

2022

Jânio Lúcio Talini dos Santos

DEMAT/UFOP

Universidade Federal de Ouro Preto

Instituto de Ciências Exatas e Biológicas

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PROFMAT

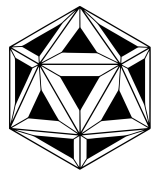
Dissertação

Torre de potência infinita

Jânio Lúcio Talini dos Santos

Ouro Preto
2022





DEPARTAMENTO DE
MATEMÁTICA
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO



PROFMAT

MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL

Jânio Lúcio Talini dos Santos

Torre de potência infinita

Ouro Preto - MG, Brasil

Março 2022

Jânio Lúcio Talini dos Santos

Torre de potência infinita

Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP)

Instituto de Ciências Exatas e Biológicas (ICEB)

Departamento de Matemática (DEMAT)

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

Orientador: Prof. Dr. Geraldo César Gonçalves Ferreira

Coorientador: Prof. Dr. Gil Fidelix de Souza

Ouro Preto - MG, Brasil

Março 2022

SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

S237t Santos, Jânio Lúcio Talini dos Santos.
Torre de Potência infinita. [manuscrito] / Jânio Lúcio Talini dos Santos
Santos. - 2022.
67 f.: il.: gráf., tab..

Orientador: Prof. Dr. Geraldo César G. Ferreira Ferreira.
Coorientador: Prof. Dr. Gil Fidelix de Souza Souza.
Dissertação (Mestrado Profissional). Universidade Federal de Ouro
Preto. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em
Matemática.

Área de Concentração: Matemática com Oferta Nacional.

1. Matemática. 2. Interação. 3. Convergência. I. Ferreira, Geraldo
César G. Ferreira. II. Souza, Gil Fidelix de Souza. III. Universidade Federal
de Ouro Preto. IV. Título.

CDU 510:374:004

Bibliotecário(a) Responsável: Luciana De Oliveira - SIAPE: 1.937.800



FOLHA DE APROVAÇÃO

Jânio Lúcio Talini dos Santos Costa

Torre de Potência Infinita

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática

Aprovada em 25 de maio de 2022

Membros da banca

Prof. Dr. Geraldo César G. Ferreira - Presidente Orientador Universidade Federal de Ouro Preto
Prof. Dr. Vitor Luiz de Almeida - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
Prof. Dr. Alexandre Alvarenga Rocha - Universidade Federal de Viçosa
Prof. Dr. Wenderson Marques Ferreira - Universidade Federal de Ouro Preto
Prof. Dr. Gil Fidelix de Souza - Coorientador Universidade Federal de Ouro Preto

Prof. Dr. Geraldo César G. Ferreira, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito no Repositório Institucional da UFOP em 25/05/2022



Documento assinado eletronicamente por **Geraldo Cesar Goncalves Ferreira, PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR**, em 26/05/2022, às 14:28, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0332185** e o código CRC **0B30841D**.

”Há uma força motriz mais poderosa que o vapor, a eletricidade e a energia atômica: a vontade ”

-Albert Einsten

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço à Deus por ter me dado força e coragem para seguir em frente nessa longa caminhada para a realização do meu mestrado no PROFMAT. Agradeço à minha família por me apoiar durante todo o curso, me ajudando e me incentivando desde o início. Agradeço às minhas filhas, que colaboraram nesse trabalho, especialmente a minha filha mais nova, que deu enorme contribuição ao me ajudar com as ferramentas tecnológicas. A vocês duas a minha gratidão por tudo que fizeram por mim.

Essa foi uma das jornadas mais difíceis que trilhei nos estudos. Em alguns momentos, durante o curso, pensei que não conseguiria chegar ao fim. Porém, movido por uma força extraordinária que veio da minha vontade, consegui reverter esse medo transformando-o em coragem e determinação. Apoiado nessa vontade de vencer os obstáculos é que estou chegando ao fim dessa longa caminhada que foi o mestrado.

Agradeço a todos os professores da UFOP que contribuíram para enriquecer os meus conhecimentos. Ao meu orientador, Geraldo, agradeço pela dedicação, paciência e pela contribuição imprescindível para o trabalho. Ao meu coorientador, Gil, agradeço pelas ótimas dicas para melhorar o trabalho e dar um novo visual ao texto. Agradeço também aos professores Wenderson, Alexandre e Vítor, membros da banca, pelas ótimas sugestões dadas para melhorar o texto e também pelas correções sugeridas. Enfim, acredito que este Mestrado me proporcionou um aprendizado único da ciência Matemática, o que certamente irá impulsionar positivamente minha carreira acadêmica e profissional.

Resumo

Nesse trabalho é apresentado a função Torre de potência infinita, definida por $y = f(x) = x^{x^{x^{\dots}}}$, cuja altura é formada por uma sequência infinita de exponenciais. O objetivo desse trabalho é discutir o problema da convergência/divergência da função $f(x)$. Ao final é feito um estudo de uma possível origem da função torre de potência e como as pesquisas dos matemáticos Lambert, Euler e Lagrange foram essenciais para a construção dessa teoria, que levou à expansão em série da função LambertW, tão importante para o avanço da Matemática quanto de outras ciências.

Abstract

The infinite power tower function defined by $y = f(x) = x^{x^{x^{\dots}}}$ is an exponentiation with infinite height whose properties were investigated throughout the topic. The function $g(y) = y^{\frac{1}{y}} = x$ has been utilized with the intent of clarifying the properties of the implicit equation $y = x^y$ which originates in $f(x)$. Through $g(y)$ and using the recursive equation that leads to the infinite power tower function, it was possible to discuss the problem of convergence/divergence of this function. For the graphical analysis of the algebraic route of convergence/divergence of $f(x)$ the "cobweb" diagram was used. Furthermore, it was demonstrated, with the help of graphical analysis, the propositions that guarantee when the function $f(x)$ converges or diverges. Lastly, it was explained the origin of the infinite power tower function and how the research of mathematicians like Lambert, Euler and Lagrange were essential for the construction of this theory, which led to the series expansion of the Lambert W function, as important for the advancement of Mathematics as it is for other sciences.

keywords: infinite power tower; convergence; divergence; tetration; cobweb; Lambert; Euler.

Sumário

Introdução	13
1 PRIMEIRA EXPERIÊNCIA COM A TORRE DE POTÊNCIA INFINITA	15
2 CONDIÇÕES DE CONVERGÊNCIA	23
2.1 Critérios de convergência do ponto fixo	24
3 ANÁLISE DOS PONTOS FIXOS DA FUNÇÃO $r(y)$	29
3.1 Condições de convergência na Torre de potência infinita	32
4 ANÁLISE GRÁFICA COM DEMONSTRAÇÕES	45
5 PARTE HISTÓRICA E FUNÇÃO DE LAMBERT	57
Conclusão	65
Referências	67

Lista de ilustrações

Figura 1 – Gráfico da derivada 2ª da função $g(y)$.	21
Figura 2 – Gráfico da função $g(y) = y^{\frac{1}{y}}$.	22
Figura 3 – Possíveis gráficos de $y = x^y$ e $f(x) = x^{x^{x^{\dots}}}$.	22
Figura 4 – Gráfico da função $r(y) = 1,35^y$ convergindo/divergindo.	27
Figura 5 – Gráfico da função $r_x(y) = x^y$ acima da reta $z = y$.	30
Figura 6 – Gráfico da função $r_x(y) = x^y$ tangente à reta $z = y$.	30
Figura 7 – Gráfico da função $r_x(y) = x^y$ secante à reta $z = y$.	31
Figura 8 – Gráfico da função $r_x(y) = x^y$ intersecção com a reta $z = y$.	32
Figura 9 – Gráfico da função $r_x(y) = x^y$ intersecção com a reta $z = y$.	32
Figura 10 – Gráfico da função $g(y)$.	34
Figura 11 – Gráfico da função $g _{(0,e]}$.	34
Figura 12 – Gráfico da função $g _{(e,\infty)}$.	34
Figura 13 – Gráficos de $h_1(x)$ e $h_2(x)$.	35
Figura 14 – Para $x > e^{\frac{1}{e}}$ a sequência y_n diverge para qualquer valor inicial y_0 .	38
Figura 15 – Convergência e divergência no ponto de tangência.	39
Figura 16 – Gráfico da sequência y_n convergindo para y_1^* .	40
Figura 17 – Gráfico da sequência y_n com $y_0 > y_2^*$ divergindo do ponto fixo y_2^* .	41
Figura 18 – Para $y_0 \in \left(0, e^{\frac{1}{e}}\right]$ a sequência y_n irá convergir para $y = h_1(x)$.	42
Figura 19 – Para $y_0 \in \left(0, e^{\frac{1}{e}}\right]$ a sequência y_n irá divergir para dois valores diferentes denotado por um ciclo de período 2.	43
Figura 20 – Gráficos de $h_1(x)$ e $h_2(x)$.	45
Figura 21 – Gráfico da equação paramétrica $p_1 = z^{\frac{z}{1-z}}$ com $z \in (1, \infty)$.	54
Figura 22 – Gráfico da equação paramétrica $p_2 = z^{\frac{1}{1-z}}$ com $z \in (1, \infty)$.	54
Figura 23 – Gráfico das equações paramétricas $p_1(z)$ e $p_2(z)$.	54

Introdução

A função torre de potência infinita $f(x) = x^{x^{x^{\dots}}}$ é, por definição, formada por uma sequência infinita de exponenciais e possui propriedades importantes, por exemplo: existem valores de $x > 1$ no qual a função é bem definida.

No capítulo 1, sendo $f(x) = y$, serão deduzidos os pontos que satisfazem a equação $y = x^y$, sendo usada como referência a função $g(y) = y^{\frac{1}{y}} = x$. Assim, através da função $g(y)$ serão investigadas as propriedades da equação $y = x^y$.

No capítulo 2, será estudado o problema da convergência das sequências recursivas $y_1 = x$ e $y_{n+1} = x^{y_n}$ que leva à torre de potência infinita. Para isso será usado o Teorema do valor médio com o objetivo de encontrar condições para que uma sequência qualquer convirja ou divirja para o ponto fixo da função que a define.

No capítulo 3, será feita uma análise dos pontos fixos da função $r(y) = x^y$ que são os pontos da forma $g(y) = y^{\frac{1}{y}} = x \Leftrightarrow r(y) = y$. Para isso, serão considerados os casos em que a base x da função $r(y) = x^y$ é $x > 1$ ou $0 < x < 1$. Portanto, após realizar o estudo das hipóteses de convergência/divergência da torre e, fazer a análise gráfica dos pontos nos quais haja convergência/divergência, será utilizado o diagrama da “teia de aranha” que foi construído no software Cobweb plotler.

Já no capítulo 4, será demonstrado que a função torre de potência infinita $f(x) = x^{x^{x^{\dots}}}$ converge se $\frac{1}{e^e} \leq x \leq e^{\frac{1}{e}}$ com $\frac{1}{e} \leq y \leq e$. Será demonstrado também que essa mesma função converge para um ciclo de período 2 se $0 < x < \frac{1}{e^e}$ com $0 < y < \frac{1}{e}$.

No capítulo 5 foi apresentado uma possível origem da função torre de potência infinita, utilizando-se das proposições dos matemáticos Lambert, Euler e Lagrange, que desenvolveram a teoria. Lambert escreveu um artigo sobre o estudo da equação trinomial $x = q + x^m$ no

qual descreveu a série que expressa uma raiz dessa equação e também as potências dessa raiz. Anos depois, Euler fez uma pesquisa concentrada nas soluções de outra equação trinomial equivalente àquela estudada por Lambert. A tetração com altura infinita ${}^m n = n^{n^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}$ cunhada pelo matemático Rubem L. Goodstein, foi usada simultaneamente com a função Lambert $y = W(x)$, sendo essa função definida como inversa de $x = y \cdot e^y$. Por fim, da união das teorias dos matemáticos Lambert e Euler obteve-se a expansão em série da função Lambert W . O estudo desta função possibilitou o avanço da ciência Matemática, contribuindo também para as áreas da Medicina, Física, Astronomia entre outras. Algumas referências da função Lambert W : ([1], [2], [4])

Primeira experiência com a torre de potência infinita

Definição 1.1. Denomina-se Torre de Potência à função definida por $y = f(x) = x^{x^{x^{\dots}}}$, cuja altura é determinada pela quantidade n de valores de x . Quando $n \rightarrow \infty$ diz-se que a altura é infinita e a função $f(x)$ é denominada Torre de Potência Infinita.

Observação 1.1. A Torre de potência é resolvida através da operação tetração (é a exponenciação iterada de cima para baixo ou da direita para a esquerda).

Veja, por exemplo, o caso abaixo

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\dots}}} \rightarrow 2.$$

Como o resultado dessa torre de potência converge, então ele pode ser obtido da seguinte forma: a sequência de exponenciais é infinita, adicionar ou retirar um elemento da sequência infinita não deve alterar sua resposta. Por um abuso de linguagem seria como somar (ou subtrair) um número finito a infinito.

Dito isso, pode-se resolver essa potência da seguinte forma

$$y = \sqrt{2}^{\left\{ \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\dots}} \right\} = y} \Rightarrow y = (\sqrt{2})^y \Rightarrow y^{\frac{1}{y}} = \sqrt{2} \Rightarrow y^{\frac{1}{y}} = 2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y = 2.$$

De forma geral, será que é possível generalizar esse procedimento para uma função

$$y = f(x) = x^{x^{x^{\dots}}} ?$$

Isto é,

$$y = x \left\{ x^{x^{x^{\dots}}} \right\} = y \Rightarrow y = x^y \Rightarrow x = y^{\frac{1}{y}}.$$

Então, tomando $y = 4 \Rightarrow x = 4^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$. Nesse caso, tem-se

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\dots}}} = \sqrt[4]{4}^{\sqrt[4]{4}^{\sqrt[4]{4}^{\dots}}} \rightarrow 2 \text{ ou } 4?$$

Como explicar isso? Dois valores de y , $y = 2$ e $y = 4$, para um único valor de x ? A equação implícita $y = x^y$ tem como inversa a função $g(y) = y^{\frac{1}{y}} = x$. Nesse caso, $g(2) = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ e $g(4) = 4^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$, logo deduziu-se que para dois valores distintos de y existe um único x .

Fazendo os cálculos na planilha do Excel é possível inferir que uma torre de potência infinita $y = x^{x^{x^{\dots}}}$ com altura = 45, para $x = \sqrt{2}$, tende a 2 (e não a 4). Veja a tabela 1 da torre de potência $y = \left(\sqrt{2}\right)^x$ cujo valor inicial de x é $\sqrt{2}$. O segundo valor de x é igual ao 1º valor de y . E, o 3º valor de x é igual ao 2º valor de y , e assim sucessivamente, até as iterações convergirem para um mesmo valor.

Tabela 1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
x	$\sqrt{2}$	1,6325269	1,7608396	1,8409109	1,8927127	1,9269997	1,9500348	1,9656649	1,9763418	1,9836684	1,9887118	1,9921909	1,9945945
y	1,6325269	1,7608396	1,8409109	1,8927127	1,9269997	1,9500348	1,9656649	1,9763418	1,9836684	1,9887118	1,9921909	1,9945945	1,9962567
	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
x	1,9962567	1,997407	1,9982035	1,9987551	1,9991373	1,9994021	1,9995856	1,9997128	1,9998009	1,999862	1,9999044	1,9999337	1,9999541
y	1,997407	1,9982035	1,9987551	1,9991373	1,9994021	1,9995856	1,9997128	1,9998009	1,999862	1,9999044	1,9999337	1,9999541	1,9999682
	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
x	1,9999682	1,9999779	1,9999847	1,9999894	1,9999926	1,9999949	1,9999965	1,9999976	1,9999983	1,9999988	1,9999992	1,9999994	1,9999996
y	1,9999779	1,9999847	1,9999894	1,9999926	1,9999949	1,9999965	1,9999976	1,9999983	1,9999988	1,9999992	1,9999994	1,9999996	1,9999997
	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52
x	1,9999997	1,9999998	1,9999999	1,9999999	1,9999999	2	2	2	2	2	2	2	2
y	1,9999998	1,9999999	1,9999999	1,9999999	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Agora, tomando $y = 3 \Rightarrow x = 3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3}$. Fazendo os cálculos na planilha do Excel é possível inferir que uma torre de potência infinita $y = x^{x^{x^{\dots}}}$ com altura = 149, para $x = \sqrt[3]{3}$, tende a 2,478053 (e não a 3). Veja a tabela 2 da torre de potência $y = \left(\sqrt[3]{3}\right)^x$ cujo valor inicial de x é $\sqrt[3]{3}$. O 2º valor de x é igual ao 1º valor de y . E, o 3º valor de x é igual ao 2º valor de y , e assim sucessivamente, até as iterações convergirem para um mesmo valor.

