



EMÍLIO SILVA DE ASSIS

**A MATEMÁTICA COMO FERRAMENTA PARA
O ENSINO DE FÍSICA: FUNÇÕES POLINOMIAIS
DO 1º E DO 2º GRAU E A CINEMÁTICA**

LAVRAS - MG

2013

EMÍLIO SILVA DE ASSIS

**A MATEMÁTICA COMO FERRAMENTA PARA O ENSINO DE
FÍSICA: FUNÇÕES POLINOMIAIS DO 1º E DO 2º GRAU E A
CINEMÁTICA**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado à Universidade Federal de
Lavras, como parte das exigências do
Programa de Pós-Graduação Profissional
em Matemática, área de concentração em
Matemática, para a obtenção do título de
Mestre.

Orientador

Dr. Osnel Broche Cristo

LAVRAS - MG

2013

**Ficha Catalográfica Elaborada pela Coordenadoria de Produtos e
Serviços da Biblioteca Universitária da UFLA**

Assis, Emílio Silva de.

A matemática como ferramenta para o ensino de física : funções polinomiais do 1º e do 2º grau e a cinemática / Emílio Silva de Assis. – Lavras : UFLA, 2013.

45 p. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional em Matemática – Universidade Federal de Lavras, 2013.

Orientador: Osnel Broche Cristo.

Bibliografia.

1. Funções polinomiais. 2. Cinemática. 3. Ensino-aprendizagem. 4. Física. I. Universidade Federal de Lavras. II. Título.

CDD – 370.7123

EMÍLIO SILVA DE ASSIS

**A MATEMÁTICA COMO FERRAMENTA PARA O ENSINO DE
FÍSICA: FUNÇÕES POLINOMIAIS DO 1º E DO 2º GRAU E A
CINEMÁTICA**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado à Universidade Federal de
Lavras, como parte das exigências do
Programa de Pós-Graduação Profissional
em Matemática, área de concentração em
Matemática, para a obtenção do título de
Mestre.

APROVADO em 14 de agosto de 2013.

Dr. Carlos Alberto Raposo da Cunha UFSJ

Dr. José Alberto Castro Nogales Vera UFLA

Dr. Osnel Broche Cristo
Orientador

LAVRAS - MG

2013

Dedico este trabalho, de forma especial a minha amada esposa Viviane Elizabeth de Souza Silva, a minha princesa Isadora Silva de Souza, que abdicaram da minha presença e apoiaram-me nos mais preciosos momentos da minha vida. Dedico ao meu filho, Caio que irá nascer neste ano de 2013, sua vinda trará alegria e motivação para os meus feitos;

Dedico também a minha mãe, Rita, que com seu apoio incondicional seu mimo incomparável sempre se fez presente em minha vida;

Aos meus irmãos, Bruno e Breno, que sempre me motivaram a buscar o melhor de mim. A rivalidade que sempre existiu entre nós parava no respeito à capacidade do outro.

Dedico ao meu Pai, Geraldo, este que sempre foi meu exemplo de persistência, sabedoria e dedicação, sem seus elogios não sei se chegaria onde estou;

Dedico as minhas cunhadas pedagogas, Alécia, Fabiana e Aline, com as quais sempre posso contar;

Dedico à família da minha esposa, meus sogros e cunhados, que são partes fundamentais da minha vida. Vocês sabem que podem sempre contar comigo.

Dedico aos meus sobrinhos, Lucas, Franciny, Matheus, João Pedro, Júlia e Rafael, e que a minha formação sirva-lhes de exemplo, torço para que estudem e sejam muito melhor;

Por fim, **dedico** aos meus professores, aos meus colegas de classe e todos os meus amigos que acreditaram na minha capacidade. Sem vocês seria muito mais difícil esta caminhada.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus e a Nossa Senhora Aparecida, devo a Eles a saúde, a paciência e o saber intelectual;

Ao Coordenador do curso, meu orientador o Professor e Doutor Osnel Broche Cristo, que incontestavelmente apoiou minha pesquisa;

Aos Amigos e mestrandos, Daniel, Lessa, Neder, Rodnei e Rosan, que foram partes fundamentais no desenvolvimento dos meus estudos, e companheiros de viagens;

Aos demais colegas de turma, e todos os funcionários que sempre nos trataram com muito respeito e muita dedicação.

*“Uma mente que se abre a uma nova
ideia jamais retornará ao seu tamanho
original”.*

(ALBERT EINSTEIN)

RESUMO

A motivação inicial para com esta pesquisa foi a elaboração de um Seminário envolvendo Cinemática e Funções, apresentado para 247 alunos do 1º ano do Ensino Médio de uma escola pública de Belo Horizonte. O texto foi elaborado para este público específico, os alunos do 1º Ano do Ensino Médio, contudo não detalharemos alguns conteúdos trabalhados em anos ou momentos anteriores. O estudo gráfico e algébrico de funções polinomiais de 1º e 2º graus não são assuntos novos dentre aqueles presentes no currículo do ensino de Matemática para o 1º ano do Ensino Médio. Com essa pesquisa propõe-se uma análise gráfica e algébrica com uma abordagem interdisciplinar, entre os conteúdos de funções (matemática) e os conteúdos de cinemática, a fim de descaracterizar o tratamento específico e complexo que a maioria dos professores de matemática e física dá a esses conteúdos. O enfoque que daremos a essa pesquisa será para a solução de problemas envolvendo a cinemática com análise gráfica e algébrica das funções polinomiais de 1º e 2º graus, pois as mesmas são utilizadas como pano de fundo durante o tratamento físico de todo o conteúdo de cinemática. Em geral as soluções dos problemas de cinemática são dadas sem a correlação com as funções polinomiais.

Palavras-chave: Função polinomial do primeiro e do segundo grau. Cinemática. Interdisciplinaridade.

ABSTRACT

The initial motivation of this research was the elaboration of a seminar involving Kinematics and Functions, and presented to 247 students of the 1st year of high school, in a public school in Belo Horizonte, Minas Gerais, Brazil. The text was elaborated for this specific public, however, we will not detail a few of the contents worked with in previous years or moments. The graphic and algebraic study of 1st and 2nd degree polynomial functions are not new among those present in the mathematics curriculum for the 1st year of high school. This research proposes a graphic and algebraic analysis with an interdisciplinary approach, among the functions (mathematics) and kinematics content, in order to de-characterize the specific and complex treatment which most mathematics and physics teachers give to these contents. The focus of this research will be the solution of problems involving kinematics with graphic and algebraic analysis of the 1st and 2nd degree polynomial functions, for they are used as background during the physical treatment of all kinematics content. In general, the solutions to the kinematics problems are given without the correlation with polynomial functions.

Keywords: 1st and 2nd degree polynomial functions. Kinematics. Interdisciplinarity.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	Gráficos construídos por meio do software geogebra.....	17
Figura 2	Corpo e partícula	24
Figura 3	Posição	25
Figura 4	Sinal da velocidade	27
Figura 5	Gráfico construído no geogebra	29
Figura 6	Gráficos construídos através do software geogebra.....	35
Figura 7	Gráficos construídos por meio do software geogebra.....	36
Figura 8	Gráficos construídos por meio do software geogebra.....	37
Figura 9	Gráficos construídos por meio do software geogebra.....	38
Figura 10	Gráficos construídos por meio do software geogebra.....	39

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	UMA PEQUENA ABORDAGEM SOBRE INTERDISCIPLINARIDADE	13
2.1	Breve História da Interdisciplinaridade	13
2.2	O Conceito de interdisciplinaridade	13
3	ANÁLISE GRÁFICA DAS FUNÇÕES POLINOMIAIS DE 1º E 2º GRAUS	15
3.1	Abordagem histórica sobre a função e seus gráficos	15
3.2	Interpretação Gráfica da Função Polinomial de 1º grau	16
3.3	Interpretação gráfica da função polinomial do 2º Grau	18
4	CINEMÁTICA: O ESTUDO DOS MOVIMENTOS	24
4.1	Movimento Retilíneo Uniforme (MRU)	26
4.2	Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (MRUV)	29
4.3	Movimento de Queda livre	31
5	SOLUÇÃO DE EXERCÍCIOS DE CINEMÁTICA	34
6	CONCLUSÃO	41
	REFERÊNCIAS	42
	APÊNDICE	43

1 INTRODUÇÃO

Nosso objetivo geral é apresentar uma pesquisa que possa mostrar e melhor orientar, os professores de matemática e de física a propósito da atitude interdisciplinar que pode e deve haver entre esses conteúdos; visto que o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) trabalha nesta vertente de aproximar ao máximo todas as disciplinas do Ensino Médio; para isso propusemos a apresentação de pelo menos um Seminário com a participação dos professores de Física e Matemática. Já os objetivos específicos com a nossa pesquisa são: solucionar problemas de cinemática por meio da apresentação e da análise gráfica e algébrica das funções polinomiais de 1º e 2º graus, atitude essa que nos parece proporcionar uma perspectiva interdisciplinar no ensino dos conteúdos matemáticos e físicos.

