INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SÃO PAULO - IFSP

Os números reais e a História da Matemática: possibilidades de abordagens na Educação Básica

Alex Marques dos Reis

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

IFSP

São Paulo

2022

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SÃO PAULO - IFSP

Os números reais e a História da Matemática: possibilidades de abordagens na Educação Básica

Alex Marques dos Reis

Trabalho apresentado como requisito parcial de aprovação no curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto Federal de Ciência Educação e Tecnologia de São Paulo, campus São Paulo.

Professor Orientador: Dr. Rogério Ferreira da Fonseca.

IFSP

São Paulo

2022

Catalogação na fonte
Biblioteca Francisco Montojos - IFSP Campus São Paulo
Dados fornecidos pelo(a) autor(a)

r375n Reis, Alex Marques dos
Os números reais e a história da matemática: possibilidades de abordagens na educação básica / Alex Marques dos Reis. São Paulo: [s.n.], 2022.
105 f. il.

Orientador: Rogério Ferreira da Fonseca

() - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, IFSP, 2022.

1. História da Matemática. 2. Números Reais. 3. Numeros Racionais. 4. Números Irracionais. I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo II. Título.

CDD

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, que me permitiu a conclusão desde trabalho, pois é ele quem sempre me demonstra ser o maior professor que alguém pode ter.

Agradeço também ao meu pai Gilson que sempre esteve ao meu lado fornecendo todas as ferramentas necessárias para que eu crescesse como ser humano, mesmo depois de falecer, ainda é uma fonte de inspiração para mim, sou eternamente grato também a minha mãe Maria da Conceição que sempre se mostrou carinhosa e afetiva, e que por mais que as dificuldades aumentassem, nunca deixou de me ajudar em nenhum momento.

Aos meus amigos do curso do Profmat que passaram por todas as dificuldades, e mesmo assim permaneceram até o fim. Se cheguei até aqui foi porque desde o primeiro semestre nós nos ajudamos mutuamente.

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Rogério Ferreira da Fonseca que me aceitou como orientando e me ajudou muito para que eu conseguisse realizar cada etapa do trabalho com êxito. Graças a ele consegui ter a ideia fundamental para a escrita desse trabalho, e entender como trabalhar os detalhes de cada página escrita.

Agradeço a todos os professores do curso que tornaram esse trabalho possível, por toda paciência ao ensinar, e pelo apoio que deram não somente a mim, mas a cada estudante do curso.

Por fim, agradeço de coração a todos que me ajudaram diretamente ou indiretamente em minha formação, não foi nada fácil chegar até aqui e espero poder contribuir para a formação de novos estudantes assim como contribuíram para a minha formação.

Resumo

O objetivo do presente estudo é propor a discussão e reflexão de possíveis abordagens dos Números Reais na Educação Básica, por meio da História da Matemática, trazendo os pontos de vista históricos e alguns momentos em que precisamos de um conjunto mais adequado do que o conjunto dos números inteiros. Nesse sentido, vamos apresentar aspectos históricos relacionados aos números racionais e irracionais, culminando nos números reais. Primeiramente, vamos entender a importância do estudo da História da Matemática na Educação Básica, apresentando as vantagens e possíveis desafios em abordar o tema na sala de aula, compreendendo também a importância do estudo dos números reais enfatizando as dificuldades que temos de aprender tal assunto. Apresentamos conjunturas históricas que envolveram os números reais desde os povos antigos, tais como os Babilônios, Egípcios e Gregos, perpassando pelo seu desenvolvimento durante a Idade Média até a História Moderna. Por fim, indicamos algumas situações de origem histórica para que o professor possa aplicar em sala de aula, com o intuito de enriquecer o saber matemático sobre os números reais e possivelmente tornar o aprendizado desse conteúdo mais tangível para o aluno.

Palavras-chaves: História da Matemática, Números Racionais, Números Irracionais, Números Reais.

Abstract

The objective of the present study is to propose the discussion and reflection of possible approaches of Real Numbers in Basic Education, through the History of Mathematics, bringing the historical points of view and some moments when we need a more adequate set than the set of whole numbers. In this sense, we will present historical aspects related to rational and irrational numbers, culminating in real numbers. First, we will understand the importance of studying the History of Mathematics in Basic Education, presenting the advantages and possible challenges in approaching the topic in the classroom, also understanding the importance of the study of real numbers, emphasizing the difficulties we have to learn this subject. We present historical conjunctures that involved the real numbers from ancient peoples, such as the Babylonians, Egyptians and Greeks, passing through their development during the Middle Ages to Modern History. Finally, we indicate some situations of historical origin so that the teacher can apply it in the classroom, in order to enrich the mathematical knowledge about real numbers and possibly make the learning of this content more tangible for the student.

Keywords: Basic Education, History of Mathematics, Rational Numbers, Irrational Numbers, Real Numbers.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

Sumário

1 INTRODUÇÃO

Quando estudamos números reais no ensino básico, temos aquela sensação de que falta algo a ser explicado e que devemos apenas aceitar que os números “agem” dessa forma. Além disso, pouco compreendemos sobre os ditos números irracionais, como surgem, o que são segmentos comensuráveis e incomensuráveis, porque em um intervalo qualquer entre dois números reais existem infinitos números racionais ou irracionais, porque o infinito do conjunto dos reais é “maior” do que o infinito dos números racionais etc.

Segundo Mendes (2009, p.9-10) são tantas lacunas que, no primeiro momento, o estudo profundo do assunto parece ser inacessível ao aluno do ensino básico e os professores por muitas vezes acabam por definir e impor que é assim e pronto, negando a construção do conhecimento dos números reais, propiciando uma abordagem incompleta que provavelmente não atenderá adequadamente aos propósitos que envolvem o ensino e a aprendizagem dos números, seja na própria Educação Básica ou no Ensino Superior.

Considerando o que relatamos nos dois parágrafos acima, propomos um estudo dos números reais por meio da abordagem histórica, apresentando algumas motivações ou panoramas para a obtenção de tais números e não somente a aceitação de que um conteúdo é abordado de forma isolada e descontextualizada.

Na seção 2, tratamos inicialmente da importância do estudo da História da Matemática na Educação Básica, citando diversos argumentos de motivação para o estudo da História da Matemática e algumas problemáticas envolvidas. Em seguida falaremos da importância de estudarmos os Números Reais abordando algumas dificuldades e necessidades que os estudantes encontram ao estudar o conjunto dos números reais, enfatizando sua importância para o entendimento de diversos ramos da Matemática.

Ainda na seção 2, tecemos comentários envolvendo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) que são coleções de documentos e normas que trazem conceitos e questões relacionadas ao ensino dos números reais, além de vários outros aspectos relevantes envolvendo o ensino e aprendizagem de noções matemáticas na Educação Básica. Por fim, falaremos um pouco sobre os números reais enfatizando suas principais caracterizações.

A partir da seção 3 abordamos aspectos envolvendo a História dos Números Reais desde a Antiguidade até o período Moderno. Começando pela Civilização Mesopotâmica, tratamos de sua escrita, a divisão que eram efetuadas com o auxílio de tabletes antigos e até mesmo outras operações tais como o uso de frações e como obtinham raízes quadradas.

Outra civilização antiga que desenvolveu diversos conceitos sobre números reais foi a Egípcia. Conhecida como a primeira civilização que temos registro de utilizar um sistema decimal, os egípcios conheciam as frações e tinham um método curioso para encontrar frações unitárias e também resolver equações.

Uma das Civilizações antigas que contribuíram muito no desenvolvimento da Matemática foi a Grega Antiga, conhecida como o berço da Matemática demonstrativa. Diversos conhecimentos foram desenvolvidos nesse período, sendo alguns deles: O conhecimento de razões e proporções, trigonometria, áreas de polígonos, obtenção de segmentos incomensuráveis. Pitágoras, Tales de Mileto e Arquimedes são alguns nomes que conhecemos deste período.

Saindo da Antiguidade, passaremos para a Idade Média, que apesar de parecer que o estudo da Matemática tinha estagnado, há inúmeras contribuições no estudo dos números reais, por exemplo, o estudo de equações de primeiro grau, segundo grau e até mesmo terceiro grau. Durante a Idade Média tivemos as contribuições dos matemáticos Bháscara, Al-Khwarizmi, Tartaglia, Cardano, Viète, dentre outros.

Finalmente, chegando ao período moderno, os matemáticos já trabalhavam com números racionais e irracionais, mesmo que ainda não tivessem formalizado esses conceitos, algumas contribuições nessa área foram dadas por Bombelli com uma proposta de aproximação dos números reais; Newton e Leibniz com os trabalhos em Cálculo Diferencial; Dedekind trazendo a formalização do conceito de Números Racionais, Irracionais e Reais; Cantor mostrando que os números racionais são enumeráveis, mas os irracionais não.

Na seção 4 traremos alguns problemas de matemática com origem histórica que poderão ser utilizados em sala de aula, lembrando sempre que, nos dias de hoje, nos distanciamos muito da maneira resolutiva de diversos povos, sendo assim trabalharemos com os conceitos contidos em cada problema utilizando a nossa maneira atual de estudar matemática.

O primeiro deles trata de um problema do Papiro de Rhind (Ahmes) que aborda a divisão de pães e como os Egípcios solucionavam esse problema. O segundo problema traz à tona o Tablete YBC 7289 que nos mostra uma aproximação para a diagonal de um quadrado. O terceiro problema é sobre o Diálogo Mênon de Platão que nos mostra uma conversa sobre matemática entre o escravo de Mênon e Platão.

Pensando em aprofundar os conhecimentos sobre a construção dos números reais no ensino básico, esse trabalho visa apresentar alguns elementos do ponto de vista histórico do estudo dos números reais, assim como focar na obtenção dos números irracionais, que por muitas vezes podem ser o ponto mais obscuro para muitos estudantes que não os compreendem.

2 A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E O ENSINO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

2.1 A importância da História da Matemática na Educação Básica

Para começar nosso trabalho, vamos inicialmente abordar algumas questões sobre a importância do ensino da História da Matemática em sala de aula, dessa forma, ao fazer esse estudo poderemos compreender como a Matemática foi construída na sociedade humana.

D'Ambrosio (1999) acredita que um dos maiores erros cometidos na Educação Matemática é o de ignorar o conhecimento relacionado às demais atividades humanas, ou seja, estudar a Matemática pela Matemática, desvinculando-a de outras áreas do conhecimento. Entretanto, como as ideias matemáticas estavam presentes em todos os momentos da história de diversas civilizações deve-se recuperar essa presença de ideias matemáticas em todas as ações humanas.

> As práticas educativas se fundam na cultura, em estilos de aprendizagem e nas tradições e a história compreende o registro desses fundamentos. Portanto, é praticamente impossível discutir educação sem recorrer a esses registros e a interpretações dos mesmos. Isso é igualmente verdade ao se fazer o ensino das várias disciplinas. Em especial da Matemática, cujas raízes se confundem com a história da humanidade. (D'AMBROSIO, 1999, p. 1)

Dentre alguns fatores de motivação para estudar a história da Matemática, temos argumentos como os de Miguel (1997) que são de suma importância para relacionarmos o conteúdo de história ao de matemática, tais como:

> A história é uma fonte de motivação para o ensino aprendizagem da matemática [...] a história constitui-se numa fonte de objetivos para o ensino da matemática [...] a história constitui-se numa fonte de métodos adequados de ensino da matemática [...] a história é uma fonte para seleção de problemas práticos, curiosos, informativos e recreativos a serem incorporados nas aulas de matemática [...] a história é um instrumento que possibilita a desmistificação da matemática e a desalienação de seu ensino [...] a história constitui-se num instrumento de formalização de conceitos matemáticos [...] a história é um pensamento de promoção do pensamento independente crítico [...] a história é um instrumento unificador dos vários campos da matemática [...] a história é um instrumento promotor de atitudes e valores [...] a história constitui-se num instrumento de conscientização epistemológica [...] a história é um instrumento de pode promover a aprendizagem significativa e compreensiva da matemática [...] a história é um instrumento que possibilita o resgate da identidade cultural. (MIGUEL, 1997, p. 75-94)

Em concordância com Miguel (1997), Roque (2012) nos diz que: "A história da matemática pode perfeitamente tirar do esconderijo os problemas que constituem o campo de experiência do matemático, ou seja, o lado concreto do seu fazer, a fim de que possamos entender melhor o sentido de seus conceitos". (ROQUE, 2012, p. 23)

Miguel (1997, p. 95-100) também evidencia alguns argumentos questionadores com relação ao ensino da História da Matemática, tais como: 1°- A ausência de literatura adequada sobre História da Matemática principalmente sobre os períodos anteriores aos 2 últimos séculos; 2° - A natureza imprópria da literatura disponível pois as publicações Matemáticas, de modo geral, destaca apenas os resultados obtidos, ocultando os processos de sua descoberta; 3° - O elemento histórico é um fator complicador pois o aluno pode encontrar grandes dificuldades ao desenvolver os problemas históricos reconstituindo um contexto que não é familiar; 4° - Ausência na criança do sentido de progresso histórico pois elas têm "pouco ou nenhum sentido do progresso histórico, pelo menos não o possuem para os temas científicos que elas associam com as coisas imediatas" (GRATTAN GUINNESS, 1973, p.449)

Dessa forma, de acordo com Miguel (1997) temos diversos fatores que nos levam a acreditar no benefício de estudar a História da Matemática, porém temos também alguns argumentos contra esse tipo de ensino. Nesse sentido, Miguel (1997) ainda conclui que:

> Para poderem ser pedagogicamente úteis, é necessário que histórias da matemática sejam escritas sob o ponto de vista do educador matemático. Tais histórias, a meu ver, tentariam e tenderiam a privilegiar certos temas e não outros, determinados problemas e métodos e não outros, a enfatizar a reconstituição, não apenas dos resultados matemáticos, mas sobretudo dos contextos epistemológico, psicológico, sócio-político e cultural nos quais esses resultados se produziram, contribuindo, desse modo, para a explicitação das relações que a matemática estabelece com a sociedade em geral e com as diversas atividades teóricas específicas e práticas produtivas setorizadas. (MIGUEL, 1997, p.101)

Segundo Roque (2012, p. 20), o ensino da matemática é por muitas vezes considerado abstrato pois ela é ensinada de maneira engessada, ou seja, seguindo uma determinada ordem (por exemplo, definição, exemplo e exercícios) que em teoria facilitaria o aprendizado da matéria, no entanto, acaba sendo baseada em mostrar as questões aos alunos e respondê-las, ao contrário da construção histórica que expõe justamente a ordem na qual os problemas apareceram e foram estudados no decorrer de diversos momentos da história da humanidade.

> A matemática que lemos nos livros já foi produzida há muito tempo e reorganizada inúmeras vezes. Entretanto, não se trata de um saber pronto e acabado. Fala-se muito, hoje, em inserir o ensino de um conceito matemático em um contexto. E justamente porque a maioria das pessoas acham que a matemática é muito abstrata, ouvem-se pedidos para que ela se torne mais "concreta", ligada ao "cotidiano". Mas a matemática também é vista como um saber abstrato por excelência. Como torná-la mais concreta? Essas questões aparecem frequentemente na experiência de ensinar matemática, bem como nas discussões sobre as dificuldades de seu ensino e de sua aprendizagem. (ROQUE, 2012, p. 21-22)

Apesar de termos bons fatores motivadores para o estudo da História da Matemática, devemos ter em mente que “a viabilidade de uso pedagógico das informações históricas baseia-se em um ensino de matemática centrado na investigação” (MENDES, 2009, p. 91)

> Há algum tempo muitos estudiosos sobre teorias da aprendizagem vêm discutindo sobre esse tema, construindo argumentos e propondo ações que viabilizem a efetivação de um ensino que conduza os estudantes a uma aprendizagem reflexiva e com significado. Nossas experiências no ensino de Matemática têm mostrado que a investigação histórica pode contribuir para que o processo de cognição matemática, em sala de aula, se desenvolva de maneira significativa. Essa perspectiva investigatória, portanto, pode ser conduzida de forma orientada, constituindo-se em um agente da cognição matemática na sala de aula, fazendo com que os estudantes compreendam o processo de construção da Matemática em cada contexto e momento histórico específicos. (MENDES, 2009, p. 91)

Para Mendes (2009, p. 92) é interessante o uso de atividades sobre a História da Matemática para o ensino da disciplina, pois apesar do uso de atividades concretas ser desenvolvido nas primeiras séries do ensino fundamental, ele acredita que independente de qual série ou nível de compreensão em Matemática, o aluno pode ser favorecido com atividades que contextualizem o período histórico para que o estudante compreenda o contexto sobre o qual a Matemática fora desenvolvida na História.

> Utilizar tais princípios, aliados à dimensão histórica pode conduzir a investigação em sala de aula, dando maior significado à matemática escolar. Isso porque o conhecimento histórico pode, muitas vezes, estar implícito nos problemas suscitados na atividade ou, até mesmo, explícito nos textos históricos resgatados de fontes primárias (textos originais, documentos ou outros artefatos históricos) ou secundárias (informações de livros de história da Matemática ou de livros paradidáticos). O princípio que dá a dinâmica vital às atividades históricas, para que elas se constituam em um processo ativo-reflexivo, vem dos pressupostos construtivistas. (MENDES, 2009, p. 93)

Ainda segundo Mendes (2009, p. 94-95) para termos um bom ensino-aprendizagem em matemática, precisamos de atividades históricas, pois a partir daí conseguimos conduzir os estudantes a investigar a história como um meio de reconstrução da matemática que foi produzida em distintos contextos e épocas.

> Desse modo, o professor deve explorar o processo histórico da construção dos tópicos matemáticos a serem abordados em sala de aula para que o aluno compreenda o significado dessas ideias e sua importância para o desenvolvimento da matemática em seu significado histórico e conceitual. [...] Assim sendo, as implicações do uso da história no ensino da Matemática apontam conexões que suscitam uma possível utilização pedagógica das mesmas nas aulas de Matemática. (MENDES, 2009, p. 95)

A partir do exposto em Roque (2012, p. 67-68), veremos agora um exemplo de como estudar a história pode auxiliar a aprendermos Matemática. Notemos que o próprio conceito de número já nos fornece uma relação complexa entre os pensamentos concreto e abstrato. “Tomemos por exemplo: um par de carneiros; um casal constituído por um homem e uma mulher; e os recipientes utilizados por esse homem e essa mulher em uma refeição” (Roque, 2012, p. 67). Um carneiro, um homem e um prato podem parecer não ter nada em comum, mas pensando na união de seres de mesma natureza, segundo o problema, temos o mesmo número com relação aos conjuntos de seres que no caso é 2. “O procedimento utilizado desde as sociedades antigas, e que está na origem do conceito de número, é a correspondência entre dois grupos de coisas, ou duas coleções” (Roque, 2012, p. 68). Assim, no exemplo podemos associar cada carneiro ao homem e a mulher, e/ou associar cada recipiente a um ser humano ou a um carneiro.

> Tal correspondência é exatamente do mesmo tipo daquela que empregamos ao “contar nos dedos”. Pode-se associar, por exemplo, cada carneiro a um dedo da mão e concluir que em uma dada coleção de carneiros há a mesma quantidade de carneiros do que de dedos nas mãos. Em seguida, podemos chamar essa quantidade de “10” e dizer que uma propriedade comum à coleção de carneiros e à coleção de dedos das mãos é a de que ambas possuem 10 seres. É lícito fazer a mesma coisa associando qualquer coleção de seres a uma outra coleção de seres determinada que possua uma quantidade fixa de elementos (como os dedos das mãos). Efetuar uma correspondência entre essas duas coleções de seres é “contar”. (Roque, 2012, p. 68).

Assim, temos que a própria noção de número é baseada nessa abstração entre dois objetos de naturezas distintas. “Quando se fala hoje, em cinco jarros de água, significa que se tem a mesma quantidade de jarros do que a quantidade de dedos de uma das mãos, e que essa propriedade comum é o número 5” (Roque, 2012, p. 69). Dessa forma, “O conceito de número está, portanto, ligado a essa possibilidade de representar uma certa quantidade de jarros pelo mesmo nome usado para a quantidade de dedos” (ROQUE, 2012, p. 69)

> Na virada do quarto para o terceiro milênio a.E.C. (antes da Era Comum), foram introduzidos símbolos para designar quantidades de coisas de naturezas diferentes. Esses sinais numéricos traduziam o conceito de “unidade”, “doisidade”, “tresidade”, abstraídos de qualquer objeto particular. “Dois” não existe na natureza, mas somente conjuntos com dois objetos concretos, como dois dedos, duas pessoas, duas ovelhas, ou mesmo conjuntos compostos de elementos heterogêneos, como 1 fruta + 1 animal. “Dois” é a abstração da qualidade de “doisidade” compartilhada por esses conjuntos. Logo, os numerais escritos nos tabletes desse período são o primeiro indício da utilização de um sistema de numeração abstrato. (ROQUE, 2012, p. 69)

2.2 A Importância do Estudo dos Números Reais

O conjunto dos números reais no ensino básico é talvez o conjunto mais importante que aprendemos em nossas vidas, pois nele estão contidos os conjuntos de números naturais, inteiros, racionais e irracionais. Dessa forma, quando entendemos os conceitos desse conjunto, sabemos trabalhar com todos os outros conjuntos que estão contidos nele. Neste trabalho, vamos tomar como conhecimento básico os números naturais e inteiros para assim nos focarmos apenas nos números racionais e irracionais que compõem os números reais.

Apesar de ser um dos mais importantes conjuntos numéricos, devido a sua complexidade, a compreensão dos números reais é um obstáculo que tanto os alunos possuem dificuldades em transpor como os professores também possuem dificuldades em tratar o assunto com clareza.

> São notórias, ao observarmos a realidade das escolas brasileiras, as dificuldades por parte dos alunos em entender os conceitos matemáticos e, por parte dos professores em levar o aluno a pensar, visto que os mesmos muitas vezes se sentem desmotivados a estudar. Diante de tal cenário, percebemos a necessidade de novas metodologias de ensino, a fim de promover a aprendizagem. Na Matemática a maioria dos alunos concluem o ensino fundamental sem saber realizar cálculos aritméticos básicos, como operações de frações e cálculo de radicais, bem como interpretar e resolver problemas elementares envolvendo conceitos numéricos, algébricos e geométricos. (SOUTO, 2018, p. 1)

Dessa maneira, para Souto (2018) surgiu-se a motivação para entender melhor quais seriam as necessidades que os alunos apresentam para compreender o conceito de número real, utilizando os resultados do passado e de qual forma eles são tratados para que entendamos o presente.

Assim, Dias e Cobianchi (2001) ressaltam que devemos ter uma preocupação com a apreensão dos números reais, pois o seu entendimento é de suma importância no ensino de Matemática, por ser “uma decorrência natural para a ampliação dos conjuntos numéricos e um suporte para entendimento e aplicação em outros conceitos da Matemática” (DIAS; COBIANCHI, 2001, p. 298-299), o seu estudo permite também o desenvolvimento da lógica e do raciocínio matemático, além de que cada aluno passa por um progresso no sentido de que: “você sai de um mundo até então limitado para um conhecimento infinitamente rico” (COBIANCHI, 2001, p. 300). Apesar de que uma certa parcela de professores e alunos desconheçam a verdadeira importância em aprender os números reais, acreditamos que é importante estudar a história dos números reais para que possamos acompanhar o desenvolvimento do pensamento sobre esse conceito, assim como sua necessidade na evolução humana.

2.3 Os Parâmetros Curriculares Nacionais e a Base Nacional Comum Curricular

2.3.1 Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs)

Abordaremos aqui os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) que estão divididos em duas partes: A primeira parte trata dos antigos terceiros e quartos ciclos do ensino fundamental, que se refere a antiga 5°série até a 8° série, e hoje é equivalente ao que chamamos de ensino fundamental anos finais - 6° ano até o 9° ano; A segunda parte nos diz respeito ao ensino médio, que se refere ao 1° ano até o 3° ano.