Tabela 2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
x	$\sqrt[3]{3}$	1,695805	1,860808	1,976713	2,062421	2,12818	2,180051	2,221857	2,256135	2,284634	2,308603	2,328955	2,346378
y	1,695805	1,860808	1,976713	2,062421	2,12818	2,180051	2,221857	2,256135	2,284634	2,308603	2,328955	2,346378	2,361397
	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
x	2,361397	2,37442	2,385771	2,395709	2,404443	2,412146	2,41896	2,425004	2,430377	2,435164	2,439436	2,443256	2,446676
y	2,37442	2,385771	2,395709	2,404443	2,412146	2,41896	2,425004	2,430377	2,435164	2,439436	2,443256	2,446676	2,449742
	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
x	2,449742	2,452494	2,454967	2,457192	2,459194	2,460998	2,462624	2,464091	2,465415	2,466611	2,467691	2,468668	2,469551
y	2,452494	2,454967	2,457192	2,459194	2,460998	2,462624	2,464091	2,465415	2,466611	2,467691	2,468668	2,469551	2,47035
	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	...	149
x	2,47035	2,471072	2,471726	2,472318	2,472854	2,47334	2,473779	2,474178	2,474539	2,474866	2,475163	...	2,478053
y	2,471072	2,471726	2,472318	2,472854	2,47334	2,473779	2,474178	2,474539	2,474866	2,475163	2,475431	...	2,478053

Agora será desenvolvida essa teoria ao longo do trabalho.

Generalização:

Pela definição 1.1, seja a função Torre de potência, $y = f(x) = x^{x^{x^{\dots}}}$ com altura $= n$.

Logo,

$$y_n = f_n(x) = x^{x^{x^{\dots}}} \left. \vphantom{y_n} \right\} n \text{ vezes.}$$

Daí, pode-se escrever

$$y_1 = f_1(x) = x, y_2 = f_2(x) = x^x, y_3 = f_3(x) = x^{x^x} \text{ e assim por diante.}$$

Observação 1.2. De acordo com a Observação 1.1, note que $x^{x^x} = x^{(x^x)}$ mas $x^{x^x} \neq (x^x)^x = x^{x^2}$, ou seja, a torre de potência infinita é iterada de cima para baixo.

Exemplo 1.1. Observe que $4^{4^4} = 4^{(4^4)} = 4^{256}$ enquanto $(4^4)^4 = 4^{16}$, portanto $(4^4)^4 \neq 4^{(4^4)}$.

E, ainda, de acordo com a Definição 1.1 pode-se redefinir a torre de potência infinita do seguinte modo

$$y = f(x) = x^{x^{x^{\dots}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Reproduzindo assim, quando $n \rightarrow +\infty$, a torre de potência infinita.

Lema 1.1. A sequência $\{y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, \dots\}$ satisfaz a relação de recorrência

$$\begin{cases} y_1 = x \\ y_{n+1} = x^{y_n} \end{cases}$$

Demonstração. Por indução finita, tem-se

$$y_2 = x^x = x^{y_1}, y_3 = x^{x^x} = x^{y_2} \dots$$

Suponha por hipótese de indução que $y_{n+1} = x^{y_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Deseja-se provar que $y_{n+2} = x^{y_{n+1}}$.

Pela definição da função torre de potência infinita, tem-se

$$y_{n+2} = x^{\left. x^{x^{x^{\dots}}} \right\} n+2 \text{ vezes}} = x^{\left. \left(x^{x^{\dots}} \right) \right\} n \text{ vezes}} = x^{x^{y_n}}.$$

Mas, por hipótese de indução, $y_{n+1} = x^{y_n}$.

Logo, $y_{n+2} = x^{y_{n+1}}$.

Portanto, pelo Princípio de Indução Finita $y_{n+1} = x^{y_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

□

Estudando a função torre de potência infinita $y = f(x) = x^{x^{x^{\dots}}}$ com o objetivo de investigar se ela irá convergir para algum valor finito y , tem-se que

$$y = x^{\left\{ x^{x^{\dots}} \right\} = y} \Rightarrow y = x^y.$$

Com o objetivo de estudar o comportamento da equação implícita $y = x^y$, para um número real $x > 0$, utiliza-se a função $g(y) = y^{\frac{1}{y}} = x$.

Lema 1.2. A função $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $g(y) = y^{\frac{1}{y}}$ é tal que:

(a) $\lim_{y \rightarrow 0^+} g(y) = 0$.

(b) $\lim_{y \rightarrow +\infty} g(y) = 1$, ou seja, $x = 1$ é uma assíntota horizontal.

(c) O ponto de máximo da função $g(y) = y^{\frac{1}{y}}$ é $M = (e, e^{\frac{1}{e}})$.

(d) Pontos de inflexão: $\begin{cases} F_1 \approx (0,58, 0,39) \\ F_2 \approx (4,37, 1,40) \end{cases}$

Demonstração. Como $x = y^{\frac{1}{y}} = e^{\ln y^{\frac{1}{y}}} = e^{\frac{\ln y}{y}}$, tem-se

(a) $\lim_{y \rightarrow 0^+} y^{\frac{1}{y}} = \lim_{y \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln y}{y}} = e^{\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\ln y}{y}}$.

Calculando $\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\ln y}{y}$, tem-se

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\ln y}{y} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{y} \cdot \ln y \right] = \infty \cdot (-\infty) = -\infty.$$

Logo,

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} y^{\frac{1}{y}} = \lim_{y \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln y}{y}} = 0.$$

Portanto, quando $y \rightarrow 0$ tem-se $x \rightarrow 0$.

$$(b) \lim_{y \rightarrow +\infty} y^{\frac{1}{y}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln y}{y}} = e^{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y}}.$$

Porém, $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Então, usando a regra de L'Hôpital, tem-se

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y} = 0.$$

Logo,

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} y^{\frac{1}{y}} = e^0 = 1.$$

Portanto, quando $y \rightarrow \infty$ tem-se $x \rightarrow 1$, ou seja, $x = 1$ é uma assíntota horizontal.

(c) Para investigar o ponto de máximo da função $g(y) = y^{\frac{1}{y}}$ deve-se investigar os pontos críticos.

Como

$$g(y) = y^{\frac{1}{y}} = e^{\frac{\ln y}{y}},$$

então

$$g'(y) = \frac{d(e^{\frac{\ln y}{y}})}{dy} = e^{\frac{\ln y}{y}} \cdot \left(\frac{\ln y}{y} \right)' = e^{\frac{\ln y}{y}} \cdot \left(\frac{1 - \ln y}{y^2} \right).$$

Para investigar os pontos críticos da função $g(y)$, tem-se

$$g'(y) = 0 \Rightarrow e^{\frac{\ln y}{y}} \cdot \left(\frac{1 - \ln y}{y^2} \right) = 0.$$

Logo, $1 - \ln y = 0 \Rightarrow \ln y = 1 \Rightarrow y = e \Rightarrow x = e^{\frac{1}{e}}$.

Fazendo o teste da derivada 1ª, tem-se

$$g'(y) > 0 \Rightarrow 1 - \ln y > 0 \Rightarrow \ln y < 1 \Rightarrow 0 < y < e.$$

$$g'(y) < 0 \Rightarrow 1 - \ln y < 0 \Rightarrow \ln y > 1 \Rightarrow y > e.$$

Portanto, o ponto de máximo da função g é $M = (e, e^{\frac{1}{e}})$.

(d) Para encontrar os pontos de inflexão da função $g(y) = y^{\frac{1}{y}}$ calcula-se a derivada 2ª, ou seja,

$$\begin{aligned} g''(y) &= \left[e^{\frac{\ln y}{y}} \cdot \frac{(1 - \ln y)}{y^2} \right]' \\ &= \left(e^{\frac{\ln y}{y}} \right)' \cdot \frac{(1 - \ln y)}{y^2} + e^{\frac{\ln y}{y}} \cdot \left(\frac{1 - \ln y}{y^2} \right)' \\ &= e^{\frac{\ln y}{y}} \cdot \left(\frac{1 - \ln y}{y^2} \right)^2 + e^{\frac{\ln y}{y}} \cdot \frac{\left(\frac{-1}{y} \cdot y^2 - 2y \cdot (1 - \ln y) \right)}{y^4} \\ &= y^{\frac{1}{y}} \cdot \frac{(1 - \ln y)^2}{y^4} + y^{\frac{1}{y}} \cdot \frac{(-y - 2y + 2y \ln y)}{y^4} \\ &= \frac{y^{\frac{1}{y}}}{y^4} \cdot \left[1 - 2 \ln y + \ln^2 y - 3y + 2y \ln y \right] \\ &= y^{\frac{1}{y}-4} \cdot (1 - 3y + (2y + \ln y - 2) \ln y). \end{aligned}$$

Para calcular os pontos de inflexão, tem-se

$$g''(y) = 0 \Rightarrow 1 - 3y + (2y + \ln y - 2) \ln y = 0.$$

Fazendo o gráfico no Geogebra, tem-se

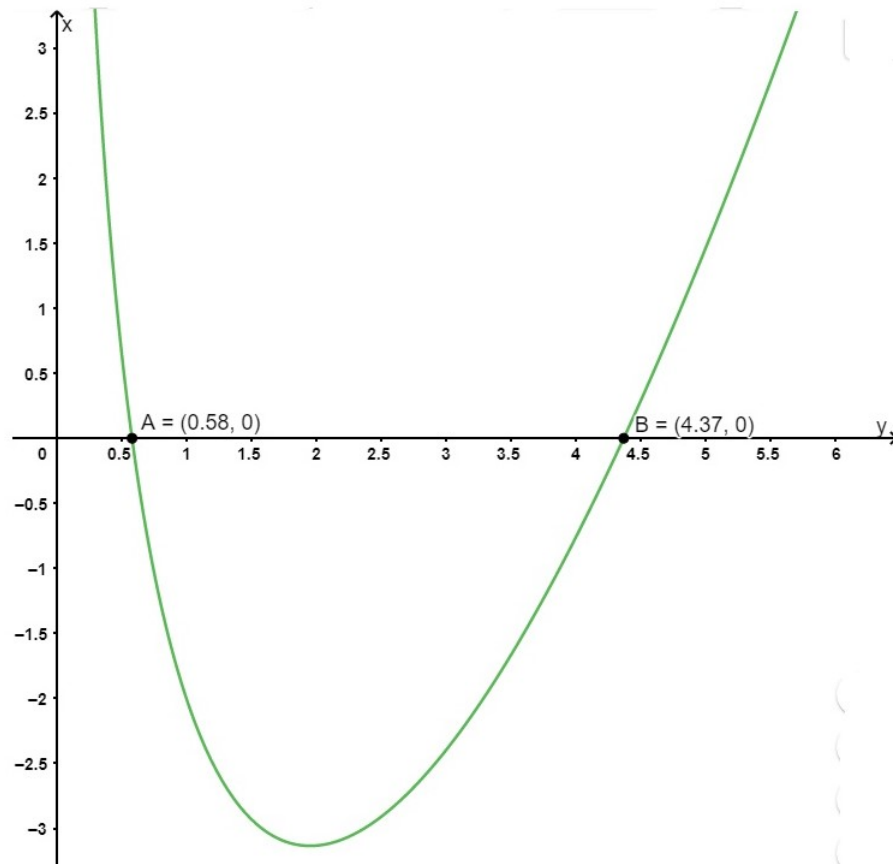


Figura 1 – Gráfico da derivada 2ª da função $g(y)$.

Logo os valores de y são, $y_{F_1} \approx 0,58$ e $y_{F_2} \approx 4,37$.

Como $x = y^{\frac{1}{y}}$, então os valores correspondentes de x são, $x_{F_1} \approx 0,39$ e $x_{F_2} \approx 1,40$.

Portanto, os pontos de inflexão são, $F_1 \approx (0,58, 0,39)$ e $F_2 \approx (4,37, 1,40)$.

□

Observação 1.3. Pelo Lema 1.3, a função $g(y) = y^{\frac{1}{y}}$ é crescente no intervalo $(0, e)$ e decrescente no intervalo (e, ∞) . Em particular note que g é crescente em cada um dos subintervalos $\left(0, \frac{1}{e}\right)$, $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ e $(1, e)$.

Baseado no Lema 1.2, o gráfico da função $g(y)$ é apresentado na figura 2.

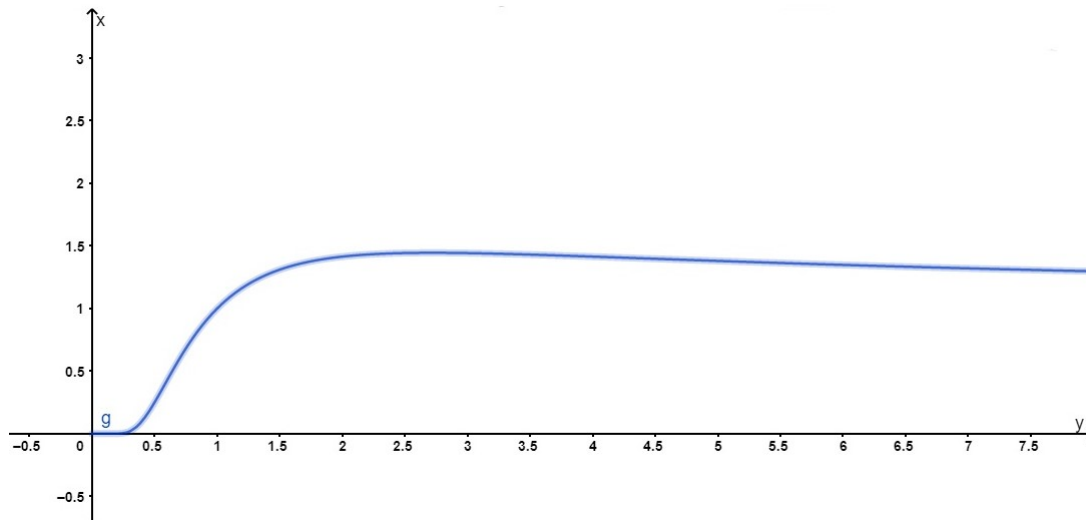
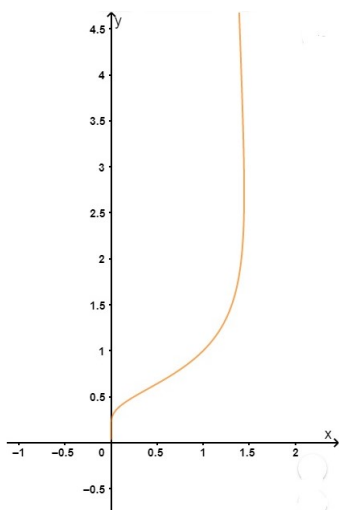


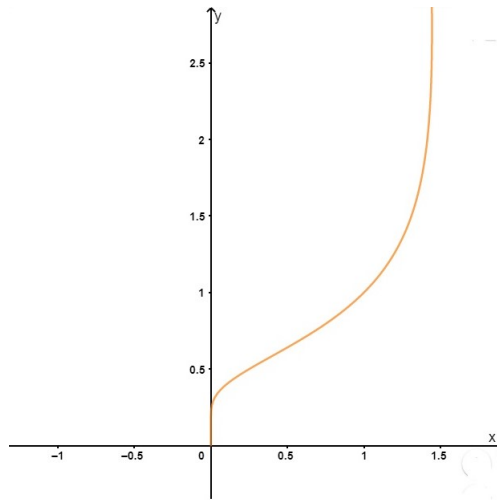
Figura 2 – Gráfico da função $g(y) = y^{\frac{1}{y}}$.