O desenvolvimento dessa pesquisa parte de uma análise bibliográfica, em busca de autores e pesquisadores que possam vir a nos orientar e acrescentar mais a respeito do referencial teórico que permeiam o processo interdisciplinar entre Física e Matemática.

Apoiados em Pietrocola (2002) e Messias (2006) ressaltaremos a importância que a matemática possui para o ensino de Física e também a importância que função polinomial desempenha para ambas as disciplinas.

Acreditamos que no fim de nossa pesquisa possamos ajudar a melhorar o processo de ensino-aprendizagem dos alunos do 1º ano do ensino médio, usufruindo da interdisciplinaridade existente entre a Física e a Matemática.

No capítulo 2, apresentaremos um relato sobre a origem, conceito e perspectivas da interdisciplinaridade.

Para o capítulo 3, será dada ênfase o estudo gráfico e algébrico das funções polinomiais de 1º e 2º graus.

No capítulo 4 apresentará o conteúdo de cinemática, que por sua vez terá como complemento teórico os tópicos sobre: movimento retilíneo uniforme (MRU), movimento retilíneo uniformemente variado (MRUV) e o movimento de queda livre.

O capítulo 5 o autor se ocupará com a solução de problemas envolvendo a cinemática; neste capítulo daremos a solução feita utilizando somente as expressões trabalhadas na cinemática, uma solução alternativa, dada a partir de conceitos trabalhados em funções.

Por fim, o 6 capítulo trará a conclusão desta pesquisa.

2 UMA PEQUENA ABORDAGEM SOBRE INTERDISCIPLINARIDADE

2.1 Breve História da Interdisciplinaridade

A ideia de interdisciplinaridade surgiu na Europa em meados dos anos 60, onde o filósofo e epistemólogo Francês George Gusdorf apresentou à UNESCO, um projeto interdisciplinar para as ciências humanas. Diversos pesquisadores Americanos e Europeus juntamente com Gusdorf acreditavam na possibilidade de diminuir a distância teórica existente dentro das ciências humanas, distancia que posteriormente seria chamado de fragmentação do saber.

O movimento interdisciplinar no Brasil foi proposto em 1976, pelo epistemólogo Hilton Japiassu que por meio de seu livro *Interdisciplinaridade e Patologia do Saber* discerne todo o seu conhecimento sobre a interdisciplinaridade, e por consequência desses estudos sobre a interdisciplinaridade no ano de 1979 a pesquisadora Ivani Catarina Arantes Fazenda lança seu livro *Integração e Interdisciplinaridade no ensino brasileiro*, o que posteriormente despertaria diversas pesquisas sobre este tema.

2.2 O Conceito de interdisciplinaridade

O conceito de interdisciplinaridade é variável não somente no nome quanto no significado, assim afirma Clarissa Corrêa Fortes¹, isto acontece devido às várias definições que o vocábulo assume nas diversas áreas do conhecimento. Para Japiassu (1976, p. 23):

¹ Clarissa Corrêa Fortes/Graduada em Letras- Espanhol pela FAMES/ Santa Maria e especialista em Gestão Educacional pela UFSM/ Santa Maria.

O prefixo inter, dentre várias conotações que podemos lhe atribuir, tem o significado de troca, reciprocidade e disciplina, de ensino, instrução, ciência. Logo a interdisciplinaridade pode ser compreendida como um ato de troca, de reciprocidade entre as disciplinas ou ciências - ou melhor, de áreas do conhecimento.

Mas, mesmo sendo definida dentro dessas características, ainda encontramos muitas dificuldades em determinar uma forma ou uma fórmula para executar tal metodologia, e é aí que surge o grande problema; o de não existir uma forma nem muito menos uma fórmula para ensinar a prática interdisciplinar, pois conforme (JAPIASSU, 1976, p. 15) a “Interdisciplinaridade não é algo que se ensine ou que se aprenda, mas algo que se vive” e considera que “é fundamentalmente uma atitude de espírito. Atitude feita de curiosidade, de abertura, de sentido de aventura, de intuição das relações existentes entre as coisas e que escapam à observação comum”.

Assim, podemos dizer que um dos objetivos dessa dissertação é incentivar a interdisciplinaridade, que mesmo sendo tão clara entre as disciplinas Física e Matemática, ela é tão pouco usada nas escolas. Partimos então em busca de um ensino não fragmentado.

3 ANÁLISE GRÁFICA DAS FUNÇÕES POLINOMIAIS DE 1º E 2º GRAUS

3.1 Abordagem histórica sobre a função e seus gráficos

A palavra “função” dentro do sentido que lhe é atribuída nos dias atuais, deve-se a Leibniz (1646-1716) ² onde sua descrição designava as várias variáveis geométricas associadas a uma curva. Porém, a mais antiga, clara e influente representação gráfica de uma função, que se tem notícia, devem-se a Nicole Oresme (1323 -1382) ³ onde, ao descrever um corpo que se move com aceleração constante, Oresme (citado por BOYER (1974, p.192) escreve:

Ao longo de uma reta horizontal ele marcou pontos representando instantes de tempo (ou longitudes), e para cada instante ele traçou perpendicularmente à reta de longitudes um segmento de reta (latitude) cujo comprimento representava a velocidade.

Desde a sua aparição na história, a função apresentou diversas definições, Porém, a que melhor nos atende é a relatada por Iezzi et al. (2004, p. 33), onde afirma que: “ Em Matemática, se x e y são duas variáveis tais que para cada valor atribuído a x existe, em correspondência, um único valor para y , dizemos que y é uma **função** de x .”. Constantemente em nossa pesquisa apresentaremos as seguintes representações para função: $f(x)$, $f(t)$, $s(t)$, $v(t)$,... etc.

No ensino de função poderíamos estudar vários tipos de variações, sejam as lineares, quadráticas, modulares, exponenciais, logarítmica, e diversas

² Ver: Boyer (1974), p. 297.

³ Ver: Boyer (1974), p. 191-195.

outras variações, Porém, em nossa pesquisa adentrará apenas nas lineares e quadráticas que melhor atendem a proposta de nosso trabalho.

3.2 Interpretação Gráfica da Função Polinomial de 1º grau

Diz-se que uma função é do 1º grau ou afim, “quando existem dois números reais **a** e **b** tal que $f(x) = ax + b$, para todo $x \in \mathbb{R}$.” (DANTE, 2005. p. 54). Por exemplo:

a)	$f(x) = 2x + 3$	$(a = 2, b = 3)$	<i>função afim completa</i>
b)	$f(x) = 4$	$(a = 0, b = 4)$	<i>função afim constante</i>
c)	$f(x) = -3x$	$(a = -3, b = 0)$	<i>função linear</i>
d)	$f(x) = x$	$(a = 1, b = 0)$	<i>função identidade</i>

A representação gráfica de uma função afim ou polinomial do 1º grau é uma reta⁴ não-vertical, isto é, não paralela ao eixo y, os gráficos abaixo se referem às funções citadas acima, veja:

⁴ Para uma demonstração sobre a característica retilínea da função polinomial do 1º grau (DANTE, 2005, p. 57)

