UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CAMPUS FLORIANÓPOLIS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL-PROFMAT

Jéssica de Aguiar França

PROPOSTA PARA O ENSINO DE FUNÇÕES USANDO A FERRAMENTA DIGITAL DESMOS

Florianópolis

2022

Jéssica de Aguiar França

PROPOSTA PARA O ENSINO DE FUNÇÕES USANDO A FERRAMENTA DIGITAL DESMOS

Dissertação submetido ao Programa de Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática. Com área de concentração no Ensino de Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Douglas Soares Gonçalves

Florianópolis

2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

França, Jéssica de Aguiar
Proposta para o ensino de funções usando a ferramenta digital Desmos / Jéssica de Aguiar França ; orientador, Douglas Soares Gonçalves, 2022.
168 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Florianópolis, 2022.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. Funções. 3. Ensino de Funções. 4. Desmos. 5. Sequência Didática. I. Gonçalves, Douglas Soares . II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

Jéssica de Aguiar França

PROPOSTA PARA O ENSINO DE FUNÇÕES USANDO A FERRAMENTA DIGITAL DESMOS

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Profa. Dra. Maria Inez Cardoso Gonçalves
Universidade Federal de Santa Catarina - Campus Trindade

Prof. Dr. Mauro Luiz Rabelo
Universidade de Brasília - Campus Darcy Ribeiro

Prof. Dr. Jorge Cássio Costa Nóbriga
Universidade Federal de Santa Catarina - Campus Blumenau

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em Matemática.

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Maria Inez Cardoso Goncalves
Data: 26/08/2022 07:52:04-0300
CPF: 908.897.119-68
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Profª. Drª. Maria Inez Cardoso Gonçalves
Coordenadora do Programa

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Douglas Soares Goncalves
Data: 26/08/2022 08:57:34-0300
CPF: 290.566.318-96
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Dr. Douglas Soares Gonçalves
Orientador

Florianópolis, 26 de agosto 2022.

Este trabalho é dedicado aos meus alunos,
ex-alunos e futuros alunos.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Douglas Gonçalves, agradeço pela oportunidade, orientação e confiança.

Ao Professor Celso Doria, pelas ideias e sugestões.

À UFSC e o programa do PROFMAT, em especial à Coordenadora Maria Inez Cardoso Gonçalves, pela oportunidade e pela experiência. Aos demais docentes do programa, pelas aulas e o apoio em tempos tão difíceis vividos durante a pandemia por COVID-19. Aos colegas de turma pela cumplicidade e apoio, sempre dividindo as dificuldades e as risadas.

Ao IFSC, campus Itajaí, pelo apoio à minha qualificação, e em especial aos meus colegas da Matemática e ao João Carlos Pozzobon, por tornarem possível que eu completasse esse Mestrado.

Aos meus alunos por me motivarem a buscar sempre novas formas de ensinar e aprender.

A todos os amados professores que me ajudam a trilhar meu caminho até esse mestrado, obrigada por todos os ensinamentos e pela inspiração pela carreira docente.

E finalmente, à minha família, pois sem eles eu não estaria aqui.

RESUMO

O ensino de funções na educação básica pode ser considerado um desafio pedagógico, por ser um conceito que depende de uma rede complexa de outros conceitos matemáticos, como variável, plano cartesiano e taxa de variação, bem como ser um tópico que integra diferentes subáreas da matemática. Desde que o tópico de funções foi incluído na educação básica, em 1931, o ensino de funções permaneceu no currículo brasileiro, sendo até hoje considerado uma ideia central para o ensino de matemática. Ainda assim, dificuldades no processo de ensino aprendizagem de funções são inúmeras, abrangendo desde desentendimento da notação matemática a dificuldades de compreensão das diferentes representações de funções. Dessa forma, este trabalho foi desenvolvido visando criar uma sequência didática, utilizando a tecnologia de forma integrada, que possibilite ao aluno adquirir uma compreensão ampla e profunda de funções, sendo capaz de modelar situações-problema, interpretar funções em diferentes contextos, traduzir entre as diferentes representações de funções e materializar o conceito de funções como objeto matemático. Para isso, foi realizada uma revisão bibliográfica sobre o processo de ensino-aprendizagem de funções, e desenvolvidos dois produtos educacionais: um guia de utilização dos recursos disponibilizados pela *Desmos*, incluindo sua calculadora gráfica e as Atividades para sala de aula, e uma sequência didática para o ensino de funções para alunos de ensino médio. A sequência didática proposta aqui se inicia apresentando situações problemas relacionadas ao cotidiano dos estudantes de forma a promover um entendimento do conceito de variáveis e relação funcional a partir das noções intuitivas já presentes nos estudantes. É proposto um foco maior nos aspectos qualitativos do pensamento funcional e uma ênfase ao uso simultâneo das diferentes representações de funções: verbal, gráfica, numérica e algébrica. A seguir, os alunos são levados a explorar a influência dos parâmetros nas funções de diferentes famílias de forma dinâmica e autoguiada, com o uso das ferramentas da plataforma *Desmos*. Os estudantes têm a oportunidade de desenvolver a capacidade de planejar e executar translações, transformações e limitações de domínio e imagem em funções em suas diversas representações.
Palavras-chave: Funções. Ensino de funções. Desmos. Sequência didática.

ABSTRACT

The teaching of functions in secondary education can be considered a pedagogical challenge, as it is a concept that depends on a complex network of other mathematical concepts such as variable, cartesian plane and rate of change, as well as being a topic that integrates different subareas of mathematics. Since the topic of functions was included in Brazilian secondary education in 1931, the teaching of functions has remained in the curriculum and is still considered a central idea for the teaching of mathematics. Even so, difficulties in the teaching-learning process of functions are numerous, ranging from lack of understanding mathematical notation to difficulties in working with the different representations of functions. Thus, this work was developed to create a didactic sequence, using technology in an integrated way, allowing students to acquire a broad and deep understanding of functions, so that they are able to model real-life scenarios, interpret functions in different contexts, translate between different representations of functions and reify the concept of function as a mathematical object. Hence, a bibliographic review was carried out on the teaching-learning process of functions, and two educational products were developed: a guide for using *Desmos* resources, including its graphing calculator and its classroom activities, and a didactic sequence for teaching functions to high school students. The didactic sequence proposed here begins by presenting situations related to the students' daily lives in order to promote an understanding of the concept of variables and functional relationships out of the intuitive notions students already have. Greater focus is given to the qualitative aspects of functional thinking and to the simultaneous use of different representations of functions: verbal, graphic, numerical, and algebraic. After working on different scenarios, students are led to explore the influence of parameters on the functions of different families in a dynamic and self-guided way, using the resources available at *Desmos*. Students have the opportunity to develop the ability to plan and execute transformations and domain and range restrictions in functions in their various representations.
Keywords: Functions. Teaching of functions. Desmos. Didatic sequence.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O conceito de função é considerado um dos mais importantes na matemática escolar, em parte por ser um elo unificador de diferentes áreas da matemática, uma vez que o ensino de funções pressupõe o conhecimento de conceitos de álgebra, geometria, aritmética e teoria dos conjuntos, por exemplo (PONTE, 1992; BRAGA, 2003; MICHELSEN, 2006; CARRAHER; SCHLIEMANN, 2016; ROLFES; ROTH; SCHNOTZ, 2018). O chamado pensamento funcional, termo que surgiu no começo do século XX com o matemático Felix Klein (KRUGER, 2019; BRAGA, 2003), se refere à capacidade do aluno de compreender os diferentes aspectos envolvidos no conceito de função e de lidar com as diferentes representações deste objeto matemático (LICHTI; ROTH, 2019). Esta habilidade é hoje considerada chave no processo de ensino-aprendizagem da matemática escolar, embora nem sempre utilizando esse termo. A nova Base Nacional Comum Curricular (BNCC[1]) inclui, já nos anos iniciais do ensino fundamental, ideias de equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade, visando o desenvolvimento de pensamento funcional, embora cite apenas um conceito mais amplo, de pensamento algébrico.

No ensino, promover o pensamento funcional é instigar os alunos a perceberem a variação de diferentes grandezas em contextos diversos e a relação mútua de dependência entre essas grandezas, de forma que consigam compreender o conceito de variável e se acostumem a observar as mudanças nas variáveis em suas diferentes representações. Assim, o desenvolvimento do pensamento funcional perpassa diferentes aspectos do conceito de função, principalmente aspectos de correspondência e covariação, e a materialização de função como um objeto matemático. Tais aspectos podem ainda ser pensados do ponto de vista qualitativo e do ponto de vista quantitativo, de forma que o pleno domínio do conceito de função seja um caminho cheio de obstáculos para os alunos do ensino básico.

Em sua revisão bibliográfica sobre o ensino e aprendizagem do conceito de função, Ardengui (2008) encontrou diversas dificuldades dos alunos levantadas por pesquisas anteriores, entre as quais podemos citar: reconhecer funções na ausência de uma representação algébrica da lei de formação, distinguir as noções de função e equação, dominar a simbologia da representação algébrica, diferenciar domínio e contradomínio, traduzir entre a representação algébrica e a gráfica, compreender funções não contínuas como funções, trabalhar com conjuntos discretos, perceber quando a ideia de proporção deve ou não ser utilizada na resolução de problemas, interpretar funções apresentadas na linguagem natural e construir gráficos sem utilizar uma tabela de valores. Muitas dessas dificuldades

[1]A BNCC pode ser consultada em `http://basenacionalcomum.mec.gov.br/`

enfrentadas pelos discentes pode ser relacionada também ao processo histórico de desenvolvimento de funções, no qual se vê, por exemplo, que por muitos anos a definição de função era indissociável de uma aplicação à física ou de sua expressão analítica (YOUSCHKEVITCH, 1976; MEDVEDEV, 1991; PONTE, 1992). Tal paralelo justificaria uma linha de ensino que hoje, assim como à época de Klein, prioriza o ensino de funções primeiro de um ponto de vista informal e aplicado, gradualmente aumentando o grau de formalização da definição do conceito de função.

Essas dificuldades enfrentadas pelos alunos na materialização do conceito de função não são novas, e as pesquisas em ensino de funções, embora sejam numerosas, não apontam um consenso ou uma solução para tais problemas (NEVES; RESENDE, 2016). Ponte (1992) já relatava que os alunos chegam ao Ensino Médio com muitas dificuldades no pensamento abstrato, necessário para a aprendizagem de funções. Além da existência de diversas representações, que por si só já dificultam a materialização de um conceito único e completo de funções, segundo Watson e Harel (2013, p.166):

> Pensar sobre funções como um processo dinâmico de entrada e saída é abstrato e esperadamente difícil, porque o aluno precisa lidar simultaneamente com três objetos, a *entrada* (por exemplo, *tempo*), a *saída* (por exemplo, *distância*) e a *regra de dependência* (por exemplo, uma fórmula) que os conecta. O aluno precisa pensar na entrada e na saída em termos gerais: para *qualquer* valor de entrada a regra de dependência determina sua saída correspondente. (*Tradução nossa, grifo dos autores*)

Dessa forma, alguns alunos relatam que uma função tem "muitas partes" para ser entendida como um objeto matemático único (THOMPSON, 1985). Ainda assim, para compreender plenamente o conceito de função, é necessário que os alunos sejam capazes de pensar em funções não só como um processo, mas também como um objeto matemático com o qual é possível operar (SFARD, 2009). A matemática, segundo Sfard e Linchevsk (1994), é uma estrutura multiníveis na qual o mesmo conceito matemático é visto de diferentes perspectivas quando observado de diferentes níveis, de forma que o que é concebido como processo em um nível passa a ser manipulado como objeto em um nível seguinte. Assim, quando a função passa a ser vista como um objeto, torna-se possível associar a ela características como periodicidade ou monotonicidade, bem como torna-se possível utilizar a função como objeto de outros processos, como a diferenciação e a integração (GÜNSTER; WEIGAND, 2020). Assim, embora a concepção de função como um processo anteceda a concepção objeto, essa materialização do conceito de função é fundamental para o estudo de tópicos como translações e transformações em funções e para o cálculo diferencial e integral. Não obstante, esse salto da visão processo para a visão objeto é difícil de ser atingido.

Ambientes computacionais podem ser úteis para o ensino-aprendizagem de funções, uma vez que possibilitam a visualização das funções simultaneamente em suas representações algébrica, tabular e gráfica, bem como permitem a manipulação deste objeto matemático de forma a alterar todas as representações simultaneamente. Dessa forma, ambientes computacionais teriam o potencial de auxiliar os alunos a passarem da concepção processo para a concepção objeto de função, uma vez que nestes ambientes, a função é um objeto a ser manipulado.

A integração de tecnologias à sala de aula propicia a análise de um número maior de gráficos pelo aluno, bem como uma análise mais precisa das características dos gráficos, além de possibilitar uma ênfase maior em aspectos globais e qualitativos do gráfico, ao invés da ênfase comum em aspectos mais locais e quantitativos (LEINHARDT; ZASLAVSKY; STEIN, 1990). Segundo Alves (2018), o uso de *softwares* educativos no ensino de funções auxilia na compreensão da parte algébrica das funções, além de tornar o ambiente de ensino mais dinâmico, atrativo e visual, e garantir ao estudante o protagonismo no seu processo de aprendizado. Tal protagonismo é possibilitado pela facilidade de criar conjecturas e explorá-las inicialmente em ambientes computacionais de forma rápida, ampliando a capacidade discente de experimentar com a matemática, investigar padrões e generalizar os resultados obtidos. Segundo Hegedus et al. (2017, p.31), "a tecnologia assume grande parte dos cálculos repetitivos (...) e deixa mais tempo para habilidades matemáticas essenciais, como por exemplo interpretar, refletir, argumentar e modelar."(*Tradução nossa*)

Agora, para a implementação de um *software* no contexto das aulas de matemática, o ideal é que a tecnologia tenha implementação prática, de baixo custo e acessível, de forma que para interagir com as atividades o aluno não precise de conhecimento específico sobre o *software* utilizado (HOFFKAMP, 2009). Nesse contexto, o uso da ferramenta digital *Desmos* nas aulas de matemática do Ensino Médio é exemplar pois demanda dos alunos apenas experiência prévia em navegar na internet, sem a necessidade de se familiarizar com o *software* antes de iniciar as atividades propostas. *Desmos* é uma ferramenta digital gratuita que possui, entre outros produtos, uma calculadora gráfica (`https://www.desmos.com/calculator`) e um ambiente para professores criarem atividades e atribuírem atividades para turmas de alunos (`https://teacher.desmos.com/`), ambos disponíveis em português. Há um banco de gráficos e atividades editáveis disponibilizadas na própria plataforma, e cursos e treinamentos para o profissional que deseja aprender a usar a ferramenta na sala de aula. Uma das grandes vantagens do uso do *Desmos* em sala de aula é que os comandos são intuitivos e o aluno e professor conseguem utilizar a ferramenta sem necessidade de um treinamento específico, utilizando os mesmos comandos na versão online e no aplicativo. A calculadora gráfica *Desmos* tem menos funcionalidades que outros *softwares* utilizados no ensino de matemática, como o Geogebra, por exemplo, em parte porque, segundo a empresa, eles priorizam "a confiabilidade e a usabilidade, mesmo em detrimento da velocidade de desenvolvimento" (DESMOS, INC., 2022). Ainda assim, a *Desmos* permite modificações para atender necessidades específicas como alunos com deficiência visual, pode ser utilizado de forma individual, em pequenos ou grandes grupos, em computadores, celulares e *tablets*, com a opção de instalação de aplicativo ou uso direto no navegador.

Atualmente, há poucos trabalhos acadêmicos publicados em português sobre a *Desmos* e sua utilização em sala de aula. Euzebio (2018) apresentou uma dissertação com uma proposta de ensino de geometria analítica para o Ensino Médio, mas utiliza apenas a calculadora gráfica, não a ferramenta de atividades em sala de aula. No mesmo ano, Abreu (2018) defendeu uma dissertação em que analisa diferentes aplicativos para o ensino de matemática disponíveis para celulares, encontrando no aplicativo *Desmos* potencialidades que o distinguiam dos demais aplicativos investigados, e propõe uma série de atividades para o ensino de funções de segundo grau no Ensino Médio utilizando o aplicativo *Desmos*. Marinho (2015) e Bandeira (2015) exploraram o uso do Geogebra e da calculadora gráfica *Desmos* no ensino de funções afim e quadrática, respectivamente, com alunos do ensino fundamental e médio. Mais recentemente, Costa (2021) propôs um livreto digital com seis atividades para o ensino de função de primeiro grau utilizando a calculadora gráfica *Desmos* e a plataforma *APP Inventor*. No ensino superior, Scremin (2017) e Scremin (2019) utilizaram atividades na calculadora gráfica *Desmos* para o estudo de derivadas e taxas de variação. Sobre a plataforma de atividades em sala de aula disponibilizadas pela ferramenta digital *Desmos*, Silva (2020) e Pelegrino (2020) propõe uma atividade para um grupo de professores de matemática para avaliar a percepção desses docentes quanto a aplicabilidade da atividade em sala de aula para trabalhar respectivamente os conteúdos de sinal e de máximo de uma função.

Maciel e Cardoso (2014, p.1351) criticou a forma como o ensino de funções é feito no Brasil:

> O atual processo de ensino-aprendizagem de função remete a associações superficiais e limitadas do conceito. Para professores e alunos, é consolidado, quase que de imediato, que o termo função é indissociável de seus tipos: função afim, função quadrática, função exponencial, função logarítmica, etc. Dessa forma, observa-se uma apropriação utilitarista e prática da Matemática para aplicação de operações e obtenção de resultados. No entanto, o conceito é preterido e o ganho intelectual potencial desse aprendizado e as possibilidades de extrapolar esses conhecimentos no cotidiano são cerceados.

Os poucos trabalhos ´publicados utilizando a ferramenta digital *Desmos* corroboram tal crítica, uma vez que o ensino do conceito de função segmentado em classes de funções ainda se mantém visível mesmo nos trabalhos recentes.

O presente trabalho tem como objetivo geral propor dois produtos educacionais: um guia de utilização da plataforma Atividades de Sala de Aula da *Desmos* e uma sequência didática para o ensino de funções para alunos do Ensino Médio. Para tanto, os objetivos específicos foram os seguintes: Estudar teorias que tratam do ensino de funções; Explorar o uso e as possibilidades da ferramenta digital *Desmos*; Identificar as possíveis contribuições da ferramenta digital *Desmos* para o ensino de funções; Elaborar atividades para o ensino de funções utilizando a ferramenta digital *Desmos*.

O guia das Atividades de Sala de Aula da *Desmos* inclui uma descrição de como utilizar a Calculadora Gráfica e um passo a passo de como criar uma atividade na plataforma, além de descrever as possibilidades de uso dos diferentes recursos disponíveis. A sequência didática se inicia com a introdução de funções em contextos aplicados e gradualmente formaliza esse conceito, utilizando a calculadora gráfica *Desmos* e suas *Atividades em sala de aula* para possibilitar um processo de ensino-aprendizagem mais visual, experimental e crítico. Este trabalho se diferencia por apresentar uma sequência didática para o ensino de funções, dissociando esse conceito aos tipos (famílias) de funções, e por propor o uso da ferramenta Atividades em sala de aula da Desmos de forma integrada às aulas, sem utilizar a tecnologia para apenas uma atividade isolada.

O Capítulo 2 apresenta o desenvolvimento histórico do conceito de funções e da inclusão de funções no ensino básico no Brasil, finalizando com uma revisão bibliográfica do percurso discente para a aprendizagem de funções, pontuando conceitos que os alunos em geral têm dificuldade neste percurso. O Capítulo 3 é destinado a um guia para a utilização da ferramenta digital *Desmos*, incluindo o uso das ferramentas para professores e um passo a passo para a construção de uma atividade na plataforma. No Capítulo 4 é proposta a sequência didática fruto deste trabalho, explicitando os conteúdos abordados, os objetivos didáticos e as atividades a serem desenvolvidas ao longo das 10 aulas propostas. As considerações finais são apresentadas no Capítulo 5.

2 PRESSUPOSTOS TEÓRICOS PARA A ELABORAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

O presente capítulo visa descrever o desenvolvimento histórico do conceito de função, como o conceito de função se inseriu na educação básica brasileira e o que a literatura traz sobre o processo de aprendizagem de funções. O desenvolvimento do conceito histórico de função é abordado para mostrar a evolução do conceito de função, inicialmente enraizado em aplicações físicas e sendo gradualmente formalizado para chegar a definição atual de função. De forma semelhante, a sequência didática apresentada no Capítulo 4, parte também de aplicações de funções a situações do cotidiano do aluno e gradualmente formaliza e generaliza o conceito de funções, apresentando exemplos que buscam explorar diferentes aspectos da definição de função, de forma que o aluno consiga desvincular a noção de função de sua aplicação física ou de sua representação analítica ou gráfica.

A descrição do histórico do conceito de funções no Ensino Médio brasileiro visa ressaltar a importância do tópico como um elo unificador da matemática escolar e ao mesmo tempo, trazer uma visão crítica aos aspectos de função que são abordados na sala de aula e o nível de formalismo necessário no Ensino Médio.

A discussão sobre o processo de ensino-aprendizagem de função visa trazer a tona os desafios que os estudantes podem enfrentar na compreensão do conceito de função, muitas vezes não percebidos de forma consciente pelo professor. Espera-se que a exposição dos diferentes aspectos que o estudante deve compreender para que materialize o conceito de função oriente a prática docente, e que assim o professor aborde de forma explícita dificuldades que os alunos podem apresentar neste percurso, facilitando a comunicação professor-aluno.

2.1 DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO DO CONCEITO DE FUNÇÃO

A definição moderna é que uma *função* f de um conjunto A em um conjunto B é uma relação que a cada elemento $x \in A$ associa um único elemento $f(x)$ em B. $f(x)$ é chamado o valor de f no elemento x. O conjunto A é chamado de o *domínio* da função f, e o conjunto B é chamado o *contradomínio*. Esta definição é atribuída historicamente a Johann Dirichlet (1805-1859) e a Nikolai Lobachevsky (1792-1856), para os quais o domínio e contradomínio ainda era limitado aos números reais, e posteriormente foi formalizada e ampliada pelo coletivo Bourbaki para abranger quaisquer conjuntos, numéricos ou não (KLEINER, 1989). Dessa forma, tal definição é hoje conhecida como definição de Dirichlet-Lobachevsky ou Dirichlet-Bourbaki.

Essa definição de função data do século XIX e, embora algumas ideias que permeiam o conceito de função datem de épocas muito anteriores, ao longo da história existiram várias definições de função, que foram se tornando cada vez abrangentes. Enquanto a definição moderna de função foca na relação entre dois conjuntos (numéricos ou não), historicamente as funções surgiram como uma ferramenta para modelar fenômenos naturais e estudar a relação entre a variação de diferentes grandezas (estritamente numéricas). Espera-se que a compreensão da evolução do conceito de função da antiguidade até a definição moderna evidencie a importância de abordar, durante o processo de ensino, os diferentes aspectos inerentes ao conceito de função e sirva para guiar os alunos de uma visão mais aplicada para um entendimento mais formal de funções.

Na antiguidade, eram estudados casos particulares de relações de dependência, sem generalização das ideias e propriedades de funções, enquanto na idade média houve a evolução da generalização de noções de funções e de representações gráficas e aplicações à mecânica (YOUSCHKEVITCH, 1976). Embora não utilizassem fórmulas analíticas para representar as funções, outras representações como descrição verbal, tabelas e gráficos já eram amplamente usadas, estudadas e desenvolvidas na Grécia Antiga e na Babilônia (MEDVEDEV, 1991, p.30).

Al-Biruni (973-1048), matemático Persa, além de ter estudado diversas relações de dependência entre grandezass utilizando tabelas e descrições verbais, parece ter sido o primeiro matemático a estudar questões de generalização entre as diferentes funções, chegando a caracterizar seus domínios, determinar seus extremos e estudar interpolações lineares e quadráticas (MEDVEDEV, 1991, p.31). Na Europa medieval, matemáticos como Orésme (1325-1382) têm os primeiros registros explícitos do uso do conceito de função para o estudo das leis naturais do mundo físico (MEDVEDEV, 1991, p.31).

O avanço do estudo de funções, à época pensado como estudos quantitativos de fenômenos naturais utilizando a matemática como ferramenta, realizados principalmente por Galileu (1564-1642) e Kepler (1571-1630), foi viabilizado pela introdução da notação algébrica moderna por Viète (1540-1603) e da geometria analítica por Descartes (1596-1650) e Fermat (1601-1665) (PONTE, 1992), bem como pelo início do estudo de séries de potência e do cálculo diferencial e integral no século XVII (MEDVEDEV, 1991, p.34).

A introdução de símbolos para operações e relações, bem como o uso de letras do alfabeto para representar grandezas e parâmetros, permitiu pela primeira vez escrever no papel equações algébricas e expressões contendo incógnitas utilizando símbolos matemáticos, ainda que de forma rudimentar (YOUSCHKEVITCH, 1976). Os estudos de ciências naturais abandonaram a forma retórica típica da idade média, e trilharam um caminho para o desenvolvimento da noção formal de função (PONTE, 1992). É nessa época que surgem leis físicas expressas na forma de equações mostrando uma relação de dependência entre diferentes grandezas (MEDVEDEV, 1991, p.32). O método analítico de introdução de funções utilizando fórmulas e equações passou a dominar, devido à praticidade que advém dessa representação (YOUSCHKEVITCH, 1976).

Descartes e Fermat, ao aplicarem essa nova notação à geometria, foram os primeiros matemáticos a afirmarem que uma curva poderia ser representada por uma equação que indicava uma relação de dependência entre duas variáveis (YOUSCHKEVITCH, 1976). Descartes, ademais, foi fundamental para o desenvolvimento da notação algébrica de uma função, ao tentar reduzir a solução de equações algébricas a uma série de procedimentos e algoritmos. Ele foi o primeiro a afirmar claramente que uma equação em duas variáveis é uma forma de representar uma dependência entre grandezas variáveis de forma a possibilitar o cálculo do valor de uma quando dado o valor da outra (YOUSCHKEVITCH, 1976).

O termo *função* foi introduzido por Leibniz (1646-1716) em 1673, no mesmo momento em que o matemático introduziu os termos variável, constante, coordenadas e parâmetro (PONTE, 1992). Newton (1643-1727) foi, historicamente, peça fundamental para a representação algébrica explícita da função ganhar destaque sobre sua representação geométrica e sobre sua representação algébrica implícita, mais comuns anteriormente (MEDVEDEV, 1991, p.36). Leibniz e Newton desenvolveram o cálculo infinitesimal e, para tanto, utilizavam funções, sempre com características mecânicas ou geométricas associadas (YOUSCHKEVITCH, 1976). Com o crescente estudo de relacionamentos entre grandezas, o termo função foi cada vez mais sendo utilizado por matemáticos como Leibniz e Johann Bernoulli (1667-1748) ao final do século XVII (PONTE, 1992), embora o termo "função" não constituía ainda uma teoria matemática (BARALDO, 2009, p.13), e seu sentido à época variava entre os matemáticos, sendo o uso de Bernoulli, por exemplo, mais próximo da definição atual que o de Leibniz (MEDVEDEV, 1991, p.40).

A definição de Bernoulli[1] foi a primeira definição formal de função (KLEINER, 1989). Mais tarde modificada por seu aluno Euler (1707-1793), esta definição vincula a noção de função indiretamente a uma expressão analítica, e assim permaneceu durante todo o século XVIII e parte do século XIX (YOUSCHKEVITCH, 1976). Tal limitação é compreensível, uma vez que todas as funções conhecidas à época eram enraizadas em aplicações físicas e podiam ser representadas por séries de Taylor (MEDVEDEV, 1991, p.42). À época, Bernoulli propôs uma notação utilizando φx para representar uma função, sendo

[1]"Aqui chamaremos de Função de uma variável uma grandeza composta de qualquer maneira por esta variável e por constantes" (*Tradução nossa*) (RÜTHING, 1984 apud KLEINER, 1989)

a notação atual $f(x)$ introduzida por Euler em 1734 (YOUSCHKEVITCH, 1976).

Devido a uma grande controvérsia sobre o problema da corda vibrante[2] e quais formatos iniciais poderiam ser aplicadas à corda, Euler, e por consequência, toda a comunidade matemática da época, se viram compelidos a revisar sua noção de função, até agora limitada a funções analíticas (no sentido atual)[3]. Assim, em 1755, Euler publicou uma definição de função mais ampla[4], na qual inexiste a necessidade da relação de dependência ser dada por uma expressão analítica (KLEINER, 1989). Tal noção não foi aceita de imediato, mas há registros de interpretações semelhantes por matemáticos como Fourier (1768-1830) e Condorcet (1743-1794) (MEDVEDEV, 1991, 48-49).

No início o século XVIII, os matemáticos acreditavam que se duas expressões analíticas tinham o mesmo valor em um intervalo, então elas eram iguais em todos os pontos. Foi com a definição mais ampla de Euler que surgiu uma maior preocupação com a descrição do domínio e a imagem de uma função, e o estudo de funções foi separado do estudo de curvas geométricas (KLEINER, 1989).

Em 1810, Lacroix (1765-1843) publica seu tratado *Théorie des fonctions analytiques*, onde define funções de forma semelhante a Euler, embora sem citá-lo, identificando que qualquer grandeza cujo valor depende de uma ou de várias outras grandezas é uma função, independente se as operações para obtê-la são conhecidas ou não (YOUSCHKEVITCH, 1976). Como o tratado de Lacroix foi amplamente difundido e conhecido, ele contribuiu fortemente para aceitação dessa definição de função. Assim, parece não haver dúvida de que Euler, Condorcet, Lacroix e Fourier tinham uma definição de função equivalente ao que é considerada a definição de Dirichlet-Lobachevsky (MEDVEDEV, 1991, p.50). Não obstante, historicamente, a separação da noção de função de sua representação algébrica é atribuída a Dirichlet e Lobachevsky, pois o trabalho de Dirichlet apresenta o primeiro exemplo explícito de uma função[5] que não era dada por meio de uma ou mais expressões analíticas, não poderia ser representada como uma curva no plano, era descontínua em todos os pontos de seu domínio e assim realmente ilustrava o significado de "arbitrário"(KLEINER, 1989). Embora as definições de matemáticos anteriores a de

[2]Uma corda elástica com extremidades fixas é flexionada em uma posição inicial e então solta para que vibre. O problema consiste em determinar a função que descreve o formato da corda a cada instante.

[3]Para D'Alembert (1717-1783), apenas funções representadas por expressões analíticas poderiam ser usadas como formato inicial para a corda. Para Euler, a função poderia ser dada por diferentes expressões analíticas em diferentes intervalos entre as extremidades, ou até por uma curva desenhada a mão livre, sem necessariamente ser possível representá-la por uma ou mais expressões analíticas (KLEINER, 1989)

[4]"Se uma ou mais grandezas dependem de outra grandeza de forma que a variação da última resulta em uma variação das grandezas iniciais, então essas grandezas iniciais são chamadas de funções desta outra grandeza. Essa denominação é de natureza ampla e abrange qualquer meio pelo qual uma grandeza pode ser determinada por outra." (*Tradução nossa do inglês disponível em Youschkevitch (1976)*)

[5]A chamada *função de Dirichlet*, que atribui o valor 1 aos valores racionais de x e 0 aos valores irracionais de x.

Dirichlet trouxessem a ideia de correspondência arbitrária entre as variáveis, elas eram aplicadas apenas a funções analíticas e contínuas, e portanto, não é possível avaliar se funções diferentes destas, como funções descontínuas em todos os pontos e outras que foram sendo introduzidas apenas no século XIX, seriam consideradas funções para estes matemáticos (MEDVEDEV, 1991, p.50-55).

No século XIX o conceito de funções é novamente expandido e passa a incluir formalmente números complexos e vetores tanto no domínio quanto como imagem, assim como são estudadas mais a fundo funções reais de várias variáveis reais (MEDVEDEV, 1991, p.63-64). Procedeu-se também a classificação de funções de acordo com diferentes propriedades - continuidade, diferenciabilidade, integrabilidade, entre outras - que foram sendo melhor definidas e estudadas (MEDVEDEV, 1991, p.65-66). Com o desenvolvimento da teoria de conjuntos iniciada por Cantor (1845-1918) e Dedekind (1831-1916), a noção de função foi generalizada para uma correspondência entre quaisquer dois conjuntos, sejam eles numéricos ou não (PONTE, 1992), tendo Dedekind inclusive exemplificado como transformação (seu termo para função) o ato de nomear objetos (MEDVEDEV, 1991, p.71). Peano (1858-1932), em 1911, propôs uma definição de função utilizando o termo conjunto, na qual diminui o número de termos indefinidos e elimina a lógica cíclica presente nas definições de Cantor e Dedekind (MEDVEDEV, 1991, p.70).

Com o advento da lógica matemática, matemáticos como Frege (1848-1925), Schröder (1841-1902) e Russel (1872-1970) publicaram definições de função nas quais se preocupavam mais claramente com quais conceitos fundamentais não eram definidos. Para Frege, tal conceito era a própria noção de função, para Schröder, a noção de relação, já Russel parte da noção de função proposicional (MEDVEDEV, 1991, 72-73). Com essas mudanças, as funções passaram a deixar de ser indissociáveis de sua representação geométrica, de sua expressão analítica e de sua aplicação física, passando a existir plenamente como um objeto matemático. Não obstante, o nível de formalismo da definição a ser utilizada no ensino vai depender do nível de ensino e o uso que será dado ao conceito.

2.2 HISTÓRICO DO ENSINO DE FUNÇÕES NA EDUCAÇÃO BÁSICA

O estudo de funções na disciplina de matemática na educação básica no Brasil é um legado do matemático Felix Klein (1849–1925) e seu envolvimento na reforma curricular na Prússia (pertencente ao império Alemão) no início do século XX. Klein, além de um exímio matemático, era também muito interessado no ensino de matemática, muito respeitado na comunidade matemática internacional e tinha uma grande capacidade política (BRAGA, 2003). A reforma curricular proposta por Klein, conhecida como *Meraner*

Lehrplan, tinha como lema "educação para o pensamento funcional" e objetivava diminuir o vão existente entre a educação básica e as universidades em relação à educação matemática, principalmente devido à heterogeneidade do currículo da educação básica (KRUGER, 2019; BRAGA, 2003). Para isso, o conceito de função foi escolhido como a ideia central de unificação da matemática escolar, uma vez que o ensino de funções engloba a aritmética, a geometria e a álgebra (KRUGER, 2019) e possibilita o objetivo fim de preparar os alunos para o estudo do cálculo infinitesimal (BRAGA, 2003). Ainda hoje o conceito de função é visto como uma ideia fundamental da matemática moderna, que coordena e une os diferentes conceitos matemáticos (MAKONYE, 2017).

Visando o desenvolvimento do pensamento funcional e a melhoria da aprendizagem dos alunos, acreditava-se ser fundamental que os alunos aplicassem os conceitos matemáticos de forma fluida a fenômenos do seu próprio contexto em detrimento de contextos artificiais, formando conexões orgânicas com os conhecimentos prévios dos alunos. No contexto da reforma *Meraner*, o desenvolvimento de pensamento funcional significava tornar os alunos conscientes de grandezas variáveis em contextos ariméticos e geométricos, e da relação entre essas grandezas, de forma a acostumar os alunos com o conceito de variáveis e com a representação gráfica desde cedo. Na concepção de Klein, para tanto, não era necessária a introdução da definição formal de função como uma correspondência entre dois conjuntos inicialmente, mas sim uma visão geral de função como relação de dependência entre variáveis (KRUGER, 2019). Tal opção reflete as visões educacionais de Klein, que incluíam a combinação de ramos aparentemente separados e a abordagem inicialmente intuitiva da matemática, deixando a sistematização para momentos posteriores (BRAGA, 2003).

Embora movimentos de modernização do ensino de matemática já ocorressem em 1900 em países como a França, a Inglaterra, a Itália e os Estados Unidos, foi graças a articulação internacional encabeçada por Klein que essa modernização ocorreu globalmente (MIORIM, 1998). Em 1908 foi criada a Comissão Internacional de Instrução Matemática (ICMI, conhecida à época por CIEM ou IMUK, das siglas em francês e alemão, respectivamente) e ainda no início do século XX essa comissão recebeu 310 relatórios sobre o ensino de matemática nas escolas secundárias em diferentes países. À época, no Brasil, o Colégio Pedro II do Rio de Janeiro era considerado padrão para as outras escolas no país, e seu diretor participou da reunião do ICMI em 1912, incumbido de organizar um relatório sobre o ensino secundário de matemática no Brasil (MIORIM, 1998). Entretanto, os catedráticos de matemática do Colégio eram ortodoxos e avessos às concepções modernizadoras que estavam ocorrendo internacionalmente, e tal relatório nunca foi desenvolvido. Assim, foi somente mais de uma década mais tarde que Euclides Roxo (1890-1950), outro catedrático de matemática que havia assumido a direção do Colégio Pedro II, conseguiu articular a reforma no âmbito do ensino de matemática no Colégio, inspirada no movimento internacional encabeçado por Klein. A partir de 1929 ocorre a unificação das disciplinas de aritmética, álgebra e geometria em uma nova disciplina, matemática, no Colégio Pedro II, e a publicação dos volumes de Curso de Matemática Elementar de autoria de Euclides Roxo (BRAGA, 2003). Para a elaboração de seus livros, Euclides Roxo inspirava-se nas ideias de Felix Klein e nos compêndios publicados nos Estados Unidos alguns anos antes por Ernst Breslich (1874-1966) (SOARES; DASSIE; ROCHA, 2004).

Com a Revolução Vargas em 1931, Francisco Campos assume o Ministério da Educação e Saúde, e institui uma reforma nacional completa do ensino secundário, acatando as ideias de Euclides Roxo para a área de matemática. A reforma no ensino de matemática, inicialmente aplicada apenas no Colégio Pedro II, é imposta então em todo território nacional, sem uma discussão ampla entre os professores. Pelas instruções pedagógicas da reforma, a disciplina de matemática deveria ser ensinada de forma descompartimentalizada e aplicada em todos os anos do ensino secundário, embasada no conceito de função e de pensamento funcional, introduzindo noções de cálculo diferencial e integral ao fim do ensino secundário (MIORIM, 1998, p.95). Essa reforma no ensino de matemática proposta por Euclides Roxo e referendada por Francisco Campos sofreu inúmeras críticas e não foi bem recebida pela comunidade. Nos materiais didáticos disponíveis na época é possível perceber que o tópico de função não era amplamente trabalhado como o elo que unificava a matemática secundária e muitos professores não alteraram suas formas de ensino como almejado por Euclides Roxo (BRAGA, 2003). Ainda assim, reflexos desta reforma ainda permeiam o ensino de matemática no Brasil (SOARES; DASSIE; ROCHA, 2004), uma vez que a matemática ainda é ensinada como disciplina única e durante todo o ensino básico, bem como ainda há um enfoque grande no ensino de funções.

Gustavo Capanema, novo ministro da Educação e Saúde, começa em 1936 a elaborar o Plano Nacional de Educação (DASSIE, 2001), que culmina na publicação, em 1942, da Reforma Capanema. Os 11 anos de vigência da Reforma Francisco Campos não foram o suficiente para uma alteração mais profunda nos princípios de educação matemática no Brasil. Em diversos outros países, há relatos de que a alteração mais profunda começou a ocorrer após vários anos da implementação das mudanças, uma vez que nos primeiros anos o tópico de funções era negligenciado no ensino (BRAGA, 2003), assim como visto no Brasil. Ainda assim, a Reforma Capanema de certa forma referendou algumas mudanças no ensino de matemática propostas pela Reforma Francisco Campos, como a manutenção de uma disciplina unificada, mas em outras, simbolizou um regresso ao que existia antes de 1929, como um tratamento mais tradicional e menos intuitivo da matemática. Em relação ao assunto de funções, seu estudo deixa de ocorrer em todas as séries, passando a aparecer de forma discreta e subentendida no currículo proposto para o curso ginasial (primeiro ciclo, de quatro anos) e de forma mais ampla e explícita apenas no segundo ciclo, nos cursos clássico e científico (BRAGA, 2003; SOARES; DASSIE; ROCHA, 2004). A Reforma Capanema permaneceu em vigor por quase 20 anos, com apenas um reajustamento de programas em 1951, até que chegou ao Brasil o movimento da "Matemática Moderna" (DASSIE, 2001), após mudanças no ensino de matemática em diversos países do mundo, inspirados pelas mudanças na sociedade promovidas pelo crescente desenvolvimento científico e tecnológico (SOARES, 2001).

Apesar de ocorrerem discussões visando remodelar o ensino de matemática no Brasil durante a década de 1950, foi a fundação do Grupo de Estudos do Ensino da Matemática (GEEM) em São Paulo em 1961 que desencadeou o Movimento da Matemática Moderna no Brasil, devido a percepção entre diversos professores da necessidade de aprofundar os estudos sobre o movimento mundial (MIORIM, 1998, p.113). Nesse mesmo ano foi publicada a primeira Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), que descentralizava o currículo, dando mais autonomia aos estados (SOARES, 2001). Foi nessa época que começou-se a dar um enfoque maior nas aplicações da matemática na sala de aula. Os problemas e exercícios em sala de aula deixam de ser sem utilidade prática e passam a ser contextualizados, objetivando chegar mais próximo à realidade do aluno (SOARES, 2001).

O Movimento da Matemática Moderna era partidário de uma elevada precisão de linguagem formal matemática, com uma tendência mais dedutiva que intuitiva, e se centrava na teoria dos conjuntos, nas propriedades estruturais dos conjuntos, nas relações e funções, e no "saber justificar" mais do que no "saber fazer" (MIORIM, 1998, 114). Os matemáticos envolvidos no Movimento visavam a democratização do ensino de matemática, tornando-a mais palpável e de fácil entendimento para os alunos, graças a novos materiais e métodos de ensino. Eles se inspiravam nos trabalhos matemáticos do coletivo Bourbaki, que visava reescrever toda a matemática usando o método axiomático, a partir do desenvolvimento e estudo da noção de estrutura, perpassando as estruturas algébricas, de ordem e topológicas (SOARES, 2001). Grupos de pesquisa envolvidos no Movimento da Matemática Moderna acreditavam na necessidade de incluir aspectos da psicologia da aprendizagem como os trabalhados por Jean Piaget (1896-1980), Caleb Gattegno (1911–1988) e Zoltán Pál Dienes (1916-2014), embora essa influência tenha ficado restrita, pouco se difundindo na sala de aula (SOARES, 2001). Tais grupos de pesquisa tentavam trazer o ensino de matemática mais para perto de uma concepção construtivista, que vê a matemática como uma construção humana, e o foco do processo de ensino-aprendizagem deve ser portanto, o aluno (FIORENTINI, 1995).

A teoria de conjuntos e, em segundo plano, o estudo das estruturas fundamentais passam então a ser o elo unificador da Matemática, papel que as funções assumiam na Reforma Francisco Campos e que não parecia existir na Reforma Capanema. O tópico de funções permanece presente no ensino secundário, mas deixa de ser o protagonista para ser apenas mais um tópico no currículo. Embora fosse dito que o movimento não estava mudando a matemática que era ensinada nas escolas, e sim o método de ensino, nessa época foram inseridos no ensino secundário tópicos antes restritos à universidade, como espaços vetoriais, matrizes, álgebra de Boole e conceitos de grupo, anel e corpo (SOARES; DASSIE; ROCHA, 2004).

A implementação dessa mudança no ensino de matemática não foi realizado via decreto ou reforma, e portanto não havia um currículo unificado no país. Ainda assim, sua implementação foi mais extensa do que as reformas anteriores, talvez por ter nascido entre os próprios professores de matemática, no âmbito dos Congressos Nacionais de Ensino da Matemática. O Movimento da Matemática Moderna, entretanto, não foi capaz de resolver os problemas no ensino da disciplina no Brasil, tendo de fato agravado a situação, ao focar muito na simbologia e na teoria de conjuntos. Muitas críticas a essas reformas se intensificaram na segunda metade da década de 70, repreendendo o movimento por ensinar abstrações de forma muito prematura e focar em uma abordagem dedutiva e isolada da realidade (SOARES, 2001; MIORIM, 1998, p.115).

Em plena ditadura militar, em 1971 é publicada a segunda Lei de Diretrizes e Bases da Educação, que potencializa a descentralização da tomada de decisão curricular no Brasil, permitindo maior flexibilização curricular nas unidades de ensino. Com a nova LDB, nas décadas de 1970 e 1980 os estados e municípios começam a publicar os Guias Curriculares e as Propostas Curriculares, estabelecendo então um currículo a ser seguido regionalmente, visando estruturar o ensino, que à época estava mal organizado (SOARES, 2001)[6] Com essa descentralização, o currículo de matemática das escolas brasileiras fica mais heterogêneo do que anteriormente. No Espírito Santo, por exemplo, a proposta curricular publicada em 1974 demonstra uma ênfase no formalismo e no rigor matemático ao elencar os objetivos, conteúdos e sugestões para trabalhar os assuntos de função no ensino de 2º grau (PINTO, 2017). Já no estado de São Paulo, os Guias Curriculares publicados em 1976 voltam a valorizar o ensino de funções na matemática escolar, ainda no ensino de 1º grau, ao destacar que a orientação do ensino de matemática deve considerar

[6] Cabe salientar que até 1971 não era obrigatório a todos os brasileiros cursar mais que 4 anos de ensino formal. Com a LDB de 1971 o antigo ensino secundário, agora seccionado em ensino de 1º grau (5ª a 8ª série) e ensino de 2º grau (3 anos), passa a ter um ciclo de escolarização obrigatória, até a 8ª série.

aspectos que evidenciam a unidade da matemática e

> Dentre esses aspectos, gostaríamos de evidenciar dois deles, que consideramos de importância fundamental: (...) e o importantíssimo conceito de relação e, mais especificamente, o conceito de função, que pode ser abordado não só no estudo das funções numéricas, como também no estudo das transformações geométricas. (SÃO PAULO, 1976 apud PIRES, 2008)

Com a maior liberdade curricular da década de 1970 em diante, atualmente o ensino de matemática não pode ser caracterizado por apenas uma tendência didático-pedagógica. Tem-se, em grande parte, uma manutenção da concepção tecnicista, principalmente no Ensino Médio, mas também há muitos exemplos de aplicações da tendência empírico-ativista como à época da Reforma Francisco Campos, da tendência construtivista e da tendência socioetnoculturalista (FIORENTINI, 1995; MENEGHETTI; REDLING, 2012). Mesmo frente a maior variabilidade do currículo e das concepções de ensino, desde que as funções foram inseridas no currículo do ensino secundário em 1931, este tópico permaneceu presente entre os assuntos abordados durante o Ensino Médio nas escolas brasileiras.

2.3 ENSINO E APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES

Alguns estudiosos consideram funções um dos mais difíceis conceitos de se dominar e de se ensinar, entre os conteúdos de matemática da escola básica (DREYFUS, 1990; ALTINDIS, 2021). Tal dificuldade é associada a diferentes motivos, que serão discutidos a seguir.

Função é um tópico da matemática cujo ensino em geral é associado ao ensino de outros conceitos matemáticos complexos e tem em si uma natureza integrativa (LEINHARDT; ZASLAVSKY; STEIN, 1990). Dessa forma, uma compreensão plena do conceito de função pressupõe uma compreensão plena do conceito de variável, que por sua vez pressupõe uma compreensão plena do conceito de número, criando uma rede complexa de ideias correlacionadas (DREYFUS, 1990). O ensino de funções é também indissociável do ensino de suas representações (MAINALI, 2021), e assim o ensino de funções deve articular de forma balanceada representações numéricas, gráficas e algébricas (PONTE, 1992). É um verdadeiro desafio pedagógico fazer com que os alunos percebam que as diferentes faces do conceito de função são representações de um mesmo conceito matemático (DOORMAN et al., 2012). Para um aluno demonstrar entendimento da definição de função, não basta que saiba citar a definição de função, mas sim que consiga lidar com os diferentes aspectos de que se trata a definição, incluindo suas interpretações e aplicações (SIERPINSKA, 1992).