Como $g(y)$ não é invertível pois não é bijetiva, só fará sentido falar de uma função inversa de $g(y)$ se for feita uma restrição no domínio, como por exemplo a região definida por

$$0 < y \leq e; \quad 0 < x \leq e^{\frac{1}{e}}.$$



(a) Lugar geométrico dos pontos satisfazendo a equação $x^y = y$ sem restrição do domínio.



(b) Possível gráfico da função

$$f(x) = x^{x^{x^{\dots}}} \quad \text{com } x \in \left(0, e^{\frac{1}{e}}\right].$$

Figura 3 – Possíveis gráficos de $y = x^y$ e $f(x) = x^{x^{x^{\dots}}}$.

Condições de convergência

O gráfico da figura 3a representa todos os pontos do plano satisfazendo a equação $y = x^y$, contudo não é correto dizer que estes pontos pertencem ao gráfico da função f dada por $f(x) = x^{x^{x^{\dots}}}$.

Na prática, $y = f(x)$ é escrita como uma função, enquanto $y = x^y$ não é a expressão de uma função explícita. Pode-se constatar neste gráfico que, para valores de $1 < x < e^{\frac{1}{e}}$ existem em correspondência dois valores para y , o que contraria a definição de função. Por exemplo, usando a função $g(y) = y^{\frac{1}{y}} = x$, tem-se: $g(2) = g(4) = \sqrt{2}$, ou seja, dois valores de y dando a mesma imagem x .

Mas a torre de potência infinita não converge para todos os valores de x . Como explicar isso? E como encontrar o intervalo de convergência? De acordo com o que foi visto anteriormente a função $f(x)$ pode ser definida por recorrência como o limite de uma sequência de funções com alturas finitas, ou seja:

$$\begin{cases} y_1 = x \\ y_{n+1} = x^{y_n} \end{cases} \Rightarrow f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

Portanto, para algum valor de x , pode-se dizer que a sequência $\{y_n\}$ converge se tender para algum valor finito quando $n \rightarrow \infty$. Para encontrar as condições que garantem a convergência deverá ser abandonado, por enquanto, a torre de potência infinita, com o objetivo de explorar detalhadamente as sequências, os pontos fixos e as possibilidades de uma sequência convergir para um ponto fixo.

2.1 Critérios de convergência do ponto fixo

Seja uma sequência r definida por seu valor inicial y_0 e pela equação de recorrência

$$y_{n+1} = r(y_n), n \in \mathbb{N}$$

em que r é uma função suave e seja y^* é o ponto fixo que satisfaz a equação $y^* = r(y^*)$.

Se tivermos $y_n = y^*$, então $y_{n+1} = r(y_n) = r(y^*) = y^*$ e a sequência irá reproduzir o mesmo valor para todas as iterações futuras.

Definição 2.1. *Seja α um número real e r uma função, então α é um ponto fixo de se e somente se $r(\alpha) = \alpha$.*

Exemplo 2.1. *Encontre os pontos fixos de $r(x) = x^2 - 2$.*

Solução: De acordo com a definição 2.1, $r(x) = x$. Deste modo, $x^2 - 2 = x \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 2$.

Isto é, $r(-1) = (-1)^2 - 2 = 1 - 2 = -1$ e $r(2) = 2^2 - 2 = 4 - 2 = 2$.

Portanto, -1 e 2 são os pontos fixos de r .

Depois de encontrar os pontos fixos da sequência resolvendo a equação $y = r(y)$, deverá ser investigado o comportamento da função para pontos "próximos do ponto fixo".

Observação 2.1. *No Capítulo 3 será mostrado graficamente e no capítulo 4 algebricamente para quais valores de x as curvas exponenciais definida pela sequência $y_{n+1} = x^{y_n}$ convergem ou divergem.*

Proposição 2.1. *Seja $r(y)$ uma função suave e y^* um ponto fixo de $r(y)$ satisfazendo a condição $|r'(y^*)| < 1$. Então existe um intervalo I tal que $y^* \in I$ cujas condições seguintes devem ser satisfeitas: se $y \in I$, então $y_n \in I$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e, além disso, $y_n \rightarrow y^*$ quando $n \rightarrow \infty$.*

Demonstração. Como $|r'(y^*)| < 1$, então existe um número $\lambda > 0$ tal que $|r'(y^*)| < \lambda < 1$. Segue-se da continuidade de r' que existe um número $\delta > 0$, tal que para todo $y \in I$, $|r'(y)| < \lambda$, com $I = [y^* - \delta, y^* + \delta]$. Para todo $y \in I$, pelo Teorema do valor médio, tem-se

$$|r(y) - r(y^*)| = |r'(\tilde{y})||y - y^*| < \lambda \cdot |y - y^*|$$

com \tilde{y} entre y e y^* .

Logo, tomando um ponto $y_0 \in I$, tem-se

$$|r(y_0) - r(y^*)| < \lambda \cdot |y_0 - y^*|.$$

Contudo, y^* é um ponto fixo, então

$$|y_1 - y^*| < \lambda \cdot |y_0 - y^*|.$$

E, ainda, sendo $0 < \lambda < 1$, então a distância de y_1 a y^* é menor do que a distância de y_0 a y^* . Em particular, $y_1 = r(y_0)$ também pertence ao intervalo I . Repetindo o passo anterior para y_1 e y^* , tem-se

$$|r(r(y_0)) - r(r(y^*))| = |r(y_1) - r(y^*)| < \lambda \cdot |r(y_0) - r(y^*)|.$$

Ou seja,

$$|y_2 - y^*| < \lambda \cdot |y_1 - y^*|.$$

E, como demonstrado anteriormente, $|y_1 - y^*| < \lambda \cdot |y_0 - y^*|$. Logo,

$$|y_2 - y^*| < \lambda^2 \cdot |y_0 - y^*|.$$

Todavia $\lambda < 1$, o que implica em $\lambda^2 < \lambda$. Isso significa que a distância de y_2 a y^* é menor do que a distância de y_1 a y^* . Suponha-se por hipótese de indução que $y_n \in I$ e $|y_n - y^*| < \lambda^n \cdot |y_0 - y^*|$ para $n \in \mathbb{N}$.

Pretende-se provar que essa desigualdade é verdadeira para $n + 1$. Novamente pelo Teorema do valor médio

$$|y_{n+1} - y^*| < \lambda \cdot |y_n - y^*|.$$

Porém, por hipótese de indução $|y_n - y^*| < \lambda^n \cdot |y_0 - y^*|$, logo,

$$|y_{n+1} - y^*| < \lambda^{n+1} \cdot |y_0 - y^*| < \lambda^{n+1} \delta < \delta$$

e conseqüentemente $y_{n+1} \in I$.

Portanto, pelo princípio de indução finita, $|y_n - y^*| < \lambda^n \cdot |y_0 - y^*|$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

E, ainda, quando $n \rightarrow \infty$ tem-se $y_n \rightarrow y^*$.

□

Proposição 2.2. *Seja $r(y)$ uma função suave e y^* um ponto fixo satisfazendo a condição $|r'(y^*)| > 1$. Então, existe um intervalo I tal que $y^* \in I$ de modo que para todo $y_0 \in I$ existe um inteiro N_0 tal que $y_{N_0} \notin I$, em que y_n é a seqüência definida por*

$$y_n = f_n(x) = \left. x^{x^{x^{\dots}}} \right\} n \text{ vezes.}$$

Demonstração. Como $|r'(y^*)| > 1$, então existe $\lambda > 0$ tal que $|r'(y^*)| > \lambda > 1$. Segue-se da continuidade de r' que existe um número $\delta > 0$, tal que para todo $y \in I$, $|r'(y)| > \lambda$, com $I = [y^* - \delta, y^* + \delta]$. Para todo $y \in I$, pelo Teorema do valor médio, tem-se

$$|r(y) - r(y^*)| = |r'(\tilde{y})||y - y^*| > \lambda \cdot |y - y^*| \text{ com } \tilde{y} \text{ entre } y \text{ e } y^*.$$

Logo, tomando um ponto $y_0 \in I$, tem-se

$$|r(y_0) - r(y^*)| > \lambda \cdot |y_0 - y^*|.$$

Contudo, y^* é um ponto fixo, então

$$|y_1 - y^*| > \lambda \cdot |y_0 - y^*|.$$

Se $y_1 \notin I$, ou seja, se $|y_1 - y^*| > \delta$, então está terminada a prova. Se este não for o caso, pode-se repetir o processo acima usando $y_1 \in I$. Daí, pelo Teorema do valor médio, tem-se que

$$|r(r(y_0)) - r(r(y^*))| = |r(y_1) - r(y^*)| > \lambda \cdot |y_1 - y^*|.$$

Ou seja,

$$|y_2 - y^*| > \lambda \cdot |y_1 - y^*|.$$

E, como demonstrado anteriormente, $|y_1 - y^*| > \lambda \cdot |y_0 - y^*|$. Logo,

$$|y_2 - y^*| > \lambda^2 \cdot |y_0 - y^*|.$$

Note que $\lambda^2 > \lambda$ pois $\lambda > 1$. Logo, a distância de y_2 a y^* é maior do que a distância de y_1 a y^* . Portanto, à medida que se aplica sucessivamente a função r a y e y^* , aumenta-se a distância entre $r(y_n)$ e $r(y^*)$.

Como na Proposição 2.1, se $y_n \in I$ por indução vale a desigualdade

$$|y_n - y^*| > \lambda^n \cdot |y_0 - y^*|.$$

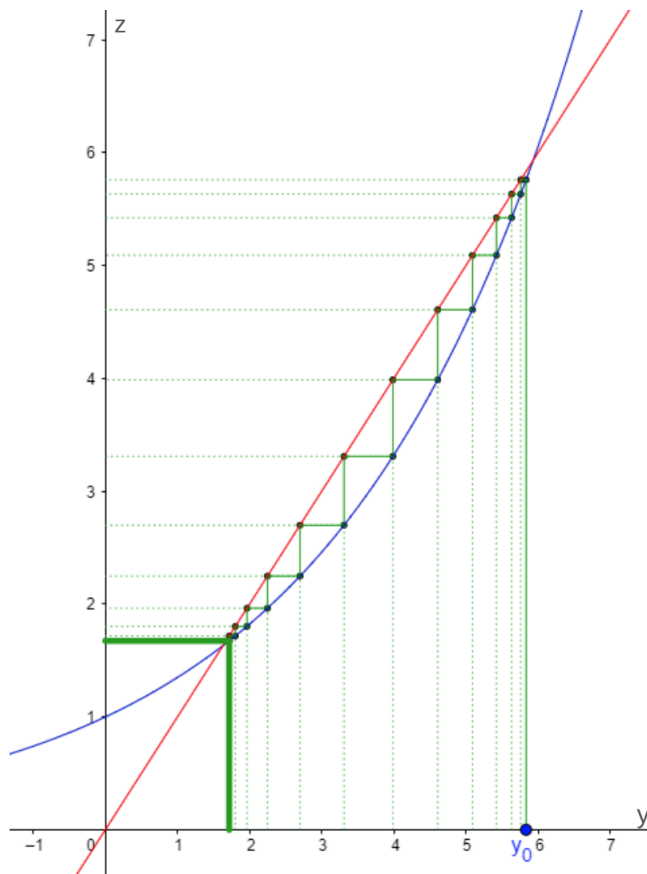
Observe que $\lambda^n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Então existe algum $N > 0$ tal que $\lambda^n > \frac{\delta}{|y_0 - y^*|}$ para $n \geq N$. Se $y_N \in I$, então $|y_N - y^*| > \lambda^N \cdot |y_0 - y^*| > \delta$.

Por hipótese $y_N \in I$, conseqüentemente tem-se uma contradição.

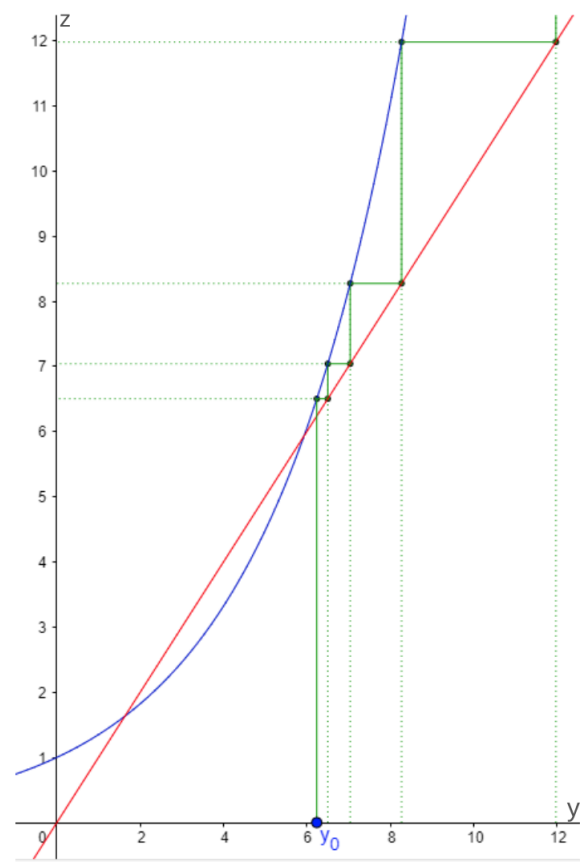
□

Definição 2.2. Um ponto fixo $r(y^*) = y^*$ é neutro se, e somente se $|r'(y^*)| = 1$.

A convergência/divergência de pontos fixos pode ser interpretada graficamente utilizando a construção da “teia de aranha”. Na figura 4 tem-se a equação de recorrência $y_{n+1} = r(y_n)$ com y_{n+1} em função de y_n . Os pontos fixos são as interseções entre o gráfico da função r e a função identidade $y = x$. Nesse gráfico aparecem dois pontos fixos y_{P_1} e y_{P_2} . A construção da teia mostra que P_1 é um ponto fixo atrator enquanto P_2 é um ponto fixo repulsor. Isto ocorre pois $|r'(y_{P_1})| < 1$ e $|r'(y_{P_2})| > 1$. O gráfico abaixo da curva exponencial $r(y) = 1,35^y$ e da reta $z = y$ foi usado para ilustrar uma situação de convergência/divergência. Isso não é uma prova, apenas para se ter uma ideia visual do que está acontecendo.



(a) Gráfico da função $r(y) = 1,35^y$ indicando a “teia de aranha” convergindo para o ponto fixo P_1 .



(b) Gráfico da função $r(y) = 1,35^y$ indicando a “teia de aranha” divergindo do ponto fixo P_2 .

Figura 4 – Gráfico da função $r(y) = 1,35^y$ convergindo/divergindo.

Análise dos pontos fixos da função $r(y)$

Para melhor entendimento dos resultados estudados nos capítulos anteriores serão utilizados elementos visuais, isto é, a análise gráfica.

Nesse sentido, deve-se estudar o comportamento da sequência $y_{n+1} = x^{y_n}$, cuja equação de recorrência é uma família de curvas exponenciais em que a base x é um parâmetro, assim como examinar os possíveis pontos de interseção entre o gráfico de $r(y) = x^y$ e a reta identidade $z = y$. Neste caso tem-se $y_{n+1} = r(y_n)$ com $r(y) = x^y$. No restante deste texto para cada x denota-se por $r_x(y) = x^y$ a função associada ao parâmetro. Sabe-se que (veja [5]):

- $x > 1$: a exponencial é crescente.
- $0 < x < 1$: a exponencial é decrescente.