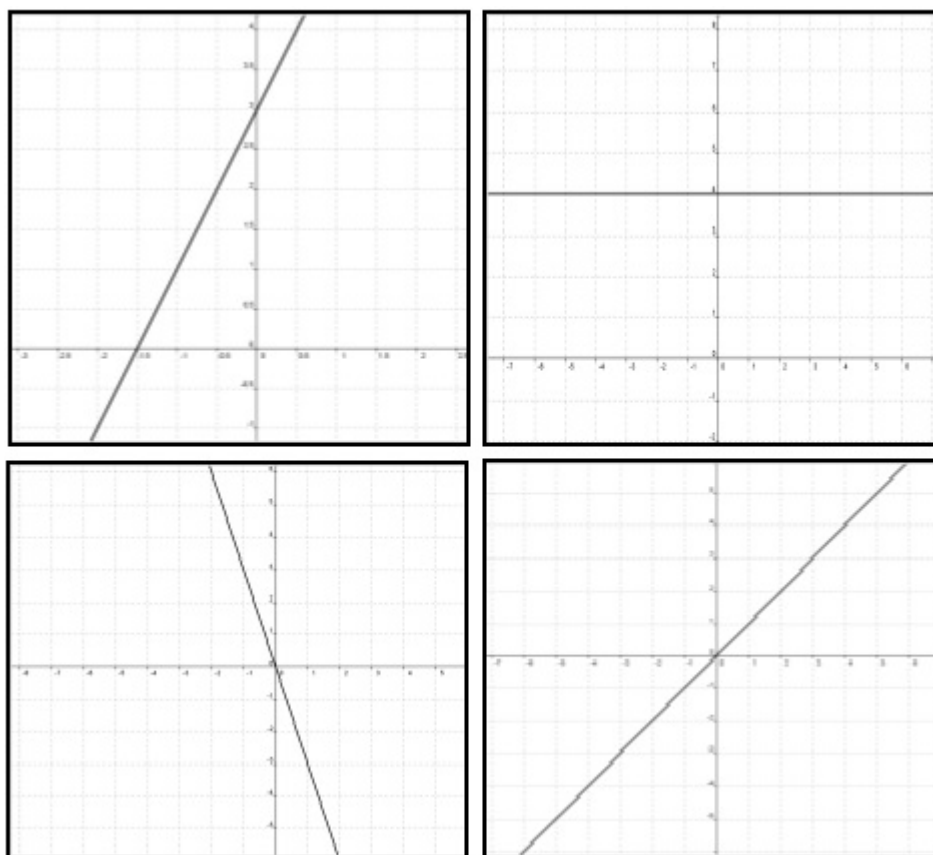


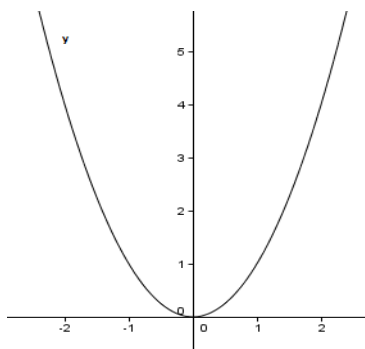
Figura 1 Gráficos construídos por meio do software geogebra

Já vimos que a representação gráfica de uma função polinomial de 1º grau é uma reta, notamos também que ao variarmos os valores de **a** e de **b** na função $y = f(x) = ax + b$, o gráfico passa a se comportar de maneira diferente.

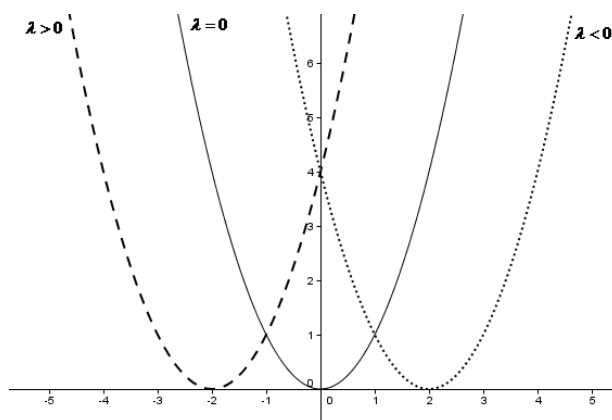
O coeficiente que acompanha a variável x , **a** é chamado de coeficiente angular da reta, ele é responsável pela inclinação da reta em relação ao eixo das abscissas (Ox). E termo constante **b** é chamado de coeficiente linear da reta, ele indica o ponto em que a reta intersecta o eixo das ordenadas (Oy) (IEZZI et al., 2004, p. 73).

3.3 Interpretação gráfica da função polinomial do 2º Grau

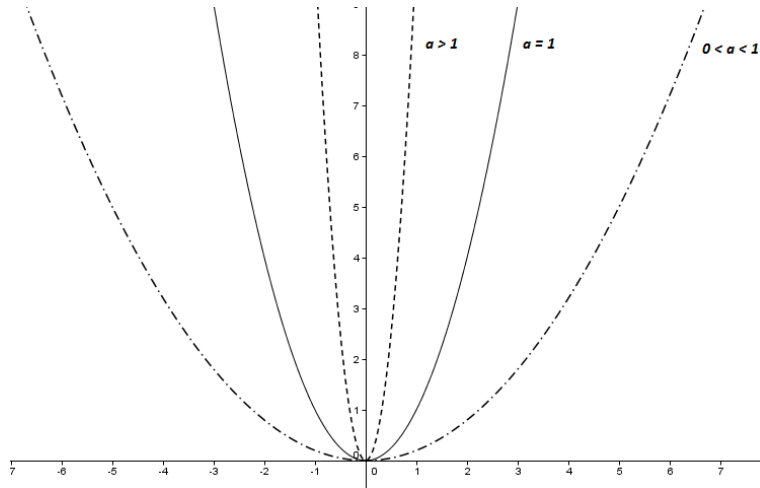
Uma forma geométrica de analisar a equação de 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$ é estudar a função $y = ax^2 + bx + c$, para isto necessita conhecer o esboço do gráfico desta função. Sabe-se que o gráfico da função $y = x^2$ é uma parábola, simétrica em relação ao eixo das ordenadas $x = 0$.



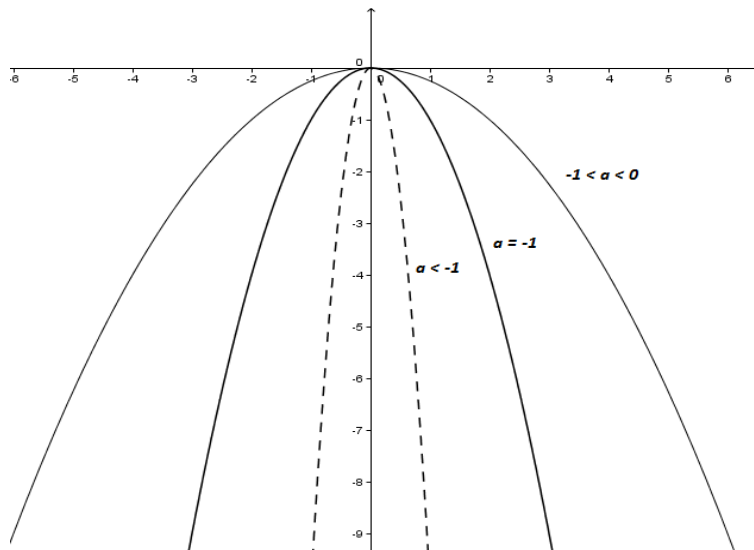
1 - A função $y = (x + \lambda)^2$; $\lambda \in \mathbb{R}$, é uma função cujo gráfico é uma translação horizontal de $y = x^2$; será uma translação à direita se $\lambda < 0$, e uma translação à esquerda se $\lambda > 0$. Observe a figura:



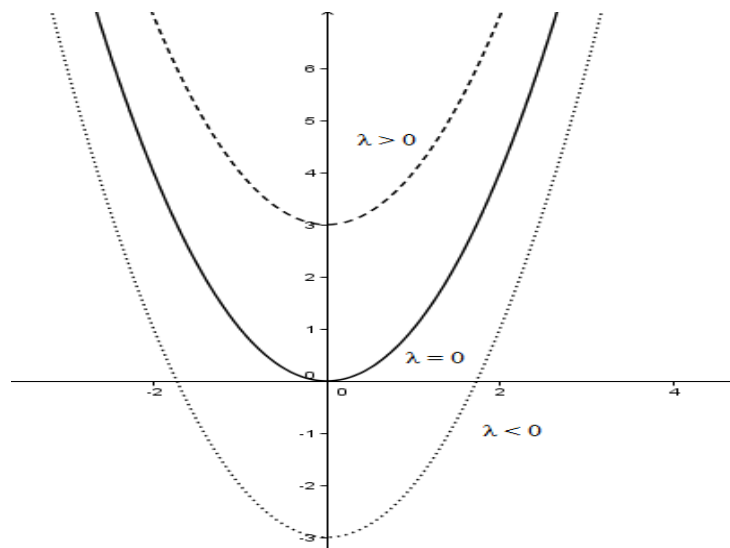
2 – A função $y = ax^2$, é uma função cujo gráfico é uma homotetia do gráfico de $y = x^2$. Assim para $a > 0$, temos:



E para $a < 0$,



3 – A função do tipo $y = x^2 + \lambda$, é uma translação vertical de $y = x^2$, se $\lambda > 0$ o gráfico de $y = x^2 + \lambda$ é uma translação vertical para cima, e se $\lambda < 0$ será uma translação vertical para baixo:



Assim voltando a nossa função de 2º grau,

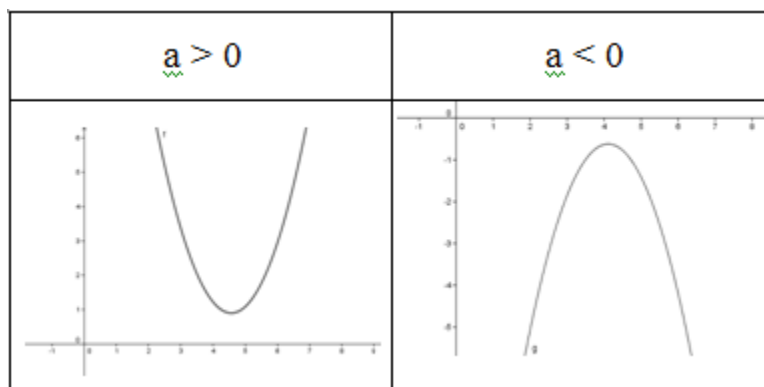
$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{bx}{a}\right) + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

Onde, $\Delta = b^2 - 4ac$. Notemos que o gráfico desta é uma combinação de uma translação horizontal $y = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, seguida de uma homotetia

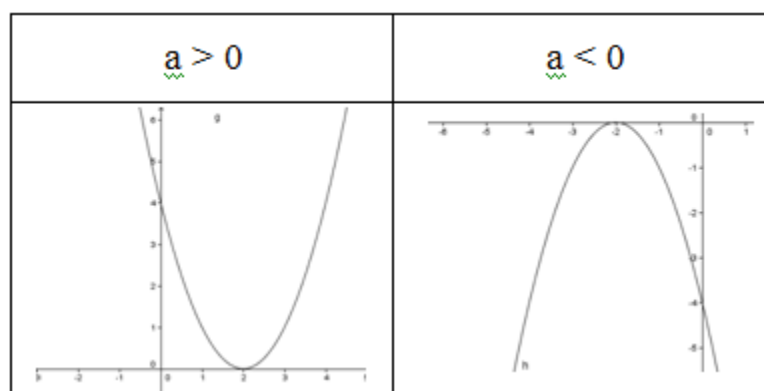
$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ e por fim uma translação vertical com $\lambda = -\frac{\Delta}{4a}$. Logo, o

gráfico de $y = ax^2 + bx + c$ não deixa de ser uma parábola. Assim as posições relativas do gráfico de $y = ax^2 + bx + c$, são:

(I) - se $\Delta < 0$, os possíveis gráficos são:

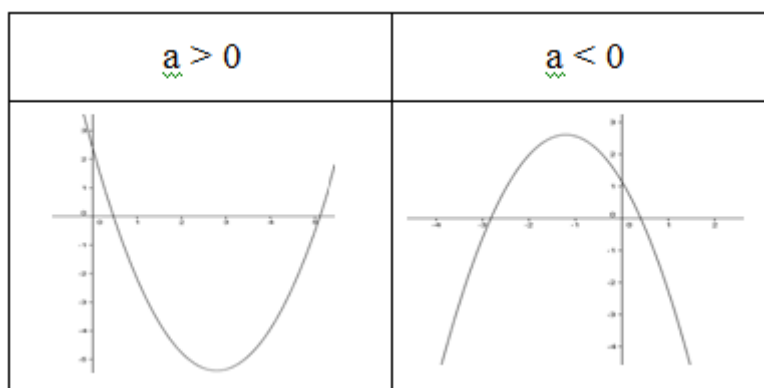


(II) - se $\Delta = 0$, isto implica que o gráfico de parábola não terá translação vertical, logo os possíveis gráficos são:



(III) - se $\Delta > 0$, teremos $\lambda < 0$ para $a > 0$ e $\lambda > 0$ para $a < 0$, logo o gráfico da parábola com concavidade para cima terá uma translação vertical para baixo, e o gráfico de parábola com concavidade para baixo terá uma translação vertical para cima, o que implica que em ambas as situações os gráficos

interceptam o eixo das abscissas em dois pontos, o que nos permite concluir que a função possui duas raízes reais e distintas;



A solução de alguns exercícios de Cinemática se torna uma tarefa mais fácil quando utilizamos as coordenadas de um ponto especial da parábola: o vértice. Podemos dizer que o vértice de uma parábola é um ponto especial por alguns motivos: é o único ponto da parábola em que a ordenada correspondente possui somente uma abscissa, toda parábola é simétrica em relação à reta paralela ao eixo y que passa pelo seu vértice, o vértice de toda parábola a limita superiormente se esta for côncava para baixo ou inferiormente se côncava para cima.

Como toda parábola é simétrica em relação à reta paralela ao eixo y que passa pelo vértice, podemos concluir que a abscissa do vértice também é a abscissa do ponto médio de qualquer segmento \overline{AB} paralelo ao eixo x com os pontos A e B pertencentes à parábola. Assim, para determinar a abscissa do vértice de uma parábola basta calcular o ponto médio do segmento \overline{AB} em que A e B são as raízes da função do 2º grau escrita da forma $f(x) = y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. Por Bhaskara sabemos que as raízes da função do 2º grau são dadas por:

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ e } x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Assim a abscissa do vértice (x_v), será:

$$x_v = \frac{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}{2}$$

$$x_v = \frac{-2b}{4a} = \frac{-b}{2a}$$

A ordenada do vértice (y_v) será dada por $f(x_v)$:

$$f(x_v) = ax_v^2 + bx_v + c = a \frac{b^2}{4a^2} + b \left(\frac{-b}{2a} \right) + c \quad \therefore$$

$$f(x_v) = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} \quad \therefore$$

$$f(x_v) = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} \quad \therefore$$

$$f(x_v) = y_v = \frac{-\Delta}{4a}.$$

Assim as coordenadas do vértice da parábola são dadas por:

$$x_v = \frac{-b}{2a} \text{ e } y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$

4 CINEMÁTICA: O ESTUDO DOS MOVIMENTOS

A Cinemática é a parte da Física que estuda os movimentos dos corpos, sem levar em consideração as causas ou conseqüências deste movimento. Apresentaremos a seguir alguns dos conceitos básicos de física para a compreensão do estudo de Cinemática: Corpo, partícula e posição.

Um *corpo* passa a ser considerado uma *partícula* ou um ponto material quando suas dimensões se tornam desprezíveis em dado fenômeno em comparação com as demais dimensões envolvidas. Por exemplo: Um motociclista em sua moto com 2,20 m de comprimento desloca-se sobre uma ponte com 6,0 m de comprimento, se desejássemos calcular o tempo em que ele gastaria para atravessar a ponte, ele não poderá ser considerado um ponto material, pois sua dimensão poderá influenciar na análise do fenômeno. (figura 2). Porém, se resolvêssemos calcular o tempo gasto por esse mesmo motociclista deslocar, digamos 30 km sobre uma trajetória qualquer, ele passará a ter suas dimensões tão pequenas que estas são desprezíveis quando comparadas com seu deslocamento, o que o tornará um ponto material dentro do fenômeno analisado.

