



Universidade Federal  
de São João del-Rei

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL-REI  
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT  
Campus Santo Antônio

# Padrões Especiais de Números Primos através de Arranjos Geométricos: O $n$ -triângulo de Quadrados

Felipe Júnio Santos Alves

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Federal de São João del-Rei, Campus Santo Antônio.

Orientador  
Prof. Dr. Jorge Andrés Julca Avila

2022

xxx Alves, Felipe  
Xyyyx Padrões Especiais de Números Primos através de Arranjos Geométricos: O  $n$ -triângulo de Quadrados/ Felipe Júnio Santos Alves - Campus Santo Antônio: [s.n.], 2022.  
51 f.: fig., tab.

Orientador: Jorge Andrés Julca Avila

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de São João del-Rei, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT.

1. Números Primos. 2.  $n$ -quadrado Zeta. 3. Sequências. 4.  $n$ -Triângulo de Quadrados. I. Título

# TERMO DE APROVAÇÃO

Felipe Júnio Santos Alves

PADRÕES ESPECIAIS DE NÚMEROS PRIMOS ATRAVÉS DE ARRANJOS  
GEOMÉTRICOS: O  $n$ -TRIÂNGULO DE QUADRADOS

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática no Curso de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Federal de São João del-Rei (Campus Santo Antônio) pela seguinte banca examinadora:

---

Prof. Dr. Jorge Andrés Julca Avila (**Orientador**)  
UFSJ - Universidade Federal de São João del-Rei

---

Prof. Dr. José Angel Dávalos Chuquipoma (*Avaliador Local*)  
UFSJ - Universidade Federal de São João del-Rei

---

Prof. Dr. German Jesús Lozada Cruz (*Avaliador Externo*)  
UNESP - Universidade Estadual Paulista

São João del-Rei, 30 de Agosto de 2022



*A Deus, a minha família, a todos que amam a Matemática assim como eu e a todos que sempre desejaram que meus sonhos se tornassem realidade!*



# Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus, por sempre estar ao meu lado e me dar forças para seguir adiante, mesmo nos momentos mais difíceis. Ele me sustentou e me deu forças para seguir, até nos momentos em que pensei em desistir. Bem aventurados os que confiam no senhor, porque ele é justo e a sua misericórdia é para sempre.

À minha família, em especial a minha irmã Flávia, por sempre estar ao meu lado e acreditar no meu potencial, por me aconselhar e por ser meu alicerce em muitos momentos.

Aos meus amigos da turma de 2019, pela amizade e companheirismo.

A todos os meus professores do PROFMAT, especialmente ao meu orientador, o Professor Doutor Jorge Andrés Julca Avila, pela paciência, educação, dedicação e por seus ricos ensinamentos e auxílio em toda a construção deste trabalho.





*... "mas aqueles que esperam no Senhor renovam as suas forças. Voam alto como águias; correm e não ficam exaustos, andam e não se cansam" ...*

Isaías 40:31



# Resumo

A Matemática apresenta uma série de problemas em aberto, que instigam muitos estudiosos e amantes a encontrarem resoluções ou métodos que facilitem seu estudo. Apresentamos neste trabalho, um estudo acerca dos números primos; que destacam-se dentre os problemas mais recorrentes. Sabe-se que não existem fórmulas para comprovar se um número muito grande é ou não primo, ou que retorne apenas esses números. Entretanto, existem polinômios que expressam algumas sequências de números primos e algumas representações geométricas, tal como a espiral de Ulam, que dispõem sobre possíveis arranjos de números primos para os números naturais. Trataremos aqui, de algumas representações geométricas; que são maneiras específicas de dispor os números naturais em figuras da Geometria Plana, seguindo formas de preenchimento pré estabelecidas e definidas, e a partir de então, identificar sequências de números primos, relacionando-as com polinômios quadráticos. Propõe-se um estudo sobre estes métodos, bem como a importância de sua aplicação, como uma alternativa para abordagem dos números primos e o estudo dos mesmos. Não obstante, abordaremos assuntos inerentes ao entendimento do método, como uma breve abordagem sobre recorrências e polinômios, além de algumas observações históricas dos números primos.

**Palavras-chave:** Números Primos,  $n$ -quadrado Zeta, Sequências,  $n$ -Triângulo de Quadrados.



# Abstract

Mathematics presents a series of open problems, which instigate many scholars and lovers to find resolutions or methods that facilitate their study. We present in this work, a study about prime numbers; which stand out among the most recurrent problems. It is known that there are no formulas for proving whether or not a very large number is prime, or that it returns just those numbers. However, there are polynomials that express some sequences of prime numbers and some geometric representations, such as the Ulam spiral, that provide for possible arrangements of prime numbers for the natural numbers. We will deal here with some geometric representations; which are specific ways of arranging natural numbers in Plane Geometry figures, following pre-established and defined filling forms, and from then on identifying sequences of prime numbers, relating them to quadratic polynomials. A study of these methods is proposed, as well as the importance of their application, as an alternative to approach and study prime numbers. However, we will address issues inherent to the understanding of the method, such as a brief approach to recurrences and polynomials, in addition to some historical observations of prime numbers.

**Keywords:** Prime Numbers, Zeta  $n$ -square, Sequences,  $n$ - Triangle of Squares.



# Lista de Figuras

3.1	Crivo de Eratóstenes . . . . .	26
4.1	Espiral de Ulam $10 \times 10$ com os números primos destacados. . . . .	30
4.2	Espiral de Ulam $200 \times 200$ com os números primos destacados. . . . .	30
4.3	Espiral de Ulam de centro 41. . . . .	31
4.4	Espiral de Sacks com 16 pontos . . . . .	32
4.5	Espiral de Sacks com 2026 pontos (primos destacados) . . . . .	32
4.6	Espiral de Sacks com 46656 pontos (primos destacados) . . . . .	33
4.7	O $n$ -quadrado. . . . .	33
4.8	(a) O 7-qZeta mostrando o arranjo de formação através de linhas. (b) O 7-qZeta, obtido pela Definição 4.4. . . . .	34
4.9	O $n$ -quadrado Zeta. . . . .	35
4.10	Caminhos e caminhos retilíneos. . . . .	36
4.11	Quatro tipos de caminhos retilíneos em um $n$ -quadrado. . . . .	37
4.12	Os caminhos $\mathcal{D}_{75}(100)$ e $\mathcal{V}_{41}(100)$ , no 100-qZeta. . . . .	37
4.13	O perfil do polinômio de Euler. . . . .	40
5.1	Notação das casas de um $n$ -triângulo de quadrados, $\mathbb{T}_n$ . . . . .	42
5.2	O 5-triângulo de quadrados, $\mathbb{T}_5$ . . . . .	43
5.3	Diagonais e Linha Base de um $\mathbb{T}_n$ . . . . .	44
5.4	Caminhos em um Triângulo de Quadrados $t_{50}$ . . . . .	45





# Lista de Tabelas

5.1	Polinômios obtidos no $\mathbb{T}_{3000}$ . . . . .	48
-----	---	----



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>19</b>
<b>2</b>	<b>Resultados Preliminares</b>	<b>21</b>
<b>3</b>	<b>Os Números Primos</b>	<b>25</b>
3.1	Um Pouco de História . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Arranjos Geométricos</b>	<b>29</b>
4.1	A Espiral de Ulam . . . . .	29
4.2	A Espiral de Sacks . . . . .	31
4.3	O $n$ -quadrado Zeta . . . . .	32
4.3.1	Tipos de Caminhos Retilíneos . . . . .	36
4.4	Caminhos Diagonais e Verticais no $n$ -qZeta . . . . .	37
4.5	Formulação Matemática de Caminhos Retilíneos no $n$ -qZeta . . . . .	38
4.6	Função Geradora de Números Primos: O Polinômio $v_{41}$ . . . . .	39
4.6.1	O Caminho Vertical $\mathcal{V}_{41}(n)$ fora do $n$ -qZeta . . . . .	39
4.6.2	O Polinômio de Euler como Translação do Polinômio $v_{41}$ . . . . .	39
4.7	O Perfil do Polinômio de Euler no $n$ -quadrado . . . . .	40
<b>5</b>	<b>O <math>n</math>-triângulo de Quadrados</b>	<b>41</b>
5.1	Geometria . . . . .	41
5.1.1	Tipos de Diagonais em um $\mathbb{T}_n$ . . . . .	43
5.2	Formulação Matemática de Caminhos . . . . .	45
5.3	Polinômios Geradores de Números Primos . . . . .	48
5.3.1	Os Polinômios $p_E$ , $v_{41}$ e $s_{41}$ . . . . .	48
5.3.2	Alguns Polinômios Notáveis . . . . .	48
5.4	Conclusão . . . . .	49
	<b>Referências</b>	<b>51</b>



# 1 Introdução

A Matemática vem sendo usada em benefício do homem, desde o início dos tempos. Sem ela, o mundo que conhecemos hoje, não existiria e graças a ela, nos estabilizamos como uma sociedade desenvolvida e em constante evolução. Desde o início dos tempos, os homens se utilizam de técnicas matemáticas para resolução de problemas, sejam eles práticos, como o cálculo de área para plantio na agricultura ou os valores pertencentes as moedas comerciais, ou os que ainda carecem de solução, como o a *Conjectura de Goldbach*. A Matemática está intimamente ligada a formação do homem como ser pensante e atuante, e quanto mais a entendemos e conjecturamos sobre ela, mais problemas são descobertos e mais possibilidades passam a ser vislumbradas.

Mediante a tudo que à Matemática abrange não podemos deixar de falar dos Números Primos e dos inúmeros estudos para identificar padrões ou fórmulas fechadas que os gerem totalmente. Eles foram e vêm sendo objeto de estudos de muitos matemáticos famosos como: Euclides de Alexandria, Eratóstenes de Cirene, Pierre de Fermat, Marin Mersenne, Christian Goldbach, Leonhard Paul Euler, Carl Friedrich Gauss, Georg Bernhard Riemann, Pafnuti Tchebychev, Jacques Hadamard, Charles-Jean de la Vallée Poussin, Godfrey Harold Hardy, John Edensor Littlewood, Srinivasa Ramanujan, Paul Erdős, Terence Tao, Harald Andrés Helfgott, entre outros, que contribuíram imensamente para várias áreas da Matemática moderna e para a Teoria dos Números.

Os trabalhos sobre números primos, nos Elementos de Euclides, deram origem à área da Teoria dos Números que é a parte da matemática que se dedica ao estudo das propriedades dos números inteiros. Grande parte dessa área é dedicada ao estudo dos números primos. Neles, são abordados as seguintes linhas de pesquisa: Distribuição dos números primos, Testes de primalidade, Criptografia, Padrões especiais de números primos, entre outras. Essas linhas podem, eventualmente, interconectar-se. Atualmente, um dos grandes objetivos das pesquisas envolvendo números primos é encontrar um algoritmo, que seja ao mesmo tempo determinístico, que consiga dizer com certeza se o número testado é primo ou não, mas que tenha um tempo de execução razoável mesmo quando o número seja extremamente grande (da ordem de mais de uma dezena de milhões de dígitos, [1]).

