

GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS E RELATIVIDADE

Possibilidades para o ensino básico

EDUARDO SPINELLI OLIVEIRA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Matemática em Rede Nacional, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, orientada pelo Prof. Dr. Rodrigo Carvalho Sponchiado.

Catalogação na fonte
Biblioteca Francisco Montojos - IFSP Campus São Paulo
Dados fornecidos pelo(a) autor(a)

o48g Oliveira, Eduardo Spinelli
 Geometrias não euclidianas e relatividade:
 possibilidades para o ensino básico / Eduardo
 Spinelli Oliveira. São Paulo: [s.n.], 2022.
 119 f.

Orientador: Rodrigo Carvalho Sponchiado

Dissertação (Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional) - Instituto Federal
de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo,
IFSP, 2022.

1. Geometrias Não Euclidianas. 2. Geometria do
Táxi. 3. Geometria Hiperbólica. 4. Geometria
Esférica. 5. Teoria da Relatividade Restrita. I.
Instituto Federal de Educação, Ciência e
Tecnologia de São Paulo II. Título.

CDD 510

EDUARDO SPINELLI OLIVEIRA

GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS E RELATIVIDADE

Possibilidades para o ensino básico

Dissertação apresentada e aprovada
em 14 de outubro de 2022 como
requisito parcial para obtenção do
título de Mestre em Matemática.

A banca examinadora foi composta pelos seguintes membros:

Prof. Dr. Rodrigo Carvalho Sponchiado
IFSP – Câmpus São Paulo
Orientador e Presidente da Banca

Prof. Dr. Marco Aurelio Granero Santos
IFSP – Câmpus São Paulo
Membro da Banca

Prof. Dr. Márcio Luiz Lanfredi Viola
Universidade Federal de São Carlos
Membro da Banca

*“Sempre em frente, se cair levante-se,
se não puder, vá rastejando”.*

Para Dani.

AGRADECIMENTOS

Ao Instituto Federal de São Paulo pela estrutura concedida para realização deste trabalho.

Aos meus pais Seu Raimundo e Dona Maria, que me proporcionaram a melhor educação ao seu alcance e me ensinaram alguns dos segredos da vida, fazendo de mim o homem que sou hoje.

Aos meus irmãos Adriana e George, pela força em todos os momentos da vida.

Aos meus "Primos", que sempre me apoiaram e estiveram na torcida pelo meu sucesso, vocês sabem quem vocês são.

À todos os amigos e colegas de trabalho, que tanto incentivaram a conclusão deste projeto.

À todos os colegas do curso de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT - turma de 2019, por todo apoio e ajuda em todos os momentos desse curso.

À todos os funcionários e colaboradores do IFSP, pelo cuidado e zelo pelo bem estar de todos.

À todos os Professores do IFSP com os quais tive o prazer e a honra de aprender durante todo o tempo do curso, cada disciplina cursada representou uma grande evolução no aluno e no profissional da educação que sou. Faço questão que citá-los: Prof. Dr. Amari Goulart, Prof. Dr. Emiliano Augusto Chagas, Profa. Dra. Flávia Milo dos Santos, Prof. Dr. Henrique Marins de Carvalho, Prof. Me. Leandro Albino Mosca Rodrigues, Prof. Me. Lucas Casanova Silva, Prof. Dr. Luciano Aparecido Magrini, Prof. Dr. Marcio Yuji Matsumoto, Profa. Dra. Mônica Helena Ribeiro Luiz e Profa. Dra. Valeria Ostete Jannis Luchetta.

Um agradecimento especial ao meu orientador neste trabalho, Prof. Dr. Rodrigo Carvalho Sponchiado que, com muita calma e paciência compartilhou seu conhecimento e seu tempo, confiando no trabalho de um aluno já a muito fora do meio acadêmico, meu muito obrigado.

RESUMO

Este trabalho teve como objetivo trazer uma introdução às bases das geometrias não Euclidianas, destacando a Geometria do Táxi, a Geometria Hiperbólica, a Geometria Esférica e a Geometria de Minkowski, esta última ligada à Teoria da Relatividade Restrita, com o propósito de propor atividades para aplicação em turmas do ensino básico, principalmente no ensino médio. Tal proposta está de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais, uma vez que incentiva a pesquisa e a descoberta do conhecimento pelos próprios alunos ao abordar temas incomuns às aulas de Matemática tradicionais do ensino médio.

Palavras-chaves: Geometrias não euclidianas; Teoria da Relatividade Restrita; Geometria de Minkowski; Ensino básico.

NON-EUCLIDIAN GEOMETRIES AND RELATIVITY: Possibilities for basic education

ABSTRACT

This paper aimed to bring an introduction to the bases of non-Euclidean geometries, highlighting Taxicab Geometry, Hyperbolic Geometry, Spherical Geometry and Minkowski Geometry, the latter linked to the Special Theory of Relativity, enabling and proposing activities for application in elementary school classes, especially in high school. This proposal is in accordance with the National Curricular Parameters, as it encourages research and the discovery of knowledge by the students themselves when approaching unusual topics in traditional high school mathematics classes.

Keywords: Non-Euclidean geometries; Special Theory of Relativity; Minkowski geometry; Basic education.

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
Figura 1: Distância euclidiana entre pontos no plano cartesiano usual.....	25
Figura 2: Opções de trajeto do táxi para ir do ponto A ao B.....	26
Figura 3: Caso LAL na Geometria do Táxi	27
Figura 4: Elipse euclidiana	28
Figura 5: Elipse do táxi.....	29
Figura 6: Geometria do Táxi no deslocamento pela cidade	30
Figura 7: Pontos com coordenadas não inteiras	30
Figura 8: Alteração da malha do plano cartesiano	31
Figura 9: Possibilidades de trajetos de A para B.....	33
Figura 10: Extremos superiores e laterais da circunferência do taxista	34
Figura 11: Circunferência do taxista.....	35
Figura 12: Circunferência do taxista.....	35
Figura 13: Parábola do taxista.....	37
Figura 14: Parábola do taxista.....	37
Figura 15: Tractrix e pseudoesfera.....	41
Figura 16: Modelo de Beltrami-Klein para o plano hiperbólico	42
Figura 17: Geodésica no hiperboloide.....	43
Figura 18: Projeção de uma reta hiperbólica sobre o hiperboloide no disco de Klein	43
Figura 19: Disco de Poincaré para o plano hiperbólico	44
Figura 20: Projeção de uma reta hiperbólica no disco de Poincaré	45
Figura 21: Comparação entre a interpretação de Klein e Poincaré.....	46
Figura 22: Arcos ligando dois pontos na superfície esférica	48
Figura 23: Círculo máximo da esfera	48
Figura 24: Círculo máximo gerado pela intersecção da esfera com um plano que contém seu centro.....	49
Figura 25: Pontos antípodas e ângulo formado por duas retas na superfície esférica	50
Figura 26: Triângulo esférico.....	50
Figura 27: Triângulo esférico com três ângulos retos.....	51
Figura 28: Distância entre Salvador e Lisboa medida no globo terrestre	54