Com relação ao ensino fundamental anos finais, temos que:

> Os Parâmetros Curriculares Nacionais foram elaborados procurando, de um lado, respeitar diversidades regionais, culturais, políticas existentes no país e, de outro, considerar a necessidade de construir referências nacionais comuns ao processo educativo em todas as regiões brasileiras. Com isso, pretende-se criar condições, nas escolas, que permitam aos nossos jovens ter acesso ao conjunto de conhecimentos socialmente elaborados e reconhecidos como necessários ao exercício da cidadania. (BRASIL, 1998a, p. 5)

De acordo com Brasil (1998a, p. 42), a História da Matemática é uma importante ferramenta no ensino de Matemática, pois ela revela a Matemática como sendo uma criação humana, trata as dificuldades contidas nos diversos momentos históricos e em diversas culturas, estudar a História da Matemática também fornece um elo entre os processos matemáticos que foram utilizados no passado com os processos que utilizamos hoje em dia, dessa forma, o aluno pode ter melhores condições de compreender a Matemática e fazer a ligação de que o avanço que temos hoje na tecnologia não seria possível sem a herança cultural que tivemos das gerações passadas.

Sobre o estudo dos números reais, Brasil (1998a) indica que nos anos finais do ensino fundamental, o estudo dos números racionais tem como objetivo mostrar aos alunos que somente os números naturais e inteiros não são suficientes para resolvermos diversas situações problema, por exemplo, aquelas que envolvem algumas medidas de grandezas e resultados de certas divisões não exatas, “Para abordar o estudo dos racionais, sob essa perspectiva, os problemas históricos envolvendo medidas, que deram origem a esses números, oferecem bons contextos para seu ensino” (BRASIL, 1999a, p 100).

A respeito do estudo dos números irracionais temos que:

> Do ponto de vista de sua evolução histórica, a existência e a caracterização dos números irracionais foram questões bastante complicadas. Apesar de ser antiga a convivência do homem com os números irracionais, somente há

> pouco mais de cem anos é que esses números foram sistematizados. (BRASIL, 1999a, p 106).

Assim, para Brasil (1998a), um dos obstáculos no estudo dos números irracionais é a inexistência de modelos materiais que nos tragam exemplos sobre tais números, pois quando construímos a reta numérica construímos também o conceito de densidade dos números racionais, o que leva o aluno a acreditar que não há mais espaço na reta para que os números irracionais sejam alocados.

O conhecimento dos irracionais não é intuitivo, o formalismo matemático que está presente no estudo desse conjunto numérico apresenta diversos desafios para a Educação Básica, dessa forma, podemos ter duas possibilidades para os cálculos aritméticos envolvendo esse conjunto: solucionando os cálculos de maneira análoga ao que fazemos nos racionais, ou, efetuar os cálculos por meio de aproximações com os números racionais. “Nesses casos apresenta-se uma situação apropriada para tratar o conceito de arredondamento e utilizar as calculadoras”. (BRASIL, 1998a, p. 107)

Já com relação ao Ensino Médio, temos que:

> Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio são o resultado de meses de trabalho e de discussão realizados por especialistas e educadores de todo o país. Foram feitos para auxiliar as equipes escolares na execução de seus trabalhos. Servirão de estímulo e apoio à reflexão sobre a prática diária, ao planejamento de aulas e sobretudo ao desenvolvimento do currículo da escola, contribuindo ainda para a atualização profissional. (BRASIL, 1998b, p. 1)

A partir dos PCNs Brasil (1998b, p. 120-121) contido no Tema 1. Álgebra: números e funções, temos que os números reais são tema de estudo no ensino médio pois nesse conjunto tratamos dos “números, variáveis em conjuntos infinitos e quase sempre contínuos no sentido de serem completos” (BRASIL, 1998b, p. 120). Além disso, a partir dos números reais é que podemos estudar futuramente os números complexos, funções e equações com variáveis reais, também utilizamos vastamente os números reais nos temas de variação de grandezas e na trigonometria, assim como os números irracionais que estão intimamente relacionados à Geometria.

Dentre algumas habilidades compreendidas no estudo dos números reais, destacamos “calcular, resolver, identificar variáveis, traçar e interpretar gráficos e resolver equações de acordo com as propriedades das operações no conjunto dos números reais e as operações válidas para o cálculo algébrico”. (BRASIL, 1998b, p. 121)

2.3.2 Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC):

> Conforme definido na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB, Lei nº 9.394/1996), a Base deve nortear os currículos dos sistemas e redes de ensino das Unidades Federativas, como também as propostas pedagógicas de todas as escolas públicas e privadas de Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio, em todo o Brasil.
> A Base estabelece conhecimentos, competências e habilidades que se espera que todos os estudantes desenvolvam ao longo da escolaridade básica. Orientada pelos princípios éticos, políticos e estéticos traçados pelas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica, a Base soma-se aos propósitos que direcionam a educação brasileira para a formação humana integral e para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva. (BRASIL, 2018a, p. 1)

De acordo com Brasil (2018a) sobre a BNCC com relação ao Ensino Fundamental – anos finais, temos que:

> Para que aprofundem a noção de número, é importante colocá-los diante de problemas, sobretudo os geométricos, nos quais os números racionais não são suficientes para resolvê-los, de modo que eles reconheçam a necessidade de outros números: os irracionais. Os alunos devem dominar também o cálculo de porcentagem, porcentagem de porcentagem, juros, descontos e acréscimos, incluindo o uso de tecnologias digitais. No tocante a esse tema, espera-se que saibam reconhecer, comparar e ordenar números reais, com apoio da relação desses números com pontos na reta numérica. Cabe ainda destacar que o desenvolvimento do pensamento numérico não se completa, evidentemente, apenas com objetos de estudos descritos na unidade Números. Esse pensamento é ampliado e aprofundado quando se discutem situações que envolvem conteúdos das demais unidades temáticas: Álgebra, Geometria, Grandezas e medidas e Probabilidade e estatística. (BRASIL, 2018a, p. 269)

Sobre o Ensino Médio, segundo a BNCC Brasil (2018b), o tema dos números reais é diluído dentre as mais diversas competências e habilidades de forma mais aprofundada, inter-relacionando basicamente os conhecimentos adquiridos na etapa anterior, ou seja, até o 9° ano do Ensino Fundamental. Dessa maneira:

> Em relação aos Números, os estudantes do Ensino Fundamental têm a oportunidade de desenvolver habilidades referentes ao pensamento numérico, ampliando a compreensão a respeito dos diferentes campos e significados das operações. Para isso, propõe-se a resolução de problemas envolvendo números naturais, inteiros, racionais e reais, em diferentes contextos (do cotidiano, da própria Matemática e de outras áreas do conhecimento). (BRASIL, 2018b, p. 517)

2.4 Reflexões acerca do conjunto dos Números Reais

O conjunto dos números reais é aquele formado pela união dos conjuntos de números naturais, conjunto dos inteiros, conjunto dos racionais e o conjunto dos irracionais. Como já dissemos anteriormente, tomaremos o conhecimento sobre os números naturais e inteiros como já estudado.

> Do ponto de vista formal, o conjunto dos números reais é fundamentalmente a estrutura *corpo ordenado completo*, ou seja, uma quádrupla (X, P, +, ×), onde + e × são duas operações no conjunto X, ambas comutativas, associativas, com distintos elementos neutros e com inversos para todos os elementos de X (exceto o neutro de +, que não possui inverso segundo ×). Além disso, × é distributiva em relação a + e P um subconjunto de X, fechado em relação a ambas as operações e tal que, para todo elemento ∝ de X, vale a tricotomia: ou ∝ é o neutro de + ou ∝ está em P ou seu oposto (inverso segundo +) está em P. Por último, todo subconjunto não vazio de X, se limitado superiormente, deve possuir um supremo em X. (MOREIRA; FERREIRA, 2019, p. 1)

Entretanto essa definição encontrada em Moreira e Ferreira (2019) é deveras complicada para utilizarmos na Educação Básica, apesar de que o conjunto dos números reais é um objeto matemático importante o bastante para que façamos uso desde o Ensino Fundamental e complexo o bastante para que estudemos de forma aprofundada somente no nível superior de ensino, considerando ainda o fato de que o conjunto dos números reais só teve uma definição formal apresentada no século XIX (por Dedekind em 1871), tomaremos as apresentações mais comuns que são encontradas nos materiais didáticos quando tratamos os números reais.

Primeiramente, vamos ver algumas formas de caracterização do conjunto dos números racionais (representado pelo símbolo $\mathbb{Q}$) que mais comumente temos contato nos livros voltados para educação básica.

Caracterização 1: “Chama-se conjunto dos números racionais – símbolo $\mathbb{Q}$ - o conjunto dos pares ordenados (ou frações) $\frac{a}{b}$, em que $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$.” (IEZZI; MURAKAMI, 2013, p. 45)

Caracterização 2: “Chamamos número racional todo número obtido da divisão (razão) entre dois inteiros, com o divisor não nulo.” (SILVA, 2022)

Caracterização 3: “Um número racional (ou fração ordinária) é um número que pode ser colocado na forma a/d, com a e d inteiros e d não é zero.” (NIVEN, 1984, p. 30)

Notemos que todas as definições de números racionais acima seguem basicamente um mesmo padrão, ditado pela divisão entre dois números inteiros com o denominador diferente de zero, no entanto, há algumas diferenças pequenas, porém, significativas entre elas: na Definição 1, Iezzi e Murakami (2013) escrevem a definição do conjunto dos números racionais de maneira mesclada utilizando a linguagem Simbólica com a escrita em linguagem retórica, além disso, define um conjunto e não um número racional. Agora na Definição 2, Silva (2022) utiliza uma definição escrita em linguagem retórica, o que pode aproximar mais o entendimento do conjunto dos números racionais pelos alunos. Contudo, essas duas definições possuem certas semelhanças com relação a definição dos números racionais. Por fim, na Definição 3, de Niven (1984) temos a predominância da escrita em linguagem retórica, com a diferença de que estamos usando a linguagem simbólica apenas na escrita das incógnitas.

Observe que a maneira de escrever não é a única diferença que temos com relação as definições acima, podemos perceber que nem todas as opções refletem a verdadeira definição dos números racionais, mas por que não?

Note que pelas caracterizações 1 e 2 os números $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}\,(i)$, $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\,(ii)$ e $\frac{\sqrt{2}}{2}\,(iii)$ seriam todos números que não pertencem ao conjunto dos números racionais, pois tanto no numerador, quanto no denominador temos a necessidade de se ter números inteiros, o que não ocorre nem em (i) nem em (ii), já em (iii) temos um número inteiro no denominador, mas, por termos um número irracional (ver a seguir) no numerador, a caracterização não vale, o que nos faz concluir que os números $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$, $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ e $\frac{\sqrt{2}}{2}$ são todos números não racionais (irracionais), fato que não é verdade na expressão (i). Observe:

$$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{36}}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

Portanto $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = 2$ e sabemos que 2 é um número racional, mas pelas caracterizações 1 e 2 dadas chegamos à conclusão errada de que (i) é não é um número racional, logo, essas caracterizações não são 100% corretas, apesar de serem definições que vemos em boa parte dos materiais didáticos.

Agora a caracterização 3 nos diz que um número é racional quando ele “pode” ser escrito como a divisão de dois inteiros com o denominador diferente de zero, dessa forma podemos racionalizar o nosso número conforme fizemos acima para tentar encontrar uma divisão de inteiros, no caso $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = 2$ que é um número racional, agora nos números dados em (ii) e (iii) por mais que racionalizemos os valores, nunca chegam a nos dar uma divisão de números inteiros, nos mostrando assim que os valores dados em (ii) e (iii) não são racionais.

> Os racionais são obtidos por subdivisões adequadas do segmento unidade. Se imaginarmos os números racionais marcados sobre uma reta, veremos que eles formam um subconjunto dessa reta que é denso no seguinte sentido: dado um

> ponto qualquer da reta, poderemos obter racionais tão perto dele quanto se queira; basta tomar subdivisões cada vez mais finas da unidade. Com este raciocínio pode parecer que os racionais cobrem toda a reta R, isto é, que a cada ponto da reta corresponde um número racional. Que isso não é verdade já era conhecido pelos matemáticos da Escola Pitagórica. Sabiam eles que a hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles não é comensurável com os catetos, isto é, se os catetos tem comprimento igual a 1, então a medida da hipotenusa não é número racional. (ZULIN, 2013, p. 17)

Podemos também compreender que os números racionais são aqueles que podem ser escritos na forma de fração de tal forma que sua representação decimal tenha um número finito de casas decimais ou então sua representação decimal tenha infinitas casas decimais, porém, seja periódica (também chamado de dízima periódica, e é periódica pois a sequência decimal se repete ao longo das casas decimais).

Vejamos abaixo alguns exemplos de números racionais:

- $0{,}37$ é um número racional de representação decimal finita e pode ser adquirido por meio da fração $\frac{37}{100}$.
- -43 ou 51 são números inteiros, mas também são números racionais cuja representação pode ser adquirida por meio das frações $\frac{-43}{1}$ e $\frac{51}{1}$, respectivamente.
- $2{,}333$ ... ou $2,\overline{3}$ é uma dízima periódica, ou seja, um número racional e pode ser obtido por meio da fração $\frac{7}{3}$.

Agora vamos ver algumas formas de caracterizar o conjunto dos números irracionais (representado pelo símbolo $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$) que mais comumente temos contato nos livros de Matemática na Educação Básica.

> (A) "Um número é irracional se não puder ser escrito na forma a/b com a, b pertencente a Z e b não-nulo".
>
> "Irracional é o número que não pode ser escrito na forma de fração".
>
> (B) "Irracional é o número cuja representação decimal é infinita e não-periódica".
>
> "Todo número escrito na forma de um decimal infinito e não-periódico é um número irracional".
>
> (C) "Os números irracionais representam medidas de segmentos que são incomensuráveis com a unidade". (RIPOLL, 2004, p 01)

Notemos que de acordo com Ripoll (2004) as caracterizações de números irracionais acima dependem de conhecimento dos números racionais. A caracterização A diz que aquele número que não é racional é irracional, e essa definição é correta do ponto de vista matemático pois estamos tratando do universo dos números reais. Primeiramente, imaginemos que o aluno está estudando as raízes da equação $x^2 + 1 = 0$ e ao fazer o passo a passo para a resolução, tal aluno chegou à conclusão de que $\pm\sqrt{-1}$ sejam as raízes dessa equação. Como esse aluno possui apenas o conhecimento dos números reais, ele pode se sentir inclinado a responder que tais números são números irracionais (entretanto, nenhuma raiz de índice par de um número negativo é irracional), contudo esses números não são racionais, mas sim números complexos (não trataremos sobre os números complexos neste trabalho). Um segundo fator que pode trazer uma certa confusão na hora do entendimento dos alunos é definir um número irracional por meio de uma apresentação em sua forma negativa.

Na caracterização B fala-se sobre a representação decimal, que novamente é uma caracterização correta de número irracional, no entanto, um problema que pode atrapalhar o entendimento é que ao escrevermos um número que possua muitas casas decimais ou com uma representação decimal infinita, podemos não conseguir verificar efetivamente se o número é periódico ou não, o que pode ocasionar uma confusão quando for necessário que o aluno entenda sobre outros conjuntos numéricos no futuro (aqui também temos o termo: dízima não-periódica que significa que sua representação decimal tem infinitas casas decimais cuja sequência nunca se repete).

Na caracterização C não temos uma definição pois ela fala da relação entre medidas de segmentos (e diz ainda sobre segmentos incomensuráveis, que muitas vezes é um assunto ainda não estudado quando começamos o estudo dos números irracionais, veremos na próxima seção o que são segmentos incomensuráveis), no entanto não existem segmentos cuja medida seja negativa, mas temos números irracionais que são negativos, portanto, também não é uma definição precisa com relação ao conjunto dos números irracionais.

Vamos agora mostrar que um número irracional multiplicado por um número racional tem como resultado um número irracional, assim:

Demonstração:

Seja $\frac{a}{b}$ um número racional e x um número irracional e seja ainda o número racional $\frac{m}{n}$. Vamos supor que $\frac{a}{b}.x = \frac{m}{n}$, dessa forma temos que $x = \frac{m}{n}.\frac{b}{a} = \frac{mb}{na}$, logo $mb \in \mathbb{Z}$ e $na \in \mathbb{Z}$, daí concluímos que x é um número racional, o que é um absurdo pois definimos x como um número irracional. Portanto concluímos que $\frac{a}{b}.x$ deve ser um número irracional.

Relembrando os exemplos (i), (ii) e (iii) utilizados na explicação sobre números racionais, sabemos que (i) é um número racional, vamos verificar se (ii) e (iii) são números irracionais:

$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15}}{3} = \frac{1}{3}.\sqrt{15} = \frac{3,872983\ldots}{3} = 1,290994 \ldots$ é uma dízima não-periódica, portanto o número $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ é um número irracional.

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}.\sqrt{2} = \frac{1,414214\ldots}{2} = 0,707107 \ldots$ é uma dízima não-periódica, portanto o número $\frac{\sqrt{2}}{2}$ é um número irracional.

Mas como descobrir se um número é irracional, por exemplo: o número $\sqrt{2}$ é um número racional ou irracional?

Demonstração:

Vamos supor que o número $\sqrt{2}$ é um número racional, ou seja, ele pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, em que $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$, além disso, vamos tomar $mdc(a, b) = 1$, ou seja a e b são primos entre si. Assim temos:

$$\frac{a}{b} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{a}{b}.\frac{a}{b} = \sqrt{2}.\sqrt{2} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = 2 \Rightarrow a^2 = 2b^2$$

Da equação acima podemos notar que o número a^2 é um número par, já que todo número par é um número múltiplo do número 2. Ou seja, isso nos indica que nosso número *a* é um número par também. Já que o nosso número *a* é um número par, ele pode ser escrito na forma: $a = 2k,\ k \in \mathbb{Z}$. Portanto, substituindo na equação original, temos:

$$(2k)^2 = 2b^2 \Rightarrow 4k^2 = 2b^2 \Rightarrow b^2 = 2k^2$$

Agora note que b^2 também é um número par, pois todo número par é um número múltiplo do número 2. Ou seja, isso nos indica que o nosso número *b* é um número par também. O que é um absurdo, pois inicialmente supomos que $mdc(a, b) = 1$, ou seja, *a* e *b* seriam primos entre si, mas segundo o demonstrado $mdc(a, b) = 2$,. Portanto, o número $\sqrt{2}$ não é um número racional, logo, é irracional.

Segundo o estudo de Knorr (1975), podemos ter uma outra visão, que é aquela que mais comumente é aplicada em sala de aula quando o assunto se trata do surgimento do número $\sqrt{2}$:

"o problema da incomensurabilidade poderia ter surgido como uma consequência imprevista do estudo métrico do quadrado" (KNORR, 1975, p.28).

No entanto, segundo Miguel (1993), o surgimento dos segmentos incomensuráveis foram uma das formas de relacionar a geometria com a existência dos números irracionais, ou números transcendentes.

> [...] há grande probabilidade histórica da descoberta de segmentos incomensuráveis ter ocorrido através da comparação entre o lado e a diagonal de um pentágono e não através da comparação entre o lado e a diagonal do quadrado como o supunha a antiga tradição...os sucessivos pentágonos regulares que são gerados pelo traçado das diagonais do pentágono regular inicial e dos demais que se formam a partir dele, ilustram visualmente a possibilidade de continuidade ilimitada do processo, levando a conclusão quase que inevitável de que a razão entre o lado e a diagonal do pentágono inicial não poderia ser expressa por um número racional. . (MIGUEL, 1993, p. 200 a 201)

Como exemplo, podemos citar a construção do número $\sqrt{2}$, que é um dos primeiros números irracionais que conhecemos.

Dessa forma, podemos ter mais de um ponto de vista sobre o mesmo assunto, ou seja, o estudo sobre a história dos números reais pode ser uma questão a ser debatida antes de colocarmos um ponto final.

Vejamos a seguir mais alguns exemplos de números irracionais:

- $\sqrt{5}$ é um número irracional cuja representação decimal é $2{,}23606797749$ ... ou seja, é uma dízima não-periódica.
- π (o famoso número usado principalmente na geometria) é um número irracional cuja representação decimal é $3{,}14159265358$ ... ou seja, é uma dízima não-periódica.
- φ (conhecido como o número áureo ou número de ouro) é um número irracional cuja representação decimal é $1{,}6180339$ ... ou seja, é uma dízima não-periódica.

3 A HISTÓRIA DOS NÚMEROS REAIS

> O homem difere de outros animais de modo mais acentuado pela sua linguagem cujo desenvolvimento foi essencial para que surgisse o pensamento matemático abstrato. No entanto, palavras que exprimem ideias numéricas apareceram lentamente. Os sinais para os números provavelmente precederam as palavras para os números, pois é mais fácil fazer incisões num bastão do que estabelecer uma frase bem modulada para identificar um número. (Boyer, 1974, p. 3)

Nesse capítulo, vamos apresentar alguns aspectos que julgamos relevantes acerca da história dos números reais, “Os primeiros registros que podem ser concebidos como um tipo de escrita são provenientes da Baixa Mesopotâmia, onde atualmente se situa o Iraque” (ROQUE, 2012, p.25). Além de que, segundo Roque (2012, p. 25), as primeiras formas de que temos registro são oriundas da Mesopotâmia e do Egito e datam do final do quarto milênio a.E.C., pois as primeiras formas de escrita Matemática eram relacionadas aos rebanhos, mas também tinham ligação com os insumos relacionados a sobrevivência e organização da sociedade.

Inicialmente comentaremos a respeito de duas civilizações antigas mais conhecidas que possuíam registros Matemáticos escritos: a civilização da Mesopotâmia e a do Antigo Egito. “Os registros disponíveis são mais numerosos para a matemática mesopotâmica do que para a egípcia, provavelmente devido à maior facilidade na preservação da argila usada pelos mesopotâmicos do que do papiro, usado pelos egípcios” (ROQUE, 2012, p. 25)

> [...]quando mencionarmos os tabletes e a matemática do período babilônico antigo, estaremos nos referindo aos “tabletes babilônicos” e à “matemática babilônica”, e quando quisermos enfatizar uma certa estabilidade das práticas matemáticas na região da Mesopotâmia, usaremos o adjetivo “mesopotâmico”. (ROQUE, 2012, p. 26)

3.1 Os Números Reais na Civilização Mesopotâmica

Roque (2012, p. 33) destaca que o sistema de numeração Mesopotâmico dependia de certos símbolos e sua escrita (chamada escrita cuneiforme), aqui estamos falando aproximadamente do terceiro milênio a.E.C (antes da Era Comum), este era o sistema Mesopotâmico posicional e sexagesimal (de base 60).

> Esta é a essência do sistema posicional: um mesmo símbolo serve para representar diferentes números, dependendo da posição que ocupa na escrita. Esse é o caso do símbolo em forma de cunha, que serve para 1, 60 e 3.600. O mesmo acontece em nosso sistema com o símbolo 1, que pode representar também os números 10 e 100. (ROQUE, 2012, p. 33)

Tabela 1- Sinais do Sistema Babilônico

Valor	1	10	60	600	3.600	36.000
Sinal	𒁹	𒌋	𒁹	𒌋	𒁹	𒌋

Fonte: Roque (2012, p. 33)

Vejamos a seguir alguns exemplos de números escritos em Cuneiforme, relacionando-os com a leitura dos símbolos no nosso sistema decimal e calculando o seu valor decimal.