Segundo AVILA, *et al.*, [2], existem, pelo menos, duas formas de padrões especiais de distribuição dos números primos: (a) Forma analítica, que busca por funções geradoras de números primos, capazes de gerar sequências longas de números primos. (b) Forma geométrica, que busca arranjos dos números naturais para identificar padrões de números primos sobre geometrias planas, uma vez identificado o padrão procede-se à obtenção de uma função geradora de números primos ou uma fórmula fechada. Exemplos, desta última forma, são: A espiral de Ulam, o  $n$ -quadrado Zeta, [2], entre outros. Até o momento, tentar achar uma fórmula para a sequência de primos como

um todo não parece ser a melhor opção. Os resultados não são muito trabalháveis. Os polinômios geradores de primos são criados a partir de subsequências com um padrão muito mais claro, fácil de ser entendido e estudado, são uma busca por simplicidade em um meio caótico, [3].

Neste trabalho, faremos um estudo da abordagem geométrica sobre o  $n$ -*Triângulo de Quadrados* para a obtenção de sequências longas geradoras de números primos.

## 2 Resultados Preliminares

Neste Capítulo, traremos alguns conceitos básicos que são necessários para o entendimento dos próximos capítulos.

**Notação 2.1.**

O conjunto dos Números Naturais:  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ ,  $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$

O conjunto dos Números Inteiros:  $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

O conjunto dos Números Reais:  $\mathbb{R}$

**Definição 2.1** (Polinômios Quadráticos ou de grau 2). Seja  $x \in \mathbb{R}$ . Definimos um polinômio de grau 2, por

$$p_2(x) = ax^2 + bx + c \quad (2.1)$$

onde,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ , são chamados coeficientes do polinômio.

**Observação 2.1.** Uma função de 2º grau ou quadrática é um polinômio de grau 2.

**Definição 2.2** (Sequência de Números Reais). Seja  $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. Definimos uma sequência  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de números reais, por

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a(n) : n = 0, 1, 2, \dots) = (a_0, a_1, a_2, \dots)$$

onde,  $a_n$  é chamado o  $n$ -ésimo termo da sequência.

**Exemplo 2.1.** A sequência  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ,  $a_n = 1/n$ , é dada por  $(1, 1/2, 1/3, \dots)$ .

**Definição 2.3** (Progressão Aritmética (PA)). Sejam  $a, r \in \mathbb{R}$ . A sequência

$$(a, a + r, a + 2r, a + 3r, \dots)$$

é uma Progressão Aritmética, onde  $r$  é chamada de razão e  $a$  de primeiro termo da PA.

**Observação 2.2.** Costuma-se denotar por  $a_n$ , o termo geral da sequência. O  $n$ -ésimo termo de uma PA é dado por:

$$a_n = a + (n - 1)r, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

**Definição 2.4** (Recorrência). Seja  $n \in \mathbb{N}$ . Uma recorrência é definida por

$$a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k}, a_{n-k-1}, \dots) \quad (2.2)$$

onde,  $f$  é uma função real de varias variáveis.

**Observação 2.3.**

- (a) Grosso modo, podemos dizer que uma recorrência é uma sequência cujos termos são obtidos recursivamente.
- (b)  $f$  é chamada de função dos termos anteriores da recorrência.
- (c) Uma solução de (2.2) é da forma  $a_n = \varphi(n, c_1, c_2, \dots)$ , onde  $c_i$  são constantes arbitrárias.

**Definição 2.5** (Recorrência com valor inicial). Sejam  $k, n \in \mathbb{N}$  e  $a_k \in \mathbb{R}$ . Uma recorrência com valor inicial é definida por

$$\begin{cases} x_1 = a_1 \\ x_2 = a_2 \\ \vdots \\ x_k = a_k \\ x_n = f(x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-k}, x_{n-k-1}, \dots), \quad n \geq k+1 \end{cases} \quad (2.3)$$

**Observação 2.4.** Uma solução de (2.3) é da forma  $x_n = \varphi(n)$ .

**Exemplo 2.2.** Uma Progressão Aritmética  $(x_n)$  de razão  $r$  e primeiro termo  $a$ , é definida pela seguinte recorrência:

$$\begin{cases} x_1 = a \\ x_{n+1} = x_n + r, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

**Exemplo 2.3.** A sequência de Fibonacci  $(F_n)_{n \geq 1} = (1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots)$  é definida pela seguinte recorrência:

$$\begin{cases} F_0 = 1 \\ F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad n = 0, 2, 3, \dots \end{cases}$$

**Exemplo 2.4.** Segue um exemplo de recorrência:

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \\ x_n = x_{n-1} + x_{n-2}^2, \quad n = 3, 4, 5, \dots \end{cases}$$

As recorrências podem classificar-se de acordo à ordem e à linearidade.

**Ordem:** É o número de termos que  $f$  possui.

**Recorrência de 1<sup>a</sup> ordem:** Uma recorrência é de 1<sup>a</sup> ordem, se  $x_n = f(x_{n-1})$ .

**Recorrência de 2<sup>a</sup> ordem:** Uma recorrência é de 2<sup>a</sup> ordem, se  $x_n = f(x_{n-1}, x_{n-2})$ .

O Exemplo 2.2 é uma recorrência de 1<sup>a</sup> ordem, já os exemplos 2.3 e 2.4 são de 2<sup>a</sup> ordem.

**Linearidade:** Uma recorrência é linear se os termos de  $f$  possuem coeficientes constantes.

Os exemplos 2.2 e 2.3 são recorrências lineares, já o Exemplo 2.4 é não linear.



---

**Definição 2.6** (Recorrência Linear de Primeira Ordem). Sejam  $p = p(n)$  e  $r = r(n)$  funções reais de variável natural,  $p \neq 0$ . Define-se uma recorrência linear de 1<sup>a</sup> ordem, por

$$x_n + px_{n-1} = r \quad (2.4)$$

**Definição 2.7** (Recorrência Linear de Segunda Ordem). Sejam  $p = p(n)$ ,  $q = q(n)$  e  $r = r(n)$  funções reais de variável natural,  $q \neq 0$ . Define-se uma recorrência linear de 2<sup>a</sup> ordem, por

$$x_n + px_{n-1} + qx_{n-2} = r \quad (2.5)$$

**Observação 2.5.** Quando  $r = 0$  em (2.4) e (2.5) dizemos que as recorrências são homogêneas, e se  $r \neq 0$  as recorrências são não-homogêneas.



## 3 Os Números Primos

Neste Capítulo faremos uma breve revisão histórica dos números primos, e definiremos alguns conceitos importantes que envolvem números primos.

**Definição 3.1** (Número Primo). Seja  $p \in \mathbb{N}$ ,  $p > 1$ . Dizemos que  $p$  é um número primo se ele tem como únicos divisores positivos o 1 e ele mesmo.

**Notação 3.1.** Conjunto dos Números Primos:  $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$

**Definição 3.2** (Teste de Primalidade). Um teste de primalidade refere-se a um algoritmo que tendo como entrada um inteiro positivo  $n$ , determina se  $n$  é ou não primo.

**Definição 3.3** (Função Geradora de Números Primos). Dizemos que  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  é uma função geradora de números primos se  $f(n) \in \mathbb{P}$ , para algum  $n \in \mathbb{Z}$ .

### 3.1 Um Pouco de História

A história dos números primos se inicia na Grécia Antiga, período em que grandes pensadores voltaram sua atenções para a resolução de problemas, e a formulação de conceitos os envolvendo.

A partir dessa formulação, começou-se a desenvolver novos pensamentos, tais como; os conjuntos numéricos. A lógica dos números começou a ser investigada mais a fundo e suas propriedades passavam a ressaltar ainda mais. Surgia então, um novo conjunto de números, que possuía apenas dois divisores naturais (pode-se pensar em quatro divisores inteiros também), e não podiam ser decompostos com o auxílio de nenhum outro número. Esse agrupamento de números, com características tão distintas, recebeu o nome de *números primos*.

Alguns estudos, revelam que a Escola Pitagórica (500 a 300 a.C), já estudava os números primos, mas sem essa nomenclatura. Eles estudavam os números perfeitos e os números amigáveis. Números perfeitos, são aqueles em que a soma de seus divisores (com exceção do próprio número), resulta no próprio número; como o número 6 (ao somar os divisores 1, 2 e 3, o resultado é o próprio 6). Números amigáveis são números, que a soma dos divisores de um é igual ao outro número, como 220 e o 284 (a soma dos divisores de 220 :  $1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$ , e a soma dos divisores de 284 :  $1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$ ). Os matemáticos da escola pitagórica, já entendiam o conceito de primalidade e estavam interessados em suas propriedades místicas e numerológicas. De início, os números primos eram designados como números lineares, enquanto os números compostos, designados como não-lineares. Posteriormente, Euclides (por volta de 300 a.C), referenciou os números primos no seu livro, Os Elementos, que trata do cálculo do MDC entre dois números e a infinitude dos números

primos. A obra elaborada por Euclides, é constituída por XIII volumes, e a definição de números primos aparece no volume VII, onde os números primos são denominados como aqueles que não podem ser colocados em função de nenhum outro número, com exceção do número 1. Euclides prova que existem infinitos números primos, sendo esta, uma das primeiras demonstrações a utilizar o método da contradição.

Ainda na Grécia Antiga, outro matemático se propôs a estudar os números primos: Eratóstenes de Cirene, que formulou uma tabela para sintetizar os números primos (por volta de 200 a.C), pela eliminação dos números compostos. A tabela formulada, é utilizada até hoje para introduzir a ideia de números primos no ensino fundamental. O método consiste em analisar os divisores dos números, para classificá-los em primos ou não primos, dessa forma, se o número for considerado primo, seus múltiplos serão números compostos. Como exemplo, podemos tomar o número 2, que é primo; logo, seus múltiplos serão números compostos, pois todos os números pares, são múltiplos de 2. O raciocínio é aplicado aos demais números; geralmente, apresenta-se uma tabela com os números de 1 a 100, destacando-se os que são primos.

Figura 3.1: Crivo de Eratóstenes

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Fonte: Os autores (2022).

Os números primos foram objeto de estudo dos gregos por muitos séculos, e por volta de 500 d.C, passaram a ser estudados em outras partes do mundo. Os números primos são conhecidos e estudados há muito tempo pela humanidade, havendo indícios até de que povos como os egípcios já trabalhavam com tais concepções, mesmo que com pouca organização, há bastante tempo, sendo encontrados alguns indícios no papiro de Rhind (papiro adquirido no Egito cerca de 1650 a.C pelo egiptólogo escocês A.Henry Rhind); mas os primeiros a trabalharem em cima do conceito propriamente dito, foram os gregos.

Há indícios de que também no antigo Egito já se tinha algum conhecimento sobre este tipo de números. No entanto, os registros mais antigos de um estudo sobre números primos deve-se aos gregos.

A história dos números primos, continua no período *Renascentista*, surgindo nessa

época, uma das publicações mais importantes para a Matemática: “*Libber Abacci*”, escrito por Leonardo Fibonacci. Pierre de Fermat (1601-1665, francês, natural de Beaumont de Lamagne, é considerado o maior matemático francês do século XVII). Fermat, após a tradução da obra “*Aritmética de Diofanto*”, desenvolveu alguns estudos a respeito dos números primos, algumas tão importantes, que lhe renderam o título de “*pai da teoria dos números moderna*”. Uma das conjecturas formuladas por Fermat, expressa que: “Todo número escrito sob a forma  $2^{2^n} + 1$  é primo”, essa conjectura é conhecida como os *Primos de Fermat*. Mais tarde, em 1732, Leonhard Euler provou que para  $n = 5$  a conjectura não era válida.