Figura 29: Transferidor esférico e triângulo esférico	56
Figura 30: Triângulo esférico com os menores ângulos possíveis	56
Figura 31: Triângulo esférico com um ângulo de 180°	57
Figura 32: Triângulo esférico com os maiores ângulos possíveis	58
Figura 33: Percurso do problema do urso no globo terrestre	59
Figura 34: Solução do problema do urso no globo terrestre	60
Figura 35: Menino brincando com um ioiô	62
Figura 36: Menino brincando com um ioiô sobre um skate em movimento.....	63
Figura 37: Comparativo de posições em relação ao tempo	67
Figura 38: Coordenadas do helicóptero C em relação aos referenciais A e B	68
Figura 39: Velocidade da luz emitida pelo carro B em relação ao referencial A	72
Figura 40: Velocidade da luz emitida pelo observador A em relação ao referencial B	73
Figura 41: Velocidade da luz emitida pelo observador A e pelo carro B	74
Figura 42: Luz emitida pelo carro B ₂ e refletida por B ₁ , de acordo com o referencial de B ₂	75
Figura 43: Luz emitida pelo carro B ₂ e refletida por B ₁ , de acordo com o referencial de A.....	76
Figura 44: Referenciais do observador A e do carro B ₂ sobrepostos.....	77
Figura 45: Deslocamento do eixo x _B	78
Figura 46: Coordenadas de um ponto segundo os referenciais do observador A e do carro B ₂	80
Figura 47: Interferômetro de Michelson e Morley	82
Figura 48: Esquema de funcionamento do interferômetro de Michelson e Morley....	82
Figura 49: Trajeto do feixe que viaja na direção do espelho 1	83
Figura 50: Relógio de luz	88
Figura 51: Trajeto de um pulso emitido por um Relógio de luz visto por referenciais que se movem um em relação ao outro	88
Figura 52: Pontos do espaço-tempo com $s^2 = 1$	91
Figura 53: Pontos com $s^2 = 1$ em S e S'.....	92
Figura 54: Malha de dois referenciais no diagrama de Minkowski	93
Figura 55: Coordenadas de um ponto num diagrama de espaço-tempo com dois referenciais em movimento relativo.....	94
Figura 56: Contração de comprimentos no diagrama de Minkowski.....	95

Figura 57: Contração de comprimentos no diagrama de Minkowski	96
Figura 58: Feixes de luz emitidos das extremidades de uma composição de trens observado do referencial do solo.	98
Figura 59: Representação do exemplo do trem no diagrama de Minkowski	101
Figura 60: Linhas de simultaneidade no diagrama de Minkowski	102
Figura 61: Passado, presente e futuro não relativista	103
Figura 62: Passados e futuros possíveis para um ponto A no diagrama do espaço-tempo de Minkowski	103
Figura 63: Cones de luz no espaço-tempo de Minkowski	104
Figura 64: Passado e futuro comuns a dois eventos no espaço-tempo	105
Figura 65: Linha de mundo de um referencial não inercial.....	106

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
1. INTRODUÇÃO.....	21
2. A GEOMETRIA DO TÁXI.....	24
2.1. A distância do táxi	24
2.2. Algumas figuras geométricas	27
2.3. A geometria urbana	29
2.4. Atividades propostas	32
2.4.1. Atividade 1: Distância do taxista entre pontos.....	32
2.4.2. Atividade 2: Circunferência do taxista	34
2.4.3. Atividade 3: Parábola do taxista	36
3. A GEOMETRIA HIPERBÓLICA.....	39
4. A GEOMETRIA ELÍPTICA	47
4.1. Atividades propostas	52
4.1.1. Atividade 1: A reta na superfície esférica	52
4.1.2. Atividade 2: Ângulos num triângulo esférico	54
4.1.3. Atividade 3: O problema do urso	58
5. A GEOMETRIA DE MINKOWSKI	61
5.1. O Espaço -Tempo de Galileu	61
5.2. A mecânica newtoniana	65
5.3. As transformações de Galileu e a velocidade da luz.....	70
5.4. As transformações Lorentz.....	79
5.5. O espaço-tempo de Minkowski.....	90
5.6. Atividades propostas	107
5.6.1. Atividade 1: A contração espacial	108
5.6.2. Atividade 2: A dilatação temporal.....	109
5.6.3. Atividade 3: A garagem de ônibus	110
5.6.4. Atividade 4: O Paradoxo dos Gêmeos	111
6. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	113
REFERÊNCIAS	115

1. INTRODUÇÃO

Ao longo dos anos o ensino da geometria vem sendo, cada vez mais, resumido à memorização de fórmulas e resolução de problemas padronizados, que não permitem aos estudantes do Ensino Básico, tanto do Ensino Fundamental II como do Ensino Médio que já possuem maturidade suficiente para investigar e questionar resultados, uma exploração mais ampla das possibilidades da geometria e de suas próprias capacidades (RESENDE; MESQUITA, 2013).

As demonstrações e deduções das fórmulas e propriedades geométricas são de extrema importância nesse período, uma vez que proporcionam o desenvolvimento de uma visão mais completa da Matemática desde os anos iniciais da formação, promovendo a percepção de interligação dos diversos segmentos (CABRAL, 2017). Neste sentido, a introdução às geometrias não euclidianas no início do Ensino Médio pode ser capaz de gerar surpresa o suficiente aos alunos para despertar a sua curiosidade e criatividade, ampliando seus horizontes à medida em que percebem as possibilidades da exploração fora da linha tradicional do pensamento euclidiano, com a qual eles já estão acostumados.

Uma introdução ao assunto pode ser conseguida com um modelo relativamente simples de geometria não euclidiana denominada Geometria do Táxi, que, aproveitando os conceitos de ponto, reta, plano e distância já dominados pelos jovens, pode alimentar uma discussão produtiva quando restringimos os deslocamentos no plano a apenas movimentos horizontais ou verticais, utilizando o plano cartesiano para auxiliar. Com o novo conceito de distância dessa geometria, é possível explorar as implicações nas propriedades de figuras já amplamente conhecidas pelos alunos, como triângulos e circunferências, solo fértil para o estímulo da curiosidade e habilidade de investigação.

Após o desenvolvimento de assuntos comuns ao Ensino Médio, como o aprofundamento às razões trigonométricas e à geometria espacial, é possível realizar discussões no âmbito das geometrias elíptica e hiperbólica. Aproveitando muito das discussões acerca da geometria do táxi, é possível realizar análises a respeito da distância entre pontos na superfície terrestre, bem como discutir os conceitos de retas e polígonos construídos nesses modelos, iniciando com a

geometria elíptica e abrindo caminho para superfícies com curvaturas negativas, como a geometria hiperbólica, sendo possível até compará-los com a geometria plana.

Considerando a grande difusão de curiosidades e elementos da *teoria da relatividade*, desenvolvida principalmente por Albert Einstein, que para a maioria dos estudantes é algo complicadíssimo e muito além de suas capacidades, é possível iniciar uma discussão sobre a geometria do espaço-tempo de Minkowski, partindo da física newtoniana já estudada, para ampliar as possibilidades dos alunos, que muitas vezes não se interessam pelos assuntos das áreas de exatas por nunca terem tido a possibilidade de investigar e desenvolver teorias próprias, que por mais inocentes que possam parecer, são capazes de despertar o interesse para o mundo das ciências exatas.

Após anos de trabalho em salas de aula do ensino médio aplicando o currículo tradicional de Matemática, sempre em busca de métodos para despertar o interesse e o engajamento dos alunos para as ciências, e tendo em vista o apelo da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que ressalta em suas competências gerais da educação básica a necessidade de:

Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas. (BRASIL, 2018, p. 9).

e também nas competências específicas de Matemática e suas tecnologias no ensino médio que afirma ser essencial que o aluno possa ser capaz de:

Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BRASIL, 2018, p. 523).

as Geometrias Não Euclidianas mostram-se um campo fértil para atingir tais objetivos, tendo em vista sua relevância no mundo científico e, principalmente, a relativa simplicidade para exploração de seus conceitos básicos nesse nível acadêmico.

O principal objetivo do presente trabalho é expor da forma mais simples possível as bases das geometrias não euclidianas, focando na Geometria do Táxi, Hiperbólica, Esférica e na Geometria de Minkowski, além de propor atividades que possam se desenvolvidas no Ensino Médio, com a intenção de propor novas práticas e investigações matemáticas.