Tabela 2 - Leitura de alguns números em nosso sistema

Cuneiforme	Leitura dos símbolos em nosso sistema	Valor decimal
𒁹 𒌋 𒐊	$1;15 = 1 \times 60 + 15$	75
𒁹 𒐏	$1;40 = 1 \times 60 + 40$	100
𒌋 𒐋 𒐏 𒐈	$16;43 = 16 \times 60 + 43$	1.003
𒐏 𒐉 𒌍 𒐋 𒐏	$44;26;40 = 44 \times 3.600 + 26 \times 60 + 40$	160.000
𒁹 𒌍 𒐉 𒐐 𒁹 𒌋	$1;24;51;10 = 1 \times 216.000 + 24 \times 3.600 + 51 \times 60 + 10$	305.470

Fonte: Roque (2012, p. 38)

Os registros que temos sobre a matemática Babilônica, segundo Roque (2012), são em forma de tabletes que são placas de argila com diversas escritas, muitas delas escritas matemáticas, vários desses tabletes eram equivalentes as nossas tabuadas, provavelmente tais tabletes eram utilizados mesmo em cálculos mais elementares de soma, subtração e multiplicação. É interessante notar que as divisões eram feitas multiplicando pelo que hoje chamamos de inverso do número, eles tratavam esses números como os recíprocos, tais estruturas poderiam ser comparáveis a uma estrutura de fração nos dias de hoje.

> As divisões eram efetuadas com o auxílio dos tabletes de recíprocos. Trata-se de tabletes que contêm os recíprocos dos números N. Em linguagem atual, estamos falando das frações do tipo $\frac{1}{N}$, mas, no contexto babilônico, esse não era o inverso do número N, pois os recíprocos não estavam associados ao conceito de fração. A divisão de M por N era efetuada pela multiplicação de M pelo recíproco de N, correspondente a $\frac{1}{N}$. [...] Esse procedimento faz surgir um problema com os números cujos inversos não possuem representação finita em base 60, como 7 ou 11. [...] o fato de não podermos representar de modo finito os inversos de 7 e 11 em base 60 não significa que não podemos realizar multiplicações do tipo $22.\frac{1}{11}$ (ou seja, dividir 22 por 11). Por essa razão, essas divisões eram escritas em tabletes, assim como a solução dos problemas análogos que apareciam na extração de raízes. [...]no caso de $\frac{1}{N}$ não

> possuir representação finita, o resultado da divisão de M por N teria de estar registrado em um tablete. (ROQUE, 2012, p. 44)

Segundo Boyer (1974, p. 22) alguns tabletes possuem certas aproximações dos números $\frac{1}{59} = 0;1,1,1$ e $\frac{1}{61} = 0;0,59,0,59$ que são os análogos sexagesimais dos números decimais $\frac{1}{9} = 0,11\overline{1}$ e $\frac{1}{11} = 0,09\overline{09}$ que são frações unitárias.

Um número racional cuja representação seja uma dízima periódica em uma base (por exemplo a base 10), quando representado em outra base (por exemplo a base 60), esse mesmo número não é uma dízima periódica, o que nos aproxima mais do entendimento do que seriam chamados de números racionais.

Os babilônios também sabiam como resolver potências e raízes, “O método usado nesse último caso era bastante interessante, uma vez que permitia obter valores aproximados para raízes que hoje sabemos serem números irracionais” (ROQUE, 2012, p. 45).

A seguir veremos uma explicação sobre o processo de obtenção de raízes quadradas, no entanto, sabemos que provavelmente não era esse o verdadeiro processo que os povos babilônicos seguiam em seus tempos, dessa maneira, daqui em diante teremos algumas explicações dos processos que os povos utilizavam antigamente, mas agora escritos em uma linguagem mais acessível a que eles usavam em suas épocas, para que consigamos entender os diversos conceitos que teremos que nos apropriar.

A partir do exposto em Roque e Carvalho (2012, p. 17) temos um suposto processo que explica como os babilônios puderam chegar a uma raiz quadrada, inclusive em raízes quadradas de diversos números os quais sabemos hoje serem números irracionais. Observe que na figura abaixo podemos relacionar a obtenção dessas raízes quadradas utilizando um método geométrico:

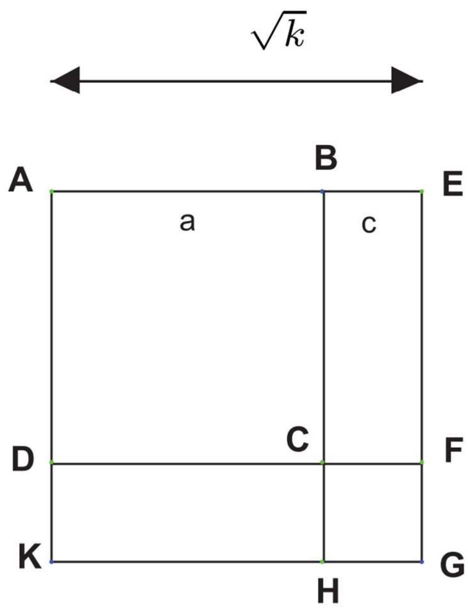


Figura 1 – Obtenção de raízes quadradas
Fonte: Roque e Carvalho (2012, p. 17)

> [...] se o segmento *AE* é cortado em um ponto *B*, o quadrado sobre *AE* é igual ao quadrado sobre *AB* mais o quadrado sobre *BE* mais duas vezes o retângulo formado por *AB* e *BE*. Se *AB* medir *a* e *BE* medir *c*, trata-se da versão geométrica da igualdade que escrevemos hoje em dia como $(a + c)^2 = a^2 + c^2 + 2ac$. (ROQUE, CARVALHO, 2012, p. 17)

Ainda segundo Roque e Carvalho (2012, p. 17) para encontrarmos a raiz quadrada de *k* basta encontrarmos um quadrado de área igual a *k.* Então, vamos colocar no interior desse quadrado o maior quadrado possível cujo lado conhecemos para utilizarmos o resultado $(a + c)^2 = a^2 + c^2 + 2ac$ para calcular o restante. Logo, seja *a* o lado do quadrado que conhecemos a área, vamos encontrar uma aproximação para *c* de tal forma que $\sqrt{k} = a + c$ e faremos isso observando a região poligonal BEGKDC da Figura 1. Como k é a área que procuramos, essa região BEGKDC pode ser calculada por $k - a^2$ mas, também pode ser obtida pela área dos dois retângulos de lados iguais a a e c e pela área do quadrado de lado *c*, o que nos leva a termos: $2ac + c^2 = k - a^2$. Caso *c* seja um valor muito pequeno, podemos desprezar c^2 (que teria um valor menor ainda que *c*) e dessa forma obteremos $c \approx \frac{k-a^2}{2a}$.

Faça $a' = a + \frac{k-a^2}{2a} = \frac{1}{2}.\left(a + \frac{k}{a}\right)$

> Então, $a' \approx a + c$ é uma aproximação de $\sqrt{k}$ melhor do que *a*, como pode ser visto imediatamente pela interpretação geométrica que apresentamos. Isso decorre também do fato que se $a < \sqrt{k}$, então $\frac{k}{a} > \sqrt{k}$, e se $a > \sqrt{k}$, então $\frac{k}{a} < \sqrt{k}$. Com efeito, como estamos lidando com números positivos não-nulos,$a <$

$\sqrt{k} \Leftrightarrow a\sqrt{k} < \sqrt{k}\sqrt{k} = k \Leftrightarrow \sqrt{k} < \frac{k}{a}$ .A segunda parte da afirmação é demonstrada de maneira análoga. (ROQUE, CARVALHO, 2012, p. 18)

Temos registros de tabletes que não continham somente resultados de certas operações, mas também tinham certos procedimentos para resolver problemas. Problemas estes que nos dias de hoje seriam facilmente resolvidos por meio de equações: “Analisaremos alguns destes procedimentos com detalhes, a fim de mostrar, contudo, o quanto seria anacrônico considerar que os babilônios soubessem resolver equações” (ROQUE, CARVALHO, 2012, p. 18). Vejamos abaixo um procedimento que se encontra na coleção do British Museum, no tablete BM 13901:

Procedimento: “Adicionei a área e o lado de um quadrado: obtive 0,45. Qual o lado?”

Solução:

1. tome 1
2. fracione 1 tomando a metade (:0,30)
3. multiplique 0,30 por 0,30 (:0,15)
4. some 0,15 a 0,45 (:1)
5. 1 é a raiz quadrada de 1
6. subtraia os 0,30 de 1
7. 0,30 é o lado do quadrado (ROQUE, CARVALHO, 2012, p. 18-19)

Figura 2 – O Tablete BM 13901
Fonte: The British Museum (2021)

Conforme vemos em Roque e Carvalho (2012, p19), cada passo no procedimento acima era obtido por meio da consulta de tabletes, na etapa 3 um tablete de multiplicação de quadrados poderia ser consultado, já na etapa 5, um tablete de raízes quadradas era consultado. Nos dias de hoje, esse exemplo poderia ser resolvido por meio de uma equação polinomial do segundo grau, mas claramente os babilônios não escreviam a equação da maneira algébrica que conhecemos hoje ($ax^2 + bx + c = 0$) e nem conheciam o método resolutivo utilizado atualmente.

3.2 Os Números Reais na Civilização Egípcia

Sabemos que "os egípcios foram um dos primeiros povos a utilizar um sistema de numeração decimal, que por meio da utilização de símbolos conseguiam representar praticamente quaisquer números que eles precisassem" (REIS, 2018, p. 25).

> O sistema decimal egípcio já estava desenvolvido por volta do ano 3000 a.C., ou seja, antes da unificação do Egito sob o regime dos faraós. O número 1 era representado por uma barra vertical, e os números consecutivos de 2 a 9 eram obtidos pela soma de um número correspondente de barras. Em seguida, os números eram múltiplos de 10, por essa razão, diz-se que tal sistema é decimal. O número 10 é uma alça; 100, uma espiral; 1 mil, a flor de lótus; 10 mil, um dedo; 100 mil, um sapo; e 1 milhão, um deus com as mãos levantadas. (ROQUE, 2012, p. 56)

Na figura 3 a seguir, podemos ver os símbolos utilizados para a representação dos números.

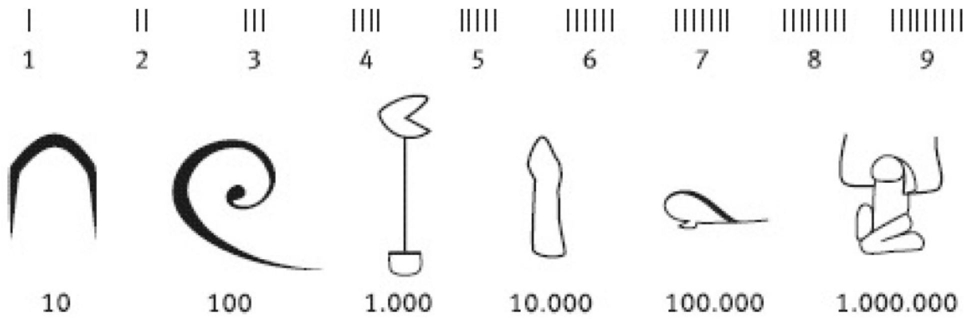


Figura 3 – Representação dos números na simbologia egípcia
Fonte: Roque (2012, p. 56)

Assim, os egípcios usavam os símbolos conforme indicado na Figura 3. Cada símbolo poderia ser repetido até 9 vezes, onde na décima vez o símbolo seria trocado por seu próximo múltiplo de 10, como, por exemplo, ao invés de escrever 10 símbolos de alça, vide explicação no parágrafo a seguir, escreveríamos apenas 1 símbolo de espiral), vejamos agora um exemplo de como podemos representar o número 23.654.

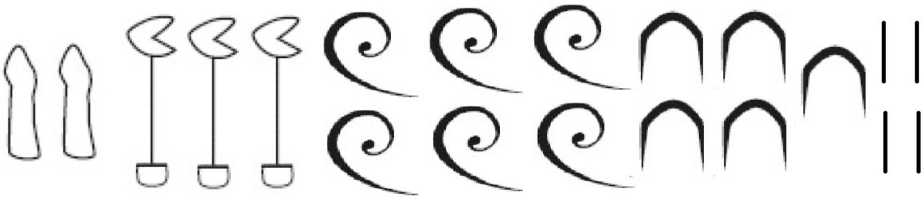


Figura 4 – Representação do número 23.654 com símbolos egípcios
Fonte: Reis (2018, p. 25)

Dessa forma temos que cada dedo equivale a 10.000, a flor de lótus vale 1.000, a espiral vale 100, a alça vale 10 e a barra vale 1, de acordo com as quantidades de símbolos utilizados na figura 4 acima chegamos a seguinte quantidade:

$$\begin{aligned} 10.000 + 10.000 + 1.000 + 1.000 + 1.000 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 10 \\ + 10 + 10 + 10 + 10 + 1 + 1 + 1 + 1 = 20.000 + 3.000 + 600 + 50 + 4 \\ = 23.654 \end{aligned}$$

Ainda de acordo com Reis (2018, p. 26), podemos notar que, ao inverter a ordem dos símbolos na Figura 4, o valor final não se altera, como o sistema decimal egípcio é um sistema não-posicional, não importa a ordem de escrita dos símbolos; assim, o importante é a quantidade e quais símbolos serão utilizados. Quando comparamos com o nosso sistema decimal posicional atual, podemos verificar que há uma diferença sensível, pois os números representados pelos símbolos 25 e 52 não são iguais, justamente pela posição ocupada pelos símbolos 2 e 5 em cada um dos casos citados.

Para Roque (2012) Os egípcios já sabiam como trabalhar com frações, ou seja, foram um dos primeiros povos a estudar sobre o que no futuro viria a ser os números racionais, eles tinham um curioso método de representar as frações na forma $\frac{1}{n}$ como uma soma de frações cujo numerador é o número 1, essas são as chamadas frações unitárias.

> Os egípcios esforçaram-se para evitar algumas das dificuldades computacionais encontradas com frações representando-as, com exceção de $\frac{2}{3}$, como soma das frações chamadas unitárias, ou seja, aquelas de numerador igual a 1. Essa redução tornava-se possível graças ao emprego de tábuas que davam a representação desejada para frações do tipo $\frac{2}{n}$, as únicas necessárias devido à natureza diádica da multiplicação egípcia. (EVES, 2011, p. 73)

No papiro de Rhind (que é um dos mais importantes papiros que trata sobre a Matemática egípcia), são encontradas diversas representações de frações entre 0 e 1 como soma de frações unitárias.

> As frações unitárias eram indicadas, na notação hieroglífica egípcia, pondo-se um símbolo elíptico sobre o número do denominador. Um símbolo especial era usado também para a fração excepcional 2/3 e um outro símbolo às vezes aparecia para 1/2. (EVES, 2011, p. 73)

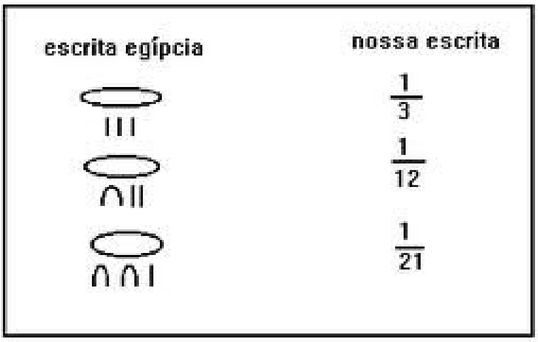


Figura 5 – Representação de algumas frações na simbologia egípcia
Fonte: Reis (2018, p. 31)

A seguir, trazemos um exemplo de como expressamos as frações de maneira unitária, retirado de Reis (2018, p. 31 - 32), desta maneira, o número $3/7$ pode ser escrito como a soma de $1/3 + 1/11 + 1/231$. Apesar dos egípcios conseguirem escrever e trabalhar com as frações unitárias da forma descrita acima, não temos certeza de qual método era utilizado para auferir tal resultado.

> Vejamos como converter nossas frações em frações egípcias. Evidentemente, não se trata de um procedimento egípcio, uma vez que nossas frações não existiam para eles, e a palavra “converter” sequer teria sentido nesse caso. (ROQUE, 2012, p. 59)

Agora vamos decompor esse número, conseguindo assim, transformá-lo em uma soma de frações unitárias pelo método de Fibonacci descrito em sua obra *Liber Abaci, editado em 1202.* Este método é descrito por Roque. (2012, p.59)

1º passo: Invertemos a fração 3/7, obtendo 7/3.

2º passo: Agora procuramos o menor número inteiro que seja maior do que 7/3, assim, encontramos o número 3, a partir daí, invertemos o número inteiro 3, e obtemos a fração 1/3.

3º passo: subtraímos 1/3 da fração 3/7.

$\frac{3}{7} - \frac{1}{3} = \frac{9-7}{21} = \frac{2}{21}$, ou seja: $\frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \frac{2}{21}$, agora, repetiremos os passos para a fração 2/21, assim teremos:

1º) Invertendo 2/21 obtemos 21/2.

2º) O menor inteiro maior que 21/2 é 11, que invertido se converte na fração 1/11

3º) Subtraindo 1/11 de 2/21, temos:

$\frac{2}{21} - \frac{1}{11} = \frac{22-21}{231} = \frac{1}{231}$, ou seja: $\frac{2}{21} = \frac{1}{11} + \frac{1}{231}$, como todas as frações se converteram em frações unitárias, temos que o resultado é dado por:

$$\frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{231}$$

E assim conseguimos expressar a fração como uma soma de frações unitárias.

No trecho retirado de Reis (2018, p. 34 - 35) temos que: diversos problemas contidos no papiro de Rhind e Moscou são sobre a divisão de víveres, animais e outros objetos, assim, temos que;

> Esses problemas eram resolvidos de forma aritmética ou através de equações lineares da forma $x + ax = b$ ou $ax + bx = c$. Com exceção da fração $\frac{2}{3}$, os egípcios trabalhavam com frações com numerador 1, o que trazia dificuldades para o manejo de tais equações. A solução encontrada foi resolvê-las por um método conhecido hoje como “método da falsa posição”. (MOL, 2013, pg. 25 apud REIS, 2018, p. 34)

Veremos agora como aplicar esse processo para calcular o valor da incógnita x por meio do Método da Falsa Posição.

> No método da falsa posição, um valor específico é atribuído à incógnita. A expressão do lado esquerdo é calculada para esse valor e o resultado encontrado é comparado com o resultado desejado. Em seguida, o resultado correto é encontrado por proporção. (MOL, 2013, pg. 25 apud REIS, 2018, p. 34)

A seguir, temos um exemplo de como encontrar o valor da incógnita x por meio do método da falsa posição, portanto, queremos calcular o valor de x na equação expressa abaixo:

$$x + \frac{1}{11}x = 29$$

Primeiramente vamos supor um valor de x que torne a expressão $x + \frac{1}{11}x$ um número inteiro, logo, devemos nos preocupar com o valor 11 no denominador, então, uma boa escolha para o valor (falso) de x é o próprio 11, assim sendo, se substituirmos 11 na incógnita x, obtemos a seguinte expressão:

$$x + \frac{1}{11}x = 11 + \frac{1}{11} \times 11 = 11 + 1 = 12$$

A partir daí, tomaremos os valores 29 e 12 para obter a fração $\frac{29}{12}$, agora, podemos adotar um processo de tornar a fração $\frac{29}{12}$ uma fração unitária, tal como abordado abaixo:

$$\frac{29}{12} = \frac{24+5}{12} = \frac{24}{12} + \frac{5}{12} = 2 + \frac{4+1}{12} = 2 + \frac{4}{12} + \frac{1}{12} = 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$$

E com isso, o valor de x é dado pela multiplicação entre o valor falso determinado no começo e a fração unitária que acabamos de encontrar, portanto:

$$x = 11 \times \left(2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{12}\right) = 11 \times 2 + \frac{11}{3} + \frac{11}{12}$$

Podemos simplificar de maneira a conseguirmos um número inteiro com uma soma de frações unitárias, veja:

$$x = 22 + \left(3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12}\right) = 26 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$$

Apesar de termos alguns métodos para a obtenção das frações unitárias e para a resolução de equações pelo método da falsa posição, devemos ter em mente que "não é conveniente empregar definições atuais para conceitos e subdisciplinas usados na Antiguidade". (ROQUE, 2012, p. 66)

3.3 Os Números Reais na Grécia Antiga

A Grécia é considerada o berço da Matemática demonstrativa, visto em Roque e Carvalho (2012, p.50), sabemos que os povos mesopotâmicos e egípcios realizavam diversos tipos de cálculos utilizando medidas de comprimento, áreas e até mesmo volumes. Provavelmente os primeiros matemáticos gregos tiveram fortes influências das Matemáticas mesopotâmica e egípcia, no entanto, não temos pesquisas ou registros de documentos que nos levem a entender essa transição. Além disso, a matemática desenvolvida na Grécia antiga também nos levou a diversos questionamentos que antes não eram levados em consideração.

> Pela primeira vez na matemática, como em outros campos, o homem começou a formular questões fundamentais como “Por que os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais?” e “Por que o diâmetro de um círculo divide esse círculo ao meio?”. Os processos empíricos do Oriente antigo, suficientes o bastante para responder questões na forma de como, não mais bastavam para as indagações mais científicas na forma de por quê. Algumas experiências com o método demonstrativo foram se consubstanciando e se impondo, e a feição dedutiva da matemática, considerada pelos doutos como sua característica fundamental, passou ao primeiro plano. Assim, a matemática, no sentido moderno da palavra, nasceu nessa atmosfera de racionalismo e em uma das novas cidades comerciais localizadas na costa oeste da Ásia Menor. (EVES, 2011, p. 94)

Segundo Roque (2012, p.71), um dos primeiros matemáticos que temos registro na história grega foi Tales de Mileto que viveu entre os séculos VII e VI a.E.C. Dentre seus feitos destacamos o cálculo da altura de uma das pirâmides do Egito utilizando as proporções entre sua altura e sua sombra. Em meados do século V a.E.C desenvolveu-se a Matemática pitagórica que fez a transição entre as épocas de Tales de Mileto e Euclides de Alexandria.

Foram os gregos um dos primeiros povos que também tiveram a noção de razão na Matemática de maneira mais próxima daquela que ensinamos nos dias de hoje.

> Euclides apresenta dois tipos de teoria das razões e proporções. Há uma versão no livro VII que pode ser aplicada somente à razão entre inteiros e é atribuída aos pitagóricos. A definição contida aí é usada para razões entre grandezas comensuráveis. A segunda versão, presumidamente posterior à primeira, está no livro V e é atribuída ao matemático platônico Eudoxo. Essa última teoria das razões e proporções é bastante sofisticada e se aplica igualmente a grandezas comensuráveis e incomensuráveis (ROQUE, 2012, p. 88)

Assim, “A descoberta do incomensurável, pelos gregos antigos, causou um transtorno, pois até então, só se conhecia números passíveis de serem medidos.” (PARANÁ, 2009, p. 8). Dessa forma: “Eudoxo propôs uma definição para as proporções que veio a minimizar esse transtorno, pois essa definição permitia a relação entre duas grandezas comensuráveis ou incomensuráveis.” (PARANÁ, 2009, p. 8)

> Diz-se que grandezas estão na mesma razão, a primeira para a segunda e a terceira para a quarta se, quando equimúltiplos quaisquer são tomados da primeira e da terceira e equimúltiplos quaisquer da segunda e da quarta, os primeiros equimúltiplos são ambos maiores que, ou ambos iguais a, ou ambos menores que, os últimos equimúltiplos considerados em ordem crescente. (EUCLIDES, apud, BOYER, 1974, p.66).