Marin Mersenne, depois de algumas conversas com Fermat, apresentou uma fórmula para os números primos, conhecida como os “*Os primos de Mersenne*”, onde  $2^p - 1$ ,  $p$  primo, gera números primos. Estes resultados acarretou, posteriormente, em um dos teoremas importantes da teoria dos números: “*O Pequeno Teorema de Fermat*” que expressa: “Para todo  $a \in \mathbb{Z}$ , se  $p \in \mathbb{P}$ , então  $p | a^p - a$ . Uma consequência deste teorema é expressado por “Para todo  $a \in \mathbb{N}$ ,  $a > 1$ ,  $p \in \mathbb{P}$  e  $p \nmid a$ , então  $p | a^{p-1} - 1$ ”. A contra-positiva deste resultado representa um teste de não-Primalidade.

Fermat deixou uma grande variedade de conjecturas, entre elas, a que ficou conhecida como “O último Teorema de Fermat”, que foi provado pelo britânico Andrew Wiles, em 1994.

Uns dos resultados importantes, em teoria dos números, é o Teorema Fundamental da Aritmética, que expressa que “todo número natural maior que 1 ou é primo ou é o produto de números primos”. Parte da prova deste teorema é encontrado no livro XII de “Os Elementos”. Mas, foi Carl Gauss que apresentou uma prova completa deste Teorema.

O Teorema de Wilson fornece condições necessárias e suficientes para um número ser primo. A seguir enunciaremos a condição suficiente (Teste de Primalidade) para um número ser primo.

**Teorema 3.1 (Teorema de Wilson).** *Seja  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$ . Se  $(n - 1)! \equiv -1 \pmod{n}$ , então  $n$  é primo.*

**Exemplo 3.1.** Verificaremos, pelo Teorema de Wilson, que o número 5 é primo.  $(5 - 1)! = 24 \equiv -1 \pmod{5}$ .

Quando uma sequência de números primos é notada em um determinado arranjo, busca-se estabelecer um padrão que irá definir os próximos números dessa sequência. Esse padrão é muito importante, visto que aplicando os conceitos básicos de recorrência, pode-se estabelecer uma possível fórmula fechada, que irá retomar os próximos termos.

Nos próximos capítulos, veremos como alguns arranjos dispostos em figuras geométricas, retornaram algumas sequências com números primos, que puderam ser consolidadas em fórmulas fechadas. Até o presente momento, não existe uma fórmula fechada que retorne apenas números primos, mas existem alguns polinômios, chamados de “polinômios geradores de primos”, que expressam uma longa cadeia de números primos, para alguns números inteiros avaliados nele. Por exemplo, o Polinômio de Euler,  $P(n) = n^2 - n + 41$ ,  $n \geq 1$ , é uma fórmula famosa, que gera 40 números primos diferentes e em sequência. É possível observar que certos arranjos, levam a sequências, que levam a fórmulas, que podem ser estudadas para assim, encontrar mais números primos. No seguinte Capítulo estudaremos os arranjos geométricos.



## 4 Arranjos Geométricos

Neste Capítulo, estudaremos três arranjos geométricos para obtenção de números primos. Seguindo a ideia de AVILA, *et al.* (2022), os **arranjos geométricos** são maneiras de dispor os números naturais em figuras planas, obedecendo regras pré-definidas, de modo a encontrar padrões especiais de números primos.

É bastante natural que encontremos relações entre as formas geométricas e os números, afinal, as formas estão presentes em toda parte do nosso Universo, e como disse Pitágoras, “Os números governam o mundo”. Por isso, com este trabalho, busca-se tratar um pouco sobre um arranjo específico, criado através da perspectiva de um triângulo (que será abordado no próximo capítulo), para se encontrar sequências de números primos. Essa metodologia voltada para o relacionamento entre formas e sequências, é de fato muito instigante e pode ser direcionada a alunos da educação básica, como uma forma de se estudar os números primos, levando os estudantes a aprenderem Matemática de uma forma mais atuante, participativa e criativa.

A seguir, estudaremos os arranjos geométricos: Espiral de Ulam, espiral de Sacks e o  $n$ -quadrado Zeta.

### 4.1 A Espiral de Ulam

Um arranjo geométrico bastante conhecido é a *Espiral de Ulam*. Em 1963, Stanislaw Ulam elaborou um arranjo dos números naturais, sobre um quadrado, em uma ordem que segue o formato de uma espiral, conhecida como a Espiral de Ulam (veja na Figura 4.1 a espiral de Ulam de tamanho  $10 \times 10$ ). Dizer que uma espiral é de tamanho  $n \times n$ , significa dizer que ela está sob um quadrado com  $n$  linhas e  $n$  colunas.

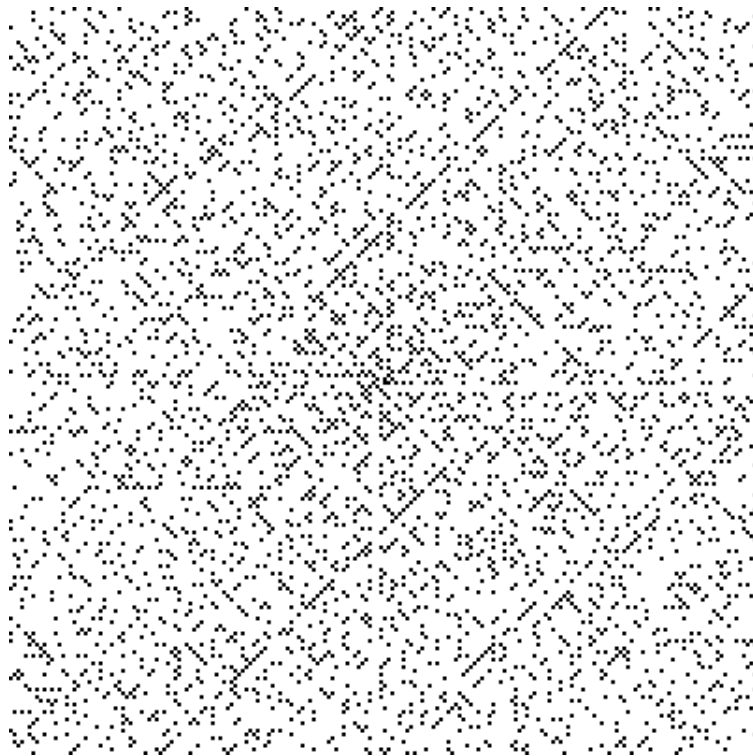
Algumas das diagonais da espiral, apresentam uma alta densidade de números, fazendo com que a espiral seja estudada até os dias de hoje. As sequências são os números naturais encontrados na diagonal da espiral e quão maior for sua quantidade de números primos, maior será sua densidade. Ulam também percebeu nesse arranjo, que existem certos padrões de números primos determinados por polinômios quadráticos da forma:  $4n^2 + bn + c$ . O arranjo de Ulam, deu origem a polinômios que retornam sequências mais densas do que o próprio Polinômio de Euler. Também, são encontrados outros polinômios como o polinômio:  $4n^2 - 1260n + 98827$  que retorna 490 números primos positivos e diferentes para  $n = 1000$ , [4]. A existência de muitos números primos em diagonais da espiral de Ulam não deve ter ligação com nenhuma aleatoriedade, indicando a existência de algum padrão na distribuição dos números primos, por isso, deve ser investigado e, por outro lado, apresenta uma complexidade bem menor em relação a outros estudos acerca da determinação de sequências para números primos.

Figura 4.1: Espiral de Ulam  $10 \times 10$  com os números primos destacados.

100	99	98	97	96	95	94	93	92	91
65	64	63	62	61	60	59	58	57	90
66	37	36	35	34	33	32	31	56	89
67	38	17	16	15	14	13	30	55	88
68	39	18	5	4	3	12	29	54	87
69	40	19	6	1	2	11	28	53	86
70	41	20	7	8	9	10	27	52	85
71	42	21	22	23	24	25	26	51	84
72	43	44	45	46	47	48	49	50	83
73	74	75	76	77	78	79	80	81	82

Fonte: Os autores (2022)

A Figura 4.2 representa a espiral de Ulam de tamanho  $200 \times 200$ . Verifica-se a concentração de alguns primos em determinadas diagonais. Percebe-se que a medida em

Figura 4.2: Espiral de Ulam  $200 \times 200$  com os números primos destacados.

Fonte: <https://brito.blog.incolume.com.br/2011/12/links-em-latex.html?m=1>

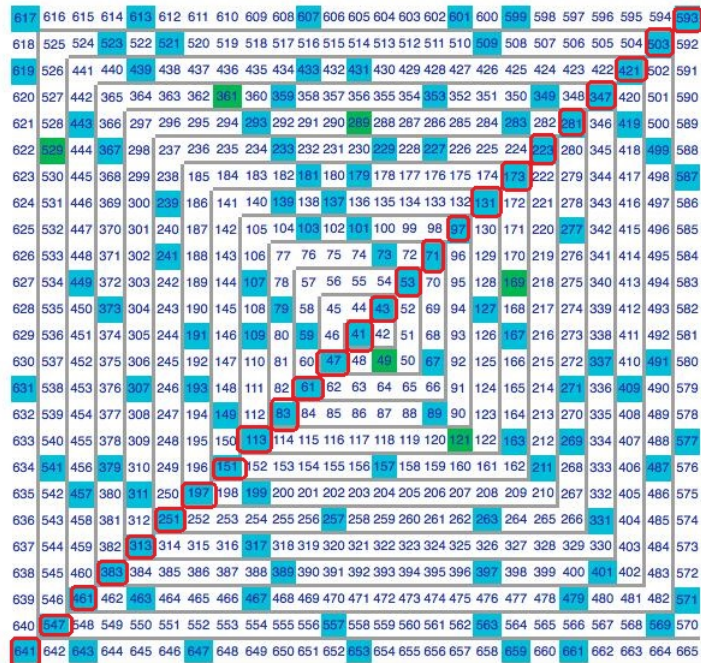
ampliamos a espiral, a quantidade de números primos encontrada, é consideravelmente aumentada. Mas, não basta considerar a espiral como um todo. Assim como na Espiral de Ulam, o intuito das aplicações geométricas, ou seja, as várias maneiras de dispor os números naturais em figuras da geometria plana, é encontrar caminhos, baseados nas linhas, colunas ou diagonais, que contenham uma quantidade substancial de números primos e a partir de então, definir polinômios de segundo grau, que remetam a sequência encontrada.



Identificar se um número é primo ou não, ou ter à disposição muitos números primos dados por uma expressão matemática elementar não é tarefa simples. Um polinômio gerador de números primos seria o achado ideal!

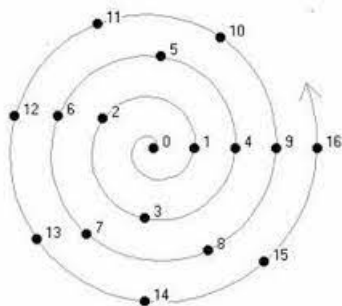
Na Figura 4.3 apresentamos a espiral de Ulam de centro 41, em que percebemos uma sequência que pode ser remetida através do polinômio  $x^2 - x + 41$ , mencionado anteriormente, como *Polinômio de Euler*. Na sequência destacada em vermelho, nota-se um caminho de números primos, os mesmos remetidos pelo *Polinômio de Euler*.

Figura 4.3: Espiral de Ulam de centro 41.



reta que gira sobre um ponto de origem fixo a velocidade angular constante, de tal forma que os números quadrados perfeitos (um quadrado perfeito é um número natural positivo, cuja raiz quadrada é, também, um número natural positivo), coincidam ao final de cada rotação, conforme mostra a Figura 4.4.