2. A GEOMETRIA DO TÁXI

Também conhecida como Geometria de Manhattan, ou Geometria do Taxista, a Geometria do Táxi, juntamente com toda uma família de novas métricas, foi introduzida pelo matemático alemão, de ascendência judia-lituana, Hermann Minkowski (1863-1909) (Krause, 1986), que se destacou pela criação e desenvolvimento da geometria dos números, e utilizou métodos geométricos para resolução de problemas difíceis nos campos da teoria dos números, física, teoria da relatividade, dentre outros.

Tendo como base a Geometria Euclidiana, estabelecemos para a Geometria do Táxi uma nova métrica, ou seja, a distância entre dois pontos não será mais a medida do segmento de reta com extremidades nesses pontos.

Segundo Krause (1986), para apreciarmos plenamente a Geometria Euclidiana, é preciso ter algum contato com uma geometria não Euclidiana, seguindo algumas diretrizes.

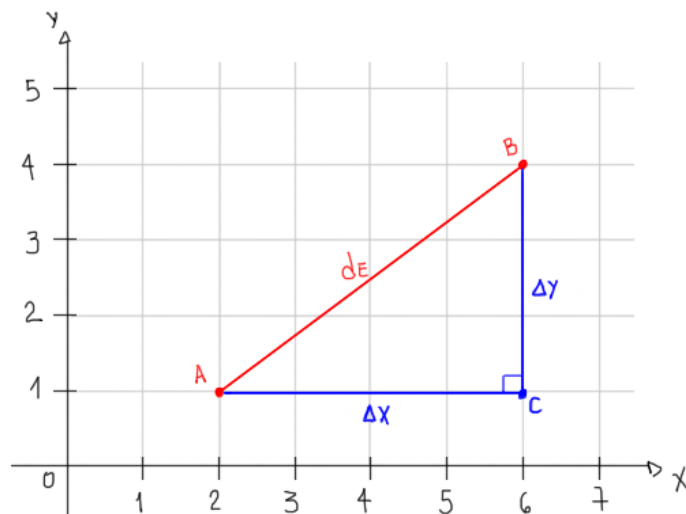
Idealmente, a geometria não Euclidiana escolhida deve (1) estar muito próxima da Geometria Euclidiana em sua estrutura axiomática, (2) ter aplicações significativas e (3) ser compreensível por qualquer pessoa que tenha passado por um curso inicial em Geometria Euclidiana. (KRAUSE, 1986, p.V)

Nesses termos, a Geometria do Táxi configura um ponto de partida ideal para a discussão de geometrias não Euclidianas, as quais se diferenciam pela definição de distância utilizada, mesmo que, até o momento, não se tenha configurado uma geometria completa baseada na métrica do táxi.

2.1. A distância do táxi

Tomemos no plano cartesiano os pontos $A(2,1)$ e $B(6,4)$. A distância euclidiana entre esses pontos, que denotaremos por $d_E(A,B)$, é a medida da hipotenusa do triângulo retângulo ABC , retângulo em C , no qual consideraremos os catetos \overline{AC} e \overline{BC} paralelos aos eixos coordenados x e y , respectivamente, conforme a Figura 1.

Figura 1: Distância euclidiana entre pontos no plano cartesiano usual.



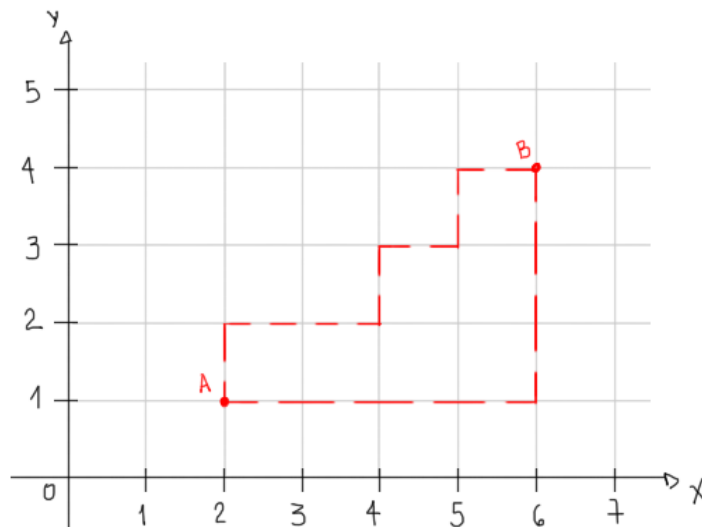
Fonte: Elaborada pelo autor em 2021.

Fazendo os catetos paralelos aos eixos temos, $AC = \Delta x = 4$ e, da mesma forma, $BC = \Delta y = 3$. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABC obtemos, $AB = d_E(A,B) = 5$ unidades de comprimento.

Na Geometria do Táxi, a distância entre dois pontos é definida de forma um pouco diferente. Para irmos do ponto A ao ponto B, segundo Krause (1986), não podemos nos deslocar da forma como corvo voa, ou seja, em linha reta. Em vez disso, devemos nos deslocar como um taxista poderia dirigir, percorrendo o menor trajeto possível pela cidade. Devemos considerar a malha do plano cartesiano como as ruas de uma cidade, em que cada ponto do plano corresponde ao cruzamento de duas ruas retas e perpendiculares, assim, a distância entre dois pontos é definida contando-se quantos blocos devemos nos deslocar, vertical e horizontalmente, para sair de A e chegar a B.

Na Figura 2, as linhas tracejadas correspondem a possíveis caminhos que poderiam ser escolhidos pelo táxi.

Figura 2: Duas opções de trajeto do táxi para ir do ponto A ao B.



Fonte: Elaborada pelo autor em 2021.

Para determinar a quantidade de caminhos possíveis, contamos a quantidade de deslocamentos para direita (D), no caso 4, e a quantidade de deslocamentos para cima (C), no caso 3, e, ao fazer todos os anagramas das letras da sequência DDDCCCC teremos a quantidade total de trajetos, sendo a distância do taxista, que denotaremos por d_T , em todos os casos, igual a 7 unidades de comprimento.

Na Geometria do Táxi, pontos e retas são definidos da mesma forma que na Geometria Euclidiana, e também os ângulos são medidos da mesma maneira, apenas a função distância é definida de modo diferente. Tomemos, arbitrariamente, os pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ intersecções da malha do plano cartesiano, a função distância entre os pontos A e B, $d_T(A, B)$, na Geometria do Táxi é definida por,

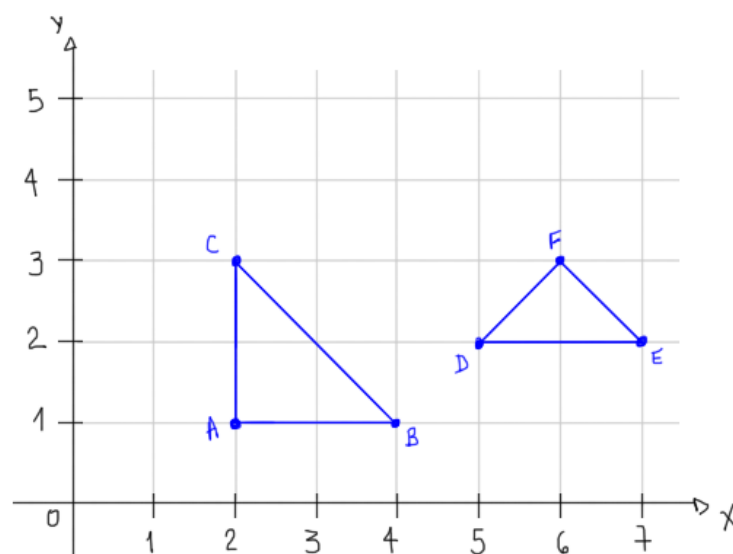
$$d_T(A, B) = |x_A - x_B| + |y_A - y_B|, \quad (1)$$

a qual satisfaz as seguintes propriedades:

- i. $d_T(A, A) = 0$;
- ii. Se $A \neq B$ então $d_T(A, B) > 0$;
- iii. $d_T(A, B) = d_T(B, A)$;
- iv. Para quaisquer pontos A, B e C distintos, $d_T(A, B) \leq d_T(A, C) + d_T(C, B)$.

