UNIVERSIDADE FEDERAL DO TRIÂNGULO MINEIRO

KARINA VISCONDE MARTINS

ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA DURANTE A PANDEMIA DE COVID-19

UBERABA

2022

Karina Visconde Martins

Ensino de Análise Combinatória durante a pandemia de COVID-19

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, na Universidade Federal do Triângulo Mineiro – UFTM, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Adriana de Campos Inforzato

Uberaba

2022

Catalogação na fonte: Biblioteca da Universidade Federal do Triângulo Mineiro

	Martins, Karina Visconde
M343e	Ensino de análise combinatória durante a pandemia de COVID-19 / Karina Visconde Martins. -- 2022.
	110 f. : graf., tab.
	Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, MG, 2022
	Orientadora: Profa. Dra. Adriana de Campos Inforzato
	1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Análise combinatória. 3. Ensino médio – Avaliação. 4. COVID-19. 5. Tecnologia da informação. I. Inforzato, Adriana de Campo. II. Universidade Federal do Triângulo Mineiro. III. Título.
	CDU 51(07):519.1

Leila Aparecida Anastácio - CRB-6/2513

KARINA VISCONDE MARTINS

ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA DURANTE A PANDEMIA DE COVID-19

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática, área de concentração "Matemática" da Universidade Federal do Triângulo Mineiro como requisito parcial para obtenção do título de mestre.

Uberaba, 28 de junho de 2022

Banca Examinadora:

Dra. Adriana de Campos Inforzato – Orientadora
Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Dr. Leandro Cruvinel Lemes
Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Ma. Raquel Oliveira Bodart
Instituto Federal do Triângulo Mineiro

Reitoria/UFTM nº 87, de 17 de agosto de 2021.

Documento assinado eletronicamente por **ADRIANA DE CAMPOS INFORZATO**, **Professor do Magistério Superior**, em 01/08/2022, às 17:07, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020 e no art. 34 da Portaria Reitoria/UFTM nº 87, de 17 de agosto de 2021.

Documento assinado eletronicamente por **LEANDRO CRUVINEL LEMES**, **Professor do Magistério Superior**, em 02/08/2022, às 08:30, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020 e no art. 34 da Portaria Reitoria/UFTM nº 87, de 17 de agosto de 2021.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.uftm.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0789120** e o código CRC **11125460**.

Dedico esse trabalho aos meus pais, Dalva e Rilton (in memorian), por todo apoio e acolhimento.

AGRADECIMENTOS

Durante esses anos de muito estudo, esforço e empenho, algumas pessoas se fizeram importante durante a realização desse sonho e com isso não poderia deixar de agradecer a minha mãe, Dalva, por toda a confiança depositada em mim, por todo amor, apoio, acolhimento e paciência, de fato sem sua ajuda nada disso teria acontecido.

Ao meu pai, Rilton, que no meio desse percurso se foi, mas me acolheu sempre que precisei e não foi diferente durante essa jornada, o meu mais sincero obrigada!

Aos meus mais que companheiros de Mestrado, Rhaony e Patrícia, agradeço por cada segundo de ajuda e companheirismo, me fizeram acreditar que seria possível.

Agradeço também à minha orientadora Profa. Dra. Adriana de Campos Inforzato, por todo apoio, dedicação, tempo e paciência.

E por último, agradeço ao meu filho Vicente motivo de toda força e inspiração.

“Todas as vitórias ocultam uma abdicação”

Simone de Beauvoir

RESUMO

O presente trabalho apresenta a experiência de uma professora da Escola Estadual Pedro Nunes Rocha da cidade de Franca - SP durante as aulas "*on-line*", em razão ao afastamento social iniciado em março de 2020 devido a pandemia de COVID-19, em que, utilizou-se de mídias sociais e as Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs) para continuidade de suas atividades e de seus alunos durante o ano letivo. A presente pesquisa contém um estudo do percurso histórico do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e os métodos de correção, incluindo também, exercícios resolvidos de Análise Combinatória e, apresenta como esse conteúdo é abordado nos documentos que orientam e norteiam o ensino no país.

Palavra-chave: ENEM; COVID-19; ensino de matemática; TICs; análise combinatória

ABSTRACT

The present work shows the experience of a teacher from Pedro Nunes Rocha State School in the city of Franca - SP during "online" classes, during lock down started in March 2020 due to the COVID-19 pandemic. For this reason, social media and Information and Communication Technologies (ICTs) was used to continue their activities of students and teachers during the school year. The present research contains a study of the historical course of the National High School Exam (ENEM) and the methods of corrections. It also includes solved exercises of combinatorial analysis and shows how this content is addressed in the documents that guide the education system in the country.

Keyword: ENEM; COVID-19; Math teaching ; ICTs; combinatorial analysis

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) é o principal meio de acesso às universidades públicas e privadas e o mais acessível, pois é aplicado em quase todo o território brasileiro e gratuitamente para pessoas de baixa renda.

Em um estudo publicado por Garcia (2019), nota-se que 93% das 45 questões de Matemática da avaliação do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) de 2017 tiveram menos de 40% de acerto; e uma das questões, que abordava Análise Combinatória, obteve o menor índice de acerto, aproximadamente 5,2%.

Com o intuito de contribuir com a aprendizagem de Matemática, a presente pesquisa contém um estudo sobre as mudanças que ocorreram no ENEM, incluindo o método de correção, a Teoria de Resposta ao Item (TRI), com a finalidade de orientar e preparar os alunos para a realização da prova e facilitar a compreensão das diferentes notas obtidas por diferentes alunos.

Apresenta um levantamento das avaliações do ENEM dos anos de 2009 a 2019, especificamente das questões de Análise Combinatória, visa o entendimento de como esse conteúdo é abordado na prova, expõe ainda uma possível contribuição para o ensino desse conteúdo para que os alunos pudessem obter um melhor resultado nas avaliações externas.

Justifica-se a escolha do conteúdo Análise Combinatória, considerada um dos conteúdos mais difíceis no Ensino Médio tanto pelos alunos quanto por muitos professores os quais o justificam pela variedade de temas tratados nas interpretações (MORGADO *et al.*, 2020). A escolha se deveu ainda aos resultados obtidos na avaliação do ENEM de 2017.

Inicialmente, pretendia-se estudar as relações entre os acertos e os erros ocorridos em questões que envolviam Análise Combinatória e elaborar estratégias de ensino que pudessem colaborar com a construção dos conceitos envolvidos em tal tópico. Porém, em março de 2020 no Brasil, iniciou-se o afastamento social devido à pandemia de COVID-19, que exigiu do Poder Público tomadas de decisões rápidas e inéditas, instituindo o ensino remoto como estratégia para manter a rotina e diminuir os impactos negativos da aprendizagem nos alunos.

Em 2021, no Estado de São Paulo, as escolas foram abertas novamente, porém sem a obrigatoriedade da presença do aluno.

Diante dessa realidade, o presente trabalho registra as estratégias utilizadas na Escola Pedro Nunes Rocha da cidade de Franca do Estado de São Paulo no ensino de Matemática, de forma remota, durante a pandemia do COVID-19.

Inicialmente, para dar continuidade ao cronograma escolar em 2020, promoveu-se "*lives*" no Instagram para auxiliar os alunos nas atividades "*on-line*" e, posteriormente, com algum conhecimento das ferramentas de videoconferências, promoveu-se uma Oficina "*on-line*" para alunos do 9° ano do Ensino Fundamental à 3ª série do Ensino Médio, através do Google Meet. Com o retorno das aulas presenciais não obrigatórias em 2021, a Oficina de Análise Combinatória ocorreu novamente e esse registro será tratado nos capítulos seguintes.

O segundo capítulo, apresenta um estudo sobre as avaliações em larga escala no Brasil. Em seguida, discorre sobre a História do ENEM e as mudanças que ele sofreu ao longo do tempo, os fatores que levaram à criação da prova, o objetivo da aplicação, como é feita a correção dessa avaliação e encerra-se com o índice de acertos de cada item da prova de 2017 e o conteúdo abordado em cada item.

No terceiro capítulo, apresenta-se o conteúdo de Análise Combinatória, começando com as análises dos documentos da Educação. Explana-se também sobre a História de como esse conceito foi sendo construído. Em seguida, demonstra a resolução de exercícios de Princípio Aditivo e Multiplicativo, Permutação Simples, Combinação Simples, Arranjo Simples, Permutação Circular, Permutação com Repetição e Combinação Completa.

Já no quarto capítulo, contém um relato da experiência docente nesse momento de pandemia, relatando as dificuldades vividas nesse processo e suas escolhas feitas, e, por fim, dispõe as considerações finais.

2 AVALIAÇÕES EM LARGA ESCALA

Pouco mais de 40 anos após a Declaração Universal dos Direitos Humanos (1948) assegurar a educação como direito de todos de maneira gratuita nos níveis essenciais e fundamentais, ainda tínhamos mais de 100 milhões de crianças no mundo sem acesso à escola primária e mais de 960 milhões de adultos analfabetos, além de outros problemas que o mundo enfrentava como crise econômica, degradação do meio ambiente, entre outros.

Esses problemas, dificultaram o desenvolvimento da Educação Básica nos países menos desenvolvidos. Em países industrializados cortes no gasto público contribuíram para a decadência da educação e, mesmo em países com crescimento econômico, que concederam financiamentos educacionais, ainda havia milhões de pessoas sem acesso à escola ou analfabetas.

Nesse contexto, ocorreu em março de 1990 em Jomtien, na Tailândia, a Conferência Mundial sobre Educação para Todos, onde foi elaborado um documento o qual instituiu diretrizes e metas tanto de instrumentos essenciais para a aprendizagem como leitura, escrita, expressão oral, cálculo e solução de problemas, quanto conteúdos básicos de aprendizagem como conhecimentos, habilidades, valores e atitudes.

A partir daí, o Brasil estabeleceu um plano para a recuperação da escola fundamental no país, o Plano Decenal de Educação para Todos para o período de 1993 - 2003, surgindo assim a primeira avaliação em larga escala denominada Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB) que tinha como objetivo conhecer o sistema educacional brasileiro. Sua primeira aplicação ocorreu em 1990.

Conjuntamente, a Constituição de 1988, segundo Rabelo (2013), começa a dar suporte ao Brasil para iniciar as avaliações em larga escala, assegurando, em sua Carta Magna, a educação como um direito fundamental e tendo como princípio a garantia de padrão de qualidade.

Nesse sentido, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei n.° 9394/1996) complementou que a União fica responsável por

> “assegurar processo nacional de avaliação do rendimento escolar no ensino fundamental, médio e superior, em colaboração com os sistemas de ensino, objetivando a definição de prioridades e a melhoria de qualidade do ensino” (BRASIL,1996).

Sendo assim, o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), desde a sua criação em 1937, tinha como objetivo realizar estudos para identificar os problemas do ensino nacional e propor políticas públicas, contribuindo para o desenvolvimento econômico do país, sendo ele o responsável pela elaboração e aplicação das avaliações em larga escala para o desenvolvimento das pesquisas e análises sobre a educação no Brasil.

No entanto, como o nosso território nacional é muito extenso para a realização das avaliações em larga escala, faz-se necessário, ao longo dos anos, a criação de documentos de referências como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) e, agora, recentemente formulada, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), possibilitando assim comparabilidade entre essas avaliações.

Hoje, possuímos uma vasta experiência em avaliações em larga escala, que fomentam e orientam projetos governamentais para a melhoria do ensino como SAEB, Prova Brasil, Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), o Exame Nacional para Certificação de Competências de Jovens e Adultos (ENCCEJA), Exame Nacional de desempenho dos Estudantes (ENADE), entre outros.

2.1 PROCESSO HISTÓRICO DO EXAME NACIONAL DO ENSINO MÉDIO - ENEM

O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) foi implantado em 1998 e tinha como premissa avaliar o desempenho dos estudantes ao final da Educação Básica, possibilitando a elaboração de políticas públicas para a melhoria do ensino brasileiro. Um dos objetivos também era o de possibilitar uma autoavaliação dos estudantes, auxiliando e orientando os candidatos para o mercado de trabalho ou para continuação de seus estudos.

O ENEM é uma prova de natureza optativa, realizada anualmente pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), norteada pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), de 1996, pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN´s), pelas Diretrizes do Conselho Nacional de Educação sobre Educação Básica e Ensino Médio e pelos textos da reforma do Ensino Médio (1997). Desde a sua implementação o ENEM passou por significativas mudanças.

Segundo Brasil (2018), o ENEM, nos anos de 1998 a 2008, avaliava a proficiência de cada participante em 5 competências e 21 habilidades que constituem a matriz de referência, no Anexo A.

Nesse período, o ENEM era aplicado em um dia. A prova era constituída por três questões de cada habilidade, totalizando 63 questões objetivas, distintas em complexidade. Tinha um caráter interdisciplinar e de contextualização das várias áreas do conhecimento inerentes aos objetos estudados no Ensino Médio, utilizando uma abordagem de situações-problemas em suas avaliações.

Ao longo dos anos, notou-se um expressivo aumento de inscrições de candidatos, saltando de pouco mais de 157 mil inscritos em sua primeira edição para mais de 4 milhões de inscritos em 2008, sendo que, no questionário realizado na prova, 70% dos candidatos relataram terem como objetivo o ingresso no Ensino Superior.

Com isso, em 2009 o ENEM foi reformulado e novas atribuições lhe foram dadas, uma delas foi o papel de certificador do Ensino Médio, e, para isso, a matriz de referência também modificara-se, tendo base na matriz de referência do Exame Nacional de Certificação de Competências de Jovens e Adultos (ENCCEJA) e na matriz do próprio exame. Mas, em 2017, deixou de desempenhar esse papel, voltando a certificação ser responsabilidade do ENCCEJA.

A matriz de referência do ENEM agora é constituída de 5 eixos cognitivos básicos, que eram conhecidos como as 5 competências do antigo ENEM os quais foram modificados para incluírem Língua Inglesa e Espanhola. Esses eixos preveem que, ao final da escolarização, o jovem tenha um domínio de linguagens, compreensão dos fenômenos, enfrentamento de situações-problema, construção de argumentos e a elaboração de propostas.

Esses 5 eixos são comuns a todas as 4 áreas de conhecimento sendo elas:

- Linguagens, Códigos e suas Tecnologias (componentes curriculares: Língua Portuguesa, Literatura, Língua Estrangeira (Inglês ou Espanhol), Arte, Educação Física e Tecnologias da Informação e comunicação);
- Ciências da Natureza e suas Tecnologias (componentes curriculares: Química, Física e Biologia);
- Ciências Humanas e suas Tecnologias (componentes curriculares: História, Geografia, Filosofia e Sociologia);
- Matemática e suas Tecnologias (componente curricular: Matemática).

Cada uma dessas áreas do conhecimento possui suas competências e cada competência possui suas habilidades. São ao todo 30 habilidades para cada área do conhecimento. Os eixos cognitivos, as competências e suas habilidades, assim como os objetos de conhecimento relacionados à Matemática e suas Tecnologias estão no Anexo B.

A avaliação continua sendo pautada pela abordagem situação-problema, na qual o candidato deve colocar em prática os saberes cognitivos adquiridos durante os anos escolares.

Com essa reformulação, a organização dos dias de aplicação da prova também mudou. Antes as provas eram realizadas em apenas um domingo, mais comumente em agosto, e, em 2009, passam a ser aplicadas em dois dias seguidos: sábado e domingo. Passam a ser compostas por 180 questões objetivas, 45 para cada área do conhecimento e mais uma redação dissertativa-argumentativa. Em 2017, após uma consulta pública, o ENEM passa a ser aplicado em dois domingos consecutivos, sendo mais comum no mês de novembro.

São aplicadas quatro provas de cada área distinta, apenas nas ordens dos itens. No primeiro dia de aplicação, os candidatos são avaliados nas áreas de Linguagens Códigos e suas Tecnologias, Ciências Humanas e suas Tecnologias e a Redação. No segundo dia, são avaliados em Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Matemática e suas Tecnologias.

Uma outra grande mudança, que ocorreu no ENEM, é o método de correção, que antes era feita pela Teoria Clássica dos Testes (TCT), onde a nota do aluno era dada calculando o número de acertos. Hoje a correção da prova é feita através da Teoria de Resposta ao Item (TRI), onde dois candidatos podem ter o mesmo número de acertos, porém notas diferentes, pois a nota é dada em função da coerência das respostas de cada um, ou seja, se um dos candidatos acertar mais questões difíceis de uma competência ou habilidade e errar as fáceis isso é tido como uma incoerência nas respostas, logo sua nota é mais baixa que um candidato que acerta questões fáceis e médias e erra questões difíceis.

Devido a uma expansão do número de instituições de ensino utilizando o ENEM como forma de acesso aos seus diversos cursos, e muitos candidatos usando a avaliação para essa finalidade, o ENEM passa a ser uma das maiores porta de ingresso ao nível superior, principalmente para aqueles que não têm poder aquisitivo para realizar vestibulares ao longo do País.

Com isso, o ENEM passa a desenvolver um importante papel junto ao Sistema de Seleção Unificada, o SISU, criado em 2009 para o acesso dos alunos a Educação Superior, onde as Universidades através desse sistema, disponibilizam o número de vagas de cada curso oferecido e os alunos são selecionados de acordo com o seu desempenho no ENEM.

O ENEM, ainda, é utilizado como critério de seleção para o Programa de Financiamento Estudantil (FIES) e para o Programa Universidade para Todos (PROUNI), sendo o primeiro, um programa de financiamento estudantil para alunos da graduação de Universidades que não são gratuitas e o outro, um programa de concessão de bolsa integral ou parcial.

2.2 TEORIA DE RESPOSTA AO ITEM (TRI)

A Teoria de Resposta ao Item (TRI) é um conjunto de modelo matemático que consiste em procurar representar a probabilidade de um indivíduo de dar uma resposta correta a um item, relacionando variáveis não observáveis ou traço latente do indivíduo a variáveis observáveis, ou seja, as respostas aos itens de um teste.

Esse modelo de correção surgiu entre os anos 50 e 60 devido à necessidade de se constituir testes de inteligência onde os resultados não se divergiam de acordo com o método de instrumento utilizado. Constituído por um modelo matemático complexo, esse teste começou a ser difundido apenas na década de 80 a partir do desenvolvimento de “softwares”.

A primeira prova a utilizar o TRI como método de correção foi a prova SAEB em 1995, em seguida o ENCCEJA, depois a Prova Brasil e, em 2009, o ENEM passou a utiliza-lo, o que permitiu segundo Rabelo (2013), “a discriminação dos itens, fidedignidade dos testes e comparabilidade de desempenho de indivíduos que se submetem a testes diferentes”, havendo um ganho em comparação à utilização da Teoria Clássica dos Testes (TCT), onde resultado é restrito aos candidatos que realizam determinado teste, dificultando assim, o acompanhamento pedagógico e uma análise do desempenho ao longo dos anos.

Na TCT, as análises e as interpretações são relativas à prova como um todo, o resultado é dado a partir de uma pontuação de números de acertos da prova e só podemos comparar as notas de indivíduos que realizaram a mesma prova. Nesse modelo, candidatos podem ter a mesma nota, porém acertado questões com níveis e habilidades diferentes. A TCT não deve ser descartada como método de correção, mas deve ser utilizada como um complemento entre os métodos.

Já na TRI, os elementos centrais são os itens, o resultado é estimado por um modelo estatístico e os candidatos e os itens são colocados em uma escala comum, permitindo a comparação dos resultados mesmo quando os candidatos são submetidos a provas distintas, desde que haja, nessas avaliações, itens de ligação.

Um item é uma unidade fundamental de um exame ou de uma avaliação, que serve para coleta de dados e informações. No caso do ENEM, os itens são as questões que testam as competências e habilidades dos candidatos.

Para a elaboração desses itens, são chamados vários pesquisadores e educadores e, para sua construção deve ser observada a unidimensionalidade, a qual garante apenas uma habilidade dominante em um item, e independência local, quando o desempenho em um determinado item não influencia no desempenho de outro item.

Após a construção, os itens vão para um banco e são submetidos a um pré-teste em que o nível de cada item é calculado de acordo com o desempenho dos respondentes, quanto maior o número de acertos, menor o peso que ele terá na prova e quanto menor o número de acertos maior o peso.

O TRI, usado para análise do ENEM, possui um modelo dicotomizado, ou seja, que assume dois valores (certo ou errado), constituído de um modelo logístico de três parâmetros (modelo 3LP), que permite estimar o nível de aptidão ou traço latente do indivíduo a partir de uma relação que fornece a probabilidade de um respondente acertar um item em função de sua habilidade. Os três parâmetros são: o poder de discriminação de um item, o grau de dificuldade e o acerto ao acaso.

A discriminação é dada pela capacidade do item de diferenciar indivíduos com habilidades ou proficiências distintas.

A dificuldade do item consiste na habilidade que cada candidato precisa ter para ter uma probabilidade maior de responder corretamente o item, para isso, a dificuldade do item e a proficiência são colocadas na mesma escala.

O acerto ao acaso, nesse modelo, representa as respostas dadas aleatoriamente, isso costuma ocorrer com itens com maior dificuldade em que o candidato não possui a habilidade aferida e arrisca uma resposta.

O que se espera estimar com o TRI é a probabilidade de um candidato acertar um item e isso depende do seu nível de proficiência (θ), das características dos itens como dificuldade (b), da discriminação (a) e do acerto ao acaso (c), em que a, b e c constituem os três parâmetros. Sendo assim a probabilidade de um indivíduo j responder corretamente um item i é dada por:

$$P\left(X_{ji} = 1 \middle| \theta_j\right) = c_i + \frac{(1 - c_i)}{1 + e^{-Da_i(\theta_j - b_i)}}$$

no qual

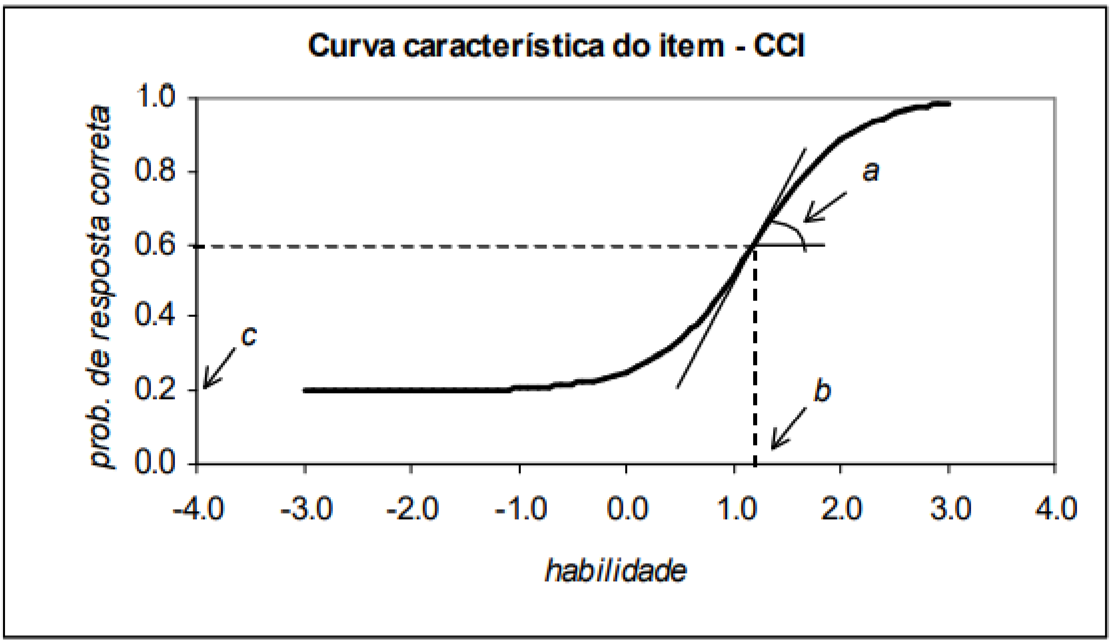
- X_{ji} é a resposta do indivíduo j ao item i, variável dicotômica que será igual a 1, se o indivíduo responde corretamente, e igual a 0, se erra;
- $a_i > 0$ é o parâmetro de discriminação do item i; com valor proporcional à Curva Característica do Item no ponto b_i.
- b_i é o parâmetro de posição ou dificuldade do item, medido na mesma escala da habilidade;
- $0 < c_i < 1$ é o parâmetro da assíntota inferior do item i, refletindo as chances de um estudante de proficiência muito baixa selecionar a opção de resposta correta.
- θ_j representa a habilidade do $j - ésimo$ indivíduo;
- D é um fator de escala, que é igual a 1 na métrica logística e igual a 1,7 na métrica normal.
- $P\left(X_{ji} = 1 \middle| \theta_j\right)$ é a probabilidade do indivíduo j com habilidade θ_j responder corretamente o item i.

A probabilidade dada por $P\left(X_{ji} = 1 \middle| \theta_j\right)$ pode ser identificada como a proporção de respostas corretas a um item i dos indivíduos j que possuem determinada habilidade θ. Segundo Andrade (2000), o “modelo proposto baseia-se no fato de que indivíduos com maior habilidade possuem maior probabilidade de acertar o item e que esta relação não é linear”.

2.2.1 Curva Característica do Item (CCI)

A relação entre os parâmetros e a $P(X_{ji} = 1|\theta_j)$ é descrita pela Curva Característica do Item (CCI) expressa no Gráfico 1. Podemos notar que o gráfico representa uma curva, sigmoide em “S” com duas assíntotas horizontais.

Gráfico 1 - Curva Característica do Item



Fonte: Andrade, 2000.

A CCI indica o poder de discriminação do item de acordo com a inclinação da curva, quanto maior o parâmetro a, mais íngreme será a curva e mais discriminativo será o item e, quanto mais achatada a curva, menos discriminativo será o item.

Como vimos, a discriminação, parâmetro a, é referente à capacidade de diferenciar um indivíduo com habilidade ou competências diferentes. Na CCI, a discriminação é dada a partir de um valor proporcional à inclinação da curva no ponto de inflexão.

Se o parâmetro a for muito elevado, o item discriminará os candidatos em apenas dois grupos os que possuem e os que não possuem determinada habilidade aferida no item, no caso do valor do parâmetro se aproximar de zero, indivíduos que possuem ou não a habilidade em questão têm a mesma probabilidade de acertar o item. Itens com o parâmetro a negativo não são esperados nesse modelo, pois indicaria que quanto maior habilidade do respondente menor a probabilidade de acerto. Os itens considerados mais discriminativos são aqueles que possuem valores maiores que 0,70. Segundo Rabelo (2013), alguns autores categorizam os itens de acordo com as seguintes faixas:

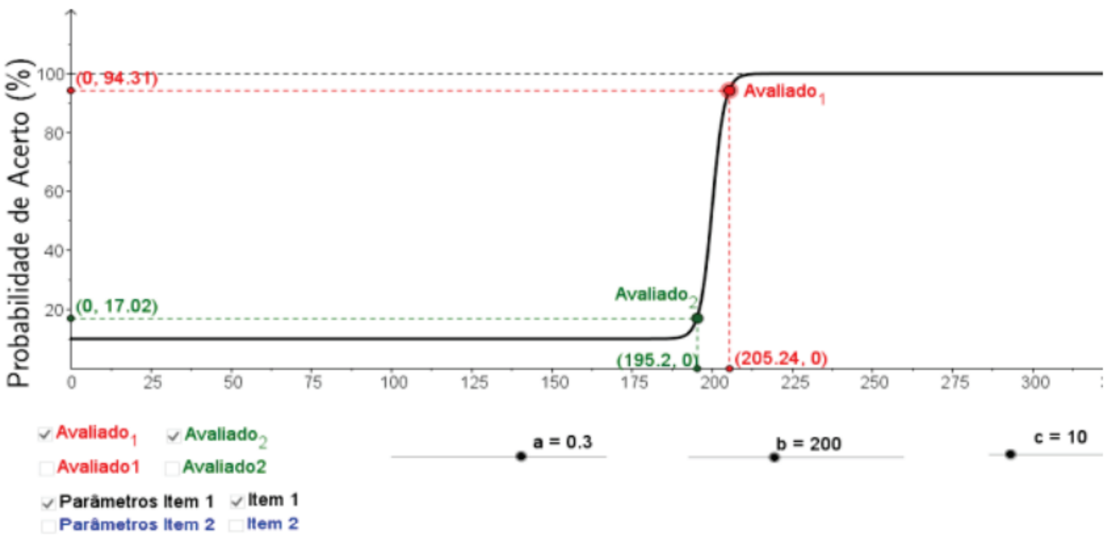
Tabela 1- Classificação dos itens quanto à discriminação na TRI

Valores	Discriminação
a = 0	Nenhuma
0,0 < a ≤ 0,35	muito baixa
0,35 < a ≤ 0,65	Baixa
0,65 < a ≤ 1,35	Moderada
1,35 < a ≤ 1,70	Alta
a > 1,70	muito alta

Fonte: Rabelo, 2013

Por exemplo, nos Gráficos 2 e 3, pode-se notar que quanto maior o valor do parâmetro a maior a probabilidade de acerto, ou seja, quanto maior a proficiência maior a chance de o indivíduo acertar ao item. Sendo assim, para os valores de a menores, candidatos com proficiência distintas possuem probabilidade de acerto bem próximo.