Aqui pela primeira vez surgiu-se a necessidade de trabalhar com uma forma primitiva do que no futuro chamaríamos de números irracionais, assim como se conta:

> [...] quase todos os livros de história da matemática a que temos acesso em português reproduzem a lenda de que a descoberta dos irracionais provocou uma crise nos fundamentos da matemática grega. Alguns chegam a afirmar que tal crise só foi resolvida com a definição rigorosa dos números reais, proposta por Cantor e Dedekind no século XIX (ou seja, mais de vinte séculos depois). Esse mito apontou direções importantes no modo como a história da geometria grega foi estruturada. (ROQUE, 2012, p 71)

O surgimento das grandezas incomensuráveis é frequentemente atribuído aos pitagóricos, "Tal descoberta contribuiu para a separação entre a geometria e a aritmética, a primeira devendo se dedicar às grandezas geométricas e a segunda, aos números" (ROQUE, 2012, p. 76).

> Hoje dizemos que duas grandezas A e B são comensuráveis se a razão entre elas pode ser expressa por um número racional, pois isso significa que existe uma terceira grandeza C que cabe em A e B um número inteiro de vezes. Caso contrário, se a razão entre as grandezas não puder ser expressa por um número racional, dizemos que são incomensuráveis. O problema, no entanto, não era proposto desse modo na época e não envolvia números racionais. Um de nossos principais objetivos, aqui, é desconstruir os mitos envolvidos na chamada "crise dos incomensuráveis". Essa tese tem origem em obras já ultrapassadas que constituem um exemplo paradigmático de um modo de fazer história da matemática – hoje contestado – baseado em pressupostos modernos sobre a natureza dessa disciplina. As narrativas sobre o suposto escândalo provocado pela descoberta dos incomensuráveis citam também os paradoxos de Zenão. (ROQUE, 2012, p. 76).

Mas o que são segmentos comensuráveis e incomensuráveis? A seguir explicaremos como obtemos dois segmentos comensuráveis e dois segmentos incomensuráveis.

> Vejamos, pois, como definir a razão $\frac{A}{B}$ de duas tais grandezas A e B, na hipótese de que elas sejam comensuráveis, isto é, existe um segmento s contido um número inteiro de vezes m em A e outro número inteiro de vezes n em B. Então $A = m.s$ e $B = n.s$. Definimos então a razão de A para B que escrevemos na forma $\frac{A}{B}$ como sendo o número $\frac{m}{n}$. (ÁVILA, 1985, p. 3)

Vamos então verificar que os segmentos $\overline{AB}$ cuja medida é $12cm$ e $\overline{CD}$ cuja medida é $9cm$ são segmentos comensuráveis, dessa forma, observe a imagem abaixo:

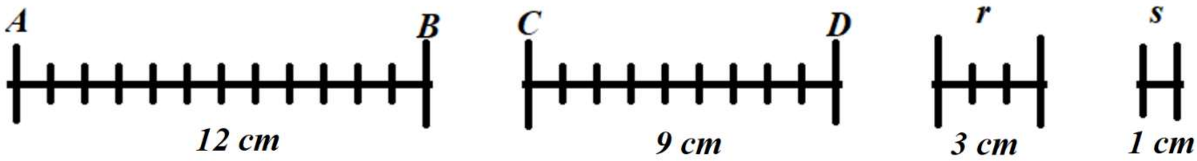


Figura 6 – Segmentos de reta comensuráveis
Fonte: O Autor

Note que temos os segmentos $r = 3cm$ e $s = 1cm$, como o segmento $\overline{AB} = 12cm$ podemos dizer verificar que cabem 4 segmentos r e 12 segmentos s em $\overline{AB}$. Analogamente, como o segmento $\overline{CD} = 9cm$ podemos dizer verificar que cabem 3 segmentos r e 9 segmentos s em $\overline{CD}$. Portanto $\overline{AB} = 4r$ e $\overline{CD} = 3r$, assim calculando $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{4r}{3r} = \frac{4}{3}$, como 4 é um número inteiro e 3 também é um número inteiro, então pela definição acima temos que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são comensuráveis.

Fazendo o mesmo procedimento para $\overline{AB} = 12s$ e $\overline{CD} = 9s$, temos que, calculando $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{12}{9s} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$, como 4 é um número inteiro e 3 também é um número inteiro, então pela definição acima temos que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são comensuráveis.

Agora vamos verificar um exemplo de dois segmentos que não são comensuráveis, observe a figura abaixo:

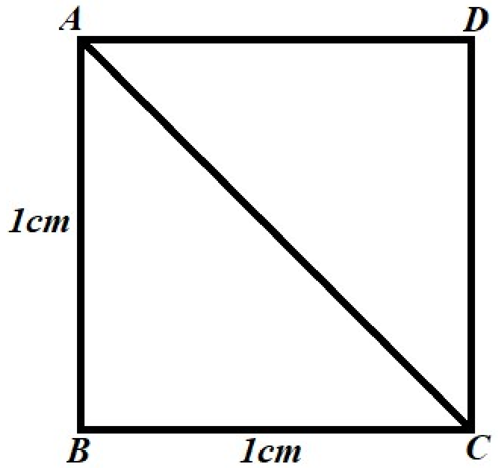


Figura 7 – Quadrado de lado 1cm
Fonte: O Autor

No quadrado *ABCD* de lado igual a 1cm, vamos calcular a diagonal desse quadrado utilizando o Teorema de Pitágoras, assim, temos:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \Rightarrow \overline{AC}^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow \overline{AC}^2 = 2 \Rightarrow \overline{AC} = \sqrt{2}$$

Vimos que $\sqrt{2}$ é um número irracional, porém, ele é a medida da diagonal $\overline{AC}$ do nosso quadrado, assim fazendo a razão $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} . \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, como $\sqrt{2}$ é irracional e 2 é racional, a razão $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ é irracional, portanto os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são segmentos incomensuráveis. Analogamente, os segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ também são segmentos incomensuráveis.

Roque (2021, p. 76) questiona a veracidade da tese sobre a crise dos incomensuráveis, no entanto, a descoberta de que existem duas grandezas que podem não possuir uma medida em comum (indo contra a ideia intuitiva de que a partir de dois segmentos, sempre conseguiríamos encontrar uma unidade de medida comum) teve diversas consequências no estudo da Matemática, uma dessas consequências ajuda a explicar o caráter formal e abstrato que temos na geometria, que veremos na próxima seção, a partir de um diálogo de Platão, o *Mênon*, tal diálogo tenta compreender como a incomensurabilidade está relacionada com a necessidade de trabalharmos com um espaço abstrato na geometria.

Segundo Boyer (1974, p. 89) um dos maiores matemáticos que temos conhecimento da Grécia antiga foi Arquimedes, com contribuições significativas em diversas áreas do conhecimento, uma delas, a Matemática.

Algumas de suas principais contribuições foram os estudos sobre a Quadratura da Parábola, uma aproximação para a área do círculo, a espiral de Arquimedes e a trisseção do ângulo. Todos esses trabalhos foram de grande contribuição na área da Matemática. Trataremos aqui sobre um deles que diz a respeito ao cálculo da área do círculo e como isso tem a ver com o famoso número π.

Proposição 1: A área de um círculo é igual à do triângulo retângulo no qual um dos lados que formam o ângulo reto é igual ao raio e o outro lado que forma o ângulo reto é a circunferência deste círculo.

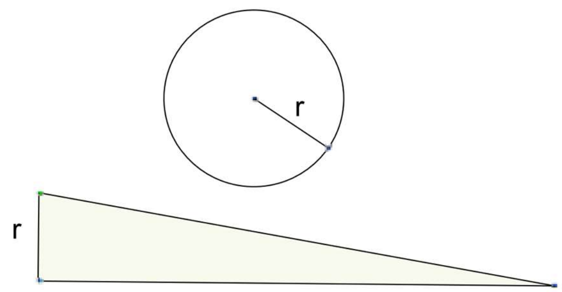


Figura 8 – Área do círculo igual a área do triângulo retângulo
Fonte: Roque e Carvalho (2012, P. 115)

Demonstração:

Queremos aproximar a área do círculo por meio das áreas dos polígonos inscritos e circunscritos que terão os lados duplicados sucessivamente. Assim, seja *C* a área do círculo e *T* a área do triângulo. "Arquimedes inscreve no círculo um quadrado, um octógono regular, e assim por diante, passando sucessivamente do polígono regular inscrito de 2^n lados para o de 2^{n+1} lados" (ROQUE; CARVALHO, 2012, p. 115-116), analogamente, Arquimedes faz o mesmo processo anterior, mas desta vez com os polígonos circunscritos ao círculo. Observe que na figura abaixo temos o quadrado *ABCD* inscrito, os lados *AL* e *LB* do octógono inscrito, temos também o quadrado *EFGH* circunscrito e o lado *KM* do octógono circunscrito.

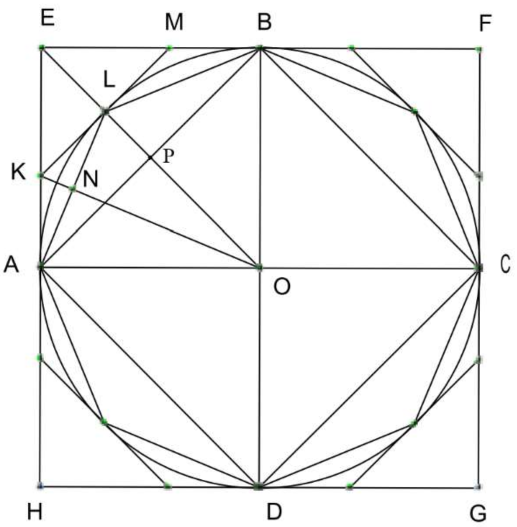


Figura 9 – Círculo inscrito e circunscrito
Fonte Roque e Carvalho (2012, P. 116)

Vamos agora indicar por I_n os polígonos de 2^n lados inscritos na circunferência e indicaremos por C_n os polígonos de 2^n lados circunscritos na circunferência para $n \geq 2$. Queremos mostrar (pela tricotomia) que não é possível termos $C < T$ e nem $C > T$, ou seja, teremos $C = T$.

1° caso: Vamos supor que $C > T$ ou seja, $C - T > 0$, assim podemos ter um valor d de tal forma que $d = C - T > 0$, observe que a área do polígono inscrito na circunferência é dada pelo produto entre o seu apótema e seu semi-perímetro.

Observe que a área do quadrado *ABCD* é dada por: $A_{ABCD} = 4.A_{ABO} = 4.\frac{OP.L}{2} = 2.OP.L$, ou seja a área do quadrado é dado pelo produto entre o apótema *OP* do quadrado multiplicado pelo semiperímetro *2.L* do quadrado. Note ainda que o mesmo ocorre com o octógono inscrito na circunferência.

Dessa forma, seja x o apótema, L o lado e $\frac{L.n}{2}$ o semi-perímetro de I_n, temos que a área de I_n é dada por: $A_{I_n} = x.\frac{L.n}{2}$, que é a mesma área de um triângulo retângulo de catetos *x* (apótema de I_n) e *L.n* (perímetro de I_n).

Logo, sabendo que os apótemas sempre são menores que o raio do círculo e os perímetros de quaisquer polígonos inscritos na circunferência são menores do que a circunferência do círculo *C*, ou seja, também são menores que os lados correspondentes no nosso triângulo de área igual a T, então podemos concluir que $A_{I_n} < T$ para todo *n*, assim sendo, $A_{I_n} < T < C$.

Sabendo também que $A_{I_n} < C$, ou seja, $C - A_{I_n} > 0$, podemos ter um valor k_n de tal forma que $k_n = C - A_{I_n}$. Assim, quando aumentamos o número de lados do polígono, esta quantidade k_n se torna tão pequena quanto se queira, dessa maneira, quando tivermos um número *n* suficientemente grande teremos $k_n < d$, logo $C - A_{I_n} < C - T$ ou seja, $A_{I_n} > T$, o que claramente é um absurdo, logo não podemos ter $C > T$.

Analogamente, tomando $C < T$ teremos novamente uma contradição. Dessa maneira, pela tricotomia, se não é possível que $C > T$ e nem que $C < T$, só podemos ter $C = T$. O que finaliza nossa demonstração.

> Mas, como calcular π?
> Para fazer isso, Arquimedes, inicialmente, inscreveu e circunscreveu hexágonos regulares em uma circunferência de círculo de raio *1*. Em seguida, ele duplicou sucessivamente seus números de lados. Assim, ele inscreveu os polígonos regulares com 3.2^{n-1} lados, cujos semi-perímetros são b_n e circunscreveu polígonos regulares com 3.2^{n-1}, cujos perímetros são a_n. As sequências b_n e a_n são respectivamente decrescentes e crescentes e temos que:$b_n < 2\pi < a_n$. (ROQUE; CARVALHO, 2012, P. 117)

3.4 Os Números Reais na Antiguidade e Idade Média

De acordo com Roque (2012, p. 180), na época do império romano, os pensadores tinham como umas das principais atividades a de abordar temas clássicos do período helenista, assim a Matemática acabou por ser absorvida pelas escolas filosóficas que usavam esses clássicos como estudo, interpretação e crítica aos mais diversos conceitos matemáticos.

> À luz dos recentes questionamentos historiográficos, não podemos deixar de achar estranho o gigantesco salto, recorrente nos livros de história da

> matemática, registrado entre o século III a.E.C., quando viveu Euclides, e o século XV, quando a matemática voltou a se desenvolver na Europa. (ROQUE, 2012, p. 174)

No entanto, existem alguns mitos que foram desenvolvidos em torno desse período, dessa maneira, vamos trazer alguns aspectos que contribuem para o estudo e desenvolvimento dos números reais nessa época.

Contemporaneamente, o estudo das equações de primeiro, segundo, terceiro graus ou acima estão intimamente ligados com soluções que pertencem ao conjunto dos números reais, dessa maneira, é importante entendermos como surgiram tais termos, mesmo que os matemáticos que tratavam de tais temas da Matemática não se utilizavam de soluções reais, limitando-se muitas vezes a soluções naturais ou até mesmo inteiras.

Um dos mais importantes matemáticos indianos foi Bháskara que viveu no século XII, no Brasil, seu nome é dado a importante fórmula de resolução de equações do segundo grau. Segundo Boyer (1974, p. 162) Bháskara foi o último matemático importante medieval da Índia, em sua obra, além das contribuições no ramo das equações lineares e quadráticas, tratou também de vários outros problemas.

> A área do círculo é corretamente dada como igual a um quarto da circunferência vezes o diâmetro e o volume da esfera como um sexto do produto da área da superfície pelo diâmetro, mas para a razão da circunferência para o diâmetro de um círculo Bháskara sugere ou 3927 para 1250 ou o valor "bruto" 22/7. (BOYER, 1974, p. 162)

Dessa forma, Bháskara também tratou de uma boa aproximação para o valor que hoje conhecemos como o π. Trataremos agora de uma de suas mais importantes contribuições, o procedimento para resolvermos equações quadráticas que sabemos hoje ser um importante método para encontrarmos soluções não somente de números inteiros, mas também como soluções com números reais e até mesmo com números complexos.

> Apesar de possuírem regras para resolver problemas que seriam hoje traduzidos por equações do segundo grau e usarem alguns símbolos para representar as quantidades desconhecidas e as operações, não se pode dizer que os indianos possuíssem uma fórmula de resolução de equações de segundo grau. (ROQUE, 2012, p. 177)

É válido lembrar que segundo Roque e Carvalho (2012, p. 153) na época de Bháskara, o que chamamos hoje de "equação" eram escritos usando palavras e de modo poético, diferente de hoje em que utilizamos a linguagem matemática para escrever uma equação do segundo grau. Vejamos a seguir um exemplo de um verso que era utilizado para se resolver uma equação do segundo grau.

> De um enxame de abelhas, tome a metade, depois a raiz. Este grupo extrai o pólen de um campo de jasmins. Oito nonos do todo flutuam pelo céu. Uma abelha solitária escuta seu macho zumbir sobre uma flor de lótus. Atraído pela fragrância, ele tinha se deixado aprisionar na noite anterior. Quantas abelhas havia no enxame? (ROQUE; CARVALHO, 2012, p. 153)

O procedimento usado por Bháskara para encontrar a solução de equações quadráticas era escrito também por meio das seguintes especificações: "E por unidades iguais a quatro vezes o número de quadrados que é preciso multiplicar os dois membros; e é a quantidade igual ao quadrado do número primitivo de quantidades desconhecidas simples que é preciso adicionar." (ROQUE; CARVALHO, 2012, p. 153)

Dessa forma, temos que Bháskara utilizava um método para eliminar o termo médio, parecido com o método de completar quadrados de hoje, resumindo ao seguinte procedimento utilizando a álgebra atual:

Para resolvermos uma equação expressa por $ax^2 + bx = c$, multiplicamos ambos os membros por $4a$, obtendo por $4a^2x^2 + 4abx = 4ac$, adicionamos b² a ambos os membros, obtendo: $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = 4ac + b^2$, assim tomando a raiz quadrada de ambos os membros temos: $2ax + b = \sqrt{4ac + b^2}$, ou seja: $x = \frac{\sqrt{4ac+b^2}-b}{2a}$. Isso é o que Bháskara faz mas somente com palavras, sem a parte algébrica que usamos hoje.

Voltando ao problema das abelhas, chamaremos o enxame de abelhas de $2x^2$ (pois sabemos que vamos ter que dividir pela metade e tomar sua raiz quadrada), agora vamos tomar a metade e depois a raiz, obtendo x, depois temos que $\frac{8}{9}$ do todo flutuam no céu, ou seja $\frac{8}{9}.2x^2$ e por fim uma abelha solitária escuta seu macho zumbir sobre uma flor de lótus, ou seja 2 abelhas, dessa forma obtemos a equação:

$$x + \frac{8}{9}.2x^2 + 2 = 2x^2$$

A partir daí Bháskara obtém a equação $2x^2 - 9x = 18$, assim podemos aplicar o método de resolução: "E por unidades iguais a quatro vezes o número de quadrados que é preciso multiplicar os dois membros", dessa forma, temos $2x^2$, ou seja, temos dois quadrados que vamos multiplicar por 4 obtendo o número 8 que será o número que devemos multiplicar ambos os membros da equação, obtendo: $16x^2 - 72x = 144$, em seguida: "é a quantidade igual ao quadrado do número primitivo de quantidades desconhecidas simples que é preciso adicionar.", dessa forma, temos $9x$, ou seja, devemos adicionar $9^2 = 81$ a ambos os membros, obtendo: $16x^2 - 72x + 81 = 225$, no qual os dois membros são quadrados, obtendo assim: $4x - 9 = 15 \Rightarrow x = 6$, e portanto a quantidade do enxame de abelhas é de $2x^2 = 72$ abelhas.

Em Roque e Carvalho (2021, p. 156) temos que um dos matemáticos árabes mais conhecidos foi Al-Khwarizmi, seu nome deu origem a duas palavras que muito usamos na Matemática, algoritmo e algarismo. Os árabes, ao se apropriarem do avançado conhecimento grego sobre a Matemática foram capazes também de expandi-lo, a álgebra árabe ultrapassou a divisão de número e grandeza constituinte da Matemática euclidiana e permitiu que resultados do domínio de um objeto pudessem ser aplicados no outro. Assim como Bháskara, Al-Khwarizmi também utilizava de uma matemática escrita a partir de palavras e frases, vejamos abaixo uma tabela com as palavras utilizadas por Al-Khwarizmi juntamente com o seu sentido nos problemas e a notação que usamos hoje em dia.

Tabela 3 – Notação usada por Al-Khwarizmi 1

Palavra	Significado na língua corrente	Sentido nos problemas	Notação moderna
Adad	Número ou quantidade de dinheiro	Quantidade conhecida (número dado)	c
Jidhr	Raiz	Quantidade desconhecida	x
Mal	Possessão ou tesouro	Quadrado da quantidade desconhecida	x^2

Fonte Roque (2012, P. 197)

Para solucionar equações, Al-Khwarizmi enumerou seis problemas envolvendo equações que eram expressos por meio de palavras e justificados geometricamente e cada um deles seria solucionado de uma maneira própria, sendo eles:

1. Quadrados iguais a raízes ($ax^2 = bx$)
2. Quadrados iguais a um número ($ax^2 = c$)
3. Raízes iguais a um número ($bx = c$)
4. Quadrados e raízes iguais a um número ($ax^2 + bx = c$)
5. Quadrados e um número iguais a raízes ($ax^2 + c = bx$)
6. Raízes e um número iguais a quadrados ($bx + c = ax^2$)

Vejamos na tabela abaixo como Al-Khwarizmi encontrava uma das raízes (a raiz positiva) de uma equação quadrática a partir do exemplo: “um *mal* e dez *jidhr* igualam trinta e nove denares”, que seria escrito hoje como $x^2 + 10x = 39$.

Tabela 4 – Notação usada por Al-Khwarizmi 2

Solução dada por al-Khwarizmi	Operações correspondentes em linguagem moderna	Operações correspondentes em linguagem moderna, para uma equação genérica do tipo $ax^2 + bx + c = 0$
Tome a metade da quantidade de *jidhr*.	$\frac{10}{2} = 5$	$\frac{b}{2}$
Multiplique esta quantidade por si mesma.	$5^2 = 25$	$\left(\frac{b}{2}\right)^2$
Some no resultado os *adad*.	$25 + 39 = 64$	$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$
Extraia a raiz quadrada do resultado.	$\sqrt{64} = 8$	$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$
Subtraia deste resultado a metade dos *jidhr*, encontrando a solução.	$8 - 5 = 3$	$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$

Fonte Roque e Carvalho (2012, P. 158)

> Em seguida, ele afirma: "A figura para explicar isto é um quadrado cujos lados são desconhecidos". Deve-se construir um quadrado de diagonal AB que representa o Mal, ou o quadrado da raiz procurada, e dois retângulos iguais G e D cujos lados são a raiz e 5, metade de 10. A figura obtida é um gnomon de área 39. Usando a proposição II.4 dos Elementos de Euclides e completando esta figura com um quadrado de lado 5 (área 25), obtemos um quadrado de área 64 = (39 + 25). O lado AH deste quadrado mede 8. Daí obtém-se que a raiz procurada é 3 = (8 − 5). (ROQUE; CARVALHO, 2012, p. 158)

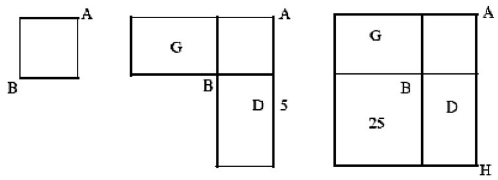


Figura 10 – Representação geométrica usada por Al-Khwarizmi
Fonte Roque e Carvalho (2012, P. 158)

Os métodos descritos por Bháskara e Al-Khwarizmi não empregam em momento algum uma fórmula, apesar que ao seguir os passos descritos, podemos traduzir esse passo a passo de uma maneira que poderia ser contemplada por uma fórmula.

> Vimos que Bháskara considerava equações do segundo grau, expressas em palavras, com algumas abreviações e alguns símbolos para incógnitas e operações. Al-Khwarizmi forneceu algoritmos de resolução justificados por procedimentos geométricos, alguns dos quais

> já utilizados por egípcios e babilônios. Ou seja, não sabemos exatamente quem inventou o método, mas fórmula geral que utilizamos hoje para resolver uma equação do segundo grau genérica não pode ter sido formulada por Bháskara, nem pelos árabes, uma vez que eles não dispunham de um simbolismo para os coeficientes. (ROQUE; CARVALHO, 2012, p. 160)

Em Roque (2012, p. 202-205) temos que no século XI o matemático e poeta árabe Omar Khayam em seu livro intitulado *Demonstrações de problemas de al-jabr de al-muqabala*, trouxe as soluções geométricas para diversas equações do terceiro grau, “A linguagem usada por Al-Khayam pode ser vista como uma linguagem comum à aritmética e à geometria, pois designava um procedimento padrão para tratar um problema de qualquer espécie.” (ROQUE, 2012, p. 204), no entanto seus enunciados possuíam dupla interpretação, aritmética ou geométrica. De maneira geral, Al-Khayam conseguia resolver os problemas, mas não conseguia uma solução geral para problemas interpretados pela aritmética, principalmente porque não resolvia de forma numérica as equações polinomiais de terceiro grau.