Todos os Postulados e Axiomas da Geometria Euclidiana são válidos na Geometria do Táxi, apenas a métrica é alterada, o que gera consequências em algumas propriedades muito conhecidas, como por exemplo, no caso de congruência de triângulos lado-ângulo-lado (LAL). Para verificarmos tal fato, considere os triângulos ABC e DEF com vértices nos pontos A(2,1), B(4,1), C(2,3), D(5,2), E(7,2) e F(6,3), conforme a Figura 3.

Figura 3: Caso LAL na Geometria do Táxi.



Fonte: Elaborada pelo autor em 2021.

Ambos os triângulos são retângulos e isósceles com catetos medindo, na métrica do taxista, $d_T(A,B) = d_T(A,C) = d_T(D,F) = d_T(E,F) = 2$. No entanto, as hipotenusas têm medidas diferentes, uma vez que $d_T(B,C) = 4$ e $d_T(D,E) = 2$. Dessa forma, temos dois triângulos retângulos com catetos de mesma medida que não são congruentes, o que não ocorre se considerarmos a métrica euclidiana.

2.2. Algumas figuras geométricas

Considerando que apenas a métrica é diferente para Geometria do Táxi, vamos nos concentrar nas figuras definidas em termos de distância, como por exemplo, a elipse e a circunferência.

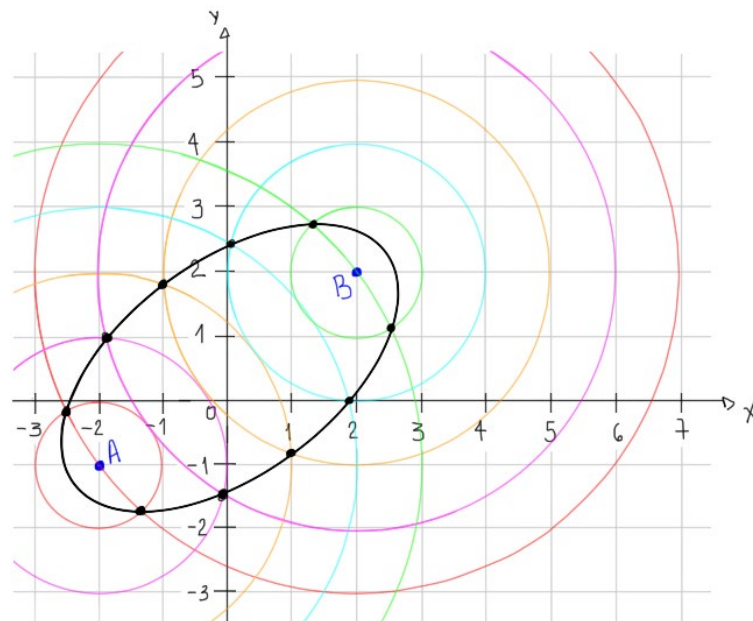
Por definição, uma elipse é o conjunto dos pontos cuja soma das distâncias para dois pontos dados é constante, esses pontos são chamados de focos da elipse.

Tomando os pontos $A(-2,-1)$ e $B(2,2)$, então uma possível elipse euclidiana, que denotaremos por E , com focos nesses pontos é definida como o conjunto dos pontos P cuja soma das distâncias para os focos seja igual a 6.

$$E = \{P \mid d_E(P, A) + d_E(P, B) = 6\}.$$

Uma estratégia para construção dessa elipse euclidiana é traçar uma circunferência com centro em A e raio 1 e outra com centro em B e raio 5, obtendo, nos pontos de intersecção desses circunferências, àqueles que satisfazem a soma das distâncias. Em seguida, traça-se outra circunferência com centro em A e raio 2 e outra com centro em B e raio 4, obtendo nas intersecções mais dois pontos da elipse. Repetindo esse processo é possível obter uma boa visualização da elipse em questão, conforme a Figura 4, onde os pares de círculos cujas intersecções representam os pontos da elipse estão desenhados com a mesma cor.

Figura 4: Elipse euclidiana.



Fonte: Elaborada pelo autor em 2021.

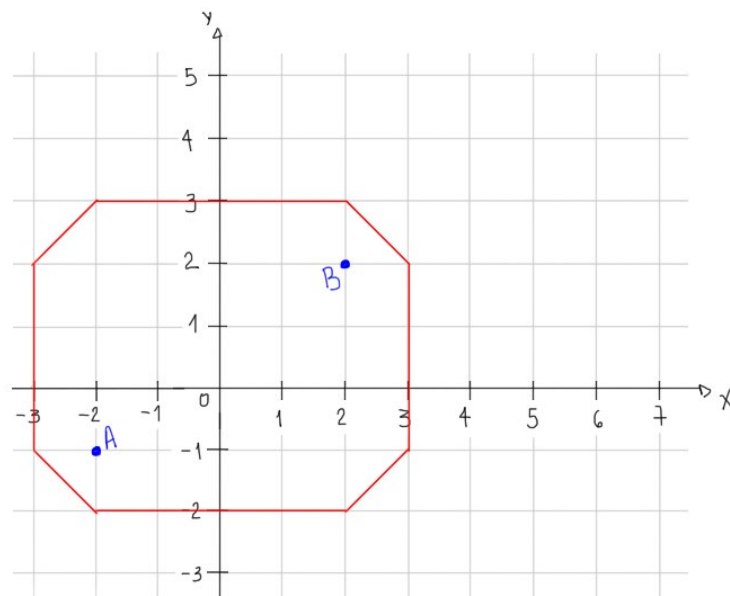
Para desenhar uma elipse com as mesmas características, mas agora considerando a métrica do táxi, seguimos a mesma ideia, no entanto, como a circunferência também é uma figura definida em termos de distância, na Geometria do Táxi ela

também não se apresenta da mesma forma. Deixaremos para as atividades sugeridas a discussão quanto à circunferência do táxi.

A Figura 5 traz a representação da elipse do táxi definida com os mesmos focos, $A(-2,-1)$ e $B(2,2)$, porém, formada pelos pontos cuja soma das distâncias aos focos seja igual a 9, definida por,

$$E = \{P | d_T(P, A) + d_T(P, B) = 9\}$$

Figura 5: Elipse do táxi.



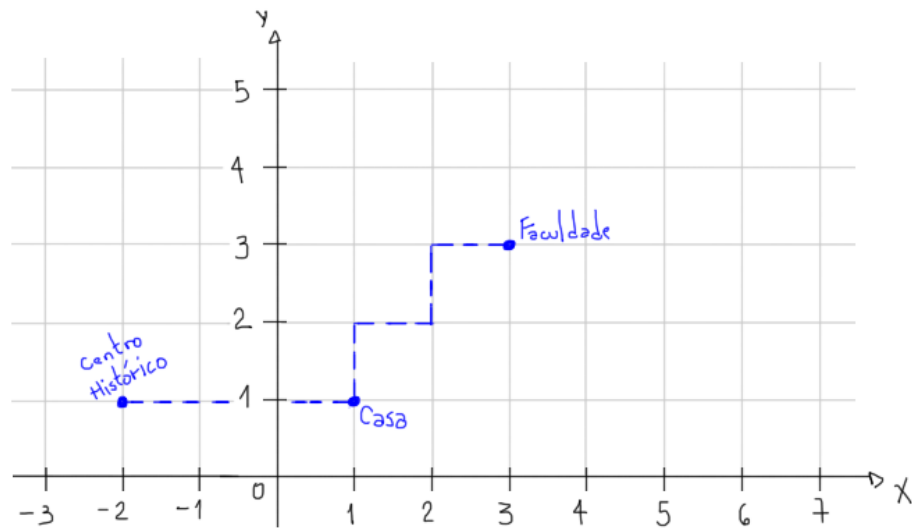
Fonte: O autor (2021).