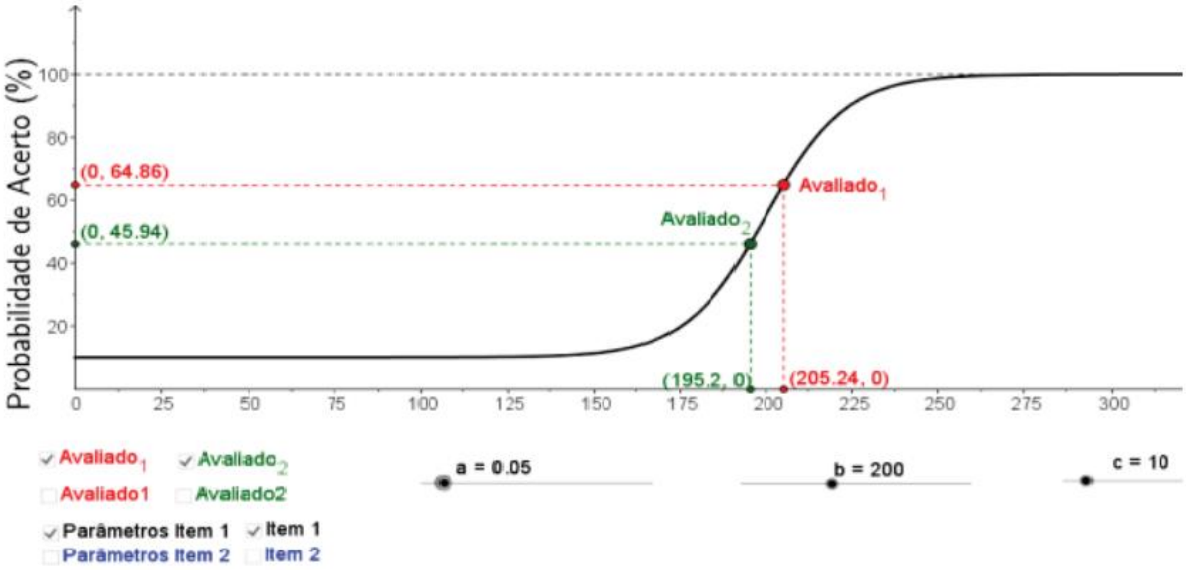
Gráfico 2 – CCI para um item com parâmetro $a = 0{,}3$



Fonte: Carlos, 2016

Observa-se que, para o item 1, foram mantidos os parâmetros da dificuldade ($b = 200$) e o acerto ao acaso ($c = 10$). O nível de proficiência dos avaliados também foi mantido. O Avaliado 1 possui proficiência igual a 195,2 e o Avaliado 2 possui proficiência igual a 205,24, sendo a diferença de proficiência entre os avaliados, igual a 10. Tem-se que, quando o valor do parâmetro a é maior a diferença entre as probabilidades de acerto é igual a 77,9% (94,31 – 17,02) e quando o valor do parâmetro a é menor essa diferença cai para 18,92% (64,86 – 45,94). Nesse caso, o segundo item é menos adequado para diferenciar o aluno que sabe do aluno que não sabe (Carlos, 2016).

Gráfico 3 – CCI para um item com parâmetro $a = 0{,}05$



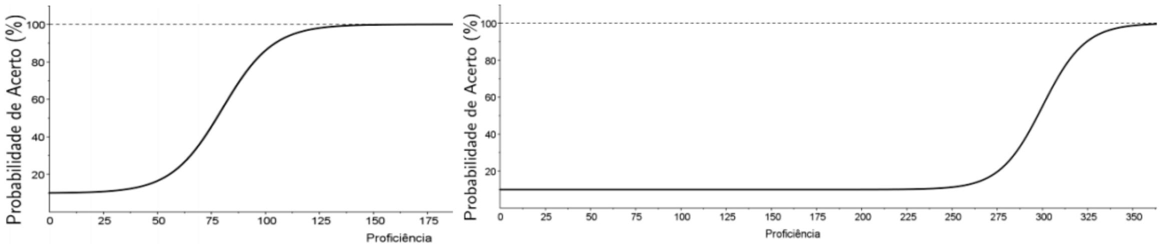
Fonte: Carlos, 2016

Elaborar um item discriminativo não é tarefa fácil, além do mais, não é possível estabelecer a discriminação de um item antes do teste, no entanto, sabe-se que itens de média dificuldade têm maiores chances de discriminar do que itens muito fáceis ou muito difíceis.

O parâmetro b é definido como o nível mínimo de proficiência que um respondente precisa possuir para ter uma chance alta de acertar a resposta, ou seja, a habilidade necessária para obter uma probabilidade de acerto igual a $\frac{(1+c)}{2}$. Desta maneira, se traçar uma reta horizontal no nível de probabilidade igual a esse valor e fazendo a interseção com a CCI, encontra-se o θ correspondente. Tem-se que, quanto maior o valor de b, maior será a dificuldade do item, vice e versa.

Na CCI representada no gráfico 4, verifica-se que, quanto maior o valor do parâmetro b, a curva se desloca mais para a direita e o nível de proficiência é maior.

Gráfico 4 – CCI para o parâmetro b



Fonte: Carlos, 2016

Nota: à esquerda o gráfico possui parâmetro $b = 80$ e à direita o gráfico possui o parâmetro $b = 300$.

Nota-se que o candidato que possui a proficiência maior que o valor do parâmetro b do item, possui uma maior probabilidade de acertar o item.

Tanto o nível de dificuldade e quanto a habilidade, na teoria, varia entre $\pm\infty$, porém, na prática, utiliza-se como referência os valores entre -3 e 3, pelo fato de que 97% dos casos situam-se nesse intervalo. Itens, cujo parâmetro b estão próximos de -3, são considerados fáceis e próximos de +3, difíceis. Fora desse intervalo, os itens são excluídos. A escala média nesse caso é zero com desvio-padrão igual a 1, comumente representada por (0,1).

No ENEM, o valor de referência da escala é 500 com desvio padrão igual a 100, representada por (500,100). O valor de referência dessa escala de proficiência representa o desempenho médio dos participantes concluintes do Ensino Médio Público que realizaram a prova em 2009. Por exemplo, um estudante com desempenho em Matemática igual a 650 está a 150 desvio-padrão da média.

Segundo Andrade,

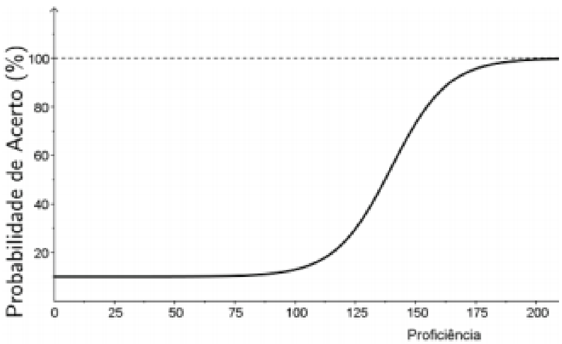
> a probabilidade de um indivíduo responder corretamente a um certo item é sempre a mesma, independente da escala utilizada para medir a sua habilidade, ou ainda, a habilidade de um indivíduo é invariante à escala de medida. Assim, não faz qualquer sentido querermos analisar itens a partir de seus parâmetros a e b sem conhecer a escala na qual eles foram determinados. (Andrade, 2000)

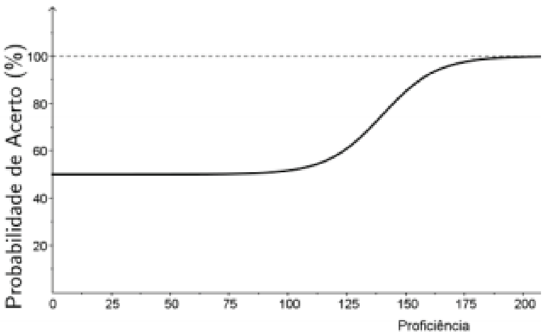
O parâmetro c representa a probabilidade de um indivíduo, com baixa habilidade, responder corretamente um item, logo, por se tratar de uma probabilidade, esse parâmetro possuirá valores entre 0 e 1.

Na CCI, o parâmetro c corresponde ao ponto em que a assíntota horizontal inferior intercepta o eixo das probabilidades. Espera-se que para uma questão com cinco opções de escolha o parâmetro c seja inferior a 0,20, pois, se o valor for muito superior, pode indicar que a resposta correta se destaca das demais, fazendo com que indivíduos com baixa habilidade sejam atraídos pela resposta correta.

Observe o gráfico abaixo com parâmetro c distintos, nota-se que itens com o parâmetro c elevado não são adequados.

Gráfico 5 – CCI para o parâmetro c





Fonte: Carlos, 2016

Nota: à esquerda o gráfico possui parâmetro $c = 10$ e à direita o gráfico possui parâmetro $c = 50$

2.2.2 Escala de Proficiência

Após a avaliação, o estudante recebe o boletim do desempenho, onde consta o desempenho do estudante nas quatro áreas de conhecimento e, dessa forma, pode comparar quantitativamente seu desempenho com os outros participantes que se submeteram ao exame.

Esse desempenho, além de nos trazer informações quantitativas, também traz informações qualitativas e, para atribuir um significado à nota dos participantes, utiliza-se a TRI em um processo de interpretação pedagógica das escalas de proficiência.

A construção dessa escala de proficiência é obtida a partir da calibração dos itens das provas por intermédio do modelo da TRI. Calibrar um item significa identificar os parâmetros (discriminação, dificuldade e acerto ao acaso), realizado através de técnicas estatísticas de estimação, com o auxílio de “softwares” específicos, como o BILOG, BILOG-MG, entre outros. Esses softwares manipulam matrizes extensas, pois nelas constam as respostas de todos os itens e de todos os candidatos. No presente trabalho, não aprofundará nas técnicas estatísticas para o cálculo dos parâmetros. Para uma pesquisa mais aprofundada sobre o tema têm-se alguns trabalhos como o do Andrade, Tavares e Valle (2000) e Rabelo (2013).

O processo de interpretação pedagógica das escalas, consiste em dois procedimentos: o primeiro é a identificação de “itens âncoras” pertencentes a cada nível da escala e o outro procedimento é a apresentação desses itens a um painel de especialistas para interpretarem pedagogicamente o desempenho observado após a aplicação do teste, sendo esse o grande ganho da TRI em relação a TCT, em que não só localiza os indivíduos na escala de proficiência, mas também os itens.

Esses itens principais ou itens âncoras são itens que pertencem a um determinado ponto da escala no qual 65% dos candidatos, que possuem essa habilidade, acertam esses itens e menos de 65% dos alunos posicionados no nível anterior também acertam o item, e o ajuste da curva CCI é bom.

Consta, no Anexo D, um exemplo da escala de proficiências do ENEM, conhecida como mapa de itens. Esse mapa foi construído, utilizando os itens das edições do ENEM desde 2009 que permite, aos participantes, visualizar as habilidades que já desenvolveram e as que ainda não desenvolveram de acordo com a localização de sua proficiência no mapa.

O próximo capítulo apresenta uma análise da avaliação do ENEM de 2017, ponderando o objeto de conhecimento e quantidade de acertos dos itens.

2.3 ANÁLISE DOS ÍNDICES DE ACERTO DOS ITENS DA PROVA 2017

Todo ano são disponibilizados, no site do INEP, os microdados que contêm informações educacionais referentes às avaliações pelas quais o INEP é responsável, permitindo acesso a informações mais específicas para análises mais profundas por parte de pesquisadores, professores, gestores públicos etc.

Nos microdados do ENEM, estão contidas informações sobre a prova como o número da inscrição, ano da avaliação, sexo e cor dos candidatos, localização dos candidatos por municípios, estados e região, notas, gabaritos dos participantes, gabarito da avaliação, código das escolas, entre outras.

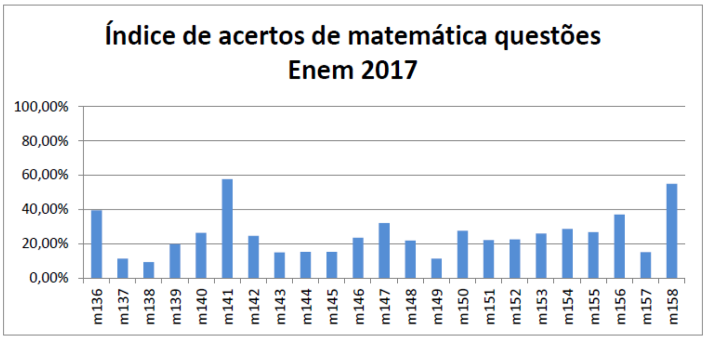
Na presente pesquisa, explorar-se-ão as respostas dos candidatos na prova do ENEM, realizada em 2017, relativa à área de conhecimento de Matemática e suas

Tecnologias, dos alunos oriundos da rede pública não treineiros. Tais dados foram coletados por Garcia (2019), que utilizou recursos computacionais não convencionais devido ao grande volume de dados.

Segundo Garcia (2019), a avaliação do ENEM 2017 abrangeu 99% dos municípios do Brasil, correspondendo a 5.558 municípios, totalizando 23.072 escolas.

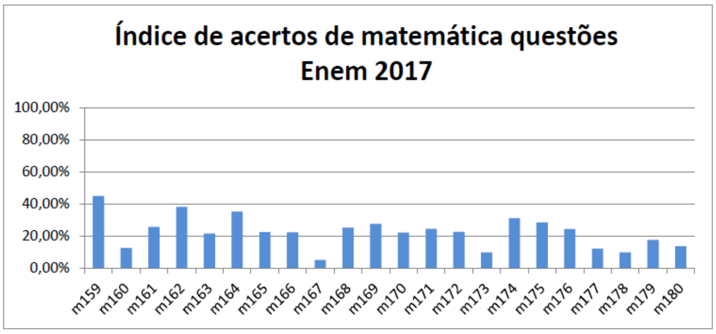
Para a confecção dos índices de acertos, utilizou-se a prova amarela do componente de Matemática, contida no anexo C, do ano de 2017.

Gráfico 6 – Índice de Acertos de Matemática no ENEM 2017 (Itens 136 a 158)



Fonte: Garcia, 2019
Nota: Porcentagem de acerto dos itens 136 ao 158

Gráfico 7 - Índice de Acertos de Matemática no ENEM 2017 (Itens 159 a 180)



Fonte: Garcia, 2019

Nota: Porcentagem de acerto dos itens 159 a 180

De acordo com os Gráficos 6 e 7, nenhum item teve um percentual de acerto maior ou igual a 60%. Percebe-se também que o item com o menor índice de acerto é a questão 167, que, segundo o Garcia (2019), teve 58 000 acertos, em torno de 5,2% e mais de um milhão de erros.

A partir desses gráficos, construiu-se uma tabela na qual separamos os itens em 3 grupos. Os grupos são compostos por: itens que tiveram 0% a 20% de acertos, questões em que tiveram 20% a 40% dos acertos e as questões em que tiveram 40% a 60% dos acertos. Em cada uma das tabelas indica-se também o Objeto de Conhecimento abordado em cada item.

Ao analisar a Tabela 2, nota-se que esse primeiro grupo é composto por 15 questões, ou seja, um terço da prova, aproximadamente 33% é pouco dominada pelos participantes, sendo que duas questões abordam Análise Combinatória, representando 13% das questões com menos porcentagem de candidatos que acertaram.

Tabela 2 - Questões do ENEM 2017 de Matemática que tiveram entre 0% e 20% de candidatos que acertaram.

Itens	**Objeto de Conhecimento**
137	Posição relativa entre duas circunferências
138	Equação do 1° grau
139	Cubo/Paralelepípedo
143	Razão e Proporção
144	Aumento Percentual
145	Logaritmo
149	Permutação/Combinação com elementos repetidos
157	Círculo e circunferência
160	Cônica
167	Princípio Fundamental da Contagem
173	Análise de Gráfico e Tabela
177	Leitura de Gráficos/Gráfico de setores e porcentagem
178	Leitura de Gráfico/Razões e proporções
179	Função Trigonométrica/Função Cosseno
180	Esfera

Fonte: Elaborada pela autora, 2022

Já o segundo grupo, contido na Tabela 3, é constituído por 27 questões, contemplando 60% da prova, sendo que a porcentagem do índice de acerto está entre 20% e 40%. Dentro desse grupo, encontra-se um item abordando a Análise Combinatória.

Tabela 3 - Questões do ENEM 2017 de Matemática que tiveram acertos entre 20% e 40%

Itens	**Objeto de Conhecimento**
136	Leitura de Gráficos
140	Análise Combinatória
142	Probabilidade Condicional
146	Ciclo Trigonométrico
147	Rotação
148	Medidas para dados simples/Média Ponderada
150	Paralelepípedo
151	Leitura e Interpretação de Gráficos e Tabelas
152	Operações com Números Naturais
153	Redução Porcentagem/Equação do 1° grau
154	Prisma
155	Probabilidade
156	Leitura e Interpretação de Gráficos
161	Operações com Decimais
162	Razão entre Grandezas
163	Triângulos/Lei dos Cossenos
164	Operações Básicas em Racionais
165	Razão e Proporção
166	Razão e proporção
168	Função do 2° grau/Vértice da Parábola
169	Operações com Números Naturais e Decimais
170	Medidas para Dados Simples/Mediana
171	Probabilidade
172	Operações com Números Naturais
174	Operações com Números Inteiros
175	Círculo e Circunferência/Comprimento da Circunferência
176	Função Quadrática

Fonte: Elaborada pela autora, 2022

A Tabela 4 é composta apenas por 3 questões, aproximadamente 7% da prova, sendo que apenas duas delas obtiveram um índice de acerto maior que 50% e uma delas também é sobre Análise Combinatória. Porém, ela pode ser resolvida, construindo uma sequência numérica apenas observando os dados contidos na tabela apresentada no item, podendo ser esse o fato de que, o item abordando esse tema, teve uma porcentagem maior de acertos.

Tabela 4 - Questões do ENEM 2017 que tiveram acertos entre 40% e 60%

Itens	**Objeto de Conhecimento**
141	Análise Combinatória
158	Operações com Números Naturais/ Localização/Deslocamento
159	Medidas de Tendência Central/Média Aritmética

Fonte: Elaborada pela autora, 2022

Para a construção de uma avaliação coerente, institui-se, segundo Pasquali *apud* Rabelo (2013) que, em uma avaliação, precisa de “10% dos itens em cada uma das duas faixas extremas, 20% em cada uma das seguintes faixas e 40% na faixa média”. No entanto, para testes de Matemática, segundo Rabelo (2013), os itens apresentam tendência de índice de dificuldade um pouco mais elevada, tornado mais difícil a tarefa de atender as faixas indicadas na tabela.

Tabela 5 - Classificação e percentual esperado para índices de dificuldade na TRI

Classificação	Valores de b	% esperado
Muito fáceis	até -1,28	10%
Fáceis	de -1,27 a - 0,52	20%
Medianos	de -0,51 a 0,51	40%
Difíceis	de 0,52 a 1,27	20%
Muito difíceis	1,28 ou mais	10%

Fonte: Elaborado pela autora, 2022

Apenas com esses dados, restringe-se a comparação com as questões da avaliação do ENEM em cada uma das 5 classificações da tabela acima, além, de restringir também, uma análise mais profunda, porém, nota-se que, num aspecto geral, a maioria dos itens fica abaixo dos 40% de acerto, perfazendo cerca de 93% dos itens.

Algumas questões com menos acertos são problemas que envolvem métodos de Contagem e uma das causas desse desempenho poderia ser que requer um nível maior de interpretação e compreensão. O mesmo ocorre com itens de leitura e interpretação de gráficos e tabelas, onde o nível de acerto de alguns itens também é muito baixo.

3 ANÁLISE COMBINATÓRIA

A Análise Combinatória é a parte da Matemática que nos permite contar elementos de um conjunto finito sob uma determinada condição para esses elementos. Dispondo de um com um conjunto pequeno, o estudo desse conceito pode ser considerado desnecessário, porém, torna-se inviável a resolução de problemas com conjuntos maiores sem as ferramentas estudadas no campo da combinatória (MORGADO *et al.*, 2020).

De acordo com Morgado *et al.* (2020), para muitos estudantes a Análise Combinatória é conhecida apenas pelo estudo de Combinação, Arranjo e Permutação, no entanto, esses conceitos permitem resolver uma parte dos problemas de Análise Combinatória, os de contagem de elementos de um subconjunto, de um conjunto finito, sem ser necessário enumerar esses elementos. Contudo, ainda temos outros tipos de problemas de contagem que se utilizam de outros meios para a sua resolução, como o princípio da inclusão-exclusão, função geradora, o princípio das gavetas, conhecido também como princípio da casa dos pombos, que parte de um conceito simples, mas que resolve problemas difíceis de contagem, entre outras ferramentas.

Os problemas de Análise Combinatória exigem dos alunos uma alta compreensão da situação abordada, todavia, ensinar esse conteúdo, apresentando situações repetidas e padronizadas sem enunciar as várias faces dos problemas de combinatória, faz com que o ensino fique restrito à resolução de exercícios com fórmulas difíceis.

Na próxima seção, explorar-se-ão os documentos inerentes à educação, para uma possível reflexão sobre o ensino aprendizagem da Análise Combinatória.

3.1 ABORDAGEM DA ANÁLISE COMBINATÓRIA NO PCN E NA BNCC

Nas décadas de 60/70, o ensino de Matemática nas escolas era focado na formalidade e no rigor dos fundamentos da teoria dos conjuntos e da álgebra, movimento que ficou conhecido como Matemática Moderna. Entretanto, esse modelo não atingia todos os alunos, principalmente alunos do Ensino Fundamental. Para tentar sanar as dificuldades encontradas da época, na década de 80 os pesquisadores da área começaram a introduzir recursos como a Resolução de Problemas, História da Matemática, Tecnologias da Informação e Jogos para ensinar Matemática no

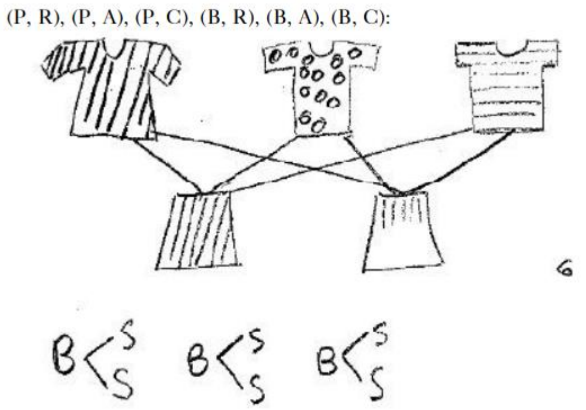
Ensino Fundamental, temas muito abordados no Parâmetro Curricular Nacional (PCN), documentos que norteiam o ensino no país assim como a Base Nacional Curricular Comum (BNCC).

O PCN para o Ensino Fundamental foi elaborado nos anos de 1997 para os ciclos I e II (1ª a 4ª série) e 1998 para os ciclos III e IV (5ª a 8ª série), o Parâmetro Curricular Nacional do Ensino Médio (PCNEM) foi elaborado em 2000, um documento complementar referente ao Ensino Médio, o PCN+, foi elaborado em 2002 e mais recente temos, a BNCC de 2018 que tem caráter obrigatório diferente dos PCN´s.

Nota-se que as habilidades referentes à Análise Combinatória não estão contidas no PCN dos ciclos I e II, mas, encontra-se nas Orientações Pedagógicas referentes aos significados das operações de Multiplicação e Divisão o Princípio da Contagem, pois faz parte de um dos elementos dos 4 grupos das ideias associadas a essas operações.

O exemplo utilizado para a multiplicação está associado à quantidade de combinações distintas que pode-se ter para nos vestir, possuindo duas saias (uma preta (P) e uma branca (B)) e três blusas (uma rosa (R), uma azul (A) e uma cinza (C)). Em seguida, apresenta possibilidades de respostas para o aluno chegar no resultado, nesse caso, o exemplo utilizado é o diagrama indicado na figura abaixo.

Figura 1: Possibilidades de respostas para a ideia associada à multiplicação



Fonte: Brasil, 1997

E finaliza mostrando que, para encontrar o número de maneiras para se vestir basta multiplicar o número de saias pelo número de blusas logo, $2.3 = 6$ maneiras de se vestir.

Para a Divisão, o exemplo abordado foi: numa festa foi possível formar 12 casais diferentes para dançar e havia 3 mulheres, sendo que todos os presentes dançaram, e queremos encontrar quantos eram os homens nessa festa. No documento, explica que, para solucionar esse tipo de problema, os alunos costumam se apoiar em procedimentos multiplicativos, como exemplificado abaixo:

- Um rapaz e 3 moças formam 3 pares.
- Dois rapazes e 3 moças formam 6 pares.
- Três rapazes e 3 moças formam 9 pares.
- Quatro rapazes e 3 moças formam 12 pares.

No terceiro ciclo, um dos conteúdos propostos para o Tratamento da Informação é a "representação dos casos possíveis em situações combinatórias" (BRASIL, 1998, p 74). Com isso, para a apresentação desse objeto de conhecimento, o ensino de Matemática deve visar ao desenvolvimento do raciocínio combinatório que leve o aluno a "resolver situações-problema que evolvam o raciocínio combinatório e a determinação da probabilidade e sucesso de um determinado evento por meio de uma razão" (BRASIL, 1998, p. 65). O professor nessa fase deve avaliar

> se o aluno é capaz de resolver problemas de contagem com quantidades que possibilitem obter o número de agrupamentos, utilizando procedimentos diversos, como a construção de diagrama de árvore, tabelas etc., sem o uso de fórmulas. (BRASIL, 1998, p. 77)

Já no quarto ciclo, partindo do pressuposto que os alunos já desenvolveram estratégias para resolver problemas de contagem apoiados em tabelas, diagrama etc., "os problemas poderão apresentar números um pouco maiores de modo que percebam que o princípio multiplicativo é um recurso que auxilia mais facilmente muitos problemas" (BRASIL, 1998, p. 85).

Dessa maneira, o ensino de Matemática deve visar ao desenvolvimento do raciocínio estatístico e probabilístico, explorando "construir um espaço amostral de eventos equiprováveis, utilizando o princípio multiplicativo ou simulações, para estimar a probabilidade de sucesso de um dos eventos" (BRASIL, 1998, p. 82).

Nesse ciclo, a Análise Combinatória é abordada também no tema Tratamento da Informação, assim como no ciclo III, sendo desenvolvido para a "construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo da probabilidade de um evento por meio de uma razão" (BRASIL, 1998, p. 90).

O professor, nesse ciclo, deve avaliar se o aluno resolve problemas de contagem indicando as possibilidades de sucesso de um evento por meio de uma razão.

Com isso, nos ciclos III e IV a resolução de problemas de contagem,

> coloca o aluno diante de situações em que é necessário agrupar objetos, em diferentes quantidades, caracterizando os agrupamentos feitos. Ao tentar solucionar essas situações, ele poderá aperfeiçoar a maneira de contar agrupamentos e desenvolver, assim, o raciocínio combinatório. Consequentemente, poderá desenvolver maior segurança e criatividade para enfrentar situações-problema de caráter aleatório, que dependem de uma contagem sistematizada, e dispor de uma ferramenta útil e motivadora para aprendizagem da probabilidade e da estatística (BRASIL, 1998, p. 136).

Sendo que, o primeiro contato do aluno com situações-problema de contagem, deve ter como objetivo “a familiarização com a contagem de agrupamentos de objetos, de maneira formal e direta – fazer uma lista de todos os agrupamentos possíveis e depois contá-los” (BRASIL, 1998, p. 137). Essa exploração, com problemas de contagem, levará ao aluno a compreender o princípio multiplicativo, além de

> desde cedo, a desenvolver procedimentos básicos como a organização dos dados em tabelas, gráficos e diagramas, bem como a classificação de eventos segundo um ou mais critérios, úteis não só em Matemática como também em outros campos, o que reforça a argumentação dos defensores de seu uso desde as séries iniciais do ensino fundamental. (BRASIL, 1998, p. 137).

Mas, é no Ensino Médio que o estudo da Análise Combinatória é aprofundado, e esse conceito é abordado mais especificamente na 2ª série do Ensino Médio. No PCN+, a Matemática é dividida em três temas:

- Álgebra: números e funções
- Geometria e medidas
- Análise de dados

No tema Análise de Dados também é subdividida, mas em três Unidades Temáticas, são elas:

- Estatística
- Contagem
- Probabilidade

Na Unidade Temática Contagem é abordado o princípio multiplicativo e problemas de contagem. As habilidades que devem ser desenvolvidas pelos alunos são:

- Decidir sobre a forma mais adequada de organizar números e informações, com o objetivo de simplificar cálculos em situações reais, envolvendo quantidade de dados ou de eventos.
- Identificar regularidades para estabelecer regras e propriedades em processos nos quais se fazem necessários os processos de contagem.
- Identificar dados e relações envolvidas numa situação-problema que envolva o raciocínio combinatório, utilizando os processos de contagem.