> **[...]** podemos encontrar, na primeira metade do século XIV, abreviações como “R” para “raiz” (radice, em italiano); “p” para “mais” (più); “m” para “menos” (meno); “c” para a “coisa” (cosa), que era a incógnita; e “ç” para o “quadrado da coisa” (censo); a quarta potência também era representada como “ç de ç”, o “quadrado do quadrado” (censo de censo). (ROQUE, 2012, p. 209)

Vejamos tais abreviações em um exemplo que encontramos em um livro de Dardi de Pisa de 1344 onde o autor da obra usa “R” cortado para “raiz” e o “m” com um til em cima para “menos”.

$$(3-\sqrt{5})\ \mathrm{x}\ (3-\sqrt{5}):$$

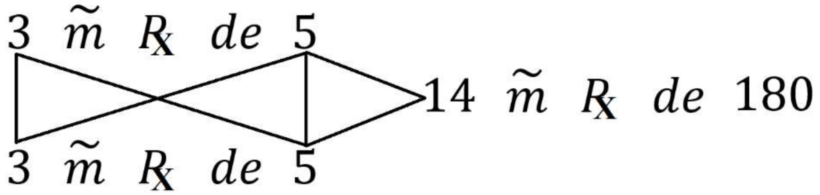


Figura 11 – Representação abreviada da multiplicação de um número real
Fonte Roque (2012, p. 209)

Saindo um pouco do universo das equações quadráticas, em Roque (2012, p. 211-212) também tivemos certos métodos desenvolvidos para a resolução de equações cúbicas, cuja origem remonta ao século XIV, dessa maneira, Scipione del Ferro (matemático italiano) foi capaz de obter uma fórmula usando radicais que solucionavam certas equações, o que era diferente dos trabalhos árabes até então. Em meados de 1535 o matemático italiano (Niccolò

Fontana) Tartaglia conseguiu solucionar várias equações que hoje escreveríamos como $x^3 + mx^2 = n$, fórmulas que eram mantidas em segredo. Assim, o terceiro matemático italiano, Girolano Cardano que supostamente obteve a fórmula de Tartaglia e publicou ela em 1545 no livro intitulado Ars Magna (A grande arte) em que ele trata da solução de treze problemas envolvendo equações cúbicas. Vejamos abaixo a solução da equação $x^3 + 6x = 20$ utilizando método de Cardano, "Procuraremos manter-nos fiéis ao raciocínio de Cardano, ainda que, algumas vezes, para facilitar o entendimento, tenhamos de comentar sua solução, traduzindo alguns trechos para a notação atual" (ROQUE, 2012, p. 212).

Segundo Roque (2012, p.212), inicialmente, tomando um cubo de lado GH de forma que esse cubo de GH mais seis vezes o lado GH seja igual a 20. Sejam ainda dois cubos de diagonais AE e CL, cuja diferença desses cubos seja igual a vinte. Assim, Cardano mostra uma representação plana desses cubos e uma representação espacial, conforme podemos ver na figura abaixo.

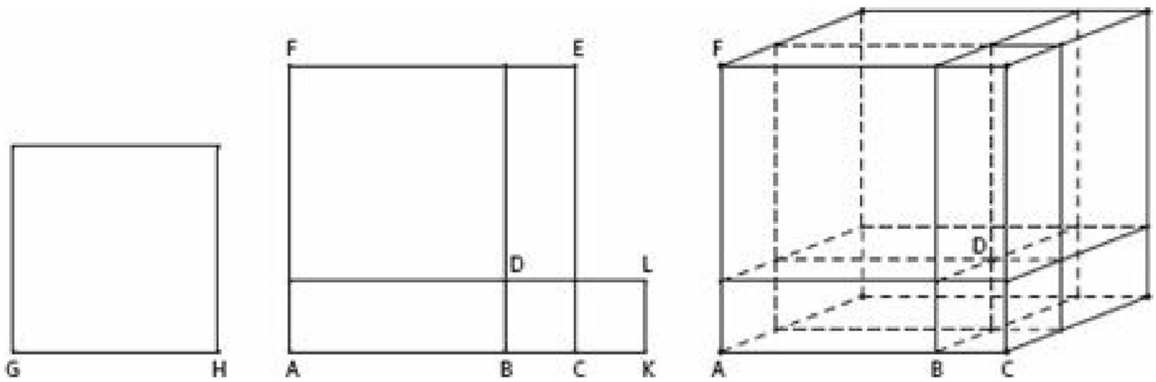


Figura 12 – Representação Geométrica de uma equação cúbica
Fonte Roque (2012, p. 212)

Assim, tomando $BC = CK$ e obtendo $AB = GH$ então o valor de AB é o nosso valor a ser encontrado. O método empregado por Cardano consistia em achar um cubo de lado AB para satisfazer a mesma condição que o cubo de lado GH, portanto, queremos ter $AB^3 + 6AB = 20$ e supondo $AC^3 - CK^3 = 20$. Para facilitar, faremos $AC = u$ e $BC = CK = v$, logo $AB = u - v$. Observe que $AB^3 + 6AB = AC^3 - CK^3 = 20$, assim:

$(u - v)^3 + 6(u - v) = u^3 - v^3 \Rightarrow u.v = 2$, ou seja $AC.CK = 2$

Cardano usa duas propriedades do cubo que foram demonstradas em seu livro: "A primeira delas diz o seguinte: se uma quantidade é dividida em duas partes ($AB = u - v$ e $BC = v$), o cubo do todo é igual aos cubos das duas partes mais três vezes os produtos de cada uma das partes pelo quadrado da outra.” (ROQUE, 2012, p. 213), regra conhecida hoje como o cubo da soma, ou seja: $(u-v+v)^3 = (u-v)^3 + (u-v)^2.v + 3(u-v).v^2 + v^3$ que pode ser obtida geometricamente a partir da figura abaixo.

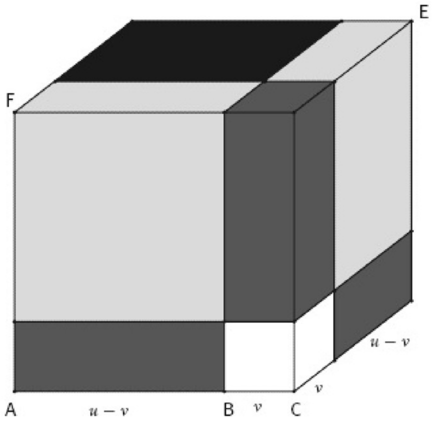


Figura 13 – Representação Geométrica do cubo da soma
Fonte Roque (2012, p. 213)

> Cardano deduz daí a seguinte regra de resolução: eleve 2 ao cubo, que é a terça parte de 6, o que dá 8; multiplique 10, metade do termo numérico, por ele mesmo, resultando 100; some 100 e 8, fazendo 108. Extraia a raiz quadrada, que é $\sqrt{108}$, e a utilize em um primeiro momento somando 10, e em um segundo momento subtraindo a mesma quantidade, e teremos $\sqrt{108}+10$ e $\sqrt{108}-10$. Extraia a raiz cúbica desses valores, subtraia uma da outra, e teremos o valor da coisa: $\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}-\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}$.[...]o desenvolvimento e a regra de Cardano para a resolução de uma equação cúbica do tipo $x^3 + mx = n$. Escrevemos os coeficientes m e n da equação em termos de valores a e b, observando uma identidade do tipo $(a - b)^3 + 3ab(a - b) = a^3 - b^3$. Tomando $m = 3ab$ e $n = a^3 - b^3$ na equação, obtemos $x = a - b$. Dessa forma, é possível obter x a partir dos valores de a e b, porém, para isso devemos resolver as equações de a e b em termos de m e n. Fazendo $a = m/3b$ $e\, n = a^3 - b^3$ chegaremos à $equação$ $27b^6 + 27nb^3 = m^3$, que pode ser resolvida para b por meio de uma equação quadrática. Resolvendo o sistema para a e b, obtemos: (ROQUE, 2012, p. 214)

$a^3 = \frac{n}{2} + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}$ e $b^3 = -\frac{n}{2} + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}$

Dessa forma, Cardano obtém $x = a - b$, ou seja:

$$x = \sqrt[3]{\frac{n}{2} + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\frac{n}{2} + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}}$$

Notemos que conseguimos encontrar apenas uma das soluções possíveis por esse método, nesse sentido, outras estratégias deveriam ser desenvolvidas para a obtenção de todos os resultados possíveis em uma equação do 3° grau. Lembrando que esse simbolismo algébrico não era utilizado naquela época, segundo Roque (2012, p. 214), apesar de reconhecer Tartaglia como o primeiro a ter proposto um método de resolução para as equações de 3° grau, Cardano se orgulhava de seu trabalho por ter seguido o caminho geométrico e acredita que sua estratégia foi superior à de Tartaglia.

Observe a equação $x^3 = 15x + 4$, ao aplicarmos a fórmula anterior a essa equação teremos que: $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} - \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$, logo, essa equação não pode ser resolvida em $x \in \mathbb{R}$, no entanto, a equação possui $x = 4$ como solução.

> Para resolver esse tipo de equação pelo método disponível e obter raízes válidas, era preciso manipular expressões contendo raízes de números negativos, que não eram considerados números. Quantidades negativas já tinham aparecido em problemas mais simples, envolvendo equações do segundo grau. Nesse caso, no entanto, quando a quantidade negativa aparecia no resultado, era fácil driblar a dificuldade – bastava dizer que a equação não tinha solução. A aplicação da fórmula para resolver equações do terceiro grau faz com que não seja possível desviar da questão com facilidade. (ROQUE, 2012, p. 215)

Em Roque (2021, p. 215), temos outra contribuição importante que Cardano nos deixou, que foi o método de redução de equações cúbicas por meio de uma substituição, por exemplo, uma equação $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ pode ser reduzida ao fazermos a substituição $x = y - \frac{a}{3}$, que nos dará uma nova equação cúbica na forma $x^3 + px + q = 0$, que é a forma reduzida da equação cúbica. Desse modo, Cardano conseguia reduzir uma equação qualquer para uma outra na qual ele conseguiria resolver.

Entretanto, não podemos afirmar que Bháskara, Al-Khwarizmi, Tartaglia e nem mesmo Cardano foram os inventores das fórmulas de resolução de equações do 2° ou 3° graus, um outro matemático francês, "François Viète, que viveu entre os anos 1540 e 1603, introduziu uma representação padrão: as incógnitas serão representadas pelas vogais e os coeficientes pelas consoantes do alfabeto, todas maiúsculas" (ROQUE, 2012, p. 216).

> Por exemplo, na equação $ax^2 + bx + c = 0$ a escolha dos valores $a = 1, b = 3$ e $c = 100$ determina um "caso": $x^2 + 3x + 100 = 0$. A notação introduzida por Viète deveria ter representado, portanto, uma generalização dos métodos algébricos. Podendo trabalhar no universo das equações, usando coeficientes, seria possível classificar as equações e encarar os exemplos particulares como "casos". Enunciando uma fórmula geral, a resolução dos casos particulares se reduziria a uma aplicação mecânica do procedimento. Mais uma vez, contudo, atestamos que a história da matemática não é linear e não foi bem assim que aconteceu. (ROQUE, 2012, p. 217)

Em seu livro chamado *Effectionum geometricarum canonica recensio*, Viète mostra como encontrar raízes de uma equação quadrática utilizando somente régua e compasso, dada uma equação $A^2 + AB = D^2$, que hoje escreveríamos como $x^2 + px = q^2$, observe na figura abaixo.

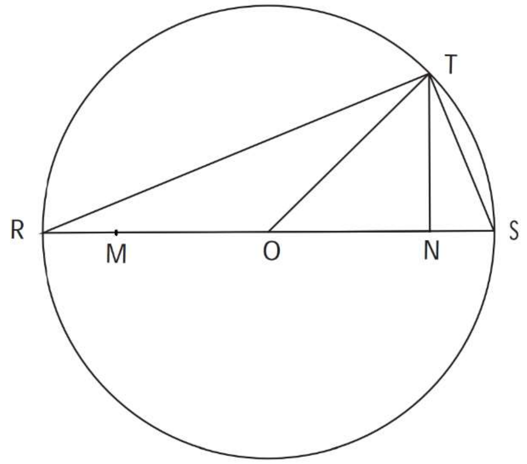


Figura 14 – Solução da equação $A^2 + AB = D^2$
Fonte: Roque e Carvalho (2012, p. 179)

O procedimento para a construção geométrica dessa solução era dado pelo seguinte passo a passo.

> Construa $MN = p$ e seja $TN = q$ perpendicular a MN. Seja O o ponto médio de MN com centro em O, trace a circunferência de raio OT. Sejam R e S os pontos em que esta circunferência corta o prolongamento de MN. Então, o triângulo retângulo RST fornece imediatamente que $TN^2 = RN \times NS$, ou seja, $q^2 = (x + p)x = x^2 + px$. (ROQUE; CARVALHO, 2012, p. 179)

Por mais que Viète tenha escrito equações por meio de letras do alfabeto e solucionado equações quadráticas utilizando somente compasso e régua, devemos notar que:

> [...] A classificação de equações e o enunciado de fórmulas gerais não era uma questão na época, pois a álgebra não se constituía como uma disciplina e os métodos algébricos eram usados para resolver uma grande variedade de problemas. Sendo assim, nem mesmo Viète pode ser visto como o inventor da fórmula de resolução de equações. (ROQUE, 2012, p. 217)
> [...] Viète simbolizava as potências usando uma mesma letra: se A é a incógnita, seu quadrado é dito A quadratum; o cubo, A cubum; e assim por diante. Se chamarmos x de A, a equação $x^2 + b = cx$ (significando área + área = área) seria escrita, na notação de Viète, como A quadratum + B aequatur C in A (aequatur quer dizer “igual”). Na verdade, essa equação era escrita adicionando-se a palavra plano depois de B, uma vez que todas as parcelas devem possuir as mesmas dimensões, o que daria: A quadratum + B plano aequatur C in A (observando que C in A já era plano, uma vez que resulta da multiplicação de dois segmentos). De modo análogo, um número a ser igualado a um cubo era dito sólido. (ROQUE, 2012, p. 239)

3.5 Os Números Reais na Era Moderna

3.5.1 Do século XV ao século XVII

O Conceito de número passou por algumas etapas decisivas conforme os estudos matemáticos iam se consolidando, “Um dos problemas internos a demandar uma nova noção de rigor surgiu da crítica à concepção dos números como quantidades. Essa associação, a partir de certo momento, passou a bloquear o desenvolvimento da matemática.” (ROQUE, 2012, p. 327). Dessa forma, temos que a resolução de equações fez aparecer diversos números indesejáveis que não tinham um status definido dentro da Matemática.

> Ainda que, desde o século XVII, as entidades algébricas tenham adquirido um lugar de destaque na matemática, até o final do século XVIII as raízes negativas e imaginárias de equações eram consideradas quantidades irreais. Os números que hoje chamamos de “irracionais” apareciam na resolução de problemas, mas também não tinham um estatuto definido. Todos os nomes utilizados para designar esses números exprimem a dificuldade de admitir sua existência ou, melhor dizendo, sua cidadania matemática: números “surdos” ou “inexprimíveis”, para os irracionais; quantidades “falsas”, “fictícias”, “impossíveis” ou “imaginárias”, para os números negativos e complexos. Isso mostra que eles, além de não possuírem uma cidadania, não eram, em última instância, sequer admitidos como números. (ROQUE, 2012, p. 328)

Roque (2012, p. 336-337) destaca que no trabalho Elementos de Euclides temos diversas construções que são dadas por segmentos de reta, que nos dias de hoje seriam classificados como racionais, quando comensuráveis com a unidade, ou irracionais, que são ditas como “alogos” que pode ser traduzido como “sem razão”. Aqueles que seguiam os ensinamentos de Al-Khwarizmi já resolviam e admitiam casos em que apareciam raízes irracionais, tais soluções foram chamadas de “jidr assam” que pode ser traduzida como “mudas” ou “números surdos”, e assim os números irracionais ficaram conhecidos.

> [...] enquanto os comprimentos e as áreas só podiam ser operados com objetos da mesma natureza, essas grandezas não eram identificadas a números [...] não havia necessidade de se considerar explicitamente a natureza dos números reais. Descartes se baseava em uma teoria das proporções exatas que permitia representar as curvas por equações, sem se preocupar se essas proporções podiam ser expressas por números. O problema da natureza dos números, antes da segunda metade do século XVII, se apresentava sobretudo no contexto das operações aritméticas e da resolução de equações. (ROQUE, 2012, p. 337)

Nos séculos XV e XVI diversos problemas que hoje seriam facilmente solucionados com o uso dos números irracionais intrigavam os matemáticos da época, Rafael Bombelli, matemático italiano do século XVI foi autor de uma proposta para aproximarmos os números irracionais, conforme veremos a seguir:

Para encontrarmos a solução da equação $x^2 = 2$ que sabemos ter como solução os números $\sqrt{2} \cong 1,41421356...$ e $-\sqrt{2} \cong -1,41421356...$, Bombelli sabia que o valor era algum número entre 1 e 2. Assim simbolizando a raiz por x (Bombelli não fazia isso na época), vejamos como o matemático procedia utilizando nossa nomenclatura atual.

$$x^2 = 2 \Rightarrow x^2 - 1 = 1 \Rightarrow (x-1)(x+1) = 1 \Rightarrow \frac{1}{x-1} = x + 1 \Rightarrow \frac{1}{x-1} = 2 + (x-1)$$

A partir daí, invertendo a equação, temos:

$$x - 1 = \frac{1}{2 + (x-1)}$$

E substituindo o denominador $x - 1$ novamente no denominador teremos:

$$x - 1 = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + (x-1)}} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + (x-1)}}}$$

Conhecemos esse método hoje como sendo uma “fração contínua”, e a partir dele podemos conseguir diversos números irracionais não transcendentes. Desse modo, a aproximação para a $\sqrt{2}$ fica sendo como:

$$\sqrt{2} - 1 = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + (x-1)}} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}} \Rightarrow \sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + (x-1)}} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}$$

> Durante o século XVI, os números surdos apareciam frequentemente como raízes de equações e eram, muitas vezes, aproximados por somas infinitas. No entanto, o estatuto desses números ainda não estava bem definido, ou seja, não se sabia se eles deviam ser realmente considerados números. (ROQUE, 2012, p. 338)

Ainda segundo Roque (2012, p. 346), durante o século XVII vários trabalhos sobre os números irracionais eram obtidos por meio de curvas geradas de uma sucessão infinita de operações algébricas, no entanto, Barrow e Pascal diziam que os números irracionais assim como $\sqrt{3}$ deveria ser entendido como uma grandeza geométrica. Com o advento do Cálculo diferencial que fora estudado por Newton e Leibniz, os números irracionais tornaram-se cada vez mais presentes na Matemática.

> Nesse período, o cálculo de áreas já estava distante da tradição euclidiana e buscava associar a área a um número. O método utilizado era baseado, primordialmente, na manipulação de séries infinitas, como já era o caso da técnica usada por Pascal e Fermat descrita no Capítulo 6. A solução de

> problemas envolvendo quadraturas e equações diferenciais fez proliferar o uso dessas séries. A questão de determinar a área do círculo, por exemplo, que Leibniz desejava exprimir por um número, efetuava a junção entre o contexto de curvas e o universo dos números, introduzindo π. (ROQUE, 2012, p. 346)

O Cálculo diferencial é uma ferramenta de grande importância no estudo da Matemática avançada, pois permitiu inúmeros avanços sobre o conhecimento de infinitos, limites, derivadas e integrais. No entanto, suas estruturas fogem do escopo deste trabalho, assim, focaremos agora na formalização dos conceitos dos números reais.

3.5.2 A formalização do conceito de número real, séculos XVIII e XIX.

Em Roque (2012, p. 367 - 369) mais ou menos na metade do século XIX, os números reais já eram amplamente utilizados, no entanto, surge o questionamento sobre o que realmente é um número real e sobre como os números racionais e irracionais se distribuem na reta. Antes disso, os matemáticos supunham que a reta contivesse todos os números reais, gerando assim a preocupação em definir esse tipo de número. Dedekind vinha fazendo reflexões e estudando afundo sobre os números reais, a fim de caracterizar a continuidade ele seguia investigando suas origens aritméticas, o que o levou a proposição chamada de "Cortes de Dedekind".

> Ele começou por estudar as relações de ordem no conjunto dos números racionais, explicitando verdades tidas como óbvias, por exemplo: se $a > b$ e $b > c$ então $a > c$. A partir daí, deduziu propriedades menos evidentes, como a de que há infinitos números racionais entre dois racionais distintos a e c. Dedekind notou que um racional a qualquer divide os números racionais em duas classes, A_1e A_2, a primeira contendo os números menores que a; a segunda contendo os números maiores que a. Podemos concluir, assim, que qualquer número em A_1 é menor do que um número em A_2. (ROQUE, 2012, p. 369)

Assim, a partir de Roque (2012, p. 370) temos que Dedekind ao comparar os números racionais aos pontos da reta, observou que existiam mais pontos na reta do que números racionais, desse modo, ele achou necessário a "criação" de novos números para que o domínio descontínuo dos números racionais formasse um domínio contínuo, como é no caso da reta. Assim, a palavra que distingue o conjunto dos números reais do conjunto dos números racionais é "completude", ou seja, o conjunto dos números racionais não completavam a reta, nesse sentido, ele deveria encontrar os valores que a completassem. Até então a completude dos reais era uma pressuposição implícita dos matemáticos, pois a continuidade era apenas um dado e não um problema no desenvolvimento da Matemática da época, Dedekind foi elaborar o rigor da definição dos números reais apenas no século XIX.

> A construção dos reais será feita a partir dos racionais, considerados dados. Para definir esses novos números, Dedekind propôs transferir para o domínio

> dos números a propriedade que traduz, segundo ele, a essência da continuidade da reta. Retomando as duas classes A_1 e A_2 definidas anteriormente, ele afirma que a essência da continuidade está no fato de que todos os pontos da reta estão em uma das duas classes, de modo que se todo ponto da primeira classe está à esquerda de todo ponto da segunda classe, então existe apenas um ponto que produz essa divisão. Como os racionais podem ser representados na reta numérica, o ponto que divide os racionais em duas classes, A_1 e A_2, será dito um “corte” dos racionais. Todo número racional a determina um corte desse tipo, tal que a é o maior número em A_1, ou o menor em A_2. Mas não há somente cortes racionais. (ROQUE, 2012, p. 370 - 371)

Vamos então abordar dois exemplos de cortes que poderíamos ter, os chamados cortes racionais e os cortes irracionais:

Exemplo 1 (Corte Racional): Vamos definir o Conjunto A_2 como o conjunto que contém todos os racionais menores do que 1, assim: $A_2 = \{q \in \mathbb{Q} \mid q^2 < 1\}$. E A_1 como o conjunto contendo os outros números racionais, ou seja: $A_1 = \mathbb{Q} - A_2$. Dessa forma, o valor que nos dará o corte racional é o número 1.