Vale ressaltar que, com a distância do táxi entre os focos é igual a 7, não é possível desenhar uma elipse na métrica do taxista cuja soma das distâncias de cada ponto aos focos seja igual a 6, conforme mostrado na Figura 4.

2.3. A geometria urbana

A Geometria do Táxi é mais útil do que a Geometria Euclidiana para uma pessoa que deseja ir de sua casa, no ponto $(1,1)$, até a faculdade que fica em $(3,3)$, conforme a Figura 6. Também é possível afirmar que o centro histórico, localizado em $(-2,1)$, fica mais próximo da casa do que a faculdade, o que não é verdade se utilizarmos a métrica euclidiana.

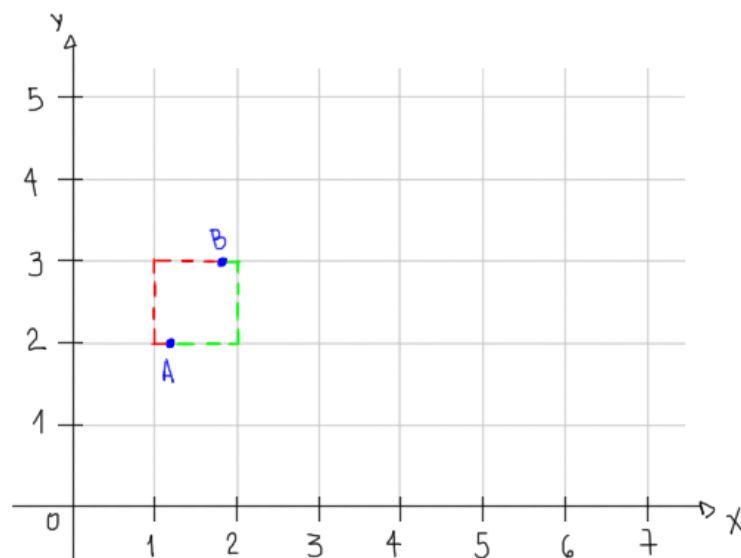
Figura 6: Geometria do Táxi no deslocamento pela cidade.



Fonte: Elaborada pelo autor em 2021.

Numa cidade, o destino de uma viagem nem sempre estará no cruzamento de duas ruas perpendiculares, ou seja, podemos precisar calcular a menor distância do taxista para irmos do ponto $A(\frac{5}{4}, 2)$ ao ponto $B(\frac{15}{8}, 3)$, conforme ilustrado na Figura 7.

Figura 7: Pontos com coordenadas não inteiras.



Fonte: Elaborada pelo autor em 2021.

Seria necessário decidir o trajeto mais curto calculando a distância do taxista pelo traçado em vermelho e em verde e, depois, comparando os valores.

Para o trajeto vermelho obtemos,

$$d_T(A, B) = \left| \frac{5}{4} - 1 \right| + 1 + \left| 1 - \frac{15}{8} \right| = \frac{17}{8}.$$

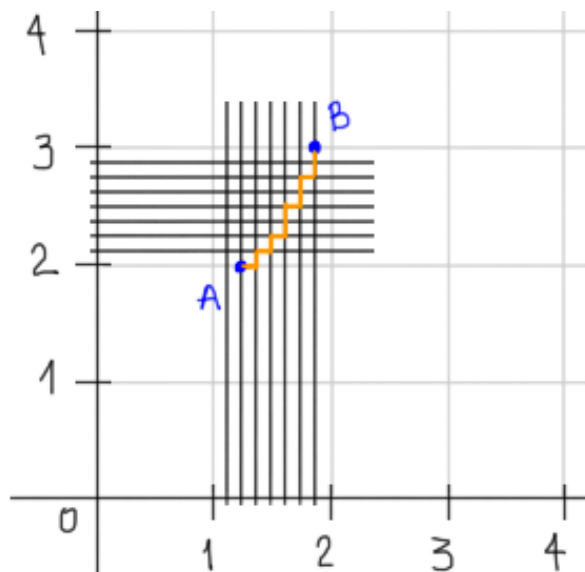
Enquanto o trajeto verde resulta em,

$$d_T(A, B) = \left| \frac{5}{4} - 2 \right| + 1 + \left| 2 - \frac{15}{8} \right| = \frac{15}{8}.$$

Sendo então o trajeto verde o de menor distância.

Poderíamos também considerar modificar a malha do sistema coordenado de modo que os pontos passassem a pertencer ao cruzamento de duas ruas, conforme feito na Figura 8, sendo o menor trajeto representado pela linha laranja dado por, $d_T(A, B) = \left| \frac{5}{4} - \frac{15}{8} \right| + |2 - 3| = \frac{13}{8}$. Porém, considerando o desenho de uma cidade, tal tratamento não seria viável, tendo em vista que o táxi não poderia trafegar pelo caminho demarcado.

Figura 8: Alteração da malha do plano cartesiano.



Fonte: Elaborada pelo autor em 2021.

É interessante imaginar o que resultaria se pudéssemos diminuir o tamanho dos quarteirões indefinidamente, fazendo as ruas cada vez mais próximas umas das outras, mas deixamos a cargo do leitor a experiência de pensamento a respeito dessa questão, lembrando que o fato do trajeto se aproximar de uma linha reta não altera a métrica, ou seja, as distâncias do táxi continuarão sendo definidas da mesma forma.

2.4. Atividades propostas

As atividades sugeridas a seguir têm como objetivo, além da revisão dos conceitos de plano cartesiano, pontos no plano, e distância euclidiana no plano cartesiano, levar os alunos à descoberta de conceitos, relações e quantidades que possam ser estudadas no âmbito da Geometria do Taxista, como o cálculo da distância entre pontos e a representação de figuras correspondentes a algumas já conhecidas da Geometria Euclidiana, mas agora de acordo com os conceitos da nova métrica apresentada, que representa uma nova geometria.

Não definimos um tempo para cada uma das atividades propostas, mas acreditamos que cada uma delas leve em torno de 50 minutos, a depender das discussões apresentadas pelos alunos e da intimidade da turma com os conceitos da Geometria Euclidiana necessários para iniciar as tarefas.

Outras atividades e discussões podem ser encontradas em Loiola (2014) e também em Loiola e Costa (2015)

2.4.1. Atividade 1: Distância do taxista entre pontos

Objetivo específico: Estabelecer uma fórmula para determinar a distância entre dois pontos no plano cartesiano conforme a métrica do taxista.

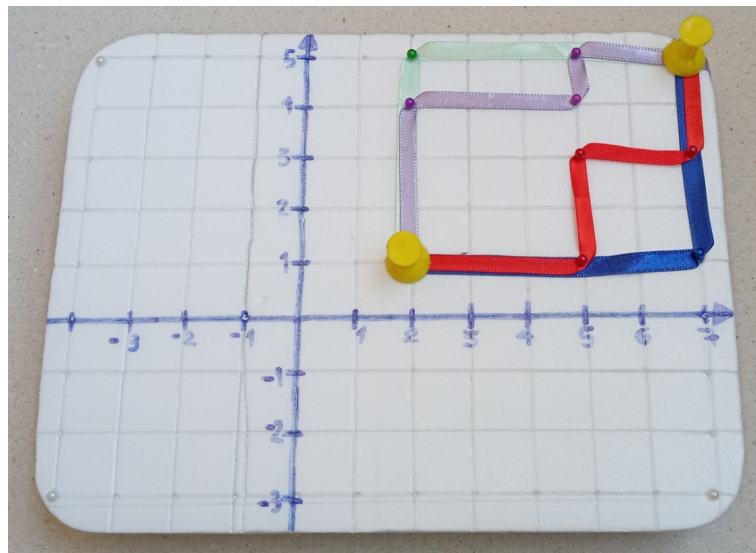
Objetivos gerais: Revisar o funcionamento do plano cartesiano para o posicionamento de pontos sobre ele, cálculo de distâncias, e aplicação do Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo.