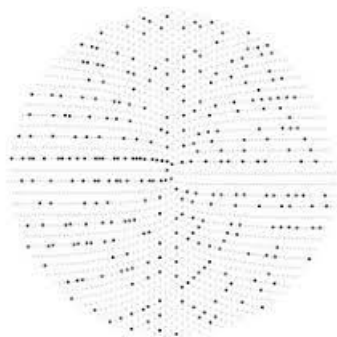
Figura 4.4: Espiral de Sacks com 16 pontos



Fonte: <https://www.gaussianos.com/la-espiral-de-sacks/k>

Aumentando o número de pontos marcados sobre essa espiral chegamos, primeiro, à Figura 4.5, e logo, à Figura 4.6, onde os pontos mais escuros representam os números primos em ambas, então começamos a perceber uma maior presença deles em determinadas linhas, como pode ser observado.

Figura 4.5: Espiral de Sacks com 2026 pontos (primos destacados)

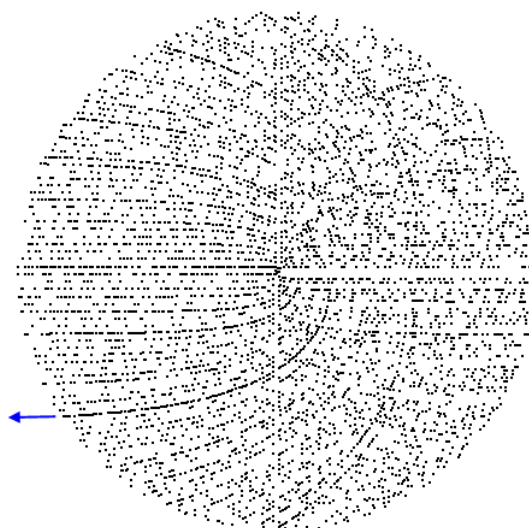


Fonte: <http://gaussianos.com/la-espiral-de-sacks>

### 4.3 O $n$ -quadrado Zeta

No  $n$ -quadrado Zeta é possível encontrar sequências “longas” de números primos (caminhos). Nele, existem dois tipos de caminhos: diagonal e vertical, que foram modelados por polinômios de  $2^{\text{o}}$  grau da forma:  $k^2 + ak + b$ , sendo  $a$  ímpar e  $b$  um quadrado perfeito. Os criadores do arranjo estudaram o caminho vertical  $\mathcal{V}_{41}$  por possuir grande quantidade de números primos e perceberam que o polinômio  $v_{41}$ , o qual modela o caminho vertical  $\mathcal{V}_{41}$ , é uma translação do polinômio de Euler. Finalmente, fizeram uma comparação do perfil do polinômio de Euler, tanto na espiral de Ulam, quanto no  $n$ -quadrado Zeta.

Figura 4.6: Espiral de Sacks com 46656 pontos (primos destacados)



Fonte: <http://gaussianos.com/la-espiral-de-sacks>

A seguir, descreveremos alguns conceitos, propriedades e consequências mais importantes do  $n$ -quadrado Zeta, maiores informações são encontradas no artigo AVILA, *et al.* (2022).

**Definição 4.1 (Casa de um Quadrado).** Seja  $Q$  um quadrado. Uma casa de  $Q$  é um quadrado contido em  $Q$ , cujo valor é um número inteiro positivo.

**Definição 4.2 (O  $n$ -quadrado).** Dado  $n \in \mathbb{Z}^+$ . Um  $n$ -quadrado é um quadrado formado por  $n^2$  casas que se interceptam em um lado. Cada casa  $c_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , segue uma ordem, como descrita na Figura 4.7, e seu valor não se repete.

**Notação 4.1.** O  $n$ -quadrado é denotado por

$$\{c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1n}; c_{21}, c_{22}, \dots, c_{2n}; \dots; c_{n1}, c_{n2}, \dots, c_{nn}\}$$

Figura 4.7: O  $n$ -quadrado.

$c_{11}$	$c_{12}$	$\dots$	$c_{1n}$
$c_{21}$	$c_{22}$	$\dots$	$c_{2n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$c_{n1}$	$c_{n2}$	$\dots$	$c_{nn}$

Fonte: AVILA *et al.* (2022).

**Definição 4.3 (Arranjo de Formação).** Chama-se um arranjo de formação de um  $n$ -quadrado a qualquer preenchimento não-aleatório dos valores de suas casas.

**Definição 4.4 (O  $n$ -quadrado Zeta).** O  $n$ -quadrado Zeta, denotado por  $n$ -qZeta, é um  $n$ -quadrado, cujo arranjo de formação segue os 3 passos seguintes:

(1<sup>o</sup>) **Casas da diagonal principal.** São preenchidas, nessa ordem, pelos quadrados perfeitos:  $1, 4, 9, \dots, n^2$ .

(2<sup>o</sup>) **Casas da  $j$ -ésima coluna superior.** Para cada  $j$ ,  $2 \leq j \leq n$ , temos a sequência:

$$\left( (j-1)^2 + 1, (j-1)^2 + 2, (j-1)^2 + 3, \dots, j(j-1) \right) \quad (4.1)$$

que possui  $(j-1)$  casas. As casas com números primos são pintadas de cor verde.

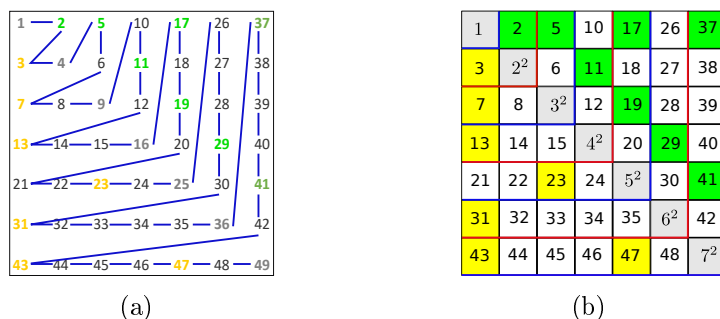
(3<sup>o</sup>) **Casas da  $i$ -ésima linha inferior.** Para cada  $i$ ,  $2 \leq i \leq n$ , temos a sequência:

$$\left( i(i-1) + 1, i(i-1) + 2, i(i-1) + 3, \dots, (i-1)(i+1) \right) \quad (4.2)$$

que possui  $(i-1)$  casas. As casas com números primos são pintadas de cor amarela.

**Exemplo 4.1.** Na Figura 4.8(a) apresentamos o 7–quadrado Zeta que mostra seu arranjo de formação através de linhas (note que os quatro primeiros números formam a letra Z, que no alfabeto grego seria o Zeta, por isso o nome Zeta no arranjo). A Figura 4.8(b) mostra o 7–qZeta, obtido pela Definição 4.4.

Figura 4.8: (a) O 7–qZeta mostrando o arranjo de formação através de linhas. (b) O 7–qZeta, obtido pela Definição 4.4.



Fonte: AVILA *et al.* (2022).

**Exemplo 4.2.** Na Figura 4.9 apresentamos três  $n$ –quadrados Zeta: (a) O 20–qZeta. (b) O 100–qZeta. (c) O 300–qZeta. Para a elaboração de um  $n$ –qZeta foi escrito um código em Linguagem Visual Basic do Excel.

A seguir, definiremos os conceitos relacionados com caminhos no  $n$ –quadrado.

**Definição 4.5** (Sequência de casas). Uma sequência de casas no  $n$ –quadrado, denotado por  $(c_{ij})$ ,  $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$ , é qualquer agrupamento “contínuo” de casas.

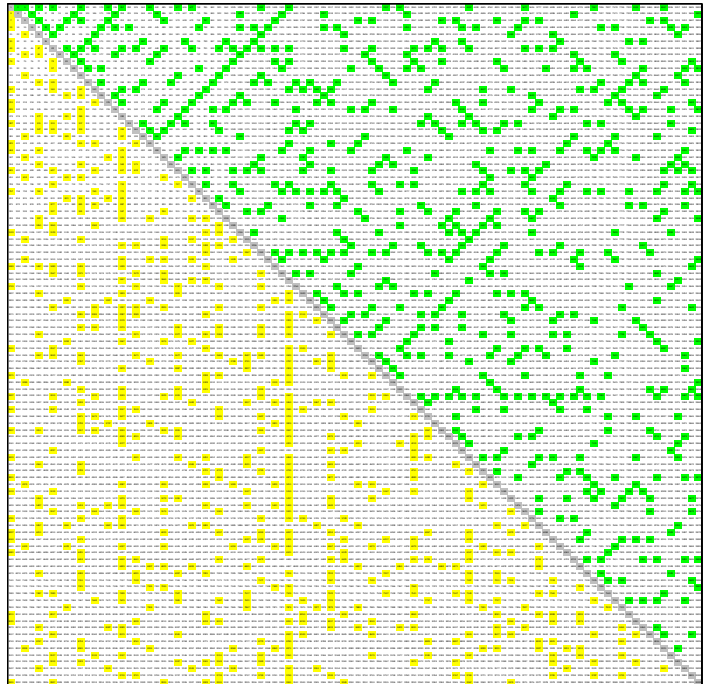
**Definição 4.6** (Caminho). Um caminho no  $n$ –quadrado, denotado por  $\mathbf{C}(n) = (c_{ij})$ ,  $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$ , é qualquer sequência de casas com pelo menos um primo.

**Definição 4.7** (Caminho Retilíneo). Um caminho retilíneo é um caminho no  $n$ –quadrado que, geometricamente, descreve uma linha reta.

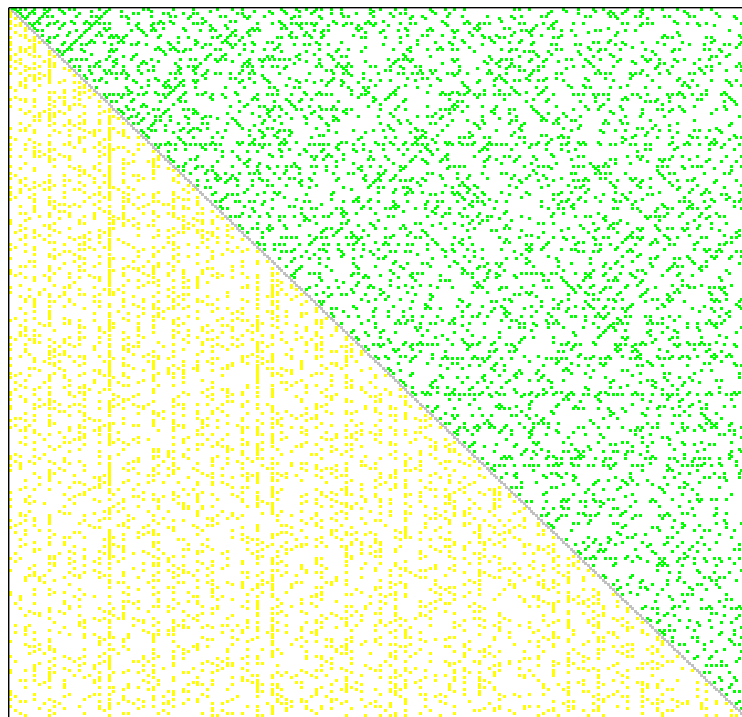
Figura 4.9: O  $n$ -quadrado Zeta.