Desde o início do século XX existe uma preocupação na matemática escolar com o desenvolvimento do pensamento funcional, iniciada por Klein, conforme exposto na Seção 2.2 e ainda visível na nova BNCC, onde é esperado que o aluno consiga reconhecer padrões já na pré-escola, fazer generalizações sobre padrões nos anos iniciais do ensino fundamental, e comecem a trabalhar com funções de maneira formal e utilizando diferentes representações nos anos finais do Ensino Fundamental (BRASIL, 2018). O pensamento funcional não tem uma definição única, tendo a interpretação do termo mudado ao longo do último século. De forma ampla, o pensamento funcional pode ser entendido, de acordo com Lichti e Roth (2019, p.174) como

> a compreensão dos aspectos de correspondência, covariação e de função como objeto, que aparece e pode ser observado nas habilidades dos estudantes de usar, interpretar e mudar entres as diferentes formas de representação da relação funcional de forma adequada. (*Tradução nossa*)

Essa definição traz duas dimensões importantes: o aspecto da função que o aluno é capaz de perceber, e as representações que ele domina.

Em relação aos aspectos, a função pode ser percebida de três formas distintas. A primeira é como um processo de correspondência entre dois elementos, onde para cada elemento do domínio, há exatamente um elemento do contradomínio. A segunda é do ponto de vista da covariação, que se refere à percepção da variação na variável independente e a variação resultante na variável dependente, descrevendo como a mudança em uma variável afeta a mudança na outra. A terceira forma é o aspecto objeto, que leva em consideração toda a função, e significa a compreensão de que a função é um objeto ao qual podem ser aplicadas ações, como a composição de funções. De acordo com Sfard e Linchevsk (1994), os diferentes aspectos de função citados acima são desenvolvidos de forma sequencial, embora a materialização da função como um objeto matemático seja difícil de alcançar.

A outra dimensão crucial na definição de pensamento funcional é em relação às diferentes representações que o aluno deve ser capaz de usar, interpretar e traduzir. Aqui, cabe lembrar que as representações são parte inerente da matemática (MAINALI, 2021), e que os objetos matemáticos não têm existência física e portanto, não são tangíveis, exceto por meio de suas representações, de forma que a aprendizagem matemática é sempre mediada por representações (HEGEDUS et al., 2017). Assim, para materializar a noção de função o aluno deve dominar plenamente as diferentes representações de funções e sintetizar as diferentes características reproduzidas em cada representação, de forma a criar uma imagem conceitual interna de função. É a essa imagem interna que o aluno recorre quando faz referência ao objeto matemático de função, que não necessariamente é fidedigna à definição de função em si (DREYFUS, 1990).

Dessa forma, é importante que o aluno compreenda os diferentes aspectos de função, domine suas diferentes representações e tenha contato com funções diversificadas, para que não haja discrepâncias entre a imagem conceitual interna do aluno e a definição de função. Em relação às diferentes necessidades para a sistematização da aprendizagem do conceito de funções, Sierpinska (1992) divide esse processo de aprendizagem no que ela chama de "**atos de compreensão**": habilidades que o aluno deve desenvolver para compreender plenamente do que se trata a noção de função. A falha de cada um desses atos tem motivos e consequências diferentes. Em seu artigo, Sierpinska (1992) define 19 atos de compreensão, dos quais 15 serão discutidos aqui:

1. Identificar variações observadas no mundo real como problemas práticos para se resolver;
2. Identificar regularidades nas relações entre as variações observadas como uma forma de lidar com essas mudanças;
3. Identificar os sujeitos a variação no estudo das variações;
4. Discriminar entre dois modos de pensamento: um em termos de grandezas conhecidas e desconhecidas, o outro em termos de grandezas variáveis e constantes;
5. Discriminar entre variáveis dependentes e independentes;
6. Generalizar e sintetizar a noção de número;
7. Discriminar entre o conceito de número e aquele de grandeza;
8. Sintetizar os conceitos de lei física e de função; em particular, ter consciência do possível uso de funções na modelagem de relações entre grandezas;
9. Discriminar entre uma função e as ferramentas analíticas por vezes usadas para descrever sua lei de formação;
10. Discriminar entre definições matemáticas e descrições de objetos;
11. Sintetizar o conceito geral de função como um objeto;
12. Discriminar entre os conceitos de função e relação;
13. Discriminar entre as noções de função e sequência;
14. Discriminar entre as diferentes formas de representar funções e as funções propriamente ditas;

15. Sintetizar as diferentes formas de apresentar, representar e falar sobre funções.

Os primeiros dois atos de compreensão são "Identificar variações observadas no mundo real como problemas práticos para se resolver" e "Identificar regularidades nas relações entre as variações observadas como uma forma de lidar com essas mudanças". Tal noção se fundamenta na ideia de que, historicamente, foi assim que o conceito de função foi desenvolvido, como exposto na Seção 2.1. Essa teoria era defendida já na época de Klein, ancorado na chamada lei fundamental biogenética, do naturalista alemão Ernst Haeckel (1834-1919), em voga no início do século XX (BRAGA, 2003) e ainda é uma recomendação para o ensino de funções no contexto brasileiro (MENDES, 1994 apud ARDENGUI, 2008). O uso histórico de funções como uma ferramenta de descrição e predição através da modelagem de fenômenos naturais serve como motivação para o estudo de funções ainda nos dias de hoje e assim, para o estudo de funções, é necessário que os alunos se interessem em perceber e analisar as variações que ocorrem no mundo ao seu redor. Nesse contexto, é ainda necessário que o ensino de funções, e de matemática num geral, seja humanizado de forma que o aluno consiga compreender a importância dos conceitos matemáticos para a sociedade durante o seu desenvolvimento e também como ele se insere na sociedade atual (MACIEL; CARDOSO, 2014).

Do ponto de vista construtivista, uma abordagem que parta da aplicação ao mundo real possibilita uma construção ativa do conceito de função, de forma que os alunos percebam que o conceito é contextual, originando de atividades humanas e portanto, é intuitivo, subjetivo e dinâmico (MAKONYE, 2017). Tal noção intuitiva de relações funcionais, incluindo noções de dependência, causalidade e variação, é desenvolvida nas crianças ao observar o mundo e os fenômenos físicos com as quais elas convivem, e cria uma expectativa por padrões e regularidades nessas mudanças observadas (LEINHARDT; ZASLAVSKY; STEIN, 1990). Assim, tais noções e expectativas devem servir de ponto de partida para ancorar o ensino formal de funções a algo que já é internalizado pelos alunos. Uma vez que os alunos ganhem experiência com vários problemas aplicados, a atenção pode passar para as relações matemáticas envolvidas, e caminhar no sentido de formalizar o conhecimento matemático de funções (DOORMAN et al., 2012). É com essa percepção das relações, após a exposição a vários exemplos, que os alunos conseguem perceber que apesar das diferenças superficiais, existe uma estrutura matemática subjacente, que é interconectada pela ideia de função (MAKONYE, 2017).

Entretanto, ao se depararem com as situações cotidianas em que existem relações funcionais, muitas vezes os estudantes percebem que existe uma variação nas quantidades, mas focam apenas no processo de mudança e na variação em si, sem tomar consciência do objeto que está sujeito à variação. Dessa forma, não analisam a situação em termos das variáveis envolvidas, tendo dificuldade de interpretar a situação e reconhecer, por exemplo, as grandezas envolvidas e o domínio e a imagem de uma função. Isso pode ser considerado um obstáculo epistemológico, segundo Sierpinska (1992) e data já da época de Aristóteles (384 a.C.-322 a.C.), quando se estudavam mudanças sem preocupações com as variáveis que estavam sofrendo mudança e nem com formas de mensurar essas mudanças. É necessário então que os estudantes foquem no sujeito submetido à variação e não na variação como um processo em si, como exposto no próximo ato de compreensão, "Identificar os sujeitos a variação no estudo das variações". Para isso, os estudantes devem reconhecer as diferentes grandezas físicas que podem ser medidas em determinadas situações, e começarem a consolidar a noção de variável.

Até iniciarem os estudos de função, os estudantes são acostumados a lidar com uma "álgebra de valor fixo" (SFARD; LINCHEVSK, 1994), na qual as letras utilizadas nas expressões algébricas simbolizam um valor desconhecido, porém constante. Para os alunos, valores conhecidos são representáveis por números, enquanto os desconhecidos são substituídos por uma letra, apenas enquanto permanecem desconhecidos. A álgebra é vista como um processo para descobrir esse valor, e tem seu fim quando este valor é descoberto. Tal visão da álgebra é difícil de ser quebrada, entre outros motivos, pela dificuldade dos alunos em aceitar que expressões envolvendo variáveis sejam uma resposta e não uma etapa de um processo ainda não finalizado ou, conforme expresso por Biggs e Collis (1982), pela "inabilidade de lidar com a falta de desfecho", uma vez que com a mentalidade de álgebra de valor fixo os alunos criam uma necessidade de encontrar um valor para a incógnita.

Daí surge a importância do quarto ato, "Discriminar entre dois modos de pensamento: um em termos de grandezas conhecidas e desconhecidas, o outro em termos de grandezas variáveis e constantes". Para o estudo de funções, é necessário que os alunos mudem de concepção de uma álgebra de valor fixo para uma álgebra funcional, passando a distinguir entre valores constantes e variáveis. Tal distinção começou a ser feita já no século XVII, quando os livros de análise pontuavam as diferenças entre variáveis e constantes e evidenciavam a distinção dessa concepção para a de grandezas conhecidas e desconhecidas, tidas como típicas da álgebra (SIERPINSKA, 1992). Os símbolos e objetos usados são os mesmos, e o que o aluno vai interpretar ao vê-los depende do que ele está preparado para perceber, e de onde o aluno deposita o seu foco (SFARD; LINCHEVSK, 1994). Assim, é necessário auxiliar os alunos nessa transição, para que eles percebam que o foco do pensamento funcional não é em "encontrar o valor do x", como era feito anteriormente no estudo de equações.

Outra fonte de dificuldade para os aluno é que os papéis das duas variáveis envolvidas na relação funcional não são simétricas na definição de função, e daí vem a importância do ato de compreensão seguinte, "Discriminar entre variáveis dependentes e independentes" (SIERPINSKA, 1992). A distinção entre a variável independente e a variável dependente é fundamental para a compreensão do conjunto domínio e conjunto imagem de uma função, bem como para a compreensão plena do conceito de função, uma vez que é necessário entender que a imagem é sempre unicamente determinada pelo elemento do domínio, e não ao contrário. A falta de capacidade de perceber essa distinção é um problema antigo no Ensino Médio brasileiro (SCHWARZ, 1995 apud ARDENGUI, 2008), e faz com que alguns alunos tenham dificuldade de diferenciar a univalência do conceito de função com a univalência do conceito de função injetora (MENDES, 1994 apud ARDENGUI, 2008).

Embora historicamente a formalização da noção de variável independente e dependente tenha sido uma etapa crucial no desenvolvimento moderno do conceito de função (KLEINER, 1989), sobre os livros didáticos utilizados no Ensino Médio, Pelho (2003) afirma:

> Alguns livros definem este conceito da seguinte maneira: dados dois conjuntos não vazios A e B, uma função de A em B é uma relação que a cada elemento de A, faz corresponder um único elemento de B. Outros, definem por meio de dois conjuntos, o domínio, o contradomínio e uma regra que associa a cada elemento do domínio um único elemento do contradomínio. (PELHO, 2003, p.11)

Essa definição "conjuntista" de funções, atribuída a Peano, é muito utilizada desde o Movimento da Matemática Moderna, porém tira a noção histórica de função como relação de dependência. Essa definição, de caráter estático, acaba criando um obstáculo epistemológico para a aprendizagem da noção de variáveis e do relacionamento entre elas, que acabam sendo vistas como simétricas pelos alunos. Alguns autores questionam a necessidade da utilização de uma definição tão formal ao nível de Ensino Médio, quando não são trabalhados exemplos de funções que justificaram historicamente tal formalização da definição (SIERPINSKA, 1992).

Agora, uma compreensão plena do conceito de variável pressupõe uma compreensão plena do conceito de número (DREYFUS, 1990), e assim, para compreender plenamente funções, o aluno precisa "generalizar e sintetizar a noção de número", como estabelecido no sexto ato de compreensão. Um grande obstáculo a esse ato é que muitas vezes os alunos têm uma concepção heterogênea de números, tratando de forma privilegiada, por exemplo, os números naturais e com representação decimal finita, e evitando o uso de frações e número irracionais. Ainda assim, é importante também que os alunos consigam "discriminar entre o conceito de número e aquele de grandeza" (sétimo ato de compreensão), sendo capazes de perceber que as variáveis, quando contextualizadas, além de terem seu valor numérico, estão associadas a grandezas físicas. Dessa forma, embora uma variável representando um número é intercambiável com outra em expressões como $\{(x, y)|y = 2x^3 + 1\}$ e $\{(y, x)|x = 2y^3 + 1\}$, que representam o mesmo conjunto, quando tais variáveis representam grandezas, especialmente em leis físicas como $s = s_0 + vt$, elas não podem ser permutadas. Daí segue a importância do oitavo ato de compreensão, que estabelece a importância do aluno "sintetizar os conceitos de lei física e de função; em particular, ter consciência do possível uso de funções na modelagem de relações entre grandezas". Assim, o aluno deve perceber que, embora as noções de lei na física e função na matemática sejam relacionadas e que historicamente o conceito de função surgiu da necessidade de representar relações entre variáveis no mundo físico, os conceitos são inerentemente diferentes.

Ainda que veja as semelhanças entre as leis físicas e suas modelagens usando funções matemáticas, é necessário que o aluno consiga, como descrito no ato de compreensão 9, "discriminar entre uma função e as ferramentas analíticas por vezes usadas para descrever sua lei de formação". A associação, embora errônea, entre uma função e sua representação analítica, é natural e também ocorreu a vários matemáticos durante o desenvolvimento e na utilização do conceito moderno de função (PONTE, 1992; CARAÇA, 1951, p.131). A nível de Ensino Médio, não há grandes problemas nessa equiparação de uma função à sua lei de formação, especialmente considerando que, historicamente, as primeiras definições de função não faziam tal distinção, que foi surgir apenas quando do estudo de situações particulares que estão muito além do escopo de um aluno de Ensino Médio. As funções utilizadas no Ensino Médio em geral são contínuas em todo seu domínio, não diferenciáveis em um número finito de pontos, representáveis por uma curva no plano cartesiano e dadas por uma expressão analítica única, e portanto, tais funções são tidas como o modelo padrão de função para os alunos. Assim, quando a definição formal para funções é ensinada aos alunos, é a esse padrão de funções "bem comportadas" que os alunos esperam que a definição faça referência. Dessa forma, é interessante que os alunos sejam expostos a exemplos de funções que não têm uma expressão analítica simples ou que possam ser representadas por mais de uma fórmula[7], para que consigam "discriminar entre definições matemáticas e descrições de objetos" (décimo ato de compreensão) e assim consigam captar a essência da definição formal de funções, percebendo que um objeto matemático é determinado pela sua definição e não pelas nossas experiências particulares com algumas instâncias deste objeto (SIERPINSKA, 1992).

[7]Como por exemplo, uma mesma função representada por uma fórmula recursiva e uma explícita, funções definidas por mais de uma sentença ou situações modeladas por função chão ou função teto.

O próximo ato de compreensão é "Sintetizar o conceito geral de função como um objeto", que envolve os diferentes aspectos da função que o aluno é capaz de perceber, expostos no início dessa Seção. Uma revisão extensa do desenvolvimento da concepção objeto, o processo de transição entre os aspectos de correspondência, covariação e objeto e a dualidade processo-objeto inerente ao conceito de função podem ser encontradas em Sfard (2009), Sfard e Linchevsk (1994), Thompson (1994) e Lichti e Roth (2019). Resta dizer que os diferentes aspectos de função são interrelacionados e não são mutuamente exclusivos, de forma que o processo de ensino-aprendizagem de funções deve perpassar três aspectos e fomentar o entendimento de cada um. Enquanto os aspectos de correspondência e covariação são em geral amplamente trabalhados na sala de aula, o aluno pode ser auxiliado a obter uma visão objeto de funções por meio de atividades que foquem em uma visão global de funções, em famílias de funções e na comparação de funções (DOORMAN et al., 2012).

Embora a definição moderna de função coloque as funções como um caso especial de relação, é importante o aluno perceber que essencialmente, são objetos matemáticos utilizados em contextos distintos e com finalidades diferentes, como elencado no ato de compreensão 12: Discriminar entre os conceitos de função e relação. Operações normalmente aplicadas a relações, como a união, interseção ou complemento, ou propriedades como a transitiva, a simétrica e a reflexiva são mais raramente estudadas em funções, enquanto operações como a composição são mais comumente aplicadas a funções (GRIZE, 1968 apud SIERPINSKA, 1992).

O ensino de funções é indissociável do estudo das diferentes representações de funções, incluindo as representações verbais, algébricas, numéricas e gráficas. Segundo Mainali (2021, p.12):

> Esses quatro modos de representação são os mais comum e amplamente utilizados no campo de ensino e aprendizagem de matemática. A representação gráfica inclui figuras, diagramas, planos coordenados e outras representações figurais. A representação numérica se refere a mostrar os dados ou conceitos matemáticos de forma organizada, possivelmente na forma de uma lista ordenada ou de uma tabela. A representação algébrica indica o uso de símbolos, fórmulas, etc. A representação verbal inclui as línguas faladas e escritas. (...) apenas uma representação pode não ser suficiente para apresentar um conceito matemático, em vez disso, mais de uma representação pode ser necessária ao mesmo tempo. (*Tradução nossa*)

Assim, é importante não só que os alunos consigam reconhecer e utilizar cada uma dessas representações, mas que também consigam transitar entre as diferentes representações, percebendo as limitações de cada uma, ao mesmo tempo em que as enxerga como diferentes faces do mesmo objeto matemático. Nesse contexto, é importante a reflexão

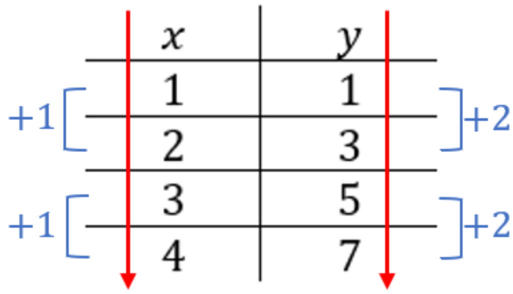


Figura 1: Análise vertical de uma tabela de duas colunas.

sobre as utilidades e dificuldades associadas às diferentes representações usuais de função.

Um das formas mais antigas de representar funções é a tabular (SIERPINSKA, 1992). As tabelas promovem uma visão mais local das propriedades das funções ao serem comumente utilizadas para obter informações como o valor da função em um ponto, e são a representação mais eficiente para pensar quantitativamente sobre funções (ROLFES; ROTH; SCHNOTZ, 2018). A análise vertical de uma tabela com duas colunas é um processo intuitivo para os alunos, mas pode levar a uma visão recursiva de funções, pois, como ilustrado na Figura 1, esse tipo de análise leva os alunos a focarem no incremento nas duas variáveis. Embora priorize o entendimento da noção de covariação dentro da definição de função (LICHTI; ROTH, 2018), esse tipo de análise pode levar o aluno a pensar na função como uma sequência.

O ensino de funções e de sequências, no Ensino Médio brasileiro, é geralmente realizado de forma desvinculada, sendo o ensino das progressões aritméticas e geométricas comumente reduzido a técnicas de cálculo e uso de fórmulas (MENNA BARRETO, 2007). As semelhanças e distinções entre sequências e funções de domínio discreto não são discutidas, e cabe ao aluno fazer essa reflexão. O ato de compreensão 13, "Discriminar entre as noções de função e sequência" pode ser favorecido pela mudança de uma visão recursiva de função (análise vertical) para uma visão explícita da relação funcional (análise horizontal), por meio de estratégias docentes adequadas (WARREN, 2005), como a adição de uma terceira coluna a tabela de valores (FRIEL; MARKWORTH, 2009), na qual os alunos podem registrar como obtiveram a variável dependente, de forma a evidenciar a relação entre as variáveis. Essa análise horizontal da tabela, ilustrada na Figura 2, evidencia uma visão de correspondência entre as variáveis e auxilia no pensamento funcional e, potencialmente, na generalização de uma lei de formação para a função representada (MARKWORTH, 2010), pois salienta a relação entre as duas grandezas envolvidas (WILKIE; CLARKE, 2016). A introdução gradual de variáveis na tabela de forma a generalizar a relação representada auxilia o aluno em se habituar a escrever expressões algébricas (MENNA BARRETO, 2007).

x	conta	y
1	$1 \cdot 2 - 1$	1
2	$2 \cdot 2 - 1$	3
3	$3 \cdot 2 - 1$	5
4	$4 \cdot 2 - 1$	7

Figura 2: Análise horizontal de uma tabela de três colunas.

O gráfico de uma função é uma representação visual que possibilita uma interpretação imediata da linearidade ou não da função, de seu crescimento ou decrescimento, assim como de pontos de máximo, mínimo e de inflexão (DUVAL, 2017). Nessa representação, cada ponto contém ao mesmo tempo a informação do domínio, da imagem e da lei de formação. Essa "densidade" de informação em um único ponto pode ser de difícil assimilação para os alunos, mas é essa mesma densidade que torna a representação gráfica tão útil para a análise do comportamento geral da função (MENNA BARRETO, 2007) e para o desenvolvimento de pensamento funcional (ROLFES; ROTH; SCHNOTZ, 2021). O apelo visual da representação gráfica a torna ideal para estudar conceitos relacionados à variação, como crescimento e decrescimento ou extremos locais e globais, bem como conceitos relacionados à taxa de variação, como linearidade, suavidade, continuidade e descontinuidade, e portanto, o estudo dos gráficos deve ter um lugar privilegiado no currículo de matemática escolar (PONTE, 1992), priorizando a abordagem de interpretação global de propriedades figurais (DUVAL, 2011) em detrimento da análise pontual, quando o aluno utiliza o gráfico da mesma forma que usaria uma tabela para encontrar as coordenadas de um ponto (LEINHARDT; ZASLAVSKY; STEIN, 1990).

Na matemática escolar, a elaboração do gráfico de uma função geralmente está vinculada à elaboração de uma tabela de valores para então plotar cada ponto no gráfico (SANTOS FILHO, 2003 apud ARDENGUI, 2008), de forma que os alunos não desenvolvem habilidades de interpretação qualitativa dos gráficos, saindo do Ensino Médio sem saber reconhecer intervalos positivos e negativos, por exemplo (SANTOS; TOLENTINO-NETO, 2015). Ainda assim, o domínio da interpretação do gráfico é fundamental não apenas no contexto das aulas de matemática, mas também em outras atividades da vida em sociedade (MENNA BARRETO, 2007).

Uma dificuldade comum dos alunos ao lidarem com a representação gráfica é perceber o gráfico como uma representação visual direta da situação, de forma que gráficos envolvendo distância e tempo, por exemplo, são interpretados como um movimento sobre o plano cartesiano, ou o gráfico da altura de um ciclista em uma montanha ao longo do tempo é interpretado como uma imagem da montanha (HOFFKAMP, 2009; SELDEN; SELDEN, 1992).

Como o estudo de funções passa necessariamente pelo estudo das diferentes representações de funções, é necessário que o aluno consiga, como estabelecido no décimo quarto ato de compreensão, "Discriminar entre as diferentes formas de representar funções e as funções propriamente ditas", o que também é crucial na teoria de registros de representação semiótica de Duval (2016), que estabelece a necessidade de haver a distinção entre o objeto representado e a representação desde objeto, ao mesmo tempo em que reconhece que os objetos matemáticos são acessíveis apenas através de suas representações. Assim, os alunos devem perceber que as diferenças entre as representações ocorrem em um nível superficial, mas existe uma estrutura matemática subjacente que une os diferentes contextos, aplicações e representações: o conceito de função (MAKONYE, 2017). O aluno deve perceber então que, embora se fale de funções de forma estática (como uma relação) e de forma dinâmica (por meio de covariações), utilizando as representações verbais, gráficas, numéricas e algébricas, e em contextos puros ou aplicados, o conceito de função define um objeto matemático único, com diversas faces. Tal habilidade culmina no último ato de compreensão aqui discutido, "Sintetizar as diferentes formas de apresentar, representar e falar sobre funções".

3 DESMOS

A *Desmos* é uma empresa, fundada por Eli Luberoff e sediada nos Estados Unidos, que oferece ferramentas digitais para o ensino de matemática. Em maio de 2022, a empresa se dividiu em duas, *Desmos Studio* e *Desmos Classroom*, após a venda do segmento de Atividades em sala de aula para a empresa *Amplify*. Todos os produtos disponíveis são gratuitos, acessíveis de qualquer navegador de internet sem necessidade de instalação em um dispositivo e são também multi-idioma, estando disponíveis em português. Os produtos disponíveis em seu site[1], atualmente, incluem a plataforma de Atividades de sala de aula e uma gama de calculadoras, dentre as quais está uma calculadora gráfica.

A Calculadora gráfica foi o primeiro produto criado pela empresa e permite que o usuário insira diferentes entradas como funções, desigualdades, pontos, tabelas e equações na forma cartesiana e polar, e obtenha a representação gráfica da expressão em uma interface colorida e de forma imediata. Dessa forma é possível manipular diretamente os objetos matemáticos inseridos na calculadora gráfica. É possível também restringir o domínio e a imagem das funções plotadas, inserir parâmetros e criar animações. A interface da calculadora gráfica é simples e intuitiva, além de dispor de uma "visita guiada" no menu ajuda, que ensina como usar ferramentas básicas da plataforma: controles deslizantes; tabelas; restrições; e regressões. O uso e a funcionalidade dessa ferramenta matemática serão explorados na Seção 3.1.

Já o produto Atividades de sala de aula consiste em uma plataforma online voltada para professores, com diferentes atividades criadas pela própria equipe da *Desmos* ou por usuários do site. Nessa plataforma, os professores podem explorar atividades disponíveis ou criar suas próprias atividades, e também criar turmas para aplicar as atividades para seus alunos e acompanhar o seu desenvolvimento. Essa ferramenta será explorada em detalhes na Seção 3.2.

3.1 CALCULADORA GRÁFICA

A calculadora gráfica da *Desmos* pode ser acessada pelo endereço

`https://www.desmos.com/calculator`.

Para utilizá-la não é necessário criar um usuário, mas caso você queira salvar seu gráfico, você terá de fazer *login* com uma conta da própria *Desmos* ou pode entrar com

[1] `https://www.desmos.com`

uma conta *Google* ou *Apple*. A tela inicial da calculadora, representada na Figura 3, possui a lista de expressões à esquerda, a área de visualização do gráfico ao centro e opções de configuração à direita. No topo, é possível ver, da esquerda para a direita: o menu de seleção de gráficos já salvos, o nome do gráfico atual, o logotipo da *Desmos*, a opção de entrada (ou o nome de usuário, caso já esteja logado), o ícone de compartilhar o gráfico atual, o menu de ajuda e o menu seletor de idioma. No canto inferior esquerdo há um ícone de teclado virtual, que abre o teclado representado na Figura 4.

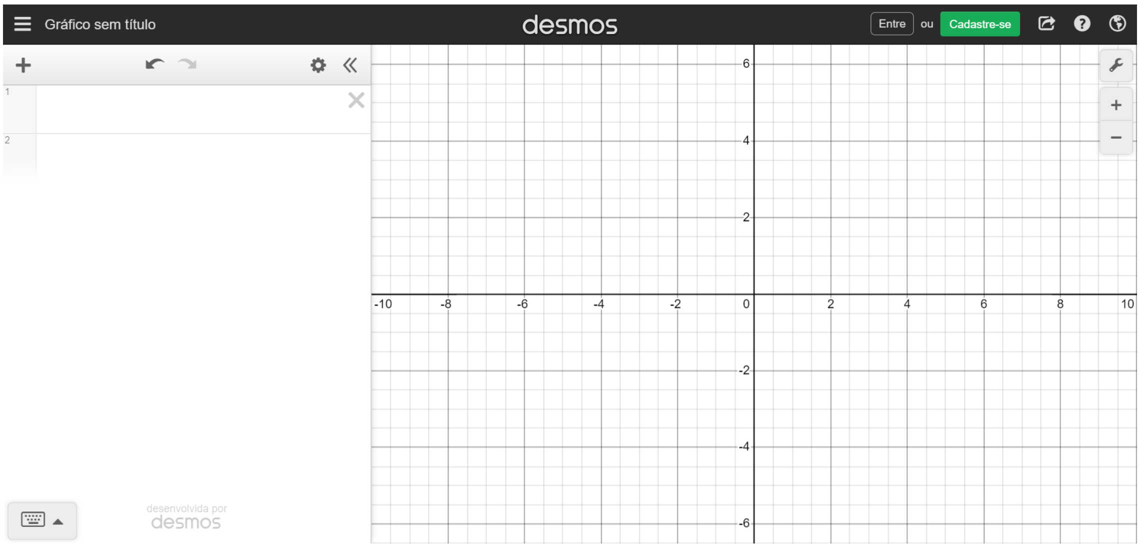


Figura 3: Tela inicial da Calculadora Gráfica da *Desmos*.

Figura 4: Teclado virtual da Calculadora Gráfica da *Desmos*.

Nas opções de configuração do gráfico, há opções de aumentar ou diminuir o *zoom*, e um ícone de ferramenta que abre mais opções, representadas na Figura 5. As primeiras opções são as de acessibilidade (aumento do tamanho da tela, contraste reverso e modo Braille). Em seguida, é possível personalizar se o plano cartesiano aparece quadriculado ou em branco, com setas nos eixos ou sem, com números nos eixos ou sem, e se o quadriculado tem uma grade menos densa (sem grade secundária). Há então opções de personalização dos eixos horizontal e vertical, com a opção de inserir uma legenda nos eixos, definir o intervalo que aparece na tela, bem como definir o passo (tamanho da grade primária).

Por fim, é possível bloquear a área de visualização para que não seja possível modificar o *zoom* e escolher se os ângulos são medidos em radianos ou em graus.

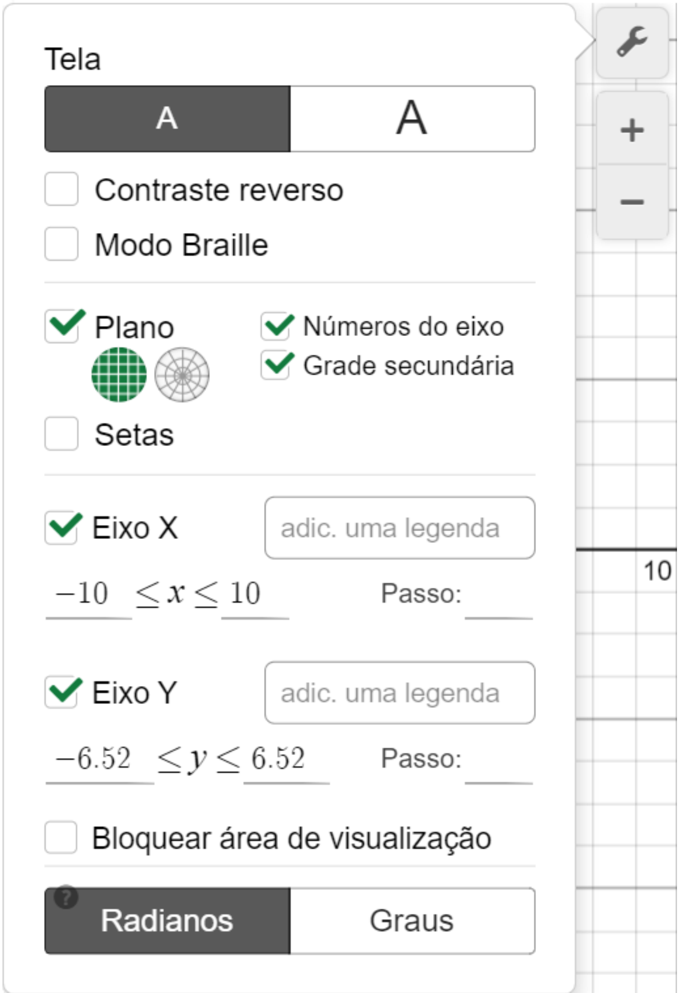


Figura 5: Opções de configuração da janela de visualização do gráfico na Calculadora Gráfica *Desmos*.

O menu de ajuda, simbolizado pelo ícone de interrogação e representado na Figura 6, possui os links de "visita guiada", links para outros recursos que ensinam o usuário a utilizar a calculadora e um atalho para enviar email à equipe de suporte. A "visita guiada" e a lista de atalhos do teclado estão disponível em português, enquanto os outros recursos estão ainda apenas em inglês. Um manual completo em português de como utilizar a Calculadora Gráfica, com uma tradução do Guia de Usuário, está disponível no *e-book* de Antunes e Cambrainha (2020)[2]. Entre a publicação deste *e-book* e a redação desta dissertação, pouco mudou no uso do *software*. As principais mudanças são:

Disponibilidade da Calculadora em Português (brasileiro). As imagens no *ebook*

[2]Disponível em: `anpmat.org.br/wp-content/uploads/2020/07/e-book_Desmos_final.pdf`

Figura 6: Opções de ajuda na Calculadora Gráfica *Desmos*.

de Antunes e Cambrainha (2020) estão com os nomes em inglês seguidos de suas traduções, porém hoje a calculadora está disponível integralmente em português, exceto por recursos como o guia do usuário.

Personalização de cores e traçado. Atualmente é possível não apenas mudar a cor da representação gráfica de cada expressão, como também o tipo do traço (linha cheia, tracejada ou pontilhada), sua opacidade e sua espessura.

Personalização de pontos. Ao inserir um ponto como um par ordenado (x, y) na lista de expressões, é possível personalizar sua cor, espessura e opacidade, bem como o formato ($\bullet$, $\circ$ e $\times$), a legenda do ponto e sua posição e a opção de arrastar ou não o ponto. Se um ponto estiver com a opção de arrastar ativada, ao arrastar o ponto no gráfico suas coordenadas automaticamente serão atualizadas na lista de expressões.

Ampliação da lista de expressões reconhecidas. Além das citadas em Antunes e Cambrainha (2020), atualmente é possível incluir expressões utilizando listas e regressões.

- Expressões utilizando listas - Para fazer uma lista de números, insira valores separados por vírgula, dentro de colchetes: [1,1,2,3,5,8]. Se você der um nome a essa lista, você pode declarar a lista em qualquer lugar que você usaria um número, por exemplo, declarando a lista $a = [1, 2, 3]$ e escrevendo a expressão $y = a \cdot cos(x)$, a calculadora irá plotar três funções cosseno, $y = 1cos(x)$, $y = 2cos(x)$ e $y = 3cos(x)$, com a mesma linha de expressão. As colunas de uma tabela são reconhecidas como listas para o *software*, e é possível usar listas como argumento para funções estatísticas como média e desvio padrão.

- Regressões - Uma vez definidas duas listas de números, por exemplo x_1 e y_1, você pode calcular uma regressão[3] (linear ou não linear[4].) digitando uma expressão com as duas listas e pelo menos um parâmetro livre, utilizando o símbolo $\sim$, como por exemplo, $y_1 \sim mx_1 + b$, que resultará na reta de melhor ajuste aos dados, ou $y_1 \sim ax_1^b$ que resultará em uma regressão não linear nos parâmetros a e b. Mais informações sobre como fazer regressões estão na "visita guiada" de regressões.

Personalização de tabelas. O menu de personalização de tabelas mudou e agora é semelhante ao menu de personalização de pontos descrito acima, com a opção de inserir uma linha unindo os pontos ao invés da opção de legenda, disponível para os pontos.

Inserção de pastas, notas e imagens No canto superior esquerdo da lista de expressões, há um ícone de + que permite a inserção de novos itens à lista de expressões. Além das expressões e tabelas já discutidas, é possível inserir uma nota (para textos explicativos, onde o que é digitado é reconhecido como texto e não equação), uma pasta (onde você pode inserir as expressões, de forma a organizar sua lista de expressões) e uma imagem (da qual você poderá ajustar a posição, o tamanho e a opacidade).

[3]Para mais informações sobre regressões, consulte o capítulo 16 do livro MORETTIN, Pedro A.; BUSSAB, Wilton de O. Estatística básica. São Paulo: Editora Saraiva, 2017.

[4]Para as regressões não lineares, a calculadora utiliza métodos numéricos que podem resultar em uma solução subótima ou com convergência lenta. Leia sobre essas limitações, em inglês, no link `https://help.desmos.com/hc/en-us/articles/360042428612-Nonlinear-Regressions`

3.2 ATIVIDADES DE SALA DE AULA

As Atividades de sala de aula da *Desmos* tem dois locais de acesso, sendo um para o docente selecionar, criar e aplicar a atividade e o outro para os alunos acessarem. Para o docente, o link de acesso é `https://teacher.desmos.com/`, já para os alunos, é `https://student.desmos.com/`. Para criar, editar ou aplicar uma atividade, é necessário que o docente crie um usuário, indicando email, nome, sobrenome e uma senha, ou crie um usuário diretamente fazendo *login* com sua conta *Google*. Para o aluno, é possível participar de uma atividade proposta pelo docente sem criar um usuário, dependendo da forma de atribuição da atividade pelo professor.

Após o *login*, a página inicial da plataforma de atividades de sala de aula se assemelha ao representado na Figura 7. Daqui, você pode navegar entre atividades já existentes, clicando em "Mais popular" ou acessando as coleções em destaque. No menu a esquerda, há também links para acessar "suas coisas": Histórico de painel de controle, onde você pode ver as últimas atividades que você atribuiu a uma turma; Turmas, onde você pode criar e gerenciar turmas de alunos, para atribuir atividades; Atividades personalizadas, onde você pode acessar as atividades que você criou ou atividades que você copiou da plataforma e editou; e Coleções, onde você pode acessar as coleções em destaque da *Desmos* ou as suas coleções individuais, que atuam como uma pasta para organizar as diferentes atividades da plataforma conforme seu interesse. Na barra superior, há a opção de buscar atividades na plataforma, entretanto, apenas atividades que passaram pela curadoria da equipe da *Desmos* ou atividades que você mesmo criou ou salvou aparecem nos resultados da busca. Ainda assim, uma atividade criada por um colega pode ser acessada por meio do link de compartilhamento da atividade[5], e uma vez salva em uma de suas coleções, ela também aparece no resultado das buscas.

Após selecionar uma atividade na ferramenta de busca ou entrar em uma atividade por meio de um link compartilhado, é possível ter uma visão geral da atividade, conforme a Figura 8. Na parte superior da tela, é possível ver o título e detalhes da atividade, como autor, tempo previsto, dispositivos compatíveis, tipo de atividade e descrição, bem como um link para o "Guia do Professor", onde é possível exportar um arquivo com miniatura das telas das atividades, orientações ao professor, exemplos de resposta e dicas de como se organizar para aplicar a atividade com uma turma. O ícone de +, disponível apenas após o *login*, permite adicionar a atividade a uma coleção. Abaixo da descrição da atividade, à direita, há um botão verde para atribuir esta atividade a uma turma ou criar um código

[5] A *Desmos* incentiva o compartilhamento de atividades entre a comunidade por meio das redes sociais, especialmente em seu grupo do *Facebook*, `https://www.facebook.com/groups/DesmosEducators`.

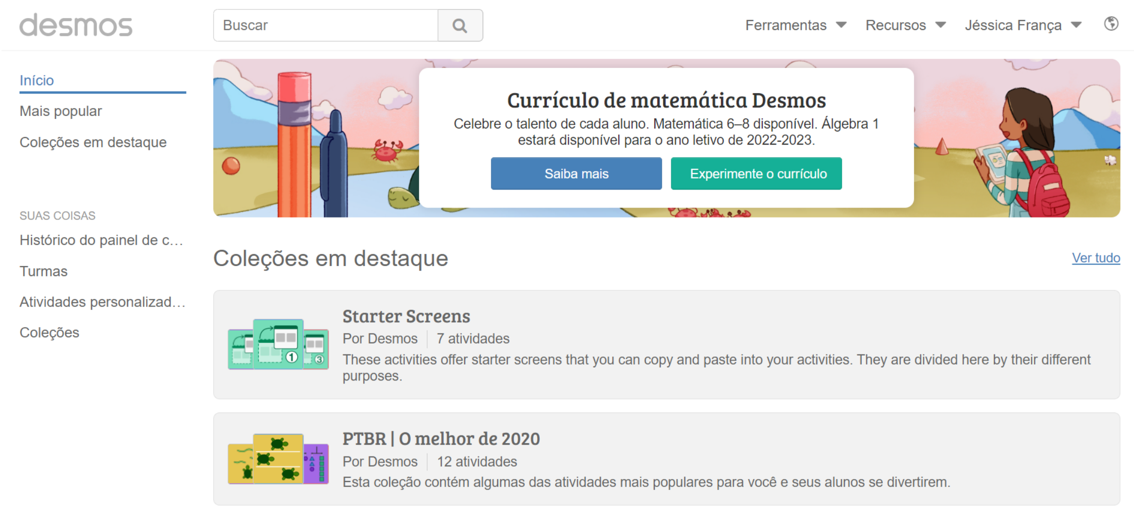


Figura 7: Página inicial das atividades de sala de aula da *Desmos*, após feito o *login*.

de sessão único (com o qual os alunos conseguem participar sem fazer *login*), e é possível ver uma lista de sessões ativas dessa atividade, caso tenha atribuído ela anteriormente. Ao final, há um botão azul para visualizar a prévia do aluno, de forma a navegar pelas diferentes páginas da atividade visualizando dicas para professores, exemplos de resposta e ajuda ao aluno, e há também miniaturas de cada página da atividade.

Figura 8: Visão geral de uma atividade de sala de aula da *Desmos*.

Para atribuir uma atividade única para um grupo de alunos, você pode clicar na seta a direita de “Atribuir” e criar um “Código de sessão único”, definir se é necessário aprovação do professor para o acesso do aluno e definir o tempo de validade do código, conforme ilustrado na Figura 9. Após criar o código de sessão único, a sessão aparecerá na lista de sessões da atividade, mostrando o código da sessão, o número de alunos, a data de atribuição da atividade, a opção de abrir o painel do controle e abrir um menu, no ícone de reticências, onde é possível abrir uma página com o link de acesso para os alunos (que você pode copiar e enviar aos alunos ou abrir em sua tela e projetar num quadro branco para os alunos, por exemplo) e a opção de arquivar a turma.

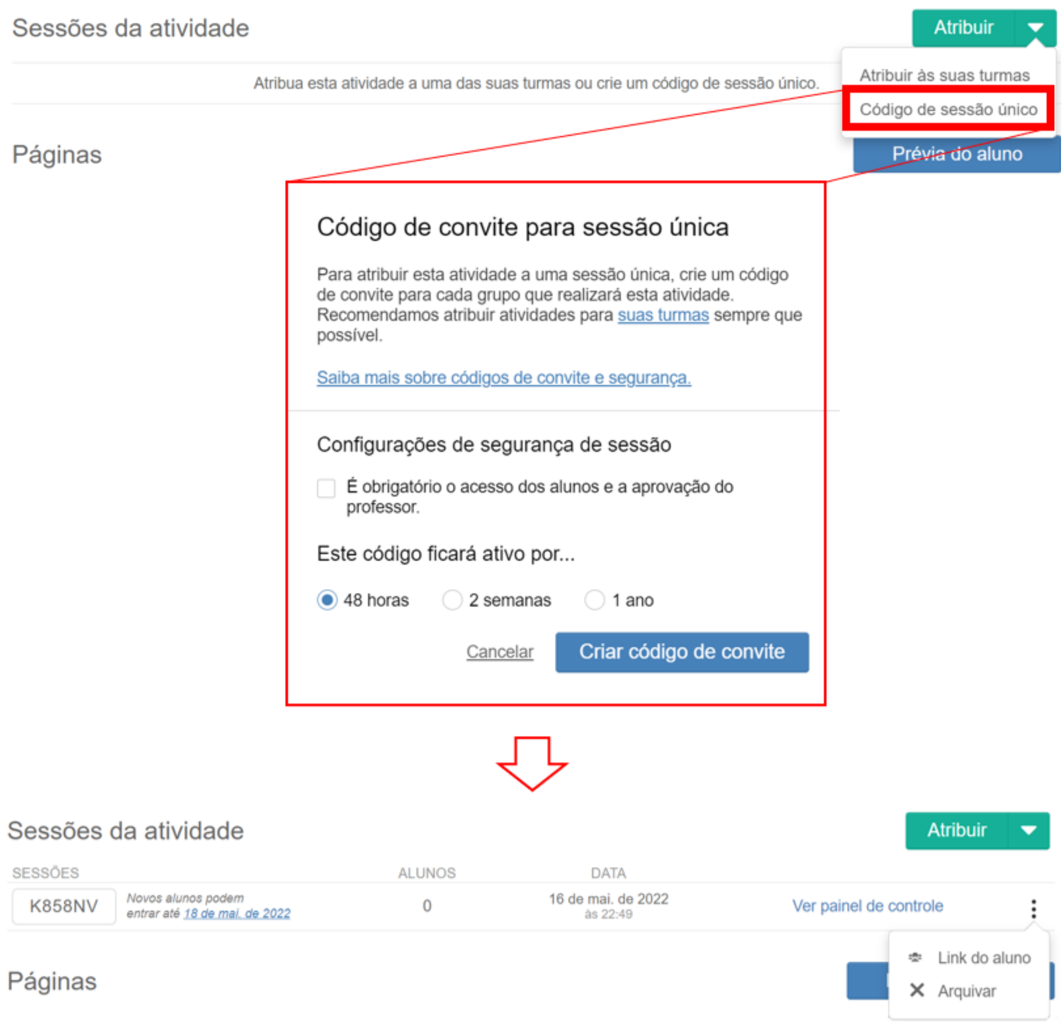


Figura 9: Como atribuir uma atividade a um grupo de alunos utilizando o código de sessão único.

Caso queira atribuir várias atividades a um mesmo grupo de alunos ou que os alunos consigam retornar posteriormente a atividade, ao invés de criar um código de sessão único, você deve atribuir a atividade a uma turma, clicando no botão verde "Atribuir", e seguindo os passos a seguir, ilustrados na Figura 10. Caso ainda não tenha turmas adicionadas à plataforma, aparecerá a opção de adicionar uma turma, selecionando esta opção você poderá adicionar uma turma direto do *Google* sala de aula[6], ou dar um nome à turma.

[6]Um ambiente virtual de aprendizagem da empresa Google, que permite aos professores criarem salas de aula virtuais com as quais podem compartilhar materiais como documentos, questionários e arquivos de mídia, bem como permite ao professor atribuir notas e se comunicar com alunos e responsáveis.

Uma vez criada a turma, você será direcionado ao menu de gerenciar as turmas. Volte à atividade que deseja atribuir à turma, clique novamente em atribuir e selecione a turma desejada. Após atribuir a atividade à turma, a sessão aparecerá na lista de sessões da atividade, mostrando o nome da turma, o número de alunos na atividade e na turma, a data de atribuição da atividade, a opção de abrir o painel do controle e abrir um menu, no ícone de reticências, onde é possível abrir uma página com o link de acesso para projetar para os alunos e a opção remover a atribuição. Quando os alunos estão em uma turma, você pode atribuir diversas atividades, acompanhar quais atividades cada aluno já realizou e compartilhar o acesso às informações da turma com outro professor cadastrando o *email* do docente.