Para esta primeira atividade, recomendamos dividir os alunos em grupos de no máximo 5 integrantes, para possibilitar a discussão proposta.

Descrição da atividade:

- I. A partir de um plano cartesiano conforme a Figura 9, utilizando pedaços de papelão, marcar os pontos A(2,1) e B(7,5);
- II. Cada grupo deve estabelecer diversas opções de trajeto entre A e B, utilizando barbante conforme mostrado na Figura 9, procurando sempre a menor distância possível;
- III. Comparar os trajetos resultantes de cada grupo, destacando os trajetos repetidos, e avaliando que todos os trajetos apresentam a mesma distância, no caso, 9 unidades de comprimento;
- IV. Cada grupo, independentemente, deve estabelecer uma forma de calcular a distância entre os pontos, pensando de forma a generalizar o cálculo para quaisquer pontos;
- V. Comparando os resultados, promover uma discussão com o intuito de criar uma fórmula única para o cálculo da distância entre dois pontos no plano cartesiano utilizando a métrica do taxista.

Figura 9: Possibilidades de trajetos de A para B.



Fonte: Elaborada pelo autor em 2021.

Sugestões para o Professor: Dependendo do conhecimento dos alunos com relação ao conceito de módulo, a discussão sobre o valor absoluto da diferença entre as coordenadas pode ser muito valiosa para construções futuras na Matemática e na Física. Sugerindo pontos nos demais quadrantes do plano

cartesiano, tendo em vista que a discussão quanto ao sinal da diferença levará a conclusões muito úteis, sendo interessante levar o assunto a fundo para que tal conceito fique claro, mesmo que, momentaneamente, pareça ser um artifício criado apenas para resolver um problema específico para Geometria do Táxi.

2.4.2. Atividade 2: Circunferência do taxista

Objetivo específico: Visualizar uma circunferência perante a métrica do taxista.

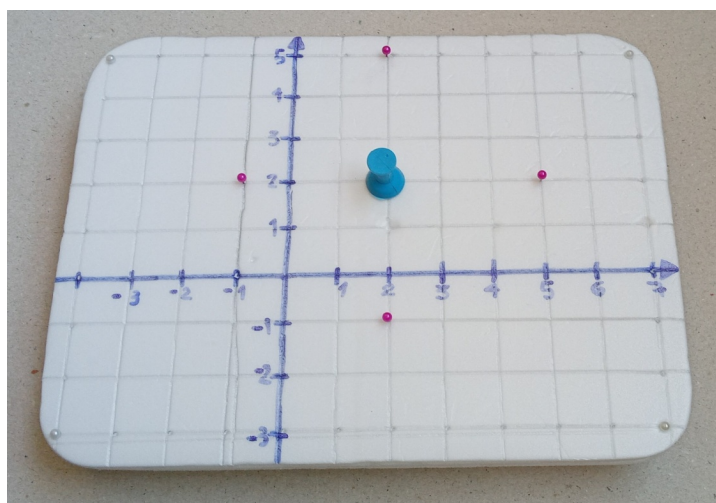
Objetivos gerais: Revisar a definição de circunferência euclidiana e o conceito de lugar geométrico.

Esta atividade pode ser realizada com a participação de toda a turma, sem a necessidade de divisão de grupos. Julgamos que a discussão dos resultados e conclusões será mais interessante com a participação de toda a turma.

Descrição da atividade:

- I. A partir do mesmo plano cartesiano utilizado na Atividade 1, marcar o ponto $A(2,2)$ que será o centro da circunferência;
- II. Solicitar que os alunos marquem no plano pontos que distem 3 unidades do centro da circunferência. Provavelmente serão marcados inicialmente os extremos superiores e laterais, conforme a Figura 10.

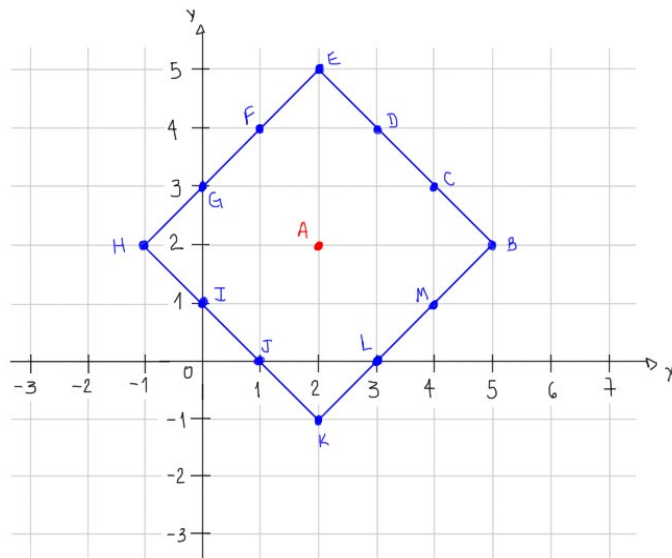
Figura 10: Extremos superiores e laterais da circunferência do taxista.



Fonte: Elaborada pelo autor em 2021.

- III. Se for necessário, sugerir outras opções até que os pontos B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L e M, conforme a Figura 11, tenham sido marcados;

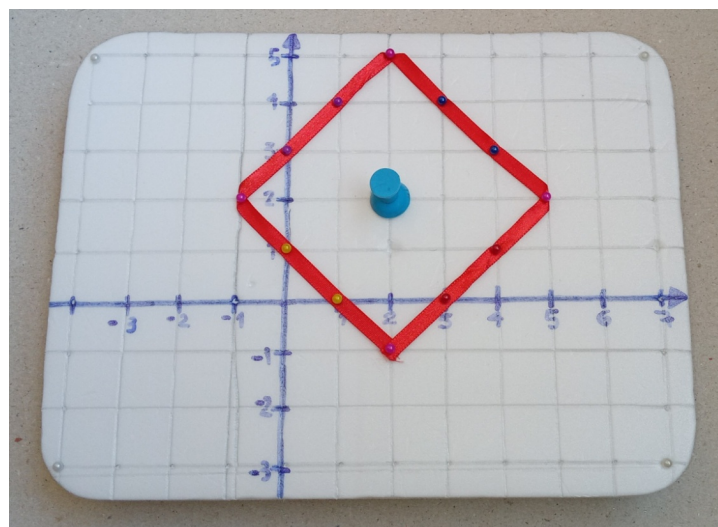
Figura 11: Representação de pontos na circunferência do taxista.



Fonte: Elaborada pelo autor em 2021.

- IV. Após a marcação de todos os pontos pertencentes às intersecções do plano cartesiano, iniciar uma discussão quanto ao formato de uma circunferência de acordo com a geometria do taxista, então será possível ligar os pontos conforme a Figura 12.

Figura 12: Circunferência do taxista.



Fonte: Elaborada pelo autor em 2021.

Sugestões para o Professor: É importante ressaltar que, para podermos ligar os pontos, conforme feito na Figura 10, é necessário extrapolar a malha definida, visualizando todos os pontos do plano que satisfazem a distância solicitada até o ponto A definido como centro da circunferência.