Observação 3.1. Para $x = 1$ tem-se o caso trivial, pois a Torre de potência infinita $y = x^{x^{x^{x^{\dots}}}}$ se torna, $y = 1^{1^{\dots}} = 1$.

As posições das curvas definida pela função $r_x(y) = x^y$ em relação à função identidade definida pela lei $z = y$ permitem determinar a possível existência de pontos fixos.

Para $x > 1$, ocorrem os seguintes casos:

1. A curva exponencial está sempre acima da reta $z = y$: nesse caso não há pontos fixos.

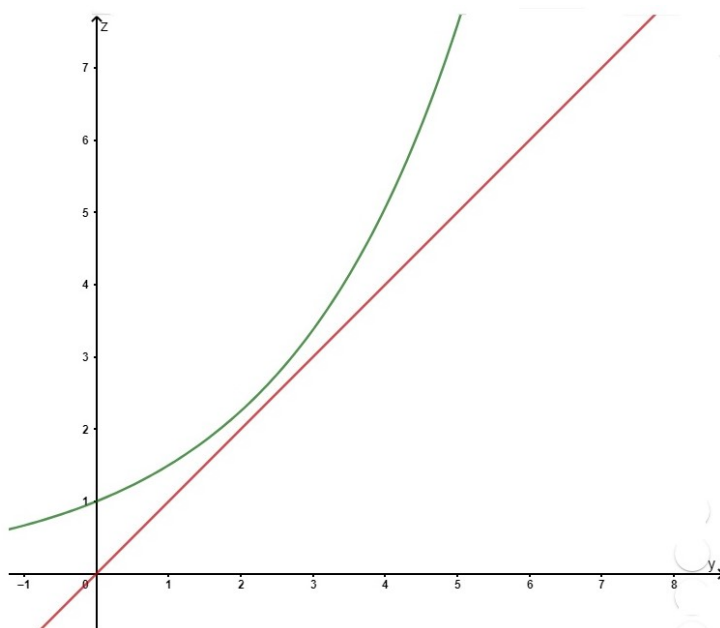


Figura 5 – Gráfico da função $r_x(y) = x^y$ acima da reta $z = y$.

2. A curva exponencial é tangente à reta $z = y$: existe um ponto fixo y_1^* (ou dois pontos fixos coincidentes).

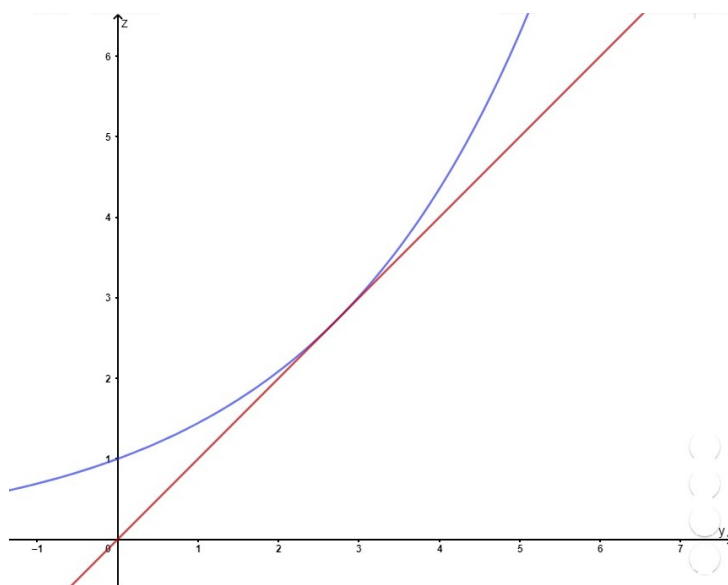


Figura 6 – Gráfico da função $r_x(y) = x^y$ tangente à reta $z = y$.

3. A curva exponencial cruza a reta $z = y$ em dois pontos: existem dois pontos fixos y_1^* e y_2^* .

Para $0 < x < 1$ a curva exponencial irá interseccionar a reta $z = y$ em um único ponto.

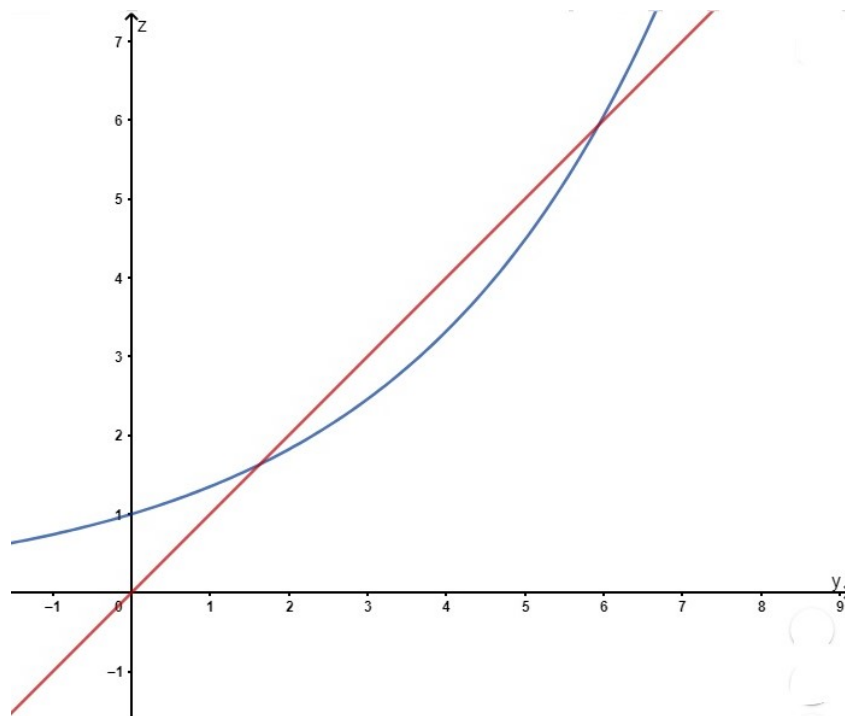


Figura 7 – Gráfico da função $r_x(y) = x^y$ secante à reta $z = y$.

Observação 3.2. Como a base da curva exponencial $r_x(y) = x^y$ é menor do que 1, então a derivada 1ª é sempre negativa. E os casos podem ser

4. No gráfico da Figura 8, a derivada 1ª no ponto de interseção é: $-1 \leq r'_x(y) < 0$, ou seja, $|r'_x(y)| \leq 1$. De acordo com a Proposição 2.1 e a Definição 2.2, respectivamente, y é um ponto fixo atrator ou um ponto fixo neutro.

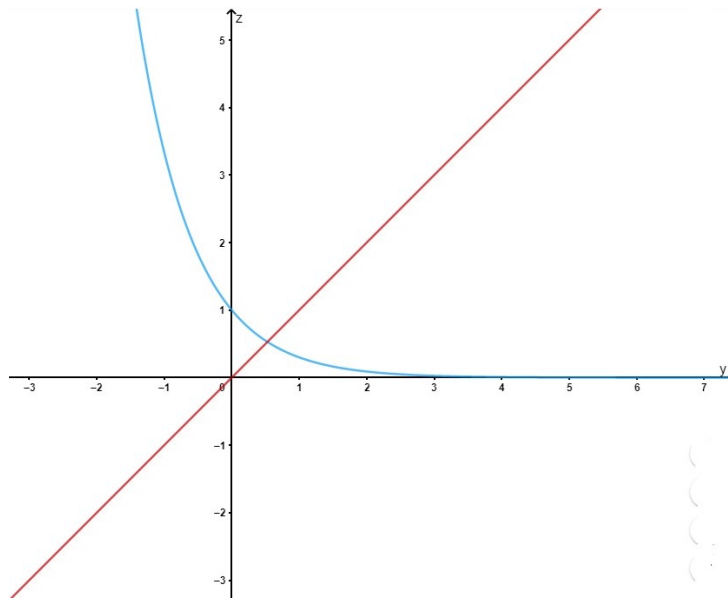


Figura 8 – Gráfico da função $r_x(y) = x^y$ intersecção com a reta $z = y$.

5. No gráfico da Figura 9, a derivada 1ª no ponto de intersecção é: $r'_x(y) < -1$, ou seja, $|r'_x(y)| > 1$. De acordo com a Proposição 2.2, y é um ponto fixo repulsor.

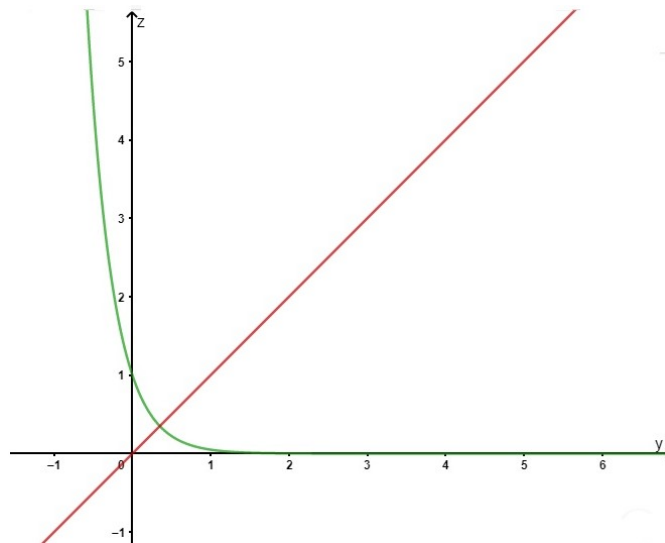


Figura 9 – Gráfico da função $r_x(y) = x^y$ intersecção com a reta $z = y$.

3.1 Condições de convergência na Torre de potência infinita

Serão utilizadas as Proposições 2.1 e 2.2 para aferir quando ocorrerá a convergência entre as sequências que estão discriminadas na função $y = f(x) = x^{x^{x^{x^{\dots}}}}$.

A sequência $y_{n+1} = x^{y_n}$ equivale a $y_{n+1} = r_x(y_n)$.

Nessa igualdade, x é um parâmetro da equação de recorrência, enquanto y_n e y_{n+1} são variáveis. Na prática, tem-se um número infinito de sequências, uma para cada valor de x . Os pontos fixos y^* dessas sequências são encontrados quando $y_{n+1} = y_n$, que satisfaz a equação de recorrência

$r_x(y) = y$, o que equivale a $g(y) = x$, em que $g(y) = y^{\frac{1}{y}}$ (y é o ponto fixo de r), ou equivalentemente como descrito na observação 3.3.

Observação 3.3. Os pontos fixos de $r_x(y)$ são os pontos da forma $x^y = y$ o que ocorre se e somente se $g(y) = x$.

Como queremos utilizar a Proposição 2.1, deve-se usar o critério para que o ponto fixo convirja, ou seja, $|r'(y)| < 1$.

Proposição 3.1. Os pontos fixos da função $r_x(y) = x^y$ são atratores quando $\frac{1}{e} < y < e$ conseqüentemente $\frac{1}{e^e} < x < e^{\frac{1}{e}}$.

Demonstração. De $r_x(y) = x^y = e^{\ln x^y} = e^{y \cdot \ln x}$, obtém-se

$$r'_x(y) = e^{y \cdot \ln x} \cdot \ln x = x^y \cdot \ln x.$$

Em pontos fixos, como $x^y = y$, resulta $r'_x(y) = y \cdot \ln x = \ln x^y = \ln y$.

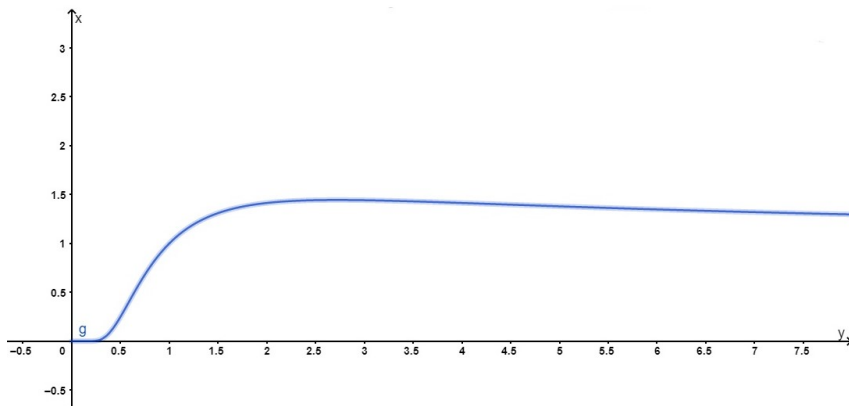
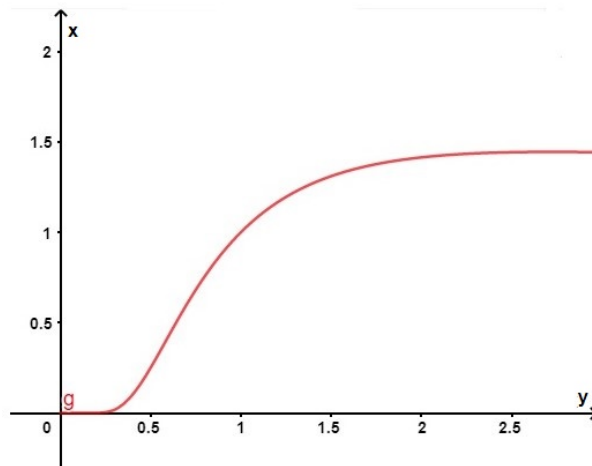
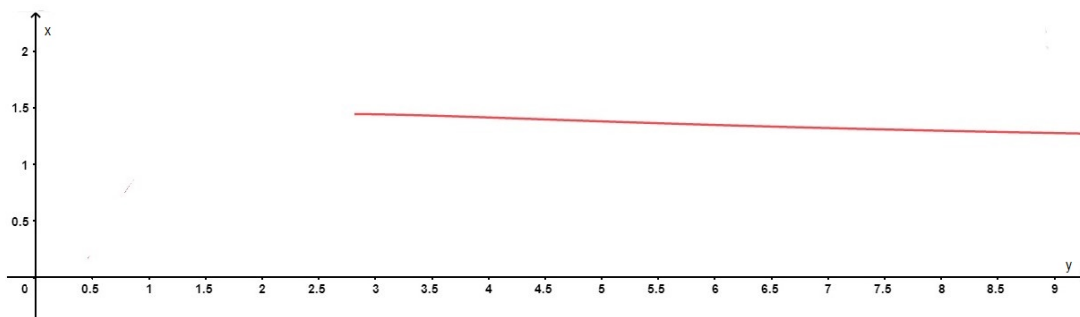
Entretanto, para ser atrator, tem-se que $|\ln y| < 1$, ou seja,

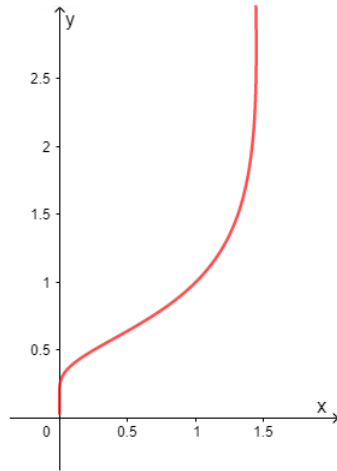
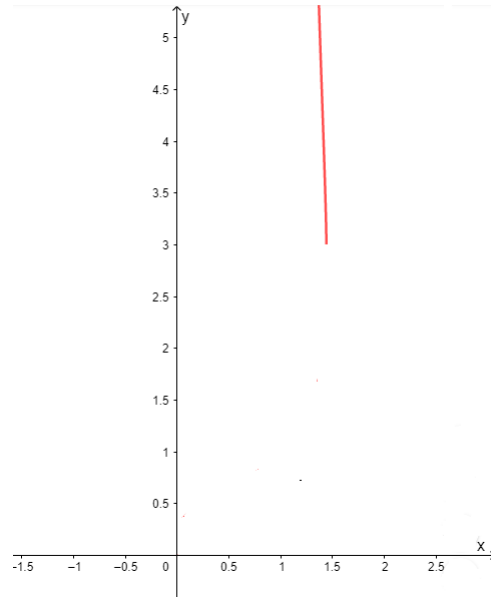
$$-1 < \ln y < 1 \Rightarrow \ln \frac{1}{e} < \ln y < \ln e \Rightarrow \frac{1}{e} < y < e.$$

E, os valores correspondentes para x (usando $x = y^{\frac{1}{y}}$), são: $x = \frac{1}{e^e}$ e $x = e^{\frac{1}{e}}$.

