \\
&+ \sin 15t\left(\frac{10\sin 25t}{123} + \frac{8\cos 25t}{123} + \frac{2\sin 5t}{63} + \frac{8\cos 5t}{63}\right)
\end{aligned}$$

Desta forma, segundo o Teorema 4.6, a solução geral dessa equação é

$$\begin{aligned}
Q &= C_1e^{-20t}\cos 15t + C_2e^{20t}\sin 15t + \\
&+ \cos 15t\left(-\frac{2\cos 5t}{63} + \frac{8\sin 5t}{63} - \frac{10\cos 25t}{27} + \frac{8\sin 25t}{27}\right) + \\
&+ \sin 15t\left(\frac{10\sin 25t}{123} + \frac{8\cos 25t}{123} + \frac{2\sin 5t}{63} + \frac{8\cos 5t}{63}\right) \qquad (5.41)
\end{aligned}$$

Para encontrarmos a corrente, precisamos derivar a equação acima

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As abordagens feitas são de situações específicas e hipotéticas, pode-se dizer que, no caso do sistema massa mola, seria um experimento de laboratório, uma vez que as restrições foram muitas, e ainda assim, é notório a participação da modelagem matemática, especificamente do uso das equações diferenciais, no desenvolvimento das ciências.

A criação da moeda foi uma das responsáveis pelo grande desenvolvimento da humanidade, e daí veio a economia globalizada e a dependência da humanidade desse mercado financeiro, com uso de empréstimos, financiamentos, investimentos e sistemas de aposentadoria, a modelagem feita para juros pode ser aplicada nessas situações (feitas algumas adaptações). Os sistemas de amortecimento, para citar só dois exemplos, está presente em toda industria automobilística e na engenharia civil de regiões que têm incidência de terremotos. Os aparelhos eletrônicos possuem placas com inúmeros circuitos elétricos, e em qual lugar do mundo habitado não existe um aparelho eletrônico? Somente com essas três situações citadas, comprovamos o quão frequente é o uso de equações diferenciais em nosso cotidiano.

A modelagem matemática feita com equações diferenciais abrange muitas outras situações, em diversas áreas de estudo, podemos citar: crescimento populacional, resfriamento, movimento harmônico e potencial de contaminação de um vírus. A matemática está presente em todos os instantes de avanço e descobertas da humanidade.

REFERÊNCIAS

APOSTOL, T. M. **Calculus**. [*S. l.*]: Reverte Ediciones, 1992. v. 2.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C.; MEADE, D. B. **Equações diferenciais elementares e problemas de valor de contorno**. [*S. l.*: *s. n.*], 2020.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de fisica**: Gravitação, ondas e termodinâmica. 7th. ed. [*S. l.*]: LTC, 2006. v. 2.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de fisica**: Eletromagnetismo. 10th. ed. [*S. l.*]: LTC, 2016. v. 3.

STEWART, J. **Cálculo**. 7th. ed. [*S. l.*]: Cengage, 2013. v. 2.