NA BNCC (2018) a Contagem,

> ao mesmo tempo que possibilita uma abordagem mais completa da probabilidade por si só, permite o desenvolvimento de uma nova forma de pensar em Matemática denominada raciocínio combinatório. Ou seja, decidir sobre a forma mais adequada de organizar números ou informações para poder contar os casos possíveis não devem ser aprendido como uma lista de fórmulas, mas como um processo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da situação (BRASIL, 2002, p. 126).

No entanto, “as fórmulas devem ser consequência do raciocínio combinatório desenvolvido frente à resolução de problemas diversos e devem ter a função de simplificar cálculos quando a quantidade de dados é muito grande” (BRASIL, 2002, p. 126).

Na BNCC (2018), a progressão anual tem por base a utilização de novas ferramentas e a complexidade das situações-problema em que a resolução exigirá mais etapas em sua execução ou então noções de Unidades Temáticas diferentes, por exemplo, os problemas de Contagem

> devem, inicialmente, estrar restritos àquelas cujas soluções podem ser obtidas pela descrição de todos os casos possíveis, mediante a utilização de esquema ou diagrama, e, posteriormente, àqueles cuja resolução depende da aplicação dos princípios multiplicativo e aditivo e do princípio da casa dos pombos (BRASIL, 2018, p. 275).

No 4° ano do Ensino Fundamental, a Análise Combinatória está contida na Unidade Temática Número. O objeto de conhecimento abordado nessa etapa é Problemas de Contagem e a habilidade a ser desenvolvida é a:

- (EF04MA08) Resolver, com o suporte de imagem e/ou material manipulável, problemas simples de contagem, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra, utilizando estratégias e formas de registro pessoais.

E no 5° ano do Ensino Fundamental, também na Unidade Temática Números, tem-se o objeto de conhecimento, Problemas de Contagem do tipo: “Se cada objeto de uma coleção A for combinado com todos os elementos de uma coleção B, quantos agrupamentos desse tipo podem ser formados?”, no qual a habilidade a ser desenvolvida pelos alunos é a:

- (EF05MA09) Resolver e elaborar problemas simples de contagem envolvendo princípio multiplicativo, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra coleção, por meio de diagramas de árvore ou por tabelas.

Já no 8° ano do Ensino Fundamental, os problemas de Contagem são abordados na Unidade Temática Probabilidade e Estatística, sendo o Princípio Multiplicativo da Contagem o objeto de conhecimento abordado nesse ano e a habilidade a ser desenvolvida é:

- (EF08MA22) Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostra é igual a 1.

Em seguida, a Análise Combinatória será estudada no Ensino Médio. Nota-se, na BNCC (2018), que o Ensino Médio é dividido em 5 competências e cada competência tem suas respectivas habilidades. A competência referente ao conteúdo de Análise Combinatória é a Competência 3 que tem como objetivo

> Utilizar estratégias, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente (BRASIL, 2018, p. 531).

As habilidades referentes à essa competência estão relacionadas à “interpretação, construção de modelos, resolução e formulação de problemas matemáticos envolvendo noções, conceitos e procedimentos quantitativos, geométricos, estatísticos, probabilísticos, entre outros” (BRASIL, 2018, p. 535). As habilidades inerentes à Análise Combinatória são:

- (EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.

- (EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.

Percebe-se que, tanto no PCN quanto na BNCC, o ensino-aprendizagem da Análise Combinatória se inicia através de diagramas e esquemas para depois chegar ao seu algoritmo. Porém, um diferencial que a BNCC trouxe é a inclusão desse tema no Ensino Fundamental dos Anos Iniciais, reforçando a afirmação de Morgado *et al.* (2020) quanto à necessidade da inclusão desse conteúdo no Ensino Fundamental, diferenciando apenas na Unidade Temática em que será abordada nos Anos Iniciais e nos Anos Finais.

A seguir, apresenta-se uma breve história da Análise Combinatória no desenvolvimento da humanidade.

3.2 HISTÓRIA DA ANÁLISE COMBINATÓRIA

Como a grande maioria dos conceitos matemáticos, não há exatamente uma data precisa de quando iniciaram os estudos sobre Análise Combinatória. Encontra-se indícios do pensamento combinatório, como o problema 79, contido no Papiro de Rhind (cerca de 1650 a.C): “Há sete casas, cada uma com sete gatos, cada gato mata sete ratos, cada rato teria comido sete safras de trigo, cada qual teria produzido sete hekat de grão (um hekat é uma unidade de volume, que corresponde a 4,9 litros, aproximadamente); quantos itens têm ao todo?” esse é um problema clássico do Princípio Fundamental da Contagem.

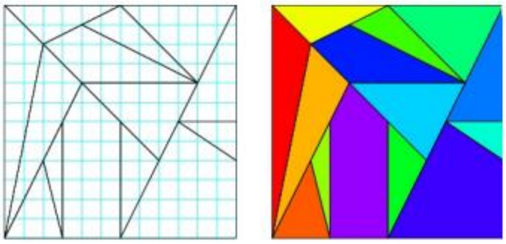
De acordo com Silva (2020), esse Papiro foi adquiro pelo jovem antiquário A. Henry Rhind, quando estava de passagem por Luxor, uma cidade às margens do rio Nilo, esse papiro teria sido encontrado nas ruínas de uma antiga edificação Tebas. Após a morte de Rhind o papiro foi para o Museu Britânico e, a partir daí, começou a ser chamado de Papiro de Rhind. Esse documento foi escrito pelo escriba Ahmes, ou Ah-mose. Ele relata que o papiro provém de outro manuscrito datado entre 2000 a.C e 1800 a.C, sendo um dos documentos conhecidos mais antigos da Matemática.

Figura 2 – Papiro de Rhind

Fonte: Silva, 2020

Além do Papiro de origem egípcia contendo problemas com pensamentos combinatórios, o matemático grego Arquimedes de Siracusa (287 a.C – 212 a.C) propôs um problema geométrico conhecido como Stomachion, no qual continha 14 peças que se encaixam, formando um quadrado, o que poderia ser confundido facilmente com o passatempo muito conhecido hoje em dia, o Tangram.

Figura 3 - Stomachion

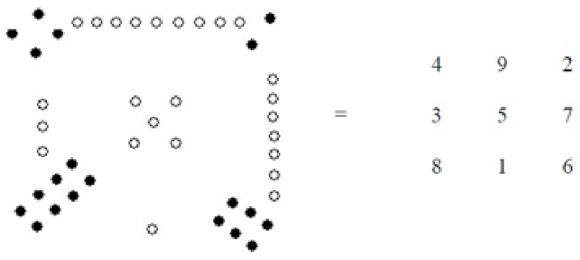


Fonte: Silva, 2020

Porém, ao ser publicado no jornal The New York Times, em 2003, um artigo do Matemático historiador Reviel Netz, da Universidade de Stanford, Califórnia, intitulado, In Archedes Puzzle, a New Eureka Moment afirma que Stomachion não era um passatempo, mas um objeto de Arquimedes no qual consistia em determinar quantos modos poderiam ser reunidas 14 peças planas de diferentes formatos e tamanhos para formar um quadrado, ou seja, o objetivo desse objeto era para fins de Análise Combinatória.

Um outro passatempo em que a sua formação também está relacionada com a Teoria dos Números e com a Análise Combinatória é o Quadrado Mágico em que cada linha, cada coluna e cada diagonal desse quadrado possui a mesma soma. O primeiro Quadrado Mágico era chamado de Lo Shu, tem origem chinesa e apesar de ser datado no século I d.C, acredita-se que pode ser mais antigo que isso.

Figura 4 – Lo Shu



Fonte: Silva, 2020

O Quadrado Mágico chegou aos árabes, mas, segundo Vazquez (2011), não se sabe nem como e nem quando. No entanto, fizeram sua contribuição, construindo quadrados mágicos de ordem 3, 4, 5 e 6, além de regras para a construção desses quadrados de determinada ordem. O estudo sobre a construção dos quadrados mágicos evoluiu durante os séculos IX e XII. Nessa época para a construção, eles utilizavam um quadrado original, ou seja, um quadrado de mesma ordem, porém com números consecutivos. Somente mais tarde, foram deduzidos métodos para quadrados de qualquer ordem (VAZQUEZ, 2011).

Figura 5 - Quadrado Mágico 9x9

31	76	13	36	81	18	29	74	11
22	40	58	27	45	63	20	38	56
67	4	49	72	9	54	65	2	47
30	75	12	32	77	14	34	79	16
21	39	57	23	41	59	25	43	61
66	3	48	68	5	50	70	7	52
35	80	17	28	73	10	33	78	15
26	44	62	19	37	55	24	42	60
71	8	53	64	1	46	69	6	51

Fonte: Silva, 2020

Os quadrados mágicos trazem exemplos bem antigos de um importante ramo da Análise Combinatória: fixar condições para contagem dos arranjos (SANTOS, 2013).

Mas, as contribuições para a Análise Combinatória não param por aí, bem mais recente, encontra-se o problema da Conjectura das quatro cores, enunciada pela primeira vez por Francis Guthrie (1831 - 1899). Francis era ex-aluno de Augustus De

Morgan, porém se formou em direito, mas voltou ao campo da Matemática tempos depois, obtendo um cargo de professor na África do Sul.

De acordo com Boyer e Merzbach (2012), em 1852, enquanto ainda estudava direito, pediu a seu irmão, Frederick, que, na época, também era aluno de De Morgan, para perguntar sobre a validade de uma conjectura em uma carta a Willian Rowan Hamilton que dizia o seguinte:

> "Um aluno meu me pediu hoje para lhe dar uma razão para um fato que eu não sabia que era um fato – e ainda não sei. Ele diz que se uma figura for dividida de qualquer maneira e os compartimentos pintados diferentemente de modo que figuras com qualquer parte de uma curva de fronteira em comum tenham cores diferentes, podem ser necessárias quatro cores, mas não mais." (BOYER; MERZBACH, 2012, p. 432)

No entanto, ninguém tinha a solução para o problema das quatro cores. A partir daí, dezenas de matemáticos iniciaram estudos e tentaram demonstrar. Em 1879 Alfred Bray Kempe (1849 - 1922) anunciou, na *Nature,* sua demonstração para o problema e a submeteu ao *American Journal of Mathematics*. Nesse mesmo ano, porém, na década de 1890, descobriu-se que a demonstração de Kempe continha falhas.

Daí em diante, a maioria das tentativas para demonstrar o problema da Conjectura das quatro cores baseavam-se em três conceitos: "cadeias de Kempe", "conjuntos evitáveis" e "reducibilidade". Na década de 1960, o alemão Heinrich Heesch (1906 - 1995) introduziu o quarto conceito: o método da descarga. Mas, foi em 1976 em que Kenneth Appel e Wolfgang Haken, na Universidade de Ilinois, usando o conceito de reducibilidade com a ajuda das cadeias de Kempe, completaram a cadeia de descarga de Heesch com um programa de computador especialmente projetado para isso, demonstraram que não existia contraexemplo e que, então, o teorema era verdadeiro.

Com isso, como existiam partes dessa demonstração em que humanos não conseguiam validar, passou por minuciosos exames por diversos grupos e, em 1977, Appel e Haken publicaram a primeira de diversas explicações de suas metodologias. Surgiram, então, demonstrações mais simples dessa conjectura, porém necessitavam também, em algumas partes, a demonstração de um computador.

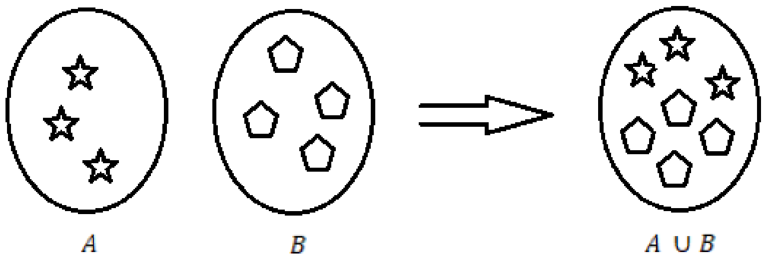
3.3 PRINCÍPIO ADITIVO E MULTIPLICATIVO

Na próxima seção apresenta-se ferramentas básicas para determinar o número de elementos de um conjunto, dada uma determinada condição, sem ser necessário enumerá-los.

3.3.1 Princípio Aditivo

As operações aritméticas também são apresentadas, motivadas e aprendidas pelas crianças através de sua aplicação a problemas de contagem, como no exemplo da Figura 6.

Figura 6 – Modelo de Contagem



Fonte: Elaborada pela autora, 2022

Essa figura ilustra um princípio básico de contagem que chamamos de Princípio Aditivo, no qual se diz que: *Se A e B são dois conjuntos disjuntos ($A \cap B = \emptyset$), com m e n elementos respectivamente, então $A \cup B$ possuem $m + n$ elementos.*

Exemplo 1: Suponha que, neste final de semana, serão lançados 3 filmes e 2 peças de teatro, porém Paulo tem dinheiro apenas para um programa. De quantas maneiras Paulo poderá escolher um programa para ir neste final de semana?

Como Paulo tem dinheiro para ir a apenas a um evento, ele pode escolher: o Filme A, ou o Filme B, ou o Filme C, ou Teatro X, ou o Teatro Y. Portanto, ele tem 5 programas diferentes para escolher ir neste final de semana.

Nesse exemplo, pode-se identificar os conjuntos da seguinte maneira

$$A = \{x \mid x \text{ é } um\ filme\} = \{FA, FB, FC\} \text{ e,}$$

$$B = \{y \mid y \text{ é } uma\ peça\ de\ teatro\} = \{TX, TY\},$$

onde $A \cup B = \{ z \mid z \text{ é } um\ filme\ ou\ uma\ peça\ de\ teatro\}$.

Exemplo 2: Suponha que Maria vá a uma cafeteria onde há 4 tipos de fatias de bolo e 3 tipos de salgados. Porém, Maria pode escolher apenas um bolo ou apenas um salgado. Quantos são os possíveis pedidos que Maria pode fazer?

Maria pode escolher a fatia do Bolo 1, ou a fatia do Bolo 2, ou a fatia do Bolo 3, ou a fatia do Bolo 4, ou então, o Salgado 1, ou o Salgado 2, ou o Salgado 3. Logo, Maria pode fazer 7 possíveis pedidos.

Nesse exemplo, identificamos os conjuntos da seguinte maneira

$A = \{x \mid x \text{ é } uma\ fatia\ de\ bolo\} = \{B1, B2, B3, B4\}$ e,

$B = \{y \mid y \text{ é } um\ salgado\} = \{S1, S2, S3\}$,

onde temos que $A \cup B = \{ z \mid z \text{ é } um\ bolo\ ou\ um\ salgado\}$.

O Princípio aditivo pode ser estendido para um número finito qualquer de conjuntos e essa extensão é feita da seguinte forma:

Se A_1, A_2, ... , A_n são conjuntos disjuntos, 2 a 2, e se A_i possui a_i elementos, então a união $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ possui $\sum_{i=1}^{n} a_i$ elementos.

3.3.2 Princípio Multiplicativo

O Princípio Multiplicativo ou Princípio Fundamental da Contagem nos diz que: *Dada uma decisão D_1 que pode ser tomada de m maneiras, e qualquer que seja a maneira escolhida por D_1, a decisão D_2 pode ser escolhida de n maneiras, então, o número de maneiras que podemos tomar as decisões D_1 e D_2 é dada por $m.n$.*

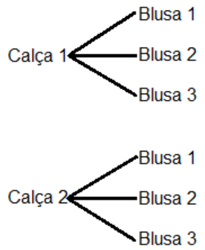
Um dos exemplos clássicos para representar esse Princípio é o problema da vestimenta, como por exemplo, Maria vai sair e ela está em dúvida entre duas calças e três blusas. De quantas maneiras diferentes, Maria pode se vestir?

Se Maria escolher colocar a calça 1, então ela pode se vestir das seguintes maneiras: calça 1 com blusa 1 ou calça 1, com blusa 2 ou calça 1 com blusa 3; se Maria decidir colocar a calça 2, então ela poderá se vestir das seguintes maneiras: calça 2 com blusa 1 ou calça 2 com blusa 2 ou calça 2 com blusa 3, ou seja, Maria pode se vestir de 6 maneiras diferentes. Neste caso, a primeira decisão pode ser tomada de duas maneiras (calça 1 e calça 2) e, uma vez tomada a primeira decisão, temos que, tomaremos a segunda decisão de 3 maneiras (blusa 1, blusa 2, ou blusa

3), então $2 . 3 = 6$, logo, como visto anteriormente, Maria tem 6 maneiras distintas de se vestir.

Uma outra maneira que podemos resolver esse tipo de problema é pelo diagrama como na Figura 7, porém, ele não será viável para conjuntos que possuem muitos elementos.

Figura 7 – Diagrama da árvore



Fonte: Elaborado pelo autor, 2022

Exemplo 1: Suponha que, neste sábado, serão lançados 3 filmes e 2 peças de teatro, porém Paulo tem dinheiro para dois programas e ele irá assistir a um filme e a uma peça de teatro. Quantas maneiras Paulo terá para escolher seu programa neste sábado?

Agora Paulo tem dinheiro para ir a dois programas, então a primeira decisão pode ser tomada de 3 formas (filme 1, filme 2 e filme 3) e, tomada essa decisão, a segunda decisão pode ser tomada de 2 formas (teatro 1 e teatro 2), então $3 . 2 = 6$, logo, Paulo pode escolher entre 6 programas diferentes para o final de semana.

Exemplo 2: Suponha que Maria vá a uma cafeteria onde há 4 tipos de fatias de bolo e 3 tipos de salgados. Sabendo que Maria vai comer um salgado e uma fatia de bolo, quantos são os possíveis pedidos que Maria pode fazer?

Nesse caso, a primeira decisão pode ser tomada de 3 maneiras (salgado 1, salgado 2 e salgado 3), e a segunda decisão pode ser tomada de 4 maneiras (fatia de bolo 1, fatia de bolo 2, fatia de bolo 3 e fatia de bolo 4), então Maria pode fazer seu pedido de $3 . 4 = 12$ maneiras diferentes.

O Princípio Multiplicativo pode ser generalizado como, *se um evento A_i pode ocorrer de m_i maneiras diferentes, para $i = 1, 2, 3, \dots, n$, então, esses n eventos podem ocorrer, em sucessão de $m_1 . m_2 . m_3 \dots m_n$ maneiras diferentes. Em linguagem de conjuntos, se o conjunto A_i tem cardinalidade m_i, para $i = 1, 2, 3, \dots, n$, então o* *produto cartesiano* $A_1.A_2.\dots.A_n = (a_1, a_2, \dots, a_n)|a_i \in A_i,\ para\ i = 1,2,3, \dots, n$ *tem cardinalidade* $m_1.m_2.\ \dots\ .m_n$.

3.3.3 Método de Resolução do Princípio Aditivo e Multiplicativo

Essas duas ferramentas contribuem para a resolução de uma gama de exercícios de contagem. Para a resolução desses problemas, temos algumas estratégias para seguir que facilitam a resolução. A primeira é a nossa postura, devemos sempre nos colocar no papel da pessoa da ação solicitada. A segunda estratégia que devemos tomar é a divisão, aqui devemos sempre dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples. A terceira estratégia é a de que não devemos adiar possíveis dificuldades, ou seja, a decisão com mais restrições é a que devemos começar (Lima *et al.*, 2006).

Exemplo 1: De quantas maneiras podemos pintar uma bandeira de quatro listras utilizando as cores: verde, amarela, azul e branco, sabendo que listras adjacentes são de cores distintas?

Temos quatro listras (L1, L2, L3 e L4), podemos enumerar as listras em qualquer ordem na bandeira.

Para a listra L1 podemos escolher 4 cores, feita essa primeira escolha, para a segunda listra L2, não podemos repetir a cor escolhida para a primeira, no entanto, podemos pintá-la de 3 maneiras.

Para a terceira listra, L3, só não podemos repetir com a segunda, logo, podemos escolher de 3 maneiras também as cores para pintá-la, e o mesmo acontece com a quarta listra L4, não podemos escolher a mesma cor da L3, mas, podemos escolher de 3 maneiras as cores para essa listra.

Logo, quantidade de maneiras possíveis para pintar essa bandeira é $4.3.3.3 = 108$.

Nesse caso nos colocamos no lugar da pessoa que irá pintar a bandeira e dividimos as decisões a serem tomadas nas 4 listras que iremos colorir.

Exemplo 2: Quantos números naturais de três dígitos distintos podemos formar com os algarismos de 0 a 9?

Para formar um número com três algarismos, o primeiro dígito tem que ser diferente de zero, pois senão, não será um número com três dígitos.

Podemos escolher, para esse primeiro dígito, 9 algarismos. No segundo dígito podemos incluir o algarismo zero, no entanto não podemos repetir o algarismo do primeiro dígito, então temos 9 algarismos novamente.

Para o terceiro dígito, como não podemos repetir o algarismo que está na segunda e na primeira posição, então podemos escolher para esse dígito 8 algarismos, com isso, a quantidade de números inteiros de três algarismos distintos que podemos formar é $9.9.8 = 648$.

Nesse exemplo, primeiramente nos colocamos no lugar de quem vai formar os números, em seguida, dividimos as decisões na quantidade de números que podemos colocar no primeiro dígito, no segundo dígito e no terceiro dígito. Nesse caso para escolhermos o primeiro algarismo, temos uma restrição para formar um número com três algarismos não podemos começar com o 0, como temos uma restrição, começamos a contar as possibilidades com esse primeiro dígito.

Poderíamos adiar a dificuldade, começando com o terceiro dígito e assim para ele podemos escolher 10 algarismos, o segundo dígito podemos escolher 9 algarismos, pois não podemos repetir o número escolhido no terceiro dígito e assim chegamos num impasse, pois, para o primeiro dígito temos duas situações, se ainda não tiver o dígito 0 nesse número, então podemos escolher para esse dígito 7 algarismos e se já tiver saído o algarismo 0 nesse número, então poderemos escolher para o primeiro dígito 8 algarismos.

Podemos notar então, que na primeira resolução tínhamos uma pequena dificuldade quando adiamos a dificuldade o problema se torna maior ainda.

Exemplo 3: Em um grupo há 14 moças e 10 rapazes, onde 7 deles (4 moças e 3 rapazes) são filhos da mesma mãe e os restantes não possuem parentesco. Quantos são os casamentos possíveis?

Considerando as quatro moças que possuem irmãos e o sete rapazes restantes, há: $4.7 = 28$ casamentos possíveis.

Considerando as dez moças que não possuem irmãos e todos os rapazes, há: $10.10 = 100$ casamentos possíveis. Portanto, há $28 + 100 = 128$ casamentos possíveis.

Aqui nos colocamos no lugar de quem vai organizar os possíveis pares para o casamento, dividimos as decisões nas pessoas que possuem irmãos nesse grupo e as que não possuem e, para não adiar as dificuldades, começamos a calcular com as mulheres que possuem irmãos.

Exemplo 4: De quantos modos diferentes 5 pessoas podem ser colocadas em uma fila?

Para escolher o primeiro da fila, temos 5 possibilidades; para escolher a segunda posição da fila, temos 4 possibilidades restantes; para escolher a terceira da fila, temos 3 possibilidades restantes; para escolher a quarta pessoa da fila, temos 2 possibilidades restantes e para a quinta pessoa da fila, resta 1 possibilidade, temos então $5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 120$ maneiras de organizar 5 pessoas em uma fila.

Esse problema também pode ser resolvido, utilizando o conceito de Permutações Simples no qual empregamos o fatorial, por exemplo: $5! = 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 120$ maneiras. A Permutação Simples é o tema da próxima seção.

3.4 PERMUTAÇÃO SIMPLES

Ao permutarmos n elementos distintos, encontramos o número de agrupamentos ordenados desses elementos, representamos essa permutação por P_n, então

$$P_n = n(n-1)(n-2) \ldots 3.2.1 = n!$$

ou seja, na primeira posição, temos n elementos possíveis para colocar; na segunda posição temos n – 1 elementos possíveis; na terceira posição n – 2 elementos e assim por diante, até chegarmos na antepenúltima posição, tendo 3 elementos possíveis para organizar, na penúltima 2 elementos e na última posição, temos apenas um elemento. Logo, temos que $P_n = n!$, definindo 0! = 1.

Analisaremos alguns problemas clássicos de permutação.

Exemplo 1: De quantas formas podemos organizar 6 pessoas em uma fila?

Na primeira posição, temos 6 possibilidades de escolher essas pessoas; na segunda posição, sobram 5 possíveis pessoas para escolher; na terceira posição, restam 4 pessoas para organizá-las nessa fila, na quarta posição, restam 3 pessoas para escolhermos; na quinta posição, podemos escolher, entre 2 pessoas e na última posição, sobra 1 pessoa para colocá-la na fila, ou seja

$$P_6 = 6! = 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 720.$$

Logo, temos 720 maneiras de organizar 6 pessoas em uma fila.

Exemplo 2: Quantos anagramas podemos formar com a palavra PORTA?

Cada anagrama representa uma possível ordenação, utilizando as letras P, O, R, T e A. Assim temos 5 posições para 5 letras, temos então que, na primeira posição, podemos escolher entre 5 possíveis letras.

Escolhida a primeira letra, restam quatro letras, então, na segunda posição podemos escolher 4 possíveis letras. Fixada a segunda letra, restam três letras, na terceira posição podemos escolher 3 possíveis letras. Fixada a terceira letra, restam duas letras, então, na quarta posição, podemos colocar 2 possíveis letras. Após fixada, resta uma letra, então, na última posição, temos 1 letra para posicionar, ou seja,

$$P_n = 5! = 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 120$$

Logo, temos 120 anagramas distintos com a palavra porta.

Exemplo 3: Num grupo de 3 mulheres e 3 homens, de quantas maneiras podem se sentar em 3 bancos de dois assentos, sabendo que, em cada banco, podem se sentar uma mulher e um homem.

A primeira mulher escolherá entre 6 assentos. Escolhido o assento, restam 4 assentos para a segunda mulher escolher. Já que a segunda mulher não pode se sentar no banco junto com a primeira, restando, então, 2 assentos para a terceira mulher escolher. Em seguida, colocaremos os homens. O primeiro homem escolherá entre 3 assentos; o segundo homem escolherá entre 2 assentos e para o último homem resta um assento, ou seja, os homens podem escolher de $3!$ Maneiras, temos que

$$6 . 4 . 2 . 3! = 288$$

Logo, nesse grupo podem se sentar de 288 maneiras diferentes nesses 3 bancos com dois assentos cada de modo que em cada banco sentam um homem e uma mulher.

Exemplo 4: Quantos divisores possui o número 150 000? E quantos divisores possui $N = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}. \ldots .p_n^{\alpha_n}$?

1°) Decompondo o 150 000 em fatores primos, temos em sua decomposição,

$$150\,000 = 2^4.3.5^5$$

Com isso, um divisor de 150 000 pode possuir

- o fator 2^0, 2^1, 2^2, 2^3 ou então 2^4, ou seja, 5 possibilidades para o fator 2;
- o fator 3^0 ou 3^1, ou seja, 2 possibilidades para o fator 3;
- o fator 5^0, 5^1, 5^2, 5^3, 5^4 ou 5^5, ou seja, 6 possibilidades para o fator 5.

Logo, o número 150 000 possui $5\,.\,2\,.\,6 = 60$ divisores.

2°) Seja $N = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}. \ldots .p_n^{\alpha_n}$, então um divisor de N pode possuir

- o fator $p_1^{\,0}$, $p_1^{\,1}$, $p_1^{\,2}$, ..., $p_1^{\alpha_1 - 1}$ ou $p_1^{\alpha_1}$, ou seja, $\alpha_1 + 1$ possibilidades para o fator p_1;
- o fator $p_2^{\,0}$, $p_2^{\,1}$, $p_2^{\,2}$, ..., $p_2^{\alpha_2 - 1}$ ou $p_2^{\alpha_2}$, ou seja $\alpha_2 + 1$ possibilidades para o fator p_2;

...

- O fator $p_n^{\,0}$, $p_n^{\,1}$, ..., $p_n^{\alpha_n - 1}$, ou $p_n^{\alpha_n}$, ou seja, $\alpha_n + 1$ possibilidades para o fator p_n.

Logo, o número N possui $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\ldots(\alpha_n + 1)$ divisores.