3.2.1 Painel de Controle

Para acompanhar o desenvolvimento da atividade pelos alunos, independente de ter gerado um código de acesso único ou atribuído a atividade a uma turma, você deve clicar em "Ver painel de controle" na página da atividade (Figura 9) ou no nome da atividade na página da turma. O painel de controle permite acompanhar os alunos enquanto fazem a atividade, bem como posteriormente. No canto superior direito há quatro abas com diferentes visões para o professor.

A aba "Resumo", ilustrada na Figura 11, permite ao docente ter uma visão geral de como a turma está desenvolvendo a atividade. Aqui você verá uma linha para cada aluno na sessão, uma coluna para cada página da atividade, e símbolos que resumem o que o estudante fez em cada página. Se você clicar em uma das células da tabela, você verá a tela do estudante no estado atual, conforme ilustrado na Figura 12. Você pode projetar a tela desse aluno e modificá-la junto com a turma, sem contudo modificar o trabalho do estudante e o que aparece para ele na própria tela.

A Figura 13 mostra os diferentes símbolos que podem aparecer na tela de resumo do painel de controle. O traço representa que nesta página não há nenhuma atividade para o aluno realizar. O ok indica que o aluno fez todas as atividades da página corretamente, enquanto o xis indica que algo na página está incorreto. O ícone de aviso indica que algo no trabalho do aluno não está apenas incorreto como talvez denote que o aluno não entendeu o comando da atividade, necessitando de seu auxílio. O ponto indica que essa página requer interpretação humana, não sendo possível resumir o trabalho do aluno com os outros símbolos. Há também os ícones triangulares no canto superior direito da célula, que aparecem quando você dá um *feedback* para o aluno. O triângulo aparecerá inicialmente em verde e passará a cinza quando o aluno visualizar o *feedback*.

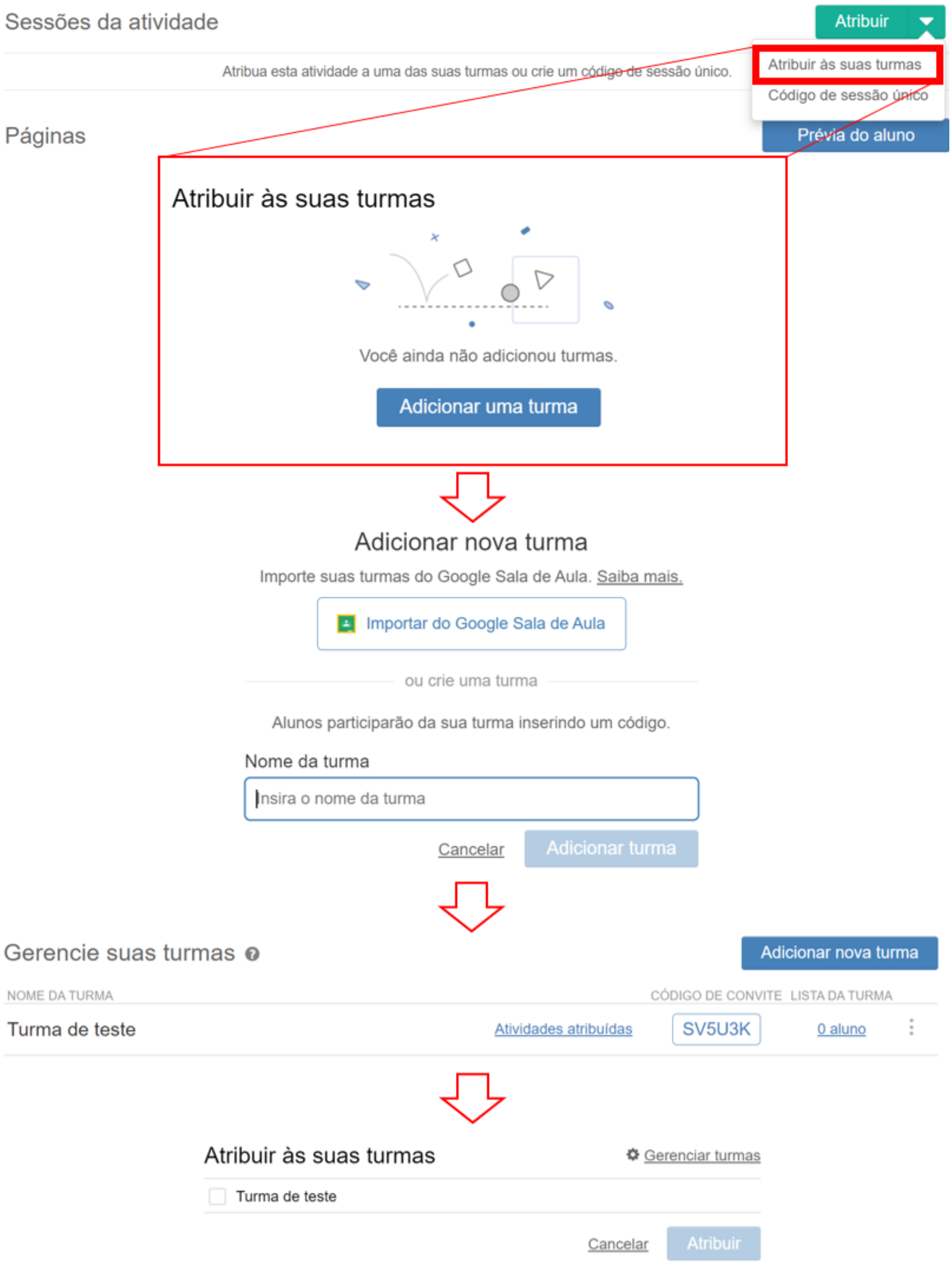


Figura 10: Como atribuir uma atividade a uma turma de alunos.

Na aba “Professor”, é possível ter uma visão geral das respostas dos alunos para cada página, conforme ilustrado na Figura 14. A visão dessa aba vai depender dos componentes configurados em cada página, mas em geral é possível ver a resposta de cada estudante ou as respostas sobrepostas de toda a turma. Se a página foi configurada para ter correção automática, aparece uma opção de mostrar a correção dos trabalhos dos alunos. Nessa aba, ao visualizar as respostas dos alunos, é possível enviar *feedback* individual

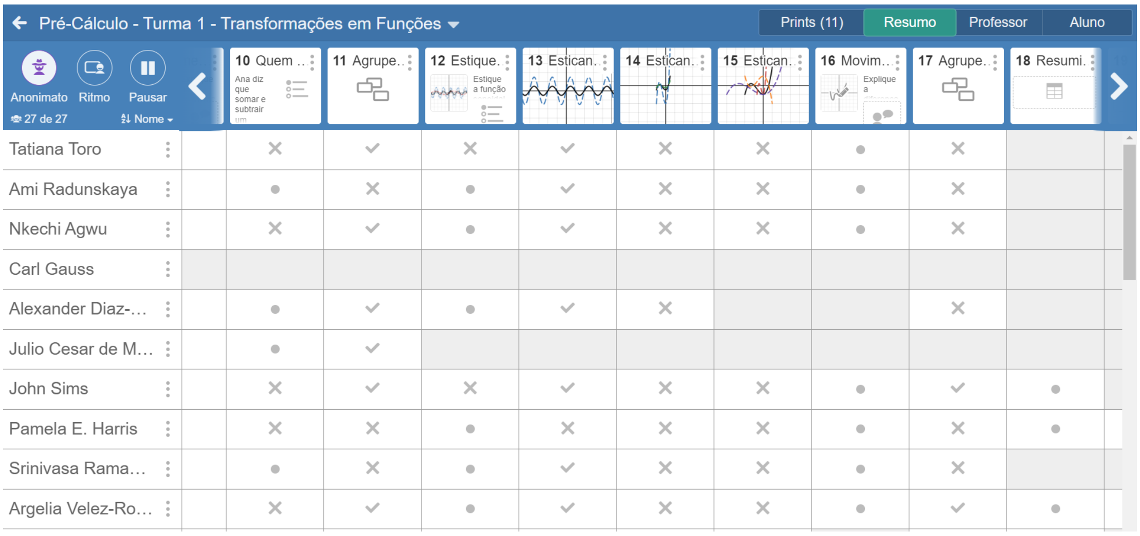


Figura 11: Aba de Resumo do Painel de Controle.

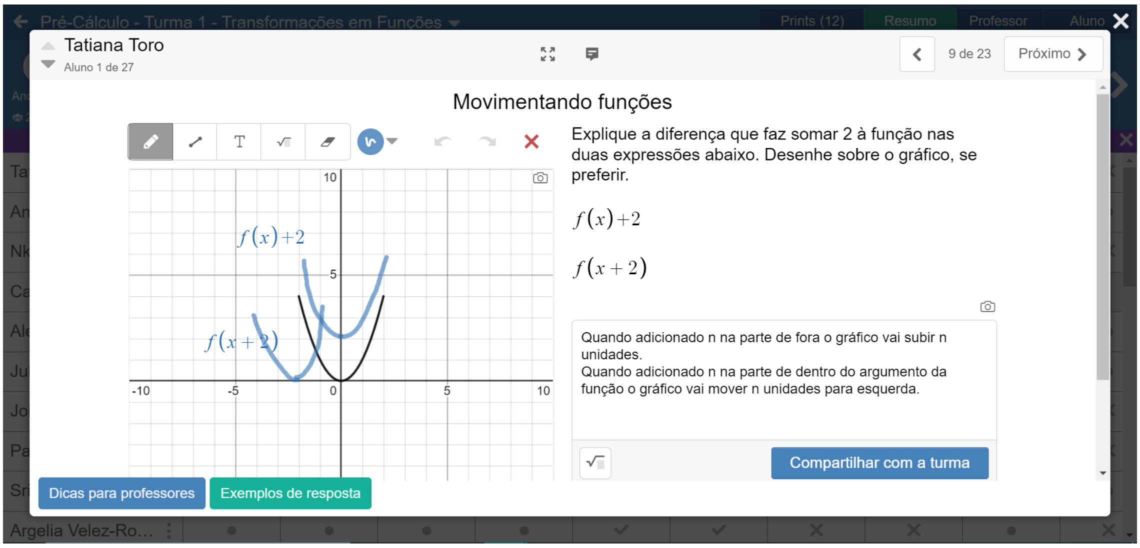


Figura 12: Visão da resposta de um aluno a partir do Resumo no Painel de Controle.

para eles. Para isso, basta selecionar a resposta do(s) estudante(s) e escrever na caixa de texto que aparece no canto inferior esquerdo da tela, como ilustrado na Figura 15. Ao selecionar as respostas aqui também é possível salvar o álbum de *prints*, enviando a seleção para a aba "Prints", explicada a seguir.

A primeira aba a esquerda, "Prints", ilustrada na Figura 16, é onde você consegue ver, organizar e projetar capturas de tela feitas de resoluções de alunos. Para que uma captura de tela apareça nessa aba, é preciso selecioná-la primeiro em uma das outras abas, clicando no ícone de câmera (disponível quando você visualiza a resposta de um aluno a partir da aba Resumo, como ilustrada na Figura 12, onde há um ícone de câmera no topo superior direito do desenho e da caixa de texto) ou na caixa de marcação (disponível nas

Figura 13: Símbolos no Resumo do Painel de Controle.
Traduzido do original disponível em
`help.desmos.com/hc/en-us/articles/4406992400269-Using-the-Teacher-Dashboard`.

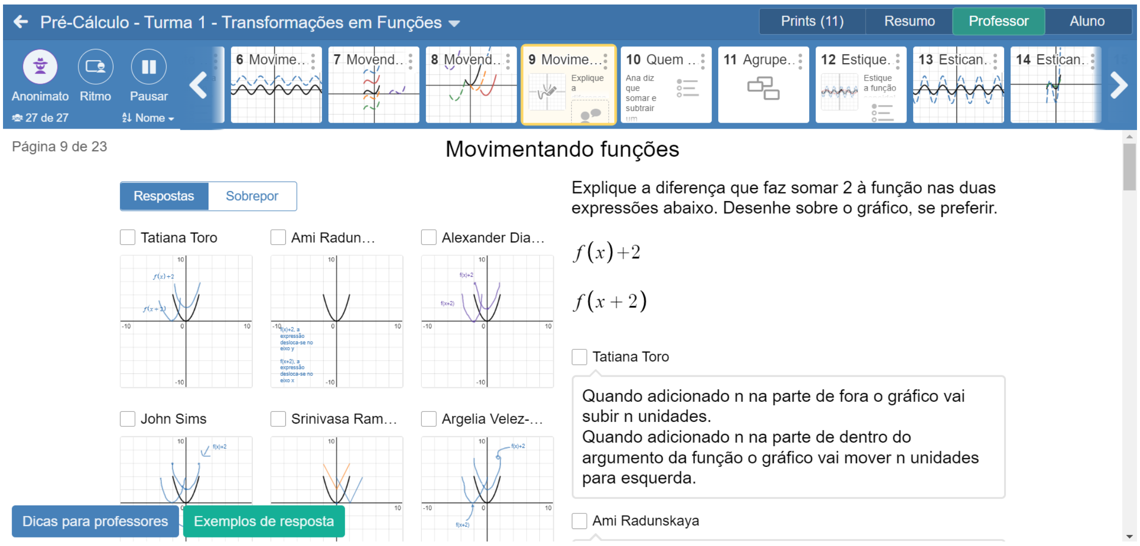


Figura 14: Aba de Professor do Painel de Controle.

respostas dos alunos na aba Professor, conforme ilustrado na Figura 14, onde há caixas de marcação no canto superior esquerdo da resposta de cada aluno).

Você pode organizar as capturas de tela em álbuns de até quatro capturas, e pode dar um título a este álbum. Nessa mesma aba, você pode clicar no ícone “Apresentar álbum” para entrar em uma visão de tela inteira deste álbum e projetar a seleção de capturas de tela para seus alunos. É também possível adicionar fotos oriundas de um dispositivo móvel a essa aba de capturas de tela. Para isso, no fim da coluna da esquerda, há a opção de enviar um link para abrir o painel de controle para seu *e-mail*. Você deve então abrir o painel de controle em um dispositivo com câmera e acesso à internet, e então carregar as imagens desejadas para o site.

A última aba, “Aluno”, mostra uma prévia da tela do aluno, semelhante a que é visível antes de entrar na atividade. Você pode usar essa aba para projetar a página para

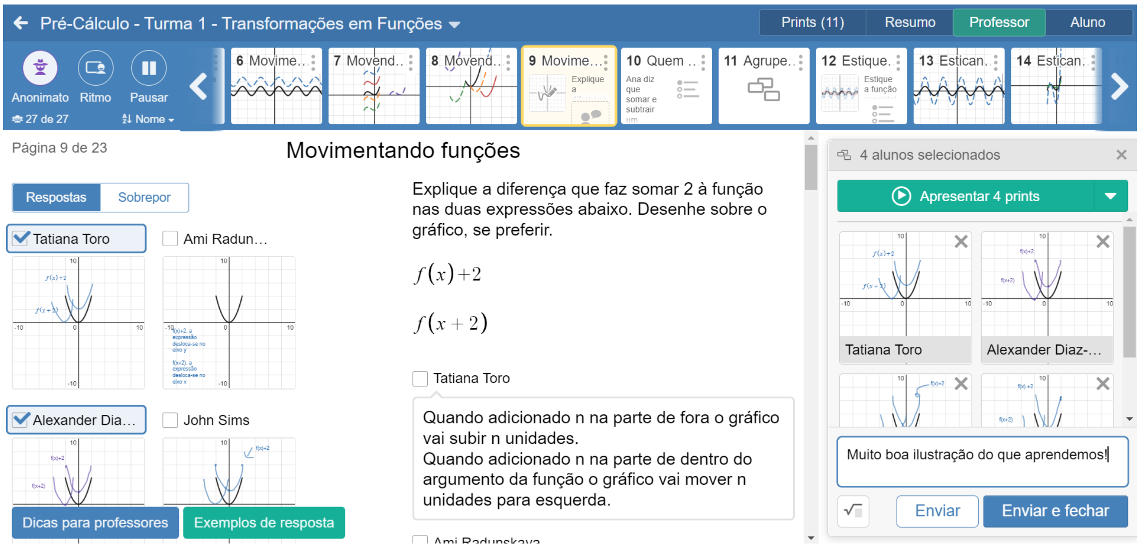


Figura 15: Aba de Professor do Painel de Controle, com respostas selecionadas para dar *feedback* ou salvar para a aba "Prints".

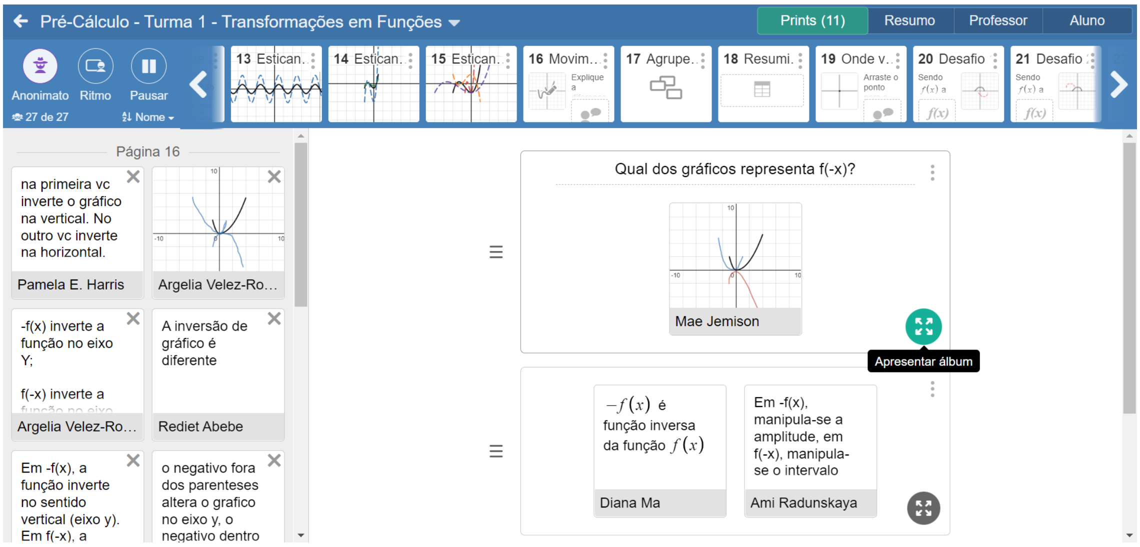


Figura 16: Aba de Prints do Painel de Controle.

os alunos e explicar a página antes dos alunos trabalharem nela ou para que a turma trabalhe de forma conjunta nessa página.

No canto superior esquerdo do painel de controle há ainda três opções de controle para utilizar durante a aplicação da atividade para os alunos. A primeira opção é o modo de anonimato. Quando ele está ativado, como na Figura 15, o nome dos alunos é substituído por nomes de matemáticos famosos, tanto no seu painel de controle quanto na visão individual de cada aluno. Ative essa opção quando você quiser projetar sua tela sem compartilhar informações dos alunos, por exemplo.

A segunda opção é a de Ritmo. Quando você ativa a opção de ritmo, você escolhe a quais páginas os alunos terão acesso. É uma forma de organizar o percurso dos alunos pela atividade, possibilitando que a turma toda foque numa mesma página para um debate, ou para garantir que nenhum aluno vá para uma determinada página antes de você ter certeza que eles entenderam os conceitos necessários. Para controlar a restrição de páginas, primeiro clique no ícone de ritmo, em seguida, selecione uma página, clicando na miniatura da página, conforme ilustrado na Figura 17. Você pode restringir seus alunos a uma página ou a um grupo de páginas. Quando tiver selecionado as páginas, clique no botão laranja escrito “Restringir”. Qualquer aluno que estiver fora do intervalo de restrição, neste momento vai ser levado à primeira página da restrição, e agora todos os alunos conseguem navegar apenas entre as páginas que você delimitou. A qualquer momento, você pode desligar a opção de ritmo, clicando no botão “Parar”, ou editar o intervalo de restrição, clicando em “Editar” ou incluindo uma página clicando no ícone de +.

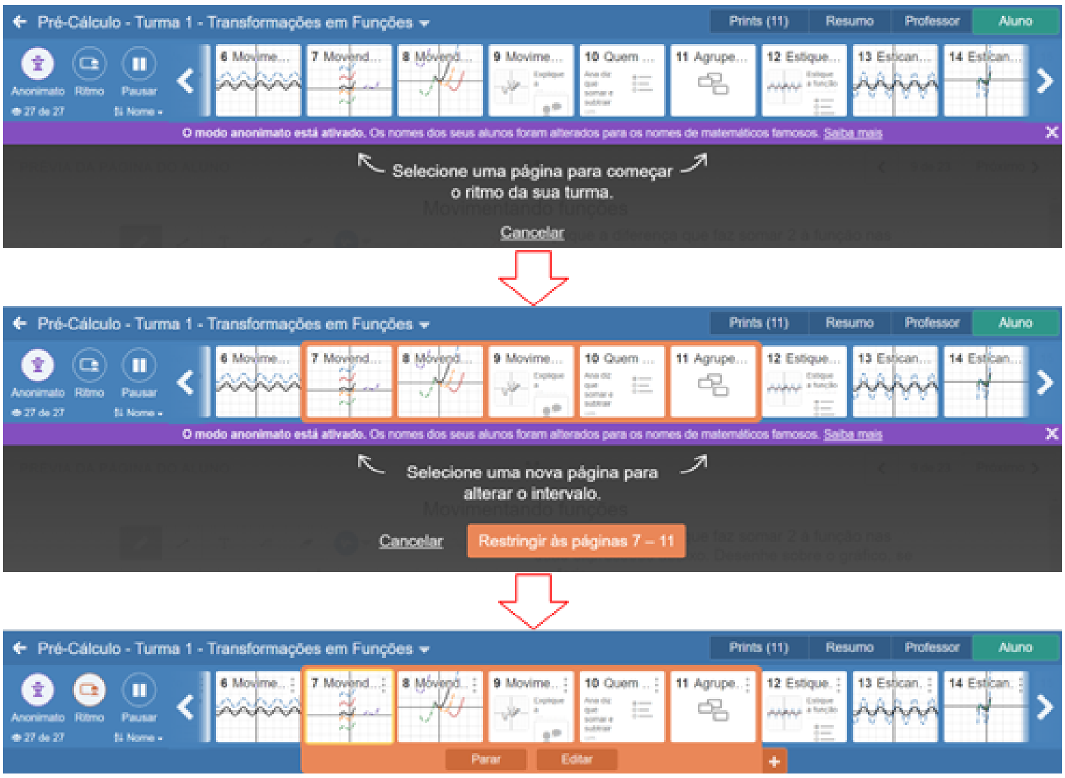


Figura 17: Utilização da opção de Ritmo no Painel de Controle.

O último ícone de controle é o de Pausa. Quando este ícone é ativado, aparece uma mensagem de pausa na tela dos alunos e todas as opções de interação com a atividade são suspensas para eles. Use esta opção quando quiser chamar a atenção da turma para alguma discussão ou aviso.

Existe outra opção de personalizar a aplicação da atividade: ocultar uma tela. Caso você esteja com menos tempo do que planejava ou queira adequar a atividade à realidade da turma, você pode preferir que os alunos não trabalhem em uma tela específica. Para isso, clique nos três pontos no canto superior direito da miniatura da página que deseja ocultar e selecione a opção "Ocultar página", conforme a Figura 18. A página oculta fica então com uma miniatura menor e opaca, as páginas seguintes recebem uma nova numeração e aparece um ícone de tornar a página visível novamente.

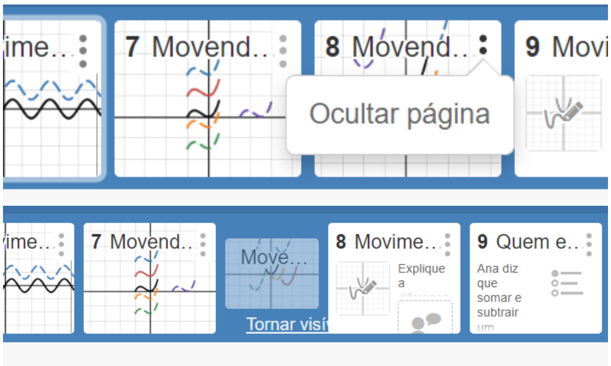


Figura 18: Como ocultar uma página dos alunos diretamente no Painel de Controle.

3.2.2 Criando e Editando atividades

Para personalizar ainda mais a experiência de seus alunos, você pode editar algumas das atividades disponíveis na plataforma. Para criar uma cópia editável de uma atividade disponível na plataforma, vá até a página da atividade (conforme Figura 8), clique no ícone com três pontos no canto superior direito e selecione "Copiar e editar". O construtor de atividades será aberto automaticamente, com um arquivo cópia da atividade para você editar. Nem todas as atividades disponíveis na plataforma estão disponíveis para cópia. Quando não for possível criar uma cópia, não será possível clicar na opção "Copiar e editar" no menu.

Caso queria, você também pode criar uma atividade do zero. Para isso, entre na página de Atividades de sala de aula, no menu à esquerda clique em "Atividades personalizadas", e então selecione "Nova atividade" no canto superior direito. Irá surgir uma página para você inserir o nome da atividade, a opção de selecionar as configurações de compartilhamento e uma descrição da atividade. As opções de compartilhamento são *Link* ou Privado. Selecione *Link* caso queira que a atividade seja visível por outros colegas com quem você compartilhar o *link* e selecione Privado caso queira que a atividade seja visível apenas para seu usuário. Independente da escolha, a atividade não aparecerá nas buscas na plataforma. Após inserir as informações, clique em "Criar nova atividade" e o construtor de atividades abrirá automaticamente.

A visão geral do construtor de atividades está representada na Figura 19. Na barra superior há uma seta para voltar para a página da atividade, o nome da atividade, um ícone para modificar os detalhes da atividade, um botão de prévia e um botão de publicar. Ao modificar os detalhes da atividade, além das opções de modificar o nome, descrição e configuração de compartilhamento da atividade, você também pode colocar uma imagem para aparecer na capa da atividade, escolher se os ângulos na atividade serão medidos em graus ou radianos (por padrão eles são medidos em radianos), e ativar a opção de aparecer uma calculadora nas páginas dos alunos (funcionalidade BETA, pode ser alterada ou removida). O botão de prévia mostra como a página aparecerá para os alunos. O botão de publicar salva a atividade de forma que é possível atribuí-la a uma turma com as modificações feitas. Se você sair da edição sem publicar as alterações, a atividade será salva como um rascunho, mantendo suas edições porém sem que elas estejam aparecendo na página da atividade.

Figura 19: Visão geral do construtor de atividades.

Logo abaixo há uma barra com miniaturas das páginas já criadas e um ícone de + para criar uma nova página. A esquerda há um botão de Dicas do professor, onde você pode adicionar dicas para professores que irão aplicar a atividade, exemplos de resposta e ajuda ao aluno para cada página da atividade. As dicas para professores e os exemplos de resposta só são visíveis para o professor, tanto ao visualizar a atividade quanto ao aplicá-la com uma turma. Junto a este botão, há um ícone com o símbolo “$< / >$” para editar a camada de computação (*computation layer*), e um ícone com três pontos que abre as opções de duplicar e de excluir a página atual.

Uma barra vertical na esquerda permite que você insira itens na página da atividade, e a página da atividade aparece em toda a região a direita desta barra. Os itens disponíveis para inserção são:

Nota. Insere um texto ou equação que aparecerá para o aluno. Não é um item interativo, mas é o item básico para inserir informações e instruções nas atividades.

Entrada de texto. Um item para coletar respostas dos alunos na forma de texto. Você pode optar por tornar as entradas de texto dos alunos visíveis aos colegas ou não. Caso opte por deixá-las visíveis, após o aluno compartilhar sua resposta com os colegas, aparecerão as respostas de três outros colegas na tela.

Equação. Um item para coletar respostas dos alunos na forma de equação. É possível escolher se um aluno precisa explicar sua resposta, situação na qual após ele enviar a resposta aparecerá uma caixa de entrada de texto com o comando "Explique seu raciocínio". Também é possível escolher se as respostas dos alunos serão visíveis aos colegas ou não.

Múltipla escolha. Um item em geral associado a uma pergunta (utilizando o item nota) em que o aluno escolherá uma dentre as opções de escolha. Assim como na equação, é possível escolher se um aluno precisa explicar sua resposta e se as respostas dos alunos serão visíveis aos colegas ou não. Há opção de tornar a ordem das alternativas aleatória, e de mudar o formato dos botões de escolha. Nas alternativas é possível colocar textos, equações ou gráficos.

Caixas de seleção. Um item em geral associado a uma pergunta (utilizando o item nota) em que o aluno poderá escolher mais de uma dentre as opções de escolha. Exceto pela capacidade de escolher mais de uma alternativa, as outras opções de personalização são equivalentes às do item múltipla escolha.

Lista ordenada. Um item no qual o aluno deverá alterar a ordem entre as alternativas, em geral associado a uma pergunta (utilizando o item nota). É opcional colocar uma legenda indicando de onde a onde ordenar, por exemplo, se você preencher com "Ordenar de *menor* até *maior*", aparecerão as legendas "menor" e "maior" na tela para o aluno. Há opção de aleatorizar a ordem em que aparecerem as alternativas e a opção de usar a ordem atual como gabarito para os alunos. Neste caso, a ordem das alternativas será automaticamente aleatorizada e o gabarito será usado para indicar se o aluno acertou ou errou no Resumo do painel de controle.

Gráfico. Elemento básico das atividades em sala de aula, este item cria um gráfico na página do aluno. Os gráficos podem ser usados para mostrar alguma informação, mas também podem ter elementos interativos como um ponto móvel (arrastável) ou uma função manipulável. Ainda assim, o aluno não terá acesso à lista de expressões como na Calculadora Gráfica, e portanto, não poderá inserir expressões no gráfico. Dependendo do nível de conhecimento da calculadora gráfica *Desmos*, é possível usar o item gráfico para criar pequenos *applets* interativos.

Desenho. Insere na página do aluno uma ferramenta com a qual o aluno pode desenhar sobre um fundo pré-determinado. O fundo pode ser um gráfico, uma imagem ou um fundo branco. O aluno pode desenhar usando um traço livre, inserir segmentos de retas, inserir textos e equações e tem acesso também a uma borracha e opções de alterar a cor e a espessura do traço.

Mídia. Permite adicionar imagens e vídeos à página do aluno. Ao inserir um arquivo de mídia é possível inserir junto uma descrição da imagem ou uma transcrição do vídeo para manter a atividade acessível para alunos com deficiência visual.

Tabela. Insere uma tabela na página do aluno. A tabela pode conter informações na forma de texto ou de equação. Ela pode mostrar informações, com todas as células completas, ou pode ter algumas células em branco para que o aluno complete.

Botão de ação. Permitem que você controle outros componentes na página usando a Camada de Computação (*Computation Layer*), conforme descrito na Subseção 3.2.2.1.

Calculadora gráfica. Um item que ocupa a tela inteira, e portanto não pode ser usado com os demais itens. Este item insere uma tela com a calculadora gráfica da *Desmos*, de forma que o aluno possa fazer tudo que faria na calculadora gráfica fora da Atividade em Sala de Aula. Ainda assim, é possível inserir expressões iniciais, como notas ou equações, na janela de expressões (conforme Seção 3.1) de forma a deixar instruções para o aluno. É possível também colocar expressões em uma pasta oculta para os alunos, de forma que eles não tenham acesso ao que foi digitado.

Marbleslides. Um item que ocupa a tela inteira, e portanto não pode ser usado com os demais itens. Para que este item apareça no construtor de atividades é necessário primeiro ativar a opção em `https://teacher.desmos.com/labs?`. O *Marbleslides* é um jogo criado pela *Desmos* no qual o objetivo é que o aluno consiga fazer uma série de esferas passar por cima de todas as estrelas na tela. Para isso, o aluno deverá editar as expressões na lista de expressões da calculadora gráfica de forma a direcionar as esferas com as representações gráficas das expressões e então clicar no botão "Lançar" para lançar as esferas. Neste item, o professor deve pré-programar a posição de lançamento das esferas e das estrelas, e opcionalmente, deixar expressões já digitadas para que os alunos editem. É possível também colocar expressões em uma pasta oculta para os alunos, de forma que eles não tenham acesso ao que foi digitado. Esse item foi utilizado amplamente na atividade "Escorrega de Funções", utilizada na Aula 7 da sequência didática, descrita na Subseção 4.4.5.

Ordenação de fichas. Um item que ocupa a tela inteira, e portanto não pode ser usado com os demais itens. Este item consiste em uma atividade em que o aluno deverá agrupar as fichas criadas pelo professor, utilizando alguma característica em comum entre as fichas. O professor deve criar as fichas, que podem conter equação ou texto, uma imagem ou um gráfico. É opcional ao professor criar um gabarito para que apareça de forma automática no Resumo no painel de controle se o aluno agrupou as fichas corretamente ou não.

Polygraph. Um item que ocupa a tela inteira, e portanto não pode ser usado com os demais itens. O *Polygraph* é um jogo entre colegas no qual o objetivo é que através de perguntas do tipo "sim ou não" e raciocínio lógico, se descubra a função escolhida pelo parceiro sorteado a cada rodada. É uma adaptação online e matemática do jogo Cara a Cara, lançado no Brasil em 1986 pela empresa Estrela. Para criar o jogo o professor deve construir 16 gráficos únicos, digitando equações na lista de expressões de uma tela semelhante a calculadora gráfica que irá aparecer no construtor de atividades. Na borda inferior da página aparece a opção para os alunos jogarem ou não uma partida teste explicando o funcionamento do jogo antes de fazerem uma partida com os gráficos criados pelo docente. É possível também editar ou apagar as perguntas que estão em uma barra a esquerda do construtor de atividades, onde antes ficavam os itens. As perguntas estão em inglês por padrão, e aparecem para os alunos responderem entre duas partidas, de forma a refletir sobre a estratégia no jogo.

Geometria. Para que este item apareça no construtor de atividades é necessário primeiro ativar a opção em `https://teacher.desmos.com/labs?`. Este item cria o produto de geometria da *Desmos* dentro da atividade. Essa é uma funcionalidade BETA e pode ser alterada ou removida sem aviso prévio.

Uma facilidade do construtor de atividades é poder copiar a página de uma atividade para outra, bastando para isso entrar na prévia do aluno e clicar no ícone de cópia (dois retângulos) a direita do texto "Prévia da página do aluno", e então colar no construtor de atividades. Você pode copiar páginas de diversas atividades, utilizando a prévia do aluno disponível na página da atividade. Copiar páginas de atividades prontas e modificá-las é uma boa forma de aprender a mexer no construtor de atividades e descobrir novas funcionalidades da plataforma, em especial a utilização da Camada de Computação.

Embora seja possível compartilhar uma atividade com outros colegas, inclusive dando permissão para que possam editá-las (clicando em "Gerenciar editores" no menu de três pontos na página da atividade, fora do construtor de atividades), a edição da atividade só pode ser feita por uma pessoa de cada vez.

3.2.2.1 Camada de Computação (*Computation Layer*)

A camada de computação, chamada de *Computation Layer* ou CL pela *Desmos*, é uma programação que permite que diferentes componentes de uma atividade "conversem" uns com os outros. Utilizando a camada de computação você irá conseguir conectar diferentes representações, customizar o conteúdo da atividade e dar *feedback* dinâmico e interpretativo para seus alunos. É possível adicionar uma camada de computação em uma página ou em um item adicionado à página, clicando no ícone "< / >" correspondente à página (ao lado do botão Dicas do professor) ou ao item desejado (no canto superior direito do item, à esquerda do menu de três pontos). Quando uma página ou item estiver com uma camada de computação o ícone "< / >" correspondente passará a ser envolto em um círculo verde.

O código da camada de computação é baseado em "*sinks*" e "*sources*" e diferem um pouco das linguagens de programação mais comuns por não ter uma estrutura de comandos que são lidos em sequência e sim uma estrutura de fórmulas de igualdade, semelhante ao que se escreve em uma planilha eletrônica. Os *sinks* permitem você injetar informação em um item, enquanto os *sources* permitem que você leia a informação de um componente. Exemplos simples do que é possível ser feito com a camada de computação das atividades estão listados abaixo:

- Colocar um texto inicial padrão em um item de Entrada de texto para guiar a resposta do aluno, como por exemplo "Eu acredito que..." ou "Eu escolhi essa opção porque ...".
- Usar o valor numérico digitado pelo aluno em um item de Equação para definir um parâmetro em uma expressão programada em um item de Gráfico.
- Criar um texto dinâmico em um item de Nota que usa a expressão digitada por um

aluno em um item de Equação e retorna o valor numérico da expressão.

- Fazer o gráfico se mover em uma direção após o aluno pressionar um botão de ação.
- Programar uma correção automática para aparecer no Resumo do painel de controle do professor, bem como configurar o ícone de aviso.

Os *sinks* e *sources* disponíveis diferem dependendo do tipo de componente, e um guia completo de como programar a camada de computação foge do escopo deste trabalho. Toda a documentação de como utilizar a camada de computação pode ser encontrada em inglês em `https://teacher.desmos.com/computation-layer/documentation`. Há também um fórum disponibilizado pela *Desmos* para tirar dúvidas e compartilhar formas inovadoras de usar a camada de computação no link `https://cl.desmos.com/`.

3.3 EXEMPLO DE CONSTRUÇÃO DE UMA ATIVIDADE

Aqui, vamos construir[7] algumas páginas da atividade "Transformação de Funções", utilizada na Aula 6 da Sequência Didática (Subseção 4.4.4) para ilustrar como usar os diferentes itens e ferramentas descritos na Subseção 3.2.2.

O Apêndice A contém uma lista das funcionalidades abordadas nas diferentes subseções abaixo, de forma a guiar o leitor que procura alguma informação específica. A estrutura resumida de cada uma das páginas abordadas aqui é:

Página 1, Subseção 3.3.1. Um item de Gráfico com ponto móvel interativo e um item de Nota com instruções ao aluno.

Página 4, Subseção 3.3.2. Um item de Nota com a instrução para o aluno, um item de Múltipla escolha que atua como um alternador, ora aparecendo um componente Gráfico, ora aparecendo outro.

Página 5, Subseção 3.3.3. Um item de Nota com um feedback interativo utilizando a posição de um ponto móvel do componente Gráfico, e duas perguntas utilizando componentes Múltipla escolha, com correção automática.

Página 6, Subseção 3.3.4. Um item de Calculadora gráfica (Tela cheia) com pastas ocultas para o aluno e correção automática do gráfico feito pelo aluno.

[7] Para melhor aproveitamento dessas instruções, é ideal que você abra o construtor de atividades e tente fazer as páginas enquanto acompanha este texto. Você pode conferir o resultado final no link `https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/6165e6313becaf1a13a2bffb?`.

Página 9, Subseção 3.3.5. Um item de Nota com uma pergunta aberta a ser respondida em um item de Entrada de texto, e um item de Desenho para os alunos esboçarem suas ideias.

Página 11, Subseção 3.3.6. Um item de Ordenação de fichas (Tela cheia) com gabarito para correção automática.

Página 18, Subseção 3.3.7. Um item de Tabela com células pré-prenchidas e células para os alunos preencherem.

Página 19, Subseção 3.3.8. Uma página copiada de uma atividade já existente na plataforma e traduzida para o português.

Página 20, Subseção 3.3.9. Um item de Desenho com um gráfico de plano de fundo, um item de Nota e um item de Equação.

Página 23, Subseção 3.3.10. Um item de *Marbleslides* com funções pré-definidas para o aluno manipular.

3.3.1 Página 1 - Itens utilizados: Gráfico e Nota

Primeiro, coloque um título na página, digitando "Funções de Primeiro Grau" na linha onde está escrito "Adicione um título ou instruções para os alunos.". Em seguida, insira um item de nota, clicando sobre a opção no menu lateral esquerdo. Digite o texto abaixo na caixa de texto que aparecerá na tela.

> No gráfico a esquerda, podemos ver 5 linhas retas, que representam o gráfico de 4 funções de primeiro grau e uma função constante.
> É possível mexer os pontos pretos para fazer a reta preta ficar sobre cada uma das outras retas, uma de cada vez. Tente fazer isso!
> Dessa forma, podemos pensar que todas as funções de primeiro grau são transformações de uma função "base", que apenas muda de posição e direção.

Agora, insira um item de gráfico, clicando na opção correspondente no menu lateral esquerdo. Para editar o gráfico, clique sobre o item que apareceu ao lado da caixa de texto, consistindo de um plano cartesiano com os dizeres "Editar gráfico" escritos no centro. Ao clicar no gráfico, surgirá uma janela semelhante à calculadora gráfica, com o título "Editar esse gráfico". Você pode importar um gráfico colando a *URL* de um gráfico salvo na calculadora gráfica na lista de expressões. Aqui vamos criar dois pontos móveis, uma linha que passa por esses dois pontos, e cinco linhas pontilhadas.

Para criar um ponto móvel, digite (p_{1x}, p_{1y}) na lista de expressões e clique *enter*. O programa automaticamente criará dois parâmetros, p_{1x} e p_{1y}, ambos com valores iniciais de 1 e controlados por meio de um "controle deslizante". Caso prefira, você pode digitar $p_{1x} = 1$ em uma linha de expressão e $p_{1y} = 1$ em outra linha. Por padrão o ponto já está configurado para ser arrastável, e está na cor vermelha. Para alterar a cor do ponto para preto, clique e segure sobre o círculo vermelho à esquerda na linha de expressões. Quando aparecer o menu de personalização do ponto, solte o botão e clique sobre a cor preta. Para criar o segundo ponto móvel, siga os mesmos passos, digitando (p_{2x}, p_{2y}) na lista de expressões, e deixe este ponto também na cor preta. Para que os dois pontos não fiquem no mesmo local, mude os valores iniciais de p_{2x} e p_{2y} para zero, digitando o valor 0 na linha de expressão do parâmetro ou arrastando o círculo azul na reta associada ao parâmetro.

Para criar a reta que passa por estes dois pontos, basta digitar uma equação de reta utilizando os parâmetros dos pontos, $(x - p_{1x})(p_{2y} - p_{1y}) = (y - p_{1y})(p_{2x} - p_{1x})$, obtida manipulando $y - y_0 = m(x - x_0)$, com $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ para não ter frações, mais difíceis de digitar que a expressão acima. A seguir, clique sobre o ícone de personalização da linha e selecione a cor preta.

Por fim, crie outras quatro funções, digitando suas expressões na lista de expressão. Aqui, foram usadas as funções $y = -2$, $y = 3x - 3$, $y = 1.5 - 0.5x$ e $y = -3x - 5$. Edite cada uma delas para que tenham cores distintas entre si e diferentes da linha preta móvel, e personalize o tipo de traço para tracejado, no mesmo menu de personalização das cores.

Você deve estar com 11 linhas de expressão e um gráfico semelhante ao exposto na Figura 20. Opcionalmente, você pode organizar suas expressões em pastas. Ao finalizar a edição do gráfico, clique no botão "Concluído" no canto superior direito.

Você pode abrir a camada de computação do componente Gráfico clicando no ícone "< / >" do componente, e digitar `trace:false`, para que quando o aluno clicar sobre uma das funções no gráfico, não apareça as coordenadas dos pontos. Em seguida, pular uma linha e digitar `readOnly: true`, para que esse componente não seja computado para o controle de correção da atividade no painel do professor. Sem este comando, aparecerá um ponto no painel do professor, indicando a necessidade de verificação manual pelo professor. Com este comando, aparecerá um hífen, indicando que não há nada para conferir naquela página. Por fim, clique em "Concluído" e o ícone da camada de computação do componente será envolto por um círculo verde.

Outra opção é inserir "Dicas do professor", clicando neste botão à esquerda, acima da lista de itens para adicionar na página. Aqui você pode digitar uma dica para professores e um texto de ajuda aos alunos, mas não indicamos um exemplo de resposta para

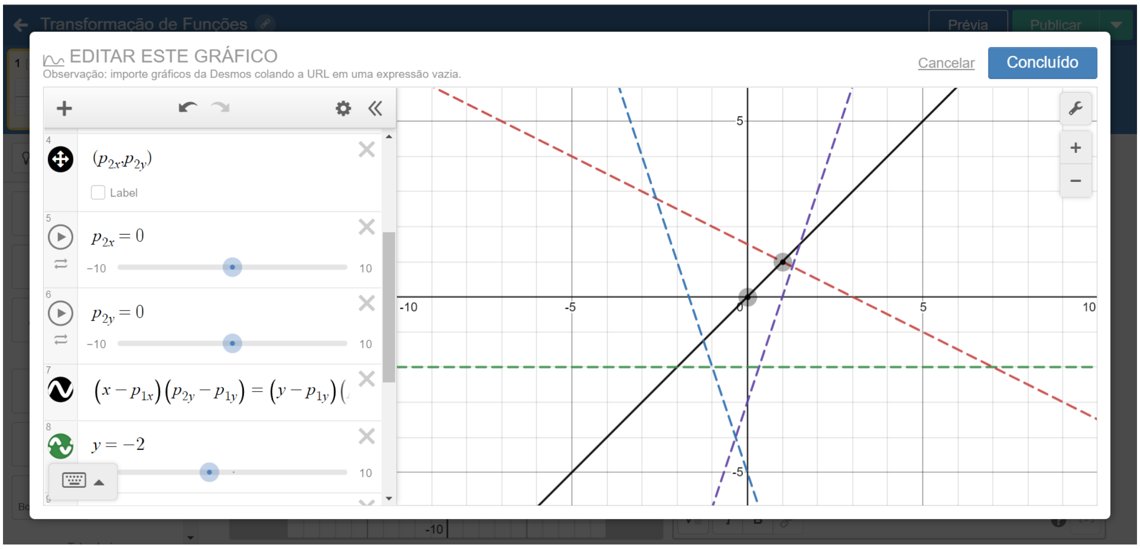


Figura 20: Gráfico utilizado na página 1 da atividade Transformação de Funções.

essa página em específico. Ao finalizar a edição do texto, clique em “Concluído” e o botão “Dicas do professor” se tornará verde.

Sua página deve estar semelhante à ilustrada na Figura 21. Você pode clicar no botão “Prévia” no canto superior direito para testar como a página aparecerá para o aluno.

É importante ressaltar que o plano cartesiano aparecerá para os alunos com o mesmo enquadramento que for deixado na página no construtor de atividades. Confira o enquadramento das funções que você digitou utilizando a prévia do aluno, e ajuste para garantir que os alunos verão todos os gráficos necessários para completar a atividade.

Para adicionar a próxima página, clique no ícone de + na linha azul do topo da página. As páginas 2 e 3 da atividade podem ser construídas de forma análoga à página 1, e portanto suas construções serão omitidas aqui. Lembre-se que você pode copiar uma página completa clicando no ícone de copiar (dois retângulos) na prévia do aluno e colando no construtor de atividades.

3.3.2 Página 4 - Itens utilizados: Gráfico, Nota e Múltipla escolha.

A estrutura dessa página consiste em um item de nota com a instrução para o aluno, um item de múltipla escolha que atua como um alternador, ora aparecendo um componente gráfico, ora aparecendo outro.

Primeiro, adicione o título “Família de Funções” à página, e em seguida, um item de Nota, e adicione o texto abaixo na caixa de texto. É possível formatar o texto para colocar negrito clicando no botão **B** no canto inferior esquerdo da caixa de texto.