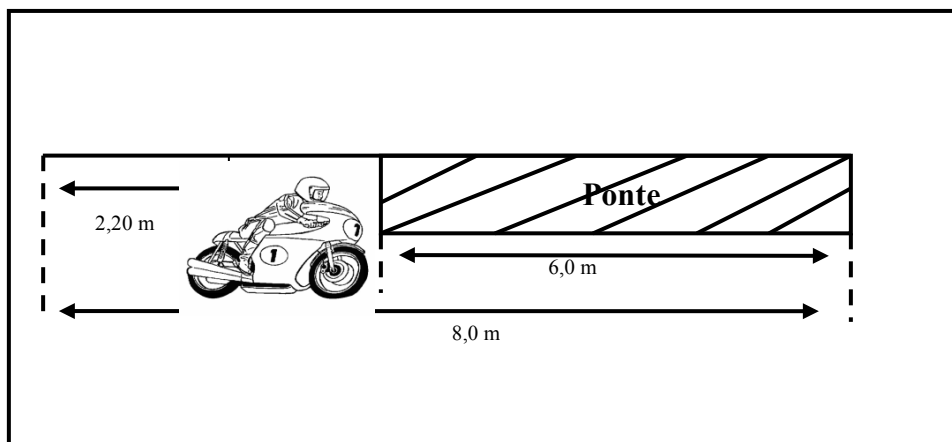


Figura 2 Corpo e partícula

Ao trafegarmos por uma rodovia deparamos com algumas placas que demarcam a *posição* a partir de uma determinada origem, essa placa e denominada de marco quilométrico. O marco quilométrico tem grande utilidade para o estudo físico dos movimentos, pois ele torna possível saber a *posição* que uma partícula se encontra em um determinado momento da trajetória. Porém, temos que ter em mente que o marco quilométrico não sugere o sentido que estamos nos movimentando numa determinada trajetória, o que por sua vez torna-se necessário estabelecer um marco zero para dar orientação para a posição que lhe será atribuída. Por meio do marco zero ou origem das posições é possível ter uma melhor orientação, para qual sentido estamos nos deslocando em uma determinada trajetória, observe (Figura 3), note que se um veículo parte do marco zero sentido ao ponto B, ele estará desenvolvendo um movimento positivo em relação à origem, Porém, se o mesmo veículo parte do marco zero sentido ao ponto A, estará desenvolvendo um movimento negativo em relação à origem,

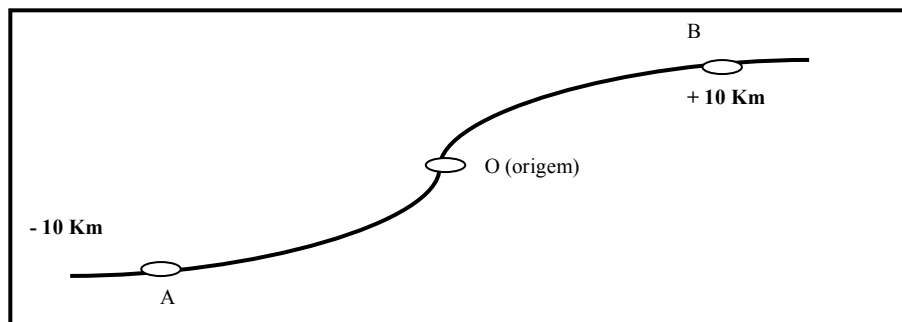


Figura 3 Posição

4.1 Movimento Retilíneo Uniforme (MRU)

Um corpo estará em Movimento Retilíneo Uniforme, quando descrever uma trajetória retilínea de modo que sua posição varia constantemente com o tempo; podemos citar como exemplo o movimento de carro que desloca em uma estrada retilínea com o módulo de sua velocidade constante. A seguir definiremos algumas características da velocidade, tais como sinal da velocidade, velocidade média e velocidade instantânea, além de discutirmos a função horária da posição por tempo.

É importante saber que a velocidade é uma grandeza vetorial, portanto o sinal da velocidade indica o sentido ao qual o corpo se desloca. Ao saber a posição de um móvel sobre uma trajetória, vemos que um corpo pode movimentar tanto no sentido positivo (progressivo) quanto no sentido negativo (retrógrado). Dizemos que um determinado móvel possui **velocidade positiva** quando sua posição varia no sentido positivo em relação à origem (movimento progressivo), e dizemos que um móvel possui **velocidade negativa** quando sua posição varia no sentido contrário ao da origem (movimento retrógrado). Veja a (Figura 4) que ilustra bem esta relação.

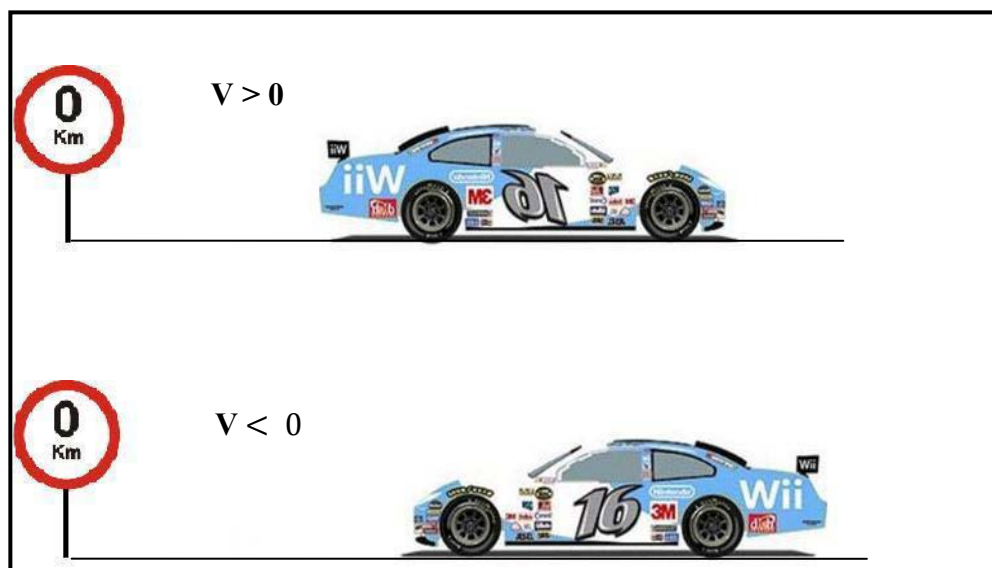


Figura 4 Sinal da velocidade

A **velocidade média** (v_m) de partícula é igual ao quociente entre a distância (s) percorrida pelo tempo (t) gasto no percurso.

$$v_m = \frac{\text{distância total percorrida}}{\text{tempo gasto no percurso}} \quad \text{ou} \quad v_m = \frac{s}{t}$$

Por exemplo: Se um veículo gasta 8,0 h para percorrer uma distância de 640 km, diríamos que a velocidade média desenvolvida por esse veículo durante todo o trajeto foi de 80 Km/h, ou seja, em média o veículo percorreu em uma hora o equivalente a 80 km.

A **velocidade instantânea** (v) de uma partícula aquela medida pelo velocímetro de um veículo em um dado momento.

No estudo dos movimentos dos corpos é importante definir a posição de um dado corpo ao longo dos instantes, a expressão matemática que relaciona a

posição s com o tempo t é denominada de **função horária da posição**, é sua expressão matemática é representada por:

$$s = s_i + vt, \text{ com } v \neq 0,$$

onde, s_i =posição inicial, v é a velocidade não nula.

Observe que função horária da posição é uma função do tipo $f(x) = ax + b$, onde 'a' representa a velocidade, 'b' representa a posição inicial e a variável 'x' é trocada pela variável 't', chamada de Função do 1º grau, observe também que na função horária, esta é de grande utilidade para o estudo do movimento uniforme, pois, por meio dela é possível localizar um móvel em qualquer instante da trajetória, veja o exemplo abaixo:

Um veículo parte do marco 10 km de uma rodovia, sabendo que esse veículo manteve uma velocidade progressiva de 60 km/h, calcule a posição deste veículo após ter percorrido 1,5 h do trajeto.