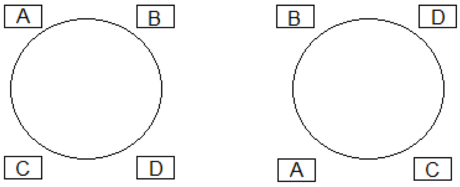
Exemplo 5: Em uma mesa redonda de quatro lugares, de quantas maneiras diferentes 4 adultos podem se sentar?

Inicialmente, podemos colocar esses adultos de $4!$ maneiras, porém, ao observarmos a Figura 8, nota-se que, se rotacionarmos a sequência em que os adultos estão sentados, a sequência é a mesma, pois para se sentarem em círculos o que importa é a posição em que os adultos estão sentados entre eles, como podemos rotacionar essa mesa de 4 maneiras e ainda ser a mesma sequência em que cada uma está sentado, então

$$\frac{P_n}{n} = \frac{4!}{4} = \frac{4\,.\,3\,.\,2\,.\,1}{4} = 6$$

Logo, há 6 maneiras distintas de colocar 4 adultos sentados ao redor de uma mesa redonda.

Figura 8 - Diagrama das possibilidades 1



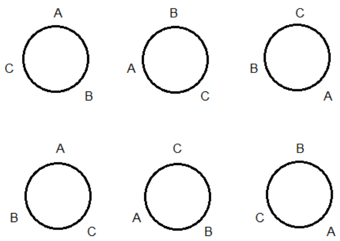
Fonte: Elaborada pela autora, 2022

O exemplo citado acima é conhecido como Permutação Circular, abordado na próxima seção.

3.5 PERMUTAÇÃO CIRCULAR

De quantas maneiras colocaremos 3 crianças em círculo de maneira que se rotacionarmos, consideraremos posições equivalentes?

Figura 9 – Diagrama das possibilidades 2



Fonte: Elaborada pela autora, 2022

Ao resolvermos uma $P_3 = 3 \,.\, 2 \,.\, 1 = 6$, chamando as crianças de A, B e C conforme ilustrado na Figura 9.

Nesse caso, a primeira linha representa todas as rotações da sequência ABC e a segunda linha representa todas as sequências de ACB. Com isso se considerarmos as rotações sequências equivalentes, teremos apenas 2 maneiras diferentes para colocar 3 crianças em círculo.

Então, para resolver essa Permutação Circular (PC) faremos a P_3 e dividiremos pelo número de vezes em que contamos a mesma sequência, nesse caso, ficará $\frac{P_3}{3}$, logo, temos que $PC_3 = \frac{P_3}{3} = \frac{3\,.\,2\,.\,1}{3} = \frac{6}{3} = 2$ maneiras.

Resolveremos agora o seguinte problema: De quantos modos alocaremos n objetos distintos em n lugares, formando um círculo de modo que consideremos equivalentes posições constituídas por rotação?

Como vimos anteriormente, basta fazer uma permutação de n objetos distintos e dividir pelo número de vezes que contamos a mesma sequência, então temos

$$PC_n = \frac{n!}{n}$$

Simplificando, teremos

$$PC_n = \frac{n\,.\,(n-1)!}{n}$$

Logo,

$$PC_n = (n-1)!$$

Com isso, para resolver o primeiro problema, como temos 3 crianças para colocar em círculo, faremos

$$PC_3 = (3-1)! = 2! = 2\,.\,1 = 2$$

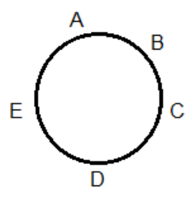
Chegando ao mesmo resultado encontrado inicialmente.

No *Exemplo 4* na permutação simples, resolveremos também utilizando o conceito de Permutação Circular

Exemplo 1: De quantos modos formaremos uma roda de ciranda com 7 crianças, para que duas determinadas dessas crianças não fiquem juntas?

Inicialmente, contaremos de quantas maneiras formaremos uma roda de ciranda com as 5 crianças, deixando de fora as crianças que não podem se sentar juntas. Com isso, temos $PC_5 = (5-1)! = 4!$ maneiras, note que, ao colocarmos 5 crianças sentadas numa ciranda, teremos 5 lugares entre elas, para colocarmos as outras 2 crianças

Figura 10 – Diagrama das possibilidades 3



Fonte: Elaborada pela autora, 2022

Ou seja, temos um lugar entre as crianças A e B, um outro lugar entre as crianças B e C e assim por diante, de forma que as duas crianças restantes não sentem juntas. Então, para a primeira criança, temos 5 opções de escolha de lugares para colocá-la e, para a segunda criança, temos 4 opções de escolha de lugares para colocá-la sentada. Logo, temos

$$4!\,.\,5\,.\,4 = 24\,.\,5\,.\,4 = 480.$$

Exemplo 2: De quantos modos 5 meninos e 5 meninas formam uma roda de ciranda, a fim de que pessoas de mesmo sexo não fiquem juntas?

Primeiro colocaremos os meninos sentados em roda, temos $PC_5 = (5-1)! = 4!$ maneiras. Sabemos que, entre os 5 meninos sentados em roda, temos 5 lugares para colocar as meninas. Logo para a primeira menina, temos 5 lugares para sentá-la, para a segunda menina, temos 4 lugares disponíveis para sentá-la, para a terceira menina, temos disponíveis 3 lugares para sentá-la, para a quarta menina, temos disponíveis 2 lugares para sentá-la e, para a última menina, temos disponível apenas 1 lugar para sentá-la, ou seja $5!$ maneiras de sentar as 5 meninas, logo

$$4!\,.\,5! = 24\,.\,120 = 2\,880$$

Exemplo 3: De quantos modos 5 mulheres e 6 homens formam uma roda de ciranda de modo que as mulheres permaneçam juntas?

Contaremos de quantas maneiras os 6 homens podem sentar-se em roda, temos $PC_6 = (6-1)! = 5!$ Maneiras. Como as mulheres têm que sentar-se juntas, temos, então, 6 maneiras de colocá-las na roda entre os homens, mas ainda temos que contar todas as maneiras que essas mulheres podem se sentar entre elas, temos, então, uma $P_5 = 5!$ maneiras, logo

$$5!\,.\,5!\,.\,6 = 86\,400$$

Exemplo 4: De quantos modos 8 casais fixos podem sentar-se em uma roda gigante de 8 bancos de dois lugares cada um, com cada casal em um banco?

Contaremos de quantas maneiras os oito casais podem se sentar nos oito bancos da roda gigante. Para isso faremos uma permutação circular. Então, $PC_8 = (8-1)! = 7!$, porém, o primeiro casal pode se sentar de 2 maneiras no banco escolhido, o segundo casal também pode se sentar de 2 maneiras e assim por diante.

Temos, então, 2^8 maneiras em que os oito casais podem se sentar nos bancos da roda gigante, logo

$$7!\,.\,2^8 = 1\ 290\ 240$$

Exemplo 5: Se 4 meninos e 4 meninas vão brincar de roda, de quantas maneiras poderão dar as mãos, com a condição de que pelo menos 2 meninas estejam juntas?

Quando dizemos que no mínimo duas meninas têm que estar juntas, quer dizer que podem ser duas, três ou as quatro, para isso, primeiro contaremos o total de maneiras que essas crianças podem se dar as mãos e, em seguida, retiraremos o total de maneiras em que essas meninas não estejam de mãos dadas.

Temos, no total, 8 crianças, formando a roda. Com isso, o número de maneiras que elas se organizam é $PC_8 = (8-1)! = 7!$. Dessa forma, contaremos os casos em que nenhuma menina esteja junta.

Para corrigir esse erro, contaremos quantas vezes isso ocorreu e tirar do total de maneiras que eles se organizam em roda. Como temos 4 meninos, primeiro vamos organizá-los em roda, para isso temos $PC_4 = (4-1)! = 3!$ maneiras, restando 4 espaços para colocarmos as 4 meninas separadas na roda.

Com isso, para a primeira menina, escolheremos entre 4 lugares para colocá-la na roda, para a segunda menina escolheremos entre 3 lugares, para a terceira menina entre 2 lugares na roda, restando 1 lugar para colocar a quarta menina. Temos aqui, então, $4!$ maneiras de organizar as meninas na roda entre os meninos, de forma que nenhuma menina fique junta.

Logo, o número de maneiras que organizamos 4 meninas e 4 meninos em roda, de forma que no mínimo duas meninas fiquem juntas, é

$$7! - 3!\,4! = 5040 - 144 = 4896$$

As fórmulas de arranjo e combinação são utilizadas para a resolução de exercícios que envolvem os princípios aditivo e multiplicativo, porém, com a utilização deles, tornam mais simples suas soluções. Apresentaremos, na próxima seção, o conceito de Arranjo Simples.

3.6 ARRANJO SIMPLES

Suponha que temos que escolher n pessoas para acomodá-las em p lugares, sendo $n > p$.

$$\overline{L_1}\ \overline{L_2}\ \dots\ \overline{L_p}$$

Preencheremos o primeiro lugar de n maneiras distintas, restando $(n-1)$ pessoas, preenchido L_1, temos $(n-1)$ maneiras distintas de preencher o segundo lugar, restando $(n-2)$ pessoas e assim sucessivamente. Preenchendo as posições e chegando na posição L_p, temos $\big(n-(p-1)\big)$ maneiras distintas de preencher o p – $ésimo$ lugar. Temos, então, pelo princípio multiplicativo, que o número de maneiras que acomodaremos n pessoas em p lugares é dado por

$$n.(n-1).(n-2)\dots\big(n-(p-1)\big)$$

Exercícios desse tipo, onde temos n elementos, tomados p a p com $n > p$ e $n \geq 1$, sendo p um número natural, são característicos de Arranjo Simples e seus elementos diferem pela ordem e pela natureza e sua notação é dada por $A_{n,p}$. Portanto, temos que

$$A_{n,p} = n.(n-1).(n-2)\dots\big(n-(p-1)\big)$$

multiplicando e dividindo pelo mesmo valor, a igualdade não se altera, logo

$$A_{n,p} = \frac{\big[n.(n-1).(n-2)\dots\big(n-(p-1)\big)\big][(n-p).(n-p-1).(n-p-2)\ \dots\ 2\,.\,1]}{(n-p).(n-p-1).(n-p-2)\ \dots\ 2\,.\,1}$$

Simplificando

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemplo 1: De quantas maneiras diferentes escolheremos 5 pessoas para se sentarem em 3 lugares?

Resolveremps esse exercício de duas formas: a primeira pelo princípio multiplicativo e a segunda utilizando a fórmula do Arranjo.

Temos três lugares,

$$\overline{L_1}\ \ \overline{L_2}\ \ \overline{L_3},$$

e 5 pessoas para acomodar nesses lugares, com isso, temos 5 maneiras distintas de ocupar o primeiro lugar, restando quatro pessoas. Após acomodar o lugar L_1, teremos 4 maneiras distintas de ocupar o segundo lugar, restando três pessoas, após acomodar uma pessoa em L_2, teremos 3 maneiras distintas de ocupar o terceiro e último lugar.

Logo temos $5 . 4 . 3 = 60$ maneira diferentes de colocar 5 pessoas em 3 lugares.

Utilizando a fórmula, temos que, como essa situação difere pela ordem e pela natureza, queremos arranjar 5 pessoas 3 a 3, com $n = 5$ e $p = 3$, temos, então, que

$$A_{5,3} = \frac{5!}{(5 - 3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 . 4 . 3 . 2 . 1}{2 . 1} = 60$$

Portanto, temos 60 maneiras diferentes de colocar 5 pessoas em 3 lugares.

Exemplo 2: Quantos números naturais de três dígitos distintos formaremos com os *algarismos* de 1 a 9?

Escreveremos um número com três dígitos, utilizando os algarismos de 1 a 9, ou seja, agruparemos 9 algarismos 3 a 3.

$$\overline{D_1}\ \overline{D_2}\ \overline{D_3}$$

Para o dígito da centena, temos 9 algarismos possíveis para preenchê-lo, restando 8 algarismos distintos. Preenchido D_1, preencheremos o dígito das dezenas e, para isso, temos 8 algarismos distintos. Preenchido D_2, restam 7 algarismos distintos. Preenchendo, por fim, o dígito da unidade com os 7 algarismos restantes, temos, $9 . 8 . 7 = 504$ números com três algarismos distintos.

Para usarmos a fórmula, note que, se mudarmos a ordem dos números, obtemos um arranjo diferente 321 e 231, então

$$A_{9,3} = \frac{9!}{(9 - 3)!} = \frac{9!}{6!} = \frac{9 . 8 . 7 . 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1}{6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1} = 504$$

Portanto, formaremos 504 números distintos.

Exemplo 3: Em uma escola, 10 alunos estão montando um grêmio estudantil, no qual eles têm que preencher as vagas de diretor e tesoureiro. Desses 10 alunos, 5 manifestaram interesse para essas duas vagas. Supondo que todos os candidatos tenham as condições necessárias para ocupar qualquer um dos cargos, de quantas maneiras distintas eles poderão preencher essas vagas?

Temos 2 vagas e 5 candidatos para preenchê-las,

$$\overline{D} \quad \overline{T}$$

Para a vaga de diretor, podemos preenchê-las de 5 maneiras distintas. Preenchida a vaga de diretor, restam 4 candidatos possíveis para a vaga de tesoureiro, logo, $5\,.\,4 = 20$ maneiras distintas de preencher os dois cargos, tendo 5 candidatos.

Para utilizarmos a fórmula, queremos arranjar 5 candidatos, 2 a 2. Ao colocarmos o candidato A no cargo de diretor e o candidato B no cargo de tesoureiro, teremos um arranjo diferente se invertemos os candidatos e seus cargos. Com isso

$$A_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{5\,.4\,.3\,.2\,.1}{3\,.\,2\,.\,1} = 20$$

Ou seja, temos 20 maneiras distintas de preencher uma vaga de diretor e uma de tesoureiro, possuindo 5 candidatos.

Exemplo 4: Quantos anagramas de 3 letras formaremos com um alfabeto de 23 letras?

Queremos formar anagramas com 3 letras e temos 23 letras.

$$\overline{L_1}\,\overline{L_2}\,\overline{L_3}$$

Para a primeira letra, temos 23 disponíveis, restando 22 letras. Para a segunda letra do anagrama, podemos preenchê-la com 22 possíveis, restando 21, para a terceira letra do anagrama temos 21 possíveis, sendo assim $23\,.\,22\,.\,21 = 10\,626$ anagramas distintos.

Para resolvermos com a fórmula, note que queremos arranjar 23 letras do alfabeto 3 a 3, note que, se mudarmos a ordem das letras do alfabeto, temos um anagrama diferente, por exemplo, o anagrama ABC é diferente do anagrama ACB, então,

$$A_{23,3} = \frac{23!}{(23-3)!} = \frac{23!}{20!} = 23\,.\,22\,.\,21 = 10\,626$$

Ou seja, formaremos $10\,626$, anagramas distintos.

Exemplo 5: Considere os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5, quantos números distintos entre 100 e 1000 formaremos se o último algarismo for par?

O número que queremos terá 3 dígitos, equivale a dizer que temos que preencher 3 posições.

$$\overline{D_1}\ \overline{D_2}\ \overline{D_3}$$

Como temos uma restrição, o último número tem que ser par, então começaremos com ele. Para a posição da unidade, temos 2 possibilidades, ou seja, podemos preenchê-la com o número 2 ou o número 4.

$$\frac{}{D_1}\ \frac{}{D_2}\ \frac{2}{D_3}$$

Para os algarismos da centena e da dezena, faremos um arranjo de 4 algarismos 2 a 2.

$$A_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4\,.\,3\,.\,2.\,1}{2\,.\,1} = 12$$

Ou seja, esse preenchimento acontecerá de 12 maneiras.

Consequentemente, existem $2\,.\,A_{4,2} = 2\,.\,12 = 24$ maneiras de escrever um número entre 100 e 1000 que seja par com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5.

3.7 COMBINAÇÃO SIMPLES

Suponha que tenhamos p objetos distintos e, desses p objetos, escolheremos n objetos.

Para resolver esse problema, analisaremos a seguinte situação em que tenhamos p objetos distintos e escolheremos 3 sem reposição. Poderíamos, inicialmente, resolver pelo princípio multiplicativo $p.(p-1).(p-2)$, ou então pela fórmula de Arranjo $A_{p,3} = \frac{p!}{(p-3)!}$, porém não estaria correto.

Note que, ao escolhermos os objetos A, B e C, o grupo de objetos selecionados não muda se escolhermos B, C e A, com isso, contaremos o mesmo grupo de objetos o número de vezes que permutaremos esses três objetos, ou seja, $3\,.\,2\,.\,1 = 6$.

Logo, o número de vezes que selecionaremos 3 objetos dos p distintos disponíveis é dado por, $\frac{A_{p,3}}{3!} = \frac{p!}{3!(p-3)!}$.

Voltando ao problema inicial, teríamos então $\frac{A_{p,n}}{n!} = \frac{p!}{n!(p-n)!}$, e isso é o que chamamos de Combinação Simples de p objetos distintos, agrupados n a n, com p um número natural no qual $p > n$ e $p \geq 1$, representado por $C_{p,n}$, tal que

$$C_{p,n} = \frac{p!}{n!\,(p-n)!}$$

em que a escolha desses objetos difere entre si apenas pela natureza dos elementos, ou seja, importa somente quem participa do grupo e não a ordem.

Exemplo 1: De quantas maneiras colocaremos um time de voleibol com seis jogadores em quadra, tendo disponíveis 10 jogadores?

Resolveremos, utilizando o princípio multiplicativo, no qual, para escolher o primeiro jogador, temos 10 possibilidades distintas.

Após escolhido o primeiro jogador, restam 9 jogadores. Então, para escolher o segundo jogador, temos 9 possibilidades, restando 8 jogadores e assim por diante até escolhermos 6 jogadores distintos, isto é $10\,.\,9\,.\,8\,.\,7\,.\,6 = 30\,240$.

Porém, sabemos que, ao escolhermos os jogadores A, B, C, D, E e F, será o mesmo time em quadra se escolhermos os jogadores A, C, B, E e F.

Logo, contaremos o mesmo time $6! = 6\,.\,5\,.\,4\,.\,3\,.\,2\,.\,1 = 720$ vezes, consequentemente, o número de maneiras que podemos montar um time de basquete, tendo 10 jogadores disponíveis, é $\frac{30\,240}{720} = 42$.

No entanto, estamos agrupando 10 pessoas tomadas 6 a 6, não importando a ordem dos jogadores, logo, podemos resolver pela fórmula da combinação

$$C_{10,6} = \frac{10!}{6!\,(10-6)!} = \frac{10!}{6!\,4!} = \frac{10\,.\,9\,.\,8\,.\,7\,.\,6!}{6!\,.\,4\,.\,3\,.\,2\,.\,1} = \frac{5040}{24} = 210$$

Exemplo 2: Para a seleção brasileira, foram convocados dois goleiros, 6 zagueiros, 7 meios de campo e 4 atacantes. De quantos modos é possível escalar a seleção com 1 goleiro, 4 zagueiros, 4 meios de campo e 2 atacantes?

Primeiro contaremos de quantas formas possíveis escolheremos um goleiro dispondo de dois, logo temos 2 maneiras possíveis de escolher o goleiro.

Agora, escolheremos de quantas formas possíveis escolheremos quatro zagueiros, dispondo de seis. Nesse caso, escolheremos o primeiro zagueiro de 6 maneiras, o segundo zagueiro de 5 maneiras, o terceiro zagueiro de 4 maneiras e o quarto zagueiro de 3 maneiras, pelo princípio multiplicativo $6.5.4.3 = 360$. Porém, como a ordem em que escolhemos os zagueiros não importa, dessa forma contaremos o mesmo grupo $4! = 24$ vezes. Logo, escolheremos os zagueiros de $\frac{6.5.4.3}{4!} = \frac{360}{24} = 15$ maneiras.

Agora, verificaremos de quantas maneiras possíveis escolheremos quatro meios de campo, dispondo de sete. Podemos escolher o primeiro de 7 maneiras distintas, o segundo de 6 maneiras distintas, o terceiro de 5 maneiras distintas e o quarto de 4 maneiras distintas, pelo princípio multiplicativo $7.6.5.4 = 840$. Mas sabemos que a ordem não importa, então, contaremos o mesmo grupo $4! = 24$ vezes. Logo, podemos escolher os meios de campo de $\frac{7.6.5.4}{4!} = \frac{840}{24} = 35$ maneiras.

E, por fim, contaremos de quantas maneiras distintas escolheremos dois atacantes dispondo de 4. Podemos escolher o primeiro de 4 maneiras, o segundo de 3 maneiras, pelo princípio multiplicativo $4.3 = 12$. Porém, como a ordem não importa, estamos contando o mesmo grupo $2! = 2$ vezes. Logo, escolheremos os zagueiros de $\frac{4.3}{2!} = \frac{12}{2} = 6$ maneiras distintas. Portanto, podemos escolher a seleção brasileira de $2.15.35.6 = 6300$ maneiras distintas.

Se resolvêssemos esse exercício pela fórmula, faríamos uma $C_{2,1}$ para escolher o goleiro, uma $C_{6,4}$ para escolher os zagueiros, uma $C_{7,4}$ para escolher os meios de campo e uma $C_{4,2}$ para escolher os atacantes e pelo princípio multiplicativo teríamos $C_{2,1}.C_{6,4}.C_{7,4}.C_{4,2} = \frac{2!}{1!(2-1)!}.\frac{6!}{4!(6-4)!}.\frac{7!}{4!(7-4)!}.\frac{4!}{2!(4-2)!} == 2.15.35.6 = 6300$ maneiras distintas de escolher a seleção brasileira.

Exemplo 3: Quantas diagonais possui um polígono de n lados?

Como a diagonal é uma reta e, para traçarmos uma reta, precisamos de dois pontos, o polígono de n lados possui n vértices. Logo, para o primeiro ponto, temos n possíveis maneiras de escolher e, para o segundo ponto, temos $n - 1$ maneiras de escolher, pelo princípio multiplicativo temos $n.(n-1)$. Como dessa maneira contaremos a mesma reta $2! = 2$ vezes, pois o segmento de reta $\overline{AB}$ é o mesmo que $\overline{BA}$, logo, temos $\frac{n.(n-1)}{2}$. Porém, contaremos todas as retas possíveis que passam pelos n vértices, no entanto, contaremos também os lados desse polígono. Portanto, um polígono com n lados possui $\frac{n.(n-1)}{2} - n$ diagonais.

Se resolvermos, utilizando fórmula, basta fazer uma combinação $C_{n,2}$ assim contaríamos todas as retas que passam pelos n vértices do polígono, incluindo os lados, subtraindo os lados, então, teríamos $C_{n,2} - n = \frac{n!}{2!(n-2)!} - n = \frac{n.(n-1)}{2} - n$.

Exemplo 4: Têm-se 5 pontos sobre uma reta *R* e 8 pontos sobre uma reta *R'* paralela à *R*. Quantos quadriláteros convexos com vértices em 4 desses 13 pontos existem?

Para construir um quadrilátero, usaremos dois vértices na reta R e dois vértices na reta *R'*. Para o primeiro vértice na reta *R,* temos 5 maneiras distintas de escolher e, para o segundo vértice, temos 4 maneiras distintas de escolher, pelo princípio multiplicativo $5 \,.\, 4 = 20$. Porém, contaremos a mesma reta $2! = 2$ vezes, com isso, então, $\frac{5\,.\,4}{2!} = \frac{20}{2} = 10$ maneiras.

Agora contaremos de quantas maneiras possíveis escolheremos dois vértices na reta *R'*. Para o primeiro vértice, temos 8 maneiras distintas e, para o segundo vértice, temos 7 maneiras distintas de escolha, pelo princípio multiplicativo temos $8 \,.\, 7 = 56$ maneiras, porém estamos contando a mesma reta $2! = 2$ vezes, com isso temos $\frac{8\,.7}{2!} = \frac{56}{2} = 28$ maneiras distintas, pelo princípio multiplicativo $10 \,.\, 28 = 280$ maneiras de obter um quadrilátero dessa forma.

Se resolvermos, utilizando a fórmula, então, teríamos uma $C_{5,2}$ maneiras de combinar dois vértices na reta *R* e uma $C_{8,2}$ maneiras de combinar dois vértices na reta R' e pelo princípio multiplicativo temos $C_{5,2}.C_{8,2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} . \frac{8!}{2!(8-2)!} = 10 \,.\, 28 = 280$ maneiras distintas.

Exemplo 5: Quantos são os números naturais de 7 dígitos nos quais o dígito 4 figura exatamente 3 vezes e o dígito 8 exatamente 2 vezes?

Para colocar o primeiro dígito 4, escolheremos entre 7 posições, para colocar o segundo dígito 4, escolheremos entre 6 posições e, para o terceiro e último dígito 4 escolheremos entre 5 posições. Para o primeiro dígito 8, escolheremos entre 4 posições e, para o segundo dígito 8, escolheremos entre 3 posições. Para as duas posições que sobraram, escolheremos para uma delas entre 8 dígitos e, para a outra posição, escolheremos entre 8 dígitos. Então, pelo princípio multiplicativo $7 \,.\, 6 \,.\, 5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 8 \,.\, 8 = 161\,280$. Como a ordem entre os dígitos 4 não faz diferença e a ordem entre os dígitos 8 também não, então, iremos dividir por $3! = 6$ e $2! = 2$, com isso, teremos $\frac{7\,.\,6\,.\,5\,.\,4\,.\,3\,.\,8\,.\,7}{3!\,2!} = \frac{161\,280}{12} = 13\,440$.

Porém, excluiremos os casos em que o 0 se encontra no primeiro dígito, logo, para o primeiro dígito, preencheremos apenas com 1 número, em seguida, para o primeiro dígito 4, escolheremos entre 6 posições, para o segundo número 4, escolheremos entre 5 posições, para o terceiro número 4, temos 4 opções. Para o primeiro 8, escolheremos entre 3 posições e, para o segundo 8, escolheremos entre 2 posições, para a última posição, escolheremos entre 8 dígitos, com isso, $1\,.\,6\,.\,5\,.\,4\,.\,3\,.\,2\,.\,8 = 5760$. Como a ordem entre os dígitos 4 e entre os dígitos 8 não importa, dividiremos por $3! = 6$ e $2! = 2$, com isso, $\frac{1\,.6\,.5.4\,.3\,.2\,.8}{3!2!} = \frac{5760}{12} = 480$, subtraindo os resultados, $13\,440 - 480 = 12\,960$.

Se resolvêssemos pela fórmula, faríamos da seguinte forma, como a ordem em que colocaremos o dígito 4 não importa, temos uma $C_{7,3}$, pois escolheremos entre 7 posições para colocar o dígito 4, restando 4 posições para alocarmos o dígito 8. Como a ordem entre eles não importa, temos uma $C_{4,2}$, restando dois dígitos para preenchê-los e dispomos de 8 dígitos, pois não podemos utilizar o dígito 4 e o dígito 8, com isso, para o penúltimo dígito restante, preencheremos de 8 maneiras e, para o último dígito, também preencheremos de 8 maneiras, pelo princípio multiplicativo, $C_{7,3}.\,C_{4,2}.\,8\,.\,8$.

Porém, ainda subtrairemos os números que começam com o 0. No primeiro dígito, então, temos a possibilidade de colocar apenas 1 número 0, e, para o dígito 4, agora, escolheremos entre 6 posições. Como a ordem entre eles não importa, então, possuímos $C_{6,3}$ maneiras de alocar o número 4, restando 3 posições, com isso, para o dígito 8, temos $C_{3,2}$ maneiras de alocar, restando um dígito para preenchê-lo e, para ele, dispomos de 8 dígitos, com isso, temos $1\,.\,C_{6,3}.\,C_{3,2}\,.8$, logo $C_{7,3}.\,C_{4,2}.\,8\,.\,8 - \left(1\,.\,C_{6,3}.\,C_{3,2}\,.\,8\right) = 12\,960$.