Note que não é possível mover uma parábola para sobrepor uma senoide,

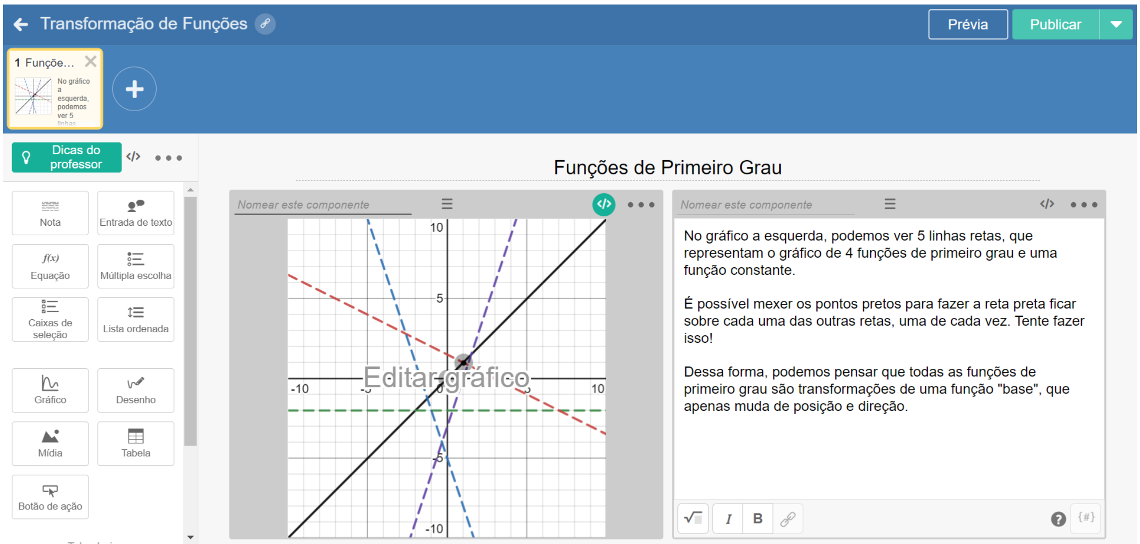


Figura 21: Página 1 da atividade Transformação de Funções.

> nem é possível mover uma senoide para sobrepor uma parábola: elas são de famílias diferentes.
> Você consegue reconhecer uma **família de funções** pelo gráfico ao se atentar para o **formato e as características do gráfico**, não importa a posição, direção, orientação ou o tamanho dele.

A seguir, adicione um item de Múltipla escolha e arraste-o para o lado direito do item de nota, clicando sobre o ícone de $\equiv$, segurando e arrastando o componente. Insira duas opções no item de Múltipla escolha, "Exemplo 1" e "Exemplo 2". Não selecione a opção "Pedir ao aluno para explicar sua resposta".

Insira um item de Gráfico, arraste-o para baixo do item de múltipla escolha e escreva as expressões abaixo na lista de expressões do gráfico:

1. (a, b)
2. $a = 0$
3. $b = 0$
4. $(a + c, b + d)$
5. $c = 1$
6. $d = 1$
7. $y = \frac{d}{c}(x - a) + b$
8. $y = x^2$

As expressões 1 e 4 são os pontos móveis, enquanto as expressões 2, 3, 5 e 6 são os parâmetros desses pontos. A expressão 7 dá uma reta que passa pelos pontos móveis, e a expressão 8 é uma função de 2º grau. Personalize cada expressão de forma que os pontos e a reta sejam pretos e a função de segundo grau seja vermelha e com linha tracejada.

Insira um segundo item de Gráfico, arraste para baixo do primeiro item de gráfico e insira as expressões abaixo na lista de expressões.

1. (a, b)
2. $a = 0$
3. $b = 0$
4. $(a + c, b + d)$
5. $c = 1$
6. $d = 1$
7. $y = k\left(x - a\right)^2 + b$
8. $k = \frac{d}{c^2}$
9. $y = \sin x$

As expressões 1 a 6 tem o mesmo papel do primeiro gráfico. A expressão 7 é uma função de segundo grau que passa pelos pontos móveis, a expressão 8 está incluída apenas para a expressão 7 ficar menos carregada, e a expressão 9 é uma função senoidal. Note que, embora a calculadora gráfica esteja em português, é necessário escreve $\sin(x)$ ao invés de $\operatorname{sen}(x)$ para que ela entenda como uma função trigonométrica. Personalize cada expressão de forma que os pontos e a função de segundo grau sejam pretos e a função senoidal seja vermelha e tracejada.

Agora, vamos incluir uma camada de computação para fazer um gráfico aparecer de cada vez, dependendo da opção selecionada no componente de Múltipla escolha, uma vez que sem a camada de computação, ambos aparecem simultaneamente. Para isso, primeiro, nomeie o componente de Múltipla escolha, clicando na opção "Nomear este componente" no canto superior esquerdo do item, e digitando "escolha4". Os nomes dos componentes são utilizados para conseguir utilizar um *source* deste componente na camada de computação de outro componente. Estes nomes não podem conter espaços nem repetir em diferentes páginas da atividade, por isso a autora tem o hábito de nomear os componentes com o número da página, tornando assim o nome dos componentes únicos.

Em seguida, entre na camada de computação do primeiro componente Gráfico e digite:

`trace:false`

`readOnly: true`

`hidden: not(escolha4.isSelected(1))`.

Esse último comando esconde o componente Gráfico quando a opção 1 do componente Múltipla escolha não está selecionado. A estrutura do comando é primeiro o comando em si,

`hidden:`,

que manda esconder o componente, seguido da condição,

`not(escolha4.isSelected(1))`,

que do fim para o começo utiliza `isSelected(1)` para definir que dependerá da seleção da primeira escolha do componente `escolha4` não estar selecionada, utilizando o modificador `not()`.

Analogamente, no segundo componente Gráfico, abra a camada de computação e digite:

`trace:false`

`readOnly: true`

`hidden: not(escolha4.isSelected(2))`.

Para que uma das opções esteja sempre escolhida, e portanto um dos componentes gráficos esteja sempre aparecendo, vá nas opções do componente Múltipla escolha, clicando no ícone de três pontos no canto superior direito do componente, e selecione "Sempre selecionar uma opção".

Por fim, adicione as "Dicas do professor" e teste a página utilizando a prévia do aluno.

3.3.3 Página 5 - Itens utilizados: Gráfico, Nota e Múltipla escolha.

Nessa página, vamos usar um gráfico interativo vinculado a um *feedback* instantâneo no componente de nota, e duas perguntas de múltipla escolha. Primeiro, insira o título da página, "Translação de Funções". Em seguida, insira um item de Gráfico com as seguintes expressões:

1. (a, b)

2. $a = 0$

3. $b = 0$

4. $y = \sin(x - a) + b$

5. $y = \sin(x) + 2$

6. $y = \sin(x)$

As expressões 1 a 3 criam o ponto móvel e a expressão 4 cria uma função senoidal que passa pelo ponto móvel. A expressão 5 é a função alvo que os alunos devem sobrepor ao arrastar a função senoidal móvel. A expressão 6 é a posição inicial da função senoidal móvel, para que os alunos tenham a visão do antes e depois. Configure o ponto e a função senoidal móvel para a cor preta. Configure a expressão 5 para a cor azul e linha pontilhada e a expressão 6 para a cor preta e linha pontilhada, mas com opacidade de 0.4 no lugar de 0.9.

Como os alunos vão arrastar o ponto e usar os valores dos parâmetros a e b (coordenadas do ponto móvel) para quantificar o movimento, é interessante limitar a gama de valores que a e b podem assumir. Para isso, clique em um dos limites dos parâmetros a e b e coloque 0.1 na opção “Step:”. Isso fará com que os valores de a e b sejam limitados a múltiplos de 0,1.

Para usar os valores de a e b no *feedback* no item de nota, vamos usar a camada de computação e extrair esses valores do componente gráfico. Para isso, nomeie esse componente, por exemplo “Grafico5”.

Agora, insira um item de Nota e coloque o texto abaixo na caixa de texto:

> Arraste a função senoidal preta ao lado para que ela sobreponha a função azul.
> Para fazer isso você precisa mexer o gráfico em que direção?

Agora, abra a camada de computação do item Nota. Para criar uma variável a com o valor do parâmetro a no componente Grafico5, digite `a = Grafico5.number("a")`. Analogamente, digite `b = Grafico5.number("b")`. Agora, vamos criar uma variável chamada `feedback` que aparecerá na Nota quando o aluno arrastar o gráfico. Para isso, digite:

```
feedback =
    when b=0 and a=0 ""
    otherwise "Você moveu a função ‘${b}‘ unidades na vertical
    e ‘${a}‘ unidades na horizontal."
```

A variável `feedback` é assim criada usando um condicional, de forma que, quando a e b forem ambos zero, ou seja, antes do aluno arrastar o gráfico, não aparecerá nada (não há nada entre as aspas após esta condição), e caso contrário, aparecerá o texto escrito após a palavra "*otherwise*", onde os valores de a e b são puxados instantaneamente do componente Grafico5.

Para que o *feedback* apareça para os alunos, é necessário incluí-lo na caixa de texto do componente Nota. Para isso, escolha o lugar do texto em que deseja inserir o *feedback*, aqui será feito entre os dois parágrafos, e coloque seu cursor neste ponto do texto. Em seguida, clique no ícone {#} no canto inferior direito da Nota e clique em "feedback". A palavra `feedback` envolta em uma caixa verde aparecerá na caixa de texto, como ilustrado na Figura 22. Entre na prévia do aluno e verifique se ao arrastar a função pelo plano cartesiano o *feedback* interativo está funcionando.

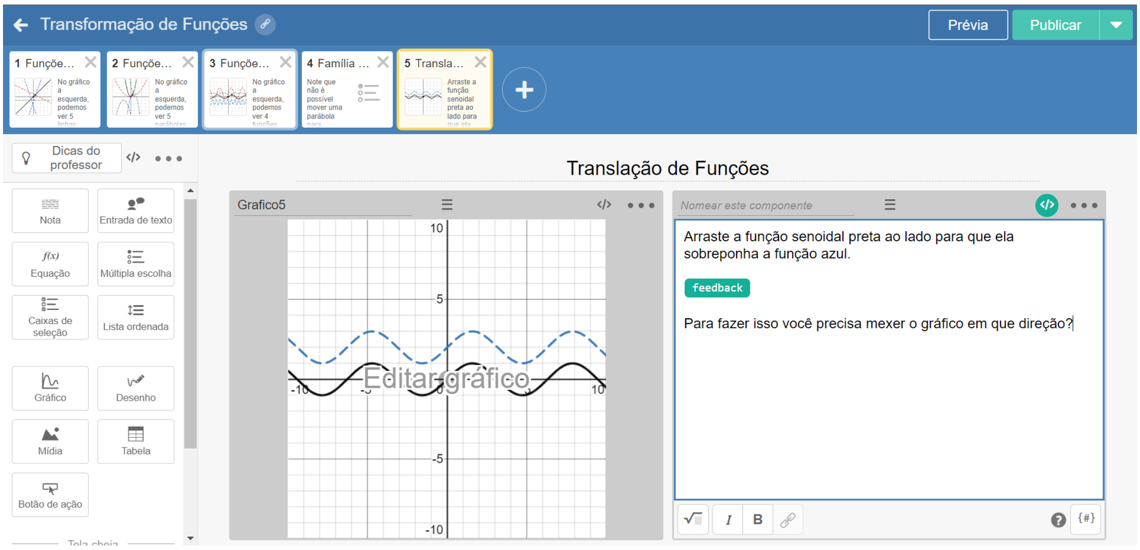


Figura 22: Rascunho da página 5 da atividade Transformação de Funções.

Agora, insira um item de Múltipla escolha e adicione as opções "Vertical" e "Horizontal". Insira um item de Nota com a pergunta "Essa direção corresponde a qual eixo do plano cartesiano?" e um item de Múltipla escolha com as opções "Eixo x" e "Eixo y". Para inserir x e y formatado como equação, use o ícone de raiz quadrada envolto em um círculo verde do lado direito da opção, conforme ilustrado na Figura 23.

Por fim, opcionalmente podemos configurar a página para que seja corrigida automaticamente, aparecendo um ok ou um xis no Resumo no painel do professor. Nesta página há 3 respostas dos alunos para serem consideradas. Para a correção dos itens de Múltipla escolha, basta selecionar a opção correta no próprio componente. A opção selecionada ficará com o círculo a sua esquerda preenchido de azul, conforme mostra a

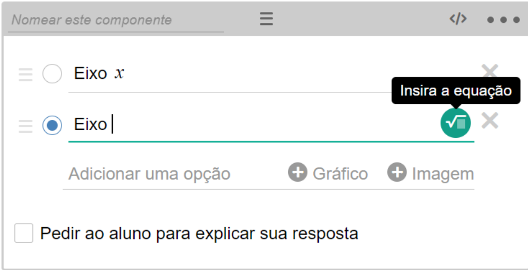


Figura 23: Botão de inserir uma equação na opção de um componente Múltipla escolha.

Figura 23 ao lado esquerdo da segunda opção. Selecione então as opções “Vertical” e “Eixo y” nos dois itens de Múltipla escolha.

Na prévia do aluno, você pode testar a correção. Para isso, clique no ícone com um ok e um xis no centro da parte superior da prévia do aluno, e a correção aparecerá na lateral de cada item, conforme ilustra a Figura 24. Nessa imagem, o primeiro item é marcado como incorreto (xis envolto em laranja) e o segundo item é marcado como correto (ok envolto em azul). No canto superior esquerdo, após o símbolo de copiar a página, aparece o símbolo que iria para o painel de controle do professor, no caso um xis, pois pelo menos uma das respostas está incorreta.

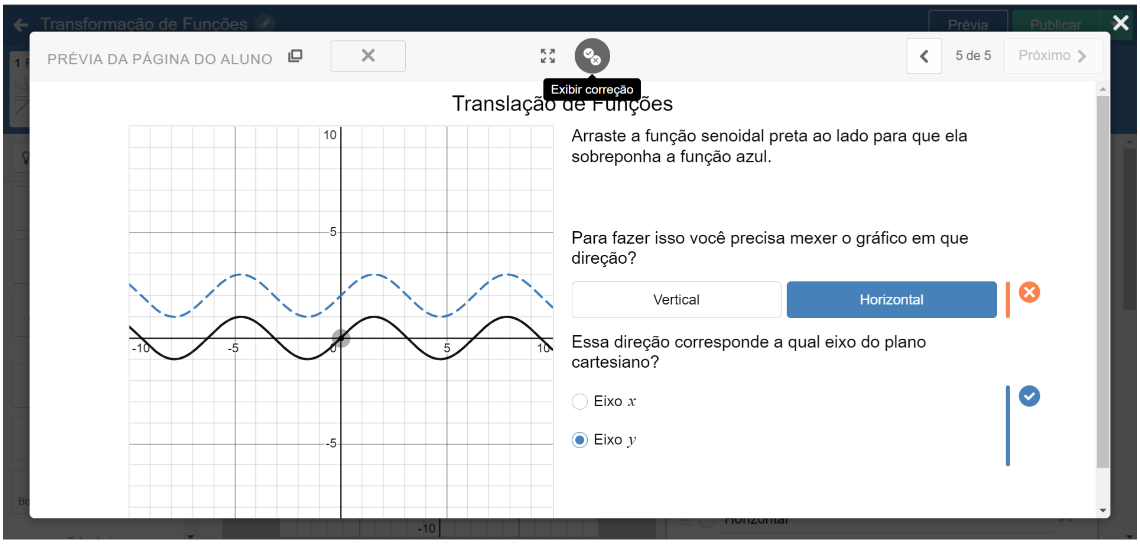


Figura 24: Prévia do aluno da página 5 evidenciando a correção dos itens de Múltipla escolha.

Para que a *Desmos* consiga corrigir a página toda de forma automática, ainda é preciso configurar a correção do componente gráfico, caso contrário, mesmo com as duas múltiplas escolhas respondidas corretamente, ainda aparecerá um ponto e não um ok no painel de controle do professor. Para isso, precisaremos configurar um parâmetro na lista de expressões do gráfico e usar a camada de computação. Na lista de expressões do componente Gráfico, insira as expressões abaixo.

7. $I_1 = \{\text{abs}\,(a - 0) < 0.2 : 1, 0\}$

8. $I_2 = \{\text{abs}\,(b - 2) < 0.2 : 1, 0\}$

9. $I = I_1 \cdot I_2$

Aqui optou-se por usar uma distância de 0,2 para que o aluno não tenha que alinhar os gráficos perfeitamente para ter a tarefa considerada correta, considerando que definimos a resolução da grade em 0,1. Assim, com as expressões acima, são criados três parâmetros, I_1, I_2 e I. O parâmetro I_1 tem o valor 1 se o ponto móvel não se deslocou na horizontal e portanto $|a| < 0,2$, e tem o valor 0 se a tiver módulo maior que 0,2, indicando que o ponto móvel está distante da posição pretendida na horizontal. A notação é primeiro a condição, $\text{abs}\,(a - 0) < 0.2$, dois pontos, o valor caso a condição seja verdadeira, vírgula, o valor se a condição for falsa. O parâmetro I_2 tem o valor 1 se o ponto móvel se deslocou 2 unidades na vertical, para cima, e portanto $|b - 2| < 0,2$, e tem o valor 0 se $b - 2$ tiver módulo maior que 0,2, indicando que o ponto móvel está distante da posição pretendida na direção vertical. O parâmetro I terá valor 1 se I_1 e I_2 forem ambos iguais a 1, e terá valor 0 caso contrário. Dessa forma, I terá valor 1 se o aluno deslocou o gráfico na vertical, 2 unidades para cima, sem deslocar o gráfico na horizontal, com a tolerância de 0,1 unidades. Agora, na camada de computação, deve-se digitar `correct: this.number("I") = 1`, utilizando o *sink* de correção caso o valor de I no componente gráfico seja igual a 1. A estrutura do comando é primeiro o *sink* de correção, dois pontos, o componente do qual se deve puxar a informação (no caso, *this* para o próprio componente em que está sendo adicionada a camada de computação), ponto, a variável que deve ser lida, igual, e o valor que deverá ser considerado correto.

Com esta configuração, caso o aluno responda corretamente aos dois itens de Múltipla escolha e arraste o ponto corretamente do $(0, 0)$ para o $(0, 2)$, aproximadamente, no painel de controle aparecerá um ok para o professor, e na prévia do aluno você poderá conferir, além dos oks para os itens múltipla escolha, um ok a esquerda do componente gráfico e um ok na barra superior, a direita do ícone de copiar a página.

Por fim, adicione "Dicas do Professor", incluindo dessa vez, além das dicas para os professores e uma ajuda aos alunos, também um exemplo de resposta.

3.3.4 Página 6 - Item utilizado: Calculadora gráfica.

Nessa página há uma calculadora gráfica em tela cheia com uma camada de computação para correção automática. Comece adicionando o título "Movimento na Vertical" na página e incluindo o item Calculadora gráfica, selecionando-o abaixo do título "Tela cheia" no menu lateral esquerdo.

Aqui, vamos organizar as expressões na calculadora gráfica usando pastas, para poder ocultar algumas expressões da visão dos alunos. Vamos também inserir instruções para os alunos, utilizando a inserção de notas na lista de expressão. Dessa forma, na lista de expressões da calculadora, insira:

1. **Nota:** Ao movimentar a função, você fez ela se mover na vertical, 2 unidades para cima. Esse movimento ocorreu no eixo y, onde estão representados os valores de $f(x)$.

2. **Nota:** Tente criar uma nova função, $g(x)$, fazendo alguma operação envolvendo o número 2 na função $f(x)$ de forma que o gráfico suba essas duas unidades.

3. **Pasta:** Fundo

    4. $f\left(x\right)=\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

    5. $y=f(x)+2$

6. $g(x)=f(x)$

7. **Nota:** Dica: Não altere o lado esquerdo da equação nem remova a variável x. Apenas teste incluir o número 2 na expressão acima em posições diferentes e com operações diferentes.

8. **Pasta:** Correção

    9. $X=[-5,...5]$

    10. $(X,f\left(X\right)+2)$

    11. $(X,g\left(X\right))$

    12. $I=\{\mathrm{total}\left(\left|g\left(X\right)-f\left(X\right)-2\right|\right)=0:1,0\}$

Para criar as notas das linhas 1, 2 e 7 e as pastas das linhas 3 e 9, clique no ícone de + no canto superior esquerdo do componente gráfico e "note" ou "folder" respectivamente. Note que não é possível escrever uma parte da nota formatada como equação, tudo o que é digitado em uma nota aparece como texto.

As expressões 4 e 5 estão indentadas para representar que estão dentro da pasta da expressão 3, e as linhas 9 a 12 estão indentadas para representar que estão dentro da pasta da expressão 8. Para arrastar uma linha para dentro de uma pasta, clique na faixa cinza na lateral esquerda da linha e arraste em direção à pasta até que surja uma barra vertical na lateral esquerda da linha, continuando a linha que sai da seta da pasta. As pastas das expressões 3 e 9 devem ter a opção “Hide this folder from students” marcada, para ocultar essas pastas da visão do aluno. Dessa forma, na visão do aluno aparecerão apenas as notas das linhas 1, 2 e 7, e a expressão da linha 6, mas numeradas em sequência, como se não existissem as pastas ocultas.

Configure a expressão 4 para a cor preta, com opacidade 0.4 e linha tracejada, a expressão 5 para a cor azul e linha tracejada, e a expressão 6 para a cor preta. Note que a ordem em que as expressões são digitadas cria camadas no gráfico, de forma que a última expressão a ser digitada aparece sobrepondo expressões anteriores, caso tenham pontos em comum. Para terminar a configuração do gráfico, clique no ícone de personalização da lista de pontos das expressões 10 e 11, sem manter pressionado, de forma a ocultar a representação gráfica dessas listas.

Aqui a estratégia de correção do gráfico dos alunos é diferente da utilizada na página anterior. A expressão na linha 9 cria uma lista de valores, enquanto as expressões nas linhas 10 e 11 criam uma série pontos pertencentes à $f(x)+2$ e $g(x)$ respectivamente. A expressão na linha 12 define um parâmetro I que assume o valor 1 se a diferença entre os valores de $g(x)$ e $f(x)+2$ nos pontos da lista X for igual a zero, situação na qual o gráfico de $g(x)$ está alinhado com a função alvo, $f(x)+2$, e caso contrário, I assume o valor 0.

Para finalizar, digite `correct: this.number("I")=1` na camada de computação, para que a tarefa seja corrigida como correta caso $I=1$. Como em uma calculadora gráfica o aluno pode editar as linhas de expressão, inclusive incluindo uma linha que conflite com os parâmetros e listas que você usou para correção, a esquerda da linha de comando na camada de computação aparecerá um ícone verde de aviso informando que as dependências podem não ser computadas corretamente, conforme ilustrado na Figura 25. Caso o aluno não insira nenhuma expressão que conflite com a correção, a correção será feita normalmente.

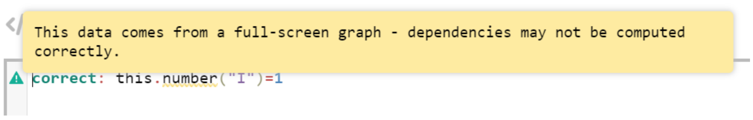


Figura 25: Aviso na camada de computação informando que correções em calculadoras gráficas de tela inteira podem não funcionar.

Não esqueça de conferir o enquadramento e adicionar as dicas para professores, exemplo de resposta e ajuda ao aluno.

A página 7 tem uma estrutura semelhante à página anterior, mas com mais funções para os alunos alinharem. Assim, para a correção, são criados diferentes parâmetros para cada gráfico que o aluno deve alinhar, e um parâmetro dado pelo produto destes é utilizado na camada de computação. Você pode conferir a estrutura da página copiando ela da prévia do aluno disponível em

`teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/6165e6313becaf1a13a2bffb?`

para o construtor de atividades, conforme será explorado na Subseção 3.3.8, e analisando as equações no componente Calculadora gráfica e na camada de computação.

A página 8 da atividade pode ser construída de forma análoga às páginas 7 e 6, e portanto sua construção será omitida aqui.

3.3.5 Página 9 - Itens utilizados: Desenho, Nota e Entrada de texto.

Nessa página há uma pergunta para os alunos responderem com um texto, e um plano cartesiano no qual eles podem desenhar para complementar sua resposta escrita. Para contruí-la, comece inserindo o título “Translação de Funções” no local adequado e inserindo um item de Desenho.

No componente de Desenho, no canto superior esquerdo, clique no botão de “Plano de fundo” e selecione “Gráfico editável”. Em seguida clique em “Editar gráfico”, insira a expressão $f(x) = x^2 \{-2 \leq x \leq 2\}$ e configure-a para a cor preta. Na prévia do aluno você pode experimentar a ferramenta de desenho, que permitirá ao aluno desenhar sobre esse gráfico.

Em seguida, adicione um item de Nota e insira o seguinte texto na caixa de texto:

> As duas expressões abaixo não representam o mesmo gráfico.
> $f(x) + 2$
> $f(x + 2)$
> Explique com suas palavras a diferença que faz somar 2 à função nas duas expressões. Desenhe sobre o gráfico ou volte à tela anterior e experimente novamente, se preferir.

Na caixa de texto do componente Nota, para inserir as expressões $f(x) + 2$ e $f(x + 2)$ formatadas como equações, clique no ícone de raiz quadrada no canto inferior esquerdo do componente.

Insira então um item de Entrada de texto e deixe marcada a opção “Exibir aos alunos as respostas dos colegas”. Essa opção fará com que, ao submeter sua resposta, o aluno verá o texto escrito por três outros colegas, de forma a verificar se seu raciocínio está em consonância com o dos colegas, e também ter acesso a outras formas de expressar a diferença nas duas transformações de translação.

3.3.6 Página 11 - Item utilizado: Ordenação de fichas.

Essa página contém um item de tela inteira, Ordenação de fichas, para que os alunos agrupem as fichas conforme o movimento de translação. Comece inserindo o comando "Agrupe as cartas de acordo com o movimento da função" na linha de título da página, uma vez que com o componente de Ordenação de fichas, não é possível inserir um item de Nota para dar o comando.

A seguir, clique sobre o botão de Ordenação de fichas no menu lateral esquerdo, após o título "Tela cheia". A tela do editor de atividades ficará semelhante à representada na Figura 26. No menu lateral esquerdo, você pode clicar sobre os botões "Equação ou texto", "Imagem" ou "Gráfico" para adicionar uma nova ficha. Aqui, vamos adicionar 10 fichas do tipo "Equação ou texto". Clique no botão para inserir a ficha e em seguida, adicione o texto ou equação (clicando no ícone de raiz quadrada no canto inferior esquerdo da ficha) conforme a lista abaixo:

Figura 26: Página do construtor de atividades com o item de Ordenação de fichas adicionado.

- Movimento para a direita
- Movimento para a esquerda
- Movimento para cima

- Movimento para baixo
- $f(x) + 14$
- $h(x) - 10$
- $f(x - 8)$
- $g(x + 25)$
- $g(1 + x)$
- $3 + h(x)$

Em seguida, clique em “Adicionar gabarito” no fim do menu lateral esquerdo, e agrupe as fichas, clicando e arrastando-as para que fiquem acopladas conforme mostra a Figura 27. Isso possibilita a correção automática do agrupamento feito pelos alunos e aparição do ok ou do xis no Resumo do painel do professor.

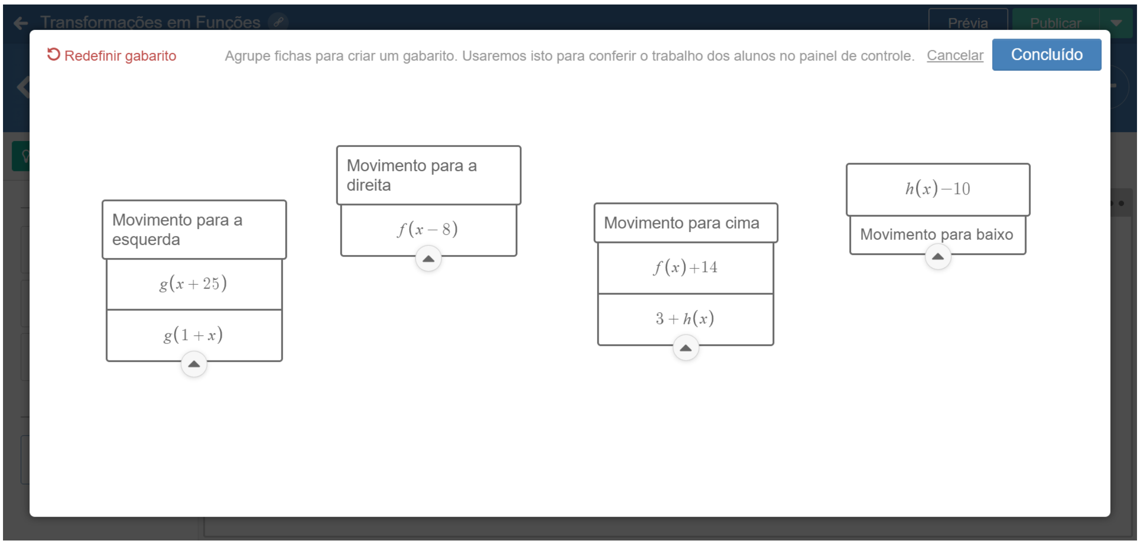


Figura 27: Página do construtor de atividades mostrando a opção de editar o gabarito do item de Ordenação de fichas.

As páginas 12 a 17 podem ser construídas de forma análoga a páginas já apresentadas anteriormente e portanto terão sua construção omitida aqui.

3.3.7 Página 18 - Item utilizado: Tabela.

Essa página tem uma tabela para os alunos preencherem de forma a resumir o que aprenderam sobre as transformações de funções. Comece inserindo o texto “Resumindo o que aprendemos" no espaço do título, e em seguida, insira um item de Tabela, clicando no ícone correspondente no menu lateral esquerdo. Insira então os títulos das colunas, "Tranformação" e "Efeito". Por padrão, as colunas estão configuradas para o que for inserido ser lido como equação e não como texto, como na coluna efeito queremos inserir um texto, clique no ícone de triângulo no canto direito da célula do título "Efeito" e selecione a opção "Formatar como texto". Na célula abaixo do título "Transformação", insira as seguintes expressões, apertando *enter* para descer para a próxima célula:

- $f(x) + 2$
- $f(x + 2)$
- $f(x - 2)$
- $f(x) - 2$
- $2f(x)$
- $f(2x)$
- $f\left(\frac{x}{2}\right)$
- $\frac{f(x)}{2}$
- $-f(x)$
- $f(-x)$

Na célula abaixo do título "Efeito", insira o texto "Função sobe duas unidades na vertical". Por padrão, no menu de configuração do componente, disponível no ícone de três pontos no canto superior direito do componente Tabela, estão selecionadas a opção de cabeçalho no topo e de travar as células preenchidas para que o aluno não consiga alterá-las. Mantenha essa seleção.

3.3.8 Página 19 - Itens utilizados: Gráfico, Nota e Entrada de Texto.

Essa página foi copiada da coleção de "*Starter Screens*" da *Desmos*, de uma atividade denominada "*Screens for Checking Understanding*", e traduzida para o português. A página original está representada na Figura 28. Você pode acessá-la entrando na página da atividade[8] e em seguida na prévia do aluno. Para copiar a página, clique no ícone de

[8]Disponível em
`https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/5e715b594cc2c55709f4948a?`

cópia (dois retângulos) ao lado do texto "Prévia da página do aluno" no canto superior direito, volte na sua atividade e cole utilizando o atalho do teclado "`ctrl + v`". Nas dicas para professores dessa página, há instruções de customização opcional da página, indicando que você pode editar o componente Gráfico para alterar o título dos eixos (para cada título há *duas* expressões, uma em cinza e uma em preto, e ambas devem ser modificadas), e lembrando que você pode escolher compartilhar a entrada de texto dos alunos com os colegas ou não.

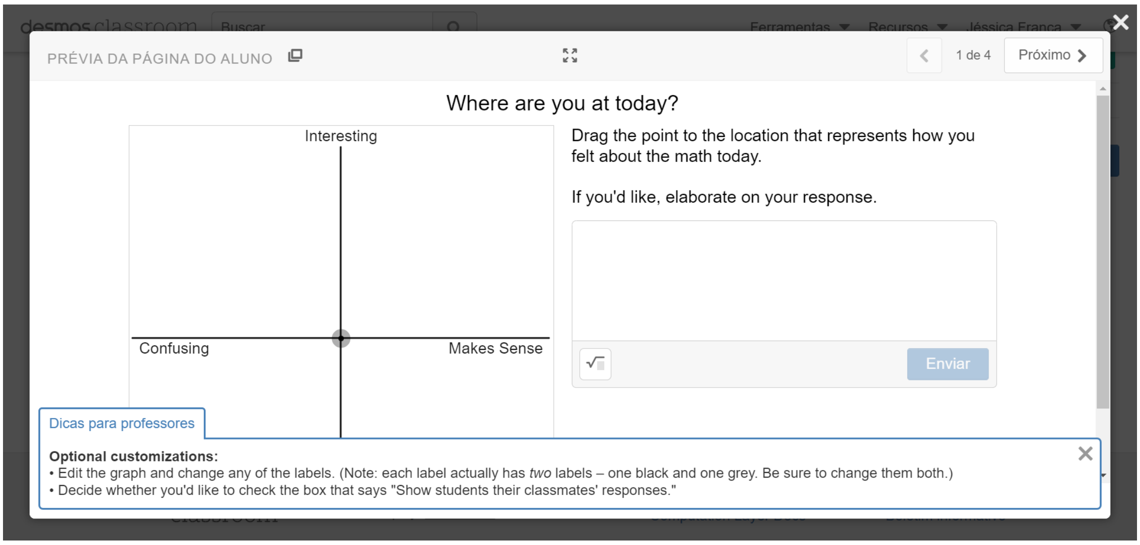


Figura 28: Prévia do aluno de uma página da atividade "*Screens for Checking Understanding*", disponibilizada pela *Desmos* em seu site.

Após colar a página na sua atividade, modifique o título para "Onde você está agora?" e troque o texto do componente Nota para o texto em português abaixo:

> Arraste o ponto para o local que representa como você se sentiu sobre a aula de hoje.
> Se quiser, explique sua escolha ou deixe um recado.

Em seguida, clique em "Editar gráfico". As expressões nesse componente incluem um ponto móvel para o aluno arrastar, oito pontos ocultos de forma a aparecer apenas o rótulo do ponto, e duas retas para simularem os eixos coordenados. Você deve editar o rótulo dos oito pontos, nas expressões 4 a 11. Altere o rótulo das expressões 4 e 5 para "Faz sentido", das expressões 6 e 7 para "Ficou confuso", das expressões 8 e 9 para "Interessante" e das expressões 10 e 11 para "Desinteressante".

Aqui, optou-se por não selecionar a opção de compartilhar as respostas da Entrada de texto com os colegas.

3.3.9 Página 20 - Itens utilizados: Nota, Equação e Desenho.

Nessa página temos um componente de Desenho mostrando um plano cartesiano com uma função $f(x)$ e uma transformação dela, e um componente Equação, no qual os alunos devem tentar escrever a expressão correspondente à função transformada. Para construí-la, comece inserindo o título "Desafio 1" na página e inserindo um item Nota com o seguinte texto:

> Sendo $f(x)$ a função representada em preto, qual é a expressão da função pontilhada em vermelho?

Em seguida, insira um item de Equação abaixo do componente de Nota. No componente Equação, marque as opções "Pedir ao aluno para explicar sua resposta" e "Exibir respostas dos colegas aos alunos". Insira um item de Desenho, e para o plano de fundo, selecione a opção "Gráfico editável". Entrando na edição do gráfico, digite as seguintes expressões com as respectivas configurações:

1. $f(x) = \left\{-3 \leq x \leq -1 : x+3,\ -1 < x \leq 1 : 2, 1 < x \leq 3 : \sqrt{5-x^2}\right\}$

   ▷ Configurar para a cor preta.

2. $g(x) = -f(x-2) - 1$

   ▷ Configurar para a cor vermelha, linha tracejada.

A expressão 1 representa uma função definida por mais de uma sentença, listando o intervalo ao qual se aplica cada expressão algébrica, e em seguida a expressão algébrica que vale naquela intervalo, separados por dois pontos (:). As diferentes sentenças são separadas por uma vírgula. Assim, a expressão 1 acima é equivalente à expressão

$$f(x) = \begin{cases} x+3, & \text{se } -3 \leq x < -1 \\ 2, & \text{se } -1 \leq x < 1 \\ \sqrt{5-x^2}, & \text{se } 1 \leq x < 3 \end{cases} .$$

As páginas 21 e 22 podem ser construídas de forma análoga à página 20 e portanto, suas construções serão omitidas aqui.

3.3.10 Página 23 - Item utilizado: *Marbleslides*.

Essa página usa o item *Marbleslides*, que cria um jogo para os alunos tentarem capturar as estrelas com as esferas que são lançadas. Como exposto na Seção 3.2.2, é preciso primeiro ativar a opção de inserir esse item. Após ativar, clique sobre o item *Marbleslides* no menu lateral esquerdo, abaixo do título “Tela cheia”.

Em seguida, adicione o título “Desafio 4” à página e digite as seguinte expressões, com as respectivas configurações, na lista de expressões da calculadora gráfica que aparece:

1. **Pasta:** Escondido

   ▷ Configurar para ocultar a pasta dos alunos.

   2. $f(x) = 2^{(-x)} \{-1 \leq x \leq 5\}$

      ▷ Configurar para ocultar a representação gráfica dessa função.

3. **Nota:** Modifique a função abaixo para que as bolinhas passem por todas as estrelas, e clique em lançar.

4. $y = f(x)$

   ▷ Configurar para a cor preto.

Os alunos verão apenas a nota e a função $y = f(x)$, que eles podem modificar para conseguir capturar as estrelas.

Acima da calculadora gráfica, em uma barra verde, há um espaço para inserir o ponto de onde serão lançadas as esferas e um espaço para inserir os pontos onde estarão as estrelas. Insira o ponto $(8.5, 9)$ para a posição das esferas e os pontos $(8, 5)$, $(7, 4)$, $(3, 3.5)$, $(0, 3)$, separados por vírgula, para a posição das estrelas.

Ajuste o enquadramento para que a função, as estrelas e a esfera apareçam na tela do aluno, e clique em prévia do aluno para testar.

Agora que a atividade está construída, é necessário publicá-la para poder atribuir a turmas. Para isso, clique em “Publicar” no canto superior direito do construtor de atividades. Você será direcionado para a página da atividade, de onde pode visualizar a prévia das páginas e recomendar a atividade para suas turmas.

4 PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A sequência didática apresentada neste capítulo é voltada para a unidade curricular de matemática no Ensino Médio, e versa sobre o tópico de funções reais de uma variável real, denominadas comumente apenas como funções no âmbito do Ensino Médio. Recomenda-se ao docente que, caso aplique a sequência por completo, o faça ao longo de 10 aulas. O uso das atividades de forma isolada também é possível, sendo para tanto, importante observar o detalhamento feito no Apêndice B. Buscou-se, nessa sequência didática, abordar o tópico de funções de forma mais integrada desde a sua apresentação aos alunos, de forma a não segmentá-la no estudo individual de diferentes famílias de funções (função de primeiro grau, função de segundo grau, função exponencial, função trigonométrica, etc), como é usualmente feito nos currículos escolares do Ensino Médio. Para tanto, o tópico de funções é introduzido por meio de diversas situações problema que mostram contextos familiares ao aluno, a fim de dar sentido ao que se aprende e possibilitar uma visão unificada do tópico de funções, abarcando as diversas representações e características de funções.

O uso de tecnologia é um pilar fundamental desta sequência didática, visando incentivar os alunos a aprenderem também a usar ferramentas de *software* e diferentes registros de representações matemáticas para compreender de forma dinâmica e visual os tópicos aqui abordados. A utilização de uma calculadora gráfica induz os alunos ao desenvolvimento de pensamento funcional, descrito na Seção 2.3, ao mesmo tempo em que incita um espírito de investigação. Algumas atividades são abordadas em forma de jogos e desafios em que a matemática é peça indissociável, de forma que os alunos precisem mobilizar sua criatividade junto ao raciocínio lógico abstrato para encontrar uma solução para os problemas propostos. Destaca-se também que muitas das atividades propostas não tem apenas uma solução ou resposta correta, de forma a auxiliar na caracterização da matemática como um processo de buscas e questionamentos, sujeita a acertos e erros.

4.1 OBJETIVOS

É esperado que, ao fim desta sequência didática, o aluno demonstre uma compreensão ampla e profunda de funções, sendo capaz de modelar situações-problema, interpretar funções em diferentes contextos, traduzir entre as diferentes representações de funções e materializar o conceito de funções como objeto matemático.

Para tanto, o aluno precisará:

- Reconhecer e diferenciar variáveis e parâmetros do modelo envolvidos em situações problemas.
- Estabelecer as variáveis que descrevem um modelo matemático e obter as relações entre elas.
- Reconhecer, resolver e elaborar problemas que envolvem relações funcionais entre duas variáveis.
- Compreender o significado de taxa média de variação, utilizando-o para caracterizar o crescimento, decrescimento e linearidade de gráficos.
- Reconhecer famílias de funções e suas propriedades, considerando suas diversas representações matemáticas, e interpretá-las de acordo com o modelo.
- Planejar e executar transformações e limitações de domínio e imagem em funções em suas representações gráfica e algébrica.

4.2 CONTEÚDOS

Relações funcionais entre duas grandezas;

Domínio e imagem de funções reais de uma variável real;

Representação verbal, numérica, algébrica e gráfica de funções;

Gráficos: intersecção com os eixos, análise de crescimento, linearidade, intervalos de crescimento e decrescimento e taxa média de variação;

Famílias de funções;

Transformações de translação, reflexão, expansão e contração de funções.

4.3 ESTRATÉGIA DE ENSINO

A sequência didática está estruturada visando que os alunos sejam agentes ativos e proativos no processo de ensino-aprendizagem, por meio de indicações do que é esperado dos alunos a cada aula em relação à constituição e à mobilização necessária de conhecimentos, habilidades e atitudes. Além dos aspectos cognitivos, os estudantes deverão manter uma predisposição para a realização de ações em grupos, trabalhando na comunicação matemática entre pares, através da justificativa de seus resultados e da interpretação dos resultados dos colegas.

O professor, mais do que o detentor do conhecimento, deve agir como um guia dos alunos, estruturando as discussões em sala de aula ao incentivar que os alunos investiguem, expliquem e justifiquem as soluções apresentadas para os problemas para toda a turma usando argumentação consistente e linguagem adequada, sempre estimulando-os a explorar diferentes registros de representações e fazendo-os reconhecer as representações mais convenientes para cada situação.

Os recursos didáticos necessários para a aplicação desta sequência didática são: sala de aula com quadro branco, caneta e apagador; sala de aula com um computador com acesso à internet para cada aluno; atividade da Aula 2 impressa, uma cópia para cada dupla de alunos; atividade da Aula 4 impressa, uma cópia para cada dupla ou trio de alunos.

4.4 DESENVOLVIMENTO

A sequência didática será descrita a seguir no formato separado por aulas, totalizando 10 horas aulas de atividades. Neste Capítulo, as atividades são apresentadas de forma sequencial, assim, na primeira aula o conceito de função é inicialmente exposto de maneira informal e nas aulas seguintes é feito um maior detalhamento de algumas características de funções e apresentados mais exemplos de funções. Embora não seja necessária a aplicação dessas atividades de forma sequencial, são necessárias adequações do conteúdo e da duração para aplicar as atividades de forma isolada. As cinco primeiras aulas focam no desenvolvimento do conceito de função, enquanto as aulas seguintes focam no uso da calculadora gráfica *Desmos* e nas transformações de funções, e assim formam dois conjuntos de aula independentes. As aulas 6 e 7 introduzem conceitos e habilidades de uso da calculadora gráfica *Desmos* necessários para a execução da atividade final apresentada nas aulas 8 a 10, e portanto, indica-se a aplicação desse conjunto de aulas de forma completa ou uma adaptação das aulas finais. Maiores detalhes sobre as adaptações necessárias para aplicar as atividades de forma isolada são apresentadas no Apêndice B.

Os conceitos introduzidos em cada aula estão destacados ao longo do texto e sua definição é dada no fim de cada subseção.

4.4.1 Aula 1

Na Aula 1 será iniciada a discussão sobre funções com os alunos, usando como motivação uma situação problema:

> Após um dia de aula no IFSC, um aluno sai de bicicleta do câmpus e pedala em direção à Praia Brava, acompanhando sua rota com o GPS do celular, sem desviar do percurso. A cada momento, o aluno consegue ver no celular a hora, a distância percorrida, a distância dele até o IFSC

e a distância restante no percurso.

Com base nessa situação simples, os alunos devem ser instigados a definir quais grandezas estão envolvidas e quais dados numéricos são necessários para conseguir relacionar a distância do ciclista até o IFSC e a distância restante no percurso. Para isso, é necessário discutir com os alunos o que é um dado - fixo - e o que é uma *variável.* Com ajuda do professor, os alunos devem perceber a necessidade de saber apenas a distância do câmpus do IFSC até a praia, não necessitando de outros dados como a velocidade do ciclista ou a rota definida.

Uma vez definida a distância total com os alunos (Sugestão: algo em torno de 10 a 15 km, que corresponde à distância real), discutir que existem diferentes grandezas que podem ser estudadas na situação, por exemplo:

– Tempo desde a partida.

– Distância percorrida.

– Distância do ciclista ao IFSC.

– Distância restante no percurso.

Entre as variáveis levantadas pelos alunos, discutir quais variáveis se relacionam, quais variáveis o ciclista consegue controlar de alguma forma e quais variáveis dependem de outras. Selecionar duplas de variáveis e definir *variáveis dependentes e independentes.*

Em seguida, selecionar as variáveis "Distância do ciclista ao IFSC" e "Distância restante no percurso" para avaliar mais a fundo. Faça os alunos perceberem que a distância do ciclista ao IFSC é uma variável independente e a distância restante no percurso é uma variável dependente, uma vez que pode ser calculada utilizando a distância total (fixa) e a distância do ciclista ao IFSC (variável independente). Com base na distância total entre o IFSC e a praia, crie com os alunos uma tabela de valores que relacione as duas variáveis. Um exemplo de tabela pode ser visto na Tabela 1, onde a distância total entre o IFSC e a praia foi definida em 10 km[1]. Ao fazer a tabela, os alunos devem perceber como utilizar uma distância para encontrar a outra, sabendo que a soma delas está definida pela distância entre o IFSC e a praia.

De posse da tabela com alguns valores, relembre os alunos do plano cartesiano, incluindo quais variáveis são usualmente representadas em qual eixo (variável independente no eixo Ox e variável dependente no eixo Oy), como representar um par ordenado como

[1]O uso de tabelas com três colunas parece auxiliar os alunos a desenvolverem pensamento funcional e evitar visualizar os padrões de forma apenas recursiva (MARKWORTH, 2010)

Tabela 1: Relação entre variáveis distância do ciclista ao IFSC (x) e distância restante no percurso (y) na situação problema do ciclista.

x	Cálculo	y
0	$10 - 0$	10
1	$10 - 1$	9
2	$10 - 2$	8
5	$10 - 5$	5
7	$10 - 7$	3
10	$10 - 10$	0

um ponto no plano cartesiano e qual a utilidade da representação gráfica de uma relação ou função. Em seguida, represente os pontos da tabela construída com os alunos no plano cartesiano, de forma semelhante ao que está representado na Figura 29, utilizando a calculadora gráfica *Desmos*.