Solução:

Se o movimento do veículo é uniforme, sua função horária obedece à expressão $s = s_i + vt$, onde $s_i = 10$ km, $v = 60$ km/h e $t = 1,5$ h; logo:

$$s = 10 + 60 \cdot 1,5$$

$$s = 10 + 90 = 100$$

Concluindo: a posição do veículo após ter decorrido 1,5 h será de 100 km, ou seja, ele estará no marco 100 desta rodovia. Podemos pensar no gráfico, posição por tempo, deste movimento, onde $s(t) = 10 + 60t$ (ressaltando que esta é uma função do 1º grau):

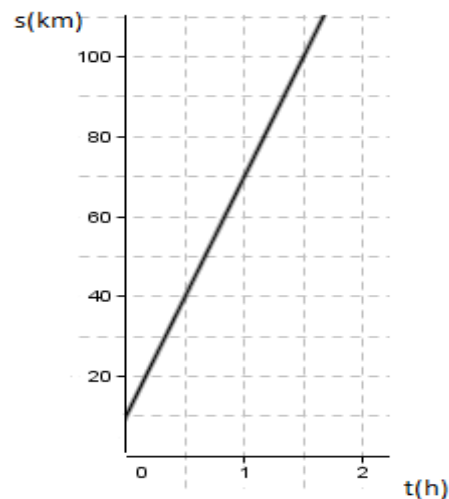


Figura 5 Gráfico construído no geogebra

4.2 Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (MRUV)

Um corpo estará em Movimento Retilíneo Uniformemente variado quando descrever uma trajetória retilínea com o módulo de sua velocidade variando constantemente com o tempo.

Em MRUV é importante estudarmos a variação da velocidade ao longo dos instantes, definiremos a seguir o conceito de aceleração.

Para Alvarenga e Máximo (2005), “o conceito de aceleração está sempre relacionado com uma *mudança na velocidade*.” Por exemplo, considere um veículo que num instante $t_i = 1$ s sua velocidade seja de 45 m/s, e no instante $t_f = 2$ s sua velocidade passe a ser de 50 m/s, diríamos que em 1 s, sua velocidade variou 5 m/s, logo nesse intervalo de tempo o veículo desenvolveu uma aceleração 5 m/s^2 .

Matematicamente podemos definir a aceleração como sendo o quociente entre a variação da velocidade Δv e a variação do tempo Δt :

$$a = \frac{\text{variação da velocidade}}{\text{variação do tempo}} \text{ isto é, } a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \text{ ou } a = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i}$$

Aplicando a definição no exemplo anterior temos que: no tempo $t_i = 1$ s a velocidade $v_i = 45$ m/s e no tempo $t_f = 2$ s a velocidade $v_f = 50$ m/s; logo a aceleração a é dada por:

$$a = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} \therefore a = \frac{50-45}{2-1} \therefore a = 5\text{m/s}^2$$

Que por sua vez apresenta o mesmo valor encontrado anteriormente.

Assim como no MRU, em MRUV é necessário estudar a posição e a velocidade do corpo ao longo dos instantes, para isso utilizaremos as funções horárias: velocidade por tempo e posição por tempo.

Como a aceleração é constante em qualquer instante t do movimento, temos que:

No instante t segundos a velocidade final será igual à velocidade inicial somada com o produto da aceleração pelo tempo; matematicamente a velocidade ao longo dos instantes 't' é representada por uma função do 1º grau, $v(t)$:

$$v(t) = v_i + at$$

onde, v_i é a *velocidade inicial*, a é a *aceleração*.

A posição de um móvel no movimento retilíneo uniformemente variado pode ser calculada por meio da função horária, uma função do 2º grau $s(t)$:

$$s = s_i + v_i t + \frac{at^2}{2}$$

onde, s_i é a *posição inicial*.

Dentro do MRUV podemos ainda classificar os movimentos em acelerados ou retardados. Ao tratar desses dois tipos de movimento.

Para um melhor entendimento dessas variações, veja o quadro abaixo:

<p>Movimento Retilíneo Uniformemente Acelerado: Velocidade aumenta a cada instante.</p> $\begin{cases} V > 0 \\ a > 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} V < 0 \\ a < 0 \end{cases}$ <p>Obs.: Velocidade e Aceleração têm o mesmo sinal.</p>
<p>Movimento Retilíneo Uniformemente Retardado: Velocidade diminui a cada instante.</p> $\begin{cases} V > 0 \\ a < 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} V < 0 \\ a > 0 \end{cases}$ <p>Obs.: Velocidade e Aceleração têm sinais contrários.</p>

Quadro 1 Variação do módulo da velocidade

É importante ressaltar que os sinais da velocidade e da aceleração dizem respeito ao sentido dessas grandezas, ou seja, -3 m/s é tão rápido quanto 3 m/s, a diferença é o sentido de cada movimento.

4.3 Movimento de Queda livre

O movimento vertical nas proximidades da terra, em que os efeitos da resistência do ar são desprezíveis, é chamado de queda livre, este tipo de movimento foi estudado por Aristóteles (384-322 a.C.)⁵, onde Aristóteles

⁵ Ver: Alvarenga e Máximo (2005, p. 52-53)

acreditava que ao abandonar simultaneamente de uma mesma altura, dois corpos com massa diferentes os mesmos iriam chegar ao solo em espaços de tempo diferentes. Já para Galileu (1564-1642) ⁶ ao ser “abandonados de uma mesma altura, um corpo leve e um corpo pesado caem simultaneamente, atingindo o chão mesmo instante” (ALVARENGA; MÁXIMO, 2005, p. 53).

As equações do movimento de queda livre são similares as equações do MRUV, com algumas ressalvas: a posição em alguns momentos é tratada como altura e a aceleração é sempre a mesma independentemente da situação, esta aceleração é chamada de gravidade (g) e possui um valor aproximado (na superfície terrestre) de $-9,86 \text{ m/s}^2$. O sinal negativo da gravidade indica que o sentido da aceleração será sempre para baixo. Assim as equações para o movimento de queda livre são:

$$\begin{cases} v(t) = v_i + gt \\ s(t) = s_i + v_i t + \frac{gt^2}{2} \\ h = v_i t + \frac{gt^2}{2} \end{cases}$$

Onde,

g = aceleração da gravidade

h é a variação da posição na vertical (altura percorrida)

Para facilitar os cálculos, a maioria dos exercícios envolvendo queda livre considera-se o módulo da gravidade igual a 10 m/s^2 , nós usaremos este valor para os cálculos de exercícios de queda livre. Exemplo:

Um corpo é solto do alto de um edifício de 80 m de altura. Calcule o tempo que este corpo gasta para atingir o solo.

⁶ Ver: Alvarenga e Máximo (2005, p. 53)

Solução: Observe que a posição inicial do corpo é 80 m, como ele foi solto sua velocidade inicial é 0 m/s e que sua posição final é 0 m, assim temos:

$$s(t) = s_i + v_i t + \frac{gt^2}{2} \therefore$$

$$0 = 80 - 5t^2$$

$$5t^2 = 80$$

$$t^2 = 16$$

$$t = \pm 4$$

A resposta $t = -4$ s não é uma resposta física aceita, assim o tempo gasto pelo corpo para atingir o solo é 4,0 s.

5 SOLUÇÃO DE EXERCÍCIOS DE CINEMÁTICA

Sabemos que a solução de exercícios de Cinemática não é uma tarefa fácil para a maioria dos alunos do 1º ano do Ensino Médio, o principal objetivo deste TCC é facilitar a compreensão desses exercícios. Apresentaremos a seguir quatro exercícios de Cinemática onde usaremos os conceitos de funções para solucioná-los.

1. Um que corpo se encontra inicialmente na posição 24 m, parte em direção a origem com velocidade constante de 3,0 m/s. Determine o instante que o corpo passa pela origem (posição 0 m).

Resposta: O movimento descrito pelo corpo é um movimento uniforme, a função posição por tempo para este movimento é $s(t) = -3t + 24$. Para solucionar o exercício, basta encontrar a raiz (ou zero) da função característica:

$$s(t) = -3t + 24 \therefore$$

$$0 = -3t + 24 \therefore$$

$$3t = 24 \therefore$$

$$t = 8,0s$$

Logo o instante que o corpo passa pela origem é 8,0 s.