1	2	5	10	17	26	37	50	65	82	101	122	145	170	197	226	257	290	325	362
3	4	6	11	18	27	38	51	66	83	102	123	146	171	198	227	258	291	326	363
7	8	9	12	19	28	39	52	67	84	103	124	147	172	199	228	259	292	327	364
13	14	15	16	20	29	40	53	68	85	104	125	148	173	200	229	260	293	328	365
21	22	23	24	25	30	41	54	69	86	105	126	149	174	201	230	261	294	329	366
31	32	33	34	35	36	42	55	70	87	106	127	150	175	202	231	262	295	330	367
43	44	45	46	47	48	49	56	71	88	107	128	151	176	203	232	263	296	331	368
57	58	59	60	61	62	63	64	72	89	108	129	152	177	204	233	264	297	332	369
73	74	75	76	77	78	79	80	81	90	109	130	153	178	205	234	265	298	333	370
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	110	131	154	179	206	235	266	299	334	371
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	132	155	180	207	236	267	300	335	372
133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144	156	181	208	237	268	301	336	373
157	158	159	160	161	162	163	164	165	166	167	168	169	182	209	238	269	302	337	374
183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	210	239	270	303	338	375
211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224	225	240	271	304	339	376
241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255	256	272	305	340	377
273	274	275	276	277	278	279	280	281	282	283	284	285	286	287	288	289	306	341	378
307	308	309	310	311	312	313	314	315	316	317	318	319	320	321	322	323	324	342	379
343	344	345	346	347	348	349	350	351	352	353	354	355	356	357	358	359	360	361	380
381	382	383	384	385	386	387	388	389	390	391	392	393	394	395	396	397	398	399	400

(a) O 20-quadrado Zeta.



(b) O 100-quadrado Zeta.



(c) O 300-quadrado Zeta.

Fonte: AVILA *et al.* (2022).

**Exemplo 4.3.**

Considere o 3–quadrado  $\{1, 4, 5; 7, 2, 6; 8, 9, 3\}$  (veja Figura 4.10):

- (a) O caminho  $\mathbf{C}_1(3) = (c_{22}, c_{23}, c_{32}, c_{21}, c_{11}) = (2, 6, 9, 7, 1)$ .  
 (b) O caminho retilíneo  $\mathbf{C}_2(3) = (c_{21}, c_{32}) = (7, 9)$ .

Considere o 7–qZeta (veja Figura 4.10):

- (c)  $\mathbf{C}_1(7) = (8, 15, 23, 34, 45)$ .       $\mathbf{C}_2(7) = (11, 17)$ .  
 $\mathbf{C}_3(7) = (5, 11, 19, 29, 41)$ .       $\mathbf{C}_4(7) = (3, 7, 13, 21, 31, 43)$ .

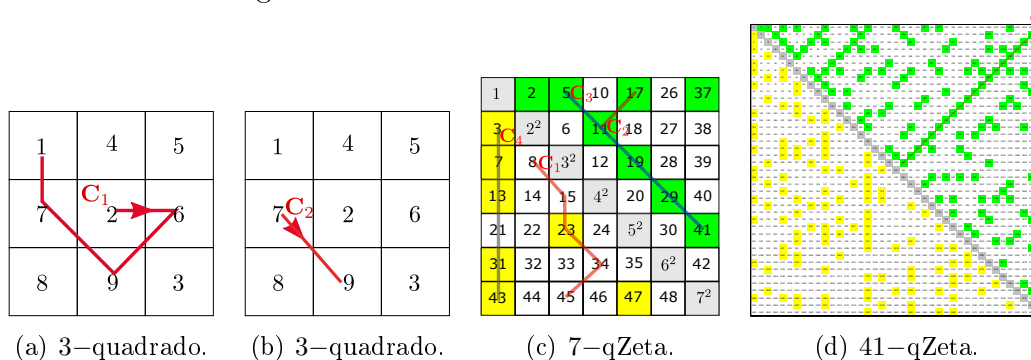
O único caminho que não é retilíneo é o  $\mathbf{C}_1(7)$ .

Considere o 41–qZeta (veja Figura 4.10):

- (d) Temos o seguinte caminho retilíneo:

$$\mathbf{C}(41) = (c_{20\ 22}, c_{19\ 23}, c_{18\ 24}, \dots, c_{3\ 39}, c_{2\ 40}, c_{1\ 41}) = (461, 503, 547, \dots, 1447, 1523, 1601)$$

Figura 4.10: Caminhos e caminhos retilíneos.



(a) 3–quadrado.

(b) 3–quadrado.

(c) 7–qZeta.

(d) 41–qZeta.

Fonte: AVILA *et al.* (2022).

**Definição 4.8** (Comprimento de um Caminho). No  $n$ –quadrado, o comprimento de um caminho  $\mathbf{C}(n)$ , denotado por  $|\mathbf{C}(n)|$ , é o número total de casas que ele possui.

**Definição 4.9** (Densidade de um Caminho). No  $n$ –quadrado, a densidade de um caminho  $\mathbf{C}(n)$ , denotado por  $\rho(n)$ , define-se por

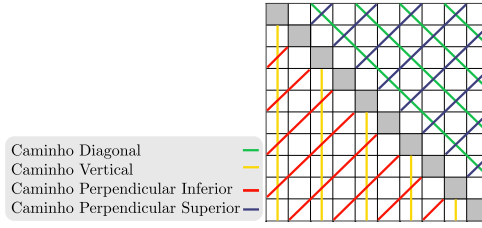
$$\rho(n) = |p| / |\mathbf{C}(n)| \quad (4.3)$$

onde,  $|p|$  denota a quantidade de números primos que contem o caminho  $\mathbf{C}(n)$ .

### 4.3.1 Tipos de Caminhos Retilíneos

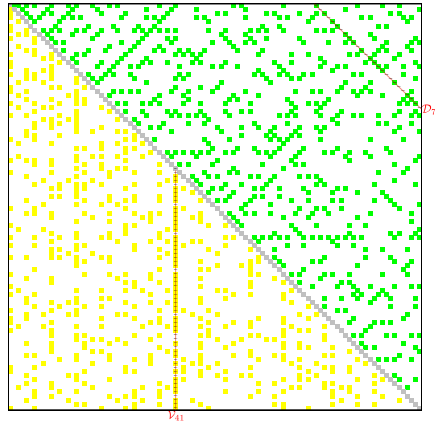
Existem vários tipos de caminhos retilíneos em um  $n$ –quadrado. Escolheremos quatro caminhos retilíneos que partem da diagonal principal: Diagonal, vertical, perpendicular inferior e perpendicular superior. É importante destacar que a primeira casa desses quatro caminhos retilíneos podem ou não iniciar-se na casa da diagonal principal. Veja na Figura 4.11 cada um deles.

Figura 4.11: Quatro tipos de caminhos retilíneos em um  $n$ -quadrado.



Fonte: AVILA *et al.* (2022).

Figura 4.12: Os caminhos  $\mathcal{D}_{75}(100)$  e  $\mathcal{V}_{41}(100)$ , no 100-qZeta.



Fonte: AVILA *et al.* (2022).

## 4.4 Caminhos Diagonais e Verticais no $n$ -qZeta

Define-se, no  $n$ -qZeta, os caminhos retilíneos: diagonal e vertical que foram escolhidos dentre uma infinidade de caminhos retilíneos.

**Definição 4.10** (Caminho Diagonal). Seja o  $n$ -qZeta. Um caminho diagonal, denotado por  $\mathcal{D}_j(n)$ ,  $3 \leq j \leq r$ , é definido por

$$\mathcal{D}_j(n) = (c_{1j}, c_{2(j+1)}, \dots, c_{(n-j+1)n}) \quad (4.4)$$

onde  $j$  é ímpar, e  $r = n$  se  $n$  é ímpar e  $r = n - 1$  se  $n$  é par.

O subíndice  $j$  indica que o caminho diagonal se inicia na coluna  $j$ .

**Definição 4.11** (Comprimento de um Caminho Diagonal).

$$|\mathcal{D}_j(n)| = n - (j - 1)$$

**Exemplo 4.4.** No 100-qZeta (veja Figura 4.12) temos o caminho diagonal 61, 54%:

$$\mathcal{D}_{75}(100) = (c_{175}, c_{276}, \dots, c_{2599}, c_{26100}) = (5.477, 5.627, \dots, 9.629, 9.827)$$

**Definição 4.12** (Caminho Vertical). Seja o  $n$ -qZeta. Um caminho vertical, denotado por  $\mathcal{V}_j(n)$ ,  $1 \leq j \leq r$ , é definido por

$$\mathcal{V}_j(n) = (c_{(j+1)j}, c_{(j+2)j}, \dots, c_{nj}) \quad (4.5)$$

onde  $j$  é ímpar, e  $r = n - 2$  se  $n$  é ímpar e  $r = n - 1$  se  $n$  é par.

O subíndice  $j$  indica que o caminho se encontra na coluna  $j$ .

**Definição 4.13** (Comprimento de um Caminho Vertical).

$$|\mathcal{V}_j(n)| = n - j$$

**Exemplo 4.5** (Caminho vertical  $\mathcal{V}_{41}(100)$ ). No 100-qZeta (veja a Figura 4.12),

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{41}(100) &= (c_{42\ 41}, c_{43\ 41}, c_{44\ 41}, \dots, c_{98\ 41}, c_{99\ 41}, c_{100\ 41}) \\ &= (1.763, 1.847, 1.933, \dots, 9.547, 9.743, 9.941) \end{aligned} \quad (4.6)$$

é um caminho vertical 77,97%.

## 4.5 Formulação Matemática de Caminhos Retilíneos no $n$ -qZeta

Se determinará uma formulação matemática para os caminhos retilíneos: diagonal e vertical, que se encontram no  $n$ -qZeta. Nota-se que dado um caminho retilíneo existe um polinômio quadrático associado a ele.

**Proposição 4.1** (Polinômio associado a um Caminho Diagonal). Seja o  $n$ -qZeta. O polinômio que descreve os valores das casas do caminho diagonal  $\mathcal{D}_j(n)$ ,  $3 \leq j \leq r$ , e comprimento  $s$  é dado por

$$d_j(k) = k^2 + (2j - 3)k + (j - 2)^2, \quad \forall k = 1, 2, 3, \dots, s \quad (4.7)$$

*Prova.* De (4.4), temos a seguinte sequência:

$$\begin{aligned} a_1 &= c_{1j} = j^2 - 2j + 2, & a_2 &= c_{2(j+1)} = a_1 + 2j, \\ a_3 &= c_{3(j+2)} = a_2 + 2j + 1 \cdot 2, & a_4 &= c_{4(j+3)} = a_3 + 2j + 2 \cdot 2, \quad \dots \\ a_k &= c_{k(j+k-1)} = a_{k-1} + 2j + (k - 2) \cdot 2 \end{aligned}$$

Observamos que a sequência é, na verdade, uma recorrência linear não-homogênea:

$$a_1 = j^2 - 2j + 2 \quad \text{e} \quad a_k = a_{k-1} + 2k + 2(j - 2), \quad k \geq 2 \quad (4.8)$$

A solução de (4.8) é dada por

$$a_k = a_1 + \sum_{l=2}^k (2l + 2(j - 2)) = k^2 + (2j - 3)k + (j - 2)^2, \quad \forall k \geq 1$$

Essa recorrência define o seguinte polinômio:

$$d_j(k) = k^2 + (2j - 3)k + (j - 2)^2, \quad 1 \leq k \leq s$$

**Exemplo 4.6.** O polinômio associado a  $\mathcal{D}_{75}(100)$ , comprimento  $26 = 100 - 75 + 1$ , é

$$d_{75}(k) = k^2 + 147k + 5329, \quad \forall k = 1, 2, \dots, 26$$

**Proposição 4.2** (Polinômio associado a um Caminho Vertical). Seja o  $n$ -qZeta. O polinômio que descreve os valores das casas do caminho vertical  $\mathcal{V}_j(n)$ ,  $1 \leq j \leq r$ , e comprimento  $s$  é dado por

$$v_j(k) = k^2 + (2j - 1)k + j^2, \quad \forall k = 1, 2, 3, \dots, s \quad (4.9)$$