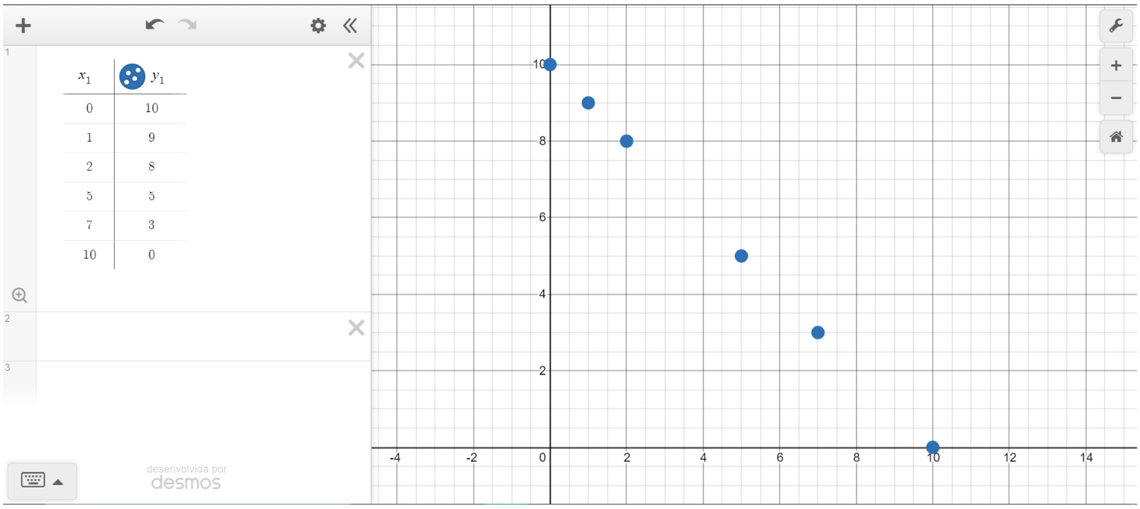


Figura 29: Representação gráfica dos pontos da Tabela 1

Após os alunos construírem a tabela e entenderem o gráfico representado no plano cartesiano, discuta com os alunos se eles conseguem escrever a lei de formação. Para tanto, os alunos devem perceber que a soma das variáveis é constante e igual à distância total do percurso, $x + y = 10$ onde x representa distância do ciclista até o IFSC e y representa a distância do ciclista à praia. Assim, podemos reescrever isolando a variável dependente y para obtermos a lei de formação $y = 10 - x$. De posse da lei de formação associada à situação problema, verifique com os alunos se os números utilizados até agora, todos inteiros, são os únicos que podem ser utilizados e introduza o conceito de *domínio* de uma função. Aproveite a discussão para distinguir funções que tenham o domínio composto exclusivamente por números inteiros (*domínio discreto*) e funções que tenham o domínio mais amplo, composto por números reais (*domínio contínuo*)[2]. Faça os alunos darem exemplos de situações em que os domínios sejam discreto, contínuos ou em um caso que não se enquadre em nenhuma das duas definições. Relacione o domínio contínuo, composto por um intervalo de números reais, à ideia de conectar os pontos com uma linha contínua para simbolizar a existência da função em todos os pontos do intervalo, de forma que o gráfico da função fique semelhante ao da Figura 30. Para isso, é interessante incluir na tabela números bem variados, incluindo frações e números irracionais.

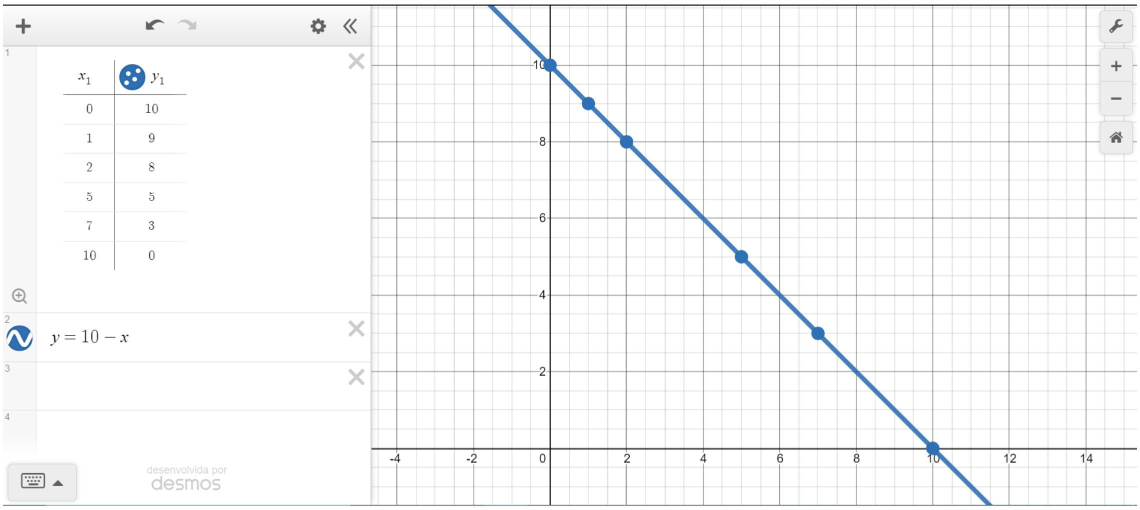


Figura 30: Representação gráfica da lei de formação $y = 10 - x$ e dos pontos da Tabela 1 associados à situação problema.

Ainda durante a discussão sobre o domínio da função, discuta com os alunos se o domínio dessa função, no contexto da situação problema apresentada, é *limitado* ou não. Faça-os perceberem que como a distância total do IFSC à praia é fixa e finita, valores maiores que essa distância não farão sentido para a variável "Distância do ciclista até o IFSC", bem como não farão sentido valores negativos. Com base nisso, relembre o conceito de *intervalo* e escreva o domínio da função com os alunos:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 10\}.$$

Para limitar o domínio do gráfico da *Desmos*, inclua uma restrição na fórmula, de forma que o gráfico fique igual ao da Figura 31. É interessante discutir com os alunos também como a situação poderia ser reformulada para alterar o domínio da função, como mudando a distância total do IFSC a praia ou contar a distância em quarteirões para deixar o domínio discreto[3].

[2] Neste momento, o docente pode relacionar funções com domínio discreto a sequências ou progressões, caso os alunos já tenham estudado progressões aritméticas e geométricas.

[3] É interessante modificar sutilmente a situação problema trabalhada de forma que os alunos tenham

Dando continuidade, trabalhe o conceito de *imagem da função*[4], fazendo os alunos perceberem que nessa situação problema, a imagem é composta pelo mesmo intervalo que o domínio, mas com valores para a variável y. Incentive os alunos a tentarem escrever a imagem da função como um intervalo, assim como foi feito com o domínio. Um equívoco comum entre os alunos é tentar escrever a imagem "acompanhando o caminho decrescente da função", que começa no 10 e vai até o 0. Caso isso ocorra, explique o que significa o símbolo "$\leq$" e faça a distinção entre a ordenação dos valores da variável e o decrescimento da função. É interessante mostrar que trocar a restrição do domínio pela restrição da imagem na calculadora *Desmos* tem o mesmo resultado, e que trocar a ordem da imagem para $10 \leq y \leq 0$ não, pois estas desigualdades não representam o mesmo conjunto. O conjunto imagem fica escrito então como

$$\{y \in \mathbb{R} | 0 \leq y \leq 10\}.$$

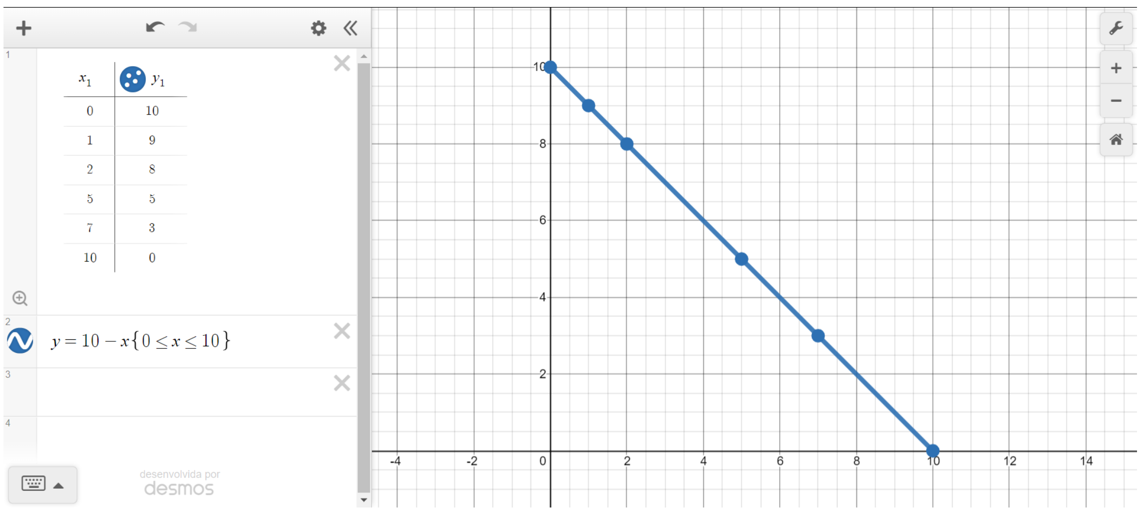


Figura 31: Representação gráfica da função associada à situação problema.

Para finalizar a aula, resuma os conceitos explorados e introduza a *definição de função*, bem como a notação utilizada para a função, f ou $f(x)$, seu domínio, $D(f)$, e sua

oportunidade de refletir, explorar e questionar o que ocorreria se algum dado do problema fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescida ou retirada

[4]Aqui o conceito de contradomínio não será explorado com os alunos, por opção da autora. Deixa-se a critério do professor introduzir o conceito de contradomínio nessa introdução inicial de funções ou mais tarde, ao trabalhar funções sobrejetivas e funções inversas, quando a distinção entre o contra-domínio e o conjunto imagem se tornam imprescindíveis

imagem, $Im(f)$, e escreva:

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & 10 - x \\ D(f) & = & \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq 10\} \\ Im(f) & = & \{y \in \mathbb{R} | 0 \leq y \leq 10\} \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{rcl} f : [0,10] & \rightarrow & [0,10] \\ x & \mapsto & f(x) = 10 - x. \end{array}$$

A seguir, estimule os alunos a pensarem em outras situações cotidianas que relacionam diferentes variáveis na forma de uma função.

4.4.1.1 Conceitos introduzidos na Aula 1

Variável. Símbolo que representa um número arbitrário ou uma grandeza cujo valor pode variar.

Função. Se uma variável y depende de uma variável x de forma que cada valor de x determina exatamente um valor de y, então y é dito uma função de x e escreve-se $y = f(x)$.

Variável Independente. Argumento ou valor de entrada de uma função.

Variável Dependente. Valor de saída de uma função, determinado unicamente pela função e o valor correspondente da variável independente.

Domínio de uma Função. Conjunto de todos os valores que a variável independente pode assumir.

Intervalo real. Um conjunto que contém todos os número reais que estejam entre quaisquer dois elementos desse conjunto.

Conjunto Imagem de uma Função. Conjunto de todos os valores que a variável dependente assume quando a variável independente varia sobre o domínio da função.

Conjunto Contínuo. Um conjunto onde dados dois elementos quaisquer a ele pertencentes, há pelo menos uma infinidade de elementos intermediários entre eles. Como exemplo, o conjunto dos números reais é contínuo, assim como todo intervalo real.

Conjunto Discreto. Um conjunto onde dados dois elementos quaisquer a ele pertencentes, há um número finito de elementos intermediários entre eles. Como exemplo, o conjunto dos números inteiros é discreto, assim como todo subconjunto dos inteiros.

Conjunto Limitado. Um subconjunto dos números reais é dito limitado quando existem números reais a e b tal que todos os números deste conjunto estão entre a e b.

4.4.2 Aulas 2 e 3

Na Aula 2, os alunos trabalharão em uma atividade[5] com quatro situações problema tentando seguir o mesmo raciocínio usado na resolução da situação problema da Aula 1, com a diferença que as variáveis a serem relacionadas são dadas. Na Aula 3, será feita a correção da atividade proposta, e em seguida os alunos farão uma atividade na *Desmos* para treinar o vocabulário matemático adquirido nas últimas aulas.

Em cada situação problema apresentada, os alunos devem começar entendendo quais informações eles precisam para poder modelar o problema, analisando o que se mantém fixo em cada uma das situações. Uma vez definidos os dados necessários, os alunos devem avaliar como as duas variáveis (x e y) se relacionam, como calculá-las, se o gráfico é constituído por uma linha (domínio contínuo) ou uma série de pontos (domínio discreto), se o domínio é um conjunto limitado ou ilimitado e, caso se sintam aptos, escrever a lei de formação da função que relaciona as duas variáveis. Dependendo do tempo transcorrido desde a última aula, é bom reescrever a resolução da situação problema do ciclista vista na Aula 1 no quadro para que os alunos tenham uma referência para a resolução das novas situações apresentadas.

Sugere-se que os alunos trabalhem em duplas para poderem discutir suas ideias. O professor deve permanecer a disposição e circulando pela sala, ouvindo as discussões e argumentos, e interferindo apenas quando necessário: caso uma dupla esteja estagnada ou caso a discussão esteja levando a equívocos ou falsas concepções.

Situações problema para os alunos trabalharem:

1. Uma vela é acesa e a cada intervalo de tempo, queima uma mesma quantidade de cera.

   – x: Tempo transcorrido, em horas

   – y: Altura da vela, em centímetros

2. Um grupo de amigos pede uma pizza grande e divide o valor da pizza igualmente entre eles.

   – x: Número de amigos presentes

   – y: Preço que cada um deverá pagar, em reais

[5]As atividades das Aulas 2 a 5 foram elaboradas com base em material da University of Nottingham e University of California in Berkeley disponível em
`https://www.map.mathshell.org/lessons.php?unit=9260&collection=8`

3. Uma pessoa compra um carro novo e vê o preço de revenda do seu carro diminuir 10% a cada ano após a compra.

   – x: Tempo desde a compra do carro, em anos

   – y: Preço de revenda do carro, em reais

4. Uma operadora de telefonia móvel cobra um valor fixo em seu "plano controle" e um valor adicional por cada pacote de dados móveis contratado a parte.

   – x: Quantidade de dados móveis utilizados, em gigabytes

   – y: Preço total pago pelo consumidor, em reais

Para a correção da atividade, recomenda-se que seja dado o protagonismo aos alunos. Encoraje-os a compartilhar suas resoluções e motivações, incitando argumentação e discussão entre os alunos quando eles discordarem em algum ponto, evitando revelar a resposta correta. Como cada grupo terá definido valores diferentes para a resolução da questão, é importante focar em aspectos qualitativos dos gráficos, mais do que nos aspectos quantitativos. Ao corrigir, introduza novos conceitos relacionados a funções e faça os alunos refletirem se os gráficos ou trechos deles são *crescentes* ou *decrescentes*, *lineares* ou *não lineares*, se os gráficos interceptam os eixos Ox e Oy, entre outros aspectos. Abaixo estão alguns comentários sobre cada uma das situações propostas.

1. Situação da Vela

   Aqui é necessário estabelecer apenas uma altura inicial para a vela, digamos 15 cm, e uma velocidade de queima dessa vela, por exemplo 3 cm a cada hora. Com esses dados fixados, é possível montar uma tabela e um gráfico para a função, ilustrados na Figura 32. Independente dos valores fixados, o gráfico deverá mostrar um *decrescimento linear* ao longo de todo domínio, que é um intervalo real limitado. O gráfico é linear porque a velocidade de queima da vela é constante, conforme diz o enunciado, isso pode ser verificado com os alunos calculando uma *taxa de variação* da altura em relação ao tempo, que é constante ao longo de todo o processo de queima[6]. É interessante introduzir o conceito de taxa de variação para que, no futuro, caso os

[6] Para trabalhar a taxa de variação média com os alunos, explique aos alunos que uma taxa é uma razão, ou seja, compara duas grandezas na forma de uma divisão. Como queremos calcular uma taxa de variação, precisamos calcular quanto cada uma das variáveis variou entre dois pontos do gráfico. Para calcular a taxa média de variação, então, divide-se a variação sofrida pela variável dependente pela variação sofrida pela variável independente. Nesse momento, trabalhe com os alunos que como a taxa de variação é constante nessa situação, a inclinação da função entre dois pontos distintos do gráfico é sempre a mesma, e portanto o gráfico é uma reta

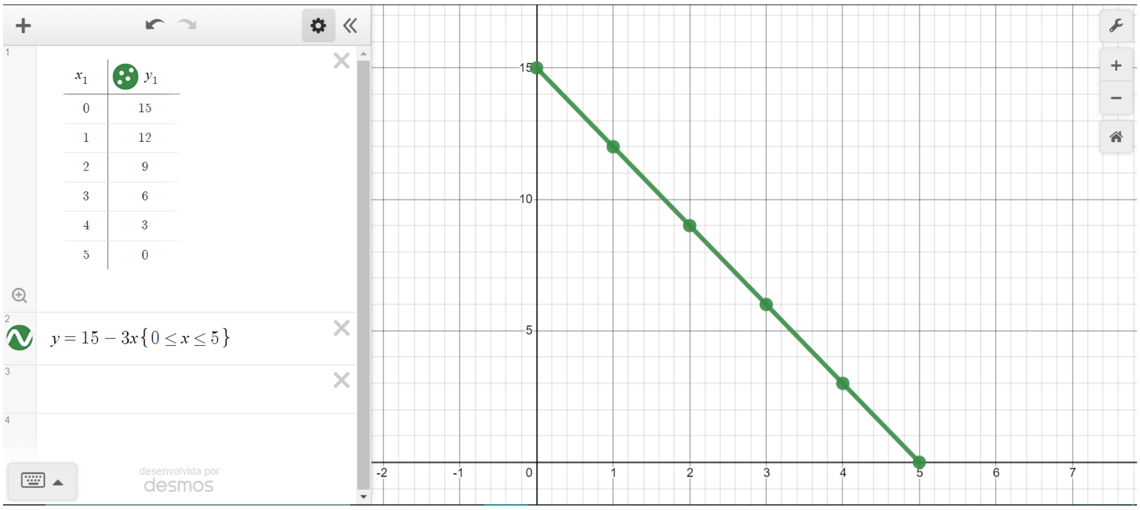


Figura 32: Representação gráfica da função associada à situação problema da altura da vela com o passar do tempo.

alunos aprendam cálculo diferencial, o conceito de derivada seja internalizado com mais facilidade. O gráfico que representa essa situação é *decrescente*, pois a altura da vela sempre diminuirá com a queima, e necessariamente intercepta os dois eixos, pois a vela possui uma altura inicial e a queima termina quando a altura da vela se torna nula. O domínio é constituído de um intervalo real e não de um conjunto de números inteiros, pois o processo de queima é contínuo, e é possível calcular a altura da vela em qualquer momento, não apenas a cada hora, como usualmente feito para completar a tabela. Na representação gráfica da função, isso é representado por uma linha contínua unindo os pontos calculados para a tabela.

Nessa situação problema, muitas vezes os alunos conseguem entender a relação entre as variáveis e chegar sozinhos à lei de formação, dada por uma função de primeiro grau (linear) da forma $f(x) = a - bx$, onde a é a altura inicial determinada para a vela e b é a velocidade fixada para a queima da vela. Para os valores estabelecidos aqui, temos então que:

$$\begin{aligned} f(x) &= 15 - 3x \\ D(f) &= \{x \in \mathbb{R} | 0 \le x \le 5\} \\ Im(f) &= \{y \in \mathbb{R} | 0 \le y \le 15\} \end{aligned} \qquad \text{ou} \qquad \begin{aligned} f : [0,5] &\to [0,15] \\ x &\mapsto f(x) = 15 - 3x. \end{aligned}$$

2. Situação da Pizza

Aqui é necessário estabelecer o preço de uma pizza, digamos R$ 60,00. Nenhuma outra informação é necessária, e os alunos devem perceber isso. Com esse dado fixado, é possível montar uma tabela e um gráfico para a função, ilustrados na Figura 33. Independente dos valores fixados, o gráfico deverá mostrar um *decrescimento não-linear* ao longo de todo domínio, que é um conjunto de números inteiros. O gráfico não é linear porque a cada "nova" pessoa que entra para dividir a pizza, a diminuição (variação) do valor que cada pessoa paga é diferente, e essa não linearidade pode ser verificada calculando a taxa de variação do preço em relação ao número de pessoas em dois intervalos diferentes no gráfico ou na tabela[7]. É relevante, nesse momento, trabalhar com os alunos a importância de colocar os eixos em escala, de forma a não linearizar funções não lineares. O gráfico é decrescente pois quanto mais pessoas para dividir a pizza, menos cada uma paga, e necessariamente não pode interceptar nenhum dos dois eixos, pois não faz sentido calcular o preço para cada pessoa se existem zero pessoas, e mesmo que muitas pessoas dividam a pizza, o valor que cada uma pagará deverá ser positivo. O domínio é constituído de um subconjunto dos números inteiros, pois não faz sentido, no contexto, calcular o valor a ser pago, por exemplo, por um número fracionário de pessoas. Na representação gráfica da função, um domínio discreto implica que o gráfico será constituído de uma série de pontos, e não de uma linha contínua. É importante mostrar aos alunos que a linha que une os pontos existe, porém não é uma linha reta como nas situações anteriores, e que essa linha não é representada por não fazer sentido no contexto. Ressalte que o motivo da linha não existir é que o domínio é composto apenas por números inteiros, pois alguns alunos podem fazer uma falsa associação com a não-linearidade por ser o primeiro exemplo de domínio discreto bem como de função não linear. Alguns alunos podem tentar também unir os pontos com segmentos de reta, como em um gráfico de linhas, e caso haja essa dúvida, é importante indicar a diferença de um gráfico de linhas e do gráfico de uma função.

Nessa situação problema, muitas vezes os alunos conseguem entender a relação entre as variáveis e chegar sozinhos à lei de formação, dada por uma função racional da forma $f(x) = \frac{a}{x}$, com o numerador a igual ao preço da pizza e o denominador sendo a própria variável x, de forma que o valor por pessoa pode ser calculado usando uma simples divisão. É interessante mostrar aos alunos que, embora o domínio se constitua apenas de números inteiros, a imagem pode conter números racionais, uma vez que é o resultado de um quociente. Para os valores estabelecidos aqui, temos

[7]Aqui, é interessante mostrar aos alunos que a taxa de variação, calculada novamente como uma razão entre a variação sofrida pelas duas variáveis envolvidas na relação funcional, varia dependendo dos pontos que são escolhidos para o seu cálculo. Mostre que a taxa de variação é maior quando são usados valores menores de x e é menor quando são usados valores maiores de x, de forma que a inclinação do gráfico começa maior e termina mais próxima à horizontal.

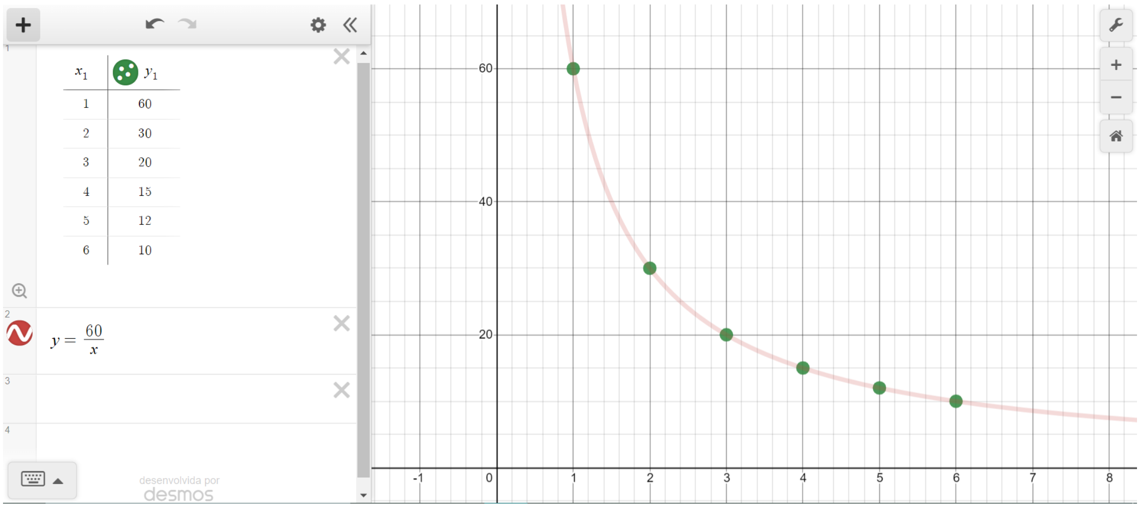


Figura 33: Representação gráfica da função associada à situação problema do preço da pizza a ser dividido entre um grupo de amigos. A linha vermelha mais clara é representada aqui para mostrar o formato da função caso o domínio fosse contínuo, embora para a situação dada, com domínio discreto, o gráfico consista apenas dos pontos representados em verde.

então que:[8]

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & \frac{60}{x} \\ D(f) & = & \{x \in \mathbb{Z} | x \geq 1\} \\ Im(f) & = & \{y \in \mathbb{Q} | 0 \leq y \leq 60\} \end{array} \qquad \text{ou} \qquad \begin{array}{rcl} f : \mathbb{Z}_*^+ & \to & \mathbb{Q} \cap [0, 60] \\ x & \mapsto & f(x) = \frac{60}{x}. \end{array}$$

3. Situação do Carro

   Aqui é necessário estabelecer o preço inicial (preço de compra) do carro, digamos R$ 40.000,00. Nenhuma outra informação é necessária, já que a desvalorização anual está fixada em 10%, e os alunos devem perceber isso. Com esse dado fixado, é possível montar uma tabela e um gráfico para a função, ilustrados na Figura 34. Independente dos valores fixados, o gráfico deverá mostrar um decrescimento não-linear ao longo de todo domínio, que é um intervalo real *limitado inferiormente*. O gráfico é decrescente, pois a cada ano o valor de revenda do carro é menor que no ano anterior. O domínio é constituído de um intervalo real limitado inferiormente, pois é possível calcular o preço de revenda do carro em qualquer momento após sua compra, e essa desvalorização ocorre gradualmente ao longo do tempo (o preço do carro não diminui subitamente no aniversário de compra do carro, por exemplo). Na representação gráfica da função, isso é representado por uma linha contínua unindo

[8] O conjunto denominado aqui e nos próximos exemplos por Conjunto Imagem é de fato um Contra-domínio da função, uma vez que nem todos os elementos desse conjunto são imagem de um elemento do Domínio.

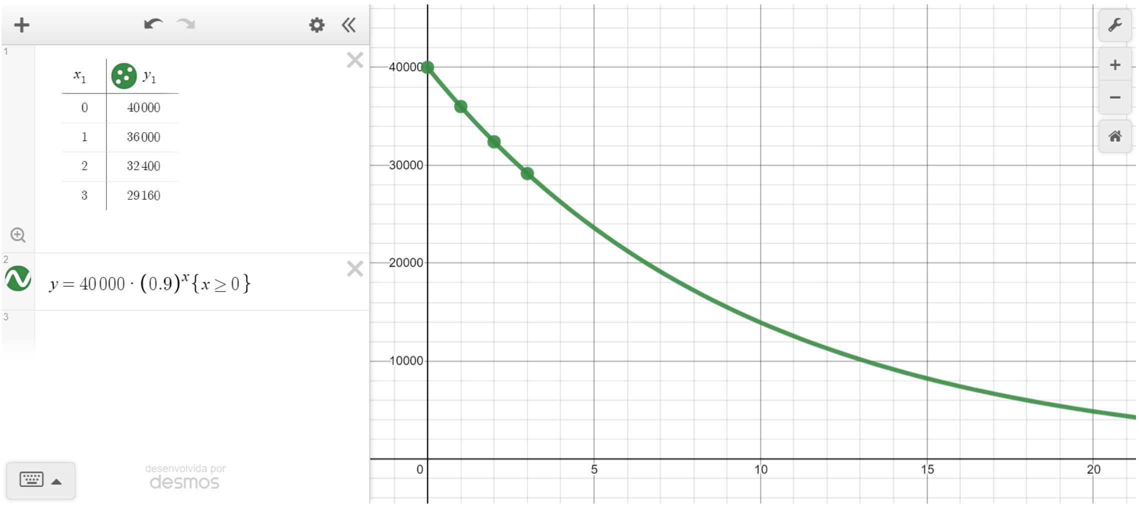


Figura 34: Representação gráfica da função associada à situação problema do preço de revenda de um carro em função do tempo após a compra.

os pontos calculados para tabela.

O gráfico não é linear porque a cada ano, ao calcular os 10% de depreciação do valor de revenda, essa diminuição no valor é menor, pois o valor do carro já diminuiu no ano anterior. Um erro comum dos alunos é tentarem diminuir uma parcela constante, de forma que em 10 anos o valor de revenda do carro seria nulo. É importante discutir com os alunos a diferença entre diminuir uma parcela constante e diminuir 10% ao ano. Nessa situação problema, em geral os alunos não conseguem chegar sozinhos à lei de formação. Mostrar o passo a passo do cálculo da porcentagem utilizando uma regra de três e evidenciando o fator 0,9 que aparece em comum no cálculo de cada ano em geral auxilia os alunos a perceber a relação entre as variáveis. É interessante mostrar aos alunos que o fator de 0,9 surge da subtração $100\% - 10\%$. Agrupando os fatores 0,9 em comum, chega-se à lei de formação, dada por uma função exponencial da forma $f(x) = a \cdot (0,9)^x$, onde a representa o preço inicial (preço de compra) do carro. É interessante também mostrar aos alunos que com o passar de muitos anos o valor do carro se aproximaria de R$ 0,00, mas que sempre seria um valor positivo. É interessante novamente pontuar a importância de colocar os eixos em escalas. Para os valores estabelecidos aqui, temos então que:

$$\begin{aligned} f(x) &= 40000 \cdot (0,9)^x \\ D(f) &= \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\} \\ Im(f) &= \{y \in \mathbb{R} | 0 \leq y \leq 40000\} \end{aligned} \qquad \text{ou} \qquad \begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\to [0, 40000] \\ x &\mapsto f(x) = 40000 \cdot (0,9)^x \end{aligned}$$

4. Situação de telefonia móvel

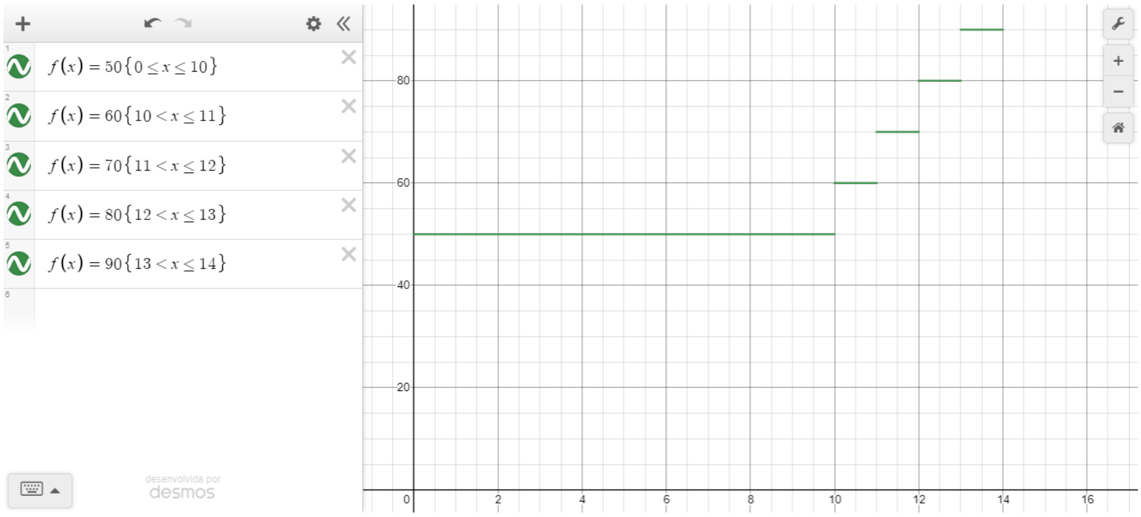


Figura 35: Representação gráfica da função associada à situação problema do preço de total pago pelo consumidor em função dos pacotes de dados contratados.

Aqui é necessário estabelecer o preço do plano controle, digamos R$ 50,00, o tamanho do pacote de dados incluido no plano controle, digamos 10 GB, e o valor do pacote adicional de dados, digamos R$ 10,00 por cada novo gigabyte. Nessa situação, é interessante fazer os alunos perceberem que, embora o domínio seja contínuo, composto por todos os números não negativos, o preço total pago pelo consumidor dá saltos, uma vez que o pacote contratado não depende do consumo. Dessa forma, com os números exemplificados aqui, para um consumo até 10 GB o valor pago será o valor constante de R$50,00, e então, para cada novo pacote contratado, o preço total ficará constante também, de forma que o gráfico da função se assemelhará a uma escada, como ilustrado na Figura 35. A representação do gráfico na *Desmos* não evidencia o valor da função corretamente nos pontos de descontinuidade, sendo necessário relembrar aos alunos a notação correta ($\bullet$ e $\circ$) para delimitar os trechos da função, como ilustrado na Figura 36. Tal edição pode ser feita na própria calculadora *Desmos*, utilizando a inserção de pontos nos extremos dos intervalos e editando a formatação dos pontos. Para auxiliar os alunos a perceberem a natureza descontínua do gráfico desta situação problema é útil fazer uma tabela de valores e incluir o cálculo de vários pares ordenados. Este também é um bom momento para reforçar como delimitar o domínio de uma função na *Desmos*, uma vez que será necessário delimitar intervalos do domínio para poder criar o gráfico com os alunos utilizando várias sentenças, conforme ilustrado aqui.

Os alunos, em geral, ficam curiosos em como é possível escrever a lei de formação de uma função dessa natureza. Embora tal representação algébrica exista,

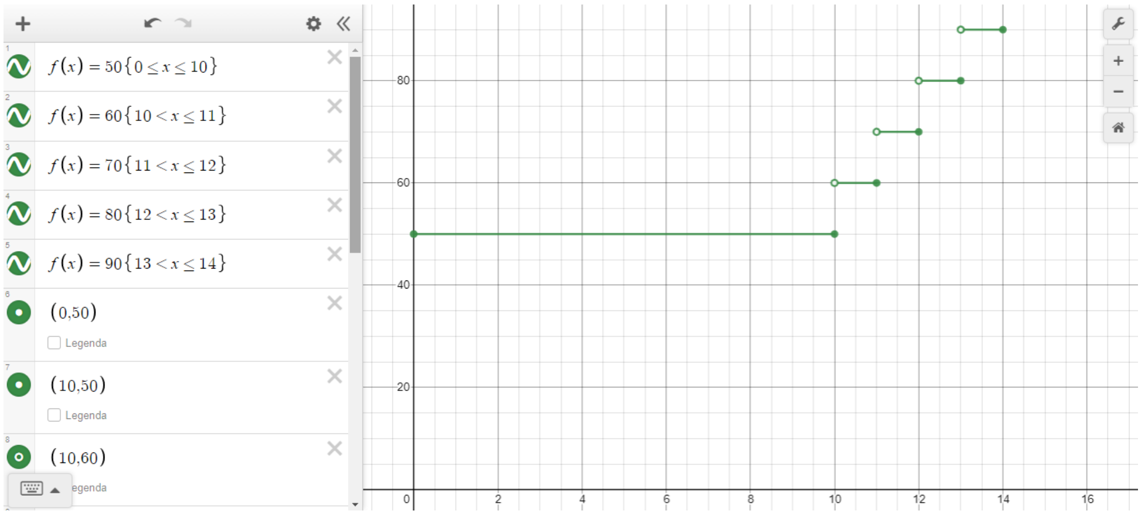


Figura 36: Representação gráfica da função associada à situação problema do preço de total pago pelo consumidor em função dos pacotes de dados contratados, corrigindo os extremos dos intervalos com a inserção de pontos.

ela sai do escopo do esperado para um aluno de Ensino Médio. Caso haja a curiosidade, os alunos podem ser encorajados a pesquisar sobre a existência de funções definidas por mais de uma sentença e das funções chão e teto, que podem auxiliar na escrita da lei de formação.

Em geral os alunos não chegam ao gráfico exposto aqui de forma independente, mas é esperado que os alunos cheguem a gráficos que mostrem um *crescimento*, preferencialmente linear. Algumas das características dependerão da interpretação dada pelo aluno e de escolhas individuais na hora dos cálculos. Dessa forma, respostas que difiram do exemplo trazido aqui não necessariamente estarão erradas, são apenas frutos de interpretações e modelagens diferentes. Ainda assim, é interessante mostrar essa solução aos alunos para que eles tenham contato com um gráfico com descontinuidades.

Para a interpretação dada aqui e o gráfico representado na Figura 36, temos que:

$$\begin{array}{rl} f(x) & = \begin{cases} 50, & \text{se } 0 \leq x \leq 10 \\ 60, & \text{se } 10 < x \leq 11 \\ 70, & \text{se } 11 < x \leq 12 \\ 80, & \text{se } 12 < x \leq 13 \\ 90, & \text{se } 13 < x \leq 14 \end{cases} \\ D(f) & = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\} \\ Im(f) & = \{y \in \mathbb{R} | y \geq 50\} \end{array} \quad , \quad \text{ou} \quad \begin{array}{rl} f : \mathbb{R}^+ & \to [50, \infty) \\ x & \mapsto f(x) = \begin{cases} 50, & \text{se } 0 \leq x \leq 10 \\ 60, & \text{se } 10 < x \leq 11 \\ 70, & \text{se } 11 < x \leq 12 \\ 80, & \text{se } 12 < x \leq 13 \\ 90, & \text{se } 13 < x \leq 14 \end{cases} \end{array} .$$

Após corrigir e discutir os gráficos com os alunos, o restante da aula 3 será dedicado

Figura 37: Atividade na *Desmos* para a Aula 3, um jogo no estilo Cara a Cara usando gráficos de funções.

a um jogo para solidificar os termos aprendidos nas aulas 1 a 3. O jogo está disponível online[9], conforme mostra a Figura 37.

O jogo, denominado “Cara a Cara - Funções”, deve ser jogado em duplas utilizando um computador ou tablet (a interface não é adequada para o uso em celulares). Embora parte do sistema esteja em inglês, não é necessário o domínio desta língua para realizar a atividade. Como a atividade depende de o sistema encontrar uma dupla para cada aluno, é necessário que seja realizada de forma síncrona com os alunos. O professor deve fazer *login* no site e criar uma sessão da atividade, seja criando uma turma e atribuindo a atividade a ela, seja criando um código de sessão único. O site cria então um código a ser compartilhado com os alunos para que eles entrem na sessão. Mais detalhes sobre como atribuir uma atividade a uma turma estão na Seção 3.2.

Uma vez que os alunos entrem na sessão, o site fará uma explicação de como funciona o jogo, que é basicamente uma adaptação online e matemática do jogo Cara a Cara, lançado no Brasil em 1986 pela empresa Estrela. O objetivo do jogo é que através de perguntas do tipo “sim ou não” e raciocínio lógico, se descubra a função escolhida pelo parceiro sorteado a cada rodada.

Embora o próprio site explique como jogar, é interessante que o professor esteja familiarizado com a forma de jogar para poder ajudar alunos com eventuais dificulda-

[9]Disponível em `https://teacher.desmos.com/polygraph/custom/6116f80665578728c34b3704?`.

des. O site agrupará os alunos em dupla, sendo que a cada rodada um aluno escolherá uma função e o outro tentará adivinhar qual foi a função escolhida, dentre as 16 opções disponíveis. Para isso, o aluno que está tentando adivinhar deverá fazer perguntas cuja resposta seja apenas “sim” ou “não” para o colega usando o chat do programa, tentando maximizar o número de gráficos que ele poderá eliminar com base na resposta do colega. O aluno que escolheu a função deverá então clicar em “yes” ou “no” para responder à pergunta do colega. Após receber a resposta, o aluno que está tentando descobrir a função deve escolher quais gráficos eliminar com base na resposta do colega e, encerrando essa escolha, fazer uma nova pergunta. A rodada acaba quando o aluno que está tentando adivinhar o gráfico consegue eliminar 15 das 16 opções disponíveis, chegando então a um gráfico. Caso este seja o gráfico certo, considera-se uma vitória para a dupla, caso seja o gráfico errado, a dupla perdeu. Após encerrar a rodada, o programa alocará esses alunos com outros alunos da turma, de forma a revezar as duplas.

O professor deve encorajar os alunos a utilizar os termos trabalhados durante as aulas para fazer suas perguntas, podendo monitorar em seu painel do professor as perguntas feitas pelos alunos e interceder caso os alunos não estejam usando os termos corretos ou caso estejam errando as escolhas dos gráficos durante o jogo. Após os alunos tentarem algumas rodadas, é interessante discutir com a turma que tipo de perguntas podem ser feitas para eliminar a maior quantidade de gráficos, otimizando o processo de adivinhação.

4.4.2.1 Conceitos introduzidos nas Aulas 2 e 3

Taxa (Média) de Variação. A taxa média de variação é a razão entre a variável dependente e a variável independente, calculada por

$$\begin{aligned}\text{Taxa média de variação} &= \frac{\Delta y}{\Delta x}\\ &= \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1},\end{aligned}$$

onde x_1 e x_2 são valores da variável independente e $f(x_1)$ e $f(x_2)$ são os valores correspondentes da variável dependente $y = f(x)$.

Gráfico crescente. Se x_1 e x_2 são pontos do domínio de uma função crescente, então tem-se que se $x_1 < x_2$, então $f(x_1) < f(x_2)$. Visualmente, o gráfico é crescente quando o valor de y aumenta a medida que percorremos o gráfico da esquerda para a direita.

Gráfico decrescente. Se x_1 e x_2 são pontos do domínio de uma função decrescente, então tem-se que se $x_1 < x_2$, então $f(x_1) > f(x_2)$. Visualmente, o gráfico é decrescente quando o valor de y diminui a medida que percorremos o gráfico da esquerda para a direita.

Gráfico linear. Gráfico no qual a taxa de variação é constante ao longo de todo o domínio.

Gráfico não linear Gráfico no qual a taxa de variação não é constante ao longo do domínio.

Intervalo real limitado inferiormente. Intervalo da forma $x > a$ ou $x \geq a$, onde a é um número real.

4.4.3 Aulas 4 e 5

Na Aula 4, retomamos as atividades das aulas anteriores, trabalhando com 10 novas situações problema. Confrontados com 10 novas situações problema, 10 opções de gráfico (dos quais três estão em branco para que os alunos preencham) e 10 opções de lei de formação (das quais duas estão em branco para que os alunos preencham). Os alunos devem conectar cada situação problema a um gráfico, explorando preferencialmente suas características qualitativas, e, caso consigam, ligar cada par situação-gráfico a uma lei de formação. Há, propositadamente, três gráficos em branco e duas leis de formação em branco.

Situações problema para os alunos trabalharem:

A) Um técnico em TI cobra um preço fixo para ir até sua casa, e mais um valor por hora trabalhada.

- x: Tempo transcorrido, em horas.
- y: Preço cobrado pelo técnico.

B) Um site de *e-books* permite que você baixe dois livros de graça, e cobra um preço fixo por cada livro adicional.

- x: Número de livros baixados.
- y: Preço a ser pago.

C) Uma *lan house* cobra um valor fixo por cada minuto de navegação.

- x: Tempo de uso da internet.
- y: Preço a ser pago.

D) Um bule com chá quente está esfriando em cima de uma mesa.

- x: Tempo transcorrido.
- y: Temperatura do chá.

E) Dobrando um papel ao meio várias vezes, a espessura do papel varia com o número de dobras.

- x: Número de dobras.
- y: Espessura do papel.

F) Uma criança está em uma roda gigante que gira em torno do seu eixo por várias voltas.

- x: Tempo transcorrido.
- y: Posição da criança em relação ao solo.

G) Durante uma sessão de treino, um carro está dando voltas em uma pista de corrida.

- x: Velocidade média do carro.
- y: Tempo para completar uma volta.

H) Uma pessoa sopra para encher um balão, que infla sem estourar.

- x: Volume de ar soprado.
- y: Diâmetro do balão.

I) Um jogador chuta uma bola de futebol para o alto.

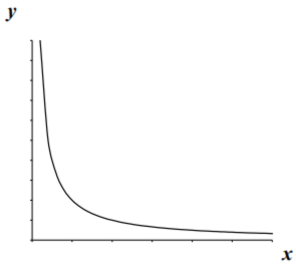
- x: Tempo transcorrido.
- y: Altura da bola em relação ao solo.

J) Um filme é projetado em uma tela.

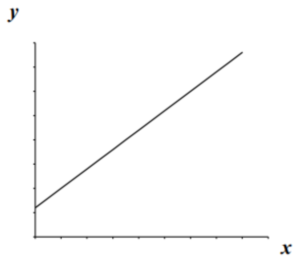
- x: Distância do projetor à tela.
- y: Área da imagem projetada.

Gráficos para serem ligados às situações problema

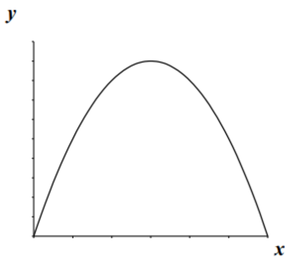
G1



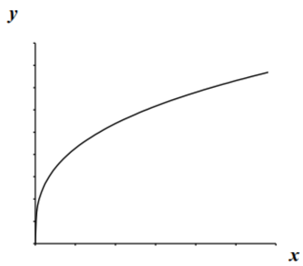
G2



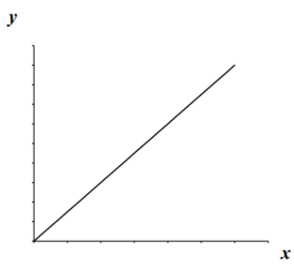
G3



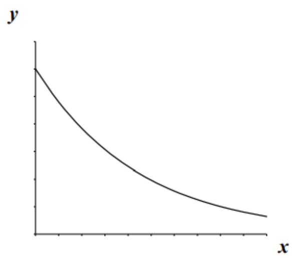
G4



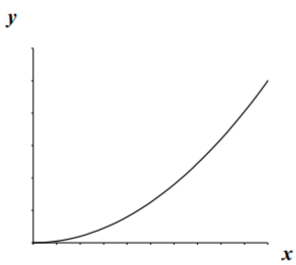
G5



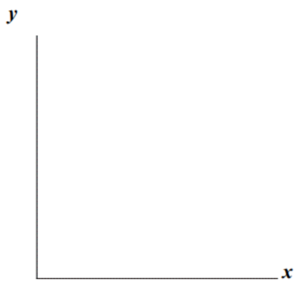
G6



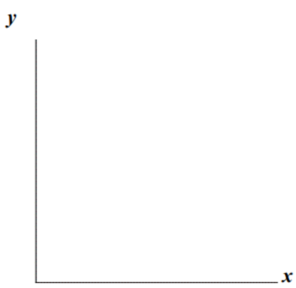
G7



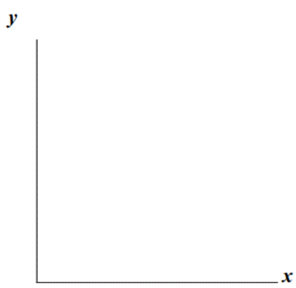
G8



G9



G10



Leis de formação para serem ligadas aos pares situação-gráfico:

L 1 : $y = 60x + 40$

L 2 : $y = 30x - 5x^2$

L 3 : $y = \dfrac{1}{4}x^2$

L 4 : $y = \dfrac{x}{10}$

L 5 : $y = \dfrac{10}{x}$

L 6 : $y = \dfrac{2^x}{1000}$

L 7 : $y = \dfrac{5}{4}\sqrt[3]{x}$

L 8 : $y = 25 + 70 \cdot (0,3)^x$

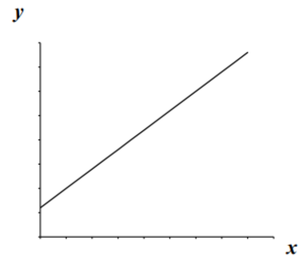
L 9 : $y =$

L 10 : $y =$

Na Aula 5, o professor corrige e comenta essa atividade com as 10 funções, introduzindo o conceito de *família de funções* e a importância desse conceito para os alunos encontrarem a lei de formação na atividade da Aula 4, independente dos números que eles escolheram para modelar a situação-problema.