Observe o gráfico $s \times t$ para o movimento:

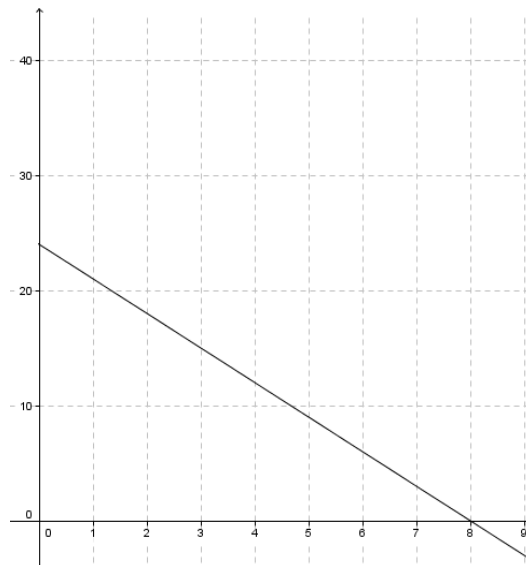


Figura 6 Gráficos construídos através do software geogebra

2. Um corpo se movimenta a 5,0 m/s em direção a origem. Determine a posição inicial deste corpo sabendo que ele passa pela origem no instante 6,0 s.

Resposta: O movimento descrito por este corpo é um movimento uniforme, a função posição por tempo que descreve este movimento é $s(t) = -5t + s_0$. Para solucionar este exercício temos que encontrar o coeficiente linear desta função. Sabemos $t = 5,0$ s é a raiz da função que descreve o movimento, logo:

$$s(5) = 0 = -5 \cdot 5 + s_0 \therefore$$

$$0 = -25 + s_0 \therefore$$

$$s_0 = 25 \text{ m.}$$

Logo a posição inicial do corpo é 25 m.

Observe o gráfico s x t para o movimento:

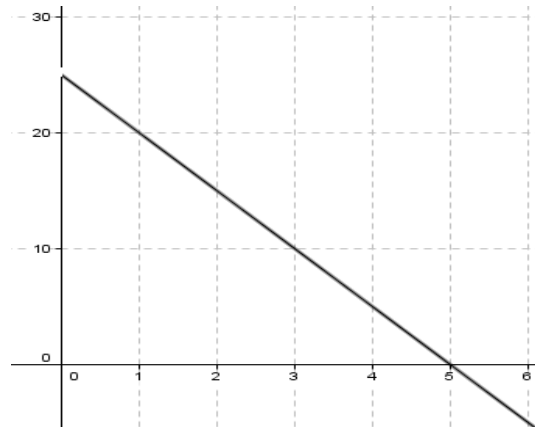


Figura 7 Gráficos construídos por meio do software geogebra.

3. Um corpo inicialmente a 40 m/s desacelera de forma constante até parar no instante 8,0 s. Considerando que inicialmente o corpo estava na posição inicial 0 m. Determine:
- A aceleração do corpo.
 - A posição máxima atingida pelo corpo.

Resposta item A: Este corpo descreve um movimento uniformemente variado, a função velocidade por tempo para o movimento deste corpo é dada por: $v(t) = at + 40$. Sabemos que $v(8,0) = 0$, ou seja, 8,0 é raiz da função velocidade por tempo. Para solucionar este exercício devemos calcular o coeficiente angular da função dada, assim:

$$v(8,0) = 0 = a \cdot 8 + 40 \therefore$$

$$-8a = 40 \therefore$$

$$a = -5,0 \text{ m/s}^2.$$

Logo a aceleração do corpo é de $-5,0 \text{ m/s}^2$.

Observe a seguir o gráfico da função $v(t)$ para este movimento:

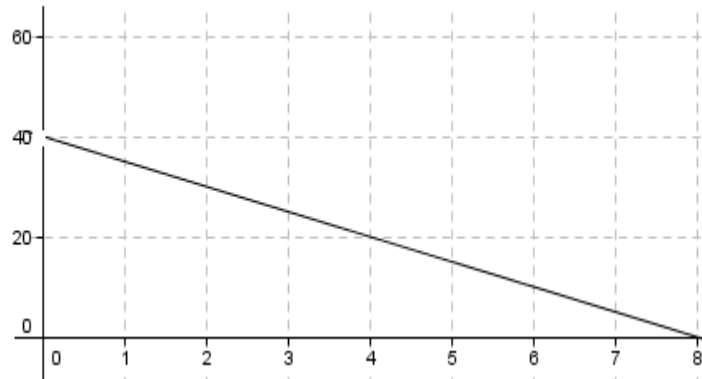


Figura 8 Gráficos construídos por meio do software geogebra

Resposta item B: A função posição por tempo para este movimento é $s(t) = \frac{-5t^2}{2} + 40t$. Observe que esta é uma função do segundo grau em que a parábola é côncava para baixo, logo para determinar a posição máxima obtida pelo corpo devemos calcular a ordenada do vértice da função dada, assim:

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \therefore$$

$$y_v = \frac{-(40)^2 + 4\left(\frac{-5}{2}\right) \cdot (0)}{4\left(\frac{-5}{2}\right)} \therefore$$

$$y_v = \frac{-1600}{-10} = 160 \text{ m.}$$

Logo a posição máxima atingida pelo corpo é 160m.

A seguir veremos o gráfico $s(t)$ x t para este movimento:

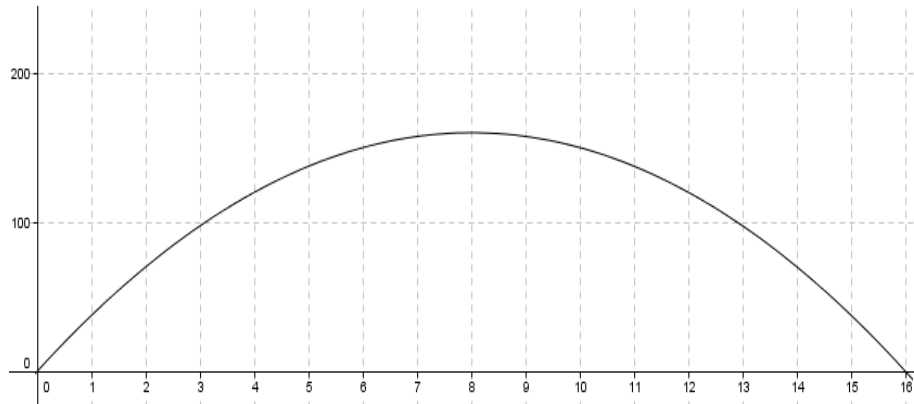


Figura 9 Gráficos construídos por meio do software geogebra

4. Um corpo inicialmente no solo é arremessado para cima com velocidade de 20 m/s. Desprezando a resistência do ar, determine:
- A altura máxima atingida pelo corpo.
 - O tempo que o corpo fica no ar.

Resposta item A: O movimento descrito por este corpo é um movimento de queda livre, a função posição por tempo para este movimento é (lembrando que a aceleração da gravidade é 10 m/s^2): $s(t) = -5 t^2 + 20 t$. Para determinar a altura máxima atingida pelo corpo basta calcular a ordenada do vértice da parábola representada pela função dada:

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \therefore$$

$$y_v = \frac{-(20)^2 + 4(-5) \cdot (0)}{4(-5)} \therefore$$

$$y_v = \frac{-400}{-20} = \frac{-400}{-20} = 20 \text{ m.}$$

Assim, a altura máxima atingida pelo corpo é de 20 m.