Portanto, $\frac{1}{e} < y < e$ e os valores correspondentes para x são $\frac{1}{e^e} < x < e^{\frac{1}{e}}$. □

Baseado no gráfico da Figura 9 e nas Proposições 2.1 e 2.2 são definidas as funções $h_1(x) = \left(g|_{(0,e]}\right)^{-1}$ e $h_2(x) = \left(g|_{(e,\infty)}\right)^{-1}$.

Figura 10 – Gráfico da função $g(y)$.Figura 11 – Gráfico da função $g|_{(0,e]}$.Figura 12 – Gráfico da função $g|_{(e,\infty)}$.

(a) Gráfico de $h_1(x)$ no intervalo $(0, e^{\frac{1}{e}}]$.(b) Gráfico de $h_2(x)$ no intervalo $(e^{\frac{1}{e}}, 1)$.Figura 13 – Gráficos de $h_1(x)$ e $h_2(x)$.

Consequentemente tem-se os 6 casos a seguir:

Lema 3.1. Se $x \in (0, \frac{1}{e^e})$, então $y = h_1(x) \in (0, \frac{1}{e})$ é um ponto fixo repulsor de $r_x(y)$.

Demonstração. Pela Observação 1.3, $g(y)$ é crescente no intervalo $(0, \frac{1}{e})$, com $\lim_{y \rightarrow 0} g(y) = 0$ e $g(\frac{1}{e}) = \frac{1}{e^e}$, então $x \in (0, \frac{1}{e^e})$ se e somente se $h_1(x) = y \in (0, \frac{1}{e})$.

Como $\ln y$ é crescente,

$$\ln h_1(x) = \ln y < \ln \frac{1}{e} \Rightarrow \ln y < -1.$$

Como visto na Proposição 3.1,

$$r'_x(y) = \ln y.$$

Portanto, $|r'_x(y)| > 1$. De acordo com a Proposição 2.2, y é um ponto fixo repulsor. \square

Lema 3.2. Se $x = \frac{1}{e^e}$, então $y = h_1(x) = \frac{1}{e}$ é um ponto fixo neutro de $r_x(y)$.

Demonstração. Como

$$g(y) = \left(\frac{1}{e}\right)^e = \frac{1}{e^e} \Rightarrow y = \frac{1}{e}$$

logo,

$$\ln y = \ln \frac{1}{e} = -1.$$

Como visto na Proposição 3.1,

$$r'_x(y) = \ln y.$$

Portanto, $|r'_x(y)| = 1$. De acordo com a Definição 2.2, y é um ponto fixo neutro. □

Lema 3.3. Se $x \in \left(\frac{1}{e^e}, 1\right]$, então $y = h_1(x) \in \left(\frac{1}{e}, 1\right]$ é um ponto fixo atrator de $r_x(y)$.

Demonstração. Pela Observação 1.3, $g(y)$ é crescente no intervalo $\left(\frac{1}{e}, 1\right]$, $g\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e^e}$ e $g(1) = 1$, então $x \in \left(\frac{1}{e^e}, 1\right]$ se e somente se $h_1(x) = y \in \left(\frac{1}{e}, 1\right]$.

Logo,

$$\ln \frac{1}{e} < \ln y \leq \ln 1 \Rightarrow -1 < \ln y \leq 0.$$

Como visto na Proposição 3.1,

$$r'_x(y) = \ln y.$$

Então,

$$-1 < r'_x(y) \leq 0.$$

Portanto, $|r'_x(y)| < 1$. De acordo com a Proposição 2.1, y é um ponto fixo atrator. □

Lema 3.4. Se $x \in \left(1, e^{\frac{1}{e}}\right)$, então existem dois pontos fixos de r , sendo eles $y_1 = h_1(x) \in (1, e)$ e $y_2 = h_2(x) \in (e, \infty)$, sendo que y_1 é atrator e y_2 é repulsor.

Demonstração. Novamente pela Observação 1.3, $g(y)$ é crescente no intervalo $(1, e)$, $g(1) = 1$ e $g(e) = e^{\frac{1}{e}}$, então $x \in \left(1, e^{\frac{1}{e}}\right)$ se e somente se $y_1 = h_1(x) \in (1, e)$.

Então,

$$1 < y < e \Rightarrow \ln 1 < \ln y < \ln e \Rightarrow 0 < \ln y < 1.$$

Logo,

$$0 < r'_x(y) < 1.$$

Portanto, $|r'_x(y)| < 1$. De acordo com a Proposição 2.1, y_1 é um ponto fixo atrator.

Pela Observação 1.3, $g(y)$ é decrescente no intervalo (e, ∞) , $g(e) = e^{\frac{1}{e}}$ e $\lim_{y \rightarrow +\infty} g(y) = 1$, então $x \in (e^{\frac{1}{e}}, 1)$ se e somente se $y_2 = h_2(x) \in (e, \infty)$.

Logo,

$$y > e \Rightarrow \ln y > \ln e \Rightarrow \ln y > 1.$$

Como visto na Proposição 3.1,

$$r'_x(y) = \ln y.$$

Portanto, $|r'_x(y)| > 1$. De acordo com a proposição 2.2, y_2 é um ponto fixo repulsor. □

Lema 3.5. Se $x = e^{\frac{1}{e}}$, então $y = h_1(x) = e$ é um ponto fixo neutro de r .

Demonstração. Como $g(y) = e^{\frac{1}{e}} \Rightarrow y = e$.

Logo,

$$\ln y = \ln e = 1.$$

Como visto na Proposição 3.1,

$$r'_x(y) = \ln y.$$

Portanto, $|r'_x(y)| = 1$. De acordo com a Definição 2.2, y é um ponto fixo neutro. □

Lema 3.6. Se $x \in (e^{\frac{1}{e}}, \infty)$, então r não tem ponto fixo.

Demonstração. Segue-se do fato que $g(y) = x$ se e somente se $r_x(y) = y$ e $g(0, \infty) = (0, e^{\frac{1}{e}}]$. □

Observação 3.4. Baseado no Lema 3.6, se a curva $r_x(y) = x^y$ está acima da reta $z = y$, então não há pontos fixos. Veja o gráfico abaixo que ilustra essa situação.

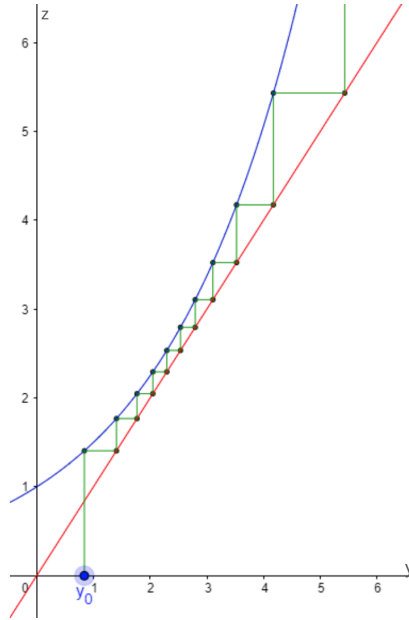


Figura 14 – Para $x > e^{\frac{1}{e}}$ a sequência y_n diverge para qualquer valor inicial y_0 .

Proposição 3.2. A função exponencial $r_x(y) = x^y$ é tangente à reta $z = y$ em (e, e) , para $x = e^{\frac{1}{e}}$. Neste caso o ponto fixo é único.

Demonstração. No ponto de tangência T a função exponencial $r_x(y) = x^y$ terá a mesma inclinação do que a reta $z = y$, isto é: $r'_x(y) = 1$.

Então,

$$r'_x(y) = \frac{d(e^{y \ln x})}{dy} = x^y \cdot \ln x = 1 \Rightarrow x^y = \frac{1}{\ln x} \Rightarrow \log_x x^y = \log_x \left(\frac{1}{\ln x} \right).$$

Denotando-se por y_T a coordenada do ponto de tangência, tem-se

$$y_T = \log_x \left(\frac{1}{\ln x} \right).$$

Usando as propriedades operatórias dos logaritmos, tem-se

$$y_T = \log_x \left(\frac{1}{\ln x} \right) = \log_x (\ln x)^{-1} = -\log_x (\ln x) = -\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}$$

e

$$z_T = x^{y_T} = x^{\log_x \left(\frac{1}{\ln x} \right)} = \frac{1}{\ln x}.$$

Logo, o possível ponto de tangência é dado por, $T = \left(-\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}, \frac{1}{\ln x} \right)$, em que $r'_x(y) = 1$.

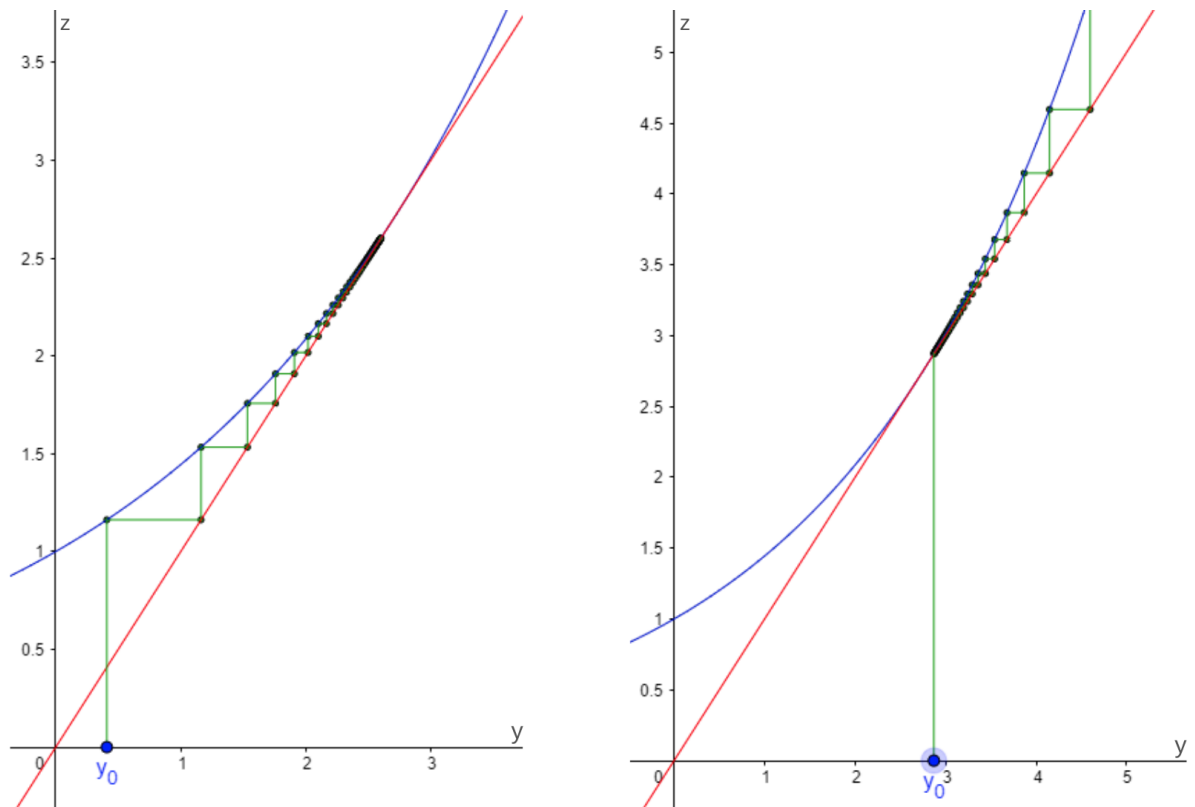
Porém, para a função exponencial $r_x(y) = x^y$ ser tangente à reta $z = y$, deve-se impor a condição:

$$y_T = z_T \Rightarrow -\frac{\ln(\ln x)}{\ln x} = \frac{1}{\ln x} \Rightarrow \ln(\ln x) = -1 \Rightarrow \ln x = \frac{1}{e} \Rightarrow x = e^{\frac{1}{e}} \cong 1.445.$$

Portanto, para este valor de x a função exponencial $r_x(y) = x^y$ se torna $r_x(y) = \left(e^{\frac{1}{e}}\right)^y$ e o ponto de tangência é $T = (e, e)$.

□

No gráfico da Figura 15, está representado a curva exponencial $r_x(y) = \left(e^{\frac{1}{e}}\right)^y$ e a reta $z = y$, cujo ponto fixo $y^* = e$. Baseado no Lema 3.5, y^* é um ponto fixo neutro. As iterações mostram que, para o ponto inicial $y_0 < e$ a sequência y_n converge para e e, para $y_0 > e$ a sequência y_n diverge.



(a) Para $y_0 \in (0, e]$ a sequência y_n converge.

(b) Para $y_0 \in (e, \infty)$ a sequência y_n diverge.

Figura 15 – Convergência e divergência no ponto de tangência.

Os gráficos das Figuras 16 e 17 são da curva exponencial $r_x(y) = x^y$ secante à reta $z = y$. Sejam y_1^* o ponto fixo atrator e y_2^* o ponto fixo repulsor de r . Baseado no Lema 3.4, as iterações nos gráficos abaixo estão mostrando que a função r irá convergir se o ponto inicial $y_0 < y_2^*$ (16a e 16b) e irá divergir se $y_0 > y_2^*$ (17).

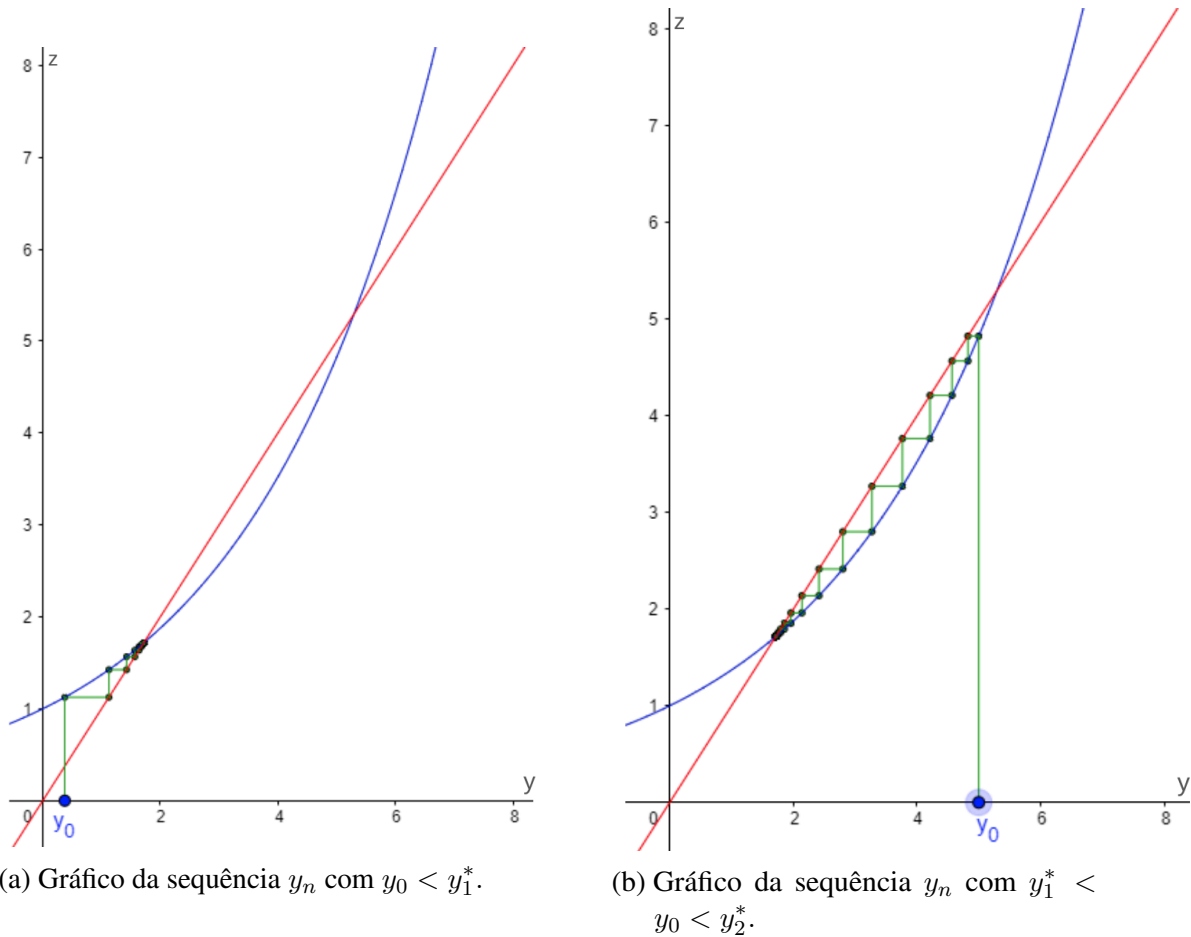


Figura 16 – Gráfico da sequência y_n convergindo para y_1^* .