*Prova.* A prova é análoga à Proposição 4.1, considerando a seguinte recorrência:

$$a_1 = j(j+2) \quad \text{e} \quad a_k = a_{k-1} + 2k + 2(j-1), \quad k \geq 2 \quad (4.10)$$

**Definição 4.14** (O Polinômio  $v_{41}$ ). Seja o  $n$ -qZeta,  $n \geq 42$ . O polinômio associado ao caminho vertical  $\mathcal{V}_{41}(n)$  é chamado Polinômio  $v_{41}$ , e é dado por

$$v_{41}(k) = k^2 + 81k + 1681, \quad \forall k = 1, 2, \dots, (n-41) \quad (4.11)$$

**Exemplo 4.7.** O polinômio, associado a  $\mathcal{V}_{41}(100)$ , comprimento  $59 = 100 - 41$ , é

$$v_{41}(k) = k^2 + 81k + 1681, \quad \forall k = 1, 2, \dots, 59 \quad (4.12)$$

## 4.6 Função Geradora de Números Primos: O Polinômio $v_{41}$

No  $n$ -qZeta, os polinômios quadráticos (4.7) e (4.9) associados aos caminhos diagonais e verticais, respectivamente, são funções geradoras de números primos. No entanto, o mais admirável é o Polinômio de Euler, o qual é definido por:

$$p_E(k) = k^2 - k + 41, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (4.13)$$

Este polinômio gera quarenta números primos para todo  $k = 1, 2, 3, \dots, 40$ , eles são:

$$\{41, 43, 47, 53, 61, \dots, 1.447, 1.523, 1.601\}$$

A sequência não possui números primos consecutivos, pois o 59 não está presente. Mas, ele continua fornecendo mais primos para outros valores de  $k$ .

### 4.6.1 O Caminho Vertical $\mathcal{V}_{41}(n)$ fora do $n$ -qZeta

Para cada  $n \geq 42$ , existe um único caminho vertical  $\mathcal{V}_{41}(n)$  de comprimento  $(n-41)$ , no  $n$ -qZeta. Se pensamos, por um momento, em um  $\infty$ -qZeta teremos um único caminho vertical  $\mathcal{V}_{41}$  independente de  $n$  e de comprimento “infinito”. Assim, o caminho vertical  $\mathcal{V}_{41}$  seria:

$$\mathcal{V}_{41} = (c_{42}, c_{43}, c_{44}, \dots) = (1.763, 1.847, 1.933, \dots) \quad (4.14)$$

Sendo assim, o polinômio  $v_{41}$ , associado ao caminho vertical  $\mathcal{V}_{41}$ , é dado por

$$v_{41}(k) = k^2 + 81k + 1681, \quad \forall k = 1, 2, 3, \dots \quad (4.15)$$

Este polinômio de 2º grau é uma função geradora de números primos.

### 4.6.2 O Polinômio de Euler como Translação do Polinômio $v_{41}$

Por inspeção,

$$v_{41}(1) = p_E(42) = 1763, \quad v_{41}(2) = p_E(43) = 1847, \quad \dots, \quad v_{41}(k) = p_E(k+41), \quad k \geq 1$$

Assim, o polinômio  $v_{41}$  resulta ser uma translação de 41 unidades, para trás, do polinômio de Euler. Ou, ainda,

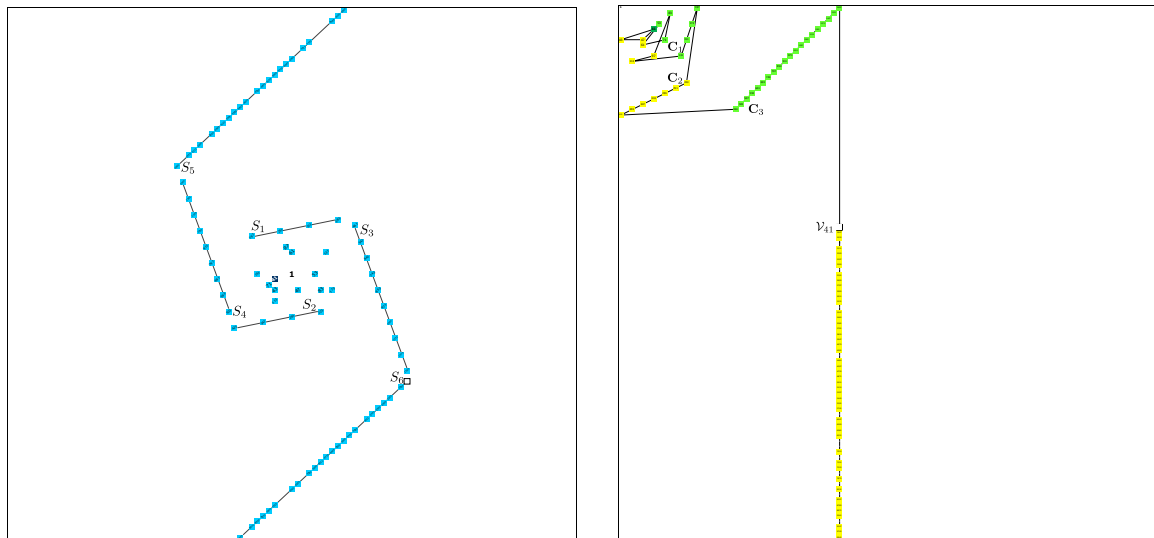
$$p_E(k) = v_{41}(k-41) \quad (4.16)$$

Nesse caso o polinômio  $v_{41}$  pode, também, ser avaliado nos inteiros não positivos.

## 4.7 O Perfil do Polinômio de Euler no $n$ -quadrado

Estudaram o perfil do polinômio de Euler  $p_E(x) = x^2 - x + 41$ , tanto na espiral de Ulam, quanto no  $n$ -quadrado Zeta. Estes perfis foram obtidos com um código escrito em Linguagem Visual Basic do Excel.

Figura 4.13: O perfil do polinômio de Euler.



(a) Espiral de Ulam (em um 99-quadrado).

(b) O 100-quadrado Zeta.

Fonte: AVILA *et al.* (2022).

## 5 O $n$ -triângulo de Quadrados

Neste Capítulo, trataremos, especificamente, da peça principal do presente trabalho, um arranjo geométrico conhecido como  $n$ -*triângulo de quadrados*. Assim, como os arranjos geométricos, estudados no capítulo anterior, a espiral de Ulam, a espiral de Snack e o  $n$ -quadrado Zeta, este, também, será estudado para encontrar padrões de números primos.

O  $n$ -triângulo de quadrados é de autoria própria, onde os números naturais são dispostos de maneira crescente, pré-estabelecido por um arranjo de formação, e a medida em que aumentamos sua proporção, aumenta-se também a contagem. A figura plana formada pelo arranjo geométrico é semelhante a um triângulo retângulo. Os números são dispostos em colunas.

Como o  $n$ -triângulo de quadrados é baseado sobre a ideia do  $n$ -quadrado Zeta, alguns conceitos são os mesmos, por isso sugerimos ao leitor que consulte o Capítulo 4 quando precisar deles.

A seguir, algumas definições importantes, quanto à geometria e o preenchimento desse novo arranjo geométrico.

### 5.1 Geometria

**Definição 5.1 (Casa de uma Figura Plana).** Seja  $F$  uma figura geométrica plana. Uma casa de  $F$  é um quadrado contido em  $F$ , cujo valor é um número inteiro não negativo.

**Definição 5.2 (A  $n$ -figura plana).** Dados  $m, n \in \mathbb{Z}^+$ . Uma  $n$ -figura plana é uma figura geométrica plana formada por  $mn$  casas que se interceptam em um lado. Cada casa  $c_{ij}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  e  $j = 1, 2, \dots, n$  segue uma ordem, cujo valor não se repete, a menos, que seja zero.

**Observação 5.1.** As casas cujos valores são zeros, não fazem parte da  $n$ -figura plana.

**Exemplo 5.1.** O  $n$ -quadrado (Figura 4.7) é um exemplo de uma  $n$ -figura plana.

**Definição 5.3 (O  $n$ -triângulo).** Um  $n$ -triângulo é uma  $n$ -figura plana, cujo triângulo é formado por  $n^2$  casas com valores inteiros positivos.

Dentre as diversas maneiras de definir um  $n$ -triângulo (retângulo, isósceles, equilátero, etc), vamos a considerar um triângulo retângulo especial, chamado  $n$ -triângulo de quadrados.

**Definição 5.4 (O  $n$ -triângulo de quadrados).** Um  $n$ -triângulo de quadrados, denotado por  $\top_n$ , é um  $n$ -triângulo retângulo, com as seguintes propriedades:

(a) As casas do  $\mathbb{T}_n$  (veja Figura 5.1) são denotadas por:

$$\{c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1n}; c_{22}, c_{23}, \dots, c_{2n}; \dots; c_{2n-1 n}; c_{2n-2 n}\}$$

(b) Os valores das casas da base do triângulo são preenchidos da seguintes forma:

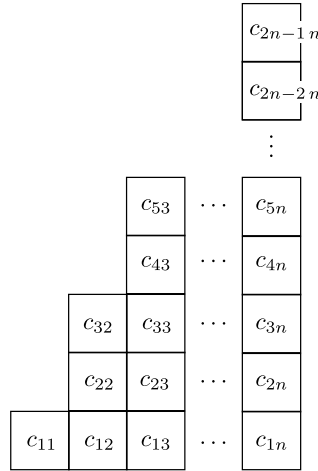
$$c_{11} = 1^2, c_{12} = 2^2, c_{13} = 3^2, \dots, c_{1n} = n^2$$

(c) Os valores de cada coluna sobre a base do triângulo, são preenchidos de cima para baixo. A  $j$ -ésima coluna é preenchida por:

$$c_{2j-1 j} = (j-1)^2 + 1, c_{2j-2 j} = (j-1)^2 + 2, c_{2j-3 j} = (j-1)^2 + 3, \dots, c_{2j} = j^2 - 1$$

para todo  $j = 2, 3, \dots, n$

Figura 5.1: Notação das casas de um  $n$ -triângulo de quadrados,  $\mathbb{T}_n$ .



Fonte: Os autores (2022).

**Definição 5.5** (Linha base de um  $\mathbb{T}_n$ ). A linha base de um  $n$ -triângulo de quadrados é dada pela primeira linha:

$$(c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1n})$$

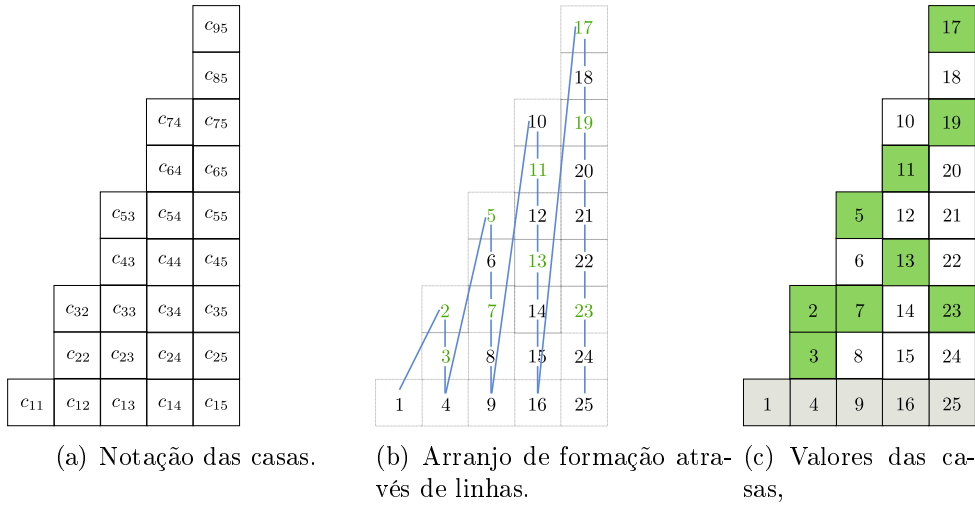
**Definição 5.6** (A altura de um  $\mathbb{T}_n$ ). A altura de um  $n$ -triângulo de quadrados é dada pela última coluna:

$$(c_{1n}, c_{2n}, \dots, c_{2n-2 n}, c_{2n-1 n})$$

**Observação 5.2** (Quantidade de casas da altura de um  $\mathbb{T}_n$ ). O número de casas da altura de um  $\mathbb{T}_n$  é dada por  $2n - 1$ .