Gabarito da atividade e comentários:

A: Técnico em TI

Gráfico G2	Lei de Formação L1
	$y = 60x + 40$

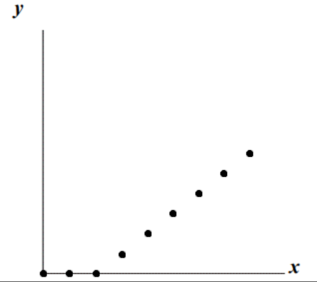
Nessa situação, é interessante observar que:

- O gráfico é crescente, pois quanto mais tempo o técnico trabalhar, mais ele irá cobrar.
- O gráfico é linear, pois o valor cobrado por hora trabalhada (taxa de variação) é constante .
- O gráfico *intercepta o eixo Oy* em um valor positivo, pois o técnico cobra um preço fixo mesmo que trabalhe zero horas.
- O domínio pode ser considerado um intervalo real limitado inferiormente, obtendo-se uma reta crescente, ou pode se obter uma função "escada" caso considere-se que a fração de hora será cobrada como hora inteira. Para o gabarito, optou-se por representar o gráfico como uma reta crescente.
- Como o gráfico é linear e crescente, a lei de formação corresponde a uma função de primeiro grau com ambos parâmetros positivos.

B: Site de *e-books*

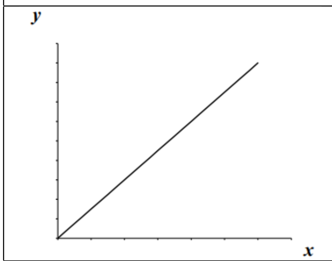
Nessa situação, é interessante observar que:

- O domínio é discreto, e portanto, o gráfico não deve ser uma linha contínua, mas sim uma série de pontos. Dessa forma, é necessário desenhar o gráfico.

Gráfico G8	Lei de Formação L9
	$y = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 2 \\ 5x - 10, & \text{se } x > 2 \end{cases}$

- O gráfico é crescente (a partir de dois livros), pois quanto mais livros são baixados, maior é o valor cobrado.
- O crescimento é linear, pois o valor cobrado por livro adicional (a partir de dois livros) baixado é constante e corresponde à taxa de variação da função.
- O gráfico intercepta o eixo Oy em $(0, 0)$ e *intercepta o eixo* Ox em $x = 0$, $x = 1$ e $x = 2$, pois para esses 3 valores de x o preço a ser pago é nulo.
- A lei de formação deve ser definida por mais de uma sentença, sendo uma função constante para $0 \leq x \leq 2$ e uma função de primeiro grau crescente para $x > 2$. Dessa forma, a lei de formação não é nenhuma das leis L1 a L8 fornecidas.

C: *Lan house*

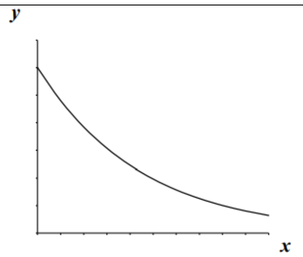
Gráfico G5	Lei de Formação L4
	$y = \frac{x}{10}$

Nessa situação, é interessante observar que:

- O gráfico é crescente, pois quanto maior o tempo de uso da internet, maior o valor a ser pago.
- O gráfico é linear, pois o valor cobrado por minuto de navegação é constante, conforme o enunciado, e dessa forma, a taxa de variação é constante ao longo de todo o gráfico.
- O gráfico intercepta os eixos Ox e Oy no ponto $(0, 0)$, pois caso o tempo de uso da internet seja nulo, o valor a ser pago é zero.

- O domínio pode ser considerado um intervalo real limitado inferiormente, obtendo-se uma reta crescente, ou pode ser um domínio discreto, considerando apenas minutos inteiros. Para o gabarito, optou-se por considerar o domínio real.
- A lei de formação corresponde então a uma *função de primeiro grau* com *coeficiente linear* nulo e *coeficiente angular* positivo, $y = ax$.

D: Bule com chá

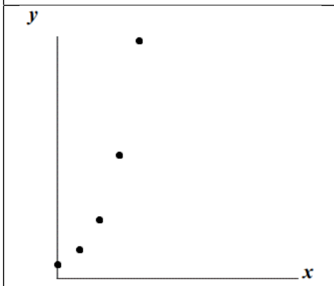
Gráfico G6	Lei de Formação L8
	$y = 25 + 70 \cdot (0,3)^x$

Nessa situação, é interessante observar que:

- O gráfico é decrescente, pois a temperatura do chá diminui a medida que o tempo passa e o chá esfria.
- O gráfico não é linear, pois o decaimento da temperatura não é constante ao longo do tempo. Os alunos, caso não tenham estudado termodinâmica nas aulas de física, em geral têm dificuldade de perceber isso. Para auxiliar os alunos a entenderem a modelagem da situação problema, discuta primeiramente o que causa a transferência de calor e depois explique que a taxa de variação da temperatura em relação ao tempo depende da diferença de temperatura entre o chá e o ambiente. Como a diferença entre as temperaturas diminui com o passar do tempo, a taxa de variação também diminui. Dessa forma, a função não é uma linha reta, e sim uma curva decrescente com concavidade para cima.
- O gráfico intercepta o eixo Oy em um valor positivo, pois a temperatura inicial do chá é positiva.
- O gráfico não intercepta o eixo Ox, pois mesmo com o passar de muito tempo a temperatura não ficará negativa, uma vez que isso significaria que o chá estaria congelado. Fisicamente isto ocorre por conta da diminuição da temperatura do chá ser limitada pela temperatura ambiente.

- O domínio é um intervalo real limitado inferiormente, uma vez que o processo de resfriamento é contínuo.
- A lei de formação dessa situação é de difícil percepção para alunos que não conheçam a lei do resfriamento de Newton das aulas de física. Vale fazer um paralelo com a situação problema do preço do carro vista na Aula 2 para justificar que essa lei será uma *função exponencial* decrescente.

E: Papel dobrado

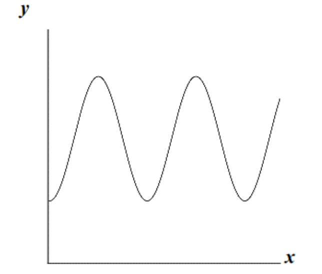
Gráfico G9	Lei de Formação L6
	$y = \dfrac{2^x}{1000}$

Nessa situação, é interessante observar que:

- O gráfico é crescente, pois a espessura do papel aumenta com cada dobra.
- O gráfico não é linear, pois a cada dobra feita no papel a espessura é duplicada, de forma que o incremento na espessura do papel não é constante, e sim crescente. Dessa forma, a taxa de variação é crescente ao longo do gráfico.
- O gráfico intercepta o eixo Oy em um valor positivo, pois a espessura inicial do papel é positiva.
- O domínio é discreto e constituído de números inteiros, pois não é possível ter um número fracionário de dobras.
- A lei de formação para essa situação é uma função exponencial crescente. Usualmente os alunos não conseguem escrevê-la facilmente de forma não recursiva (como uma função exponencial), mas são capazes de descrevê-la de forma recursiva como “a cada dobra do papel a espessura é multiplicada por 2”. Cabe aqui ressaltar que multiplicações sucessivas podem ser escritas como uma potência.

F: Roda gigante

Nessa situação, é interessante observar que:

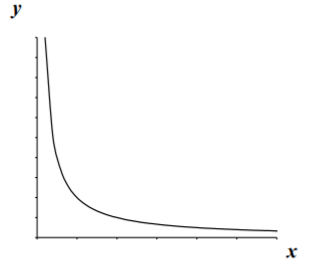
Gráfico G10	Lei de Formação L10
	$y = 40 + 30cos(x)$

- O gráfico alterna entre crescente e decrescente, pois a posição da criança é cíclica quando se passa mais de uma volta na roda gigante. Assim, o gráfico dessa função não corresponde a nenhum dos gráficos dados.
- O gráfico não é linear, pois a posição da criança, dada por uma função trigonométrica, tem sua taxa de variação variando dependendo da posição da criança. Quando os alunos desenham o gráfico, é comum que façam retas crescentes e decrescentes. Embora a representação acurada do gráfico de uma função trigonométrica esteja fora do escopo desta sequência didática, é interessante desenhar uma circunferência e mostrar que, enquanto a velocidade angular da roda gigante é constante, a variação da posição não é linear, uma vez que uma rotação de ângulos equivalentes em posições distintas da circunferência resultam em variações diferentes da posição da criança.
- O gráfico intercepta o eixo Oy em um valor positivo, pois a posição inicial da criança deve ser positiva.
- O domínio é um intervalo real limitado inferiormente, pois a posição da criança varia continuamente ao longo do tempo.
- A lei de formação para essa situação é uma *função trigonométrica* (seno ou cosseno). Usualmente os alunos não conseguem escrevê-la nem reconhecê-la, e portanto, a lei de formação foi deixada em branco. Para os alunos que queiram aprofundar seus conhecimentos, vale uma leitura sobre movimento oscilatório e funções trigonométricas.

G: Carro de corrida

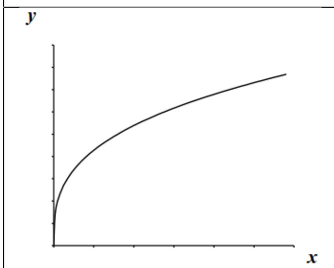
Nessa situação, é interessante observar que:

- O gráfico é decrescente, pois, fixada a distância a ser percorrida, quanto maior a velocidade, menor o tempo necessário para completar o percurso.

Gráfico G1	Lei de Formação L5
	$y = \frac{10}{x}$

- O gráfico não é linear, pois cada incremento na velocidade do carro corresponde a uma diminuição diferente do tempo necessário para concluir o percurso, ou seja, há diferentes taxas de variação.
- O gráfico não intercepta nenhum dos eixos, pois ambas as variáveis não podem ter valor nulo, uma vez que tais valores não apresentam sentido físico.
- O domínio é um intervalo real limitado inferiormente, pois o tempo para completar o percurso pode ser computado para qualquer valor real de velocidade média.
- A lei de formação para essa situação é uma *função racional* que pode ser obtida da própria definição de velocidade média: $v = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} \implies \Delta t = \dfrac{\Delta s}{v}$.

H: Balão inflando

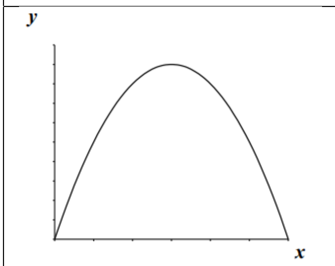
Gráfico G4	Lei de Formação L7
	$y = \frac{5}{4}\sqrt[3]{x}$

Nessa situação, é interessante observar que:

- O gráfico é crescente, pois o diâmetro do balão aumenta a medida que o volume de ar aumenta.
- O gráfico não é linear, pois cada incremento sucessivo no volume de ar corresponde a um aumento cada vez menor no diâmetro do balão, ou seja, há diferentes taxas de variação.

- O gráfico intercepta os eixos Ox e Oy no ponto $(0, 0)$, pois o diâmetro do balão é nulo quando não há volume de ar. Pode-se pensar também que o diâmetro é indefinido quando o volume é nulo, pois as paredes do balão estariam colapsadas.
- O domínio é um intervalo real limitado inferiormente, pois é possível calcular o diâmetro para qualquer valor real de volume de ar, assumindo que o balão infle sem estourar, como no enunciado.
- A lei de formação para essa situação é uma *função radical* que pode ser obtida pensando no balão como uma esfera. O volume é então é proporcional ao cubo do raio da esfera, e isolando-se o raio e substituindo-o pelo diâmetro, obtém-se uma função radical.

I: Bola de futebol

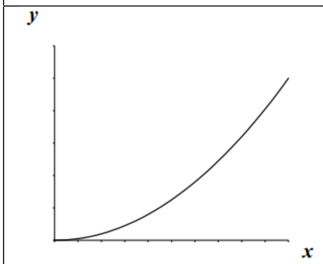
Gráfico G3	Lei de Formação L2
	$y = 30x - 5x^2$

Nessa situação, é interessante observar que:

- O gráfico tem um *intervalo crescente* e um *intervalo decrescente*, uma vez que a bola inicialmente sobe, aumentando sua altura, e depois passa a cair devido à gravidade, o que diminui a altura da bola.
- O gráfico não é linear, pois a velocidade da bola inicialmente diminui, e depois aumenta, de forma que o espaço percorrido pela bola não é constante para diferentes intervalos de tempo.
- O gráfico intercepta o eixo Ox duas vezes: uma no lançamento e uma no seu retorno ao solo. Aqui, optou-se por desconsiderar que a bola poderia continuar subindo e descendo após colidir com o solo.
- O domínio é um intervalo real limitado inferiormente, pois a altura da bola pode ser calculada para todos os valores de tempo transcorrido.
- A lei de formação para essa situação é uma *função de segundo grau*, de difícil percepção para alunos que não conheçam a equação do movimento retilíneo

uniformemente variado, $s = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$, das aulas de física. Ainda assim, é possível mostrar que, dentre as opções, esta lei de formação tem as duas *raízes* necessárias na situação problema, pois a bola sai do solo e depois regressa ao solo novamente. Lembre-se que o foco desta atividade é os alunos se familiarizarem com diferentes formatos de gráfico e leis de formação, e não estudarem um tipo de função a fundo.

J: Filme na tela

Gráfico G7	Lei de Formação L3
	$y = \frac{1}{4}x^2$

Nessa situação, é interessante observar que:

- O gráfico é crescente, pois quanto maior a distância do projetor, maior é a imagem formada.
- O gráfico não é linear, pois cada dimensão da imagem projetada (comprimento e largura) aumenta proporcionalmente à distância do projetor à tela, de forma que cada incremento na distância do projetor à tela resulta em um aumento proporcional ao quadrado deste incremento na área da imagem formada.
- O gráfico intercepta os eixos Ox e Oy no ponto $(0, 0)$, pois a imagem possuiria área nula se o projetor estivesse encostado na tela (caso a fonte de luz fosse pontual).
- O domínio é um intervalo real limitado inferiormente, pois a distância do projetor à tela pode ser ajustada para qualquer valor real positivo.
- A lei de formação para essa situação é uma função polinomial de segundo grau pois a área da imagem é proporcional ao quadrado da distância do projetor à tela.

Sugere-se que após os alunos terem contato com as 15 situações exploradas nas Aulas 1 a 5, o professor encoraje-os a, como uma atividade, elaborar e formalizar na escrita uma situação cotidiana nova, com enunciado e uma exploração da relação entre as variáveis escolhidas, seguindo o que foi discutido nas aulas anteriores.

4.4.3.1 Conceitos introduzidos nas Aulas 4 e 5

Família de funções. Conjunto de funções obtidas ao se variar um parâmetro na equação de uma função.

Intersecção com o eixo Oy. Ponto do gráfico de uma função no qual o valor de x é nulo, ou seja, o ponto $(0, f(0))$.

Intersecção com o eixo Ox. Ponto ou pontos do gráfico de uma função onde o valor da função é nulo, ou seja, os pontos da forma $(x, 0)$ que pertencem ao gráfico. Também chamados de *zeros da função* ou *raízes da função.*

Função polinomial. Função da forma $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, onde n é um número natural dito o grau do polinômio e os números $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ são números reais denominados coeficientes do polinômio.

Função de primeiro grau. Função polinomial da forma $f(x) = ax + b$, onde a e b são números reais e $a \neq 0$. a é dito o coeficiente angular e b o coeficiente linear da função.

Função de segundo grau. Função polinomial da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são números reais e $a \neq 0$.

Função racional. Função dada pela razão entre dois polinômios, da forma $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, onde P e Q são polinômios.

Função radical. Função envolvendo uma potência racional de um polinômio, da forma $f(x) = (P(x))^{\frac{n}{m}}$, onde P é um polinômio, n e m são números inteiros com $m \neq 0$ e n/m é fração irredutível.

Função exponencial. Função da forma $f(x) = b^x$ em que b é uma constante real positiva denominada base da função exponencial.

Função trigonométrica. Função que envolve uma das razões trigonométricas, da forma $f(x) = \mathrm{sen}(x)$, $f(x) = \cos(x)$ e $f(x) = \mathrm{tg}(x)$, por exemplo.

Intervalo de crescimento de uma função. Subconjunto do domínio da função no qual para quaisquer x_1 e x_2 pertencentes a este intervalo tem se que $f(x_1) < f(x_2)$ sempre que $x_1 < x_2$.

Intervalo de decrescimento de uma função. Subconjunto do domínio da função no qual para quaisquer x_1 e x_2 pertencentes a este intervalo tem se que $f(x_1) > f(x_2)$ sempre que $x_1 < x_2$.

4.4.4 Aula 6

Na Aula 6 os alunos trabalharão com um material online disponível na plataforma *Desmos* que aborda o tema de transformação de funções e aprofunda o conceito de família de funções, introduzido na aula anterior. A atividade é pensada para ser auto guiada. Idealmente o aluno deve ser capaz de explorá-la sozinho, com o professor atuando mais como suporte do que como instrutor.

A atividade está disponível online[10] e para utilizá-la com a sua turma, o professor deve acessar a plataforma, fazer *login* e criar um código de sessão para compartilhar com seus alunos. A atividade possui 23 páginas de tarefas variadas para os alunos, conforme mostra a Figura 38. O professor pode optar por introduzir um “ritmo”, como denominado pela própria plataforma, fazendo com que os alunos tenham acesso a apenas algumas páginas de cada vez, e assim o professor controla que os alunos só consigam avançar caso já tenham entendido as páginas em que trabalharam e pode criar momentos de discussão das tarefas com toda a turma.

Resumidamente, as primeiras 4 páginas da atividade são para os estudantes perceberem de forma visual que é possível transformar funções no plano cartesiano. As páginas 5 a 11 trabalham o conceito de *translação* vertical e horizontal de funções, vinculando as alterações algébricas a seus efeitos no gráfico. As páginas 12 a 17 trabalham as *transformações de expansão, compressão e reflexão de funções* na horizontal e na vertical, vinculando as alterações algébricas a seus efeitos no gráfico. A página 18 serve como revisão e resumo do que foi visto na atividade e a página 19 serve como retorno para o professor sobre como os alunos perceberam sua aprendizagem e seu interesse pela atividade. As páginas 20 a 23 sintetizam o que foi visto na aula, com tarefas que envolvem todas as transformações trabalhadas. É esperado que ao fim dessa atividade, os alunos consigam distinguir entre as variáveis e os *parâmetros de uma função*, bem como sejam capazes de reconhecer, planejar e executar transformações em funções em suas representações algébrica e gráfica.

Um dos propósitos dessa atividade é que os alunos adquiram a proficiência necessária no uso da calculadora gráfica *Desmos*, necessária para prosseguir com as atividades desta sequência didática. Para tanto, é importante que o professor tenha tal proficiência também, para que possa auxiliar os alunos, caso surja alguma necessidade. O Apêndice C

[10] `https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/6165e6313becaf1a13a2bffb?`

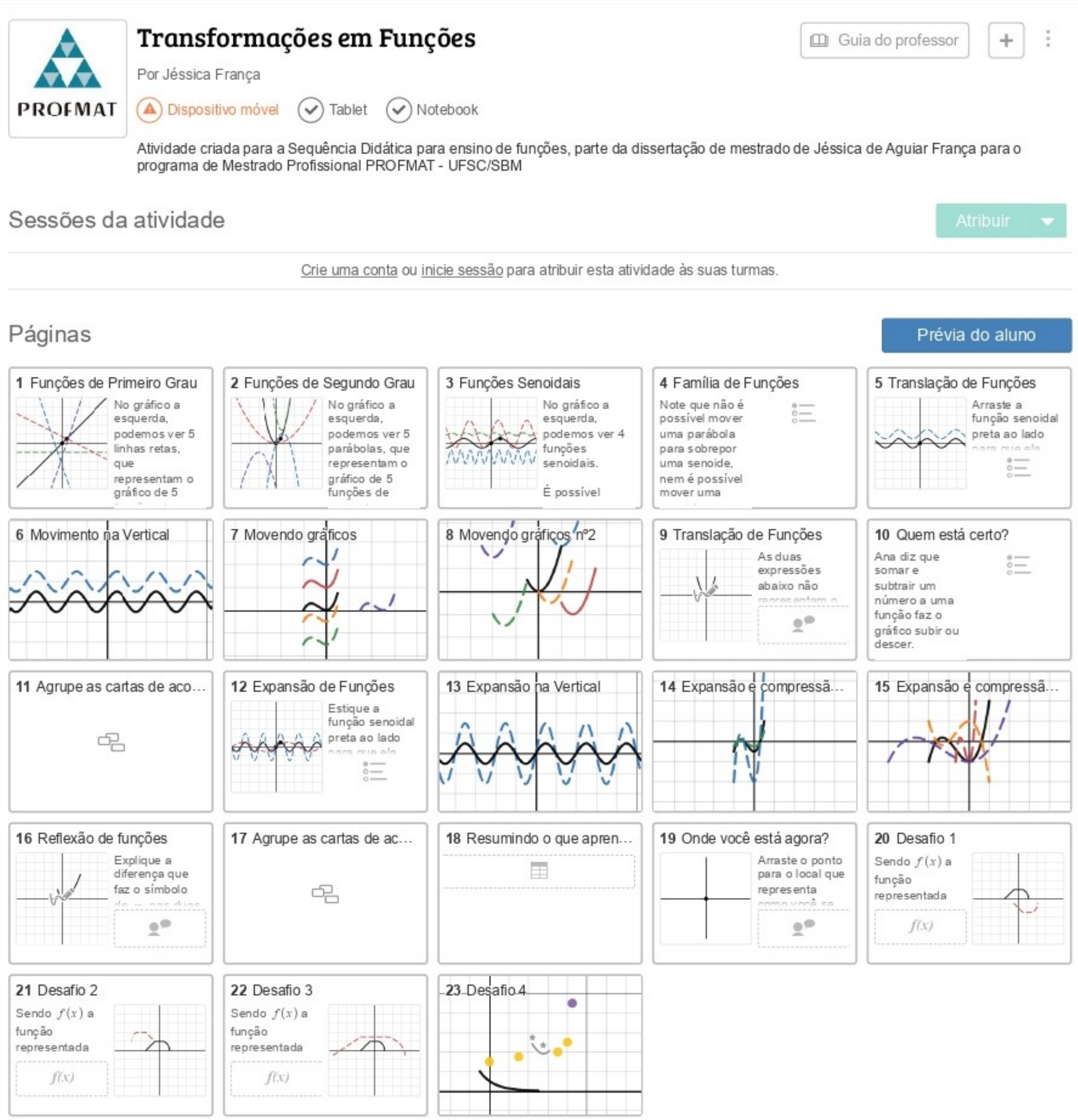


Figura 38: Atividade na *Desmos* para a Aula 6, constituída de 23 páginas de tarefas variadas para os alunos aprenderem sobre transformações e revisarem algumas famílias de funções.

inclui uma captura de tela das páginas dessa atividade, com descriminação do que é esperado do aluno, orientações para o professor e exemplos de resposta para cada página.

4.4.4.1 Conceitos introduzidos na Aula 6

Transformação de uma função. Efeito geométrico sobre o gráfico de $y = f(x)$ ao se realizar operações básicas sobre à função f ou a sua variável independente x.

Translação. Efeito geométrico sobre o gráfico de $y = f(x)$ obtido ao se somar (ou subtrair) uma constante à função f ou a sua variável independente x.

Expansão e contração. Efeito geométrico sobre o gráfico de $y = f(x)$ obtido ao se multiplicar (ou dividir) a função f ou a sua variável independente x por uma constante real positiva.

Reflexão. Efeito geométrico sobre o gráfico de $y = f(x)$ obtido ao se multiplicar a função f ou a sua variável independente x pela constante -1.

Parâmetro. Números reais (constantes) que aparecem somando, subtraindo, multiplicando ou dividindo funções e que, quando são variados, geram uma família de funções.

4.4.5 Aula 7

Nessa aula os alunos jogarão "Escorrega de Funções", um jogo no qual o objetivo é acertar todas as estrelas presentes na tela com as bolas que são lançadas. Para isso, os alunos terão de transformar as funções na tela, bem como *limitar o domínio e a imagem da função*, para criar os caminhos e obstáculos para a bola, de forma que ela passe pelas estrelas. O jogo, na forma de atividade da *Desmos*[11] está disponível online[12].

Assim como na atividade da Aula 6, para utilizá-la com a sua turma, o professor deve acessar a plataforma, fazer *login* e criar um código de sessão para compartilhar com seus alunos. A atividade, ilustrada na Figura 39, possui 26 páginas de tarefas e foi desenvolvida para ser auto guiada. As primeiras telas introduzem ao aluno como limitar o domínio e a imagem de um gráfico na calculadora gráfica *Desmos*, e gradualmente a complexidade das tarefas aumenta. A página 15 serve como resumo de algumas famílias

[11]O jogo foi criado utilizando o item *Marbleslides* do construtor de atividades da *Desmos*, explicado na Subseção 3.2.2

[12]`https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/6173138a0586c8591c9ad9f7?`

de funções, com um exemplo de lei de formação e do formato geral do gráfico de cada uma delas.

É importante que o professor avalie o progresso dos alunos constantemente, para ver se eles estão conseguindo transformar as funções e limitar o domínio e imagem da função adequadamente. Os alunos, às vezes, têm dificuldade principalmente na limitação do domínio e da imagem, particularmente ao trabalhar com valores negativos, pois erram o sentido da inequação. As tarefas propostas na atividade não têm uma resposta correta, assim os alunos podem cumprir cada objetivo de formas diferentes, sendo interessante compartilhar entre os estudantes soluções diferentes para o mesmo exercício ou desafio.

4.4.5.1 Conceitos introduzidos na Aula 7

Domínio natural de uma função. Em casos em que a função é definida algebricamente sem indicação de domínio, considera-se como domínio natural de uma função o conjunto de todos os números reais para os quais a lei algébrica retorna um valor real. Em uma calculadora gráfica, quando não especificado o domínio de uma função, o *software* representará a função em todo seu domínio natural.

Limitação do domínio de uma função. Em uma calculadora gráfica, é a operação de restringir o domínio natural de uma função de forma a representar a função apenas em um intervalo real limitado, por meio de uma inequação em sua variável independente.

Limitação da imagem de uma função. Em uma calculadora gráfica, é a operação de restringir a imagem de uma função representada em todo seu domínio natural de forma a representar a função apenas em um intervalo real limitado por meio de uma inequação em sua variável dependente.

4.4.6 Aulas 8, 9 e 10

Nas Aulas 8 e 9, os alunos irão elaborar um desenho usando a calculadora gráfica *Desmos*. Na Aula 10, os alunos irão compartilhar os desenhos com os colegas. Para poder salvar o desenho e posteriormente compartilhar com os colegas, é necessário que os alunos se cadastrem em `www.desmos.com` e façam *login*. Uma vez logados, dentro do ambiente da calculadora gráfica, aparece a opção “Salvar”.

Em geral os alunos conseguem elaborar desenhos extremamente elaborados e com

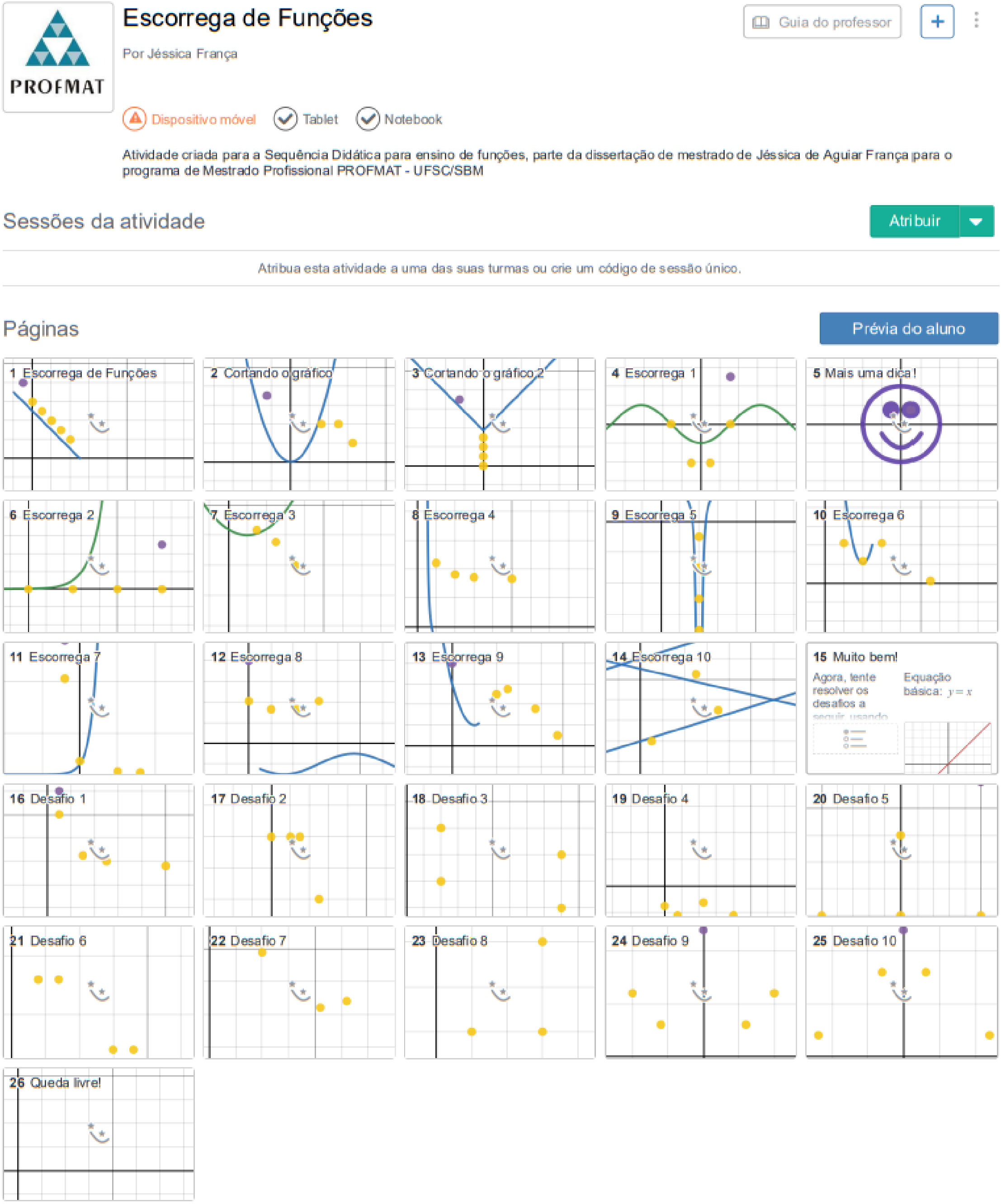


Figura 39: Atividade na *Desmos* para a Aula 7, constituída de 26 páginas de prática sobre família de funções e transformações.

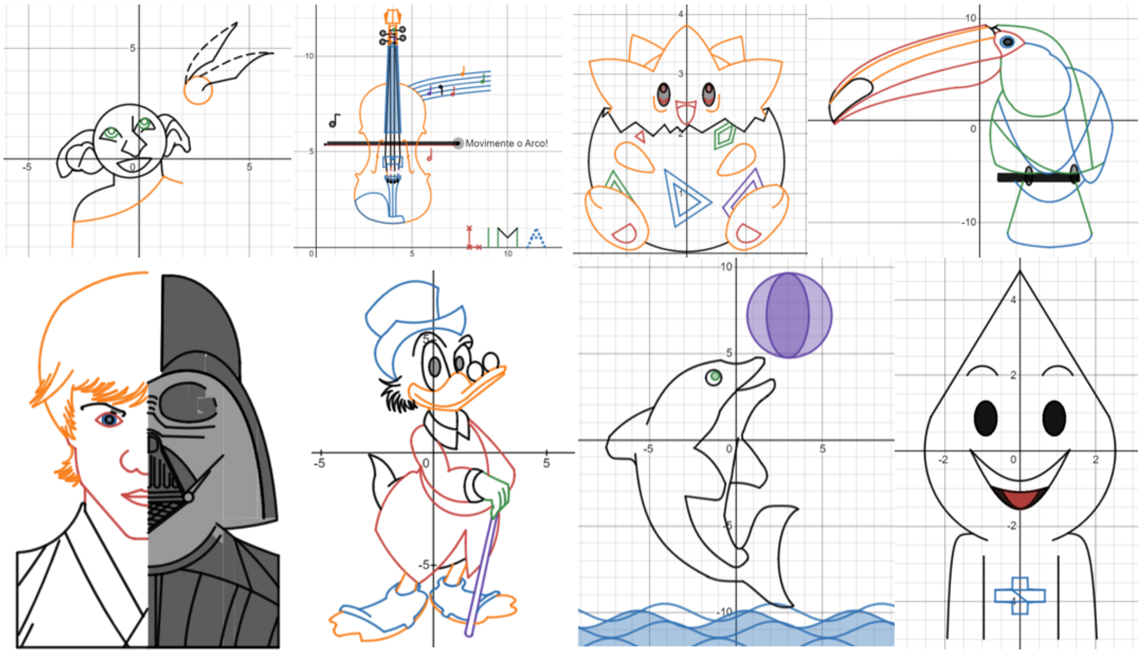


Figura 40: Desenhos realizados por alunos de Ensino Médio do Instituto Federal de Santa Catarina, onde a autora leciona.

detalhes minuciosos, conforme ilustrados na Figura 40[13], que mostra desenhos feitos por alunos do Ensino Médio como parte de uma atividade avaliativa. Para isso, é importante que os alunos se sintam livres para fazer o desenho tão elaborado quanto conseguirem, e, caso essa atividade seja avaliada de forma a resultar em uma nota, é interessante que os requisitos para uma nota máxima sejam alcançáveis para todos os alunos no espaço de duas horas aula.

Para o desenvolvimento do projeto “Desenhando na Desmos”, é preciso que o professor dê requisitos mínimos para os desenhos e ajude os alunos quando estes não conseguirem manipular as funções com o que eles aprenderam nas aulas anteriores. Requisitos sugeridos para o professor solicitar aos alunos incluem:

– Número mínimo de funções no desenho;

– Número mínimo de funções de diferentes famílias no desenho;

– Harmonização das cores das funções;

[13] Disponíveis em:
`https://www.desmos.com/calculator/oyl1sphsf9?`
`https://www.desmos.com/calculator/cnuibrl0dy?`
`https://www.desmos.com/calculator/earod5ejqy?`
`https://www.desmos.com/calculator/vx9v1refgv?`
`https://www.desmos.com/calculator/3oacqzi96o?`
`https://www.desmos.com/calculator/2ajefcfnmd?`
`https://www.desmos.com/calculator/86cjtnve73?`
`https://www.desmos.com/calculator/vrmva3xabc?`

- Originalidade da criação (note que há muitos links de desenhos feitos na *Desmos* disponíveis na internet, inclusive na própria *homepage* do site.);

- Utilização de outras estruturas matemáticas como pontos, círculos ou tabelas;

As dificuldades mais comuns dos alunos são com a notação matemática e com o uso do teclado do *software*. É comum que os alunos tenham dificuldade com a restrição de domínio e imagem (principalmente quando realizam a restrição antes de transformar o gráfico ou quando confundem o uso de $<$ e $>$) e com o uso de sobrescrito nas funções exponenciais, por exemplo.

A conclusão desta sequência didática culmina com a apresentação dos desenhos pelos alunos, momento no qual os alunos podem explorar o que os colegas fizeram e como eles fizeram, comparar diferentes estratégias utilizadas para criar uma forma específica e socializar as escolhas artísticas feitas por cada um. É um momento rico e leve.

4.5 AVALIAÇÃO

Ao longo da sequência didática foram sugeridas duas avaliações, (1) a elaboração e exploração de uma situação problema cotidiana semelhante às expostas nas Aulas 1 a 5 e (2) a confecção de um desenho utilizando a calculadora gráfica *Desmos*. Ambas as avaliações sugeridas são abertas e podem ser pensadas tanto como avaliações formativas quanto avaliações somativas. Respeitando o ideal do trabalho em grupo e construção coletiva do conhecimento, uma estratégia de avaliação que pode ser explorada nessas atividades é a correção por pares, nas quais os alunos têm acesso ao material produzido pelos colegas para avaliar se a explicação está escrita de forma que o raciocínio do autor pode ser acompanhado e se os requisitos solicitados foram alcançados.

Em consonância com os objetivos desta sequência didática, ao avaliar a primeira atividade proposta é importante perceber se o aluno consegue:

- Elaborar uma situação problema em que exista de fato uma relação funcional entre as grandezas;

- Interpretar sua situação problema e representar a exploração da situação utilizando diferentes representações de funções;

- Reconhecer se a relação entre as variáveis é linear ou não, utilizando para isso o conceito de taxa de variação.

Após os alunos apresentarem suas situações, é interessante que o professor divida alguns exemplos estimulantes com os colegas, as vezes apresentando um gráfico, as vezes uma equação, as vezes uma tabela e pedindo para os alunos chegarem a uma outra representação da função, inclusive elaborando uma situação que possa ser representada por aquela função. Tal exercício ajuda a fomentar nos alunos a capacidade de transitar entre as diferentes representações e de perceber semelhanças entre diferentes situações que possam ser modeladas por funções da mesma família.

Já ao avaliar a segunda atividade proposta é importante perceber se o aluno consegue:

– Conceber, ao longo do desenvolvimento da atividade, que tipo de função ele usará para criar um traço específico no desenho, reconhecendo as características do gráfico de cada família de função;

– Planejar e executar translações, transformações e limitações de domínio e imagem nas funções utilizadas no desenho para delinear cada traço do desenho;

– Reconhecer os diferentes parâmetros das funções utilizadas no desenho e a influência na mudança de cada um na representação gráfica.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, foram produzidos dois produtos educacionais para os professores de matemática de Ensino Médio: um guia de utilização das Atividades em Sala de Aula da plataforma *Desmos* e uma sequência didática para o ensino de funções, utilizando a tecnologia de forma integrada às aulas.

A *Desmos*, embora seja uma ferramenta com diversas potencialidades para a utilização em sala de aula, ainda carece de guias de utilização e fóruns de ajuda disponibilizados em português. Nesse sentido, trouxemos aqui um guia detalhado de como utilizar as Atividades em Sala de Aula da plataforma *Desmos* e um guia de como montar uma atividade passo a passo na plataforma. Tais atividades podem ser elaboradas inclusive para servir como um livro texto interativo, se programadas de forma adequada, como vários exemplos disponibilizados pela curadoria do *site*. Dessa forma, podem ser utilizadas para personalizar o processo de ensino-aprendizagem, possibilitando que cada aluno explore o conteúdo em seu próprio ritmo, com *feedback* interativo a cada página.

O ensino de funções, embora seja central no currículo de matemática no Ensino Médio brasileiro, ainda apresenta diversos obstáculos, dentre os quais podemos citar dificuldades prévias dos alunos em conceitos necessários para o entendimento de funções, a segregação do estudo de funções em seus diferentes tipos e a dificuldade de assimilar funções como um objeto e não apenas um processo. Em vista desses obstáculos, aqui apresentamos uma sequência didática, criada a partir da experiência da autora em sala de aula, que aborda o tópico de funções de forma alicerçada na literatura disponível sobre o ensino de álgebra, e mais especificamente, de funções. Para fundamentar a proposta, foi incluído um capítulo para discorrer sobre o histórico de funções como objeto matemático e como objeto de estudo no ensino básico brasileiro, bem como sobre as pesquisas em educação matemática disponíveis no que diz respeito ao ensino de funções.

Dessa forma, as funções são apresentadas inicialmente com menor rigor, de forma aplicada a contextos familiares aos alunos e utilizando a tecnologia de forma integrada para prover a representação gráfica das funções. A partir desta abordagem, a definição e diferentes características de funções são trabalhadas, visando que o aluno ao mesmo tempo consiga criar uma imagem mental abrangente e exata da definição de função, e compreender a função como um objeto matemático único, composto de seu domínio, contradomínio e regra de correspondência. Para tanto, a sequência didática culmina em uma atividade lúdica que requer do aluno a manipulação algébrica de funções (e opcionalmente de outras expressões como inequações) ciente do impacto destas manipulações na representação gráfica. Essa abordagem, pensada para a introdução do conceito de função para alunos do Ensino Médio, pode ser utilizada também em turmas recém ingressas no nível superior, de forma à promover o desenvolvimento de habilidades necessárias para o estudo do cálculo diferencial e integral.

Como sugestão de trabalho futuro, podemos aplicar a proposta de sequência didática em turmas reais e avaliar o impacto desta abordagem na compreensão do conceito de função. Além do resultado na aprendizagem, também pode ser ponderado o impacto dessa abordagem na motivação e no interesse dos alunos, uma vez que tais fatores são cruciais para o engajamento e aproveitamento discente. O guia de utilização das Atividades em Sala de Aula da *Desmos* produzido aqui pode ser editado para publicação na forma de um livro ou *ebook*, para facilitar o acesso a essa informação pelos professores de matemática que atuam nas salas de aula de Ensino Médio no país.

REFERÊNCIAS

ABREU, J. D. de. *Aprendizagem Móvel: Explorando a Matemática por Meio de Aplicativos Educacionais em Smartphones*. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) — Universidade Estadual da Paraiba, Campina Grande, 2018.

ALTINDIS, N. *Exploring The Nature Of The Co-emergence Of Students' Representational Fluency And Functional Thinking*. Tese (Doutorado) — Syracuse University, New York, 2021.

ALVES, F. *O Uso de Softwares para o Ensino de Funções*. Monografia (TCC: Especialização Em Tecnologias, Comunicação e Técnicas de Ensino) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2018.

ANTUNES, G.; CAMBRAINHA, M. *Modelos de exploração matemática na plataforma Desmos: ensinar e aprender em um ambiente virtual de aprendizagem*. 2020. Disponível em: `https://anpmat.org.br/wpcontent/uploads/2020/07/e-book_Desmos_final.pdf`. Rio de Janeiro: Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica. E-book. 1ª Edição. Acessado em 15/03/2022.

ARDENGUI, M. J. *Ensino Aprendizagem do Conceito de Função: Pesquisas Realizadas no Período de 1970 a 2005 no Brasil*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

BANDEIRA, A. A. *Utilizando Calculadoras Gráficas no Estudo do Comportamento Gráfico de Funções no Ensino Fundamental e Médio*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2015.

BARALDO, B. P. F. *Sobre a necessidade e a viabilidade de um ensino dinâmico de funções*. Monografia (TCC: Licenciatura em Matemática) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2009.

BIGGS, J. B.; COLLIS, K. F. *Evaluating the quality of learning: The SOLO taxonomy (Structure of the Observed Learning Outcome*. New York: Academic Press, 1982. (Educational Psychology). ISBN 0-12-097550-5.

BRAGA, C. *O processo inicial de disciplinarização de função na matemática do ensino secundário brasileiro*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. 2018. Disponível em: `http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf`. Online. MEC. Acessado em 06/11/2021.

CARAÇA, B. de J. *Conceitos Fundamentais da Matemática*. 1. ed. Lisboa: Tipografia Matemática, 1951.

CARRAHER, D. W.; SCHLIEMANN, A. D. Powerful ideas in elementary school mathematics. In: ENGLISH, L. D.; KIRSHNER, D. (Ed.). *Handbook of International Research in Mathematics Education*. 3. ed. New York: Routledge, 2016. cap. 6.

COSTA, B. S. R. D. *Uma Proposta para o Ensino de Função Polinomial do 1º Grau Utilizando a Plataforma do App Inventor 2 e o Software Desmos*. Dissertação (Mestrado Profissional em Docência em Educação em Ciências e Matemáticas) — Universidade Federal do Pará, Belém, 2021.

DASSIE, B. A. *A matemática do curso secundário na Reforma Gustavo Capanema*. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2001.

DESMOS, INC. *Princípios orientadores da Desmos*. 2022. Acesso em 26/03/2022. <https://www.desmos.com/guiding-principles?lang=pt-BR>.

DOORMAN, M. et al. Tool use and the development of the function concept: From repeated calculations to functional thinking. *International Journal of Science and Mathematics Education*, v. 10, p. 1243–1267, 2012.

DREYFUS, T. Advanced mathematical thinking. In: NESHER, P.; KILPATRICK, J. (Ed.). *Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Cambridge: Cambridge University Press, 1990, (ICMI Studies). cap. 6, p. 113–134.

DUVAL, R. Gráficos e equações: a articulação de dois registros. *REVEMAT*, v. 6, n. 2, p. 96–112, 2011. Traduzido por Méricles Thadeu Moretti.

DUVAL, R. Questões epistemológicas e cognitivas para pensar antes de começar uma aula de matemática. *REVEMAT*, v. 11, n. 2, p. 6–78, 2016. Traduzido por Méricles Thadeu Moretti.

DUVAL, R. *Understanding the Mathematical Way of Thinking – The Registers of Semiotic Representations*. 1. ed. Cham, Switzerland: Springer Cham, 2017. 117 p. ISBN 978-3-319-56910-9.

EUZEBIO, J. da S. *Proposta de Ensino de Geometria Analítica Utilizando o Desmos*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Pato Branco, 2018.

FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no brasil. *Zetetiké*, Campinas (SP), v. 3, n. 4, 1995.

FRIEL, S. N.; MARKWORTH, K. A. A framework for analyzing geometric pattern tasks. *Mathematics teaching in the Middle school*, v. 15, n. 1, p. 24–33, 2009.

GRIZE, J. B. Analyses pour servir à l'étude épistémologique de la notion de fonction. In: PIAGET, J. et al. (Ed.). *Epistémologie et psychologie de la fonction*. Paris: Presses Universitaires de France, 1968. cap. XXIII, p. 167–197.

GÜNSTER, S. M.; WEIGAND, H.-G. Designing digital technology tasks for the development of functional thinking. *ZDM – Mathematics Education*, v. 52, p. 1259–1274, 2020.

HEGEDUS, S. et al. *Uses of Technology in Upper Secondary Mathematics Education*. 1. ed. Switzerland: Springer, Cham, 2017. (ICME-13 Topical Surveys). ISBN 978-3-319-42610-5.

HOFFKAMP, A. Enhancing functional thinking using the computer for representational transfer. In: *Proceedings of the 6th European Society for Research in Mathematics Education Conference*. Lyon, France: [s.n.], 2009.

KLEINER, I. Evolution of the function concept: A brief survey. *The College Mathematics Journal*, v. 20, n. 4, p. 282–300, 1989.