A seguir veremos o gráfico $s(t)$ x t para este movimento:

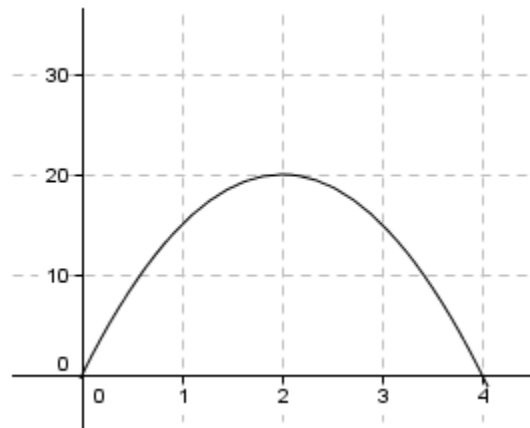


Figura 10 Gráficos construídos por meio do software geogebra

Resposta item B: Para calcular o tempo que o corpo permanece no ar, basta calcularmos as raízes da função posição por tempo, pois as raízes desta função representam os instante em que a posição é 0. Assim:

$$s(t) = -5 t^2 + 20 t \quad \therefore$$

$$\Delta = (20^2) - 4 \cdot (-5) \cdot (0)$$

$$\Delta = 400$$

$$t' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad e \quad t'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$t' = \frac{-20 + 20}{2 \cdot (-5)} \quad e \quad t'' = \frac{-20 - 20}{2 \cdot (-5)}$$

$$t' = 0 \quad e \quad t'' = 4,0 \text{ s}$$

Como $t = 0$ é o instante inicial, a corpo irá atingir o solo novamente no instante $t = 4,0$ s, portanto, o tempo que o corpo permanece no ar é 4,0 s.

Esta resposta pode ser obtida analisando o gráfico $s(t)$ x t , construído no item anterior.

6 CONCLUSÃO

A interdisciplinaridade evidente entre a Física e a Matemática nem sempre é utilizada no ensino de ambas, este texto tem por finalidade ser uma referência nesta abordagem. Não estamos dizendo que esta é a solução de todos os problemas encontrados no processo de ensino aprendizagem destas disciplinas, mas acreditamos que este método de abordagem pode diminuir estas dificuldades.

Em anexo colocamos uma análise qualitativa sobre um seminário realizado para alunos do 1º ano do Ensino Médio de uma escola pública de Belo Horizonte. Neste seminário apresentamos exercícios de cinemática e solucionamos utilizando os conceitos de funções do 1º e do 2º grau.

Podemos concluir que mesmo não sendo uma solução definitiva para as dificuldades apresentadas pelos alunos, este é um passo para a interdisciplinaridade, fator pelo qual o ENEM vem abordando cada vez com mais frequência.

Que este texto possa servir de bibliografia e inspiração para professores de Física e Matemática do Ensino Básico Brasileiro.

REFERÊNCIAS

ALVARENGA, B.; MÁXIMO, A. **Física**. São Paulo: Scipione, 2005.

BOYER, C. B. **História da matemática**. São Paulo: E. Blücher, 1974.

DANTE, L. R. **Matemática**. São Paulo: Ática, 2005. Volume único.

IEZZI, G. et al. **Matemática: ciência e aplicação**. 2. ed. São Paulo: Atual, 2004.

JAPIASSU, H. **Interdisciplinaridade e patologia do saber**. Rio de Janeiro: Imago, 1976. 220 p.

MESSIAS, A. L. S. **Metodologias do ensino de matemática**. São Paulo: [s. n.], 2006. Projeto Teia do Saber. Disponível em: <<http://www.feg.unesp.br/extensao/teia/index.php>>. Acesso em: 18 abr. 2012.

PIETROCOLA, M. A matemática como estruturante do conhecimento físico. **Caderno Catarinense de Ensino de Física**, Florianópolis, v. 19, n. 1, p. 89-109, ago. 2002.

APÊNDICE

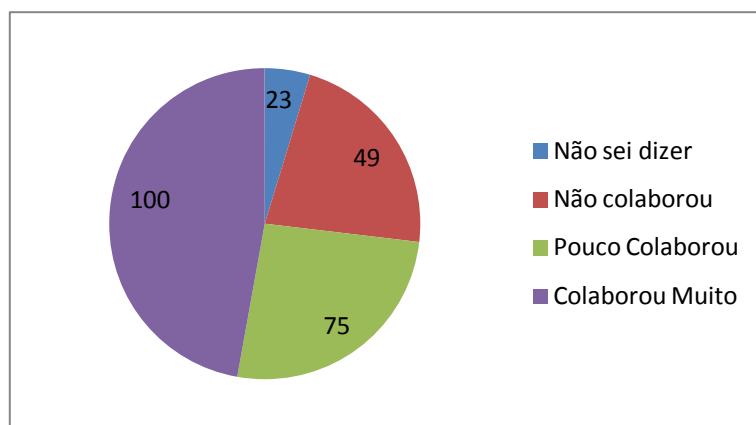
APÊNDICE A - AVALIAÇÃO QUALITATIVA DO SEMINÁRIO

Realizado no dia 7 de novembro de 2012 o seminário interdisciplinar de Física e Matemática, com o título: Cinemática e funções. Foi apresentado para 247 alunos do 1º ano do Ensino Médio de uma escola pública de Belo Horizonte.

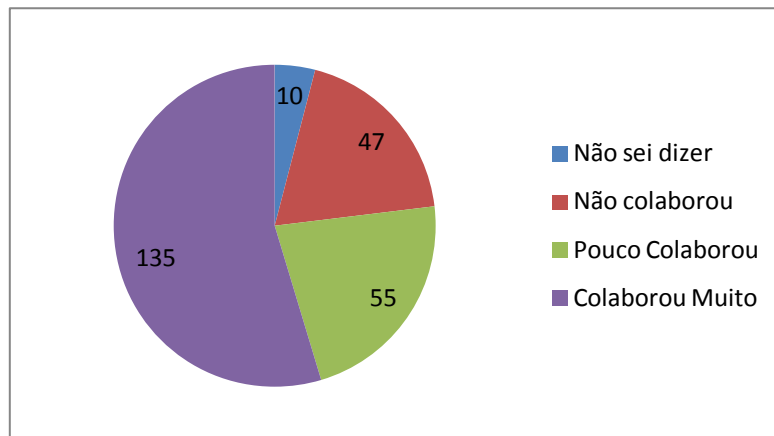
A apresentação deste seminário antecedeu as provas de etapa de Física e Matemática, ressaltamos que os resultados nestas provas tiveram uma melhora de cerca de 20% em relação às provas semelhantes feitas no início do ano com as mesmas temáticas.

Antes da divulgação dos resultados das provas para os alunos fizemos uma enquete sobre o seminário interdisciplinar, a fim de apurarmos a reação dos alunos após o Seminário. As perguntas e os respectivos resultados são apresentados a seguir:

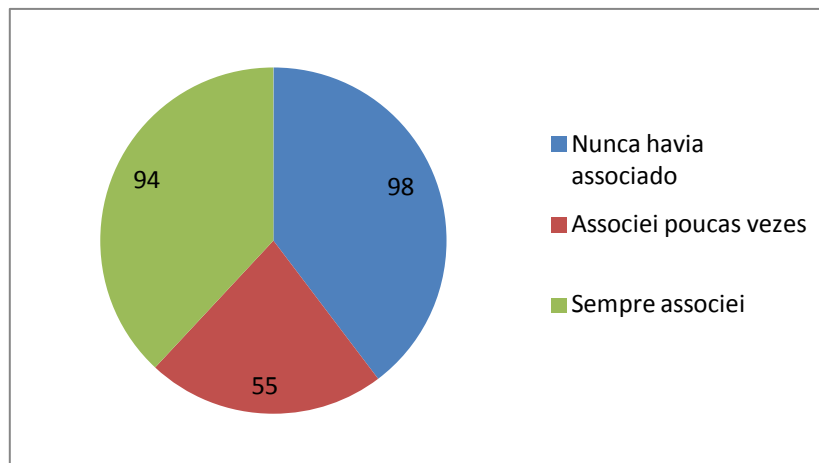
- 1) Você acha que o seminário colaborou para melhorar o aprendizado de Funções?



- 2) Você acha que o seminário colaborou para melhorar o aprendizado de Cinemática?



- 3) Antes do seminário você já associava o conteúdo de Funções com o conteúdo de Cinemática?



Não sabemos até que ponto esses dados são relevantes para a melhoria do processo de aprendizagem dos nossos alunos, mas acreditamos que um dos caminhos pode ser a interdisciplinaridade.

Apoiados na melhora nos resultados e na opinião dos alunos, acreditamos que seminários interdisciplinares colaboram para o processo de aprendizagem, esperamos que este texto seja inspiração e bibliografia para outros cursos e textos.