**Exemplo 5.2.** Seguindo a Definição 5.4, construímos o 5-triângulo de quadrados,  $\mathbb{T}_5$ . Nas Figuras 5.1(a) e (c) mostramos a notação e o valor de cada casa, respectivamente. Na Figura 5.1(b) mostra o arranjo de formação através de linhas do  $\mathbb{T}_5$ .

Figura 5.2: O 5-triângulo de quadrados,  $\mathbb{T}_5$ .



Fonte: Os autores (2022).

### 5.1.1 Tipos de Diagonais em um $\mathbb{T}_n$

Em um  $n$ -triângulo de quadrados o estudo dos números primos a partir de suas diagonais é o principal objetivo. As diagonais de um  $\mathbb{T}_n$  podem ser classificadas em: principais e secundárias, veja a Figura 5.1.1 para seu melhor entendimento.

**Definição 5.7** (Diagonal Principal). Seja o  $n$ -triângulo de quadrados,  $\mathbb{T}_n$ . Definimos as diagonais principais de  $\mathbb{T}_n$  por

$$\begin{aligned}
 P_0 &= (c_{22}) \\
 P_1 &= (c_{33}, c_{24}) \\
 \forall k \geq 1, \begin{cases} P_{3k-1} &= (c_{(4k+1)(2k+1)}, c_{4k(2k+2)}, \dots) \\ P_{3k} &= (c_{(4k+2)(2k+2)}, c_{(4k+1)(2k+3)}, \dots) \\ P_{3k+1} &= (c_{(4k+3)(2k+3)}, c_{(4k+2)(2k+4)}, \dots) \end{cases}
 \end{aligned}$$

**Definição 5.8** (Diagonal Secundária). Seja o  $n$ -triângulo de quadrados,  $\mathbb{T}_n$ . Definimos as diagonais secundárias de  $\mathbb{T}_n$  por

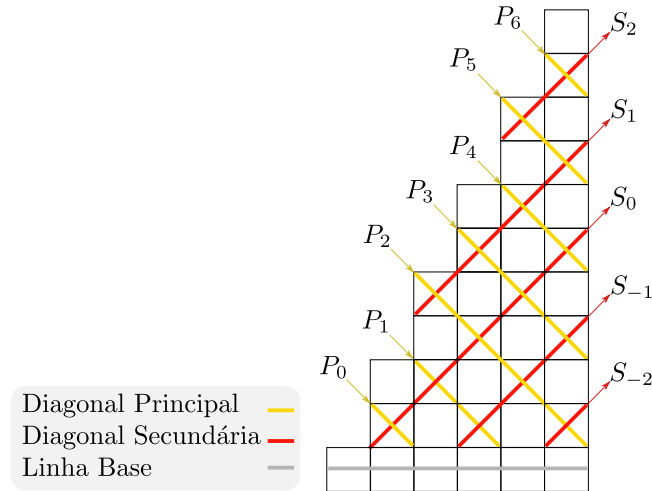
$$S_k = \begin{cases} (c_{(4k+1)(2k+1)}, c_{(4k+2)(2k+2)}, \dots, c_{(n+2k)n}) & \text{se } k \geq 1 \\ (c_{22}, c_{33}, \dots, c_{nn}) & \text{se } k = 0 \\ (c_{2 \cdot 2(1-k)}, c_{3 \cdot 2(1-k)+1}, \dots, c_{(n+2k)n}) & \text{se } k \leq -1 \end{cases}$$

Seguindo a definição de caminhos, definida no Capítulo 4, estudaremos alguns caminhos em um  $n$ -triângulo de quadrados. Os caminhos apresentados, a seguir, só possuem casas com valores inteiros ímpares.

**Definição 5.9** (Caminhos Diagonais em um  $\mathbb{T}_n$ ). .

(a) Um caminho diagonal principal em um  $\mathbb{T}_n$  é definido por

$$\mathcal{P}_k(n) := P_k, \quad \forall k \geq 0 \tag{5.1}$$

Figura 5.3: Diagonais e Linha Base de um  $\mathbb{T}_n$ .

Fonte: Os autores (2022).

(b) Um caminho diagonal secundária em um  $\mathbb{T}_n$  é definido por

$$\mathcal{S}_{1-2k}(n) := \mathcal{S}_k, \quad \forall k \leq 0 \quad (5.2)$$

**Exemplo 5.3.** Apresentamos 6 caminhos diagonais no  $\mathbb{T}_{50}$ , a localização de cada caminho é mostrado na Figura 5.4. Em vermelho e amarelo os caminhos diagonais secundárias e primárias, respectivamente.

$$(a) \mathcal{S}_{11}(50) = (143, 167, 193, 221, 251, 283, 317, \dots, 2363, 2461)$$

$$(b) \mathcal{S}_{17}(50) = (323, 359, 397, 437, 479, 523, 569, \dots, 2363, 2467)$$

$$(c) \mathcal{S}_{41}(50) = (1763, 1847, 1933, 2021, 2111, 2203, 2297, 2393, 2491)$$

$$(d) \mathcal{P}_{20}(50) = \{197, 229, 263, 299, 337, 377, 419, 463, \dots, 1763, 1849\}$$

$$(e) \mathcal{P}_{23}(50) = \{257, 293, 331, 371, 413, 457, 503, 551, \dots, 2303, 2401\}$$

$$(d) \mathcal{P}_{35}(50) = \{577, 629, 683, 739, 797, 857, 919, 983, \dots, 2377, 2477\}$$

O estudo dos caminhos em um  $n$ -triângulo de quadrados, é mais relevante em caminhos de diagonais secundárias, por serem mais longos. Os caminhos em diagonais primárias, apresentam sequências mais curtas, tornando-as menos interessantes para o estudo.

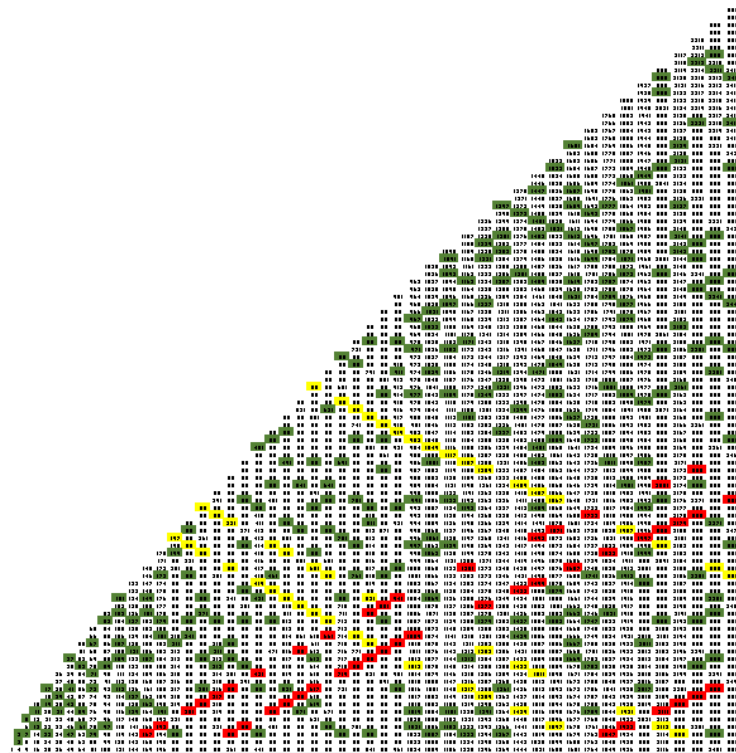
**Definição 5.10** (Comprimento de um Caminho). Seja uma  $n$ -figura plana, o comprimento de um caminho  $\mathbf{C}(n)$ , denotado por  $|\mathbf{C}(n)|$ , é o número total de casas que ele possui.

**Definição 5.11** (Densidade de um Caminho). Seja uma  $n$ -figura plana. A densidade de um caminho  $\mathbf{C}(n)$ , denotado por  $\rho(n)$ , define-se por

$$\rho(n) = |p| / |\mathbf{C}(n)| \quad (5.3)$$

onde,  $|p|$  denota a quantidade de números primos que contem o caminho  $\mathbf{C}(n)$ .

Figura 5.4: Caminhos em um Triângulo de Quadrados  $t_{50}$



Fonte: Os autores (2022)

Como o  $n$ -triângulo de quadrados é uma  $n$ -figura plana, então podemos calcular a densidade dos caminhos estudados acima. É claro notar que a densidade de um caminho aumenta ou diminui conforme  $n$  cresce.

**Exemplo 5.4.** Vamos a calcular a densidade dos caminhos apresentados no Exemplo 5.3.

- a)  $\rho_1(50) = \frac{|p|}{|\mathcal{S}_{11}(50)|} = \frac{18}{39} = 0,4615$ . Logo, a densidade do caminho  $\mathcal{S}_{19}(50)$  é  $\rho_1 = 46,15\%$
- a)  $\rho_2(50) = \frac{|p|}{|\mathcal{S}_{17}(50)|} = \frac{22}{33} = 0,6667$ . Logo, a densidade do caminho  $\mathcal{S}_{17}(50)$  é  $\rho_2 = 66,67\%$
- a)  $\rho_3(50) = \frac{|p|}{|\mathcal{S}_{41}(50)|} = \frac{6}{9} = 0,6667$ . Logo, a densidade do caminho  $\mathcal{S}_{41}(50)$  é  $\rho_3 = 66,67\%$
- a)  $\rho_4(50) = \frac{|p|}{|\mathcal{P}_{20}(50)|} = \frac{18}{30} = 0,62$ . Logo, a densidade do caminho  $\mathcal{P}_{20}(50)$  é  $\rho_4 = 62\%$
- a)  $\rho_5(50) = \frac{|p|}{|\mathcal{P}_{23}(50)|} = \frac{15}{33} = 0,4545$ . Logo, a densidade do caminho  $\mathcal{P}_{23}(50)$  é  $\rho_5 = 45,45\%$
- a)  $\rho_6(50) = \frac{|p|}{|\mathcal{P}_{35}(50)|} = \frac{20}{26} = 0,77$ . Logo, a densidade do caminho  $\mathcal{P}_{35}(50)$  é  $\rho_6 = 77\%$

## 5.2 Formulação Matemática de Caminhos

Nesta Seção, determinaremos uma formulação matemática para os caminhos diagonais secundárias no  $n$ -triângulo de quadrados. Tem-se que; dado um caminho, existe um polinômio quadrático associado a ele. Esse polinômio determina um tipo de *função geradora de números primos* (função com domínio inteiro e cujos valores são números primos).