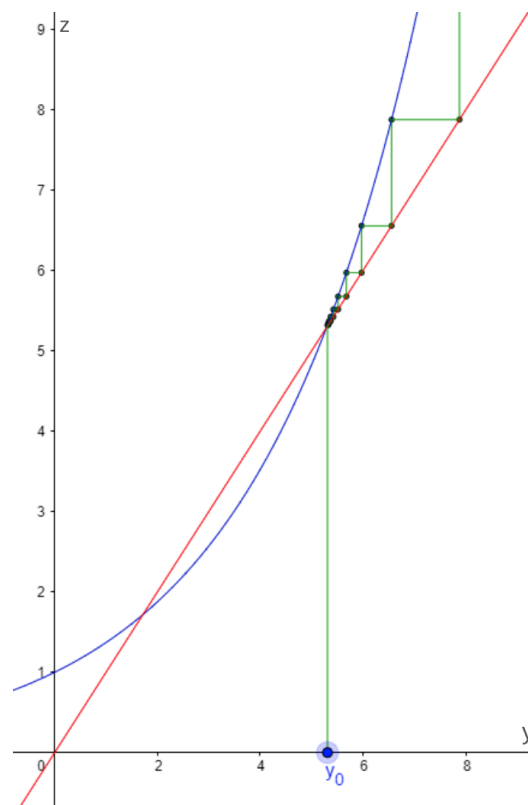


Figura 17 – Gráfico da sequência y_n com $y_0 > y_2^*$ divergindo do ponto fixo y_2^* .

Agora é preciso verificar o que ocorre quando $0 < x < 1$. Tendo em vista que, nesse caso, a função exponencial é decrescente, existe um ponto comum entre a sequência y_n e a reta $z = y$. Para essa situação há dois casos

Observação 3.5. No gráfico da Figura 18, a curva exponencial $r_x(y) = x^y$ intersecta a reta $z = y$ no ponto fixo y^* . Baseado no Lema 3.3, o ponto fixo y^* é atrator. As iterações mostram que para o ponto inicial $y_0 > 0$ a sequência y_n irá oscilar até convergir para y^* .

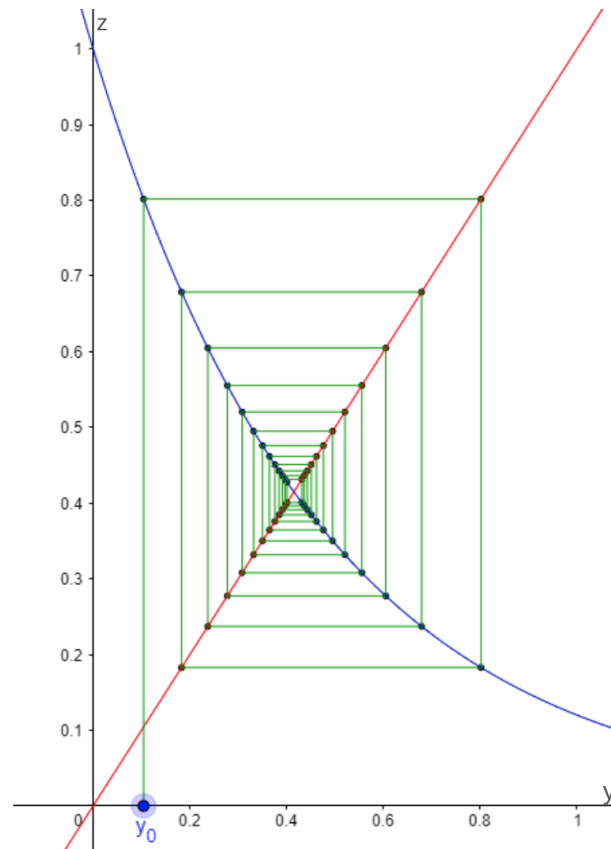


Figura 18 – Para $y_0 \in \left(0, e^{\frac{1}{e}}\right]$ a sequência y_n irá convergir para $y = h_1(x)$.

Observação 3.6. No gráfico da Figura 19, a curva exponencial $r_x(y) = x^y$ intersecta a reta $z = y$ no ponto fixo y^* . Baseado no Lema 3.1, o ponto fixo y^* é repulsor. As iterações mostram que a sequência y_n irá novamente oscilar, aproximando cada vez mais de dois valores distintos estáveis y_1 e y_2 , denominados de ciclo de período 2.

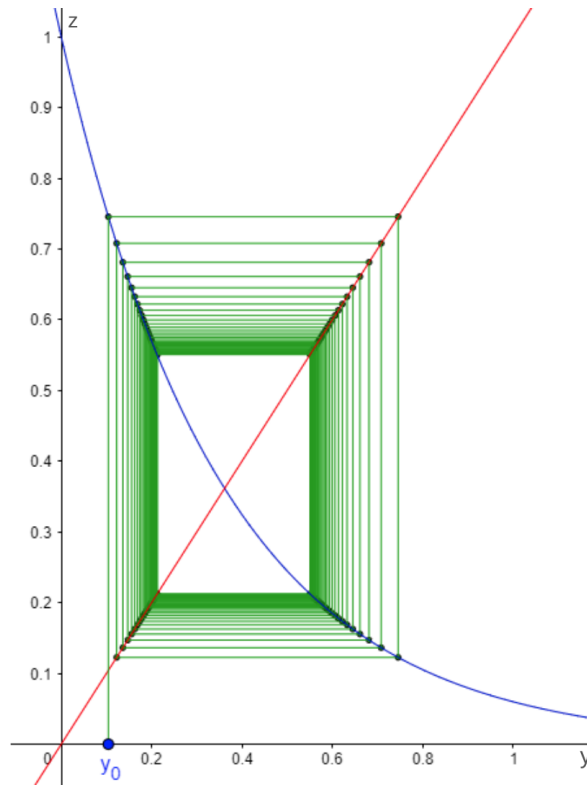
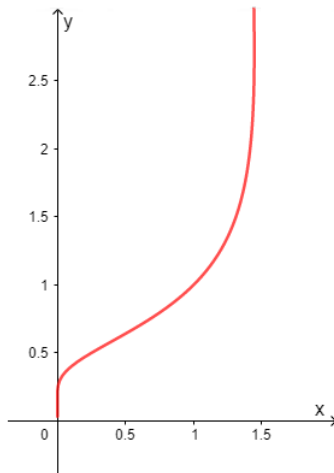


Figura 19 – Para $y_0 \in \left(0, e^{\frac{1}{e}}\right]$ a sequência y_n irá divergir para dois valores diferentes denotado por um ciclo de período 2.

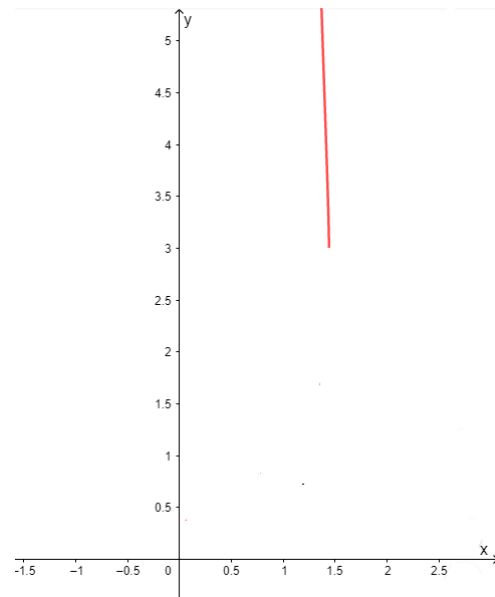
Análise gráfica com demonstrações

Nesse capítulo será estudado o comportamento da sequência $y_{n+1} = r(y_n) = x^{y_n}$. E, ainda, serão analisados os casos referentes a esta sequência, usando funções auxiliares e, no final, os resultados encontrados serão sintetizados em uma tabela.

Conforme citado no capítulo 3 as funções $h_1(x) = (g|_{(0,e]})^{-1}$ e $h_2(x) = (g|_{(e,\infty)})^{-1}$ podem ser representados graficamente do seguinte modo:



(a) Gráfico de $h_1(x)$ no intervalo $(0, e^{\frac{1}{e}}]$.



(b) Gráfico de $h_2(x)$ no intervalo $(e^{\frac{1}{e}}, 1)$.

Figura 20 – Gráficos de $h_1(x)$ e $h_2(x)$.

Definição 4.1. A partir deste capítulo, na sequência $r_x(y) = x^y$ será omitido o índice x , ou seja, $r(y) = x^y$.

Observação 4.1. Os pontos de convergência da sequência

$$\begin{cases} y_1 = r(1) \\ y_{n+1} = r(y_n) \end{cases}$$

satisfazem a relação $r(y) = y$. De acordo com o Lema 3.4, $y = h_2(x)$ é repulsor, logo os possíveis pontos de convergência serão os pontos $y = h_1(x)$.

Proposição 4.1. Se $x \in (1, e^{\frac{1}{e}}]$, então a sequência

$$\begin{cases} y_1 = r(1) \\ y_{n+1} = r(y_n) \end{cases}$$

converge para $y = h_1(x) \in (1, e]$.

Demonstração. Como $y_1 = r(1) = x > 1$, então $r(y) = x^y$ é estritamente crescente, pois

$$\underbrace{r(y_1)}_{y_2} > \underbrace{r(1)}_{y_1} \Rightarrow 1 < y_1 < y_2.$$

E, ainda

$$\underbrace{r(y_2)}_{y_3} > \underbrace{r(y_1)}_{y_2} \Rightarrow 1 < y_1 < y_2 < y_3.$$

Suponha, por hipótese de indução $y_k > y_{k-1}$, logo

$$\underbrace{r(y_k)}_{y_{k+1}} > \underbrace{r(y_{k-1})}_{y_k} \Rightarrow y_k < y_{k+1}.$$

Portanto,

$$1 < y_1 < y_2 < y_3 < \dots < y_{k-1} < y_k < y_{k+1} < \dots$$

Ademais a sequência y_n é limitada, uma vez que $1 < y_1 = r(1) = x < e^{\frac{1}{e}}$ (por hipótese), logo

$$x = y_1 < e^{\frac{1}{e}} < e.$$

E, ainda, como $y_2 = r(y_1) = x^x$, tem-se

$$y_2 = x^x < x^e < (e^{\frac{1}{e}})^e = e.$$

Supondo por indução que $y_k < e$, tem-se

$$y_{k+1} = x^{y_k} < x^e < (e^{\frac{1}{e}})^e < e.$$

Portanto, $y_n < e$ para todo natural n .

Conclusão, se $x \in \left(1, e^{\frac{1}{e}}\right]$, então a sequência y_n é crescente e limitada, ou seja,

$$1 < y_1 < y_2 < y_3 < \dots < y_n < e.$$

Portanto, y_n é convergente. Além disso, se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$$

tem-se que

$$x^y = y$$

□

Proposição 4.2. Se $x \in \left(0, \frac{1}{e^e}\right)$, então a sequência

$$\begin{cases} y_1 = r(1) \\ y_{n+1} = r(y_n) \end{cases}$$

diverge, e, neste caso as subsequências com índices ímpares e pares tende a pontos p_1 e p_2 , ou seja, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_{2n+1} = p_1$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} y_{2n} = p_2$ tal que $r(p_1) = p_2$ e $r(p_2) = p_1$.

Demonstração. Como

$$0 < x < 1 \Rightarrow \underbrace{r(1)}_{y_1=x} < \underbrace{r(x)}_{y_2=x^x} < \underbrace{r(0)}_1.$$

Seja $0 < y = h_1(x) < 1$ um ponto fixo de r , então

$$0 < y < 1 \Rightarrow r(1) < \underbrace{r(y)}_y < r(0) \Rightarrow 0 < y_1 < y < 1$$

$$\Rightarrow r(1) < r(y) < r(y_1) < r(0)$$

$$\Rightarrow 0 < y_1 < y < y_2 < 1$$

$$\Rightarrow r(1) < r(y_2) < r(y) < r(y_1) < r(0)$$

$$\Rightarrow 0 < y_1 < y_3 < y < y_2 < 1$$

Aplicando a função r no intervalo acima, tem-se

$$\Rightarrow r(1) < r(y_2) < r(y) < r(y_3) < r(y_1) < r(0)$$

$$\Rightarrow 0 < y_1 < y_3 < y < y_4 < y_2 < 1$$

$$\Rightarrow r(1) < r(y_2) < r(y_4) < r(y) < r(y_3) < r(y_1) < r(0)$$

$$\Rightarrow 0 < y_1 < y_3 < y_5 < y < y_4 < y_2 < 1$$

Aplicando novamente a função r no intervalo acima, tem-se

$$\Rightarrow r(1) < r(y_2) < r(y_4) < r(y) < r(y_5) < r(y_3) < r(y_1) < r(0)$$

$$\Rightarrow 0 < y_1 < y_3 < y_5 < y < y_6 < y_4 < y_2 < 1.$$

Supondo por indução que $y_{2k-1} < y < y_{2k-2}$, então

$$r(y_{2k-2}) < r(y) < r(y_{2k-1}) \Rightarrow y_{2k-1} < y < y_{2k}$$

e

$$r(y_{2k}) < r(y) < r(y_{2k-1}) \Rightarrow y_{2k+1} < y < y_{2k}.$$

Portanto, a sequência satisfaz o zigue-zague

$$0 < y_1 < y_3 < \dots < y_{2k-1} < \dots < y < \dots < y_{2k-2} < \dots < y_4 < y_2 < 1. \quad (4.1)$$

Se $x \in (0, 1)$, então a sequência y_{2n+1} é crescente e a sequência y_{2n} é decrescente. Logo, y_{2n+1} e y_{2n} são sequências monótonas limitadas, portanto são convergentes. Além disso, tem-se que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_{2n+1} = p_1.$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_{2n} = p_2.$$

E, ainda, y_n converge $\Leftrightarrow p_1 = p_2 = y = h_1(x)$, contudo se $x \in \left(0, \frac{1}{e^e}\right)$, então pelo Lema 3.1 tem-se que $|r'(y)| > 1$, ou seja, neste caso, o ponto fixo é repulsor e consequentemente y_n é divergente. Deste modo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r(y_{2n+1}) = r \left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_{2n+1} \right) = r(p_1),$$

mas, $r(y_{2n+1}) = y_{2n+2}$. Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_{2n+2} = r(p_1).$$

Portanto, $p_2 = r(p_1)$. E, ainda,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r(y_{2n}) = r \left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_{2n} \right) = r(p_2).$$

Porém, $r(y_{2n}) = y_{2n+1}$. Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_{2n+1} = r(p_2).$$

Portanto, $p_1 = r(p_2)$.