2.4.3. Atividade 3: Parábola do taxista

Objetivo específico: Visualizar uma parábola de acordo com a métrica do taxista.

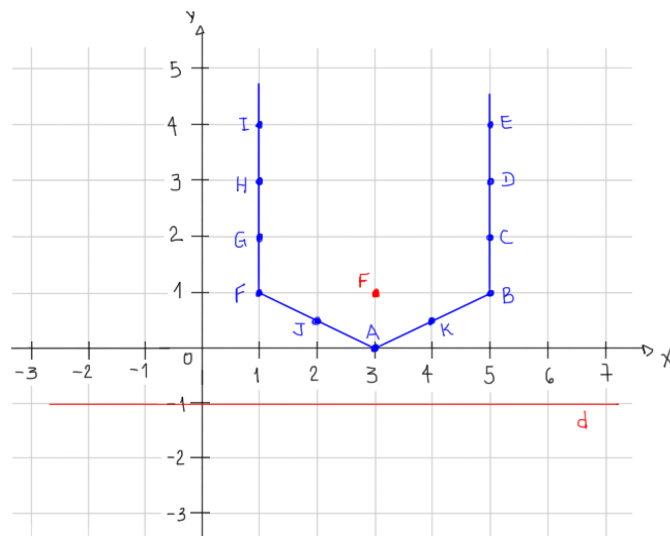
Objetivos gerais: Expor a definição de parábola euclidiana e o conceito de lugar geométrico, além da discussão das propriedades físicas da parábola no âmbito de suas propriedades ópticas.

Para esta atividade, recomendamos dividir os alunos em grupos de no máximo 5 integrantes, para possibilitar a discussão proposta.

Descrição da atividade:

- I. A partir do mesmo plano cartesiano utilizado na Atividade 1, marcar o ponto $F(3,1)$, que será o foco da parábola, e a reta $d: y = -1$, que será sua diretriz.
- II. Solicitar que os alunos marquem no plano pontos que sejam equidistantes do ponto A e da diretriz, é possível que haja dificuldades para que os alunos visualizem esses pontos, é importante acompanhá-los de perto;
- III. Vale lembrar que podemos marcar pontos com coordenadas não inteiras, caso seja necessário, sugerimos os pontos A, B, C, D, E, F, G, H, I, J e K conforme a Figura 13.

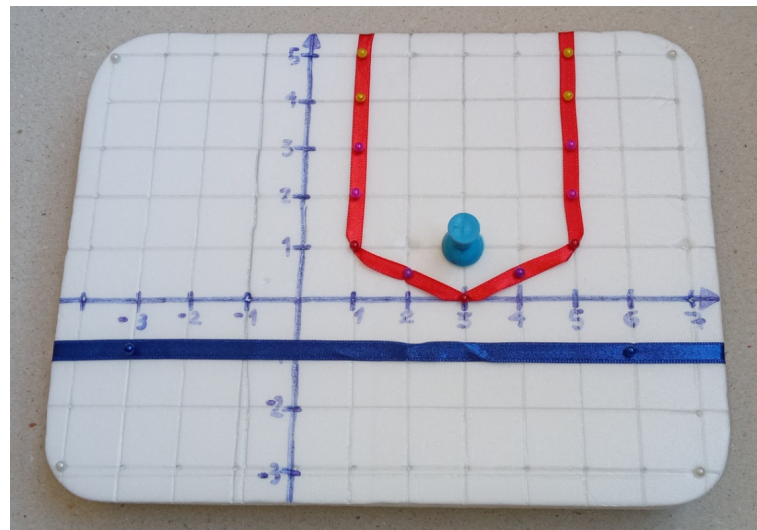
Figura 13: Representação de pontos na parábola do taxista.



Fonte: Elaborada pelo autor 2021.

- IV. Após a marcação de todos os pontos, iniciar uma discussão quanto ao formato de uma parábola de acordo com a geometria do taxista, resultado numa curva conforme a Figura 14.

Figura 14: Parábola do taxista.



Fonte: Elaborada pelo autor 2021.

Sugestões para o Professor: Assim como feito para desenhar a circunferência, será necessário extrapolar a malha para podermos ligar os pontos da parábola, e este é sempre um exercício de pensamento interessante a realizar com os alunos,

lembrando que sempre podemos reduzir o tamanho da malha ao nível que possibilite visualizar todos os pontos necessários para representar o elemento desejado.

3. A GEOMETRIA HIPERBÓLICA

A Geometria Hiperbólica, assim como já ocorrera em outras ocasiões na história, foi desenvolvida independentemente, na mesma época, pelo matemático húngaro János Bolyai (1802-1860) e pelo russo Nicolai Ivanovich Lobachevsky (1792-1856).

De acordo com Greenberg (2008), Bolyai publicou pela primeira vez suas ideias como um apêndice de 26 páginas no tratado matemático *Tentamen* em 1831, escrito por seu pai e também matemático Farkas Bolyai (1775-1856), que dedicou muitos anos de sua vida na tentativa de provar o quinto Postulado de Euclides. Farkas enviou uma cópia para seu amigo e principal matemático da época, o alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855), que apontou que ele mesmo já havia chegado a tais resultados, mas não os publicara, pois as pessoas ainda não estavam preparadas para entender tais conclusões, ficando feliz pelo filho de seu amigo tê-lo livrado do esforço de convencê-las.

Segundo Coutinho (2001), Lobachevsky foi o primeiro a realmente publicar um trabalho sobre geometria não euclidiana, inicialmente chamando-a de Geometria Imaginária e depois de Pangeometria. Inicialmente, seu trabalho atraiu pouca atenção, pois foi escrito em russo, e ele chegou a ser chamado de insolente por publicar falsas invenções. Seguindo a algumas outras publicações em russo, ele publicou um tratado, agora em alemão, e o enviou para Gauss, que afirmou que Lobachevsky desenvolvera o trabalho de forma magistral. Neste trabalho, Lobachevsky iniciou com os seguintes dizeres,

Na geometria encontro certas imperfeições que considero serem a razão pela qual essa ciência, além da transição para a analítica, ainda não pôde avançar daquele estado que chegou até nós de Euclides.

Como pertencente a essas imperfeições, considero a obscuridade nos conceitos fundamentais das grandezas geométricas e na maneira e método de representar a medição dessas grandezas e, finalmente, a importante lacuna na teoria das paralelas, para a qual, todos os esforços dos matemáticos para preenchê-la, foram até agora em vão. (Lobachevsky, 1914, P. 11 - Tradução do autor)

A semelhança nas abordagens de Lobachevsky e Bolyai é impressionante, Greenberg (2008) afirma,

Ambos atacaram a geometria plana via "horosfera" em três dimensões (é o limite de uma esfera em expansão quando seu raio

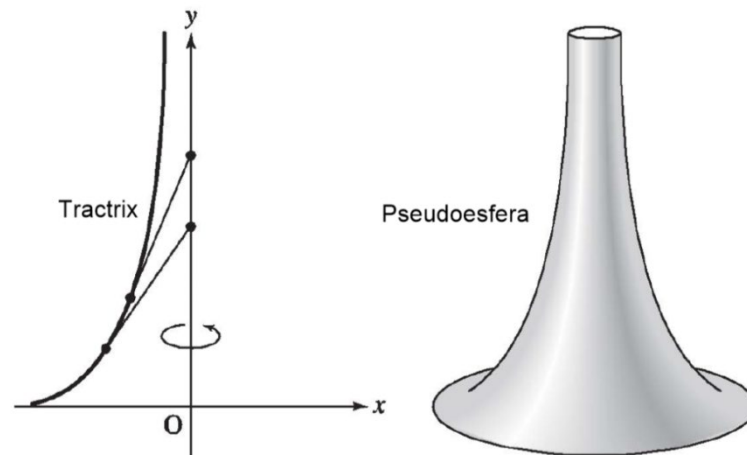
tende ao infinito). Ambos mostraram que a geometria em uma horosfera, onde "linhas" são interpretadas como "horociclos" (limites de círculos), é euclidiana. Ambos mostraram que a trigonometria esférica euclidiana é válida na Geometria Hiperbólica, e ambos construíram um mapeamento da esfera para o plano não euclidiano para derivar as fórmulas da trigonometria não euclidiana. Ambos tinham uma constante em suas fórmulas que não conseguiam explicar; o trabalho posterior do matemático alemão Georg Bernhard Riemann (1826-1866) mostrou se tratar da curvatura de um plano hiperbólico. (GREENBERG, 2008, P.247)