**Definição 5.12.** Seja  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência de números reais. Definimos a sequência  $(\Delta x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , por

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n \quad (5.4)$$

onde,  $\Delta$  é o símbolo grego Delta.

**Proposição 5.1.** *Seja  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência de números reais.  $(x_n)$  é uma PA se, e somente se,  $(\Delta x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência constante.*

**Demonstração.** A demonstração direta, segue imediatamente, pois

$$(\Delta x_n)_{n \in \mathbb{N}} = x_{n+1} - x_n = a + nr - [a + (n-1)r] = r$$

Reciprocamente,  $(\Delta x_n)_{n \in \mathbb{N}} = x_{n+1} - x_n = c$ ,  $c$  é uma constante. Desse modo, temos a seguinte recorrência:  $x_{n+1} = x_n + c$ . Então,

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} + c \\ x_{n-1} &= x_{n-2} + c \\ &\vdots \\ x_2 &= x_1 + c \end{aligned} \quad (5.5)$$

Somando, membro a membro, (5.5), temos

$$x_n = x_1 + (n-1)c, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Logo, a sequência  $(x_n)$  é uma PA.

**Definição 5.13 (PA de 2<sup>a</sup> ordem).** Seja  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência de números reais.  $(x_n)$  é uma PA de 2<sup>a</sup> ordem se a sequência  $(\Delta x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma PA.

**Exemplo 5.5.** A sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (2, 4, 8, 14, 22, 32, 44, \dots)$  é de 2<sup>a</sup> ordem. De fato, pois

$$(\Delta x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_{n+1} - x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (2, 4, 6, 8, \dots)$$

é uma PA com razão 2.

**Observação 5.3.** Segundo [5], se a sequência dada  $(x_n)$  é uma PA de segunda ordem, então a sequência de números reais dada por:

$$\begin{aligned} (y_n)_{n \in \mathbb{N}} &= (\Delta x_n)_{n \in \mathbb{N}} = ((x_2 - x_1); (x_3 - x_2); (x_4 - x_3); \dots; (x_n - x_{n-1}); \dots) \\ &= (y_1; y_2; y_3; \dots; y_n; \dots) \end{aligned}$$

é uma PA não-estacionária. Assim,  $\sum_{i=1}^{n-1} (y_n)_{n \in \mathbb{N}} = y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{n-1}$  é a soma dos  $(n-1)$  primeiros termos da PA:  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , o qual será denotada por um polinômio do segundo grau, na variável  $n$ . Se simplesmente somarmos todos os termos da sequência  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , teremos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} (y_n)_{n \in \mathbb{N}} &= (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + (x_4 - x_3) + \dots + (x_n - x_{n-1}) \\ &= x_n - x_1 \end{aligned}$$

Então,  $x_n = x_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Assim, o termo geral da sequência  $(x_n)$  também será expresso por um polinômio do segundo grau, na variável  $n$ .



Por outro lado, se o termo geral da sequência numérica  $(x_n)$  for expresso por  $x_n = an^2 + bn + c$ , onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são constantes reais, então seu operador  $\Delta x_n$  será:

$$\begin{aligned} (\Delta x_n)_{n \in \mathbb{N}} &= x_{n+1} - x_n \\ &= a(n+1)^2 + b(n+1) + c - an^2 - bn - c \\ &= an^2 + 2an + a + bn + b + c - an^2 - bn - c \\ &= 2an + (a + b) \end{aligned}$$

Generalizando,  $(\Delta x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é expresso por um polinômio do primeiro grau, na variável  $n$ . Logo,  $(\Delta x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma PA não-estacionária e, por definição,  $(x_n)$  é uma PA de segunda ordem.

**Exemplo 5.6** (O Polinômio  $s_{41}(k)$ ). Formularemos um polinômio quadrático para o caminho:

$$S_{41}(50) = (1763, 1847, 1933, 2021, 2111, 2203, 2297, 2393, 2491)$$

Tem-se que,

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1763, 1847, 1933, 2021, 2111, 2203, 2297, 2393, 2491)$$

Logo,  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\Delta x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1847-1763, 1933-1847, 2021-1933, 2111-2021, \dots, 2491-2393) = (84, 86, 88, 84, \dots, 98)$ . Percebe-se que  $x_n$  é uma progressão aritmética de segunda ordem de razão  $r = 2$ , ou seja,  $x_n = an^2 + bn + c$ , com  $a \neq 0$ . Agora, basta aplicarmos tudo em um sistema linear, para obtermos o polinômio associado ao caminho. Atribuindo a  $n$  os valores 1, 2 e 3.

$$\begin{cases} a + b + c = 1763 \\ 4a + 2b + c = 1847 \\ 9a + 3b + c = 1933 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema linear, encontramos que:  $a = 1$ ,  $b = 81$  e  $c = 1681$ . Agora, podemos associar o caminho  $\mathcal{S}_{41}(50)$  ao polinômio  $s_{41}(k) = k^2 + 81k + 1681$ . Um  $n$ -triângulo de quadrados, apresenta inúmeros caminhos, e cada um desses caminhos, pode ser designado em um polinômio quadrático, permitindo assim, a análise para uma quantidade infinita de  $n_s$ , desde que  $n \geq 0$ .

$n$	$s_{41}(k) = k^2 + 81k + 1681$
1	1763
2	1847
3	1933
$\vdots$	$\vdots$
9	2491

Fonte: O autor (2022).

Se tomarmos por exemplo, o caminho  $\mathcal{S}_{142}(3000)$ , teremos como polinômio para a sequência retornada por ele;  $s_{142}(k) = k^2 + 569k + 80657$ , gerando 60 números primos, quando  $0 \leq n \leq 100$ . Como mencionado anteriormente, existirão infinitos caminhos. A quantidade de números primos expressa em cada caminho, pode aumentar ou diminuir, a medida que  $n$  aumenta, possibilitando assim, analisar quão relevantes são os polinômios geradores. Quanto mais números primos encontrados no caminho estabelecido, maior será sua densidade, possibilitando assim, análises mais profundas do polinômio.

## 5.3 Polinômios Geradores de Números Primos

Nesta Seção, apresentaremos os polinômios de Euler, o polinômio  $v_{41}$  e outros polinômios notáveis.

### 5.3.1 Os Polinômios $p_E$ , $v_{41}$ e $s_{41}$

Existem vários polinômios que descrevem funções geradoras de números primos, entretanto, o mais famoso é o Polinômio de Euler, o qual é definido por:

$$p_E(k) = k^2 - k + 41, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (5.6)$$

No  $n$ -quadrado Zeta destaca-se o seguinte polinômio:

$$v_{41}(k) = k^2 + 81k + 1681, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (5.7)$$

O polinômio  $s_{41}(k)$ , associado ao caminho  $\mathcal{S}_{41}(n)$ , é igual ao polinômio  $v_{41}(k)$ . O  $n$ -triângulo de quadrados e o  $n$ -quadrado Zeta, como sabemos, são dois arranjos diferentes dos números naturais que identificam padrões de distribuição de números primos. Apesar de serem arranjos distintos, percebe-se que alguns caminhos, com nomenclaturas diferentes, remetem as mesmas sequências de números.

### 5.3.2 Alguns Polinômios Notáveis

A partir de um código elaborado em *Visual Basic*, no *Microsoft Excel*, foi possível analisar uma série de triângulos de quadrados e a partir de então, encontrar alguns polinômios notáveis. Em um triângulo de quadrados  $\top_{3000}$ , observou-se os seguintes polinômios, expressados na Tabela 5.1.

Tabela 5.1: Polinômios obtidos no  $\top_{3000}$ .

Caminho	Polinômio Obtido
$\mathcal{S}_{41}(3000)$	$n^2 + 81n + 1681$
$\mathcal{S}_{55}(3000)$	$n^2 + 221n + 12101$
$\mathcal{S}_{142}(3000)$	$n^2 + 569n + 80657$
$\mathcal{S}_{310}(3000)$	$n^2 + 1241n + 384401$

Fonte: Os autores (2022).

Nessa tabela, os polinômios variando em função de  $n$ , retornam sequências expressivas de números, obviamente, realizar tal observação demanda alguns artifícios computacionais, pois a medida que  $n$  cresce, o valor retomado para o polinômio também cresce. Averiguar se números muito altos são primos ou não, torna-se uma tarefa um tanto quanto complexa, para um computador de uso doméstico. É importante ressaltar que para  $n$  no intervalo de 0 a  $10^7$ , os polinômios  $s_{41}(k) = v_{41}(k)$  e  $s_{310}(k)$ , retornam, respectivamente, 2.208.165 e 2.072.280 números primos.

## 5.4 Conclusão

O estudo dos números primos a partir de perspectivas geométricas ainda carece de referências e estudos aprofundados. A preferência por estudos analíticos, mostra que ainda existe resistência no meio matemático, pela busca de caminhos alternativos. Grandes foram as contribuições encontradas a partir dos estudos analíticos, mas talvez, seja o momento de investigar mais a fundo a modelagem geométrica em busca de padrões e sequências de números primos. A elaboração do  $n$ - *triângulo de quadrados*, possibilitou: (a) Um novo arranjo dos números naturais para a identificação de padrões da distribuição de números primos, distribuídos em um triângulo, enfaticamente, pelas sequências obtidas nas diagonais secundárias. (b) Um novo método, para encontrar longas sequências de números primos, que juntamente com o  $n$ - **quadrado Zeta** e a *Espiral de Ulam*, corroboram para o potencial da análise de padrões e busca de sequências de números primo. (c) A associação de polinômios quadráticos, aos caminhos, favorecendo a obtenção de números primos grandes. (d) Alguns polinômios quadráticos destaques, que remetem sequências significativas de primos. Espera-se que o estudo sirva de incentivo para outros matemáticos criarem seus próprios arranjos, ou até mesmo, melhorem a compreensão dos arranjos geométricos já existentes. A partir de matemática básica, criou-se uma ferramenta eficaz para obtenção de números primos, que mostra-se altamente eficiente para revelação de novos padrões e quem sabe, polinômios mais admiráveis do que o próprio *Polinômio de Euler*. Finalmente, pretende-se com este trabalho motivar a criação de arranjos alternativos, que possibilitem o estudo dos números primos, vislumbrando novos arranjos, que contribuam para descoberta de novos padrões de números primos.



# Referências

- [1] MORIMOTO, R. M. Números primos: propriedades, aplicações e avanços. Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2014.
- [2] AVILA, J. A. J.; MOREIRA, E. D.; GUIMARAES, B. F. Padrões Especiais de Números Primos: O  $n$ -quadrado Zeta. *Revista Matemática Universitária (RMU), SBM*, v. 2, p. 01–23, 2022.
- [3] FORNARI, A.; ORIHUELA, F. E. T. Polinômios geradores de números primos.
- [4] ORLOWSKI, A.; CHMIELEWSKI, L. J. Ulam spiral and prime-rich polynomials. Universidade Federal do Amazonas, 2018.
- [5] MONTEIRO, M. S. Notas de aula-mat0315-introdução à análise real.
- [6] VOLOCH, J. F. A distribuição dos números primos. *Matemática Universitária*, n. 06, p. 71–82, 1987.
- [7] TANASE R. E RADU, R. *PageRank Algorithm-The Mathematics of Google Search*. 1. ed. <http://www.math.cornell.edu/mec/Winter2009/RalucaRemus/index.html>: Universidade de Cornell, 15 de maio de 2018.