□

Proposição 4.3. Se $x \in \left[\frac{1}{e^e}, 1 \right)$, então a sequência

$$\begin{cases} y_1 = r(1) \\ y_{n+1} = r(y_n) \end{cases}$$

converge.

Demonstração. Se $x \in \left[\frac{1}{e^e}, 1 \right)$, então $y = h_1(x) \in \left[\frac{1}{e}, 1 \right)$ é crescente pela Observação 1.3 e, ainda, $\ln x < 0$ e $r(y)$ é decrescente, logo:

$$\begin{aligned} -1 = \ln \frac{1}{e} &= \ln h_1 \left(\frac{1}{e^e} \right) \leq \ln h_1(x) \\ &= \ln x^y \\ &= y \ln x \\ &= x^y \ln x \\ &< x^u \ln x < 0, \end{aligned}$$

para todo $u > h_1(x)$.

Definindo $r^2(y) = r(r(y))$ e, usando a regra da cadeia, tem-se

$$(r^2)'(y) = r'(r(y)) \cdot r'(y) = x^{r(y)} \ln x \cdot x^y \ln x = x^{x^y} x^y \ln^2 x = r^2(y)r(y) \ln^2 x.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} [(r^2)'(y)]' &= [r^2(y)r(y) \ln^2 x]' \\ &= (r^2(y)r(y))' \ln^2(x) \\ &= (r^2(y))' r(y) \ln^2(x) + r^2(y)(r'(y)) \ln^2(x) \\ &= r^2(y)r(y) \ln^2(x))r(y) \ln^2(x) + r^2(y)(r(y) \ln(x) \ln^2(x) \\ &= r^2(y)(r(y))^2 \ln^4(x) + r^2(y)r(y) \ln^3(x) \\ &= r^2(y)r(y) \ln^3(x)(x^y \ln x + 1) \\ &= x^{x^y} x^y \ln^3(x)(x^y \ln x + 1). \end{aligned}$$

Como, $-1 < x^u \ln x$ para $y > h_1(x)$ e $\ln x < 0$, então

$$(r^2)''(y) < 0 \text{ em } (h_1(x), \infty).$$

Entretanto,

$$(r^2)'(y) = x^{x^y} x^y \ln^2 x = y y \ln x \ln x = \ln x^y \ln x^y = \ln^2 y = \ln^2 h_1(x) \leq 1.$$

Ou seja,

$$0 < (r^2)'(y) = (r^2)'(h_1(x)) \leq 1.$$

E, ainda, como $(r^2)'(y) < 0$, logo $r(y)$ é decrescente e, portanto

$$0 < (r^2)'(u) < (r^2)'(h_1(x)) = \ln^2 h_1(x) \leq 1, \text{ para } u > h_1(x).$$

Usando o Teorema do valor médio, tem-se

$$|r^2(u_1) - r^2(u_2)| = |(r^2)'(c)| \cdot |u_1 - u_2|, \text{ com } u_1 < c < u_2.$$

Então,

$$|r^2(u_1) - r^2(u_2)| = |(r^2)'(c)| \cdot |u_1 - u_2| < |u_1 - u_2| \quad (4.2)$$

para $u_1 \neq u_2 \in [h_1(x), \infty)$. A função $r^2(u)$ possui dois pontos fixos no intervalo $[h_1(x), 1]$, sendo estes $h_1(x)$ e p_2 dado pela Proposição 4.2.

A desigualdade (4.2) implica que $h_1(x) = p_2$, com efeito se $h_1(x) \neq p_2$ tem-se

$$|h_1(x) - p_2| = |r^2(h_1(x)) - r^2(p_2)| < |h_1(x) - p_2|$$

o que nos dá uma contradição. Logo a sequência $y_2, y_4, y_6 \dots$ converge para $h_1(x)$. Analogamente, pela Proposição 4.2, tem-se que y_1, y_3, y_5, \dots converge para $p_1 = r(p_2) = r(h_1(x)) = h_1(x)$. Consequentemente a sequência y_n converge para $h_1(x)$.

□

Lema 4.1. *Sejam $x \in \left(0, \frac{1}{e^e}\right)$, p_1 e p_2 tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_{2n+1} = p_1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_{2n} = p_2$, $r(p_2) = p_1$, $r(p_1) = p_2$. Então pode-se parametrizar estes pontos por $p_1 = z^{\frac{z}{1-z}}$ e $p_2 = z^{\frac{1}{1-z}}$, com $z \in (1, \infty)$.*

Demonstração. Conforme visto na Proposição 4.2, os valores de p_1 e p_2 , envolvidos no ciclo de período 2 podem ser representados como

$$p_2 = r(p_1) = x^{p_1} \text{ e } p_1 = r(p_2) = x^{p_2}.$$

Elevando essa última igualdade a p_1 , tem-se

$$p_1^{p_1} = x^{p_1 p_2}.$$

Substituindo $x^{p_1} = p_2$, tem-se

$$p_1^{p_1} = (x^{p_1})^{p_2} = p_2^{p_2}.$$

Aplicando o logaritmo nos dois lados da igualdade, tem-se

$$\ln p_1^{p_1} = \ln p_2^{p_2} \Rightarrow p_1 \ln p_1 = p_2 \ln p_2.$$

Substituindo $p_2 = zp_1$ nessa equação, tem-se

$$p_1 \ln p_1 = zp_1 \ln zp_1 \Rightarrow \ln p_1 = z \ln zp_1$$

$$\Rightarrow \ln p_1 = z(\ln z + \ln p_1)$$

$$\Rightarrow (1 - z) \ln p_1 = z \ln z$$

$$\Rightarrow \ln p_1 = \frac{z}{1 - z} \ln z$$

$$\Rightarrow \ln p_1 = \ln z^{\frac{z}{1-z}}$$

$$\Rightarrow p_1 = z^{\frac{z}{1-z}}.$$

Consequentemente,

$$p_2 = zp_1 \Rightarrow p_2 = z \cdot z^{\frac{z}{1-z}} \Rightarrow p_2 = z^{\frac{1}{1-z}}.$$

□

Exemplo 4.1. Para $z = 2$, tem-se $p_1 = 2^{-2} = \frac{1}{4}$ e $p_2 = 2^{-1} = \frac{1}{2}$.

De acordo com a Proposição 4.2, $p_2 = r(p_1) = x^{p_1}$ e $p_1 = r(p_2) = x^{p_2}$, tem-se

$$x = p_2^{\frac{1}{p_1}} = p_1^{\frac{1}{p_2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0.0625.$$

Lema 4.2. De acordo com o Lema 4.1, $\lim_{z \rightarrow \infty} p_1 = 0$ e $\lim_{z \rightarrow \infty} p_2 = 1$ e, além disso, $x \rightarrow 0$.

Demonstração. Fazendo $z \rightarrow \infty$, tem-se

$$p_1 = \lim_{z \rightarrow \infty} z^{\frac{z}{1-z}} = \lim_{z \rightarrow \infty} e^{\frac{z \ln z}{1-z}} = e^{\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z \ln z}{1-z}}.$$

calculando $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z \ln z}{1-z}$ encontra-se uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Usando a regra de L'Hôpital, tem-se

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z \ln z}{1-z} = -\lim_{z \rightarrow \infty} (\ln z + 1) = -(\infty + 1) = -\infty.$$

Logo, $p_1 = e^{-\infty} = 0$, ou seja, $p_1 \rightarrow 0$ quando $z \rightarrow \infty$.

E, ainda, tem-se

$$p_2 = \lim_{z \rightarrow \infty} z^{\frac{1}{1-z}} = \lim_{z \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln z}{1-z}} = e^{\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\ln z}{1-z}}.$$

Calculando $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\ln z}{1 - z}$ encontra-se uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Utilizando a regra de L'Hôpital, tem-se

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\ln z}{1 - z} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{z}}{-1} = - \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z} = 0.$$

Logo, $p_2 = e^0 = 1$, ou seja, $p_2 \rightarrow 1$ quando $z \rightarrow \infty$.

Por outro lado,

$$p_1 = x^{p_2} \Rightarrow 0 = x^1 \Rightarrow x = 0.$$

Desta maneira, $p_1 \rightarrow 0$ e $p_2 \rightarrow 1$ quando $x \rightarrow 0$.

□

Corolário 4.1. De acordo com o Lema 4.1, a distância máxima entre os pontos p_1 e p_2 é um.

Demonstração. Segue do Lema 4.2

□

Proposição 4.4. De acordo com o Lema 4.1, $\lim_{z \rightarrow 1^+} p_1(z) = \lim_{z \rightarrow 1^+} p_2(z) = \frac{1}{e}$.

Demonstração. Então,

$$\lim_{z \rightarrow 1^+} z^{\frac{z}{1-z}} = \lim_{z \rightarrow 1^+} e^{\frac{z \ln z}{1-z}} = e^{\lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{z \ln z}{1-z}}.$$

Calculando $\lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{z \ln z}{1 - z}$ encontra-se uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

Usando a regra de L'Hôpital, tem-se

$$\lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{z \ln z}{1 - z} = - \lim_{z \rightarrow 1^+} (\ln z + 1) = -(0 + 1) = -1.$$

Logo, $p_1 = e^{-1} = \frac{1}{e}$, ou seja, $p_1 \rightarrow \frac{1}{e}$ quando $z \rightarrow 1^+$.

Agora, calculando p_2 , tem-se

$$\lim_{z \rightarrow 1^+} z^{\frac{1}{1-z}} = \lim_{z \rightarrow 1^+} e^{\frac{\ln z}{1-z}} = e^{\lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{\ln z}{1-z}}.$$

Calculando $\lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{\ln z}{1 - z}$ encontra-se uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

Utilizando a regra de L'Hôpital, tem-se

$$\lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{\ln z}{1 - z} = \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{z}}{-1} = - \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{1}{z} = -1.$$

Logo, $p_2 = e^{-1} = \frac{1}{e}$, ou seja, $p_2 \rightarrow \frac{1}{e}$ quando $z \rightarrow 1^+$.

□

Conforme já visto na Proposição 4.2, tem-se:

$p_1 = z^{\frac{z}{1-z}}$ e $p_2 = z^{\frac{1}{1-z}}$, sendo $p_1(z)$ decrescente e $p_2(z)$ crescente.

Gráficos:

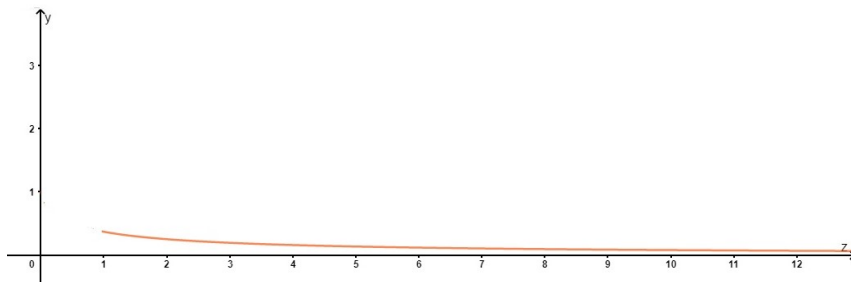


Figura 21 – Gráfico da equação paramétrica $p_1 = z^{\frac{z}{1-z}}$ com $z \in (1, \infty)$.

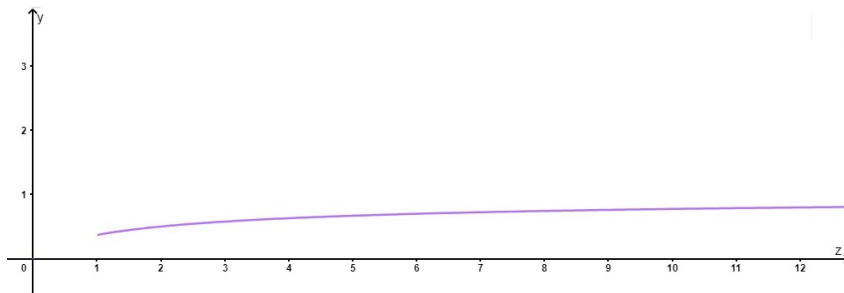


Figura 22 – Gráfico da equação paramétrica $p_2 = z^{\frac{1}{1-z}}$ com $z \in (1, \infty)$.

De acordo com a Proposição 4.4, tem-se o gráfico da Figura 23.

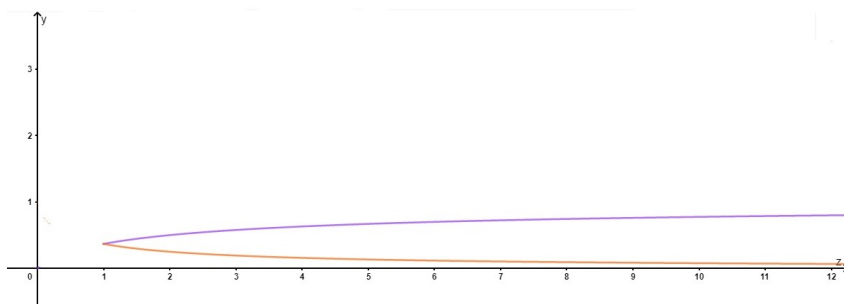


Figura 23 – Gráfico das equações paramétricas $p_1(z)$ e $p_2(z)$.

Teorema 4.1. A função torre de potência infinita $y = f(x) = x^{x^{x^{\dots}}}$ converge se $x \in \left[\frac{1}{e}, e^{\frac{1}{e}} \right]$.

Demonstração. Segue das Proposições 4.1 e 4.3. □

Teorema 4.2. A função torre de potência infinita $y = f(x) = x^{x^{x^{\dots}}}$ converge para um ciclo de período 2 se $x \in \left(0, \frac{1}{e^e}\right)$.

Demonstração. Segue da Proposição 4.2. □

A conclusão é que a função torre de potência infinita converge para a função definida implicitamente pela expressão $y = x^y$ (ou $x = y^{\frac{1}{y}}$) se $x \in \left[\frac{1}{e^e}, e^{\frac{1}{e}}\right]$, assumindo valores $y \in \left[\frac{1}{e}, e\right]$ e cujos valores dos pontos fixos de r estão na tabela a seguir:

Tabela 3 - Intervalos de convergência da função $r(y)$.

Valores de x	Valores dos pontos fixos	Quantidade de pontos fixos	Comportamento assintótico
$x > e^{\frac{1}{e}}$	-	Sem pontos fixos	Diverge para $+\infty$
$x = e^{\frac{1}{e}}$	$y = e$	1 ponto fixo	Converge para o ponto fixo
$1 < x < e^{\frac{1}{e}}$	$1 < y < e$	2 pontos fixos	Convergência instantânea para o ponto fixo
$\frac{1}{e^e} < x < 1$	$\frac{1}{e} < y < 1$	1 ponto fixo	Convergência para o ponto fixo(oscilando)
$x = \frac{1}{e^e}$	$y = \frac{1}{e}$	1 ponto fixo	Convergência para o ponto fixo(oscilando)
$0 < x < \frac{1}{e^e}$	$0 < y_1 < \frac{1}{e} < y_2 < 1$	1 p.f. repulsor+um ciclo-2 est. com 2 valores y_1 e y_2	Convergência para o ciclo-2
$x \rightarrow 0^+$	$y_1 \rightarrow 0$ $y_2 \rightarrow 1$	1 p.f. repulsor + um ciclo-2 estável	Convergência para o ciclo-2
Dados: $\frac{1}{e^e} \approx 0,065988$ $\frac{1}{e} \approx 0,367879$ $e^{\frac{1}{e}} \approx 1,4446678$ $e \approx 2,718281$			

Parte histórica e função de Lambert

Algumas perguntas a respeito da torre de potência infinita podem ser feitas.

Qual a origem dessa função? Em qual operação essa função teve seu início?

Voltando no tempo pode-se chegar até os Axiomas de Peano (Giuseppe Peano-matemático italiano 1858 – 1932). A origem da torre de potência infinita está ligada, de alguma maneira, às operações aritméticas baseadas nos Axiomas de Peano.