3.8 PERMUTAÇÃO COM REPETIÇÃO

Quantos anagramas formamos com a palavra MATEMÁTICA? A resposta correta não é P_{10}, pois temos letras que se repetem, temos dois M, três A e dois T e, com isso, a ordem entre as letras que se repetem não importa. Por exemplo, se em um anagrama dessa palavra trocar a ordem dos dois M, não produz um novo anagrama. Então, possuímos duas maneiras de resolver:

i) Como a ordem das letras repetidas não importa, então para a letra M, teremos uma $C_{10,2}$, restando 8 lugares, para a letra A, temos $C_{8,3}$, restando 5 lugares, para a letra T, possuímos uma $C_{5,2}$, restando três lugares para completarmos. Para o primeiro lugar, temos 3 letras restantes para preenchê-lo, para o segundo lugar, temos 2 letras restantes para preenchê-lo, restando apenas 1 letra para preencher o último lugar. Logo, o número de anagramas é

$$C_{10,2}C_{8,3}C_{5,2}.3! = 45\,.\,56\,.\,10\,.\,6 = 151\,200$$

ii) Faremos uma permutação de 10, letras repetindo 2 letras M, 3 letras A e outras 2 letras T, temos

$$P_{10}^{2,3,2} = \frac{10!}{2!\,3!\,2!} = 151\,200$$

Note que

$$C_{10,2}C_{8,3}C_{5,2}.3! = \frac{10!}{8!\,2!}\,.\frac{8!}{5!\,3!}\,.\frac{5!}{3!\,2!}\,.3! = \frac{10!}{2!\,3!\,2!} = P_{10}^{2,3,2}$$

No caso geral, temos $\alpha + \beta + \cdots + \gamma + \delta = n$, então

$$C_{n,\alpha}.C_{n-\alpha,\beta}\ldots C_{n-\alpha-\beta-\cdots-\gamma,\delta} =$$

$$= \frac{n!}{(n-\alpha)!\,\alpha!}\,.\frac{(n-\alpha)!}{(n-\alpha-\beta)!\,\beta!}\cdots\frac{(n-\alpha-\beta-\cdots-\gamma)!}{(n-\alpha-\beta-\cdots-\gamma-\delta)!\,\delta!}$$

$$= \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\ldots\gamma!\,\delta!} = P_n^{\alpha,\beta,\ldots,\gamma,\delta}$$

Exemplo 1: Quantos são os anagramas da palavra “URUGUAI”?

Na palavra “URUGUAI” possuímos 7 letras, repetindo 3 letras U, com isso, o número de anagramas é

$$P_7^3 = \frac{7!}{3!} = 840$$

Exemplo 2: Quantos anagramas têm a palavra “URUGUAI”, começando por uma vogal?

Primeiro contaremos quantos anagramas formaremos, começando com a vogal A, com isso, vamos permutar as 6 letras restantes, repetindo 3 letras U, então, $P_6^3 = \frac{6!}{3!}$

anagramas. Agora contaremos quantos anagramas começam com a vogal I, novamente uma permutação com as 6 letras restantes, repetindo 3 letras U, então, $P_6^3 = \frac{6!}{3!}$. Por último, contaremos quanto anagramas começam com a vogal U, para isso, iremos permutar as 6 letras restantes. Porém, agora, repete apenas 2 letras U, então, $P_6^2 = \frac{6!}{2!}$. Logo, o número de anagramas é

$$2P_6^3 + P_6^2 = 2.\frac{6!}{3!} + \frac{6!}{2!} = 2\,.\,120 + 360 = 600$$

Exemplo 3: Quantos números de 7 dígitos, maiores que $6\,000\,000$, formaremos usando apenas os algarismos $1, 3, 6, 6, 6, 8, 8$?

Como o número que formaremos, tem que ser maior que $6\,000\,000$ e dispomos dos números $1, 3, 6$ e 8, então, o número tem que começar com 6 ou 8. Contaremos quantos números formaremos começando com o número 6, faremos uma permutação com os 6 números restantes, repetindo o número 6 duas vezes (pois o primeiro 6 está na primeira posição) e o número 8 duas vezes, $P_6^{2,2} = \frac{6!}{2!2!}$. Agora, contaremos quantos números formaremos, começando com o dígito 8, novamente faremos uma permutação com 6 dígitos, mas, agora, repetindo 3 números 6, nessas condições, temos, $P_6^3 = \frac{6!}{3!}$ números. Logo, o total de números que podemos formar

$$P_6^{2,2} + P_6^3 = \frac{6!}{2!\,2!} + \frac{6!}{3!} = 180 + 120 = 300$$

Exemplo 4: Se um time de futebol jogou 13 partidas em um campeonato, tendo perdido 5 jogos, empatado 2 e vencido 6 jogos, de quantos modos pode isto ter ocorrido?

Faremos uma permutação de 13 elementos, repetindo 5, 2 e 6 elementos. Logo, o número de maneiras que essas partidas podem ter acontecido é

$$P_{13}^{5,2,6} = \frac{13!}{5!\,2!\,6!} = 36\,036$$

Exemplo 5: Quantos números de 5 algarismos podem ser formados, usando apenas os algarismos $1, 1, 1, 1, 2$ e 3?

Calcularemos primeiro, deixando um número 1 de fora, com isso, faremos uma permutação com 5 elementos repetindo 3 números, temos, $P_5^3 = \frac{5!}{3!}$. Agora contaremos, deixando o número 2 de fora, faremos uma permutação com 5 elementos repetindo 4 números, temos, $P_5^4 = \frac{5!}{4!}$. E, por último, contaremos quantos números formaremos, deixando o algarismo 3 de fora, faremos uma permutação de 5 elementos, repetindo 4 números, com isso, $P_5^4 = \frac{5!}{4!}$. Logo, podemos formar

$$P_5^3 + 2.P_5^4 = \frac{5!}{3!} + 2.\frac{5!}{4!} = 20 + 2\,.5 = 20 + 10 = 30$$

3.9 COMBINAÇÕES COMPLETAS

De quantas maneiras podemos comprar 3 refrigerantes, sabendo que numa loja há 5 tipos?

A resposta correta não é $C_{5,3}$, dessa forma, contaríamos de quantas maneiras podemos comprar 3 refrigerantes, dispondo de 5 tipos sem repeti-los. Mas, nesse problema, compraremos os 3 refrigerantes, podendo repetir os sabores. Supondo que nessa loja há refrigerantes do tipo a, b, c, d, e, temos as seguintes possibilidades

aaa	aab	aac	aad	aae
bba	bbb	bbc	bbd	bbe
cca	ccb	ccc	ccd	cce
dda	ddb	ddc	ddd	dde
eea	eeb	eec	eed	eee
abc	abd	abe	acd	ace
ade	bcd	bce	bde	cde

Podemos observar que a solução é 35 maneiras e que $C_{5,3} = 10$. Logo, a resposta correta é uma combinação completa $CR_{5,3} = 35$. De maneira geral, temos que $C_{n,p}$ é o número de modos que escolheremos n objetos distintos dentro de p objetos dados, e $CR_{n,p}$ é o número de modos que podemos escolher n objetos distintos ou não dentro de p objetos dados.

Para resolvermos $CR_{5,3}$, é o mesmo que resolver a equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3$$

sendo x_1 o primeiro sabor do refrigerante, x_2 o segundo sabor do refrigerante, ..., x_5 o quinto sabor do refrigerante e $x_1, x_2,\ x_3,\ x_4$ e x_5 inteiros e não negativo, note que podemos escolher

$$* + * + * + \quad + \quad = 3$$

ou seja, nesse caso escolhemos 1 do primeiro sabor, 1 do segundo sabor e 1 do terceiro sabor, ou podemos escolher

$$**+\ \ +\ \ +*+\ \ =3$$

nesse caso, escolhemos 2 refrigerantes do primeiro sabor e 1 do quarto sabor. Nota-se que estamos permutando 7 sinais, repetindo 3 asteriscos e 4 sinais de mais, com isso, temos

$$P_7^{3,4}=\frac{7!}{3!\,4!}=C_{7,3}$$

Logo, $CR_{5,3}=C_{7,3}=35$.

Generalizando, para calcular $CR_{n,p}$, isto é, para determinar o número de soluções inteiras e não negativas de $x_1+x_2+\cdots x_n=p$, teríamos p asteriscos e $n-1$ sinais de mais. Logo

$$CR_{n,p}=P_{n+p-1}^{p,n-1}=\frac{(n+p-1)!}{p!\,(n-1)!}=C_{n+p-1,p}$$

Exemplo 1: De quantos modos é possível comprar 4 sorvetes em uma loja que os oferece em 7 sabores?

Como escolheremos 4 sorvetes, repetindo os sabores ou não, então resolveremos uma $CR_{n,p}$, sendo x_1 o primeiro sabor, x_2 o segundo sabor, ..., x_7 o sétimo sabor. Para resolver esse problema, é o mesmo que determinar o número de soluções inteiras e não negativas de

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7=4$$

escolhendo 1 do primeiro sabor, 1 do segundo sabor e 2 do segundo sabor, ficando

$$*+*+**++++=4$$

note que, estamos permutando 10 elementos repetindo 4 asteriscos e 6 sinais de mais. Logo, o número de maneiras que podemos escolher os sorvetes é

$$CR_{7,4}=P_{10}^{4,6}=C_{10,4}=\frac{10!}{4!\,(10-6)!}=210$$

Poderíamos também resolver direto, apenas com a fórmula, como sabemos que podemos escolher os sorvetes com sabores repetidos ou não, então, temos uma combinação completa, logo

$$CR_{7,4}=C_{7+4-1,4}=C_{10,4}=210$$

Exemplo 2: Quantos são os anagramas da palavra “PIRACICABA” que não possuem duas letras A juntas?

Primeiro faremos uma permutação com as letras com exceção das 3 letras A, com isso, permutaremos 7 letras, repetindo a letra I 2 vezes e a letra C 2 vezes, temos, então, $P_7^{2,2}$, note que

_ P _ I _ R _ C _ I _ C _ B _

temos 7 lugares para colocarmos as 3 letras A que faltam, com isso, temos uma $C_{8,3}$. Logo, o número de anagramas é

$$P_7^{2,2} \,.\, C_{8,3} = \frac{7!}{2!\,2!} \,.\, \frac{8!}{3!\,5!} = 1260\,.\,56 = 70\,560$$

Podíamos resolver da seguinte forma, note que, ao posicionarmos as três letras A, temos agora que decidir quantas letras colocaremos nos 4 lugares

_ A _ A _ A _

devemos escolher $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$, onde x_i representa o número de letras no i-ésimo espaço, em que $x_2 \geq 1$ e $x_3 \geq 1$, para que as letras A não fiquem juntas, façamos, então

$$x_2 = 1 + y_2$$

$$x_3 = 1 + y_3$$

substituindo,

$$x_1 + 1 + y_2 + 1 + y_3 + x_4 = 7$$

$$x_1 + y_2 + y_3 + x_4 = 5$$

E, para encontrarmos as soluções inteiras não negativas da equação, faremos $CR_{4,5} = C_{4+5-1,5} = C_{8,5}$. Temos agora que colocar as letras P, R, B, I, I, C, C e faremos de $P_7^{2,2}$. Logo, o número de maneiras que podemos escrever o anagrama

$$C_{8,5}\,.\,P_7^{2,2} = 56\,.\,1260 = \ 70\,560$$

Exemplo 3: A fábrica X produz 8 tipos de bombons que são vendidos em caixas de 30 bombons (de um mesmo tipo ou sortido). Quantas caixas diferentes podem ser formadas?

Para resolver esse exercício, equivale a encontrar as soluções inteiras e não negativas da equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 30$$

em que x_1, x_2, ..., x_8 é a quantidade de bombons de cada tipo. Resolver essa equação, é o mesmo que resolver uma combinação completa $CR_{8,30}$, pois, como dito no enunciado, os bombons podem ser de um mesmo tipo ou sortido, logo, o número de caixas de bombons que podemos fazer dessa forma é

$$CR_{8,30} = C_{37,30} = 10\ 295\ 472$$

Exemplo 4: De quantos modos podem ser pintados 6 objetos iguais, usando 3 cores diferentes?

Resolver esse problema, é o mesmo que resolver a equação

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

em que x_1, x_2 e x_3 é o número de objetos pintados de cada cor, isso é o mesmo que resolver uma combinação completa em que $CR_{3,6}$, pois, podemos pintar e repetir as cores a serem usadas, logo o número de modos que podemos pintar 6 objetos iguais dispondo de 3 cores diferentes, é

$$CR_{3,6} = C_{8,6} = 28$$

Exemplo 5: Quantas são as soluções inteiras e não negativas de

$$x + y + z + w < 6?$$

Isso é o mesmo que resolvermos as seguintes equações

i) $x + y + z + w = 0$

ii) $x + y + z + w = 1$

iii) $x + y + z + w = 2$

iv) $x + y + z + w = 3$

v) $x + y + z + w = 4$

vi) $x + y + z + w = 5$

Com isso, para resolvermos cada equação, faremos uma combinação completa

i) $CR_{4,0} = C_{3,0} = 1$

ii) $CR_{4,1} = C_{4,1} = 4$

iii) $CR_{4,2} = C_{5,2} = 10$

iv) $CR_{4,3} = C_{6,3} = 20$

v) $CR_{4,4} = C_{7,4} = 35$

vi) $CR_{4,5} = C_{8,5} = 56$

Logo, o número de soluções inteiras não negativas que a equação $x + y + z + w < 6$ possui é $1 + 4 + 10 + 20 + 35 + 56 = 126$.

4 EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E A PANDEMIA DE COVID-19

Como visto anteriormente, a intenção era estudar as relações entre os acertos e os erros, ocorridos em questões que envolviam Análise Combinatória e elaborar estratégias de ensino que pudessem colaborar com a construção dos conceitos envolvidos em tal tópico.

No entanto, devido à pandemia de COVID – 19, no ano de 2020, os professores e as instituições de ensino brasileiro foram abruptamente levados à busca de meios que pudessem garantir a comunicação com seus alunos que não fossem presenciais e posteriormente o estabelecimento de canais virtuais que possibilitassem a realização de atividades acadêmicas e aulas remotas. No Estado de São Paulo, na segunda-feira do dia 16 de março de 2020, iniciou-se o afastamento social e a consequente dispensa dos alunos das escolas. O Governo do Estado publicou a resolução SEDUC 45/2020, que regulamentava a realização e o registro de atividades escolares não presenciais pelas instituições vinculadas ao Sistema de Ensino daquele estado.

Desde o início da pandemia no Brasil, os professores tiveram que mudar suas práticas pedagógicas para continuar a ministrar aulas, passando do ensino presencial para o ensino remoto sem prévio planejamento.

No decorrer desse período, o Governo do Estado de São Paulo disponibilizou ferramentas, aplicativos e treinamentos para preparar os professores da Rede Pública para a implementação do ensino remoto. Porém, não havia instruções nas semanas iniciais do afastamento social e, sendo assim, cada professor utilizou a ferramenta das TICs (Tecnologia da Informação e Comunicação) que tinha mais familiaridade.

Em março de 2020, na primeira reunião "*on-line*" da escola da Rede Pública, Pedro Nunes Rocha da cidade de Franca no Estado de São Paulo, foi combinado que os professores realizariam "*lives*" no Instagram para sanar possíveis dúvidas das atividades "*on-line*". Foi nesse panorama que em março de 2020, a professora de Matemática da 3ª série do Ensino Médio das turmas A e B, movida pela insegurança de seus alunos em "perder o ano", realizou duas "*lives*" no Instagram, com uma audiência média de 13 alunos, sendo que as duas turmas totalizavam 48 alunos.

Nessa época, o Instagram era uma rede social que disponibilizava o recurso de transmissões ao vivo, chamadas de "*lives*", no qual a interação de outros participantes ocorria através de um "*chat*". Para a realização dessas "*lives*", foi criado um perfil profissional para Professora, sendo que a negociação dos dias e horários das *lives* foi feita por meio de grupos de WhatsApp. Para a realização de duas aulas de uma hora cada, a professora organizou slides no PowerPoint com o tema de Geometria Analítica, abordando os conteúdos a seguir: Distância entre dois pontos; Ponto médio; Equação da reta; Posição relativa entre as retas.

Durante a realização das “*lives”*, a Professora utilizou a câmera de um celular, para transmitir simultaneamente a resolução de exercícios em folhas de sulfite. As atividades, realizadas durante as aulas *“on-line*”, eram diferentes das atividades solicitadas pela Professora para que os alunos entregassem, porém, auxiliavam-nos na resolução destes.

Após o término das “*lives”*, a Professora anexou no slide as resoluções dos exercícios, realizados durante a transmissão, e as enviou aos alunos via WhatsApp. A princípio, foram enviadas atividades através do “*site”* da escola, que deveriam ser entregues assim que retornassem às aulas presenciais.

Após as “*lives*” a Professora continuou a usar essa ferramenta como forma de tentar motivar seus alunos durante o ano de 2020, inserindo curiosidades matemáticas, desafios, recados escolares, entre outros.

Em novembro de 2020, ainda permanecia a quarentena da COVID-19 e as escolas permaneciam fechadas. Já mais familiarizada com as ferramentas de videoconferência, a Professora ofereceu uma oficina de Análise Combinatória, para os alunos do: 9° ano do Ensino Fundamental II e dos 1°, 2° e 3° ano do Ensino Médio da Escola Estadual Pedro Nunes Rocha. Matricularam-se no curso 5 alunas do 9° ano do Ensino Fundamental II, 2 alunas do 2° ano do Ensino Médio e 5 alunas do 3° ano do Ensino Médio.

A oficina foi ofertada em grupos de WhatsApp das turmas citadas e os alunos tiveram uma semana para a realização da inscrição. Após tal processo, a Professora criou um grupo de WhatsApp especificamente para a comunicação entre ela e as alunas.

A oficina efetivou-se de maneira totalmente “*on-line*”, utilizando a ferramenta de videoconferência “Google Meet”, pois os alunos não precisavam fazer o “*download*” do aplicativo, bastando apenas possuírem uma conta da Google e estarem com sua conta de “*e-mail*” aberta durante a videoconferência. A professora criava o link da aula pelo computador e dispunha também o seu celular, transmitindo as folhas de sulfite que usava para resolver e discutir os exercícios durante as aulas.

A oficina durou 4 semanas. Os encontros aconteciam às segundas, quartas e quintas-feiras, totalizando 12 encontros. Apesar dos 12 inscritos, a participação foi apenas de 8 alunas.

Para o primeiro encontro, selecionou 8 questões de Análise Combinatória que compunham as avaliações da primeira aplicação da prova do ENEM de 2009 até 2019. Nestas 11 avaliações, encontravam-se 22 questões de Análise Combinatória, considerando apenas a primeira aplicação da prova. Essas questões foram adaptadas para a atividade e, por isso, as alternativas foram removidas.

A seleção de questões de Análise Combinatória, mencionada anteriormente, serviu como parâmetro para observar a interação dos alunos com o conteúdo assim como as possíveis estratégias utilizadas para a resolução, uma vez que os alunos enviariam as resoluções para a Professora por WhatsApp.

Nas aulas seguintes, uma sequência de exercício foi resolvida, utilizando a abordagem Resolução de Problemas. Esses exercícios abordados não eram os mesmos da atividade utilizada como parâmetro, porém eram exercícios que tinham como objetivo a aprendizagem dos conteúdos envolvidos, preparando os alunos para resolverem questões semelhantes às da atividade proposta, por meio da resolução de problemas.

Os temas trabalhados na oficina foram: Princípio da Contagem (Princípio Multiplicativo), Permutação, Combinação, Arranjo, Permutação Circular, Permutação com Repetição e Combinação Completa. Durante os encontros, a Professora valeu-se o método de resolução de problemas.

No penúltimo encontro, a Professora enviou novamente a atividade utilizada para observar as estratégias dos alunos para a resolução dos problemas para realizarem e a enviassem novamente para a Professora. No último encontro virtual, aconteceu a discussão e a resolução destas questões propostas.

Na primeira seleção de questões, todas as 8 alunas (3 alunas do 9° ano do Ensino Fundamental II e 5 alunas da 3ª série do Ensino Médio) enviaram suas resoluções, porém, quando foi reaplicada a atividade, apenas 4 alunas da 3ª série do Ensino Médio cumpriram o proposto.

Com o retorno das aulas presenciais, a Professora decidiu trabalhar as atividades propostas na Oficina para os alunos do 2° ano do Ensino Médio. Nesse novo cenário, ainda durante a Pandemia de Covid-19, a presença dos alunos na escola não era obrigatória.

Após a aplicação da atividade parâmetro utilizada para o planejamento dos conteúdos a serem discutidos, iniciaram-se as aulas referentes ao Princípio Multiplicativo e a metodologia, utilizada nesta aula, foi expositiva e dialogada, resolvendo os exercícios na lousa. Motivada pelo pedido de um dos alunos para poder resolver novos exercícios, a Professora elaborou uma lista de atividades extras e promoveu a discussão e a resolução desta em grupos.

A partir desse momento, a professora levava-os para a sala de informática para que os alunos realizassem pesquisas sobre o conteúdo que seria abordado, sem indicação de sites e vídeos, resolviam exemplos e, somente depois, reuniram-se em grupos para a resolução dos exercícios solicitados pela professora, que foram posteriormente corrigidos em sala.

Através da metodologia ativa, conhecida como de Sala de Aula Invertida, ocorreu a oficina de Análise Combinatória por 8 semanas, com 5 aulas semanais de 45 minutos cada.

A metodologia da Sala de Aula Invertida faz parte das Metodologias Ativas e foi escolhida para desenvolver esse trabalho por incentivar uma postura protagonista dos alunos no processo de aprendizagem. Nessa perspectiva, o papel do professor passa a ser de orientador, facilitador do conhecimento, auxiliando-os em todo o processo (Marques, 2021).

Na metodologia Sala de Aula Invertida, corresponde ao processo inverso do ensino tradicional, no qual inicialmente o professor expõe o conteúdo e consequentemente os alunos fazem lição em casa referente ao assunto tratado, para depois corrigir em aula, os alunos pesquisam em casa para que, em sala de aula, com o auxílio do professor, resolvam os exercícios e em seguida compartilhem suas resoluções e dúvidas aos seus colegas e ao seu professor.

4.1 RELATO DAS ATIVIDADES

Durante a preparação do material para as “*lives”,* preocupações e inseguranças surgiam de como seriam as aulas, uma vez que a Professora não possuía muitos recursos. Durante as “*lives”*, planejou-se filmar a tela do computador com o celular, o que poderia gerar uma má qualidade da imagem disponibilizada aos alunos.

Outras pesquisas, assim como Silveira (2021), também citam essa preocupação em relação à forma em que essas atividades “*on-line*” chegariam para seus alunos, uma vez que dependia-se, além dos recursos que cada professor tinha, do nível de apropriação tecnológica.

Sabe-se que não dá para prever que se enfrentaria uma pandemia de um vírus em que, para segurar a disseminação dessa doença, a melhor maneira seria o isolamento social, e, uma forma de amenizar essa insegurança diante de um momento inédito na educação, para Trezzi (2021, p.7), a escola

> "… precisa ser mais tecnológica, estar aberta para o virtual, investir mais em atividades "*on-line*" preparar professores para o uso de tecnologias de informação e comunicação, incrementar os processos de gestão para aprender a lidar com o novo e inesperado, deixar de ser analógica para tornar-se digital …"

Mas, por outro lado, isso também não resolve o problema que é muito mais complexo, pois 25% das famílias ainda não têm acesso à internet (TREZZY, 2021, p 10).

Uma outra preocupação era de como se daria a interação professor-aluno, pois o único meio de comunicação entre eles era o "*chat*". Durante as "*lives*", havia uma demora no tempo de aguardo entre a postagem no "*chat*" pelo aluno e o recebimento da mensagem pelo professor e os outros integrantes da reunião virtual, o que poderia ocasionar uma mudança de postura do professor, passando a não questionar os alunos sobre suas dúvidas e apenas seguir com suas explicações.

Na Oficina "*on-line*" de Análise Combinatória, a Professora possuía alguma experiência nas plataformas de videoconferência; os alunos podiam abrir o microfone e falar com a Professora, o que agilizava a interação professor-aluno, em relação às "*lives*". No entanto, essa interação ainda era insuficiente, por vários motivos, eles preferiram não perguntar ou perguntavam poucas vezes, mantendo suas câmeras desligadas.

Um dos problemas encontrados, durante as aulas remotas, foi a interação entre professor-aluno, também relatados em outros trabalhos como, por exemplo Grillo, Péskiva e Lee (2020), assim como Queiroz, Sousa e Paula (2021), que afirmam sobre a importância da aprendizagem colaborativa, dada a heterogeneidade das turmas, em que o aprendizado compartilhado faz com que uns aprendam com os outros.

A utilização da rede social, Instagram, com alunos dos Anos Finais do Ensino Fundamental, ainda que com postagens de curiosidades matemáticas, desafios e recados da escola, não foi bem aceita na época por parte dos pais, pois nem todos os alunos possuíam uma conta no Instagram, ou ainda nem todos os pais permitiam que seus filhos utilizassem essa rede social.

No entanto, Monteiro (2020) afirma que, com o período de pandemia, as redes sociais da escola ganharam um espaço bem maior e se ampliaram, como forma de manter o envolvimento da comunidade, pais e responsáveis no contexto escolar, mesmo que de forma virtual.

Um outro ponto a ser considerado é que, tanto nas "*lives*" quanto nas transmissões pelo Google Meet, o número de participantes foi pequeno. As aulas remotas não atingiram um número significativo de alunos sendo justificado por falta de aparelho celular ou computador, falta de acesso à internet, entre outros.

Nota-se que a pandemia de COVID-19 trouxe uma realidade educacional que já era conhecida, segundo Trezzi (2021, p.3) essa realidade

> "mostrou-se extremamente cruel e desumana, pois, além de acentuar a desigualdade, fez com que muitas famílias, que já passavam privações, economizassem ainda mais para a aquisição de equipamentos, ainda que rudimentares, para acessar as aulas remotas. Outros sequer conseguiram. Há que se considerar ainda aquelas crianças que recebiam alimentação na escola e, de uma hora para outra, perderam o benefício."

Além do número de alunos ser abaixo do esperado nas oficinas "*on-line*", observou-se também que a frequência dos alunos nas videoconferências foi diminuindo com o passar das semanas. As possíveis causas que levaram a baixa presença de alunos nas "*lives*" são: locais inadequados ao estudo, falta de recurso físico, além de instabilidade na internet no período das transmissões, entre outros.

Durante a Oficina realizada presencialmente para os alunos do 2° ano do Ensino Médio, a Professora percebeu que os alunos questionavam um pouco mais, e ela conseguia acompanhar a resolução dos exercícios e auxiliá-los, mas salienta-se que se tratava de uma turma pequena, pois a presença ainda não era obrigatória.

Uma das grandes preocupações nesse período pandêmico e pós-pandêmico foi a evasão desses alunos, principalmente do Ensino Médio. Segundo dados do IBGE (2019), os maiores motivos para que os alunos dessa faixa etária deixem de frequentar a escola é a necessidade de trabalhar e o não interesse em estudar.

Trezzy (2021) faz uma interpretação desses dados, afirmando que os "jovens brasileiros não estão encontrando na escola um espaço que os prepare para o trabalho; ou então simplesmente estão sendo excluídos da escola porque percebem que é mais útil trabalhar do que estudar" (TREZZY 2021, p. 11).

Na pesquisa realizada por Jung *et. al* (2021) com professores de quatro escolas no Estado do Rio Grande do Sul, quando perguntado quais os maiores receios desses professores em relação ao retorno às aulas presenciais, algumas respostas estavam relacionadas à evasão escolar, podendo agravar-se após esses dois anos de pandemia.

Silveira (2021) e Monteiro (2020) afirmam que para alunos que não possuíam recursos necessários para a execução das atividades "*online*" eram distribuídos materiais impressos.

Analisando a primeira aplicação da atividade parâmetro, tanto na Oficina "*on-line*" quanto na presencial, 9 alunos em cada modalidade entregaram a atividade, totalizando 18 alunos. Já na segunda aplicação, 4 alunos da Oficina "*on-line*" entregaram e 15 alunos da Oficina presencial, totalizando 19 alunos. Comparando o número de acertos na primeira e na segunda aplicação, houve uma melhora na porcentagem de acerto, observe a Tabela 6 abaixo.

Tabela 6 - Porcentagem de acertos das questões das atividades parâmetro

Questões	Primeira Aplicação	Segunda Aplicação
1	5,6	21,1
2	5,6	15,8
3	11,1	26,3
4	0	10,5
5	5,6	26,3
6	55,6	57,9
7	11,1	21,1
8	5,6	15,8

Fonte: Elaborada pela autora, 2022

Se separadas as questões da maneira em que analisadas as questões do ENEM, nota-se que 3 questões obtiveram entre 0 a 20% de acertos, 4 questões alcançaram entre 20 a 40% de acertos e apenas uma atingiu acima de 40% dos alunos que acertaram após as Oficinas, mas, mesmo assim, essa melhora não foi tão significativa.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como visto anteriormente, a Análise Combinatória é um dos conteúdos tidos como mais difíceis tanto para os professores quanto para os alunos do Ensino Médio, e foi uma das questões do ENEM de 2017 com o menor índice de acerto. Dessa forma, com o intuito de contribuir com o ensino desse conteúdo as questões do ENEM, utilizadas nas oficinas, podem ser encontradas no Anexo E.

Quando analisados os documentos que norteiam e orientam a educação no Brasil e a abordagem que eles trazem para o ensino de Análise Combinatória, pondera-se que a BNCC trouxe esse objeto de conhecimento para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental, no qual era uma crítica feita por educadores e pesquisadores da área. Também verifica-se que, tanto no PCN quanto na BNCC, o uso de fórmulas para o ensino de Análise Combinatória deve ser uma consequência do raciocínio combinatório.