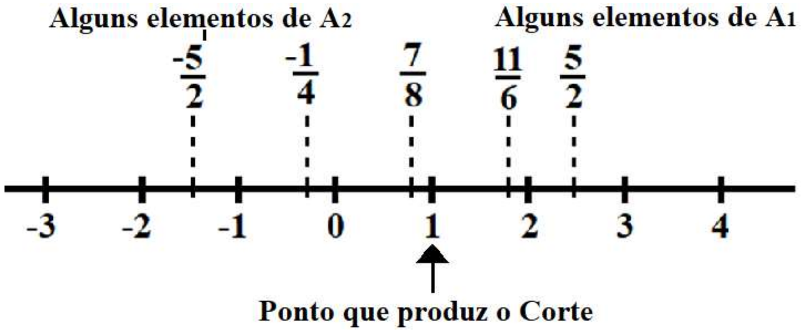


Figura 15 – Exemplo de Corte Racional
Fonte O Autor

Exemplo 2 (Corte Irracional): Vamos definir o Conjunto A_2 como o conjunto que contém todos os números racionais positivos cujo quadrado é maior do que 2, assim: $A_2 = \{q \in \mathbb{Q} \mid q^2 > 2\} \cup \{q \in \mathbb{Q} \mid q > 0\}$. E A_1 como o conjunto contendo os outros números racionais, ou seja: $A_1 = \mathbb{Q} - A_2$.

Dessa forma, o valor que nos dará o corte não é um número racional pois deve ser um número cujo quadrado seja 2, ou seja: $\sqrt{2}$, logo, dessa forma a partir dessa propriedade podemos notar a incompletude dos números racionais em relação a reta numérica, ou seja, o conjunto dos números racionais não é contínuo, possuindo assim “lacunas” em relação à reta numérica.

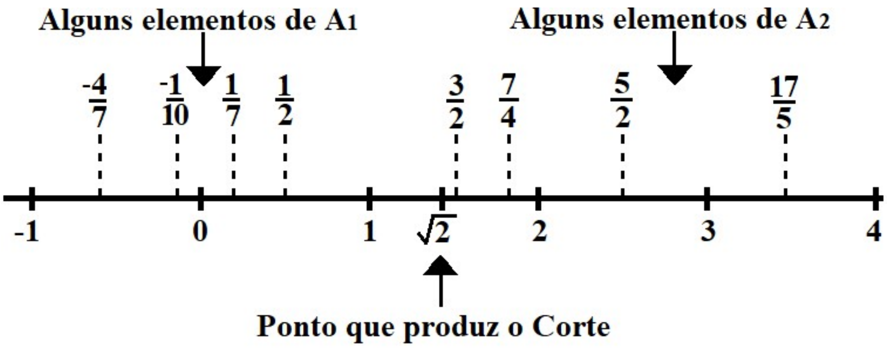


Figura 16 –Exemplo de Corte Irracional
Fonte Adaptado de Roque (2012, p. 371)

> Para obter um conjunto numérico que traduza fielmente a continuidade da reta, Dedekind usou um procedimento que se tornaria muito frequente na matemática. Sempre que encontrarmos um número não racional produzindo um corte, deveremos incluir esse número na nova categoria a ser criada, que deve admitir racionais e não racionais. Ou seja, quando o corte é um número irracional, esse número será reunido aos racionais formando um conjunto, que gozará da propriedade de continuidade da reta, chamado de "conjunto dos números reais". Com essa operação, esse conjunto não será mais admitido como dado, mas definido de modo preciso. (ROQUE, 2012, p. 371 - 372)

Roque (2012, p. 372) ressalta que as pesquisas de Cantor e Dedekind com relação aos números reais deram origem a diversas perguntas que envolvem os seus subconjuntos, tais como: se existem mais números racionais ou irracionais, ou como enumerar racionais e irracionais. Dentre as diferenças entre os números racionais e números reais, temos que o conjunto dos racionais pode ser enumerado, ou seja, existe uma relação biunívoca entre o conjunto dos números racionais e o conjunto dos números naturais (isso significa dizer que os racionais podem ser contados associando cada um dos números racionais a um número natural e cada número racional estaria ligado a um número natural sem "sobrar" ou "faltar" elementos em ambos os conjuntos). Essa propriedade fez Cantor chegar à conclusão de que o conjunto dos números racionais é infinito, mas de uma maneira distinta do infinito dos números reais que não podem ser enumerados.

> Nesse contexto surgirá a ideia de função como uma correspondência entre dois conjuntos numéricos. Se x é um elemento do conjunto dos reais, e n um elemento do conjunto dos naturais, pode ser estabelecida uma correspondência entre x e n, de modo que cada elemento de um conjunto seja associado a um, e somente um, elemento do outro? Essa é a pergunta que Cantor formula para Dedekind em 1873. Ele mesmo provou que é impossível encontrar tal correspondência, estabelecendo uma diferença fundamental entre o número de elementos (cardinalidade) do conjunto de números reais e o número de elementos do conjunto dos números naturais. (ROQUE, 2012, p. 373)

Assim, o processo adotado por Cantor para descobrir se o conjunto dos números racionais é enumerável foi o seguinte:

O primeiro passo foi escrever na primeira linha todas as frações de numerador 1 e variando os denominadores com todos os números naturais positivos. Em seguida, o segundo passo seria repetir o mesmo processo anterior em outra linha, mas dessa vez colocando os valores 2, 3, 4, 5, ... no numerador como segue na figura abaixo.

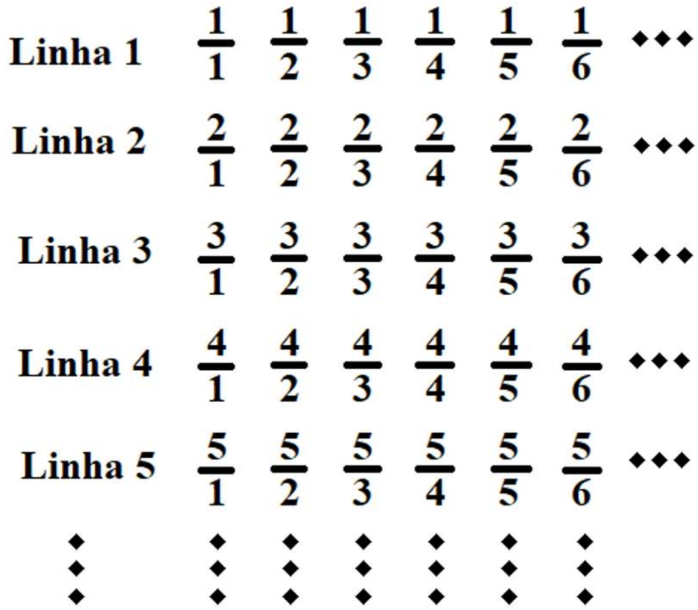


Figura 17 – Ordenando os Racionais
Fonte O Autor

Agora vamos contar as frações diagonalmente como na figura abaixo:

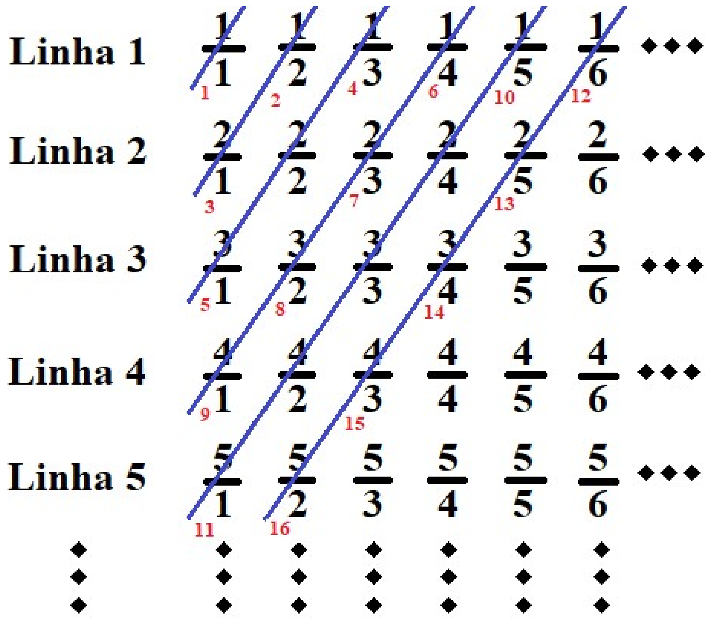


Figura 18 – Ordenando e Numerando os Racionais
Fonte: O Autor

Ordenando as frações, temos:

$$\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{2}{1},\frac{1}{3},\frac{3}{1},\frac{1}{4},\frac{2}{3},\frac{3}{2},\frac{4}{1},\frac{1}{5},\frac{5}{1},\frac{1}{6},\frac{2}{5},\frac{3}{4},\frac{4}{3},\frac{5}{2},\dots$$

Além disso, observe que:

$$\boxed{1/1 = 2/2 = 3/3 = \cdots = 1}, \boxed{\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \cdots = 2} \text{ e } \boxed{\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \cdots = 0{,}5}$$

Ou seja, não precisamos contar várias vezes as frações equivalentes. Desse modo, utilizando o mesmo método, Cantor também conseguiu ordenar todos os números racionais negativos e o zero em uma única lista da seguinte maneira:

Seja $\mathbb{Q}^+ = \left\{\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{2}{1},\frac{1}{3},\frac{3}{1},\frac{1}{4},\frac{2}{3},\dots\right\} = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, \dots\}$ é possível escrever o conjunto dos números racionais da seguinte maneira:

$$\mathbb{Q} = \{0, r_1, -r_1, r_2, -r_2, r_3, -r_3, r_4, -r_4, \dots\}$$

Dessa forma, Cantor concluiu que existe uma relação biunívoca entre o conjunto dos racionais e o conjunto dos naturais, mostrando também que existe a mesma quantidade de números racionais e números naturais.

Temos diversas outras ocasiões históricas que envolveram o estudo dos números reais, no entanto, foge do escopo do trabalho enumerar e dissertar sobre cada uma delas, pois focamos o estudo com relação aos problemas em que desenvolveremos no próximo capítulo, sendo assim, os casos estudados foram alguns dos pontos históricos que pudemos trazer para entendermos de maneira geral como o estudo do conjunto dos números reais foi evoluindo durante o passar das épocas.

4 ALGUNS PROBLEMAS SOBRE NÚMEROS REAIS NA HISTÓRIA

Neste capítulo apresentaremos alguns problemas propostos para trabalharmos a história dos números reais em sala de aula, assim, iremos propor situações-problema que podem ser trabalhadas em sala de aula, utilizando como base a história dos números reais. Essas atividades foram extraídas de livros, artigos e dissertações sobre materiais matemáticos encontrados com o passar do tempo e traduzidos de tal forma que possamos fazer um paralelo da matemática desenvolvida na Antiguidade com a matemática contemporânea.

A escolha desse material se deve ao fato de trabalhar habilidades propostas para o Ensino de Matemática na Educação Básica na atualidade. A BNCC indica que trabalhemos os números reais no Ensino Básico.

A utilização de situação-problema é a escolha de questões abertas ou fechadas em uma situação mais ou menos matematizada que envolve um campo de problemas que se relacionam a um ou vários domínios de saber e de conhecimentos. Nosso intuito é trabalhar com atividades que considerem as recomendações dos PCN e da BNCC, mas também, permitir aos alunos o desenvolvimento de certas competências e habilidades (ALMOULOUD, 2011, p.200).

As três propostas de situações que iremos analisar a seguir são: 1) Problema 06 do Papiro de Rhind; 2) O Tablete YBC 7289; 3) O diálogo de Menon e Platão.

4.1 Situação-problema 1: Problema 06 do Papiro de Rhind (ou Papiro de Ahmes)

O problema 06 do Papiro de Rhind faz parte da matemática egípcia antiga e pouco se trabalha nas aulas de Matemática no Ensino Fundamental. De acordo com Eves e Roque:

> O papiro Rhind é uma fonte primária rica sobre a matemática egípcia antiga; descreve os métodos de multiplicação e divisão dos egípcios, o uso que faziam das frações unitárias, seu emprego da regra de falsa posição, sua solução para o problema da determinação da área de um círculo e muitas aplicações da matemática a problemas práticos. (EVES, 2011, p. 70)

> Temos notícia da matemática egípcia por meio de um número limitado de papiros, entre eles o de Rhind, escrito em hierático e datado de cerca de 1650 a.C., embora no texto seja dito que seu conteúdo foi copiado de um manuscrito mais antigo ainda. O nome do papiro homenageia o escocês Alexander Henry Rhind, que o comprou, por volta de 1850, em Luxor, no Egito. Esse documento também é designado papiro de Ahmes, o escriba egípcio que o copiou, e encontra-se no British Museum. (ROQUE, 2012, p. 27)

O problema pode ser proposto para alunos de 7° a 9° anos, que já tenham conhecimento sobre números racionais e frações. Queremos que os alunos usem esses conhecimentos como ferramentas para aprofundar o estudo de frações e compreendam as necessidades do uso das frações unitárias na antiga sociedade egípcia.

Esse problema é interessante para contextualizar o uso de frações em sociedades antigas e aprofundar os conhecimentos de história da matemática e operações com frações.

4.1.1 Conteúdo a ser trabalhado

Frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações; frações unitárias e os métodos egípcios de multiplicação e divisão de frações.

4.1.2 Habilidades trabalhadas de acordo com a BNCC

(EF06MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor.

(EF06MA07) Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes.

(EF06MA09) Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora.

(EF06MA10) Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária.

4.1.3 Objetivos

Entender o significado de fração por meio de uma situação problema que envolva o contexto histórico do antigo povo egípcio;

Compreender que as frações podem ser percebidas em diversas situações, não só naquelas onde é possível desenhar e dividir o inteiro em certo número de partes iguais;

Compreender o conceito de fração unitária, como a partição de um todo em n partes iguais, em que cada parte pode ser representada como 1/n.

4.1.4 Procedimentos sugeridos

Para o desenvolvimento dessa atividade, recomenda-se os seguintes passos: Organizar os alunos em grupos, para que eles possam ler, interpretar e discutir sobre o problema, para que logo depois possam conjuntamente aplicar o procedimento de divisão por meio de frações unitárias. Em seguida, os alunos poderão discutir e aplicar o processo da multiplicação egípcia para realizar a prova real da resolução do problema. Por fim, os alunos deverão compreender a divisão feita por meio de figuras geométricas, relacionando a soma de frações obtida com a real divisão que possivelmente era feita no Egito antigo.

Ao fim desse processo, o professor conduzirá uma plenária juntamente com os alunos, para fazer uma análise criteriosa sobre o que foi abordado e discutir os resultados obtidos, observando se o método foi aplicado de maneira satisfatória, corrigindo os principais erros que podem ter sido cometidos e mostrar que mesmo utilizando um mesmo algoritmo, vários grupos podem seguir o desenvolvimento de maneira diferente e chegar em resultados iguais.

4.1.5 Possíveis Dificuldades

Caso os alunos não estejam muito familiarizados com os conceitos sobre frações, problemas envolvendo os conceitos de soma, subtração, multiplicação e divisão de frações podem ocorrer, assim, é imprescindível que os alunos conheçam diferentes estratégias de resolução. Segundo Santos e Fonseca (2019), temos que:

> Conhecendo o conceito de frações a partir de algo no seu cotidiano, construindo e percebendo no conceito de frações que o numerador representa, quantas partes queremos do todo e o denominador em quantas partes dividindo o todo, e verificando que as frações podem ser representadas por figuras divididas em partes iguais ou não. A maior dificuldade apresentada pelos alunos no entendimento do conceito de frações é não saber divisão do todo em partes e surge a dificuldade quando em adição e subtração de denominadores diferentes e em problemas que surgira metade, também não compreende o sentido de fração. (SANTOS; FONSECA, 2019, p. 57)

É importante notar que alguns erros podem estar relacionados ao não domínio do conjunto de ferramentas que são pré-requisitos para o entendimento do conceito de frações, como adendo, muitos alunos podem ter dificuldade em organizar os dados da questão e seguir uma resolução de maneira que não seja linear, o que dificultaria o processo de avaliação desses alunos.

Além disso, é importante que o aluno saiba interpretar o problema corretamente para que ele transponha o conteúdo em linguagem materna para a linguagem Matemática, pois os erros de interpretação também podem induzir os estudantes a não encontrarem a solução correta deste problema.

4.1.6 Recursos Didáticos

Quadro e giz, para a explicação.

Caderno, caneta, lápis e borracha para o desenvolvimento da atividade pelos alunos.

4.1.7 Avaliação

A avaliação será feira por meio da participação dos alunos levando em consideração o interesse na questão e na resolução do problema, suas contribuições para o entendimento do problema e empenho de cada grupo para resolver o problema proposto.

4.1.8 Enunciado e proposta

Enunciado: Divida 9 pães entre 10 homens[1]. (CHACE, 1927, p. 62 – tradução livre)

Proposta: Representar os números racionais por meio da soma das frações unitárias e entender o método de solução abordado em nossa seção 3.2 deste trabalho. Para tal, apresentamos a solução do problema que servirá de auxílio ao professor sobre como abordar o conteúdo do problema; temos também a prova real que relaciona as frações unitárias com o método de multiplicação egípcia; e por fim um exemplo de como seria feita de fato essa divisão mostrando o seu resultado por meio de figuras. Tal esquema foi montado pra melhor absorção de toda a problemática do enunciado. Segue abaixo o desenvolvimento retirado de Reis (2018, p. 39 - 43).

4.1.9 Solução

Uma maneira de solucionarmos o problema seria usando um método para encontrar frações unitárias, assim, queremos dividir 9 pães dentre 10 homens, portanto escrevamos a fração $\frac{9}{10}$, a partir daí, aplicamos o método seguindo os passos vistos na Seção 3.2 deste trabalho.

1º passo: invertemos a fração obtendo $\frac{10}{9}$

[1] Original em inglês (CHACE, 1927, p. 62)

2º passo: Procuramos o menor número inteiro que seja maior do que a fração $\frac{10}{9}$, encontramos o número 2, a partir daí, invertemos o número 2, obtendo a fração $\frac{1}{2}$.

3º passo: Subtraímos $\frac{1}{2}$ da fração original $\frac{9}{10}$.

$$\frac{9}{10}-\frac{1}{2}=\frac{9-5}{10}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

Assim, temos que $\frac{9}{10}$ pode ser escrito como: $\frac{9}{10}=\frac{1}{2}+\frac{2}{5}$ (Equação 1)

Neste momento, repetiremos os mesmos passos acima, mas agora considerando a fração $\frac{2}{5}$.

1º passo: invertemos a fração obtendo $\frac{5}{2}$

2º passo: Procuramos o menor número inteiro que seja maior do que a fração $\frac{5}{2}$, encontramos o número 3, a partir daí, invertemos o número 3, obtendo a fração $\frac{1}{3}$.

3º passo: Subtraímos $\frac{1}{3}$ da fração original $\frac{2}{5}$.

$$\frac{2}{5}-\frac{1}{3}=\frac{6-5}{15}=\frac{1}{15}$$

Assim, temos que $\frac{2}{5}$ pode ser escrito como: $\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$ (Equação 2)

E para finalizar, substituindo a Equação 2 na Equação 1, temos que $\frac{9}{10}$ pode ser escrito como:

$$\mathbf{\frac{9}{10}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}}$$

Portanto, cada homem recebe $\frac{1}{2}$ de pão, $\frac{1}{3}$ de pão e $\frac{1}{15}$ de pão.

4.1.10 Prova Real

Para fazermos a prova real, podemos utilizar o método de multiplicação utilizado pelos egípcios na época.

1º passo: Vamos multiplicar $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$ por 10 (pois 10 é o número de homens)

Tabela 5 – Multiplicação de $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$ por 10

Tabela 5 - Prova Real pela Multiplicação egípcia

Soma	Fator de Multiplicação	Número
	1	$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$
*	2	$\frac{2}{2}+\frac{2}{3}+\frac{2}{15}=1+\frac{2}{3}+\frac{2}{15}=1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{120}\right)$
	4	$2+\left(1+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{60}\right)$
*	8	$4+\left(2+\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{30}\right)=7+\frac{1}{6}+\frac{1}{30}$

Fonte: O Autor

Assim, como queremos o valor 10, tomamos as linhas com (*) e fazendo a soma dessas duas linhas, teremos:

$$1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{120}\right)+7+\frac{1}{6}+\frac{1}{30}=8+\frac{60+20+15+1+20+4}{120}=\mathbf{9}$$

Deste modo, a partir do valor de 10 (homens) encontramos o valor de 9 (pães) que é a resposta correta.

4.1.11 Um exemplo de como seria feita esta divisão

Pode parecer estranho dizer que cada homem receba $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$, ou seja, $\frac{1}{2}$ de pão, $\frac{1}{3}$ de pão e $\frac{1}{15}$ de pão. Assim, vejamos na Figura 1:

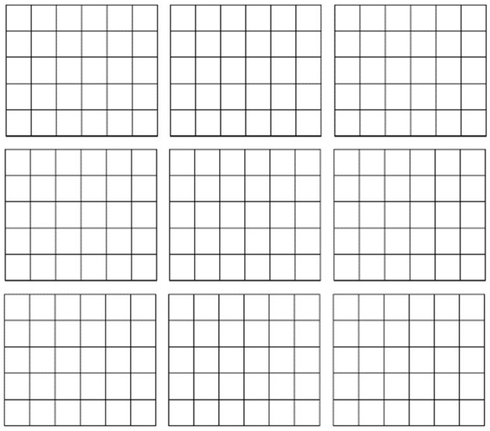


Figura 19 - Representação de 9 pães
Fonte: O Autor

Onde cada um dos quadriláteros 6x5 seja um pão inteiro, totalizando 9 pães, sendo que cada pão contém 30 divisórias. Queremos que cada um dos 10 homens receba a sua parte, como calculado anteriormente.

Então, tiramos $\frac{1}{15}$ de cada pão, simbolizados pela cor vermelha na figura a seguir, ou seja $\frac{1}{15}$ de 30 partes que nos dá um total de 2 partes de cada pão, em seguida, podemos distribuir essas fatias para 9 homens.

A seguir, tiramos $\frac{1}{3}$ de cada pão, simbolizados pela cor verde na figura a seguir, ou seja $\frac{1}{3}$ de 30 partes que nos dá um total de 10 partes de cada pão, em seguida, podemos distribuir essas fatias para 9 homens.

E finalmente, tiramos $\frac{1}{2}$ de cada pão, simbolizados pela cor azul na figura a seguir, ou seja $\frac{1}{2}$ de 30 partes que nos dá um total de 15 partes de cada pão, em seguida, podemos distribuir essas fatias para 9 homens.

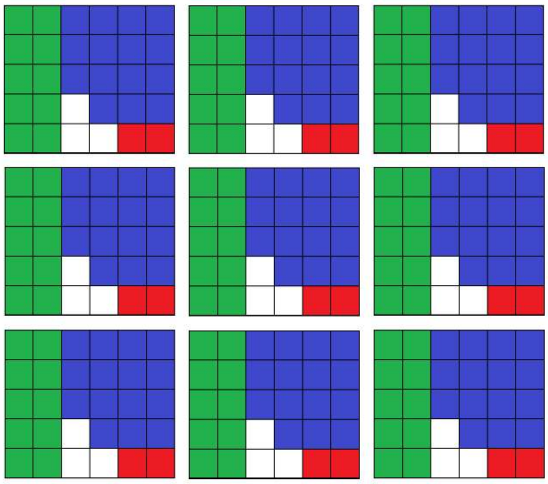


Figura 20 - Representação de 9 pães divididos
Fonte: O autor

Assim, podemos notar que sobraram 3 partes de cada pão, logo, juntando essas partes e dividindo da mesma forma que fizemos aos primeiros 9 homens, conseguimos as fatias de $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$ que será dada ao último homem que faltava, conforme a Figura 3.