KRUGER, K. Functional thinking: The history of a didactical principle. In: WEIGAND, H.-G. et al. (Ed.). *The Legacy of Felix Klein*. Switzerland: Springer, 2019. cap. 3, p. 35–54.

LEINHARDT, G.; ZASLAVSKY, O.; STEIN, M. K. Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research*, v. 60, n. 1, p. 1–64, 1990.

LICHTI, M.; ROTH, J. How to foster functional thinking in learning environments using computer-based simulations or real materials. *Journal for STEM Education Research*, v. 1, p. 148–172, 2018.

LICHTI, M.; ROTH, J. Functional thinking—a three-dimensional construct? *Journal für Mathematik-Didaktik*, v. 40, p. 169–195, 2019.

MACIEL, P. R. C.; CARDOSO, T. F. L. A história do conceito de função em vídeo: uma proposta para a aprendizagem. *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 28, n. 50, p. 1348–1367, 2014.

MAINALI, B. Representation in teaching and learning mathematics. *International Journal of Education in Mathematics, Science, and Technology (IJEMST)*, Turkey, v. 9, n. 1, p. 1–21, 2021.

MAKONYE, J. P. Teaching functions using a realistic mathematics education approach: A theoretical perspective. *International Journal of Educational Sciences*, v. 7, n. 3, p. 653–662, 2017.

MARINHO, A. D. *Utilizando Calculadoras Gráficas no Estudo do Comportamento Gráfico de Funções no Ensino Fundamental e Médio*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2015.

MARKWORTH, K. A. *Growing And Growing: Promoting Functional Thinking With Geometric Growing Patterns*. Tese (Doutorado) — University of North Carolina at Chapel Hill, Chapel Hill, 2010.

MEDVEDEV, F. A. *Scenes from the history of real functions*. [S.l.]: Birkhliuser Verlag Basel, 1991.

MENDES, M. H. M. *O conceito de função: aspectos históricos e dificuldades apresentadas por alunos na transição do segundo para o terceiro grau*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1994.

MENEGHETTI, R. C. G.; REDLING, J. P. Tarefas alternativas para o ensino e a aprendizagem de funções: análise de uma intervenção no ensino médio. *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 26, n. 42A, p. 193–229, 2012.

MENNA BARRETO, M. *Matemática e Educação Sexual: modelagem do fenômeno da absorção/eliminação de anticoncepcionais orais diários*. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2007.

MICHELSEN, C. Functions: a modelling tool in mathematics and science. *ZDM – Mathematics Education*, v. 38, n. 3, p. 269–280, 2006.

MIORIM, M. Ângela. *Introdução à História da Educação Matemática*. São Paulo: Atual, 1998.

NEVES, J. D.; RESENDE, M. R. O processo de ensino-aprendizagem do conceito de função: um estudo na perspectiva da teoria histórico-cultural. *Educ. Matem. Pesq.*, São Paulo, v. 18, n. 2, p. 599–625, 2016.

PELEGRINO, T. F. *Discurso Matemático e Pedagógico de Professores: explorando o máximo de uma função utilizando a metodologia MathTask com o apoio da tecnologia Desmos*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2020.

PELHO, E. B. B. *Introdução ao conceito de função: a importância da compreensão das variáveis*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.

PINTO, A. H. A base nacional comum curricular e o ensino de matemática: flexibilização ou engessamento do currículo escolar. *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 31, n. 59, p. 1045–1060, 2017.

PIRES, C. M. C. Educação matemática e sua influência no processo de organização e desenvolvimento curricular no brasil. *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 21, n. 29, p. 13–42, 2008.

PONTE, J. P. The history of the concept of function and some educational implications. *Mathematics Educator*, v. 3, n. 2, p. 3–8, 1992.

ROLFES, T.; ROTH, J.; SCHNOTZ, W. Effects of tables, bar charts, and graphs on solving function tasks. *Journal für Mathematik-Didaktik*, v. 39, p. 97–125, 2018.

ROLFES, T.; ROTH, J.; SCHNOTZ, W. Mono- and multi-representational learning of the covariational aspect of functional thinking. *Journal for STEM Education Research*, 2021.

RÜTHING, D. Some definitions of the concept of function from joh. bernoulli to n. bourbaki. *Math. Intelligencer*, v. 4, n. 6, p. 72–77, 1984.

SANTOS FILHO, C. V. dos. *Conceito de função: uma abordagem do processo ensino - aprendizagem utilizando-se o computador como recurso didático*. Dissertação (Mestrado em Tecnologia) — Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2003.

SANTOS, J. B. P. D.; TOLENTINO-NETO, L. C. B. D. O que os dados do SAEB nos dizem sobre o desempenho dos estudantes em matemática? *Educ. Matem. Pesq.*, v. 17, n. 2, p. 309–333, 2015.

SCHWARZ, O. *Sobre as concepções de função dos alunos ao término do 2º grau.* Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1995.

SCREMIN, G. *Software Desmos como Ferramenta de Ensino e Aprendizagem de Derivadas.* Monografia (TCC: Especialização em Tecnologias da Informação e da Comunicação Aplicadas ao Ensino) — Universidade Federal de Santa Maria; Universidade Aberta do Brasil, Santa Maria, 2017.

SCREMIN, G. *O que f(x') nos diz sobre f(x) : Uma Abordagem com Uso de Tecnologia Computacional.* Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) — Fundação Vale do Taquari de Educação e Desenvolvimento Social, Lajeado, 2019.

SELDEN, A.; SELDEN, J. Research perspectives on conceptions of function: summary and overview. In: HAREL, G.; DUBINSKY, E. (Ed.). *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy.* Washington D.C.: Mathematical Association of America, 1992. v. 25, p. 1–16.

SFARD, A. Transition from operational to structural conception: The notion of function revisited. In: *Proceedings of the Thirteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education.* Laboratoire PSYDEE, France: [s.n.], 2009. v. 3, p. 151–158.

SFARD, A.; LINCHEVSK, L. The gains and the pitfalls of reification - the case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, n. 26, p. 191–228, 1994.

SIERPINSKA, A. On understanding the nothion of function. In: HAREL, G.; DUBINSKY, E. (Ed.). *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy.* Washington D.C.: Mathematical Association of America, 1992. v. 25, p. 25–58.

SILVA, A. C. A. T. D. *Discurso Matemático e Pedagógico de Professores: Explorando o Sinal de Uma Função Utilizando a Metodologia Mathtask e Com o Apoio da Tecnologia Desmos.* Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2020.

SOARES, F. *Movimento da Matemática Moderna no Brasil: Avanço ou Retrocesso?* Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2001.

SOARES, F. dos S.; DASSIE, B. A.; ROCHA, J. L. da. Ensino de matemática no século xx – da reforma francisco campos à matemática moderna. *Horizontes*, Bragança Paulista, v. 22, n. 1, p. 7–15, 2004.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. *Guias curriculares para o ensino de matemática: 1º grau*, São Paulo (SP), 1976.

THOMPSON, P. Students, functions, and the undergraduate curriculum. In: DUBINSKY, E.; SCHOENFELD, A. H.; KAPUT, J. J. (Ed.). *Research in Collegiate Mathematics Education, 1.* Providence: American Mathematical Society, 1994. Issues in Mathematics Education, v.4, p. 21-44.

THOMPSON, P. W. Experience, problem solving, and learning mathematics: Considerations in developing mathematics curricula. In: SILVER, E. A. (Ed.). *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives*. Hillsdale, NJ: Erlbaum, 1985. p. 189–243.

WARREN, E. Patterns supporting the development of early algebraic thinking. In: *Building connections: Theory, research and practice (Proceedings of the 28th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*. Melbourne: [s.n.], 2005. p. 759–766.

WATSON, A.; HAREL, G. The role of teachers' knowledge of functions in their teaching: A conceptual approach with illustrations from two cases. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, v. 13, n. 2, p. 154–168, 2013.

WILKIE, K. J.; CLARKE, D. M. Developing students' functional thinking in algebra through different visualisations of a growing pattern's structure. *Mathematics Education Research Journal*, v. 28, p. 223–243, 2016.

YOUSCHKEVITCH, A. P. The concept of function up to the middle of the 19th century. *Archive for History of Exact Sciences*, v. 16, p. 37–85, 1976.

APÊNDICE A – Índice de funcionalidades das Atividades de Sala de Aula da Desmos abordadas na Seção 3.3.

Índice de funcionalidades das Atividades de Sala de Aula da Desmos abordadas na Seção 3.3.

Funcionalidades gerais

–Como inserir um título na página? - Subseção 3.3.1.

–Como inserir novos componentes na página? - Subseção 3.3.1.

–Como inserir dicas para os professores, exemplos de resposta e ajuda ao aluno? - Subseção 3.3.1.

–Como inserir novas páginas na atividade? - Subseção 3.3.1.

–Como mudar a ordem ou posição de um componente na página? - Subseção 3.3.2.

–Como copiar uma página de uma atividade já existente? - Subseção 3.3.8.

–Como publicar uma atividade? - Subseção 3.3.10.

Componente Nota

–Como inserir texto em um item de Nota? - Subseção 3.3.1.

–Como formatar o texto de um item Nota? - Subseção 3.3.2.

–Como formatar o texto de um item de Nota para o formato de equação? - Subseção 3.3.5.

Componentes Gráfico e Calculadora gráfica

–Como editar o item Gráfico? - Subseção 3.3.1.

–Como criar um ponto móvel e uma função passando por um ponto móvel? - Subseção 3.3.1.

–Como personalizar a aparência das expressões plotadas? - Subseção 3.3.1.

–Como limitar os valores assumidos por um parâmetro definido por um controle deslizante? - Subseção 3.3.2.

–Como criar um parâmetro para possibilitar a correção automática do gráfico usando a camada de computação? - Subseção 3.3.3.

–Como inserir uma nota na Calculadora gráfica? - Subseção 3.3.4.

–Como inserir uma pasta na Calculadora gráfica? - Subseção 3.3.4.

–Como colocar uma expressão dentro de uma pasta na Calculadora gráfica? - Subseção 3.3.4.

–Como ocultar uma pasta da visão dos alunos na Calculadora gráfica? - Subseção 3.3.4.

Componente Múltipla escolha

–Como formatar o texto de uma opção do item de Múltipla escolha para o formato de equação? - Subseção 3.3.3.

–Como configurar um item de Múltipla escolha para ter correção automática? - Subseção 3.3.3.

Componente Desenho - Subseção 3.3.5.

Componente Ordenação de fichas

–Como configurar o componente Ordenação de fichas? - Subseção 3.3.6.

–Como definir um gabarito no componente Ordenação de fichas? - Subseção 3.3.6.

Componente Tabela - Subseção 3.3.7.

Componentes Entrada de texto e Equação

–Como configurar um item de Entrada de texto ou Equação para que a resposta de um aluno seja compartilhada com os demais alunos da turma? - Subseção 3.3.5.

–Como configurar um componente Equação? - Subseção 3.3.9.

Componente *Marbleslides*

–Como funciona o componente *Marbleslides*? - Subseção 3.3.10.

–Como inserir as estrelas e a esfera em um componente *Marbleslides*? - Subseção 3.3.10.

Camada de computação

–Como abrir a camada de computação de um componente? - Subseção 3.3.1.

–Como desligar a funcionalidade de mostrar as coordenadas dos pontos ao clicar em algum lugar do Gráfico? - Subseção 3.3.1.

–Como ignorar um item para o critério de correção da página? - Subseção 3.3.1.

–Como nomear um componente para utilizá-lo na camada de computação? - Subseção 3.3.2.

–Como referenciar um componente diferente na camada de computação? - Subseção 3.3.2.

–Como utilizar a camada de computação para esconder um componente? - Subseção 3.3.2.

–Como extrair o valor de um parâmetro de um componente Gráfico? - Subseção 3.3.3.

–Como criar uma variável na camada de computação? - Subseção 3.3.3.

–Como usar um condicional em uma variável na camada de computação? - Subseção 3.3.3.

–Como inserir uma variável definida na camada de computação no texto de um componente de Nota? - Subseção 3.3.3.

–Como utilizar um parâmetro de um componente Gráfico para considerar o item correto ou errado - Subseções 3.3.3 e 3.3.4.

APÊNDICE B – Resumo das atividades da sequência didática e sugestões de adaptação para aplicação de forma isolada.

Resumo das atividades da sequência didática e sugestões de adaptação para aplicação de forma isolada.

Aula 1 - Aula expositiva e dialogada.

Conteúdos abordados: Variável, variável independente, variável dependente; Função; Domínio e imagem de funções; Conjuntos contínuos, discretos, limitados e intervalos reais.

Pré-requisitos: Noções de álgebra do ensino fundamental.

Adaptações e Sugestões: Sem adaptações necessárias.

Aulas 2 e 3 - Resolução de situações problemas e atividade online "Cara a cara de funções".

Conteúdos abordados: Função; Domínio e imagem de funções; Taxa de variação; Gráfico crescente e decrescente; Gráfico linear e não linear.

Pré-requisitos: Noções de função, relações de dependência, domínio e imagem de funções, plano cartesiano e gráficos no plano cartesiano.

Adaptações e Sugestões: Para aplicar de forma isolada:

–As situações problema - é recomendado resolver uma das situações propostas junto com a turma para que eles saibam o que é esperado da atividade antes de deixá-los explorarem a atividade em pequenos grupos. Recomenda-se a resolução da "Situação do Carro" com os alunos, e que eles trabalhem de forma independente nas demais.

–Cara a cada de funções - os alunos precisam saber vocabulário para descrever o gráfico de uma função, em especial: crescimento e decrescimento, gráfico linear ou não linear, domínio contínuo e discreto. Não é necessário conhecimento prévio sobre a utilização do *software Desmos* para os alunos realizarem a atividade, mas é importante que o docente esteja familiarizado com a ferramenta, conforme descrito na Seção 3.2.

Aulas 4 e 5 - Resolução de situações problemas.

Conteúdos abordados: Função; Domínio e imagem de funções; Família de funções – Funções polinomiais, racionais, radicais, exponenciais e trigonométricas; Representação gráfica de funções; Taxa de variação; Gráfico crescente e decrescente; Gráfico linear e não linear.

Pré-requisitos: Noções de função, domínio e imagem de funções, taxa de variação, crescimento e decrescimento de funções e representação gráfica de funções.

Adaptações e Sugestões:

–Para aplicar de forma isolada, é recomendado resolver uma das situações propostas com a turma para que eles saibam o que é esperado da atividade antes de deixá-los explorarem a atividade em pequenos grupos. Recomenda-se a resolução da Situação J - "Um filme é projetado em uma tela" com os alunos, e que eles trabalhem de forma independente nas demais.

–Essa atividade pode ser feita fora do horário de aula, caso os alunos tenham resolvido as atividades propostas nas Aulas 1 a 3, e apenas a correção ser feita em sala com os alunos, caso o docente não disponha do tempo para implementar toda a sequência didática em aula. Para auxiliar os alunos a resolverem sem a supervisão docente, recomenda-se deixar a atividade com as seguintes perguntas orientadoras:

1. O gráfico deve ser crescente ou decrescente?
2. O domínio é discreto ou contínuo?
3. Como é a taxa de variação da função? É constante? Está aumentando?
4. O que acontece quando a variável $\boldsymbol{x}$ assume o valor 0?
5. Juntando essas informações, como deve ser o gráfico da função?
6. Que tipo de função você espera que se relacione com o gráfico obtido?

Aula 6 - Atividade online "Transformação de funções".

Conteúdos abordados: Representação gráfica de funções; Família de funções; Transformação de funções: translação, reflexão, expansão e contração.

Pré-requisitos: Noções de função, domínio e imagem de funções, representação algébrica e gráfica de funções, variáveis, variável independente, variável dependente.

Adaptações e Sugestões: Para aplicar de forma isolada a atividade "Transformação de funções" é necessário que os aluno estejam familiarizados com os conceitos de variável independente e dependente e com a notação algébrica de relações funcionais, bem como com a representação gráfica de funções. Não é necessário conhecimento prévio sobre a utilização do *software Desmos* para os alunos realizarem a atividade, mas é importante que o docente esteja familiarizado com a ferramenta, conforme descrito na Seção 3.2.

Aula 7 - Atividade online "Escorrega de funções".

Conteúdos abordados: Representação gráfica de funções; Família de funções; Transformação de funções: translação, reflexão, expansão e contração; Domínio e imagem de uma função.

Pré-requisitos: Noções de função, domínio e imagem de funções, representação algébrica e gráfica de funções, variáveis, variável independente, variável dependente, transformação de funções: translação, reflexão, expansão e contração.

Adaptações e Sugestões:

–Recomenda-se aplicar essa atividade após a aplicação da atividade "Transformação de funções".

–Essa atividade pode ser feita fora do horário de aula, após os alunos terem realizado a atividade "Transformação de funções", caso o docente não disponha do tempo para implementar toda a sequência didática em aula. Nessa situação, é crucial que o docente acompanhe o desenvolvimento da atividade no Painel do Professor na plataforma *Desmos* e intervenha com a turma caso haja desafios que os alunos não consigam resolver.

–Para aplicar de forma isolada a atividade "Escorrega de funções" é necessário que os alunos estejam familiarizados com os conceitos de variável independente e dependente, com a notação algébrica de relações funcionais, bem como com a representação gráfica de funções e as transformações de translação, reflexão, expansão e contração de funções. Não é necessário conhecimento prévio sobre a utilização do *software Desmos* para os alunos realizarem a atividade, mas é importante que o docente esteja familiarizado com a ferramenta, conforme descrito na Seção 3.2.

Aulas 8 a 10 - Construção de um desenho na calculadora gráfica.

Conteúdos abordados: Representação gráfica de funções; Família de funções; Transformação de funções: translação, reflexão, expansão e contração; Domínio e imagem de uma função.

Pré-requisitos: Noções de função, domínio e imagem de funções, representação algébrica e gráfica de funções, variável, variável independente, variável dependente, transformação de funções: translação, reflexão, expansão e contração.

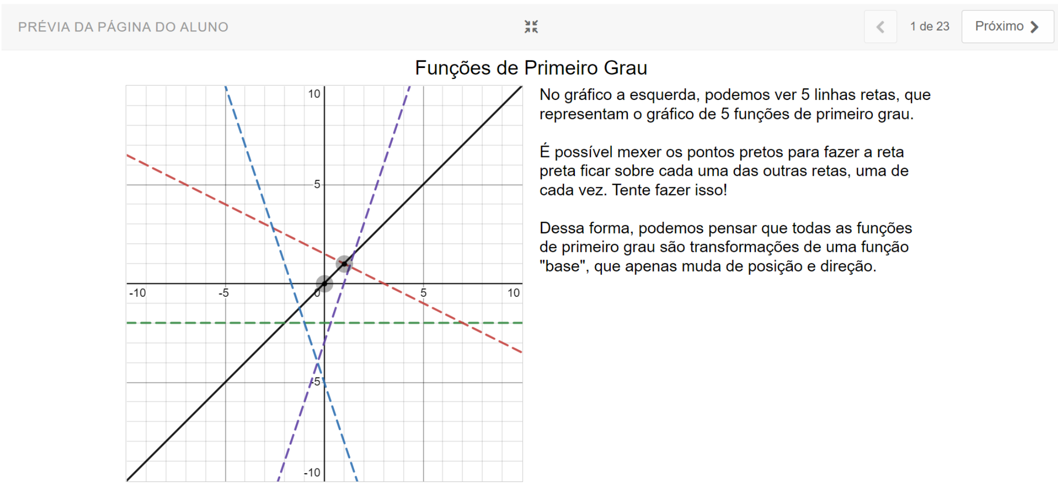
Adaptações e Sugestões: Para aplicar de forma isolada, é necessário que os alunos estejam familiarizados com a notação algébrica de relações funcionais, com a representação gráfica de funções e as transformações de translação, reflexão, expansão e contração de funções. É recomendado mas não necessário que os alunos tenham conhecimento prévio sobre a utilização do *software Desmos*. Caso os alunos não tenham utilizado a calculadora gráfica *Desmos* anteriormente, será necessário mais tempo para se acostumarem com a notação necessária para utilização do software. Recomenda-se também, neste caso, que os alunos façam a "Visita Guiada" disponível na calculadora gráfica *Desmos* e que tenham acesso a uma lista do formato geral de algumas famílias de funções, como a disponível na página 15 da atividade "Escorrega de funções" para servir de base para o início do desenho.

APÊNDICE C – Atividade de Transformação de Funções

Atividade de Transformação de Funções

Abaixo estão capturas de tela da atividade de Transformação de Funções utilizada na Aula 6 (Subseção 4.4.4)[1], com indicação do que é esperado do aluno em cada página, orientações ao professor, e exemplos de resposta, quando apropriado.

Página 1



O que é esperado do aluno?

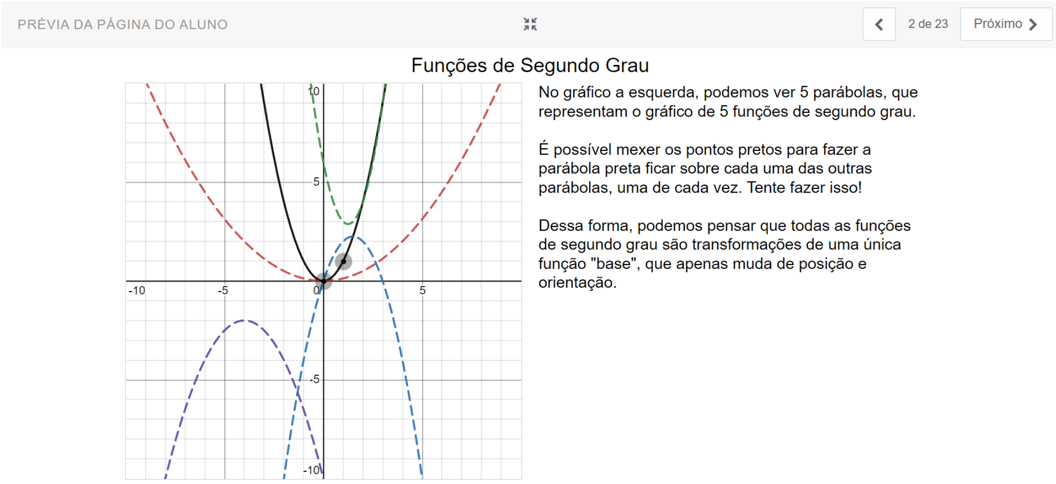
Nessa página os alunos devem arrastar os pontos pretos do gráfico, usando o mouse, de forma que a reta preta sobreponha cada uma das retas coloridas, uma de cada vez. É uma página apenas de exploração.

Orientações ao Professor

Veja se os alunos entenderam o comando e se conseguem arrastar os pontos corretamente.

[1]Disponível em
`https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/6165e6313becaf1a13a2bffb?`.

Página 2



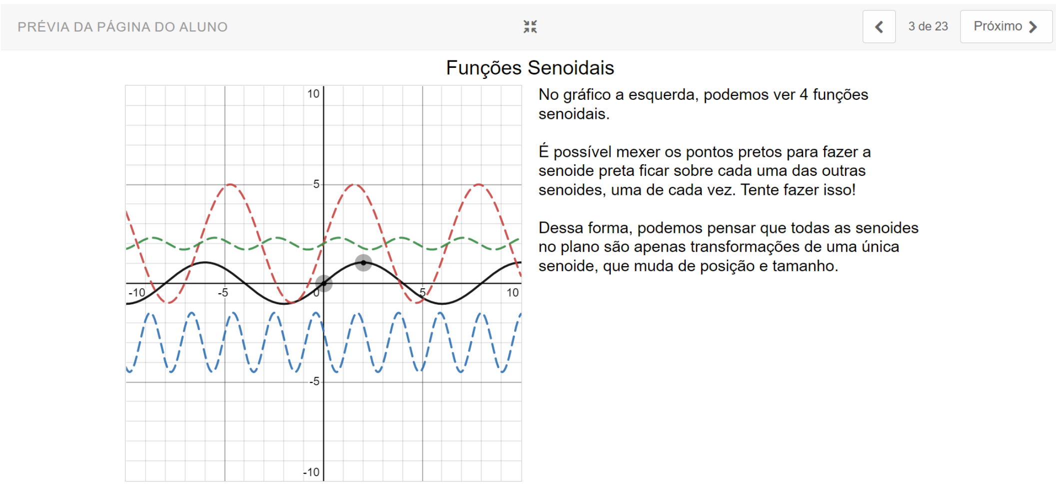
O que é esperado do aluno?

Nessa página os alunos devem arrastar os pontos pretos do gráfico, usando o mouse, de forma que a parábola preta sobreponha cada uma das parábolas coloridas, uma de cada vez. É uma página apenas de exploração.

Orientações ao Professor

Veja se os alunos entenderam o comando e se conseguem arrastar os pontos corretamente.

Página 3



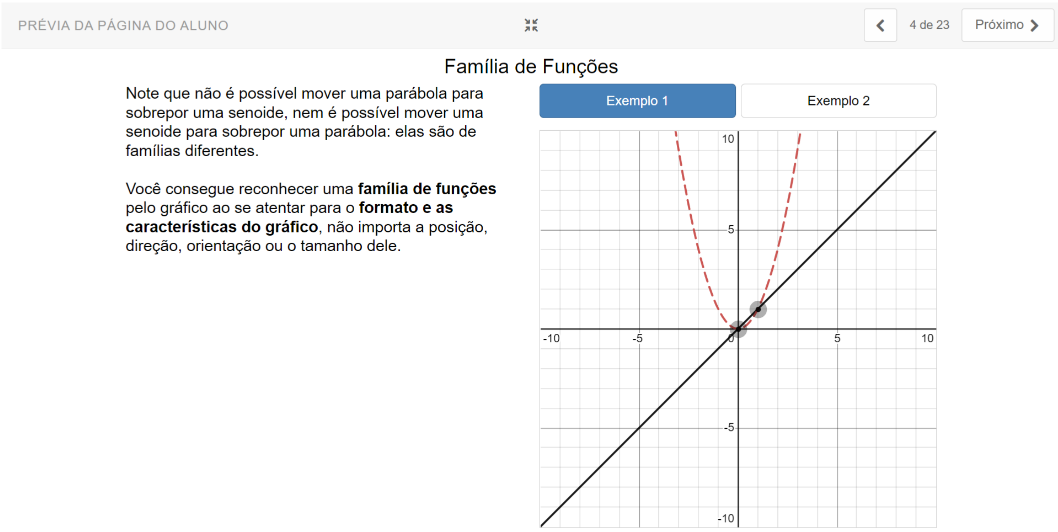
O que é esperado do aluno?

Nessa página os alunos devem arrastar os pontos pretos do gráfico, usando o mouse, de forma que a senoide preta sobreponha cada uma das senoides coloridas, uma de cada vez. É uma página apenas de exploração.

Orientações ao Professor

Caso o professor opte por fazer a atividade ritmada, nesta página é um bom momento para começar a trabalhar o vocabulário das transformações com os alunos. Discuta com eles as mudanças que os gráficos sofrem quando cada ponto é arrastado em direções diferentes, fazendo-os perceber a diferença entre as transformações de translação e de expansão e compressão, e a diferença de transformações que ocorrem na horizontal e na vertical. Comece com uma linguagem informal e aos poucos introduza o vocabulário matemático.

Página 4



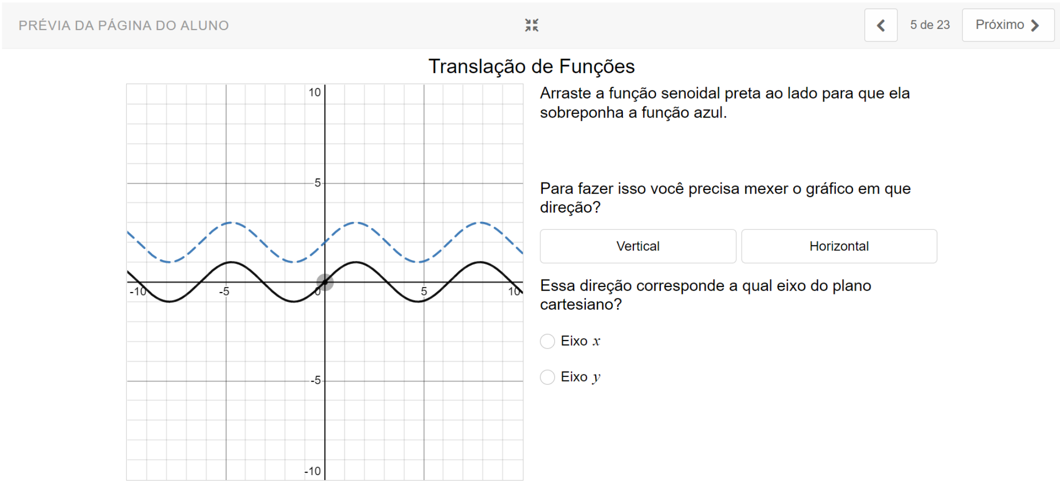
O que é esperado do aluno?

Aqui os alunos devem manipular os pontos pretos até perceberem que é impossível sobrepor os dois gráficos de famílias diferentes de funções. É interessante que os alunos entendam porquê é impossível sobrepor esses gráficos.

Orientações ao Professor

Esta página provê um momento interessante para discutir o que significa a igualdade de duas funções, e a necessidade de terem o mesmo domínio, imagem e lei de formação, bem como da igualdade da função em todos os pontos.

Página 5



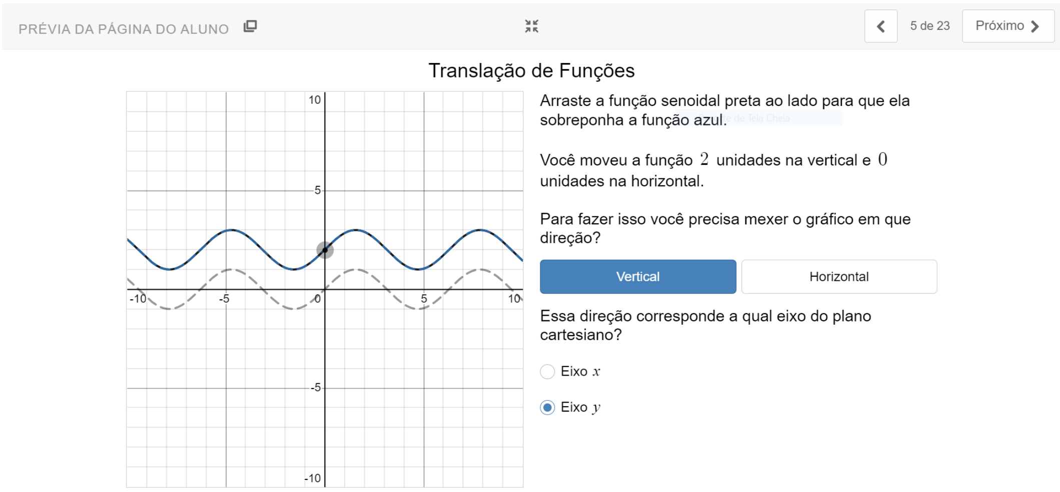
O que é esperado do aluno?

Aqui o aluno deve arrastar o ponto preto que está inicialmente no $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ até o ponto $(\mathbf{0}, \mathbf{2})$, ou seja, arrastar o ponto duas unidades na vertical, sem movê-lo na horizontal. Em seguida, deve responder a duas perguntas caracterizando este movimento, diferenciando entre movimento na horizontal e na vertical, e movimento ao longo do eixo $\boldsymbol{Ox}$ e do eixo $\boldsymbol{Oy}$.

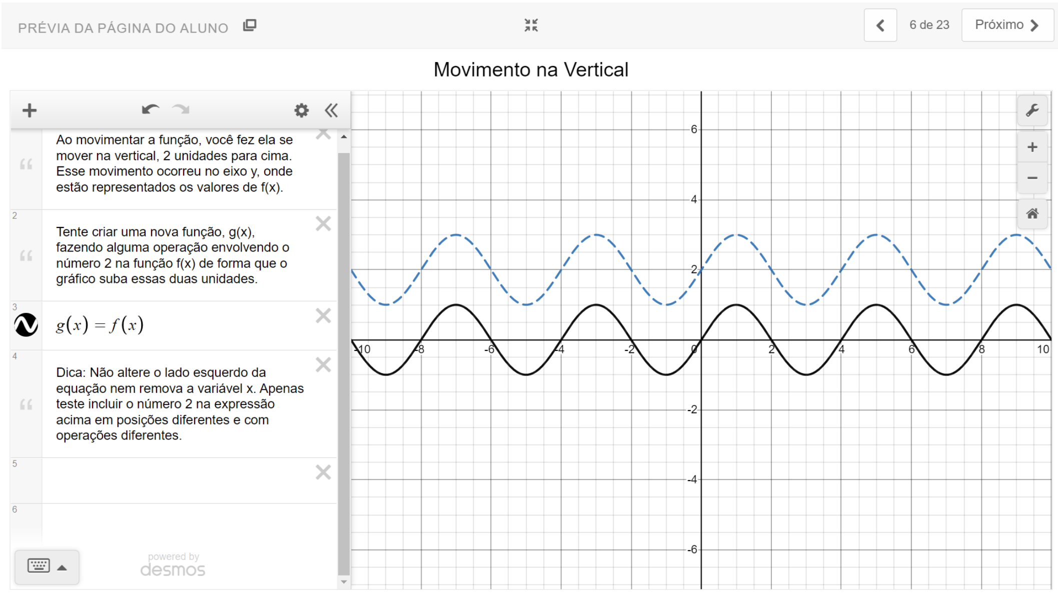
Orientações ao Professor

Auxilie os alunos que tem dificuldade em distinguir horizontal e vertical e relembre-os que por convenção utiliza-se o eixo $\boldsymbol{Ox}$ na horizontal, para representar os valores da variável independente, e o eixo $\boldsymbol{Oy}$ na vertical, para representar os valores da variável dependente.

Exemplo de resposta



Página 6



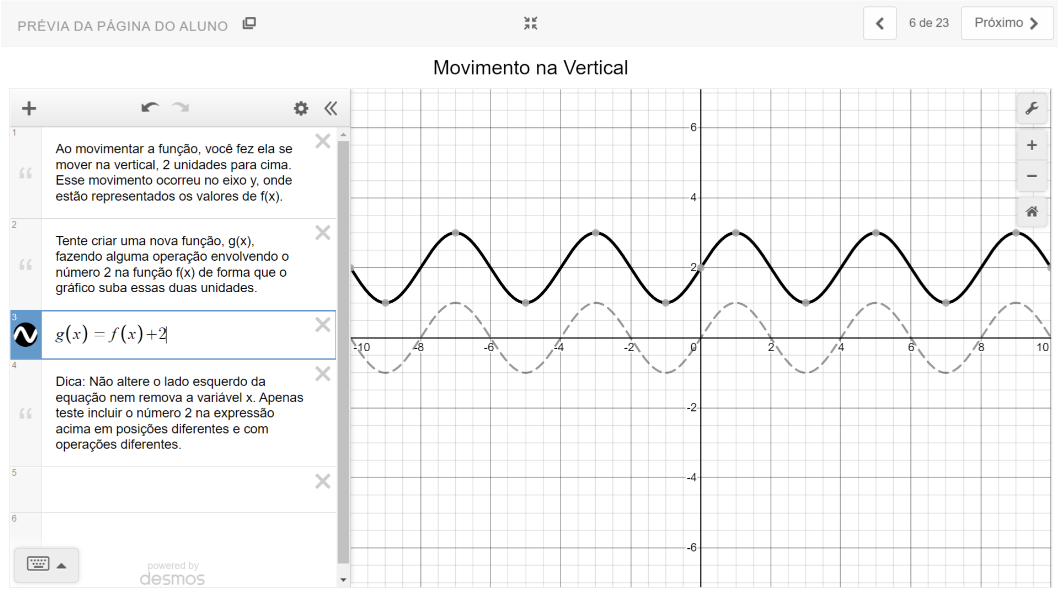
O que é esperado do aluno?

Aqui o aluno deve explorar o efeito de diferentes operações na função representada no gráfico. Para isso, deve modificar a expressão $g(x) = f(x)$ para incluir a constante 2. As instruções na tela o orientam a não modificar o lado esquerdo, $g(x)$, nem remover a variável x, que são erros comuns entre os alunos que ainda não compreenderam o conceito de função e o objetivo da atividade. Tentativas esperadas incluem expressões como $g(x) = f(x)+2$, $g(x) = f(x-2)$ ou $g(x) = 2 \cdot f(x)$. Quando alguma transformação de $f(x)$ for digitada, seu gráfico aparecerá como uma linha preta no plano cartesiano. Caso a linha preta sobreponha perfeitamente o gráfico azul tracejado, o estudante saberá que fez a transformação esperada.

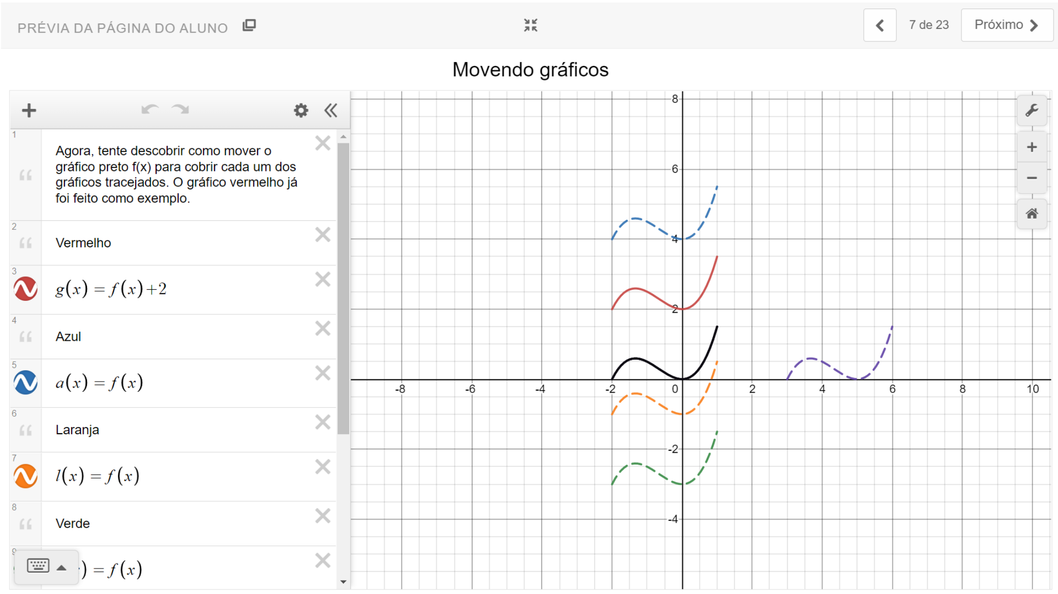
Orientações ao Professor

Dependendo da familiaridade dos alunos com a notação matemática, alguns alunos podem não entender as instruções nessa tela. Caso perceba uma dificuldade para realizar as ações esperadas, vale a pena interferir para descrever que o objetivo aqui é criar uma nova função $g(x)$ que é uma transformação da $f(x)$. É interessante mostrar aos alunos que, caso eles modifiquem muito a função e não saibam começar do zero, existe a opção de voltar na seta acima da barra lateral de funções, e que clicando no ícone de ferramenta, é possível clicar em “Reset” para voltar a tela ao seu estado original.

Exemplo de resposta



Página 7



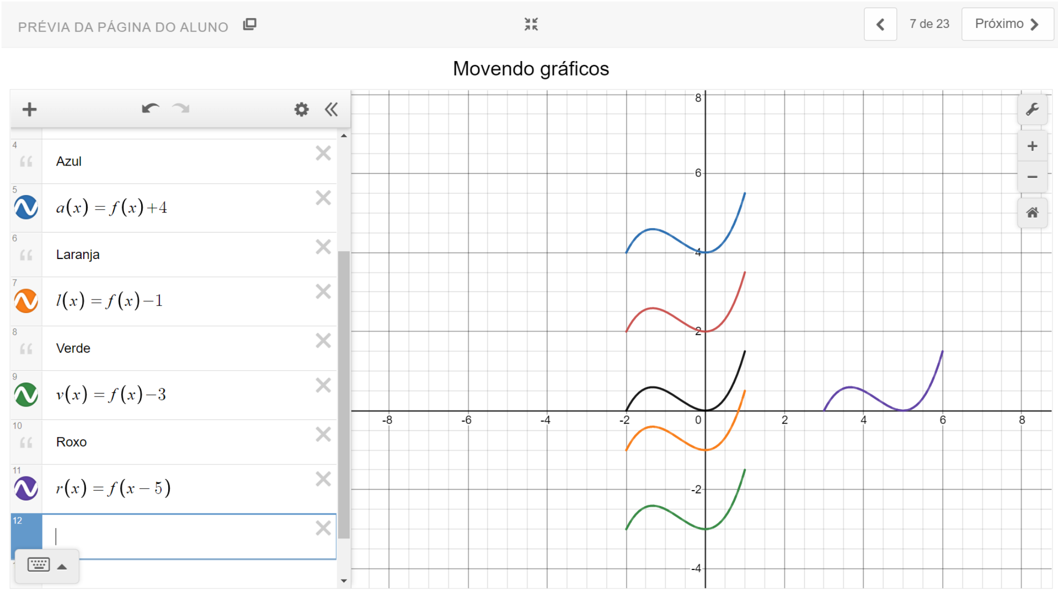
O que é esperado do aluno?

Aqui os alunos devem transformar a função $\boldsymbol{f(x)}$ com três translações verticais e uma translação horizontal, uma de cada vez. O gráfico em preto representa a função $\boldsymbol{f(x)}$ e o gráfico em vermelho mostra uma transformação feita como exemplo do que é esperado para as outras quatro nessa página. Partindo do movimento causado pela soma em $\boldsymbol{f(x)}$ na tela anterior, os alunos precisarão: i) repetir uma operação de soma em $\boldsymbol{f(x)}$; ii) perceber que a subtração em $\boldsymbol{f(x)}$ causará o movimento na vertical, para baixo; iii) perceber que para movimentar na horizontal será necessário somar ou subtrair em $\boldsymbol{x}$ e não em $\boldsymbol{f(x)}$.

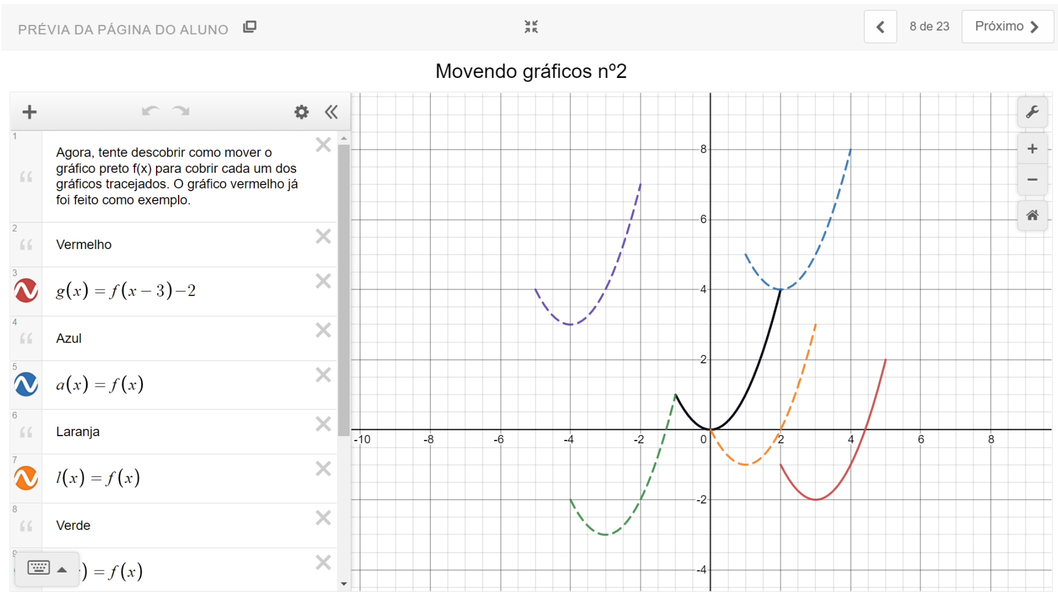
Orientações ao Professor

Encoraje os alunos a arriscarem e interpretarem o gráfico plotado pelo programa para saber se acertaram ou não, e daí chegarem a conclusões. Alguns alunos têm dificuldade de dar o salto da translação vertical para a translação horizontal. Incentive-os a tentarem não só operações diferentes da soma e da subtração já utilizadas, mas também a inserirem a operação em x, ou "dentro do parênteses".

Exemplo de resposta



Página 8



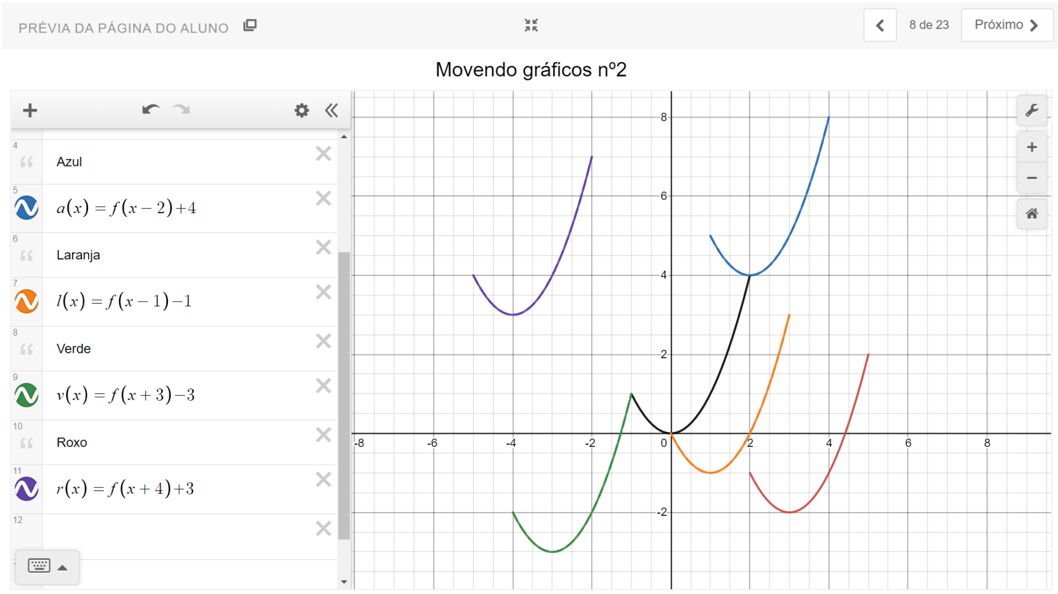
O que é esperado do aluno?

Aqui os alunos devem transformar a função $f(x)$ com translações verticais e horizontais ao mesmo tempo. O gráfico em preto representa a função $f(x)$ e o gráfico em vermelho mostra uma transformação feita como exemplo do que é esperado para as outras quatro nessa página. Os alunos deverão combinar as translações na vertical e na horizontal aprendidas na página anterior, ora somando e subtraindo em $f(x)$, ora somando e subtraindo em x.