Observando os índices de acertos na avaliação do ENEM de 2017, de modo geral, percebe-se um quadro preocupante do Ensino de Matemática no País e a pandemia de COVID-19 no ano de 2020 está contribuindo para que esse cenário se acentue ainda mais.

O afastamento social e o fechamento das escolas trouxeram uma outra realidade para o ensino, em que professores e alunos tiveram que se relacionar de forma remota, fazendo com que os alunos necessitassem de alguns recursos, como internet, computador ou celular, para terem um acompanhamento maior e para fazerem as atividades, aumentando assim a desigualdade, pois nem todos os alunos que possuíam esses recursos.

Observa-se que, durante as aulas, em que foram realizadas as "*lives*" e a Oficina "*on-line*" ou durante as aulas presenciais não obrigatórias, a quantidade de alunos que participaram foi muito baixa, causando uma defasagem ainda maior de aprendizagem do aluno do Ensino Público, sendo a falta de recursos, citada acima, ou a necessidade de trabalhar, um dos possíveis motivos que contribuíram para esse cenário.

Em algumas escolas, para tentar sanar essa desigualdade, distribuíram materiais impressos para alunos que não possuíam recursos para a execução das atividades "*on-line*".

Acredita-se que um ponto negativo das aulas na forma remota, quando comparadas às aulas presenciais, foi a interação professor-aluno, onde o aluno fica mais inibido para perguntar, talvez por estarem acostumados com outro modelo, podendo ser atendido individualmente, questionando e tirando suas dúvidas.

Nota-se que as aulas realizadas no Instagram trouxeram uma nova perspectiva de uso das redes sociais, tanto para os alunos, quanto para a Professora, que começou a passar desafios para os alunos nessa plataforma, como uma maneira de interagir com eles e motivá-los, além de fazer divulgações de outros projetos por esse canal e avisos da escola, assim como em outras escolas em que o uso dessas mídias foi potencializado para haver uma comunicação maior entre escola e família.

Um ponto a ser observado é que, durante esse período pandêmico, professores e instituições buscaram novas ferramentas e algumas delas incluíram em suas práticas docentes das quais talvez não teriam contato se não fosse esse momento.

Essa experiência também nos fez refletir sobre a importância da inclusão digital como uma importante ferramenta na construção do cidadão, pois muitos não sabiam enviar um "*e-mail*", fazer uma pesquisa, entre outras coisas mais simples.

Hoje já existem muitos relatos e pesquisas referentes a esse momento de pandemia, e ainda, há necessidade de muito estudo para identificar os impactos e as possibilidades que esse período trouxe para a educação.

REFÊRENCIA

ANDRADE, Dalton Francisco; TAVARES, Heliton Ribeiro; VALLE, Raquel da Cunha. **Teoria da Resposta ao Item:** conceitos e aplicações. SINAPE 2000. Disponível em https://docs.ufpr.br/~aanjos/CE095/LivroTRI_DALTON.pdf. Acesso em: 15 mai. 2021.

BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. **História da matemática**. 3 ed. São Paulo: Blucher, 2012. 504 p.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC/ Secretaria de Educação Básica, 2018.

BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases**. LDB. 9394/1996.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília, DF. 1997

BRASIL. Ministério da Educação. **Exame Nacional do Ensino Médio: Fundamentação teórico-metodológica**. Brasília, DF. 2005.

BRASIL. Ministério da Educação. **Exame Nacional do Ensino Médio**: **Escalas de Proficiência 1998/2008.** Brasília, DF. 2018.

BRASIL. PCN, Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática. **Secretária de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF**, 1998.

CARLOS, Pablo Rafael de Oliveira. **Uma Análise do Desempenho dos Estudantes no exame Nacional do Ensino médio e as Contribuições para o Ensino-Aprendizagem de Física**. Dissertação (Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, MG, 2016.

DELARAÇÃO MUNDIAL SOBRE EDUCAÇÃO PARA TODOS (conferêcia de Jomtien - 1990). Disponível em: https://www.unicef.org/brazil/declaracao-mundial-sobre-educacao-para-todos-conferencia-de-jomtien-1990. 1990. Acesso em: 20 mar. 2021.

GARCIA, Jorge Leonardo. **Busca de novos indicadores de aprendizado em Matemática através da comparação entre as bases de dados do ENEM 2017 e Saeb 2017.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, MG, 2019.

GRILLO, Angela Teodoro; PEŠKOVÁ, Michaela; Lee, Jackeline. **Ensino de línguas e culturas estrangeiras em tempos de (pós) pandemia**: desafios e aprendizagens de educadores na china. Revista leia escola, v. 20, n. 3, p. 134-142, 2020.

IBGE. Educação 2019 – PNAD Contínua. Disponível em: https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv101736_informativo.pdf. Acesso em 05 jun. 2022.

JUNG, Hildegard Susana et al. **Relações no ambiente escolar pós-pandemia:** enfrentamentos na volta às aulas presenciais. 2021.

LIMA, Elon Lages. CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **Temas e problemas elementares**. 2 ed. Rio de Janeiro, RJ: SBM, Coleção do Professor de Matemática. 2006. 256p.

MARQUES, Bruna Seadi Lima. **Sala de aula invertida ao ensino Remoto:** Uma proposta de ensino híbrido aplicado à Análise Combinatória. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Goytacazes, RJ, 2021.

MONTEIRO, Edna Câmara. EDUCAÇÃO NA PANDEMIA: A EXPERIÊNCIA DE UMA ESCOLA DA REDE MUNICIPAL DE ENSINO DE CAMPINA GRANDE (PB). In: **Congresso Nacional de Educação (CONEDU)–Educação com (re) Existência: mudanças, conscientização e conhecimentos, VII**. 2020. p. 1-12.

MORGADO, Augusto César; CARVALHO, João Bosco Pitombeira de; CARVALHO, Paulo César Pinto; FERNANDEZ, Pedro. **Análise Combinatória e Probabilidade**. 11 ed. Rio de Janeiro, RJ: SBM, Coleção do Professor de Matemática. 2020. 292 p.

QUEIROZ, Michele de; SOUSA, Francisca Genifer Andrade de; PAULA, Genegleisson Queiroz de. **Educação e Pandemia**: impactos na aprendizagem de alunos em alfabetização. Ensino em Perspectivas, v. 2, n. 4, p. 1-9, 2021.

RABELO, Mauro. **Avaliação educacional**: fundamentos, metodologia e aplicações no contexto brasileiro. Rio de janeiro: SBM, Coleção PROFMAT 2013. 268 p.

SANTANA, C. L. S. e, & BORGES SALES, K. M. (2020). **Aula em casa**: educação, tecnologias digitais e pandemia covid-19. *EDUCAÇÃO*, *10*(1), 75–92. https://doi.org/10.17564/2316-3828.2020v10n1p75-92

SANTOS, Patrick Ferreira. **Uma abordagem da análise combinatória sem o uso abusivo de fórmulas**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, MG, 2013.

SILVA, Alex Sandro Vaz. **Atividades escolares que envolvem a análise combinatória, a partir da expectativa do desenvolvimento da habilidade de contagem, segundo a BNCC.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de São Paulo, São José dos Campos, SP, 2020.

SILVEIRA, Juliano. O teletrabalho coletivo durante a pandemia da Covid-19: um relato de experiência na educação infantil de Florianópolis. **Zero-a-seis**, v. 23, p. 316-332, 2021.

SCALABRIN, A. M. M. O.; MUSSATO, S. **Estratégias e desafios da atuação docente no contexto da pandemia da Covid-19 por meio da vivência de uma professora de matemática**. Revista de Educação Matemática, v. 17, p. e020051, 8 nov. 2020.

TREZZI, Clóvis. **A educação pós-pandemia**: uma análise a partir da desigualdade educacional. **Dialogia**, n. 37, p. 18268, 2021.

VAZQUEZ, Cristiane Maria Roque. **O Ensino de Análise Combinatória no Ensino Médio por meio de atividades orientadores em uma escola Estadual do interior paulista**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas e Tecnologia) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, SP, 2011.

ANEXO A – Competências e Habilidades avaliadas no ENEM referentes a 1988-2008

COMPETÊNCIAS AVALIADAS: ENEM 1998-2008

I - Dominar a norma culta da Língua Portuguesa e fazer uso das linguagens matemática, artística e científica.

II - Construir e aplicar conceitos das várias áreas do conhecimento para a compreensão de fenômenos naturais, de processos histórico-geográficos, da produção tecnológica e das manifestações artísticas.

III - Selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representados de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problema.

IV - Relacionar informações, representadas em diferentes formas, e conhecimentos disponíveis em situações concretas, para construir argumentação consistente.

VI - Recorrer aos conhecimentos desenvolvidos na escola para elaboração de propostas de intervenção solidária na realidade, respeitando os valores humanos e considerando a diversidade sociocultural.

HABILIDADES AVALIADAS ENEM 1998-2008

1. Dada a descrição discursiva ou por ilustração de um experimento ou fenômeno, de natureza científica, tecnológica ou social, identificar variáveis relevantes e selecionar os instrumentos necessários para realização ou interpretação do mesmo.

2. Em um gráfico cartesiano de variável socioeconômica ou técnico-científica, identificar e analisar valores das variáveis, intervalos de crescimento ou decréscimo e taxas de variação.

3. Dada uma distribuição estatística de variável social, econômica, física, química ou biológica, traduzir e interpretar as informações disponíveis, ou reorganizá-las, objetivando interpolações ou extrapolações.

4. Dada uma situação-problema, apresentada em uma linguagem de determinada área de conhecimento, relacioná-la com sua formulação em outras linguagens ou vice-versa.

5. A partir da leitura de textos literários consagrados e de informações sobre concepções artísticas, estabelecer relações entre eles e seu contexto histórico, social,

político ou cultural, inferindo as escolhas dos temas, gêneros discursivos e recursos expressivos dos autores.

6. Com base em um texto, analisar as funções da linguagem, identificar marcas de variantes linguísticas de natureza sociocultural, regional, de registro ou de estilo, e explorar as relações entre as linguagens coloquial e formal.

7. Identificar e caracterizar a conservação e as transformações de energia em diferentes processos de sua geração e uso social, e comparar diferentes recursos e opções energéticas.

8. Analisar criticamente, de forma qualitativa ou quantitativa, as implicações ambientais, sociais e econômicas dos processos de utilização dos recursos naturais, materiais ou energéticos.

9. Compreender o significado e a importância da água e de seu ciclo para a manutenção da vida, em sua relação com condições socioambientais, sabendo quantificar variações de temperatura e mudanças de fase em processos naturais e de intervenção humana.

10. Utilizar e interpretar diferentes escalas de tempo para situar e descrever transformações na atmosfera, biosfera, hidrosfera e litosfera, origem e evolução da vida, variações populacionais e modificações no espaço geográfico.

11. Diante da diversidade da vida, analisar, do ponto de vista biológico, físico ou químico, padrões comuns nas estruturas e nos processos que garantem a continuidade e a evolução dos seres vivos.

12. Analisar fatores socioeconômicos e ambientais associados ao desenvolvimento, às condições de vida e saúde de populações humanas, por meio da interpretação de diferentes indicadores.

13. Compreender o caráter sistêmico do planeta e reconhecer a importância da biodiversidade para preservação da vida, relacionando condições do meio e intervenção humana.

14. Diante da diversidade de formas geométricas planas e espaciais, presentes na natureza ou imaginadas, caracterizá-las por meio de propriedades, relacionar seus elementos, calcular comprimentos, áreas ou volumes, e utilizar o conhecimento geométrico para leitura, compreensão e ação sobre a realidade.

15. Reconhecer o caráter aleatório de fenômenos naturais ou não e utilizar em situações-problema processos de contagem, representação de frequências relativas, construção de espaços amostrais, distribuição e cálculo de probabilidades.

16. Analisar, de forma qualitativa ou quantitativa, situações-problema referentes a perturbações ambientais, identificando fonte, transporte e destino dos poluentes, reconhecendo suas transformações; prever efeitos nos ecossistemas e no sistema produtivo e propor formas de intervenção para reduzir e controlar os efeitos da poluição ambiental.

17. Na obtenção e produção de materiais e de insumos energéticos, identificar etapas, calcular rendimentos, taxas e índices, e analisar implicações sociais, econômicas e ambientais.

18. Valorizar a diversidade dos patrimônios etnoculturais e artísticos, identificando-a em suas manifestações e representações em diferentes sociedades, épocas e lugares.

19. Confrontar interpretações diversas de situações ou fatos de natureza histórico geográfica, técnico-científica, artístico-cultural ou do cotidiano, comparando diferentes pontos de vista, identificando os pressupostos de cada interpretação e analisando a validade dos argumentos utilizados.

20. Comparar processos de formação socioeconômica, relacionando-os com seu contexto histórico e geográfico.

21. Dado um conjunto de informações sobre uma realidade histórico-geográfica, contextualizar e ordenar os eventos registrados, compreendendo a importância dos fatores sociais, econômicos, políticos ou culturais.

ANEXO B – Matriz de referência do ENEM.

EIXOS COGNITIVOS (comuns a todas as áreas de conhecimento)

I. **Dominar linguagens (DL)**: dominar a norma culta da Língua Portuguesa e fazer uso das linguagens matemática, artística e científica e das línguas espanhola e inglesa.

II. **Compreender fenômenos (CF)**: construir e aplicar conceitos das várias áreas do conhecimento para a compreensão de fenômenos naturais, de processos histórico geográficos, da produção tecnológica e das manifestações artísticas.

III. **Enfrentar situações-problema (SP)**: selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representados de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problema.

IV. **Construir argumentação (CA)**: relacionar informações, representadas em diferente formas, e conhecimentos disponíveis em situações concretas, para construir argumentação consistente.

V. **Elaborar propostas (EP)**: recorrer aos conhecimentos desenvolvidos na escola para elaboração de propostas de intervenção solidária na realidade, respeitando os valores humanos e considerando a diversidade sociocultural.

Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias

Competência de área 1 - Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

H1 - Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações - naturais, inteiros, racionais ou reais.

H2 - Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

H3 - Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

H4 - Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.

H5 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.

Competência de área 2 - Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

H6 - Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

H7 - Identificar características de figuras planas ou espaciais.

H8 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

H9 - Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

Competência de área 3 - Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

H10 - Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.

H11 - Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.

H12 - Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.

H13 - Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente.

H14 - Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas.

Competência de área 4 - Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

H15 - Identificar a relação de dependência entre grandezas.

H16 - Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.

H17 - Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.

H18 - Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.

Competência de área 5 - Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

H19 - Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

H20 - Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.

H21 - Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

H22 - Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

H23 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

Competência de área 6 - Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

H24 - Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.

H25 - Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

H26 - Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

Competência de área 7 - Compreender o caráter aleatório e não-determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

H27 - Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou em gráficos.

H28 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.

H29 - Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação.

H30 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.

Objetos de conhecimento associados às Matrizes de Referência

Matemática e suas Tecnologias

• **Conhecimentos numéricos**: operações em conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais e reais), desigualdades, divisibilidade, fatoração, razões e proporções, porcentagem e juros, relações de dependência entre grandezas, sequências e progressões, princípios de contagem.

• **Conhecimentos geométricos**: características das figuras geométricas planas e espaciais; grandezas, unidades de medida e escalas; comprimentos, áreas e volumes; ângulos; posições de retas; simetrias de figuras planas ou espaciais;

congruência e semelhança de triângulos; teorema de Tales; relações métricas nos triângulos; circunferências; trigonometria do ângulo agudo.

• **Conhecimentos de estatística e probabilidade**: representação e análise de dados; medidas de tendência central (médias, moda e mediana); desvios e variância; noções de probabilidade.

• **Conhecimentos algébricos**: gráficos e funções; funções algébricas do 1.º e do 2.º graus, polinomiais, racionais, exponenciais e logarítmicas; equações e inequações; relações no ciclo trigonométrico e funções trigonométricas.

• **Conhecimentos algébricos/geométricos**: plano cartesiano; retas; circunferências; paralelismo e perpendicularidade, sistemas de equações.

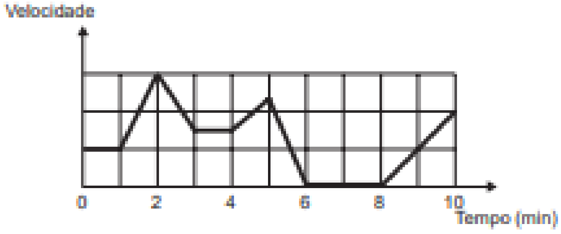
ANEXO C – Prova Amarela 2017 de Matemática e suas Tecnologias

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

Questões de 136 a 180

QUESTÃO 136

Os congestionamentos de trânsito constituem um problema que aflige, todos os dias, milhares de motoristas brasileiros. O gráfico ilustra a situação, representando, ao longo de um intervalo definido de tempo, a variação da velocidade de um veículo durante um congestionamento.

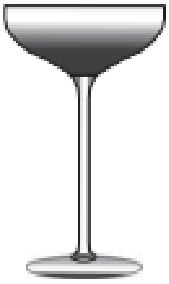


Quantos minutos o veículo permaneceu imóvel ao longo do intervalo de tempo total analisado?

A 4
B 3
C 2
D 1
E 0

QUESTÃO 137

Um garçom precisa escolher uma bandeja de base retangular para servir quatro taças de espumante que precisam ser dispostas em uma única fileira, paralela ao lado maior da bandeja, e com suas bases totalmente apoiadas na bandeja. A base e a borda superior das taças são círculos de raio 4 cm e 5 cm, respectivamente.



A bandeja a ser escolhida deverá ter uma área mínima, em centímetro quadrado, igual a

A 192.
B 300.
C 304.
D 320.
E 400.

QUESTÃO 138

Em uma cantina, o sucesso de venda no verão são sucos preparados à base de polpa de frutas. Um dos sucos mais vendidos é o de morango com acerola, que é preparado com $\frac{2}{3}$ de polpa de morango e $\frac{1}{3}$ de polpa de acerola.

Para o comerciante, as polpas são vendidas em embalagens de igual volume. Atualmente, a embalagem da polpa de morango custa R$ 18,00 e a de acerola, R$ 14,70. Porém, está prevista uma alta no preço da embalagem da polpa de acerola no próximo mês, passando a custar R$ 15,30.

Para não aumentar o preço do suco, o comerciante negociou com o fornecedor uma redução no preço da embalagem da polpa de morango.

A redução, em real, no preço da embalagem da polpa de morango deverá ser de

A 1,20.
B 0,90.
C 0,60.
D 0,40.
E 0,30.

QUESTÃO 139

Um casal realiza sua mudança de domicílio e necessita colocar numa caixa de papelão um objeto cúbico, de 80 cm de aresta, que não pode ser desmontado. Eles têm à disposição cinco caixas, com diferentes dimensões, conforme descrito:

- Caixa 1: 86 cm × 86 cm × 86 cm
- Caixa 2: 75 cm × 82 cm × 90 cm
- Caixa 3: 85 cm × 82 cm × 90 cm
- Caixa 4: 82 cm × 95 cm × 82 cm
- Caixa 5: 80 cm × 95 cm × 85 cm

O casal precisa escolher uma caixa na qual o objeto caiba, de modo que sobre o menor espaço livre em seu interior.

A caixa escolhida pelo casal deve ser a de número

A 1.
B 2.
C 3.
D 4.
E 5.

QUESTÃO 140

Uma empresa construirá sua página na internet e espera atrair um público de aproximadamente um milhão de clientes. Para acessar essa página, será necessária uma senha com formato a ser definido pela empresa. Existem cinco opções de formato oferecidas pelo programador, descritas no quadro, em que "L" e "D" representam, respectivamente, letra maiúscula e dígito.

Opção	Formato
I	LDDDDD
II	DDDDDD
III	LLDDDD
IV	DDDDD
V	LLLDD

As letras do alfabeto, entre as 26 possíveis, bem como os dígitos, entre os 10 possíveis, podem se repetir em qualquer das opções.

A empresa quer escolher uma opção de formato cujo número de senhas distintas possíveis seja superior ao número esperado de clientes, mas que esse número não seja superior ao dobro do número esperado de clientes.

A opção que mais se adequa às condições da empresa é

- A I.
- B II.
- C III.
- D IV.
- E V.

QUESTÃO 141

Como não são adeptos da prática de esportes, um grupo de amigos resolveu fazer um torneio de futebol utilizando *videogame*. Decidiram que cada jogador joga uma única vez com cada um dos outros jogadores. O campeão será aquele que conseguir o maior número de pontos. Observaram que o número de partidas jogadas depende do número de jogadores, como mostra o quadro:

Quantidade de jogadores	2	3	4	5	6	7
Número de partidas	1	3	6	10	15	21

Se a quantidade de jogadores for 8, quantas partidas serão realizadas?

- A 64
- B 56
- C 49
- D 36
- E 28

QUESTÃO 142

Um morador de uma região metropolitana tem 50% de probabilidade de atrasar-se para o trabalho quando chove na região; caso não chova, sua probabilidade de atraso é de 25%. Para um determinado dia, o serviço de meteorologia estima em 30% a probabilidade da ocorrência de chuva nessa região.

Qual é a probabilidade de esse morador se atrasar para o serviço no dia para o qual foi dada a estimativa de chuva?

- A 0,075
- B 0,150
- C 0,325
- D 0,600
- E 0,800

QUESTÃO 143

Às 17 h 15 min começa uma forte chuva, que cai com intensidade constante. Uma piscina em forma de um paralelepípedo retângulo, que se encontrava inicialmente vazia, começa a acumular a água da chuva e, às 18 horas, o nível da água em seu interior alcança 20 cm de altura. Nesse instante, é aberto o registro que libera o escoamento da água por um ralo localizado no fundo dessa piscina, cuja vazão é constante. Às 18 h 40 min a chuva cessa e, nesse exato instante, o nível da água na piscina baixou para 15 cm.

O instante em que a água dessa piscina terminar de escoar completamente está compreendido entre

- A 19 h 30 min e 20 h 10 min.
- B 19 h 20 min e 19 h 30 min.
- C 19 h 10 min e 19 h 20 min.
- D 19 h e 19 h 10 min.
- E 18 h 40 min e 19 h.

QUESTÃO 144

Um empréstimo foi feito à taxa mensal de $i\%$, usando juros compostos, em oito parcelas fixas e iguais a P.

O devedor tem a possibilidade de quitar a dívida antecipadamente a qualquer momento, pagando para isso o valor atual das parcelas ainda a pagar. Após pagar a 5ª parcela, resolve quitar a dívida no ato de pagar a 6ª parcela.

A expressão que corresponde ao valor total pago pela quitação do empréstimo é

A $P\left[1+\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{i}{100}\right)}+\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{i}{100}\right)^2}\right]$

B $P\left[1+\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{i}{100}\right)}+\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{2i}{100}\right)}\right]$

C $P\left[1+\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{i}{100}\right)^2}+\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{i}{100}\right)^2}\right]$

D $P\left[\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{i}{100}\right)}+\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{2i}{100}\right)}+\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{3i}{100}\right)}\right]$

E $P\left[\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{i}{100}\right)}+\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{i}{100}\right)^2}+\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{i}{100}\right)^3}\right]$

QUESTÃO 145

Para realizar a viagem dos sonhos, uma pessoa precisava fazer um empréstimo no valor de R$ 5 000,00. Para pagar as prestações, dispõe de, no máximo, R$ 400,00 mensais. Para esse valor de empréstimo, o valor da prestação (P) é calculado em função do número de prestações (n) segundo a fórmula

$$P=\frac{5\,000\times 1{,}013^n\times 0{,}013}{(1{,}013^n-1)}$$

Se necessário, utilize 0,005 como aproximação para log 1,013; 2,602 como aproximação para log 400; 2,525 como aproximação para log 335.

De acordo com a fórmula dada, o menor número de parcelas cujos valores não comprometem o limite definido pela pessoa é

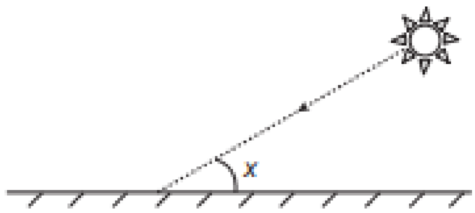
A 12.
B 14.
C 15.
D 16.
E 17.

QUESTÃO 146

Raios de luz solar estão atingindo a superfície de um lago formando um ângulo x com a sua superfície, conforme indica a figura.

Em determinadas condições, pode-se supor que a intensidade luminosa desses raios, na superfície do lago, seja dada aproximadamente por $I(x)=k\cdot sen(x)$

sendo k uma constante, e supondo-se que x está entre 0° e 90°.



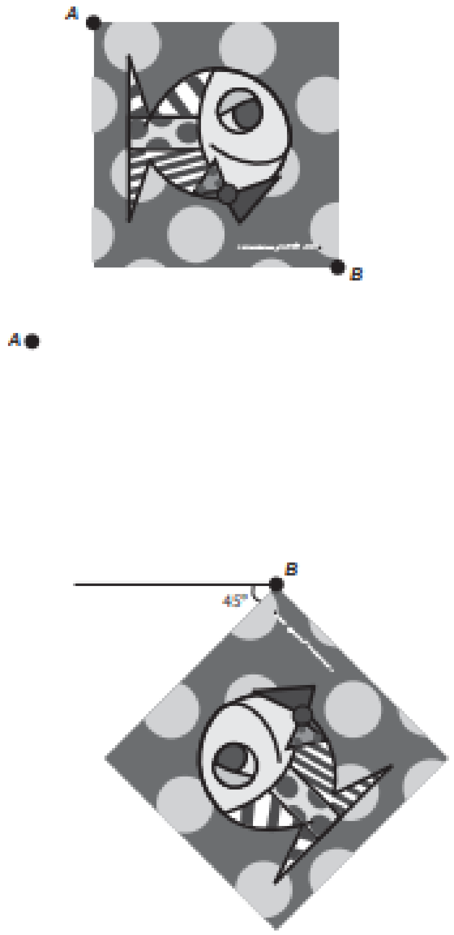
Quando $x = 30°$, a intensidade luminosa se reduz a qual percentual de seu valor máximo?

A 33%
B 50%
C 57%
D 70%
E 86%

QUESTÃO 147

A imagem apresentada na figura é uma cópia em preto e branco da tela quadrada intitulada *O peixe*, de Marcos Pinto, que foi colocada em uma parede para exposição e fixada nos pontos *A* e *B*.

Por um problema na fixação de um dos pontos, a tela se desprendeu, girando rente à parede. Após o giro, ela ficou posicionada como ilustrado na figura, formando um ângulo de 45° com a linha do horizonte.



Para recolocar a tela na sua posição original, deve-se girá-la, rente à parede, no menor ângulo possível inferior a 360°.

A forma de recolocar a tela na posição original, obedecendo ao que foi estabelecido, é girando-a em um ângulo de

- Ⓐ 90° no sentido horário.
- Ⓑ 135° no sentido horário.
- Ⓒ 180° no sentido anti-horário.
- Ⓓ 270° no sentido anti-horário.
- Ⓔ 315° no sentido horário.

QUESTÃO 148

A avaliação de rendimento de alunos de um curso universitário baseia-se na média ponderada das notas obtidas nas disciplinas pelos respectivos números de créditos, como mostra o quadro:

Avaliação	Média de notas (M)
Excelente	$9 < M \leq 10$
Bom	$7 \leq M \leq 9$
Regular	$5 \leq M < 7$
Ruim	$3 \leq M < 5$
Péssimo	$M < 3$

Quanto melhor a avaliação de um aluno em determinado período letivo, maior sua prioridade na escolha de disciplinas para o período seguinte.

Determinado aluno sabe que se obtiver avaliação "Bom" ou "Excelente" conseguirá matrícula nas disciplinas que deseja. Ele já realizou as provas de 4 das 5 disciplinas em que está matriculado, mas ainda não realizou a prova da disciplina I, conforme o quadro.

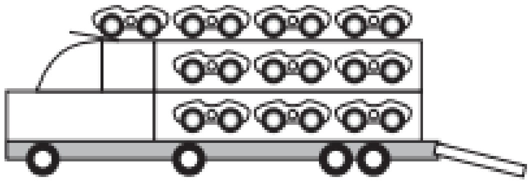
Disciplinas	Notas	Número de créditos
I		12
II	8,00	4
III	6,00	8
IV	5,00	8
V	7,50	10

Para que atinja seu objetivo, a nota mínima que ele deve conseguir na disciplina I é

- Ⓐ 7,00.
- Ⓑ 7,38.
- Ⓒ 7,50.
- Ⓓ 8,25.
- Ⓔ 9,00.

QUESTÃO 149

Um brinquedo infantil caminhão-cegonha é formado por uma carreta e dez carrinhos nela transportados, conforme a figura.



No setor de produção da empresa que fabrica esse brinquedo, é feita a pintura de todos os carrinhos para que o aspecto do brinquedo fique mais atraente. São utilizadas as cores amarelo, branco, laranja e verde, e cada carrinho é pintado apenas com uma cor. O caminhão-cegonha tem uma cor fixa. A empresa determinou que em todo caminhão-cegonha deve haver pelo menos um carrinho de cada uma das quatro cores disponíveis. Mudança de posição dos carrinhos no caminhão-cegonha não gera um novo modelo do brinquedo.