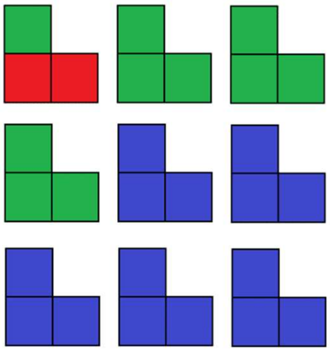


Figura 21 - Representação da divisão do resto de pães
Fonte: O autor

Portanto, conforme nosso exemplo, cada homem recebeu 2 partes do pão simbolizadas pela cor vermelha, 10 partes do pão simbolizadas pela cor verde e 15 partes do pão simbolizadas pela cor azul.

4.2 Situação-problema 2: O Tablete YBC 7289

Em nosso segundo problema trazemos o Tablete YBC 7289 que segundo Beery e Swetz (2012) é uma pequena placa de argila em escrita cuneiforme da Mesopotâmia com o interessante conteúdo matemático, datada por volta de 1800 a 1600 a.E.C.

Figura 22 – O Tablete YBC 7289
Fonte: Yale Babylonian Collection (2021)

Ela possui o cálculo da diagonal de um quadrado e ainda nos fornece uma boa aproximação da $\sqrt{2}$ com até 3 casas sexagesimais, ou 6 casas decimais.

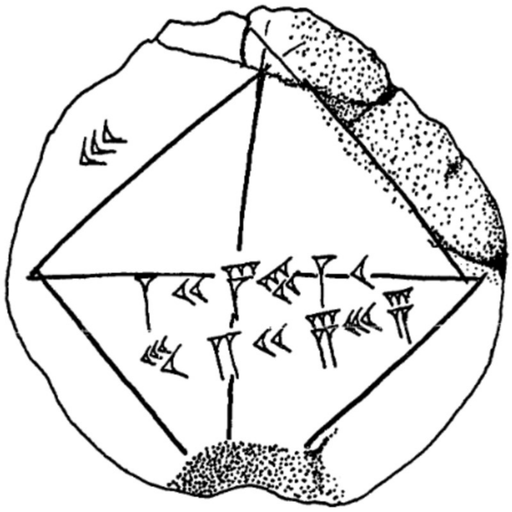


Figura 23 – Representação do Tablete YBC 7289
Fonte: ROQUE, 2012, p. 46

A partir da Figura 13, podemos verificar alguns números escritos em linguagem cuneiforme, sendo eles:

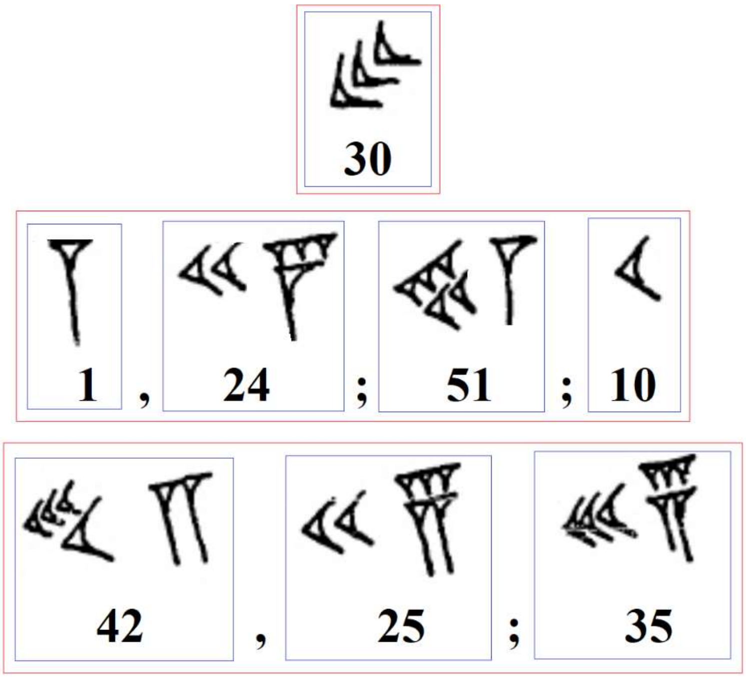


Figura 24 – Os valores no Tablete YBC 7289
Fonte: Adaptado de ROQUE, 2012, p. 46

O problema pode ser proposto para alunos de 8° a 9° anos, que já tenham conhecimento sobre números reais, Teorema de Pitágoras, noções básicas de polígonos, em especial triângulos e quadrados, além de terem boas noções de potenciação e radiciação. Queremos que os alunos usem esses conhecimentos como ferramentas para aprofundar o estudo de números reais e compreendam a importância do estudo da história dos povos babilônios.

Esse problema é interessante para mostrar que mesmo os povos mais antigos conheciam o problema da incomensurabilidade da diagonal de um quadrado com seu lado e conseguiram uma ótima aproximação para esse segmento, além de proporcionar o entendimento de um sistema numérico diferente do sistema decimal, em especial o sistema babilônio (sexagesimal).

4.2.1 Conteúdo a ser trabalhado

Números reais; Conversão de base de sistemas numéricos; Potenciação com expoentes inteiros; Noções de Frações, Radiciação: Raiz quadrada; Teorema de Pitágoras.

4.2.2 Habilidades trabalhadas de acordo com a BNCC

(EF06MA02) Reconhecer o sistema de numeração decimal, como o que prevaleceu no mundo ocidental, e destacar semelhanças e diferenças com outros sistemas, de modo a sistematizar suas principais características (base, valor posicional e função do zero), utilizando, inclusive, a composição e decomposição de números naturais e números racionais em sua representação decimal.

(EF06MA19) Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos.

(EF08MA01) Efetuar cálculos com potências de expoentes inteiros e aplicar esse conhecimento na representação de números em notação científica.

(EF08MA05) Reconhecer e utilizar procedimentos para a obtenção de uma fração geratriz para uma dízima periódica.

(EF09MA01) Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade).

(EF09MA02) Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica.

(EF09MA04) Resolver e elaborar problemas com números reais, inclusive em notação científica, envolvendo diferentes operações.

4.2.3 Objetivos

Compreender os diferentes sistemas numéricos por meio da contextualização histórica;

Converter do sistema de numeração sexagesimal (base 60) para o sistema decimal (base 10);

Comparar os valores obtidos pelos babilônios com os valores que conhecemos hoje;

Compreender novas representações numéricas;

Utilizar o método de aproximação de raízes proposto para a determinarmos uma possível solução para $\sqrt{2}$ e $30\sqrt{2}$.

4.2.4 Procedimentos sugeridos

Para o desenvolvimento dessa atividade, recomenda-se os seguintes passos: Organizar os alunos em grupos, para que eles possam ler, interpretar e discutir o problema, para que logo depois possam conjuntamente aplicar o procedimento de conversão, passando os valores do sistema sexagesimal (obtidos no tablete) para o sistema decimal, na sequência, eles deverão calcular a aproximação de $\sqrt{2}$ e $30\sqrt{2}$. Em seguida, os alunos poderão utilizar uma calculadora para verificarem a divergência entre o valor calculado pelos babilônios e o valor que conhecemos hoje em dia. Por fim, os alunos deverão utilizar o método de aproximação (que está na seção 4.2.9) para terem uma noção de uma possível maneira na qual os babilônios podem ter conseguido chegar a uma aproximação tão boa.

Em cada etapa desse processo, o professor deve atuar como mediador auxiliando os alunos quando necessário e incentivando-os a discutirem sobre o problema. Ao fim desse processo, o professor discutirá juntamente com os alunos sobre os resultados obtidos, as principais dificuldades encontradas e a contextualização histórica do problema.

4.2.5 Possíveis Dificuldades

Esse problema envolve conhecimentos de diversos temas inseridos na Matemática, desse modo, caso os alunos não estejam habituados a trabalhar com potenciação, notação científica e frações (todos inseridos em uma mesma expressão), as mais diversas dificuldades podem aparecer.

Caso os alunos não estejam muito familiarizados com as noções de frações, é possível que eles não entendam a escrita ao transformarmos uma potência de expoente negativo em uma fração. Além disso, é imprescindível que o aluno tenha conhecimento sobre potenciação de números inteiros, pois ao converter os números em base sexagesimal para base decimal, eles podem confundir a operação de potenciação com a operação de multiplicação, e em alguns casos podem confundir até mesmo com a operação de subtração ou divisão (caso o expoente seja negativo).

O conhecimento de números inteiros é de extrema importância, pois dificuldades com termos como: incomensurabilidade, números racionais ou números irracionais podem acarretar grande dificuldade ao interpretar alguns valores que seriam números racionais (ao resolver as expressões), ou mesmo o não entendimento que $\sqrt{2}$ é um número irracional. Os alunos também podem cometer algum engano com relação aos lados do quadrado e sua diagonal por não entenderem que esses segmentos são incomensuráveis.

É importante notar que alguns erros podem estar relacionados ao não domínio do conjunto de ferramentas que são pré-requisitos para o entendimento dos diversos conceitos abordados pelo problema, como adendo, muitos alunos podem ter dificuldade em organizar os dados da questão e seguir uma resolução de maneira que não seja linear, o que dificultaria o processo de avaliação desses alunos.

Além disso, é importante que o aluno saiba interpretar o problema corretamente para que ele transponha o conteúdo em linguagem materna para a linguagem Matemática, pois os erros de interpretação também podem induzir os estudantes a não encontrarem a solução correta deste problema.

4.2.6 Recursos Didáticos

Quadro e giz, para a explicação, folhas com as imagens das gravuras contidas no Tablete YBC 7289.

Caderno, caneta, lápis e borracha para o desenvolvimento da atividade pelos alunos.

4.2.7 Avaliação

A avaliação será feira por meio da participação dos alunos levando em consideração o interesse na questão e na resolução do problema, suas contribuições para o entendimento do problema e empenho de cada grupo para resolver o problema proposto.

4.2.8 Enunciado e proposta

Enunciado: Vamos converter os valores de $\sqrt{2}$ e $30\sqrt{2}$ encontrados pelos babilônios na base sexagesimal para o nosso sistema na base decimal. Além disso vamos comparar o resultado aproximado pelos babilônios com o valor real que conhecemos hoje em dia.

Proposta: Entender a relação entre a linguagem Babilônica e a nossa atual linguagem matemática e transcrevê-la de maneira mais acessível, observando que a base 60 é de suma importância para compreendermos o resultado dado pelos babilônios dos números $\sqrt{2}$ e da diagonal do quadrado de lado 30 que tem como resultado $30\sqrt{2}$, além de propor um procedimento para o cálculo da diagonal do quadrado encontrado pelos povos babilônios. Aqui trazemos a solução do problema com o intuito de auxiliar o desenvolvimento do problema e trazer alguns paralelos com outros conteúdos de Matemática, tais como o Teorema de Pitágoras, Frações ou Conversões de Sistemas Numéricos.

4.2.9 Solução

Podemos observar que o lado do quadrado representado na figura é 30, além disso, dispomos de dois números que estão sendo representados na diagonal do quadrado, sendo eles representados por $1,24;\ 51;\ 10_{(60)}$ e $42,25;\ 35_{(60)}$. Assim, podemos representar eles como:

$$1.60^0 + 24.60^{-1} + 51.60^{-2} + 10.60^{-3} = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{3600} + \frac{10}{216000} = 1{,}41421296$$

Observe que essa é uma ótima aproximação para $\sqrt{2} = 1{,}41421356 \ldots$ A divergência surge apenas na sexta casa decimal, o que é um feito e tanto, considerando a época em que o tablet YBC 7289 é datado. Aparentemente o número $1,24;\ 51;\ 10_{(60)}$ foi tirado como resultado importante de algum outro tablete já calculado anteriormente e usando aqui para estimar o comprimento da diagonal do quadrado de lado 30 no tablete YBC 7289. Dessa forma, podemos verificar que o valor da diagonal do quadrado é:

$$42.60^0 + 25.60^{-1} + 35.60^{-2} = 42 + \frac{25}{60} + \frac{35}{3600} = 42{,}426388889$$

Assim, temos que $1,24;\ 51;\ 10_{(60)} = 1{,}41421296$ e $42,25;\ 35_{(60)} = 42{,}426388889$. Calculando a diagonal do quadrado de área 30 pelo nosso conhecido Teorema de Pitágoras temos que:

$$D^2 = 30^2 + 30^2 = 1800 \Rightarrow D = 30\sqrt{2} \Rightarrow D = 42{,}426406871 \ldots$$

Ou seja, o valor calculado pelos babilônios e o que conhecemos hoje em dia diverge apenas na quarta casa decimal. Mas como os babilônios realizavam o cálculo para se obter o valor aproximado de $\sqrt{2}$?

Queremos determinar a aproximação de $\sqrt{2}$, assim vamos procurar o quadrado um número inteiro mais próximo de 2, os candidatos são 1 pois $1^2 = 1$ ou 4 pois $2^2 = 4$. No entanto o valor 1 é mais próximo de 2 do que 4. Dessa forma escolhemos o número 1 como candidato a aproximação. Dito isso, vamos calcular:

$$\sqrt{2} \approx \sqrt{1} \Rightarrow \sqrt{2} - \sqrt{1} \approx 0 \Rightarrow \left(\sqrt{2} - \sqrt{1}\right)^2 \approx 0 \Rightarrow 2 + 1 - 2\sqrt{2}\sqrt{1} \approx 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} \approx \frac{2+1}{2\sqrt{1}} \Rightarrow \sqrt{2} \approx \frac{3}{2}$$

Analogamente, mas agora tomando $\frac{3}{2}$ como o valor mais próximo de 2 e repetindo o processo acima chegaremos em $\sqrt{2} \approx \frac{17}{12}$.

Segundo Roque (2012, p. 46), alguns historiadores como D. Fowler e E. Robson propõem que o procedimento para chegar nessa aproximação pode ter sido conforme veremos a seguir:

Tomando $\sqrt{2} \approx \frac{17}{12} = \frac{85}{60} = \frac{60+25}{60} = 1 + \frac{25}{60} = 1{,}25_{(60)}$ temos essa aproximação, mas para chegarmos no valor contido no tablete YBC 7289 vamos fazer uma segunda aproximação:

A partir de $a' = \frac{17}{12} = 1{,}25_{(60)}$, faremos $a'' = \frac{1{,}25_{(60)}}{2} + \frac{1}{1{,}25_{(60)}} = \frac{17}{24} + \frac{12}{17} = 0{,}42;30_{(60)} + \frac{1}{1{,}25_{(60)}}$, observe que o inverso de $1{,}25_{(60)}$ não possui representação finita na base 60, logo uma representação aproximada $0{,}42;21;10_{(60)}$ era representada em um tablete. Portanto, podemos agora calcular $a'' = 0{,}42;30_{(60)} + 0{,}42;21;10_{(60)} = 1{,}24;51;10_{(60)}$ que é o valor aproximado da raiz quadrada de 2 que estava escrita sobre a diagonal do quadrado de lado 30 no tablete YBC 7289.

4.3 Situação-problema 3: O Diálogo Mênon de Platão

Como nosso terceiro problema, temos abaixo o diálogo entre Sócrates e o Escravo de Mênon, onde Sócrates faz diversas perguntas que a princípio parecem ser óbvias, no entanto a resposta não é tão óbvia assim.

O problema pode ser proposto para alunos de 7° a 9° anos, que já tenham conhecimento sobre números reais e polígonos, em especial triângulos e quadrados, assim como suas áreas e perímetros. Queremos que os alunos discutam os conhecimentos geométricos inclusos no diálogo para que possam aprofundar os seus conhecimentos sobre o tema e compreendam a importância da geometria plana na história.

É interessante tratar esse problema para que o aluno entenda alguns detalhes sobre áreas e perímetros que muitas vezes passam despercebidos, e que apesar de uma pergunta parecer ter um resultado óbvio, a resposta não condiz com alguns pensamentos lógicos menos apurados. O problema também nos chama atenção para a compreensão de segmentos incomensuráveis por meio do diálogo.

4.3.1 Conteúdo a ser trabalhado

Noções básicas de geometria plana: Quadrados: sua área e perímetro; Triângulos: sua área e perímetro.

4.3.2 Habilidades trabalhadas de acordo com a BNCC

(EF06MA19) Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos.

(EF06MA29) Analisar e descrever mudanças que ocorrem no perímetro e na área de um quadrado ao se ampliarem ou reduzirem, igualmente, as medidas de seus lados, para compreender que o perímetro é proporcional à medida do lado, o que não ocorre com a área.

(EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.

4.3.3 Objetivos

Interpretar situações problema envolvendo lados, áreas e perímetros de quadrados e triângulos;

Recordar seus conhecimentos prévios à medida que o diálogo avança e utilizá-los para melhor entendimento dos conceitos abordados no problema;

Compreender os conceitos do problema ligados a matemática de forma empírica em comparação com a matemática dedutiva.

4.3.4 Procedimentos sugeridos

Para o desenvolvimento dessa atividade, recomenda-se os seguintes passos: Organizar os alunos da classe em um semicírculo para que todos possam interagir com o professor de forma mais livre, assim, o professor poderá expor o diálogo a todos os estudantes de forma uniforme. Os alunos assumirão o papel do Escravo enquanto interagem com as perguntas do professor que terá o papel de Sócrates, enquanto o diálogo se desenrola, o professor deve instigar os alunos a contribuírem com o desenvolvimento do diálogo fazendo com que os próprios alunos cheguem a uma conclusão em cada parte do diálogo.

Em seguida, o professor conduzirá uma roda de conversa para que os alunos exponham suas conclusões e ao fim desse processo é interessante que o professor explique a maneira com que Sócrates mostra um quadrado de lado $\sqrt{8}$ sem na verdade dizer que o valor é $\sqrt{8}$, comparando a maneira empírica de mostrar que esse valor existe em comparação com o modo dedutivo que geralmente vemos quando ensinamos sobre áreas.

4.3.5 Possíveis Dificuldades

Algumas dificuldades podem ser encontradas pelos alunos, inicialmente, por causa da linguagem utilizada na tradução, por exemplo, em determinado momento Sócrates pergunta: "Essa é a superfície de oito pés", ou seja, ele deseja saber se essa é a área de valor oito, uma outra confusão também pode ocorrer com relação a palavra "pés" que nesse sentido quer dizer a unidade de medida na qual Sócrates mede o quadrado.

Com toda certeza alguns alunos vão cometer os mesmos "deslizes" que o Escravo do diálogo, e basta fazê-los perceberem o que não está correto. Uma dificuldade que também pode surgir tem relação com a figura 31 que nos mostra o quadrado formado pelas diagonais de quadrados menores.

Confusões com relação a lados, áreas e perímetros também podem ocorrer, dessa forma, é importante explicitar esses conceitos básicos para que os alunos interpretem corretamente cada parte do diálogo.

4.3.6 Recursos Didáticos

Quadro e giz, e o diálogo de em uma folha impressa para a explicação ou projetor (datashow) para melhor exposição do diálogo.

Caderno, caneta, lápis e borracha para o desenvolvimento da atividade pelos alunos.

4.3.7 Avaliação

A avaliação será feita por meio da participação dos alunos levando em consideração o interesse na questão e na resolução do problema, suas contribuições para o entendimento do problema e empenho de cada grupo para resolver o problema proposto.

4.3.8 Enunciado e proposta

Proposta: Expor e propor um Roda de Conversa sobre o Diálogo Mênon de Platão, colocando o aluno no lugar do escravo de Mênon para que o mesmo possa compreender as indagações de Platão, dessa maneira, é possível que novos questionamentos poderão surgir quando os alunos se depararem com os problemas expostos, pois é possível que eles desenvolvam novas estratégias para solucionar o problema de maneira diferente. Temos abaixo o diálogo, retirado de Roque (2012, p. 108 - 115).

4.3.9 Diálogo na Íntegra

Extraído de Roque (2021, p. 108-115)

> Uma das primeiras evidências diretas e extensas sobre a geometria grega no período aqui considerado, para além de fragmentos ou reconstruções tardias, é o diálogo platônico intitulado Mênon, que se supõe tenha sido escrito por volta do ano 385 a.E.C. Após investigar com o escravo de Mênon o que é um quadrado e quais suas principais características, Sócrates propôs o problema de encontrar o lado de um quadrado cuja área fosse o dobro da área de um quadrado de lado 2, como o da imagem a seguir. (ROQUE, 2021, p. 108)

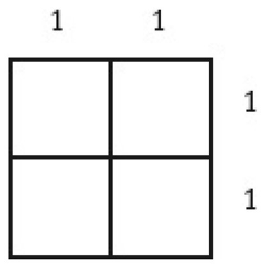


Figura 25 – Quadrado de lado dois pés
Fonte: ROQUE, 2021, p. 108

Sócrates: Qual a área desse quadrado?

Escravo: Quatro.

Sócrates: E qual a área do quadrado de área dupla a este quadrado?

Escravo: Oito.

Sócrates: Bem, experimenta agora responder que comprimento terá cada lado da nova figura?

Escravo: Para que a área seja duplicada, o quadrado deve ser duplicado.

Sócrates: Desenhemos, então, os quatro lados. Essa é a superfície de oito pés?

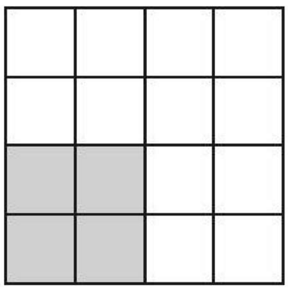


Figura 26 – Quadrado de área dezesseis pés

Fonte: ROQUE, 2021, p. 109

Escravo: É.

Sócrates: E agora? Não se encontram, porventura, dentro dela essas quatro superfícies, das quais cada uma mede quatro pés? Mas então? Qual é essa área? Não é o quádruplo?

Escravo: É verdade!

O escravo percebe que o lado do quadrado deve ter uma medida entre 2 e 4, e dá o palpite que o lado do quadrado de área dupla deve medir 3 pés.

Sócrates: Pois bem, se a área do novo quadrado deve medir três pés, a área do quadrado deve ser três pés vezes três pés, correto?

Escravo: Assim penso.

Sócrates: E quanto é três vezes três?

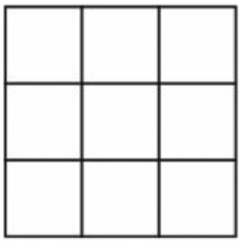


Figura 27 – Quadrado de área nove pés
Fonte: ROQUE, 2021, p. 110

Escravo: Nove.

Sócrates: Logo, a linha de três pés não é o lado do quadrado de oito pés, não é?

Escravo: Não, não pode ser.

Sócrates: E então? Afinal, qual é o lado do quadrado sobre o qual estamos discutindo? Vê se podes responder a isso de modo correto! Se não queres fazê-lo por meio de contas, traça pelo menos na areia a sua linha.

Escravo: Por Zeus, Sócrates, não sei.

Sócrates: (Voltando-se para Mênon) – Reparaste, caro Mênon, os progressos que a tua recordação fez? Ele, de fato, nem sabia e nem sabe qual é o comprimento do lado de um quadrado de oito pés quadrados. Entretanto, no início da palestra, acreditava saber, e tratou de responder categoricamente, como se o soubesse; mas agora está em dúvida, e tem apenas a convicção de que não sabe!

Mênon: Tens razão.

Sócrates:– E agora não se encontra ele, não obstante, em melhores condições relativamente ao assunto?

Mênon: Sem dúvida

Sócrates: (Voltando-se novamente para o Escravo) - Responde-me, não é essa figura de nosso quadrado cuja área mede quatro pés quadrados?

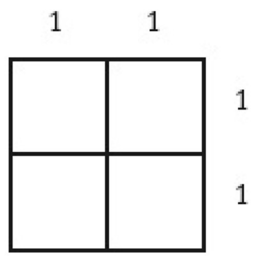


Figura 28 – Quadrado de lado dois pés
Fonte: ROQUE, 2021, p. 108

Escravo: É

Sócrates: A este quadrado não poderemos acrescentar este outro, igual?