Os Axiomas de Peano são

1. Zero é um número.
2. Se a é um número, o seu sucessor $s(a)$ é um número.
3. Zero não é sucessor de nenhum número.
4. Se dois números têm o mesmo sucessor, então eles são iguais.
5. Se um conjunto K contém o zero e também o sucessor de cada número em k , então cada número está em K

A axiomatização padrão dos números naturais é chamada de Axiomas de Peano em sua homenagem. Por meio dos Axiomas, as operações: adição, multiplicação, exponenciação e tetração podem ser definidas. No entanto, a única operação existente nos Axiomas de Peano é a de sucessor. Porém, com essa operação pode-se construir todas as outras: basta iterar a operação anterior. As operações definidas dessa maneira são chamadas de *hiperoperações* e a primeira delas é a operação sucessor que, quando iterada, pode ser utilizada para definir qualquer número natural.

A tetração é o primeiro hiperoperador após a exponenciação. Foi cunhada pelo matemático inglês Rubem Louis Goodstein (1912 – 1985) de tetra(quatro) e iteração.

Logo, pode-se construir uma sequência de operações como mostrado no quadro abaixo:

Operação:	Definição:
Adição	$n + m = s^m(n)$
Multiplicação	$n \cdot m = n + n + \dots + n \}$ m vezes
Exponenciação	$n^m = n \cdot n \cdot n \cdot \dots \cdot n \}$ m vezes
Tetração	${}^m n = n^{n^{n^{\dots}}} \}$ m vezes

Por exemplo,

$${}^5 2 = 2^{2^{2^{2^2}}} = 2^{2^{2^4}} = 2^{2^{16}} = 2^{65536}.$$

Outro matemático a dar uma contribuição para a torre de potência infinita foi o suíço Johann Heinrich Lambert (1728 – 1777). A tetração com altura infinita é utilizada conjuntamente com a função W de Lambert $y = W(x)$ definida como a função inversa de $x = y \cdot e^y$ cuja expressão algébrica é uma função implícita. O resultado dessa função pode ser encontrado pelo *LambertW* no Geogebra. A função W de Lambert é usada para resolver alguns tipos de equações transcendentais.

Exemplo 5.1. Determine x tal que $x \cdot e^x = 2$. Utilizando o Geogebra obtém-se $x = \text{LambertW}(2) = 0.852606$. Logo, $0.852606 \cdot e^{0.852606} \approx 2$.

Proposição 5.1. Os pontos de convergência da torre de potência infinita $y = f(x) = x^{x^{x^{x^{\dots}}}}$ podem ser expressos como

$$y = \frac{W(-\ln x)}{-\ln x}.$$

Demonstração. De fato, como visto no capítulo 1, $y = f(x) = x^{x^{x^{x^{\dots}}}}$. E, então, $y = x^{\left\{x^{x^{x^{\dots}}}\right\}=y}$, ou seja, $y = x^y$. Logo,

$$y = x^y \Rightarrow y = e^{y \cdot \ln x} \Rightarrow y e^{-y \ln x} = 1.$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade por $-\ln x$, tem-se

$$-y \ln x \cdot e^{-y \ln x} = -\ln x.$$

Definindo $W = -y \ln x$ e $Z = -\ln x$,

$$W \cdot e^W = Z.$$

Porém, por definição, isto é a função W de Lambert.

Substituindo de volta W e Z, tem-se

$$-y \ln x \cdot e^{-y \ln x} = -\ln x.$$

Agora, aplicando a função W de Lambert em ambos os lados da igualdade, tem-se

$$W(-y \ln x \cdot e^{-y \ln x}) = W(-\ln x)$$

$$-y \ln x = W(-\ln x).$$

Portanto, $y = \frac{W(-\ln x)}{-\ln x}$ é a forma explícita da função implícita definida por $y = x^y$. \square

Exemplo 5.2. Calcule os pontos fixos quando

- $x = \frac{1}{4}$.

Solução. Usando a fórmula W de Lambert, $y = \frac{W(-\ln x)}{-\ln x}$, tem-se

$$y = \frac{w(-\ln \frac{1}{4})}{-\ln \frac{1}{4}} = \frac{W(\ln 4)}{\ln 4} = \frac{W(2 \ln 2)}{2 \ln 2}.$$

Porém,

$$W(2 \ln 2) = W(\ln 2e^{\ln 2}) = \ln 2.$$

Portanto,

$$y = \frac{\ln 2}{2 \ln 2} = \frac{1}{2}.$$

- $x = \frac{1}{e^e}$.

Solução. Usando a fórmula W de Lambert, tem-se

$$y = \frac{W(-\ln e^{-e})}{-\ln e^{-e}} = \frac{W(e)}{e}.$$

Porém, $W(e) = W(1 \cdot e^1) = 1$.

Portanto, $y = \frac{1}{e}$.

- $x = e^{\frac{1}{e}}$.

Solução. Usando a fórmula W de Lambert, tem-se

$$y = \frac{W(-\ln e^{\frac{1}{e}})}{-\ln e^{\frac{1}{e}}} = \frac{W(-\frac{1}{e})}{-\frac{1}{e}}.$$

Porém,

$$W(-\frac{1}{e}) = W(-1 \cdot e^{-1}) = -1.$$

Portanto, $y = \frac{-1}{-\frac{1}{e}} = e$.

Exemplo 5.3. *Análise da Torre de potência infinita $y = x^{x^{x^{\dots}}}$ para $x = \sqrt{2}$ colocada no início desse trabalho. Para esse valor de x a torre de potência infinita converge e, utilizando a Proposição 5.1 obtém-se,*

Solução. Usando a fórmula W de Lambert, tem-se

$$y = \frac{W(-\ln \sqrt{2})}{-\ln \sqrt{2}} = \frac{W(-\ln 2^{\frac{1}{2}})}{-\ln 2^{\frac{1}{2}}} = \frac{W(-\frac{1}{2} \ln 2)}{-\frac{1}{2} \ln 2} = \frac{W(\frac{1}{2} \ln \frac{1}{2})}{\frac{1}{2} \ln \frac{1}{2}}.$$

Porém,

$$W\left(\frac{1}{2} \ln \frac{1}{2}\right) = W\left(\ln \frac{1}{2} e^{\ln \frac{1}{2}}\right) = \ln \frac{1}{2}.$$

Portanto,

$$y = \frac{\ln \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \ln \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

No restante deste capítulo será comentado sobre a origem e a relação da função W de Lambert com a equação de Euler que será apresentada a seguir e que também pode ser pesquisada em [2]. Por fim, será exibida a expansão em série de potências de W .

A função W de Lambert teve origem no artigo “Observationes variae in mathesin pura” publicado em 1728 pelo matemático suíço Johann Heinrich Lambert.

O artigo “Observationes Analytiques”, publicado em 1772 por Lambert, estudou a equação trinomial $x = q + x^m$ e escreveu a série que expressa não somente uma raiz da equação, mas também as potências dessa raiz. Alguns anos depois, em 1779, Leonhard Euler publicou “De Serie Lambertina Plurimisque eius insignibus proprietaribus” em que investigou trabalhos anteriores de Lambert e ainda pesquisou as soluções de outra equação trinomial, equivalente à estudada por Lambert, que possui a seguinte forma,

$$x^\alpha - x^\beta = v \cdot (\alpha - \beta) \cdot x^{\alpha+\beta}. \quad (5.1)$$

Lema 5.1. *A equação de Lambert $x = q + x^m$ é um caso particular da equação de Euler $x^\alpha - x^\beta = v \cdot (\alpha - \beta) \cdot x^{\alpha+\beta}$.*

Demonstração. A escolha dos parâmetros $\alpha = -m$, $\beta = -1$ e $v \cdot (\alpha - \beta) = q$, conduz a

$$x^{-m} - x^{-1} = v \cdot q \Rightarrow \frac{1}{x^m} - \frac{1}{x} = \frac{v(\alpha - \beta)}{x^{m+1}} = \frac{q}{x^{m+1}}.$$

Logo,

$$x - x^m = q \Rightarrow x = q + x^m.$$

□

Nesse caso, de acordo com a referencia [3], a série utilizada para expressar a solução da equação de Euler é:

$$x^n = 1 + nv + \frac{1}{2}n(n + \alpha + \beta)v^2 + \frac{1}{6}n(n + \alpha + 2\beta)(n + 2\alpha + \beta)v^3 + \\ \frac{1}{24}n(n + \alpha + 3\beta)(n + 2\alpha + 2\beta)(n + 3\alpha + \beta)v^4 + \dots$$

Lema 5.2. *Tomando o limite $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow 1$ na equação de Euler (5.1) obtém-se $\ln x = vx$.*

Demonstração.

$$x^\alpha - x^\beta = v \cdot (\alpha - \beta) \cdot x^{\alpha+\beta}.$$

Isto é,

$$\begin{aligned}\frac{x^\alpha - x^\beta}{\alpha - \beta} &= v \cdot x^{\alpha+\beta} \\ \Rightarrow \frac{x^\alpha \cdot (1 - x^{\beta-\alpha})}{\alpha - \beta} &= v \cdot x^{\alpha+\beta} \\ \Rightarrow \frac{x^\alpha \cdot (x^{\beta-\alpha} - 1)}{\beta - \alpha} &= v \cdot x^{\alpha+\beta}\end{aligned}$$

e tomando o limite $\beta \rightarrow \alpha$, obtém-se $\beta - \alpha \rightarrow \epsilon$ com $\epsilon \rightarrow 0$, desta forma

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{x^\alpha (x^\epsilon - 1)}{\epsilon} &= v \cdot x^{\alpha+\alpha} \\ \Rightarrow x^\alpha \ln x &= vx^{2\alpha}, \text{ pois } \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{x^\epsilon - 1}{\epsilon} = \ln x \\ \Rightarrow \ln x &= vx^\alpha.\end{aligned}$$

Como $\alpha \rightarrow 1$, resulta $\ln x = vx$. □

Lema 5.3. Tomando o limite $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow 1$ e $n \rightarrow 0$ em

$$\begin{aligned}x^n &= 1 + nv + \frac{1}{2}n(n + \alpha + \beta)v^2 + \frac{1}{6}n(n + \alpha + 2\beta)(n + 2\alpha + \beta)v^3 + \\ &\quad \frac{1}{24}n(n + \alpha + 3\beta)(n + 2\alpha + 2\beta)(n + 3\alpha + \beta)v^4 + \dots\end{aligned}$$

obtem-se

$$\ln x = v + \frac{2^1}{2!}v^2 + \frac{3^2}{3!}v^3 + \frac{4^3}{4!}v^4 + \dots$$

Demonstração. Escrevendo

$$\begin{aligned}\frac{x^n - 1}{n} &= v + \frac{1}{2}(n + \alpha + \beta)v^2 + \frac{1}{6}(n + \alpha + 2\beta)(n + 2\alpha + \beta)v^3 + \\ &\quad \frac{1}{24}(n + \alpha + 3\beta)(n + 2\alpha + 2\beta)(n + 3\alpha + \beta)v^4 + \dots\end{aligned}$$

e tomando os limites para $\alpha \rightarrow 1, \beta \rightarrow 1$ e $n \rightarrow 0$, tem-se

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{x^n - 1}{n} = \ln x = v + \frac{2^1}{2!}v^2 + \frac{3^2}{3!}v^3 + \frac{4^3}{4!}v^4 + \dots$$

□

Observação 5.1. De acordo com a referência [2], pode-se ver que $\ln x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^{j-1}}{j!} v^j$ e que essa série converge para $|v| < \frac{1}{e}$.

Pelos Lemas 5.2 e 5.3 pode-se escrever a solução da equação trinomial de Euler do Lema 5.1 de duas maneiras distintas

$$(1) \ln x = vx.$$

$$(2) \ln x = v + \frac{2^1}{2!}v^2 + \frac{3^2}{3!}v^3 + \frac{4^3}{4!}v^4 + \frac{5^4}{5!}v^5 + \frac{6^5}{6!}v^6 + \dots$$

Logo, a solução da equação transcendental $\ln x = vx$ pode ser escrita pela série

$$\ln x = v + \frac{2^1}{2!}v^2 + \frac{3^2}{3!}v^3 + \frac{4^3}{4!}v^4 + \frac{5^4}{5!}v^5 + \frac{6^5}{6!}v^6 + \dots$$

Fazendo a mudança de variável $\ln x = t$ ($x = e^t$) tem-se que $t = ve^t$ cuja solução é

$$t = \ln x = v + \frac{2^1}{2!}v^2 + \frac{3^2}{3!}v^3 + \frac{4^3}{4!}v^4 + \frac{5^4}{5!}v^5 + \frac{6^5}{6!}v^6 + \dots$$

A equação $t = ve^t$ pode ser reescrita como $-te^{-t} = -v$ (basta multiplicar ambos os membros da igualdade por $-e^{-t}$). Usando a definição da função W de Lambert nessa última equação como solução de $we^w = z$ é $w = W(z)$, tem-se

$$-te^{-t} = -v \Rightarrow -t = W(-v).$$

Ou seja,

$$t = -W(-v).$$

Logo, tem-se a seguinte expansão em série

$$-W(-v) = v + v^2 + \frac{3}{2}v^3 + \frac{8}{3}v^4 + \frac{125}{24}v^5 + \frac{54}{5}v^6 + \dots = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^{j-1}}{j!} v^j.$$

Isto é,

$$W(-v) = -v - v^2 - \frac{3}{2}v^3 - \frac{8}{3}v^4 - \frac{125}{24}v^5 - \frac{54}{5}v^6 - \dots = -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^{j-1}}{j!} v^j.$$

Fazendo $-v = z$, tem-se

$$W(z) = z - z^2 + \frac{3}{2}z^3 - \frac{8}{3}z^4 + \frac{125}{24}z^5 - \frac{54}{5}z^6 + \dots = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-j)^{j-1}}{j!} z^j.$$

a qual representa os seis primeiros termos da expansão em série da função W de Lambert.

Considerações Finais

A iteração da função torre de potência infinita $f(x) = x^{x^{x^{\dots}}}$ permitiu que fossem investigadas suas propriedades e algumas delas foram até inesperadas, por exemplo, o fato de a curva exponencial com base maior do que 1 poder ter como resultado um valor finito. Pelo fato dessa função ser calculada com infinitos expoentes, que se acumulam, isso fez com que o resultado tendesse para um valor finito ou infinito. Para desenvolver esse tema foram utilizadas várias ferramentas matemáticas, a saber: conceito de função e função inversa, exponenciais e logaritmos, sequências, pontos fixos de sequências recursivas, limites e derivadas e o diagrama da “teia de aranha”. Além disso foram usadas ferramentas empíricas, como cálculo numérico, tabela do Excel e gráficos de pacotes de software matemático, além do recurso Geogebra. Por fim, pode-se concluir que muitas das propriedades originárias da Torre de potência infinita e sua convergência (ou não), para valores positivos, restou demonstrada.

Em síntese, o mais relevante no estudo da função torre de potência infinita é que, para um intervalo de valores positivos, ela converge e, para outros intervalos, também de valores positivos, ela irá divergir.

Referências

- [1] Robert M Corless, Gaston H Gonnet, David EG Hare, David J Jeffrey, and Donald E Knuth. On the lambert w function. *Advances in computational mathematics*, 5(1):329–359, 1996. Citado na página 14.
- [2] Leonhard Euler. De serie lambertine plurimisque eius insignibus proprietatibus. *Acta Academiae scientiarum imperialis petropolitanae*, pages 29–51, 1783. Citado 3 vezes nas páginas 14, 61 e 63.
- [3] Helmut Länger. An elementary proof of the convergence of iterated exponentials. *Elemente der mathematik*, 51(2):75–77, 1996. Citado na página 61.
- [4] Peter Lynch. The power tower function. *School of Mathematical Sciences, UCD, Dublin*, 2013. Citado na página 14.
- [5] James Stewart. Cálculo, volume I. 7a. edição. *São Paulo: Cengage Learning*, 2013. Citado na página 29.