Com base nessas informações, quantos são os modelos distintos do brinquedo caminhão-cegonha que essa empresa poderá produzir?

- A $C_{6,4}$
- B $C_{9,3}$
- C $C_{10,4}$
- D 6^4
- E 4^6

QUESTÃO 150

Uma empresa especializada em conservação de piscinas utiliza um produto para tratamento da água cujas especificações técnicas sugerem que seja adicionado 1,5 mL desse produto para cada 1 000 L de água da piscina. Essa empresa foi contratada para cuidar de uma piscina de base retangular, de profundidade constante igual a 1,7 m, com largura e comprimento iguais a 3 m e 5 m, respectivamente. O nível da lâmina d'água dessa piscina é mantido a 50 cm da borda da piscina.

A quantidade desse produto, em mililitro, que deve ser adicionada a essa piscina de modo a atender às suas especificações técnicas é

- A 11,25.
- B 27,00.
- C 28,80.
- D 32,25.
- E 49,50.

QUESTÃO 151

Um instituto de pesquisas eleitorais recebe uma encomenda na qual a margem de erro deverá ser de, no máximo, 2 pontos percentuais (0,02).

O instituto tem 5 pesquisas recentes, P1 a P5, sobre o tema objeto da encomenda e irá usar a que tiver o erro menor que o pedido.

Os dados sobre as pesquisas são os seguintes:

Pesquisa	σ	N	$\sqrt{N}$
P1	0,5	1 764	42
P2	0,4	784	28
P3	0,3	576	24
P4	0,2	441	21
P5	0,1	64	8

O erro e pode ser expresso por

$$|e| < 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

em que σ é um parâmetro e N é o número de pessoas entrevistadas pela pesquisa.

Qual pesquisa deverá ser utilizada?

- A P1
- B P2
- C P3
- D P4
- E P5

QUESTÃO 152

Em um teleférico turístico, bondinhos saem de estações ao nível do mar e do topo de uma montanha. A travessia dura 1,5 minuto e ambos os bondinhos se deslocam à mesma velocidade. Quarenta segundos após o bondinho *A* partir da estação ao nível do mar, ele cruza com o bondinho *B*, que havia saído do topo da montanha.

Quantos segundos após a partida do bondinho *B* partiu o bondinho *A*?

- A 5
- B 10
- C 15
- D 20
- E 25

QUESTÃO 153

Num dia de tempestade, a alteração na profundidade de um rio, num determinado local, foi registrada durante um período de 4 horas. Os resultados estão indicados no gráfico de linhas. Nele, a profundidade *h*, registrada às 13 horas, não foi anotada e, a partir de *h*, cada unidade sobre o eixo vertical representa um metro.

Registro de profundidade

Foi informado que entre 15 horas e 16 horas, a profundidade do rio diminuiu em 10%.

Às 16 horas, qual é a profundidade do rio, em metro, no local onde foram feitos os registros?

- **A** 18
- **B** 20
- **C** 24
- **D** 36
- **E** 40

QUESTÃO 154

Uma rede hoteleira dispõe de cabanas simples na ilha de Gotland, na Suécia, conforme Figura 1. A estrutura de sustentação de cada uma dessas cabanas está representada na Figura 2. A ideia é permitir ao hóspede uma estada livre de tecnologia, mas conectada com a natureza.

Figura 1

Figura 2

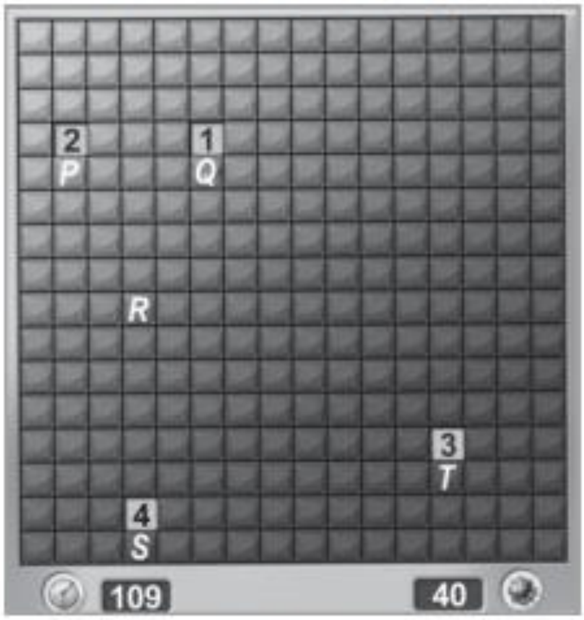
ROMERO, L. Tendências. **Superinteressante**, n. 315, fev. 2013 (adaptado).

A forma geométrica da superfície cujas arestas estão representadas na Figura 2 é

- **A** tetraedro.
- **B** pirâmide retangular.
- **C** tronco de pirâmide retangular.
- **D** prisma quadrangular reto.
- **E** prisma triangular reto.

QUESTÃO 155

A figura ilustra uma partida de Campo Minado, o jogo presente em praticamente todo computador pessoal. Quatro quadrados em um tabuleiro 16 × 16 foram abertos, e os números em suas faces indicam quantos dos seus 8 vizinhos contêm minas (a serem evitadas). O número 40 no canto inferior direito é o número total de minas no tabuleiro, cujas posições foram escolhidas ao acaso, de forma uniforme, antes de se abrir qualquer quadrado.



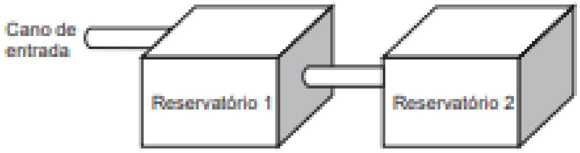
Em sua próxima jogada, o jogador deve escolher dentre os quadrados marcados com as letras *P*, *Q*, *R*, *S* e *T* um para abrir, sendo que deve escolher aquele com a menor probabilidade de conter uma mina.

O jogador deverá abrir o quadrado marcado com a letra

- **A** *P*.
- **B** *Q*.
- **C** *R*.
- **D** *S*.
- **E** *T*.

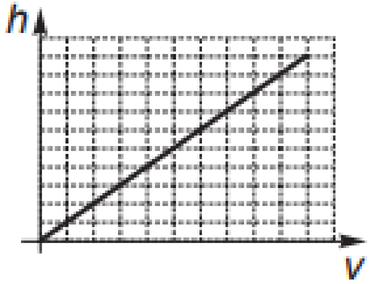
QUESTÃO 156

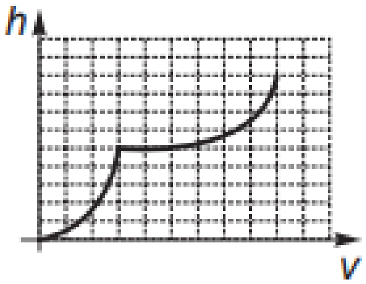
A água para o abastecimento de um prédio é armazenada em um sistema formado por dois reservatórios idênticos, em formato de bloco retangular, ligados entre si por um cano igual ao cano de entrada, conforme ilustra a figura.

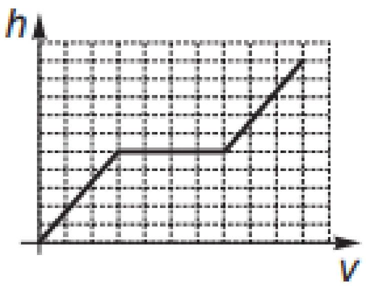


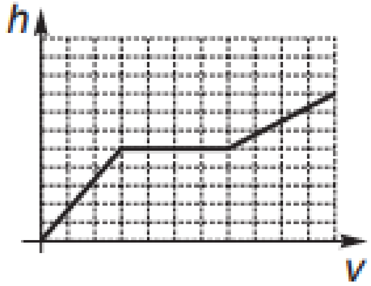
A água entra no sistema pelo cano de entrada no Reservatório 1 a uma vazão constante e, ao atingir o nível do cano de ligação, passa a abastecer o Reservatório 2. Suponha que, inicialmente, os dois reservatórios estejam vazios.

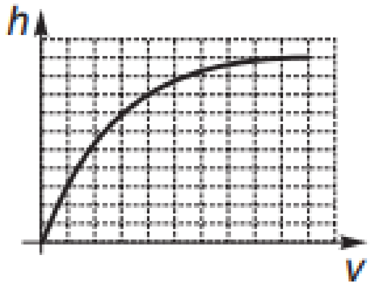
Qual dos gráficos melhor descreverá a altura *h* do nível da água no Reservatório 1, em função do volume *V* de água no sistema?

A


B


C


D


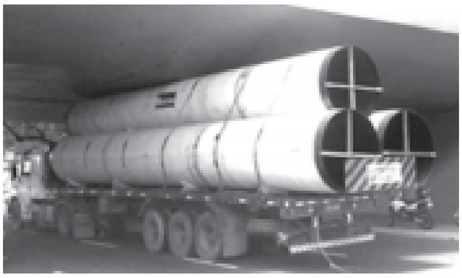
E


QUESTÃO 157

A manchete demonstra que o transporte de grandes cargas representa cada vez mais preocupação quando feito em vias urbanas.

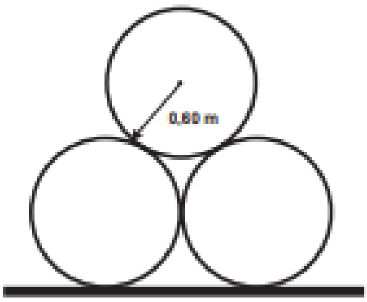
Caminhão entala em viaduto no Centro

Um caminhão de grande porte entalou embaixo do viaduto no cruzamento das avenidas Borges de Medeiros e Loureiro da Silva no sentido Centro-Bairro, próximo à Ponte de Pedra, na capital. Esse veículo vinha de São Paulo para Porto Alegre e transportava três grandes tubos, conforme ilustrado na foto.



Disponível em: www.caminhoes-e-carretas.com. Acesso em: 21 maio 2012 (adaptado).

Considere que o raio externo de cada cano da imagem seja 0,60 m e que eles estejam em cima de uma carroceria cuja parte superior está a 1,30 m do solo. O desenho representa a vista traseira do empilhamento dos canos.



A margem de segurança recomendada para que um veículo passe sob um viaduto é que a altura total do veículo com a carga seja, no mínimo, 0,50 m menor do que a altura do vão do viaduto.

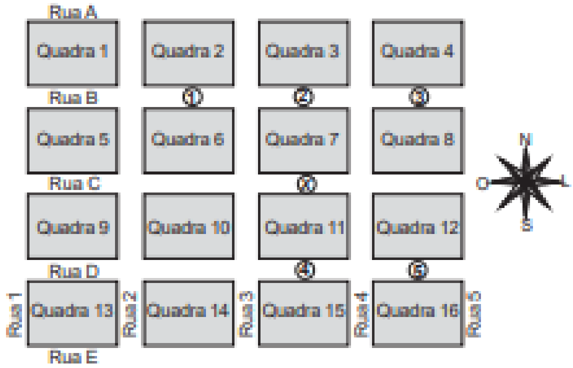
Considere 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$.

Qual deveria ser a altura mínima do viaduto, em metro, para que esse caminhão pudesse passar com segurança sob seu vão?

- **A** 2,82
- **B** 3,52
- **C** 3,70
- **D** 4,02
- **E** 4,20

QUESTÃO 158

Um menino acaba de se mudar para um novo bairro e deseja ir à padaria. Pediu ajuda a um amigo que lhe forneceu um mapa com pontos numerados, que representam cinco locais de interesse, entre os quais está a padaria. Além disso, o amigo passou as seguintes instruções: a partir do ponto em que você se encontra, representado pela letra *X*, ande para oeste, vire à direita na primeira rua que encontrar, siga em frente e vire à esquerda na próxima rua. A padaria estará logo a seguir.



A padaria está representada pelo ponto numerado com

- **A** 1.
- **B** 2.
- **C** 3.
- **D** 4.
- **E** 5.

QUESTÃO 159

Três alunos, X, Y e Z, estão matriculados em um curso de inglês. Para avaliar esses alunos, o professor optou por fazer cinco provas. Para que seja aprovado nesse curso, o aluno deverá ter a média aritmética das notas das cinco provas maior ou igual a 6. Na tabela, estão dispostas as notas que cada aluno tirou em cada prova.

Aluno	1ª Prova	2ª Prova	3ª Prova	4ª Prova	5ª Prova
X	5	5	5	10	6
Y	4	9	3	9	5
Z	5	5	8	5	6

Com base nos dados da tabela e nas informações dadas, ficará(ão) reprovado(s)

- **A** apenas o aluno Y.
- **B** apenas o aluno Z.
- **C** apenas os alunos X e Y.
- **D** apenas os alunos X e Z.
- **E** os alunos X, Y e Z.

QUESTÃO 160

O fisiologista inglês Archibald Vivian Hill propôs, em seus estudos, que a velocidade v de contração de um músculo ao ser submetido a um peso p é dada pela equação $(p + a)(v + b) = K$, com a, b e K constantes.

Um fisioterapeuta, com o intuito de maximizar o efeito benéfico dos exercícios que recomendaria a um de seus pacientes, quis estudar essa equação e a classificou desta forma:

Tipo de curva
Semirreta oblíqua
Semirreta horizontal
Ramo de parábola
Arco de circunferência
Ramo de hipérbole

O fisioterapeuta analisou a dependência entre v e p na equação de Hill e a classificou de acordo com sua representação geométrica no plano cartesiano, utilizando o par de coordenadas $(p\ ;\ v)$. Admita que $K > 0$.

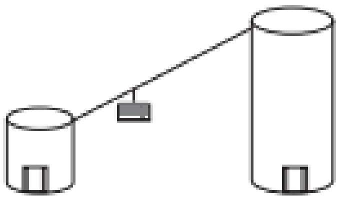
Disponível em: http://rspb.royalsocietypublishing.org. Acesso em: 14 jul. 2015 (adaptado).

O gráfico da equação que o fisioterapeuta utilizou para maximizar o efeito dos exercícios é do tipo

A semirreta oblíqua.
B semirreta horizontal.
C ramo de parábola.
D arco de circunferência.
E ramo de hipérbole.

QUESTÃO 161

Em um parque há dois mirantes de alturas distintas que são acessados por elevador panorâmico. O topo do mirante 1 é acessado pelo elevador 1, enquanto que o topo do mirante 2 é acessado pelo elevador 2. Eles encontram-se a uma distância possível de ser percorrida a pé, e entre os mirantes há um teleférico que os liga que pode ou não ser utilizado pelo visitante.



O acesso aos elevadores tem os seguintes custos:

- Subir pelo elevador 1: R$ 0,15;
- Subir pelo elevador 2: R$ 1,80;
- Descer pelo elevador 1: R$ 0,10;
- Descer pelo elevador 2: R$ 2,30.

O custo da passagem do teleférico partindo do topo do mirante 1 para o topo do mirante 2 é de R$ 2,00, e do topo do mirante 2 para o topo do mirante 1 é de R$ 2,50.

Qual é o menor custo, em real, para uma pessoa visitar os topos dos dois mirantes e retornar ao solo?

A 2,25
B 3,90
C 4,35
D 4,40
E 4,45

QUESTÃO 162

A mensagem digitada no celular, enquanto você dirige, tira a sua atenção e, por isso, deve ser evitada. Pesquisas mostram que um motorista que dirige um carro a uma velocidade constante percorre "às cegas" (isto é, sem ter visão da pista) uma distância proporcional ao tempo gasto ao olhar para o celular durante a digitação da mensagem. Considere que isso de fato aconteça. Suponha que dois motoristas (X e Y) dirigem com a mesma velocidade constante e digitam a mesma mensagem em seus celulares. Suponha, ainda, que o tempo gasto pelo motorista X olhando para seu celular enquanto digita a mensagem corresponde a 25% do tempo gasto pelo motorista Y para executar a mesma tarefa.

Disponível em: http://g1.globo.com. Acesso em: 21 jul. 2012 (adaptado).

A razão entre as distâncias percorridas às cegas por X e Y, nessa ordem, é igual a

A $\frac{5}{4}$

B $\frac{1}{4}$

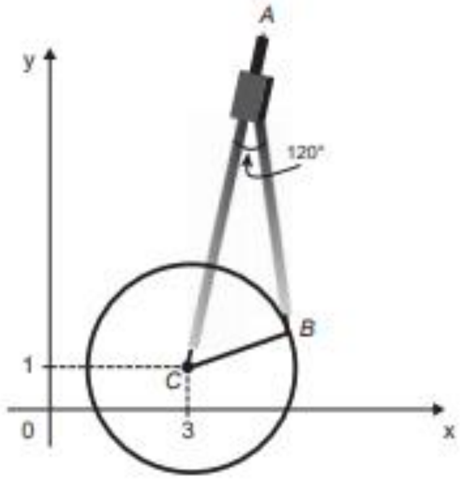
C $\frac{4}{3}$

D $\frac{4}{1}$

E $\frac{3}{4}$

QUESTÃO 163

Uma desenhista projetista deverá desenhar uma tampa de panela em forma circular. Para realizar esse desenho, ela dispõe, no momento, de apenas um compasso, cujo comprimento das hastes é de 10 cm, um transferidor e uma folha de papel com um plano cartesiano. Para esboçar o desenho dessa tampa, ela afastou as hastes do compasso de forma que o ângulo formado por elas fosse de 120°. A ponta seca está representada pelo ponto *C*, a ponta do grafite está representada pelo ponto *B* e a cabeça do compasso está representada pelo ponto *A* conforme a figura.



Após concluir o desenho, ela o encaminha para o setor de produção. Ao receber o desenho com a indicação do raio da tampa, verificará em qual intervalo este se encontra e decidirá o tipo de material a ser utilizado na sua fabricação, de acordo com os dados.

Tipo de material	Intervalo de valores do raio (cm)
I	$0 < R \leq 5$
II	$5 < R \leq 10$
III	$10 < R \leq 15$
IV	$15 < R \leq 21$
V	$21 < R \leq 40$

Considere 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$.

O tipo de material a ser utilizado pelo setor de produção será

- A I.
- B II.
- C III.
- D IV.
- E V.

QUESTÃO 164

Uma pessoa ganhou uma pulseira formada por pérolas esféricas, na qual faltava uma das pérolas. A figura indica a posição em que estaria faltando esta pérola.

Ela levou a joia a um joalheiro que verificou que a medida do diâmetro dessas pérolas era 4 milímetros. Em seu estoque, as pérolas do mesmo tipo e formato, disponíveis para reposição, tinham diâmetros iguais a: 4,025 mm; 4,100 mm; 3,970 mm; 4,080 mm e 3,099 mm.

O joalheiro então colocou na pulseira a pérola cujo diâmetro era o mais próximo do diâmetro das pérolas originais.

A pérola colocada na pulseira pelo joalheiro tem diâmetro, em milímetro, igual a

- A 3,099.
- B 3,970.
- C 4,025.
- D 4,080.
- E 4,100.

QUESTÃO 165

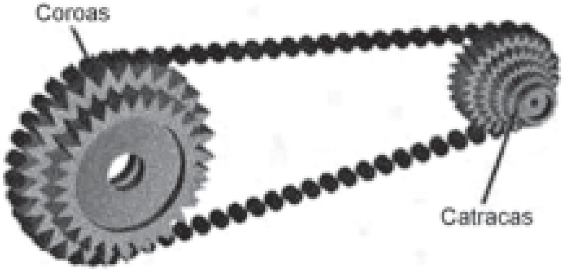
Em uma de suas viagens, um turista comprou uma lembrança de um dos monumentos que visitou. Na base do objeto há informações dizendo que se trata de uma peça em escala 1 : 400, e que seu volume é de 25 cm^3.

O volume do monumento original, em metro cúbico, é de

- A 100.
- B 400.
- C 1 600.
- D 6 250.
- E 10 000.

QUESTÃO 166

Uma bicicleta do tipo *mountain bike* tem uma coroa com 3 engrenagens e uma catraca com 6 engrenagens, que, combinadas entre si, determinam 18 marchas (número de engrenagens da coroa vezes o número de engrenagens da catraca).



Os números de dentes das engrenagens das coroas e das catracas dessa bicicleta estão listados no quadro.

Engrenagens	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª
Nº de dentes da coroa	46	36	26	-	-	-
Nº de dentes da catraca	24	22	20	18	16	14

Sabe-se que o número de voltas efetuadas pela roda traseira a cada pedalada é calculado dividindo-se a quantidade de dentes da coroa pela quantidade de dentes da catraca.

Durante um passeio em uma bicicleta desse tipo, deseja-se fazer um percurso o mais devagar possível, escolhendo, para isso, uma das seguintes combinações de engrenagens (coroa x catraca):

I	II	III	IV	V
1ª × 1ª	1ª × 6ª	2ª × 4ª	3ª × 1ª	3ª × 6ª

A combinação escolhida para realizar esse passeio da forma desejada é

A) I.
B) II.
C) III.
D) IV.
E) V.

QUESTÃO 167

O comitê organizador da Copa do Mundo 2014 criou a logomarca da Copa, composta de uma figura plana e o *slogan* "Juntos num só ritmo", com mãos que se unem formando a taça Fifa. Considere que o comitê organizador resolvesse utilizar todas as cores da bandeira nacional (verde, amarelo, azul e branco) para colorir a logomarca, de forma que regiões vizinhas tenham cores diferentes.

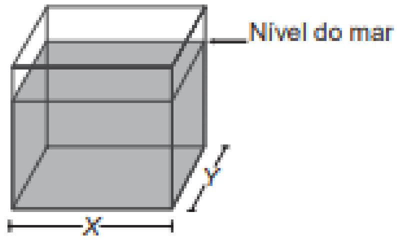
Disponível em: www.pt.fifa.com. Acesso em: 19 nov. 2013 (adaptado).

De quantas maneiras diferentes o comitê organizador da Copa poderia pintar a logomarca com as cores citadas?

A) 15
B) 30
C) 108
D) 360
E) 972

QUESTÃO 168

Viveiros de lagostas são construídos, por cooperativas locais de pescadores, em formato de prismas reto-retangulares, fixados ao solo e com telas flexíveis de mesma altura, capazes de suportar a corrosão marinha. Para cada viveiro a ser construído, a cooperativa utiliza integralmente 100 metros lineares dessa tela, que é usada apenas nas laterais.



Quais devem ser os valores de *X* e de *Y*, em metro, para que a área da base do viveiro seja máxima?

A) 1 e 49
B) 1 e 99
C) 10 e 10
D) 25 e 25
E) 50 e 50

QUESTÃO 169

Para uma temporada das corridas de Fórmula 1, a capacidade do tanque de combustível de cada carro passou a ser de 100 kg de gasolina. Uma equipe optou por utilizar uma gasolina com densidade de 750 gramas por litro, iniciando a corrida com o tanque cheio. Na primeira parada de reabastecimento, um carro dessa equipe apresentou um registro em seu computador de bordo acusando o consumo de quatro décimos da gasolina originalmente existente no tanque. Para minimizar o peso desse carro e garantir o término da corrida, a equipe de apoio reabasteceu o carro com a terça parte do que restou no tanque na chegada ao reabastecimento.

Disponível em: www.superdanilof1page.com.br. Acesso em: 6 jul. 2015 (adaptado).

A quantidade de gasolina utilizada, em litro, no reabastecimento foi

A $\frac{20}{0{,}075}$

B $\frac{20}{0{,}75}$

C $\frac{20}{7{,}5}$

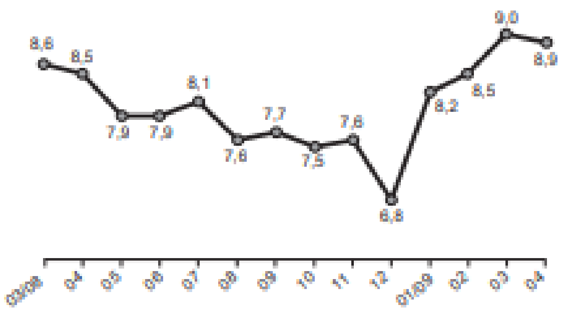
D $20 \times 0{,}075$

E $20 \times 0{,}75$

QUESTÃO 170

O gráfico apresenta a taxa de desemprego (em %) para o período de março de 2008 a abril de 2009, obtida com base nos dados observados nas regiões metropolitanas de Recife, Salvador, Belo Horizonte, Rio de Janeiro, São Paulo e Porto Alegre.

Taxa de desemprego (%)



IBGE. Pesquisa mensal de emprego. Disponível em: www.ibge.gov.br. Acesso em: 30 jul. 2012 (adaptado).

A mediana dessa taxa de desemprego, no período de março de 2008 a abril de 2009, foi de

A 8,1%
B 8,0%
C 7,9%
D 7,7%
E 7,6%

QUESTÃO 171

Numa avenida existem 10 semáforos. Por causa de uma pane no sistema, os semáforos ficaram sem controle durante uma hora, e fixaram suas luzes unicamente em verde ou vermelho. Os semáforos funcionam de forma independente; a probabilidade de acusar a cor verde é de $\frac{2}{3}$ e a de acusar a cor vermelha é de $\frac{1}{3}$. Uma pessoa percorreu a pé toda essa avenida durante o período da pane, observando a cor da luz de cada um desses semáforos.

Qual a probabilidade de que esta pessoa tenha observado exatamente um sinal na cor verde?

A $\frac{10 \times 2}{3^{10}}$

B $\frac{10 \times 2^{9}}{3^{10}}$

C $\frac{2^{10}}{3^{100}}$

D $\frac{2^{90}}{3^{100}}$

E $\frac{2}{3^{10}}$

QUESTÃO 172

A energia solar vai abastecer parte da demanda de energia do *campus* de uma universidade brasileira. A instalação de painéis solares na área dos estacionamentos e na cobertura do hospital pediátrico será aproveitada nas instalações universitárias e também ligada na rede da companhia elétrica distribuidora de energia.

O projeto inclui 100 m² de painéis solares que ficarão instalados nos estacionamentos, produzindo energia elétrica e proporcionando sombra para os carros. Sobre o hospital pediátrico serão colocados aproximadamente 300 m² de painéis, sendo 100 m² para gerar energia elétrica utilizada no *campus*, e 200 m² para geração de energia térmica, produzindo aquecimento de água utilizada nas caldeiras do hospital.

Suponha que cada metro quadrado de painel solar para energia elétrica gere uma economia de 1 kWh por dia e cada metro quadrado produzindo energia térmica permita economizar 0,7 kWh por dia para a universidade. Em uma segunda fase do projeto, será aumentada em 75% a área coberta pelos painéis solares que geram energia elétrica. Nessa fase também deverá ser ampliada a área de cobertura com painéis para geração de energia térmica.

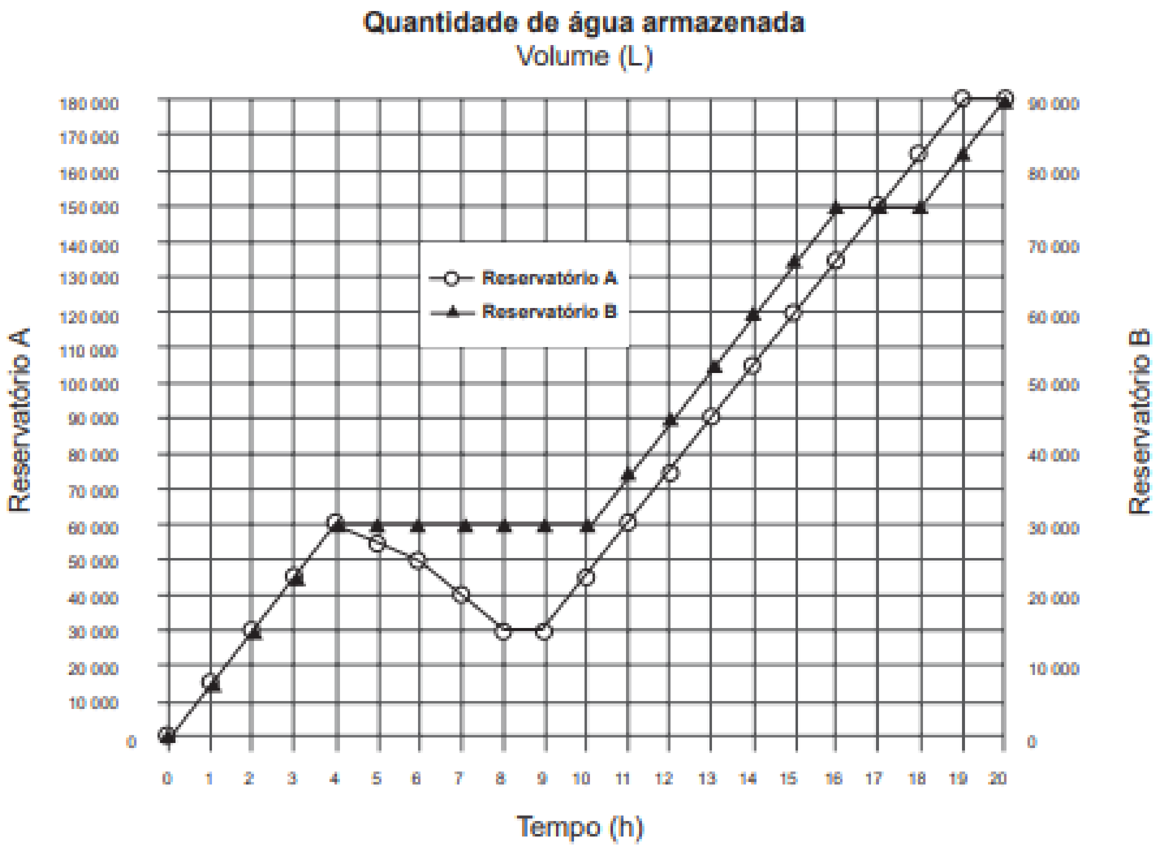
Disponível em: http://agenciabrasil.ebc.com.br. Acesso em: 30 out. 2013 (adaptado).