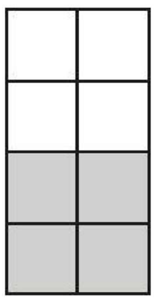


Figura 29 – Dois quadrados de lado dois pés
Fonte: ROQUE, 2021, p. 112

Escravo: Podemos.

Sócrates: E a este terceiro, igual aos outros dois?

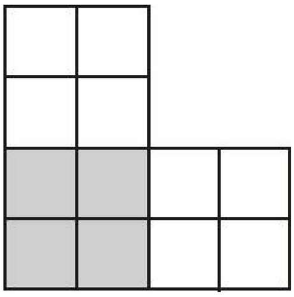


Figura 30 – Três quadrados de lado dois pés
Fonte: ROQUE, 2021, p. 113

Escravo: Podemos.

Sócrates: E não podemos preencher o ângulo com outro quadrado, igual a estes três primeiros?

Escravo: Podemos

Sócrates: E não temos agora quatro áreas iguais?

Escravo: Temos

Sócrates: Que múltiplo do primeiro quadrado é a grande figura inteira?

Escravo: O quádruplo.

Sócrates: E devíamos obter o dobro, recordaste?

Escravo: Sim.

Sócrates: E essa linha traçada de um vértice a outro de cada um dos quadrados interiores não divide ao meio a área de cada um deles?

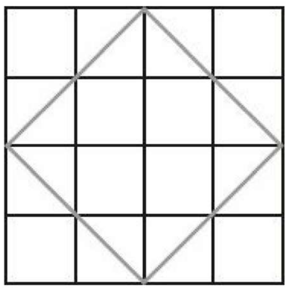


Figura 31 – Quadrado de área dezesseis pés dividido
Fonte: ROQUE, 2021, p. 114

Escravo: Divide.

Sócrates: E não temos, assim, quatro linhas que constituem uma figura interior?

Escravo: Exatamente.

Sócrates: Repara, agora: qual é a área desta figura?

Escravo: Não sei.

Sócrates: Vê: dissemos que cada linha nesses quatro quadrados dividia cada um pela metade, não dissemos?

Escravo: Sim, dissemos.

Sócrates: Bem; então, quantas metades temos aqui? (na figura anterior)

Escravo: Quatro.

Sócrates: E aqui?

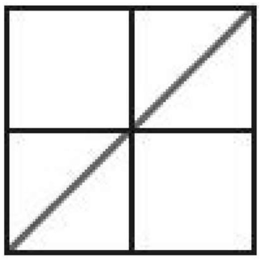


Figura 32 – Quadrado de área quatro pés dividido
Fonte: ROQUE, 2021, p. 114

Escravo: Duas

Sócrates: E em que relação aquelas quatro estão para estas duas?

Escravo: O dobro.

Sócrates: Logo, quantos pés quadrados mede essa superfície?

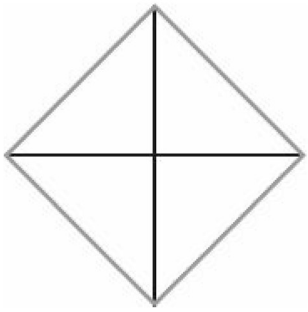


Figura 33 – Quadrado de área oito pés
Fonte: ROQUE, 2021, p. 115

Escravo: Oito.

Sócrates: E qual é o seu lado?

Escravo: Esta linha (apontando a linha cinza da figura acima).

Sócrates: A linha traçada no quadrado de quatro pés quadrados, de um vértice a outro?

Escravo: Sim.

Sócrates: Os sofistas dão a essa linha o nome de diagonal, e, por isso, usando esse nome podemos dizer que a diagonal é o lado de um quadrado de área dupla, exatamente como tu, ó escravo de Mênon, o afirmaste.

Escravo: Exatamente, Sócrates!

5 CONCLUSÃO

A partir desse trabalho, notamos que o estudo dos números reais poderá se tornar mais atraente quando contextualizado historicamente, nesse sentido, o aluno pode compreender de maneira mais ampla os principais conceitos dos números reais. Assim, a partir da História da Matemática, temos a possibilidade de entender melhor o conceito de números reais, pois uma gama de possibilidades se abre aos alunos e eles tem a oportunidade de se tornarem capazes de ir além daquele conceito básico que temos sobre o estudo da Matemática que envolve a resolução de inúmeros exercícios ou de memorização de métodos resolutivos e fórmulas.

É interessante compreender os períodos nos quais os problemas foram desenvolvidos e finalmente conseguimos obter respostas sobre alguns pontos que envolvem o conjunto dos números reais, tais como: “as definições que temos sobre os números racionais são realmente precisas?”, “o número $\sqrt{2}$ realmente surgiu a partir da diagonal de um quadrado de lado 1?”, “como surgiram as frações?”, “como os povos antigos trabalhavam com os números racionais e irracionais?”, “onde surgiu o problema da incomensurabilidade?”, “Quando os matemáticos formalizaram a existência dos números reais?”, dentre tantas outras questões que tomamos conhecimento apenas ao estudar a história da Matemática.

É importante salientar que o estudo da História da Matemática, em especial, da história dos números reais está previsto pela BNCC e pelos PCNs, logo, o desenvolvimento de questões de cunho histórico podem de fato servir como norteador para que os alunos compreendam os conceitos de números reais.

Ao estudarmos os diferentes períodos históricos, podemos despertar no aluno o interesse em aprender os conceitos de números reais por meio da contextualização de diversos problemas. Segundo Paiva (2018, p. 101) “O professor, ao desenvolver ações educativas na sala de aula que estabelecem comparações entre saberes matemáticos produzidos e utilizados no passado com saberes matemáticos do tempo presente” e de acordo com Brasil (1997, p. 34), “[...] tem a possibilidade de desenvolver atitudes e valores mais favoráveis do aluno diante do conhecimento matemático”.

Estudamos diversos povos e períodos nesse trabalho e cada um deles enriquece o conhecimento dos alunos sobre os números reais de formas diferentes, por exemplo:

Ao estudar a Civilização Mesopotâmica pudemos compreender as diferenças entre o sistema não posicional sexagesimal mesopotâmico e o nosso sistema posicional decimal, sua escrita cuneiforme e que eles já tinham o conhecimento de frações, números racionais e raízes não inteiras.

Ao estudar a Civilização Egípcia também pudemos entender as diferenças entre o sistema decimal não posicional Egípcio e o nosso sistema posicional decimal, sua simbologia e escrita, além de percebermos que eles já utilizavam frações unitárias e tinham conhecimento sobre equações.

Ao estudar sobre a Grécia Antiga pudemos perceber que diversos matemáticos conhecidos nos dias de hoje surgiram nesse período, aqui tratamos do surgimento das grandezas incomensuráveis e diversos problemas geométricos ligados aos números reais, tais como, noções de quadrados, triângulos e círculos, os cálculos de áreas, perímetros, lados e diagonais, até mesmo sobre o número π, entre outras coisas.

A idade média ficou conhecida como um período que a Matemática não foi tão desenvolvida, no entanto, diversas contribuições para o entendimento dos números reais foram feitas por matemáticos muito conhecidos nos dias de hoje, dentre eles, podemos citar Bháskara, Al-Khwarizmi, Al-Khayam, Tartaglia, Cardano, que foram responsáveis pelo desenvolvimento das soluções de equações polinomiais de segundo e terceiro graus.

Na era moderna o conceito de números reais já era bem difundido nas comunidades científicas, no entanto ainda carecia de uma formalização, nessa época Bombelli obtia aproximações para raízes quadradas por meio de frações contínuas, o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e integral por Newton e Leibniz também difundiram bastante as noções de números reais, mas foi apenas com Cantor e depois Dedekind que finalmente tivemos uma formalização rigorosa para os números reais.

Ao trazermos alguns problemas históricos podemos instigar os alunos a buscarem novas formas de resolução de problemas diferentes daquelas que é ensinada no ensino básico, pois o estudante pode recorrer a história de determinados povos e tentar compreender a relação do período histórico e a Matemática. Dessa forma internalizando o conhecimento de forma mais natural, diferente de quando tratamos o conhecimento dos números reais apenas como uma parte da Matemática que devemos entender plenamente.

Como primeira situação-problema temos o Problema 06 do Papiro de Rhind (Ahmes), no qual o aluno utiliza o método de obtenção das frações unitárias estudado na seção 3.2 deste trabalho. Além de aprofundarmos os estudos de frações, multiplicação e divisão, este problema nos mostra uma situação cotidiana dos Egípcios, o que aproxima o aluno da Matemática por meio de uma problemática da época.

A segunda situação-problema é sobre o Tablete YBC 7289 que traz um quadrado de lado 30 e uma aproximação para $\sqrt{2}$ cunhada no tablete, além de podermos observar os símbolos utilizados pelos povos mesopotâmios, esse problema é interessante para entendermos o sistema sexagesimal mesopotâmico e até mesmo podermos comparar a aproximação obtida com as aproximações que conhecemos nos dias de hoje.

Na terceira situação-problema temos o Diálogo Mênon de Platão, no qual Sócrates tem uma conversa com o Escravo de Mênon sobre alguns conceitos geométricos, este é um ótimo exercício para que os alunos entendam os pormenores de diversos conceitos matemáticos que envolvem os números reais, tais como; trabalhar com lados, perímetro e áreas de quadrados, além disso, é um ótimo problema que evidencia a forma de pensar do aluno para solucionar as questões presentes no diálogo.

Para finalizar, o estudo dos Números Reais na História não acaba por aqui, pois muito foi desenvolvido com o passar dos tempos, dessa forma, mostramos aqui apenas alguns aspectos relacionados a História da Matemática que podemos utilizar em sala de aula, assim, este trabalho é adequado como um ponto de partida para o estudo sobre a História da Matemática e serve principalmente para auxiliar o estudo mais profundo sobre os Números reais na Educação Básica.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUND, Saddo Ag. As transformações do saber científico ao saber ensinado: o caso do logaritmo. Curitiba: EDUFPR, 2011.

ÁVILA, G. Eudoxo, Dedekind, números reais e ensino de Matemática. Revista do Professor de Matemática (RPM), Rio de Janeiro, n. 7, p. 1-8, 1985.

BEERY, Janet L.; SWETZ, Frank J.. **The Best Known Old Babylonian Tablet?** 2012. Disponível em: https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/the-best-known-old-babylonian-tablet#refs. Acesso em: 19 nov. 2021.

BOFF, Daiane Scopel. A construção dos números reais na escola básica. 2006. 254 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Ensino de Matemática, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

BOYER, Carl B.. **História da Matemática**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1974. 488 p. Tradução: Elza F. Gomide.

BRASIL. Ministério da Educação. (a). **Base Nacional Comum Curricular:** Ensino Fundamental Anos Finais. 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images /BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 13 out. 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. (b). **Base Nacional Comum Curricular**: Ensino Médio. 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/historico/BNCC_Ensino Medio_embaixa_site_110518.pdf. Acesso em: 14 out. 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. (a). **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental. 1998. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec. gov.br/images/pcn/matematica.pdf. Acesso em: 14 out. 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. (b). **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM)**: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/busca-geral/195-secretarias-112877938/seb-educacao-basica-2007048997/12598-publicacoes-sp-265002211. Acesso em: 13 out. 2021.

CHACE, Arnold Buffum. The Rhind mathematical papyrus: BRITISH MUSEUM IOO57 AND IOO58. 1927.

COBIANCHI, A. S. Estudos de continuidade e números reais: matemática, descobertas e justificativas de professores. Rio Claro, 2001. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista.

D´AMBRÓSIO, Ubiratan. A História da Matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na Educação Matemática. Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas. Maria A. V. Bicudo (organizadora). São Paulo: Editora UNESP, 1999.

DIAS, Marisa da Silva; COBIANCHI, Antonio Sérgio. **Correlação do Lógico e do Histórico no Ensino dos Números Reais**. 2019. Disponível em: http://mat.ufrgs.br/~vclotilde/disciplinas /html/Correlacao-logico-hitorico-ensino-numeros-reais.pdf. Acesso em: 13 out. 2021.

EVES, Howard. Introdução à história da matemática. 5. ed. Campinas, Sp: Editora da Unicamp, 2011. 848 p.

GRATTAN-GUINNESS, I. Not from nowhere: history and philophofy behind mathematical education. J. Math. Educ. Technol. 4: p 421 – 453, 1973.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de Matemática Elementar**: conjuntos e funções. 9. ed. São Paulo: Atual Editora, 2013. 410 p.

KNORR, W.R. The Evolution of the Euclidean Elements: A study of the Theory of Incomensurable Magnitudes and its Sgnificance for Early Greek Geometry. Boston, USA: D. Reidel Publishing company, 1975.

NIVEN, Ivan. **Números: Racionais e Irracionais**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984. 216 p. Traduzido por Renate Watanabe.

MENDES, Iran Abreu. **Matemática e Investigação em Sala de Aula**: tecendo redes cognitivas na aprendizagem. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009. 216 p.

MIGUEL, Antonio. História da matemática. 1997 - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas,SP.

MIGUEL, Antonio. Três estudos sobre história e educação matemática. 1993. [285]f. Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas,SP.

MOL, Rogério Santos. **Introdução à história da matemática.** Belo Horizonte: Caed-ufmg, 2013. 138 p.

MOREIRA, Plinio Cavalcanti; FERREIRA, Maria Cristina Costa. **O QUE É NÚMERO REAL?**: os números reais na formação do professor da educação básica. Os números reais na formação do professor da educação básica. 2019. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/335462658_O_QUE_E_NUMERO_REAL. Acesso em: 14 out. 2021.

MORI, Iracema; ONAGA, Dulce Satiko. **Matemática - Manual do Professor**: ideias e desafios. 18. ed. São Paulo: Saraiva, 2015. 352 p. (7° Ano).

PAIVA, Adriana Borges de. A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NO ENSINO E NA APRENDIZAGEM DA MULTIPLICAÇÃO. Boletim Cearense de Educação e História da Matemática: BOCEHM, Uberlândia, v. 5, n. 14, p. 98-108, 2018. Semestral. Disponível em: https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/issue/archive. Acesso em: 30 jul. 2022.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência de Educação. O professor PDE e os desafios da escola pública paranaense, 2009. Curitiba: SEED/PR., 2012. V.1. (Cadernos PDE). Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2009_uel_matematica_md_rosane_aparecida_galera_futigami.pdf. Acesso em: 18 out. 2021.

REIS, Alex Marques dos. **A matemática Egípcia - Solução de alguns problemas algébricos do papiro de Rhind**. 2018. 58 f. TCC (Graduação) - Curso de Matemática, Instituto Federal de São Paulo, São Paulo, 2018.

REYNAUD, Inês. Os egípcios e as frações. 2010. Disponível em: http://profinesreynaud.blogspot.com/2010/08/os-egipcios-e-as-fracoes.html. Acesso em: 13 jun. 2018.

Ripoll, J.B. - Ripoll, C.C. - Silveira, J.F.P. Números Racionais, Reais e Complexos – Apostila do Instituto de Matemática UFRGS, 2004.

RIPOLL, Cydara Cavedon. A construção dos números reais nos ensinos fundamental e médio. In: UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA (Bahia). II Bienal da SBM: 25 a 28 de outubro de 2004. 2. ed. Bahia: Sbm, 2004. p. 1-23

ROQUE, Tatiana; CARVALHO, João Bosco Pitombeira de. Tópicos de História da Matemática.-Rio de Janeiro: SBM, 2012. 1ª edição. Coleção PROFMAT. 285 p.

ROQUE, Tatiana. História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012. 409 p.

SANTOS, Renata dos; FONSECA, Simone Silva (org.). Dificuldades dos alunos do 7º ano do Ensino Fundamental em Aprender Fração. Ris: Revista Insignare Scientia, Alagoas, v. 2, n. 1, p. 50-66, 05 maio 2019.

SILVA, Andreia Aparecida Costa. Números Racionais. 2022. Disponível em: https://www.infoescola.com/matematica/numeros-racionais/. Acesso em: 05 mar. 2022.

SOUSA, Luísa Isabel Lourenço de. Números Reais: história e didática. 2013. 101 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Departamento de Matemática, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2013.

THE BRITISH MUSEUM (Reino Unido). **Tablet, old Babylonian**. Disponível em: https://www.bmimages.com/preview.asp?image=01612997894&itemw=4&itemf=0001&itemstep=1&itemx=3. Acesso em: 20 out. 2021.

YALE BABYLONIAN COLLECTION (Estados Unidos) (org.). **YBC 7289**. Disponível em: https://personal.math.ubc.ca/~cass/Euclid/ybc/ybc.html. Acesso em: 19 out. 2021.

ZACARIAS, Margarete Lúcia Ceolin. UMA PROPOSTA DE ENSINO DE FRAÇÕES USANDO A METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS. 2012. 90 f. Monografia (Especialização) - Curso de Matemática, Fundação Universidade Federal do Pampa, Alegrete, 2012.

ZULIN, Anderson Leandro. **Números Reais e a Educação Básica**. 2013. 80 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Centro de Ciências Exatas Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2013.

APÊNDICE

ATIVIDADE 1

Professor:____ ***Escola:***____	***Série:***
Nomes:____	
Enunciado: Divida 9 pães entre 10 homens.	
Desenvolvimento:	

Prova Real		
Soma	***Fator de Multiplicação***	***Número***

Exemplo de como seria feita essa Divisão

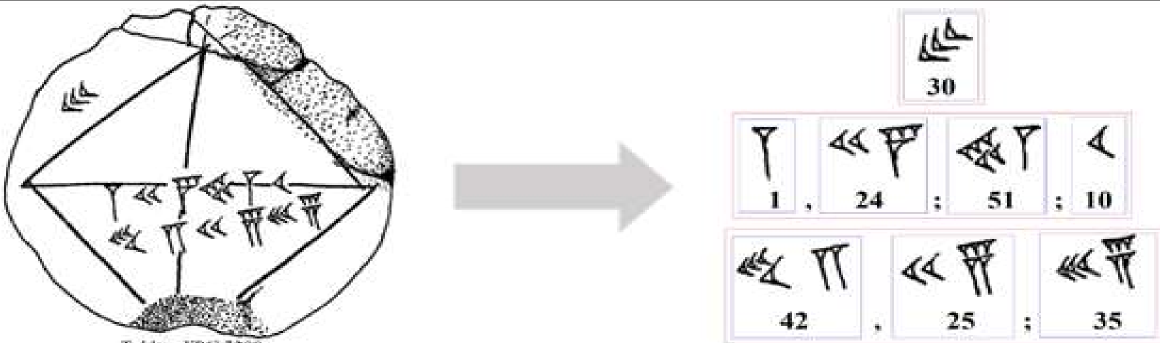
ATIVIDADE 2

Professor:________________________________ ***Série:***

Escola:________________________________

Nomes:________________________________

Enunciado: Vamos converter os valores de √2 e 30√2 encontrados pelos babilônios na base sexagesimal para o nosso sistema na base decimal. Além disso vamos comparar o resultado aproximado pelos babilônios com o valor real que conhecemos hoje em dia.



Tablete YBC 7289

Desenvolvimento:

Vamos agora determinar uma aproximação para √2:

ATIVIDADE 3

Professor:______________________________________ ***Série:***

Escola:______________________________________

Nomes:____

____

____

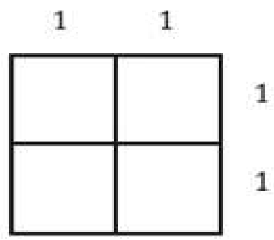
____

____

O DIÁLOGO MÊNON DE PLATÃO

Desenvolvimento:

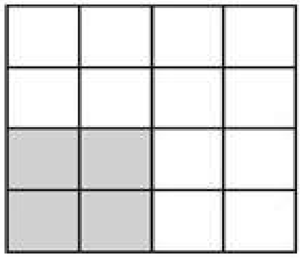
Qual a área desse quadrado?



E qual a área do quadrado de área dupla a este quadrado?

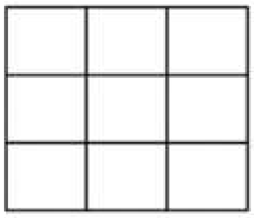
Qual comprimento terá cada lado da nova figura?

Essa é a superficie de oito pés?



Qual é a área dessa figura?

Pois bem, se a área do novo quadrado
deve medir três pés, a área do quadrado
deve ser três pés vezes três pés, correto?



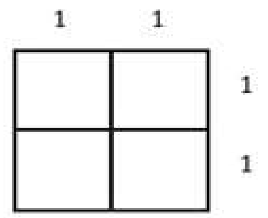
Qual a área desse novo quadrado?

A linha de três pés é o lado do quadrado de oito pés?

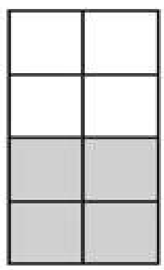
E então? Afinal, qual é o lado do quadrado sobre o qual estamos discutindo? Vê se podes responder a isso de modo correto!

Reparaste, caro Mênon, os progressos que a tua recordação fez?
Ele, de fato, nem sabia e nem sabe qual é o comprimento do lado de um quadrado de oito pés quadrados. Entretanto, no início da palestra, acreditava saber, e tratou de responder categoricamente, como se o soubesse;
mas agora está em dúvida, e tem apenas a convicção de que não sabe!

Responde-me, não é essa figura de nosso quadrado cuja área mede quatro pés quadrados?

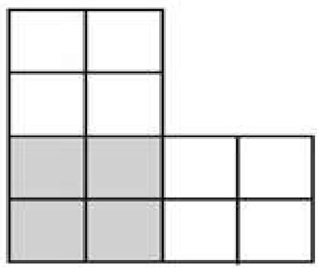


A este quadrado não poderemos acrescentar este outro, igual?



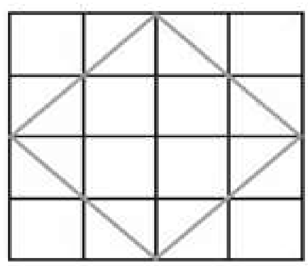
E a este terceiro, igual aos outros dois?

E não podemos preencher o ângulo com outro quadrado, igual a estes três primeiros?



E não temos agora quatro áreas iguais?

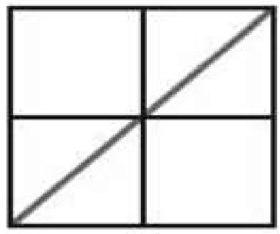
Que múltiplo do primeiro quadrado é a grande figura inteira?



E devíamos obter o dobro, recordaste?

E essa linha traçada de um vértice a outro de cada um dos quadrados interiores não divide ao meio a área de cada um deles?

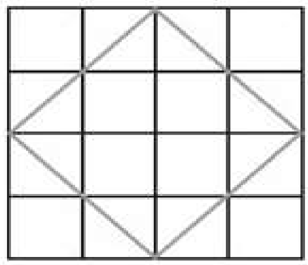
E não temos, assim, quatro linhas que
constituem uma figura interiror?



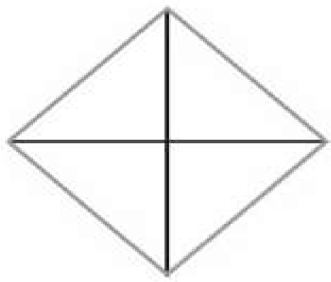
Qual é a área desta figura?

Vê: dissemos que cada linha nesses quatro quadrados
dividia cada um pela metade, não dissemos?

Bem; então, quantas metades temos aqui?



E aqui?



E em que relação aquelas quatro estão para estas duas?

Logo, quantos pés quadrados mede essa superficie?

E qual é o seu lado?

Os sofistas dão a essa linha o nome de diagonal,
e, por isso, usando esse nome podemos dizer que a
diagonal é o lado de um quadrado de área dupla,
exatamente como tu, ó escravo de Mênon, o afirmaste.