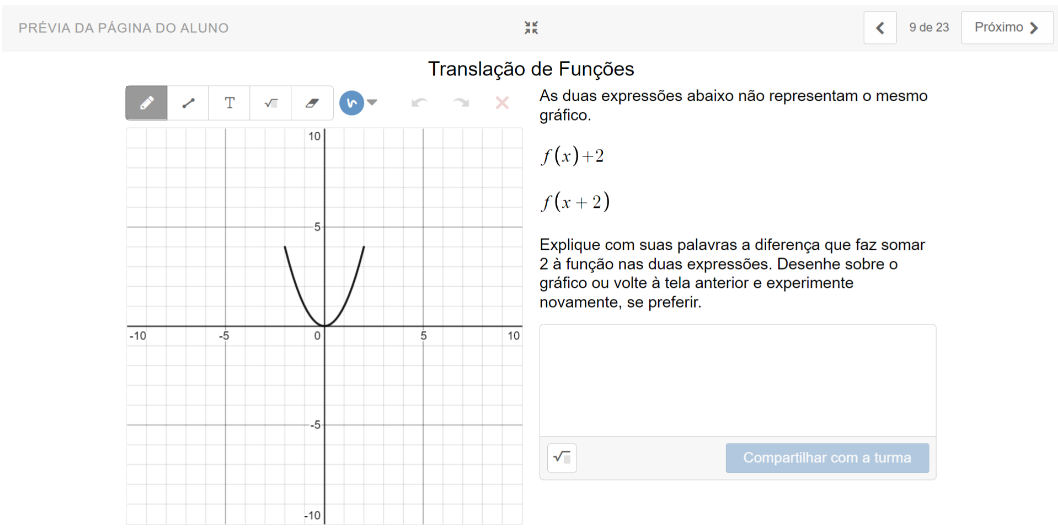
Orientações ao Professor

Encoraje os alunos a arriscarem tentativas e interpretarem o gráfico plotado pelo programa para saber se acertaram ou não, e daí chegarem a conclusões. Auxilie-os a encontrar um ponto de fácil identificação e seu correspondente em cada curva e assim planejarem a translação necessária ao invés de ir na tentativa e erro.

Exemplo de resposta



Página 9



O que é esperado do aluno?

Aqui o aluno deve sintetizar e explicar com suas palavras a diferença entre translações verticais e translações horizontais. Caso auxilie no pensar, os alunos podem desenhar sobre o gráfico a esquerda para mostrar o resultado dos dois tipos de transformação.

Orientações ao Professor

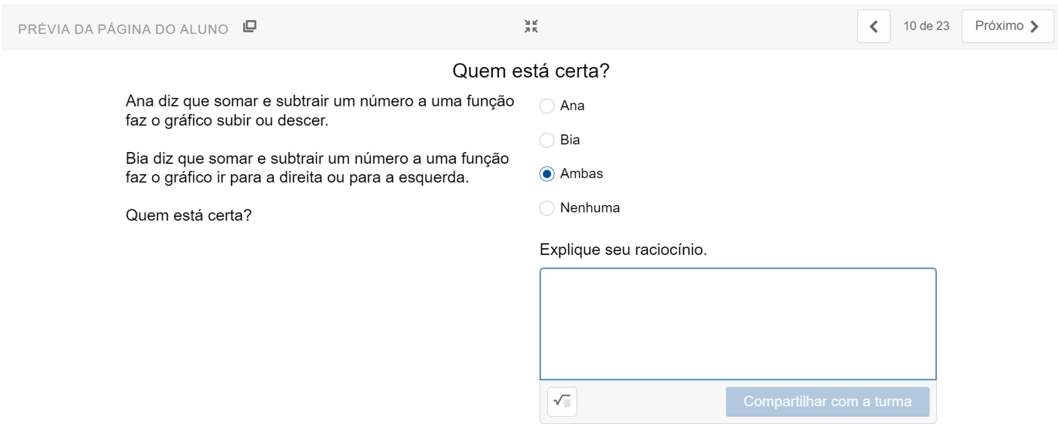
A ideia dessa página é que os alunos consigam internalizar a diferença entre a translação vertical e horizontal. Caso eles tenham dificuldade de perceber e explicar a diferença do resultado da translação $\boldsymbol{f(x+2)}$ e $\boldsymbol{f(x)+2}$, peça para eles retornarem à página 8 e testarem suas hipóteses.

Exemplo de resposta

Quando somamos o 2 a $f(x)$, temos $f(x) + 2$ e o movimento da função é na vertical, para cima.

Quando somamos o 2 a x, temos $f(x + 2)$ e o movimento é na horizontal, para a esquerda.

Página 10



O que é esperado do aluno?

Aqui o aluno deve aplicar o conhecimento organizado na página 9, percebendo que a operação utilizada na translação vertical e na horizontal é a mesma, variando a posição dela na expressão algébrica, ou seja, se a operação é aplicada a x ou a $f(x)$.

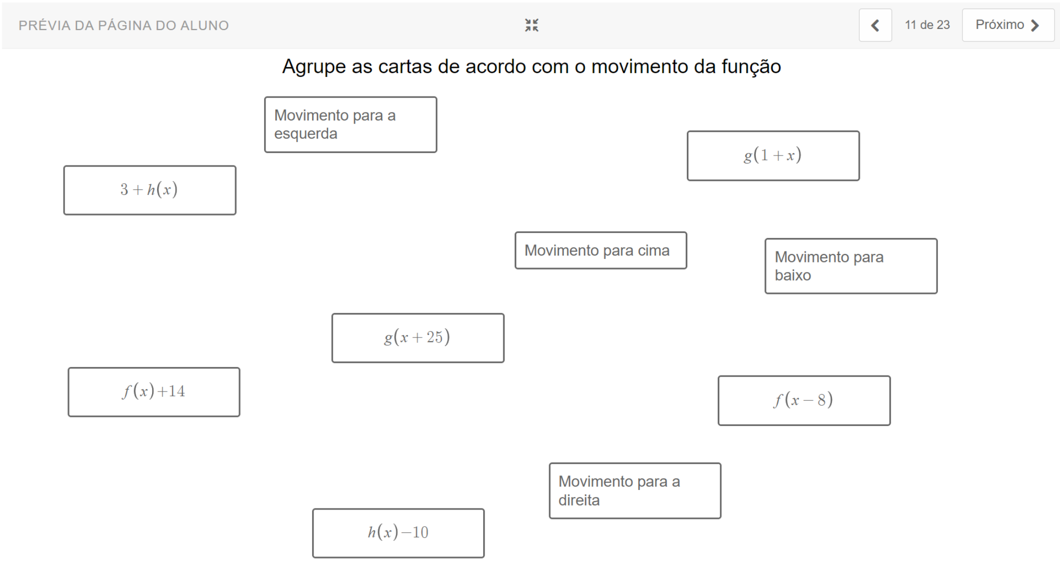
Orientações ao Professor

Caso os alunos tenham dificuldade nesta atividade, oriente que retornem às páginas 7, 8 e 9 e reavaliem as translações realizadas.

Exemplo de resposta

Ambas estão corretas, o movimento vai ser na horizontal ou na vertical dependendo de onde colocamos o valor que está somando ou subtraindo.

Página 11



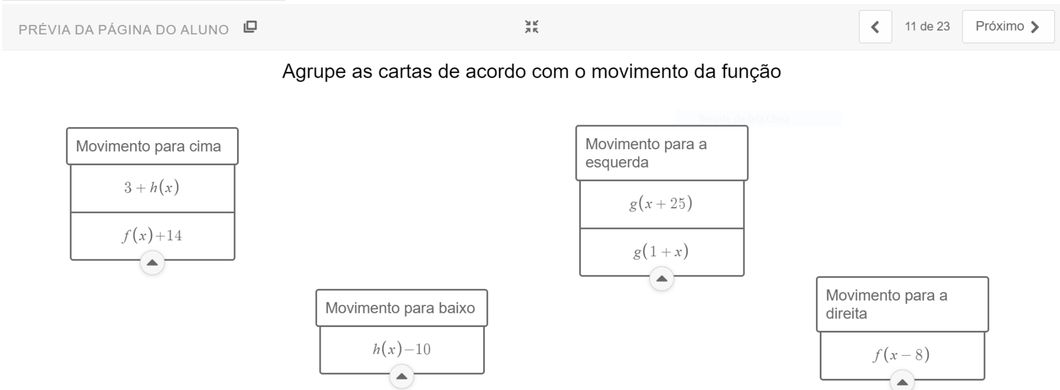
O que é esperado do aluno?

Aqui o aluno deve novamente diferenciar entre translações verticais e horizontais, agrupando as transformações entre 'Movimento para cima', 'Movimento para baixo', 'Movimento para a esquerda' e 'Movimento para a direita'.

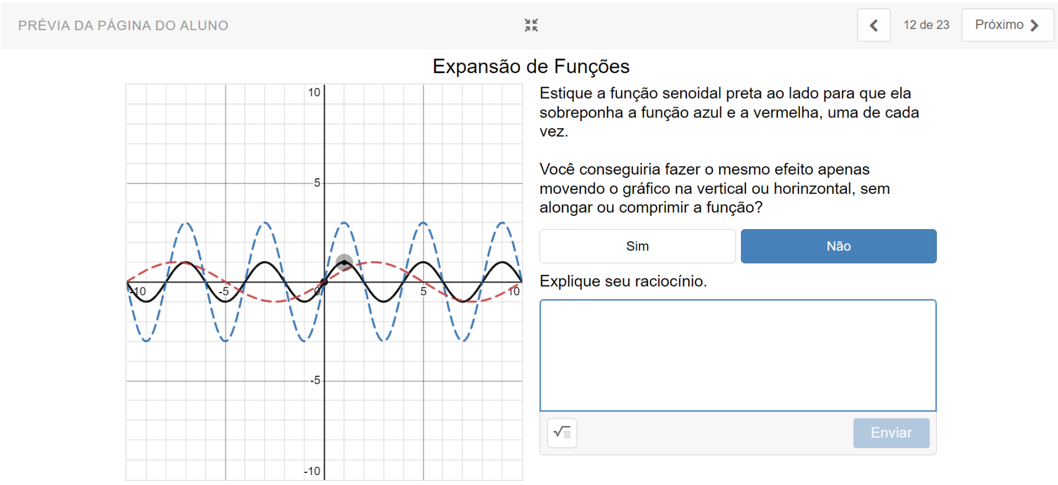
Orientações ao Professor

Como algumas cartas a serem agrupadas têm a operação posicionada antes do $\boldsymbol{x}$ e do $\boldsymbol{f(x)}$, alguns alunos podem ter dificuldade nessa generalização. Encoraje os alunos a discutirem e justificarem os agrupamentos feitos, especialmente caso nem todos da turma tenham agrupado da mesma forma. Faça os alunos que têm respostas diferentes argumentarem até que percebam qual agrupamento é mais adequado.

Exemplo de resposta



Página 12



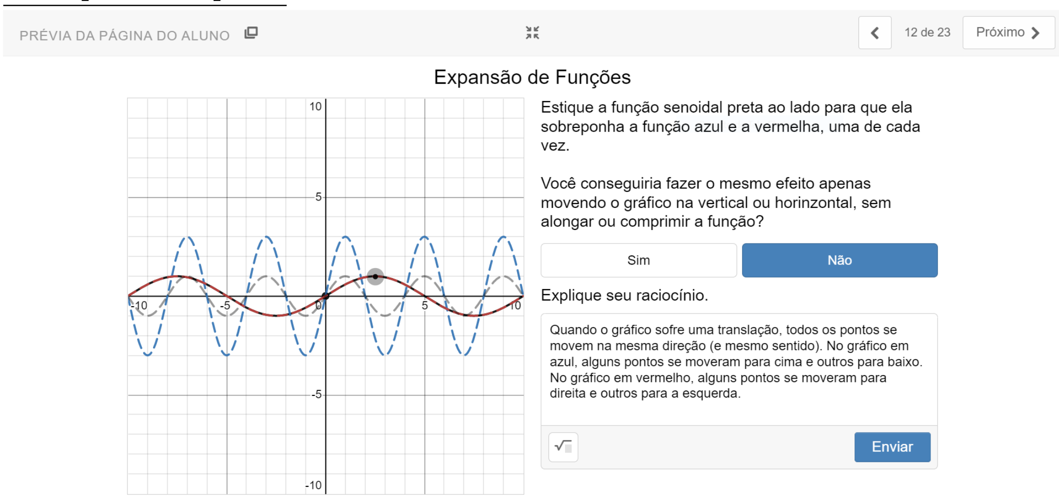
<u>O que é esperado do aluno?</u>

A ideia dessa página é que o aluno perceba que aqui o gráfico não está se "movendo"(transladando) e sim se "esticando"ou "contraindo". Matematicamente, ao invés de sofrer uma translação, o gráfico está sofrendo uma expansão, ou na vertical (azul) ou na horizontal (vermelho).

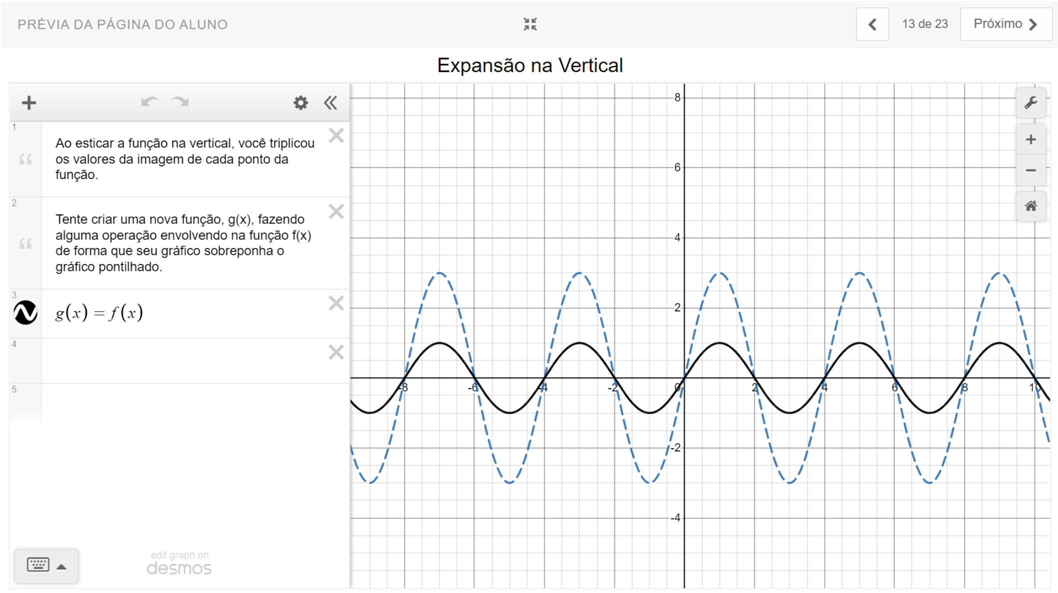
<u>Orientações ao Professor</u>

O aluno só deve avançar se conseguir distinguir uma translação de uma expansão. Caso note que algum aluno está com dificuldade, você pode gerar uma discussão na turma, para que os colegas tentem convencer uns aos outros sobre as diferenças e similaridades entre as duas transformações.

<u>Exemplo de resposta</u>



Página 13



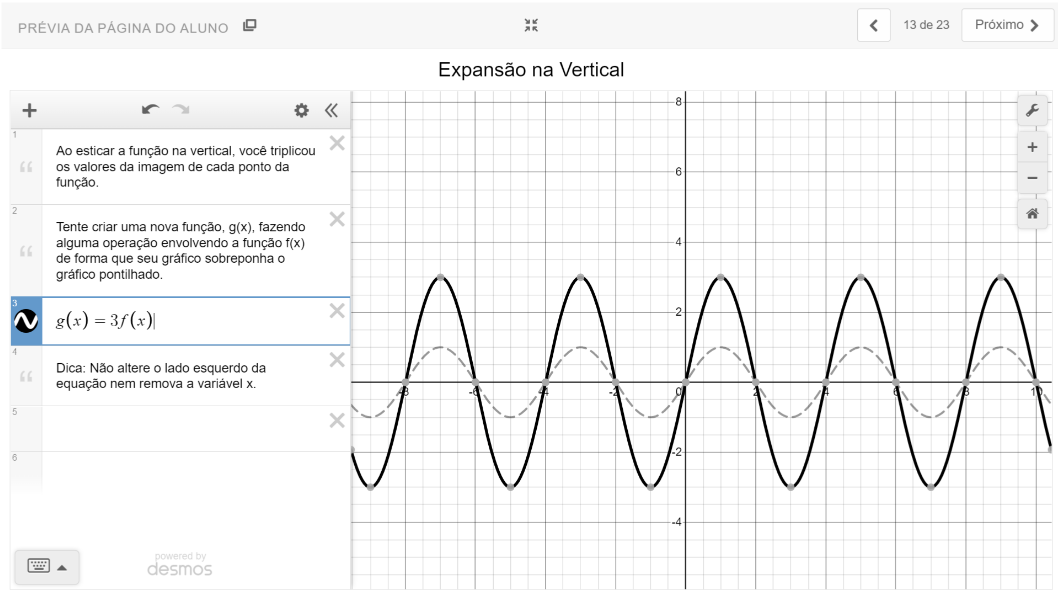
O que é esperado do aluno?

Aqui os alunos devem explorar, na tentativa e erro, qual operação fará a transformação de expansão. Assim como na página 6, os alunos devem tentar inserir uma operação na função $\boldsymbol{f(x)}$, sem alterar o lado esquerdo da equação, nem apagar a variável $\boldsymbol{x}$. Tentativas esperadas incluem expressões como $\boldsymbol{g(x) = f(2x)}$, $\boldsymbol{g(x) = f(\frac{x}{2})}$ ou $\boldsymbol{g(x) = 2 \cdot f(x)}$. Quando alguma transformação de $\boldsymbol{f(x)}$ for digitada, seu gráfico aparecerá como uma linha preta no plano cartesiano. Caso a linha preta sobreponha perfeitamente o gráfico azul tracejado, o estudante saberá que fez a transformação esperada.

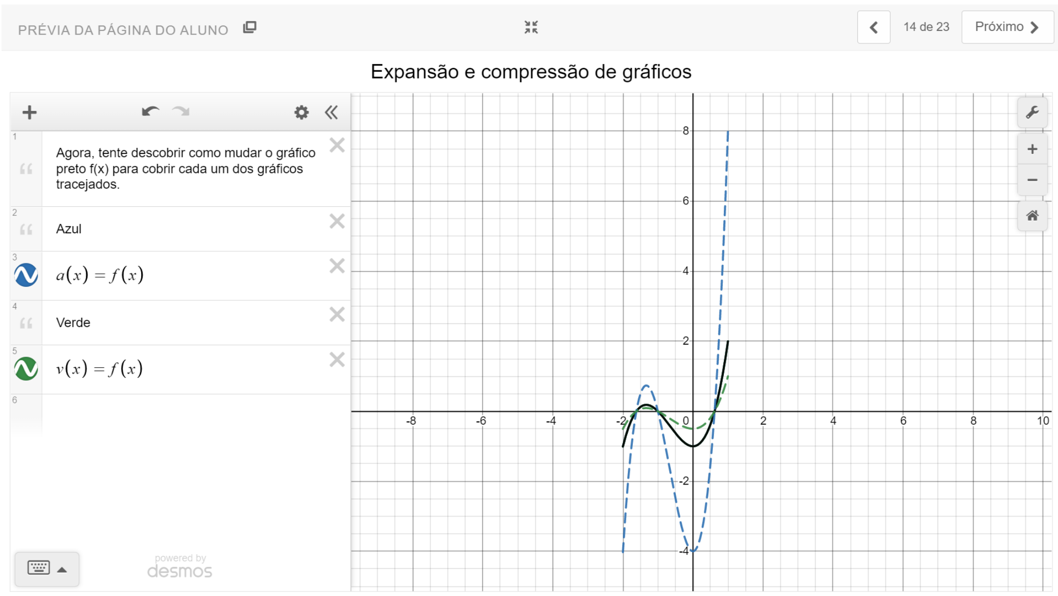
Orientações ao Professor

Dependendo da familiaridade dos alunos com a notação matemática, e a compreensão das páginas anteriores desta atividade, alguns alunos podem não entender as instruções nessa tela. Caso perceba uma dificuldade para realizar as ações esperadas, vale a pena pedir aos alunos que retornem à página 6 e comparem o que é necessário fazer aqui com o que foi feito lá.

Exemplo de resposta



Página 14



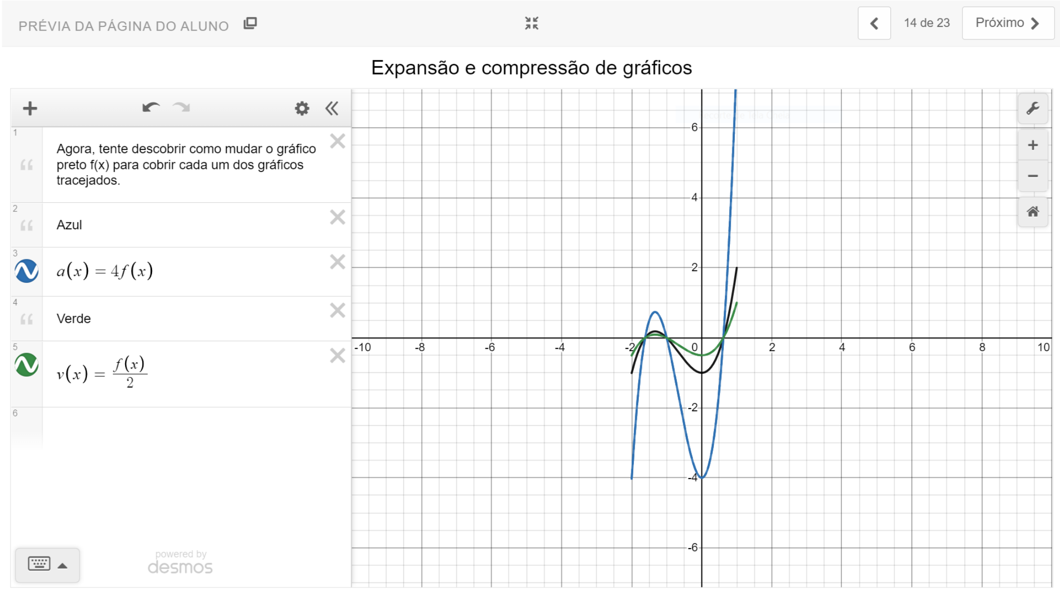
O que é esperado do aluno?

Aqui os alunos devem transformar a função $f(x)$ com uma expansão vertical e uma contração vertical, uma de cada vez. O gráfico em preto representa a função $f(x)$. Partindo do movimento causado pela multiplicação em $f(x)$ na tela anterior, os alunos precisarão: i) repetir uma operação de multiplicação em $f(x)$; ii) perceber que a divisão em $f(x)$ (ou a multiplicação por um numero entre 0 e 1) causará o efeito inverso, de compressão.

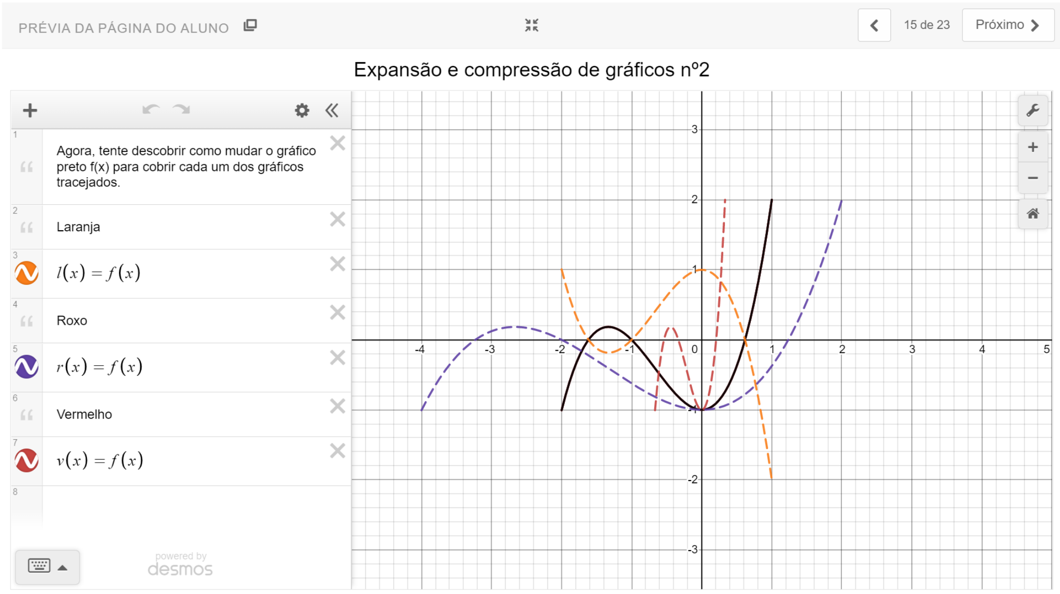
Orientações ao Professor

Encoraje os alunos a arriscarem e interpretarem o gráfico plotado pelo programa para saber se acertaram ou não, e daí chegarem a conclusões.

Exemplo de resposta



Página 15



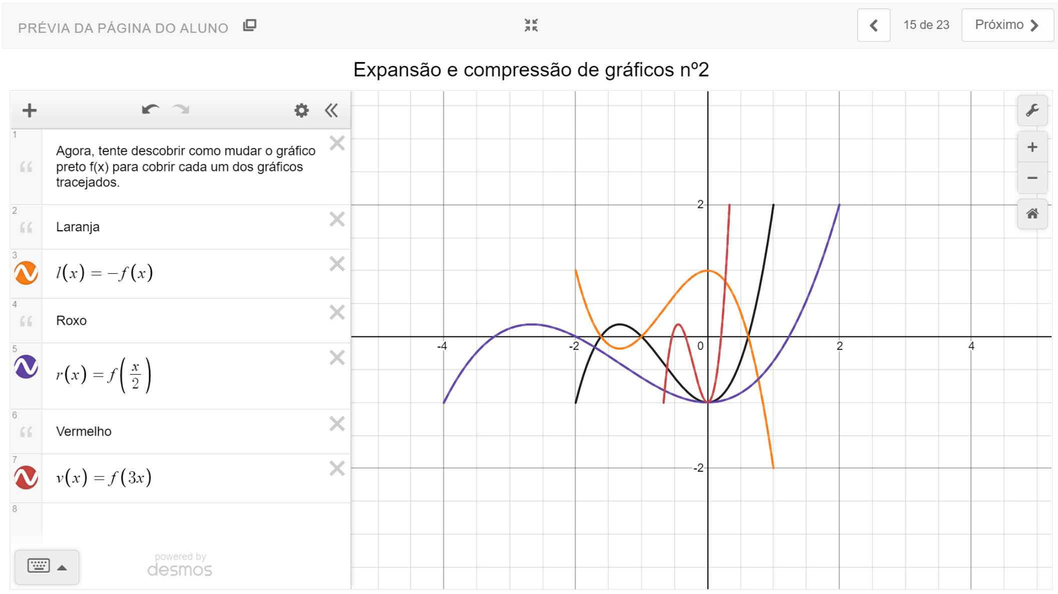
O que é esperado do aluno?

Partindo do movimento causado pela multiplicação e divisão de $f(x)$ na tela anterior, os alunos precisarão: i) perceber que multiplicar a função $f(x)$ por um número negativo causará uma reflexão da função em torno do eixo x; ii) perceber que a multiplicação e divisão de x causará o efeito de dilatação ou compressão na horizontal, não na vertical.

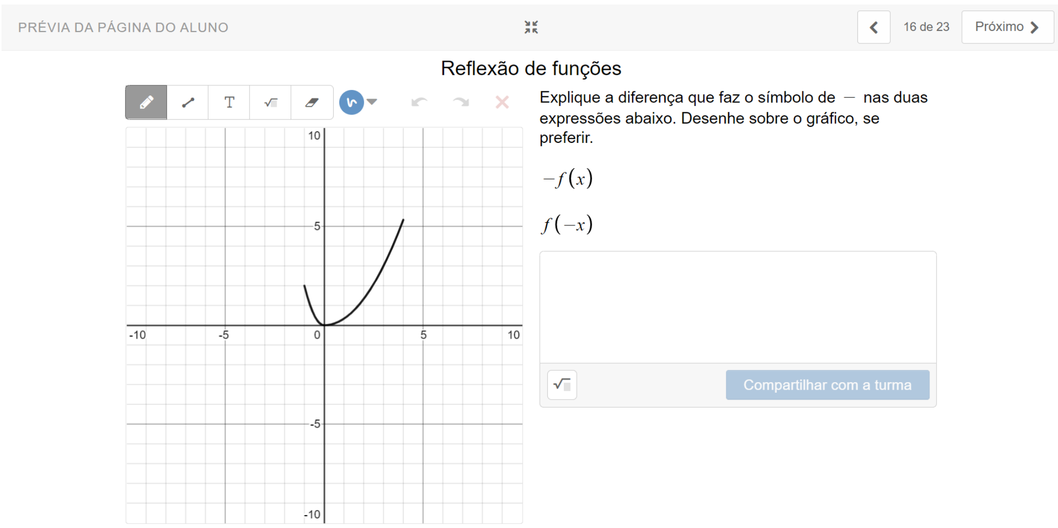
Orientações ao Professor

Encoraje os alunos a arriscarem tentativas e interpretarem o gráfico plotado pelo programa para saber se acertaram ou não, e daí chegarem a conclusões. Auxilie-os a encontrar um ponto de fácil identificação e seu correspondente em cada curva e assim perceberem a necessidade de uma reflexão e de uma expansão ou compressão horizontal.

Exemplo de resposta



Página 16



O que é esperado do aluno?

Aqui o aluno deve sintetizar e explicar com suas palavras a diferença entre reflexões em torno do eixo $\boldsymbol{Ox}$ e em torno do eixo$\boldsymbol{Oy}$. Caso auxilie no pensar, os alunos podem desenhar sobre o gráfico a esquerda para mostrar o resultado dos dois tipos de transformação.

Orientações ao Professor

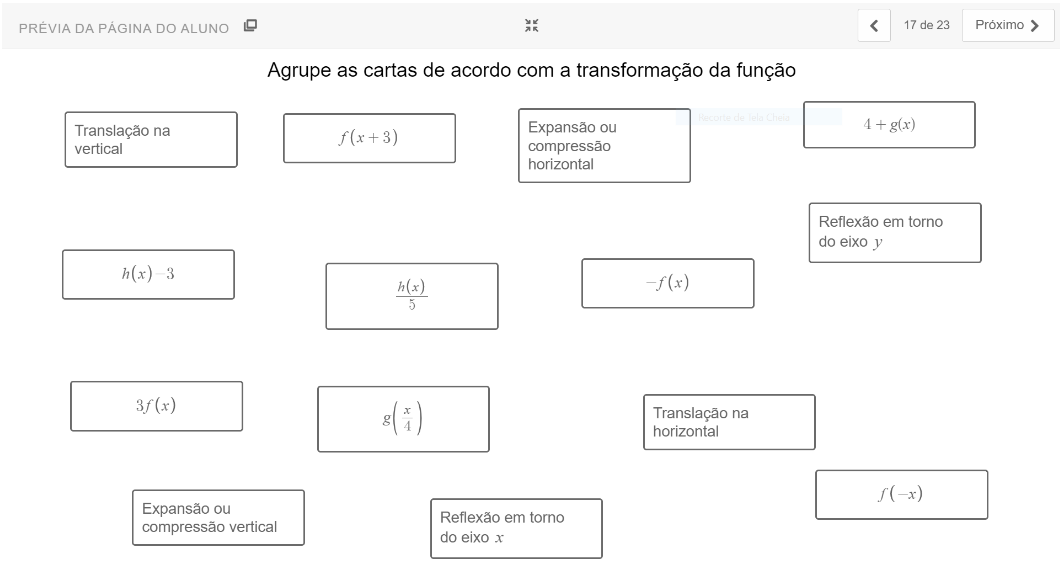
A ideia dessa página é que os alunos consigam internalizar a diferença entre a reflexão vertical e horizontal. Caso eles tenham dificuldade de perceber e explicar a diferença do resultado da reflexão $\boldsymbol{f(-x)}$ e $\boldsymbol{-f(x)}$, peça para eles retornarem à página 15 e testarem suas hipóteses.

Exemplo de resposta

Quando multiplicamos $\boldsymbol{x}$ por $\boldsymbol{-1}$, temos $\boldsymbol{f(-x)}$ e o movimento da função é de reflexão é na horizontal, em torno do eixo $\boldsymbol{Oy}$.

Quando multiplicamos $\boldsymbol{f(x)}$ por $\boldsymbol{-1}$, temos $\boldsymbol{-f(x)}$ e o movimento da função é de reflexão é na vertical, em torno do eixo $\boldsymbol{Ox}$.

Página 17



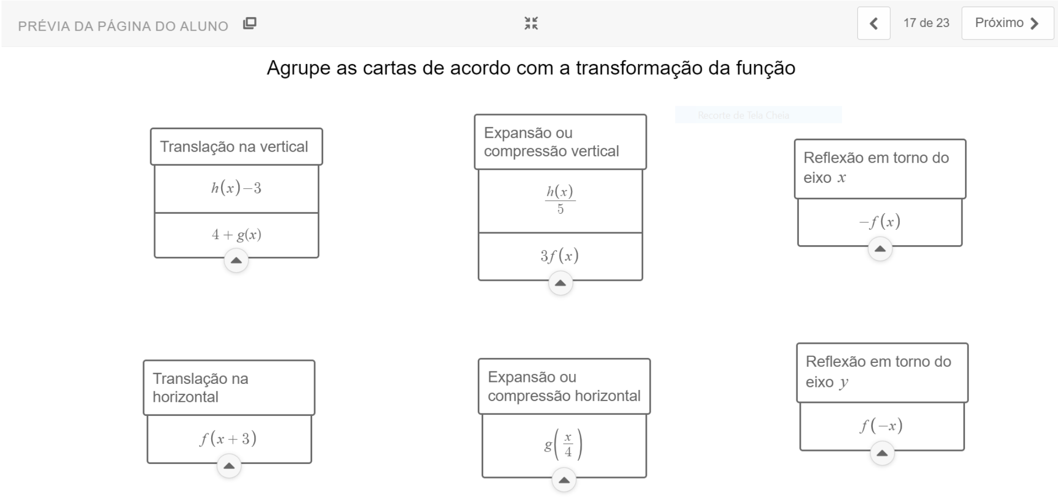
<u>O que é esperado do aluno?</u>

Aqui o aluno deve diferenciar entre as diferentes transformações, agrupando as cartas entre ‘Translação na vertical’, ‘Translação na horizontal’, ‘Expansão ou compressão vertical’, ‘Expansão ou compressão horizontal’, ‘Reflexão em torno do eixo $\boldsymbol{x}$’ e ‘Reflexão em torno do eixo $\boldsymbol{y}$’.

<u>Orientações ao Professor</u>

Encoraje os alunos a discutirem e justificarem os agrupamentos feitos, especialmente caso nem todos da turma tenham agrupado da mesma forma. Faça os alunos que têm respostas diferentes argumentarem até que percebam qual agrupamento é mais adequado.

Exemplo de resposta



Página 18

PRÉVIA DA PÁGINA DO ALUNO 18 de 23 Próximo

Resumindo o que aprendemos

Transformação	Efeito
$f(x)+2$	Função sobe duas unidades na vertical
$f(x+2)$	
$f(x-2)$	
$f(x)-2$	
$2f(x)$	
$f(2x)$	
$f\left(\frac{x}{2}\right)$	
$\frac{f(x)}{2}$	
$-f(x)$	
$f(-x)$	

O que é esperado do aluno?

Aqui os alunos devem resumir a relação entre a representação algébrica da transformação e seu impacto no gráfico da função. Para isso, devem escrever de forma resumida o efeito de cada transformação listada na coluna da esquerda.

Orientações ao Professor

Encoraje os alunos a completarem a tabela para terem como material de referência para os exercícios. Estimule os alunos a escreverem usando uma linguagem coloquial que sirva para eles entenderem posteriormente, mas também a usarem termos corretos para se acostumarem com o linguajar matemático.

Exemplo de resposta

PRÉVIA DA PÁGINA DO ALUNO   18 de 23   Próximo

Resumindo o que aprendemos

Transformação	Efeito
$f(x)+2$	Função sobe duas unidades na vertical
$f(x+2)$	Função anda duas unidades para a esquerda
$f(x-2)$	Função anda duas unidades para a direita
$f(x)-2$	Função desce duas unidades na vertical
$2f(x)$	Função estica na vertical, dobrando de tamanho
$f(2x)$	Função contrai na horizontal, ficando com metade do tamanho
$f\left(\frac{x}{2}\right)$	Função estica na horizontal, dobrando de tamanho
$\frac{f(x)}{2}$	Função contrai na vertical, ficando com metade do tamanho
$-f(x)$	Função reflete na vertical, girando em torno do eixo x
$f(-x)$	Função reflete na horizontal, girando em torno do eixo y

Página 19

PRÉVIA DA PÁGINA DO ALUNO   19 de 23   Próximo

Onde você está agora?

Arraste o ponto para o local que representa como você se sentiu sobre a aula de hoje.

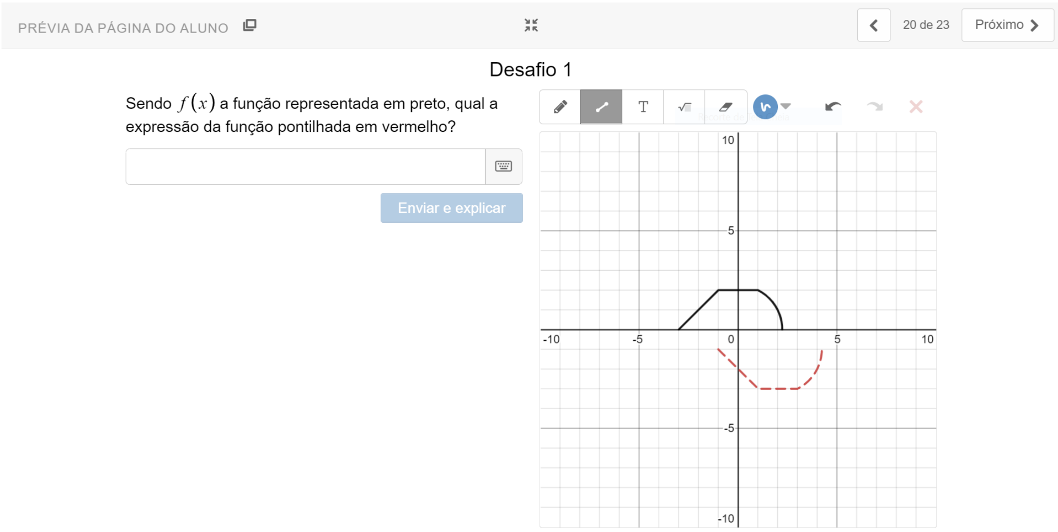
Se quiser, explique sua escolha ou deixe um recado.

Enviar

O que é esperado do aluno?

Aqui os alunos tem uma oportunidade de dar um retorno sobre a aula para o professor, indicando no plano cartesiano onde eles estão em termos de sua aprendizagem e seu interesse na atividade.

Página 20



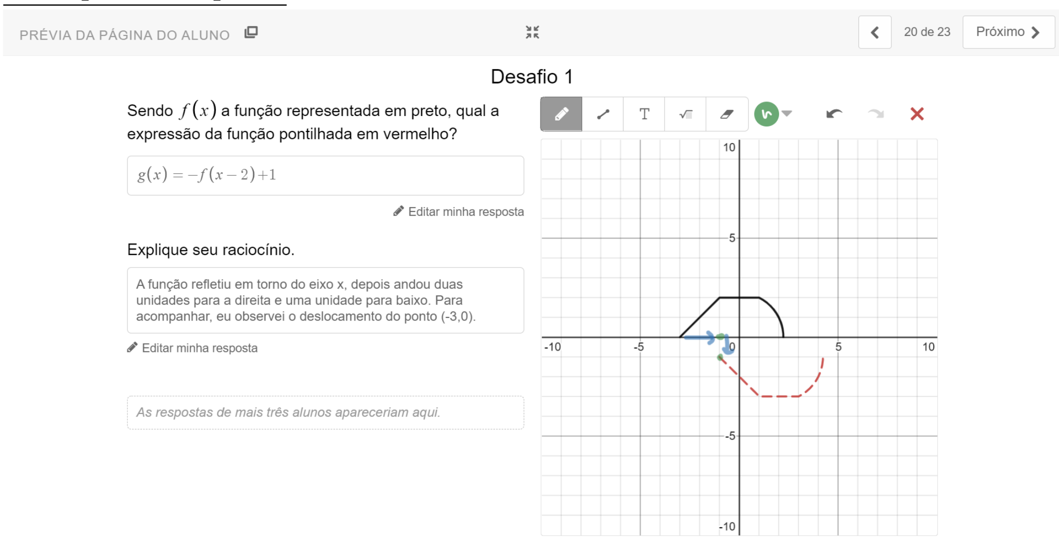
O que é esperado do aluno?

Nesta e nas próximas páginas, o aluno deve reconhecer quais transformações foram realizadas na função $\boldsymbol{f(x)}$, representada em preto, para obtermos a nova função representada em vermelho. Aqui o software não dá o indicativo visual para os alunos saberem se estão certos, mas o aluno deve explicar seu raciocínio após preencher a expressão algébrica para a nova função.

Orientações ao Professor

Esta e as próximas páginas servem como uma avaliação do nível de entendimento dos alunos. Como aqui não há o retorno visual do gráfico e há mais de uma transformação aplicada simultaneamente, os alunos podem se confundir. Recomende que eles avaliem uma transformação de cada vez, e se necessário, podem desenhar sobre o gráfico para organizar seu pensamento.

Exemplo de resposta



Página 21

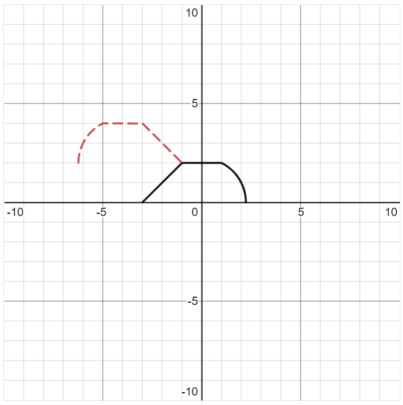
PRÉVIA DA PÁGINA DO ALUNO

21 de 23 Próximo

Desafio 2

Sendo $f(x)$ a função representada em preto, qual a expressão da função pontilhada em vermelho?

Enviar e explicar



Exemplo de resposta

PRÉVIA DA PÁGINA DO ALUNO

20 de 23 Próximo

Desafio 1

Sendo $f(x)$ a função representada em preto, qual a expressão da função pontilhada em vermelho?

$g(x) = -f(x-2)+1$

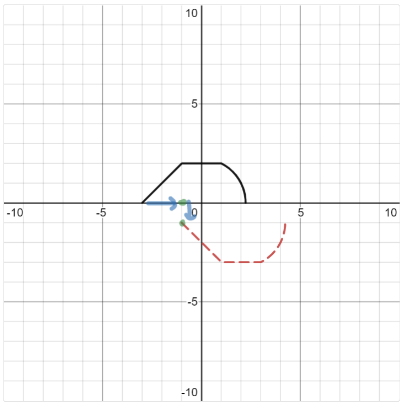
Editar minha resposta

Explique seu raciocínio.

A função refletiu em torno do eixo x, depois andou duas unidades para a direita e uma unidade para baixo. Para acompanhar, eu observei o deslocamento do ponto (-3,0).

Editar minha resposta

As respostas de mais três alunos apareceriam aqui.



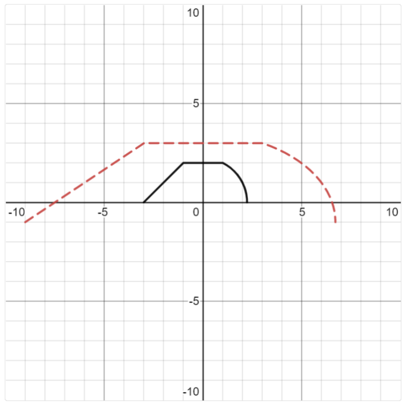
Página 22

PRÉVIA DA PÁGINA DO ALUNO   22 de 23   Próximo

Desafio 3

Sendo $f(x)$ a função representada em preto, qual a expressão da função pontilhada em vermelho?

Enviar e explicar



Exemplo de resposta

PRÉVIA DA PÁGINA DO ALUNO   22 de 23   Próximo

Desafio 3

Sendo $f(x)$ a função representada em preto, qual a expressão da função pontilhada em vermelho?

$2f\left(\frac{x}{3}\right)-1$

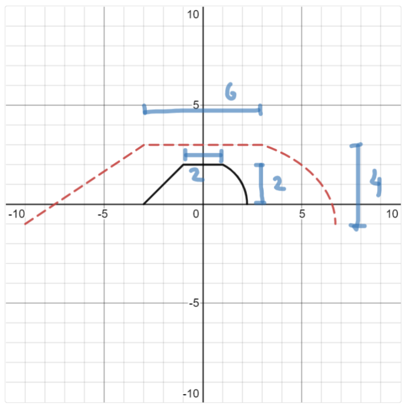
Editar minha resposta

Explique seu raciocínio.

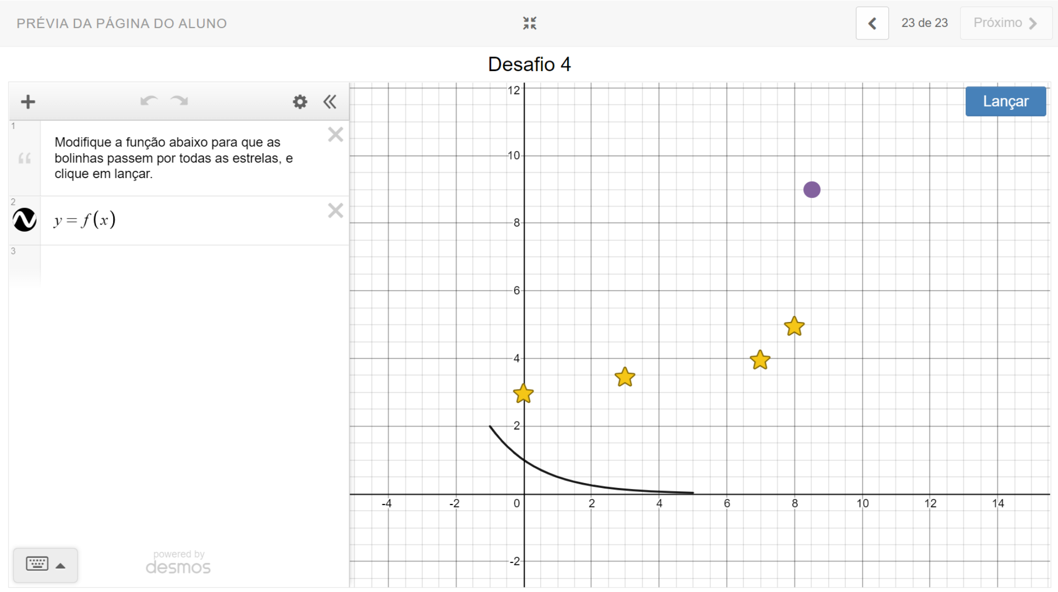
Na vertical, a função dobrou de tamanho e desceu uma unidade, então ficamos com $2f(x)-1$.
Na horizontal, o gráfico triplicou de tamanho, então devemos dividir x por 3.

Editar minha resposta

As respostas de mais três alunos apareceriam aqui.



Página 23



O que é esperado do aluno?

Aqui o aluno deve realizar transformações na função $f(x)$ dada até que, ao clicar em lançar, as bolinhas lançadas passem por todas as estrelas que estão no plano cartesiano.

Orientações ao Professor

É importante falar aos alunos que não há apenas uma resposta certa, e que portanto, eles devem usar a criatividade e os conhecimentos adquiridos na aula para transformar o gráfico da função até que consiga coletar todas as estrelas do plano.

Exemplo de resposta