Para se obter o dobro da quantidade de energia economizada diariamente, em relação à primeira fase, a área total dos painéis que geram energia térmica, em metro quadrado, deverá ter o valor mais próximo de

A 231.
B 431.
C 472.
D 523.
E 672.

QUESTÃO 173

Dois reservatórios A e B são alimentados por bombas distintas por um período de 20 horas. A quantidade de água contida em cada reservatório nesse período pode ser visualizada na figura.

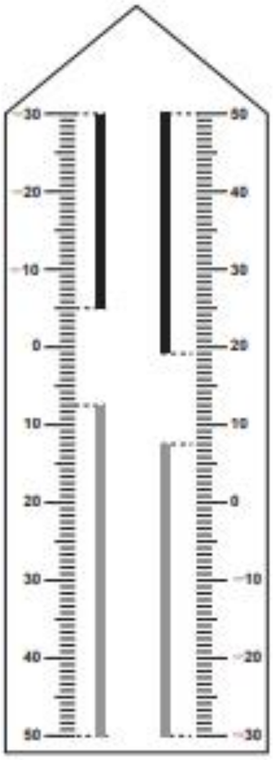


O número de horas em que os dois reservatórios contêm a mesma quantidade de água é

- Ⓐ 1.
- Ⓑ 2.
- Ⓒ 4.
- Ⓓ 5.
- Ⓔ 6.

QUESTÃO 174

Neste modelo de termômetro, os filetes na cor preta registram as temperaturas mínima e máxima do dia anterior e os filetes na cor cinza registram a temperatura ambiente atual, ou seja, no momento da leitura do termômetro.



Por isso ele tem duas colunas. Na da esquerda, os números estão em ordem crescente, de cima para baixo, de −30 °C até 50 °C. Na coluna da direita, os números estão ordenados de forma crescente, de baixo para cima, de −30 °C até 50 °C.

A leitura é feita da seguinte maneira:

- a temperatura mínima é indicada pelo nível inferior do filete preto na coluna da esquerda;
- a temperatura máxima é indicada pelo nível inferior do filete preto na coluna da direita;
- a temperatura atual é indicada pelo nível superior dos filetes cinza nas duas colunas.

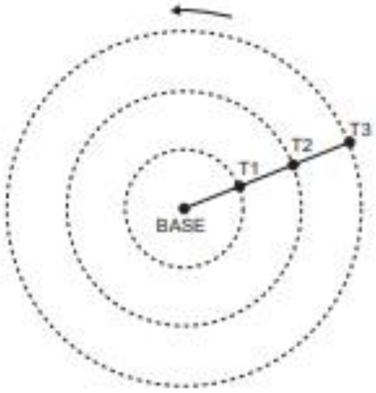
Disponível em: www.if.ufrgs.br. Acesso em: 28 ago. 2014 (adaptado).

Qual é a temperatura máxima mais aproximada registrada nesse termômetro?

- **A** 5 °C
- **B** 7 °C
- **C** 13 °C
- **D** 15 °C
- **E** 19 °C

QUESTÃO 175

Pivô central é um sistema de irrigação muito usado na agricultura, em que uma área circular é projetada para receber uma estrutura suspensa. No centro dessa área, há uma tubulação vertical que transmite água através de um cano horizontal longo, apoiado em torres de sustentação, as quais giram, sobre rodas, em torno do centro do pivô, também chamado de base, conforme mostram as figuras. Cada torre move-se com velocidade constante.



Um pivô de três torres (T_1, T_2 e T_3) será instalado em uma fazenda, sendo que as distâncias entre torres consecutivas bem como da base à torre T_1 são iguais a 50 m. O fazendeiro pretende ajustar as velocidades das torres, de tal forma que o pivô efetue uma volta completa em 25 horas. Use 3 como aproximação para π.

Para atingir seu objetivo, as velocidades das torres T_1, T_2 e T_3 devem ser, em metro por hora, de

- **A** 12 , 24 e 36.
- **B** 6 , 12 e 18.
- **C** 2 , 4 e 6.
- **D** 300 , 1 200 e 2 700.
- **E** 600 , 2 400 e 5 400.

QUESTÃO 176

A Igreja de São Francisco de Assis, obra arquitetônica modernista de Oscar Niemeyer, localizada na Lagoa da Pampulha, em Belo Horizonte, possui abóbadas parabólicas. A seta na Figura 1 ilustra uma das abóbadas na entrada principal da capela. A Figura 2 fornece uma vista frontal desta abóbada, com medidas hipotéticas para simplificar os cálculos.

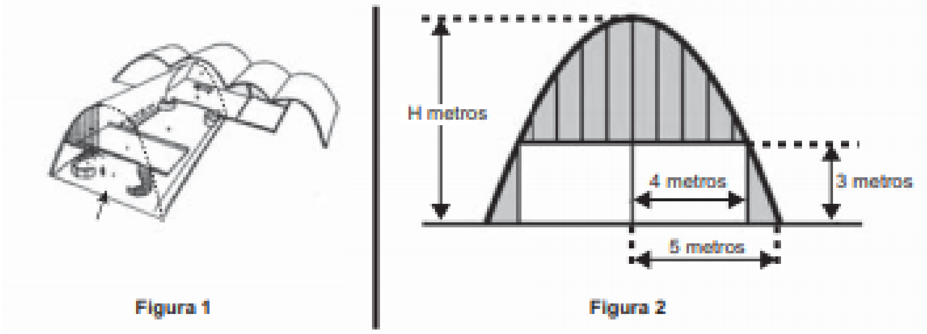


Figura 1 Figura 2

Qual a medida da altura H, em metro, indicada na Figura 2?

Ⓐ $\frac{16}{3}$

Ⓑ $\frac{31}{5}$

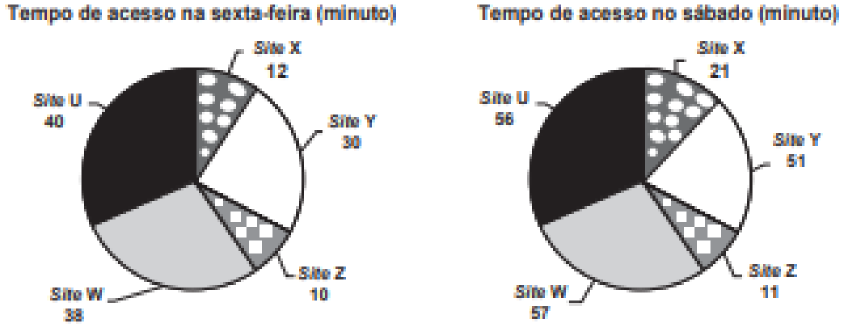
Ⓒ $\frac{25}{4}$

Ⓓ $\frac{25}{3}$

Ⓔ $\frac{75}{2}$

QUESTÃO 177

Quanto tempo você fica conectado à internet? Para responder a essa pergunta foi criado um miniaplicativo de computador que roda na área de trabalho, para gerar automaticamente um gráfico de setores, mapeando o tempo que uma pessoa acessa cinco *sites* visitados. Em um computador, foi observado que houve um aumento significativo do tempo de acesso da sexta-feira para o sábado, nos cinco *sites* mais acessados. A seguir, temos os dados do miniaplicativo para esses dias.



Analisando os gráficos do computador, a maior taxa de aumento no tempo de acesso, da sexta-feira para o sábado, foi no *site*

Ⓐ X.

Ⓑ Y.

Ⓒ Z.

Ⓓ W.

Ⓔ U.

QUESTÃO 178

O resultado de uma pesquisa eleitoral, sobre a preferência dos eleitores em relação a dois candidatos, foi representado por meio do Gráfico 1.

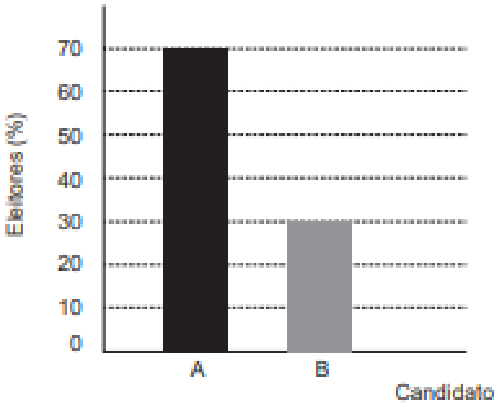


Gráfico 1

Ao ser divulgado esse resultado em jornal, o Gráfico 1 foi cortado durante a diagramação, como mostra o Gráfico 2.

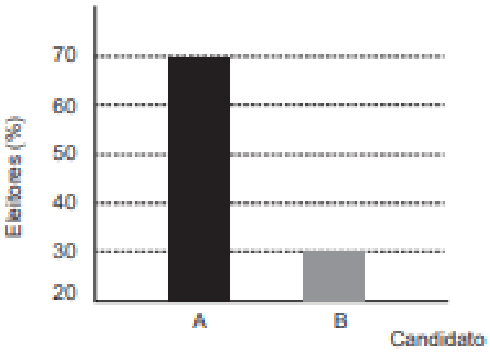


Gráfico 2

Apesar de os valores apresentados estarem corretos e a largura das colunas ser a mesma, muitos leitores criticaram o formato do Gráfico 2 impresso no jornal, alegando que houve prejuízo visual para o candidato B.

A diferença entre as razões da altura da coluna B pela coluna A nos gráficos 1 e 2 é

- **A** 0
- **B** $\frac{1}{2}$
- **C** $\frac{1}{5}$
- **D** $\frac{2}{15}$
- **E** $\frac{8}{35}$

QUESTÃO 179

Um cientista, em seus estudos para modelar a pressão arterial de uma pessoa, utiliza uma função do tipo $P(t) = A + B\cos(kt)$ em que A, B e K são constantes reais positivas e t representa a variável tempo, medida em segundo. Considere que um batimento cardíaco representa o intervalo de tempo entre duas sucessivas pressões máximas.

Ao analisar um caso específico, o cientista obteve os dados:

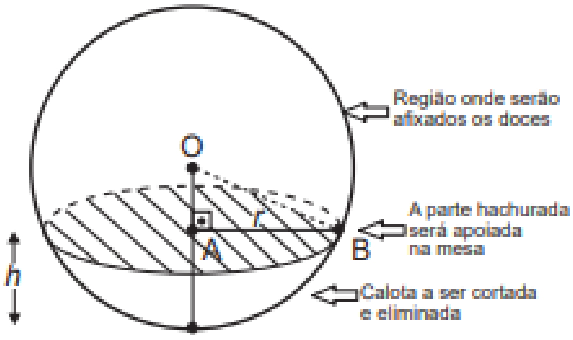
Pressão mínima	78
Pressão máxima	120
Número de batimentos cardíacos por minuto	90

A função $P(t)$ obtida, por este cientista, ao analisar o caso específico foi

- **A** $P(t) = 99 + 21\cos(3\pi t)$
- **B** $P(t) = 78 + 42\cos(3\pi t)$
- **C** $P(t) = 99 + 21\cos(2\pi t)$
- **D** $P(t) = 99 + 21\cos(t)$
- **E** $P(t) = 78 + 42\cos(t)$

QUESTÃO 180

Para decorar uma mesa de festa infantil, um chefe de cozinha usará um melão esférico com diâmetro medindo 10 cm, o qual servirá de suporte para espetar diversos doces. Ele irá retirar uma calota esférica do melão, conforme ilustra a figura, e, para garantir a estabilidade deste suporte, dificultando que o melão role sobre a mesa, o chefe fará o corte de modo que o raio r da seção circular de corte seja de pelo menos 3 cm. Por outro lado, o chefe desejará dispor da maior área possível da região em que serão afixados os doces.



Para atingir todos os seus objetivos, o chefe deverá cortar a calota do melão numa altura h, em centímetro, igual a

- **A** $5 - \frac{\sqrt{91}}{2}$
- **B** $10 - \sqrt{91}$
- **C** 1
- **D** 4
- **E** 5

ANEXO D – Mapa de Itens: Matemática e suas Tecnologias

888,1	Descrever por meio de uma expressão algébrica uma relação de crescimento.
882,5	Calcular a mediana de um conjunto de dados, obtidos a partir da interpretação de um gráfico.
878,6	Calcular, utilizando técnicas de contagem, o tempo mínimo gasto para um indivíduo analisar os custos de todos os possíveis trajetos que incluem visitas a seis cidades, cujos pontos inicial e final são iguais.
872,6	Determinar, a partir do conhecimento do raio das esferas e do volume de uma caixa cúbica, a quantidade máxima de esferas idênticas que podem ser nela armazenadas.
859,4	Analisar formatos de sólidos resultantes de cortes em um cubo para obter uma pirâmide, dadas algumas condições.
857,4	Determinar a relação entre os volumes inicial e final de um cubo a partir da variação percentual da medida das arestas na produção de um objeto.
850,0	Calcular o volume de um tronco de pirâmide regular de base quadrada para dimensionar a quantidade de material necessário à sua fabricação.
831,2	Determinar a probabilidade de escolha a partir de determinados critérios utilizando dados fornecidos em um gráfico linear.
828,1	Calcular o raio do círculo inscrito em um triângulo retângulo que representa o topo de uma peça vazada.
827,3	Calcular a probabilidade binomial de ocorrência de um evento relacionado ao controle de qualidade de produtos produzidos.
827,3	Calcular operações com números racionais retirados de uma tabela de valores sobre consumo de energia elétrica.
821,9	Calcular o percentual equivalente de uma amostra, definida a partir de dois grupos quantificados por porcentagens, em uma população cujo tamanho é desconhecido.
819,1	Calcular a mediana de um conjunto de dados não ordenados, dispostos em uma tabela simples.
805,8	Avaliar resultados obtidos utilizando juros compostos para escolher investimento de maior rentabilidade.
802,5	Calcular operações aritméticas usando porcentagem na determinação de capital inicial de uma aplicação financeira.
800,0	Avaliar, por meio da razão entre área lateral e volume, qual forma cilíndrica apresenta o menor custo de armazenamento por metro cúbico.
798,7	Resolver problemas envolvendo divisões de grandezas diretamente proporcionais à distribuição de um produto.
797,8	Determinar a relação entre o raio de um círculo e o lado de um quadrado inscrito ou interno a ele para cumprimento de uma condição limite de construção.
795,5	Calcular a razão entre as áreas de dois terrenos cujas dimensões foram dadas em diferentes unidades.
791,7	Calcular, por meio da regra de três composta, para grandezas diretamente proporcionais, determinada quantidade de objetos.
789,1	Representar, no plano, a projeção de uma trajetória circular realizada na superfície de uma esfera.
787,5	Determinar o ponto final da movimentação de um móvel, que utiliza como referencial os pontos cardeais e coordenadas cartográficas, por meio da interpretação de um gráfico de curvas de nível.

783,3	Aplicar fórmulas dadas, que exigem operações entre números decimais e conversão de unidades, de metro para centímetro, para obter o valor de um índice.
775,0	Calcular a média aritmética de um conjunto de valores, apresentados em um gráfico de barras, que variam segundo uma taxa percentual dada.
773,3	Determinar a expressão algébrica que relaciona o desconto dado a um combustível com o total arrecadado em sua venda.
769,4	Calcular, por meio de operações com números decimais e diante de restrições, determinada quantidade de objetos.
766,7	Determinar a variação percentual de perímetro de figura plana cujos vértices são centros de círculos tangentes quando se varia o raio de alguns desses círculos.
763,2	Resolver problema envolvendo cálculo de áreas de figuras planas, para determinação de custo de material.
757,1	Calcular operações com números racionais para enquadramento de Índice de Massa Corporal (IMC).
756,2	Determinar, usando operações com números naturais, a frequência anual de um evento excluindo um período do ano.
747,7	Avaliar as probabilidades de ocorrência de eventos realizados em duas etapas em um jogo.
745,8	Calcular a diferença entre as médias aritméticas de dois conjuntos de valores apresentados por meio de uma tabela.
742,9	Calcular medidas de tendência central a partir de dados contidos em um quadro simples.
742,0	Resolver problema a partir de uma função exponencial de expoente fracionário para determinação de variação de uma grandeza.
737,5	Avaliar a área máxima de um objeto quadrado, contido em outro retangular, de modo a atender uma determinada relação percentual entre suas áreas.
720,5	Resolver problema envolvendo desigualdade linear para obter produção mínima sem prejuízo.
720,0	Determinar um dos fatores de um produto de matrizes para obtenção de valores médios.
719,2	Representar, por meio de expressão algébrica, a relação entre grandezas diretamente proporcionais para determinar um fenômeno.
708,3	Representar por meio de equação algébrica a obtenção de igualdade de propostas financeiras.
706,2	Utilizar uma equação de 1º grau na modelagem e resolução de um problema simples.
706,2	Utilizar escala para determinar medidas para construção de maquete.
705,6	Converter unidade de medida angular clássica para forma decimal em posicionamento geográfico.
700,0	Determinar uma expressão algébrica baseada nos termos de uma sequência de figuras geométricas (quadrados) atendendo a um padrão de formação, a partir da relação entre o número de lados e o número de figuras.
700,0	Resolver problema usando o cálculo de área de figuras planas para a escolha da melhor opção de compra.
697,9	Calcular operações com números racionais para determinar o aumento aproximado de consumo de um bem.
697,8	Determinar escala com conversão de unidade de comprimento para representação de uma pista.
693,8	Interpretar a relação de duas grandezas descritas num texto como uma representação gráfica equivalente a grandezas físicas.
689,4	Analisar a variação do nível de líquido em um recipiente na forma de paralelepípedo ao se colocar dentro dele um objeto de volume dado.

688,2	Calcular o volume de material necessário para a fabricação de um objeto vazado (cubo).
685,4	Calcular a probabilidade de um evento utilizando dados contidos em tabela de dupla entrada.
679,5	Converter os valores indicados em um mostrador que combina representações analógicas e digitais para um número racional apresentados num hidrômetro.
678,1	Determinar em uma sequência de listas numéricas justapostas na forma de um empilhamento triangular o padrão da soma de seus termos.
669,4	Avaliar propostas utilizando noções básicas de matemática financeira para compra de um produto.
659,4	Analisar, usando o conceito de escalas de medidas, a representação de diferentes figuras apresentadas em escalas diversas, para determinação de dimensões reais.
656,2	Determinar, envolvendo proporcionalidade em área de figura plana, uma especificação técnica de um produto.
655,0	Calcular grandezas proporcionais para estimar o número de internações por doença.
653,6	Determinar expressão algébrica correspondente à área de uma região resultante do recorte de um material de formato retangular.
647,2	Aplicar relação entre grandezas expressas em unidades distintas na dosagem de produto culinário.
638,5	Calcular, utilizando relações entre diferentes unidades, o tempo de percurso gasto por um móvel a partir da interpretação de dados fornecidos em um mapa.
625,0	Determinar, utilizando o princípio multiplicativo, a quantidade de pessoas que excede um total de possibilidades.
624,0	Determinar expressão algébrica do custo de utilização de um bem.
610,7	Representar por meio de expressão algébrica a relação de proporcionalidade direta e inversa entre grandezas representativas de características de um material.
607,7	Representar em notação científica um número representativo de uma distância.
603,3	Determinar o valor numérico por meio da resolução da equação de 1º grau, obtida da igualdade de duas funções representativas de situações de mercado.
600,0	Determinar, a partir de um critério de posicionamento em uma tabela, a classificação de um país.
600,0	Calcular a representação decimal de fração de uma área.
596,9	Resolver situação problema envolvendo proporcionalidade no consumo de calorias.
594,6	Resolver problema envolvendo padrão numérico na prática esportiva
586,1	Reconhecer representações de números naturais e informações de orientação em medidores de energia elétrica.
585,7	Determinar, utilizando operações fundamentais com números naturais, o valor de um produto.
585,0	Interpretar medidas de posição e dispersão em uma tabela na classificação de corrida de regularidade.
578,6	Calcular porcentagens a partir de dados em gráfico de coluna para saber número de respostas a uma enquete.
573,5	Determinar, por meio de proporcionalidade direta, a redução de consumo de um produto.
572,5	Resolver situação problema envolvendo proporcionalidade da quantidade de dois bens.
568,8	Calcular, a partir do conhecimento da razão entre os volumes de Netuno e da Terra, e da razão entre os volumes de Júpiter e de Netuno, quantas vezes a Terra cabe dentro de Júpiter.

ANEXO E – Questões do ENEM de Análise Combinatória utilizadas para a Atividade Parâmetro da Oficina.

Questão 1 - (Enem – 2017 - adaptado) O comitê organizador da Copa do Mundo 2014 criou a logomarca da Copa, composta de uma figura plana e o slogan “Juntos num só ritmo”, com mãos que se unem formando a taça Fifa. Considere que o comitê organizador resolvesse utilizar as cores da bandeira nacional (verde, amarelo, azul e branco) para colorir a logomarca, de forma que regiões vizinhas tenham cores diferentes.

Disponível em: www.pt.fifa.com. Acesso em: 19 nov. 2013 (adaptado).

De quantas maneiras diferentes o comitê organizador da Copa poderia pintar a logomarca com as cores citadas?

a) 15

b) 30

c) 108

d) 360

e) 972

Questão 2 - (Enem - 2014) Um cliente de uma videolocadora tem o hábito de alugar dois filmes por vez. Quando os devolve sempre pega outros dois filmes e assim sucessivamente. Ele soube que a videolocadora recebeu alguns lançamentos, sendo 8 filmes de ação, 5 de comédia e 3 de drama e, por isso, estabeleceu uma estratégia para ver todos esses 16 lançamentos. Inicialmente alugará, em cada vez, um filme de ação e um de comédia. Quando se esgotarem as possibilidades de comédia, o cliente alugará um filme de ação e um de drama, até que todos os lançamentos sejam vistos e sem que nenhum filme seja repetido.

De quantas formas distintas a estratégia desse cliente poderá ser posta em prática?

a) $20.8! + (3!)^2$

b) $8!.5!.3!$

c) $\frac{8!.5!.3!}{2^8}$

d) $\frac{8!.5!.3!}{2^2}$

e) $\left(\frac{16!}{2^8}\right)$

Questão 3 - (Enem - 2012) O *designer* português Miguel Neiva criou um sistema de símbolos que permite que pessoas daltônicas identifiquem cores. O sistema consiste na utilização de símbolos que identificam as cores primárias (azul, amarelo e vermelho). Além disso, a justaposição de dois desses símbolos permite identificar cores secundárias (como o verde, que é o amarelo combinado com o azul). O preto e o branco são identificados por pequenos quadrados: o que simboliza o preto é cheio, enquanto o que simboliza o branco é vazio. Os símbolos que representam preto e branco também podem estar associados aos símbolos que identificam cores, significando se estas são claras ou escuras.

Folha de São Paulo. Disponível em: www1.folha.uol.com.br. Acesso em: 18 fev. 2012 (adaptado).

De acordo com o texto, quantas cores podem ser representadas pelo sistema proposto?

a) 14

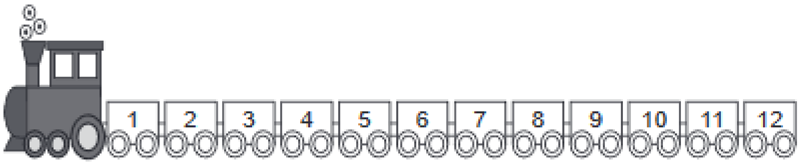
b) 18

c) 20

d) 21

e) 23

Questão 4 - (Enem - 2019) Uma empresa confecciona e comercializa um brinquedo formado por uma locomotiva, pintada na cor preta, mais 12 vagões de iguais formato e tamanho, numerados de 1 a 12. Dos 12 vagões, 4 são pintados na cor vermelha, 3 na cor azul, 3 na cor verde e 2 na cor amarela. O trem é montado utilizando-se uma locomotiva e 12 vagões, ordenados crescentemente segundo suas numerações, conforme ilustrado na figura.



De acordo com as possíveis variações nas colorações dos vagões, a quantidade de trens que podem ser montados, expressa por meio de combinações, é dada por

a) $C^{4}_{12} \times C^{3}_{12} \times C^{3}_{12} \times C^{2}_{12}$

b) $C^{4}_{12} + C^{3}_{8} + C^{3}_{5} + C^{2}_{2}$

c) $C^{4}_{12} \times 2 \times C^{3}_{8} \times C^{2}_{5}$

d) $C^{4}_{12} + 2 + C^{3}_{12} + C^{3}_{12}$

e) $C^{4}_{12} \times C^{3}_{8} \times C^{3}_{5} \times C^{2}_{2}$

Questão 5 - (Enem - 2018) O Salão do Automóvel de São Paulo é um evento no qual vários fabricantes expõem seus modelos mais recentes de veículos, mostrando, principalmente, suas inovações em design e tecnologia.

Disponível em: http://g1.globo.com. Acesso em: 4 fev. 2015 (adaptado).

Uma montadora pretende participar desse evento com dois estandes, um na entrada e outro na região central do salão, expondo, em cada um deles, um carro compacto e uma caminhonete. Para compor os estandes, foram disponibilizados pela montadora quatro carros compactos, de modelos distintos, e seis caminhonetes de diferentes cores para serem escolhidos aqueles que serão expostos. A posição dos carros dentro de cada estande é irrelevante.

Uma expressão que fornece a quantidade de maneiras diferentes que os estandes podem ser compostos é

a) A_{10}^{4}

b) C_{10}^{4}

c) $C_{4}^{2} \times C_{6}^{2} \times 2 \times 2$

d) $A_{4}^{2} \times A_{6}^{2} \times 2 \times 2$

e) $C_{4}^{2} \times C_{6}^{2}$

Questão 6 - (Enem - 2017) Como não são adeptos da prática de esportes, um grupo de amigos resolveu fazer um torneio de futebol utilizando *videogame*. Decidiram que cada jogador joga uma única vez com cada um dos outros jogadores. O campeão será aquele que conseguir o maior número de pontos. Observaram que o número de partidas jogadas depende do número de jogadores, como mostra o quadro:

Quantidade de jogadores	2	3	4	5	6	7
Número de partidas	1	3	6	10	15	21

Se a quantidade de jogadores for 8, quantas partidas serão realizadas?

a) 64

b) 56

c) 49

d) 36

e) 28

Questão 7 – (Enem - 2016) Para cadastrar-se em um *site*, uma pessoa precisa escolher uma senha composta por quatro caracteres, sendo dois algarismos e duas letras (maiúsculas ou minúsculas). As letras e os algarismos podem estar em qualquer posição. Essa pessoa sabe que o alfabeto é composto por vinte e seis letras e que uma letra maiúscula difere da minúscula em uma senha.

Disponível em: www.infowester.com. Acesso em: 14 dez. 2012.

O número total de senhas possíveis para o cadastramento nesse site é dado por

a) $10^2.26^2$

b) $10^2.52^2$

c) $10^2.52^2.\frac{4!}{2!}$

d) $10^2.26^2.\frac{4!}{2!\,.\,2!}$

e) $10^2.52^2.\frac{4!}{2!\,.2!}$

Questão 8 - (Enem - 2016) O tênis é um esporte em que a estratégia de jogo a ser adotada depende, entre outros fatores, de o adversário ser canhoto ou destro.

Um clube tem um grupo de 10 tenistas, sendo que 4 são canhotos e 6 são destros. O técnico do clube deseja realizar uma partida de exibição entre dois desses jogadores, porém, não poderão ser ambos canhotos.

Qual o número de possibilidades de escolha dos tenistas para a partida de exibição?

a) $\frac{10!}{2!\,.8!} - \frac{4!}{2!\,.2!}$

b) $\frac{10!}{8!} - \frac{4!}{2!}$

c) $\frac{10!}{2!\,.8!} - 2$

d) $\frac{6!}{4!} + 4\,.\,4$

e) $\frac{6!}{4!} + 6\,.\,4$