A Geometria Hiperbólica nasce ao contrariarmos o Postulado das paralelas afirmando que por um ponto fora de uma reta passa mais de uma paralela em relação à reta dada. A visualização de tal geometria não é simples, o próprio plano hiperbólico ainda se mostra um mistério, assim como uma reta nessa geometria. Criar um modelo para a Geometria Hiperbólica consiste em encontrar modelos euclidianos para representar objetos hiperbólicos, uma vez que estamos acostumados a ver diagramas com base na Geometria Euclidiana.

O matemático italiano Eugenio Beltrami (1835-1900), dedicado principalmente à Geometria Diferencial, em seu artigo *Saggio di Interpretazione della Geometria Non-Euclidea* (Ensaio sobre a interpretação da Geometria Não Euclidiana) de 1868, encontrou um modelo para uma região do plano hiperbólico numa superfície do espaço euclidiano tridimensional chamado pseudoesfera.

A pseudoesfera é obtida a partir da rotação de uma curva chamada tractrix em torno de sua assíntota, sendo uma tractrix a curva cujo segmento tangente em qualquer ponto da curva até a assíntota tem comprimento constante, conforme a Figura 15. Apesar de não ser um modelo de todo o plano hiperbólico, a pseudoesfera causou grande impacto ao ajudar na visualização da Geometria Hiperbólica ao menos localmente.

Figura 15: Tractrix e pseudoesfera.



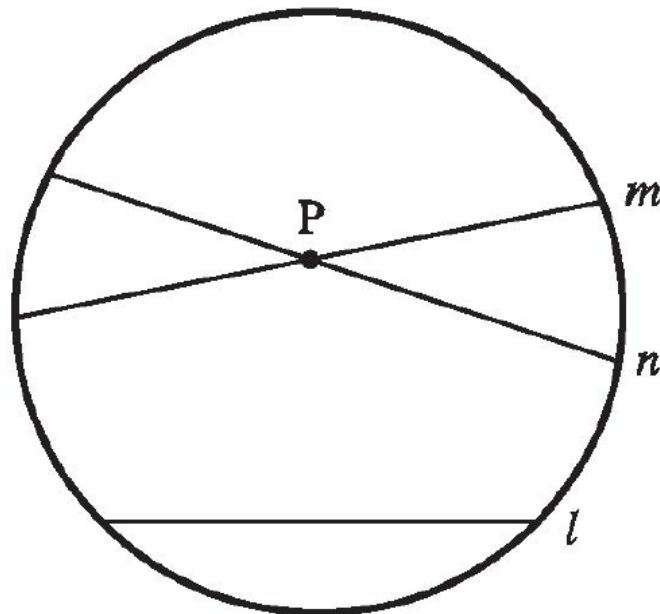
Fonte: Greenberg (2008).

Beltrami não se preocupou em provar a consistência da Geometria Hiperbólica nem entrou na discussão quanto ao quinto postulado de Euclides, ele se preocupou em mostrar que Lobachevsky não havia introduzido novos conceitos estranhos, mas sim, havia descrito a teoria das geodésicas em superfícies de curvatura negativa constante, conceitos que eram familiares aos geômetras diferenciais.

Além da pseudoesfera, Beltrami também criou um modelo para todo o plano hiperbólico, na forma de um disco onde as linhas hiperbólicas são representadas por cordas euclidianas em um círculo unitário do qual exclui-se a borda, mas a função distância não é a usual. Tal modelo foi, posteriormente, desenvolvido pelo matemático alemão Felix Klein (1849-1925).

No modelo de Klein, os pontos do plano hiperbólico são representados pelos pontos interiores a uma circunferência euclidiana, e as linhas hiperbólicas serão as cordas desse círculo sem considerar suas extremidades, e assim, o plano hiperbólico é representado apenas pelos pontos interiores da circunferência. Na Figura 16 é possível notar que o postulado das paralelas da Geometria Hiperbólica, em que por um ponto não pertencente a uma reta passam mais de uma paralela à reta dada, é válido nesse modelo.

Figura 16: Modelo de Beltrami-Klein para o plano hiperbólico.

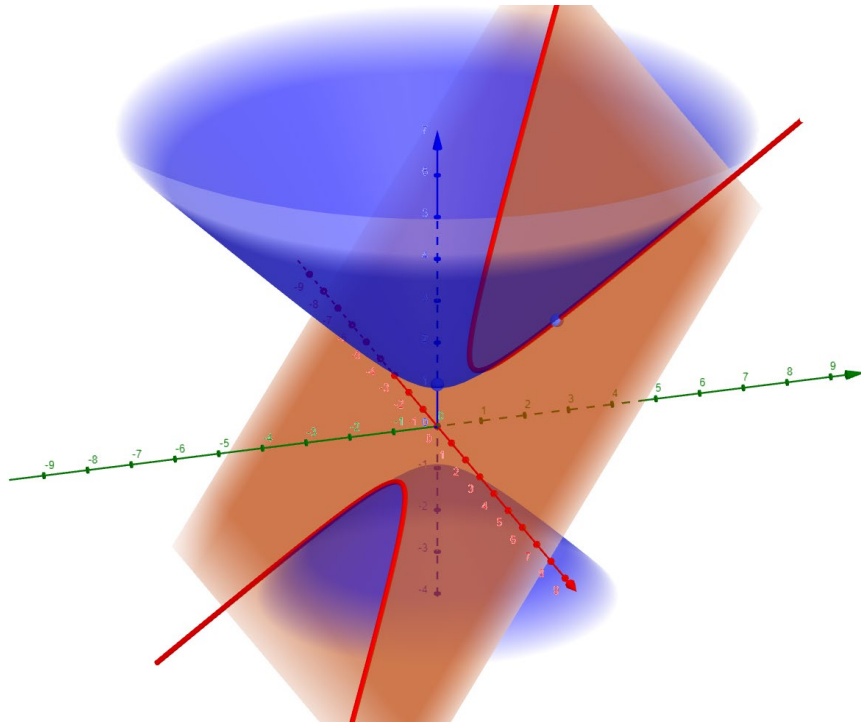


Fonte: Greenberg (2008).

Pela Figura 16, as cordas m e n , passando por P , são ambas paralelas à corda l . Nesse modelo, retas paralelas são aquelas que não tem ponto em comum. O fato de essas retas se encontrarem fora da circunferência é irrelevante, lembrando que os pontos da circunferência e externos a ela não representam o plano hiperbólico.

A representação de Klein consiste em projetar as retas hiperbólicas traçadas sobre um hiperboloide de raio 1, num disco euclidiano de mesmo raio com centro no vértice do hiperboloide. O hiperboloide pode ser definido como uma superfície gerada pela rotação de uma hipérbole em torno de seu eixo transversal, o eixo que contém os focos. Este modelo é uma esfera pseudoeuclidiana, uma pseudoesfera no espaço de Minkowski, e desempenha o papel da esfera no espaço euclidiano. As geodésicas, ou seja, as retas contidas no hiperboloide, são definidas pela intersecção deste com um plano que contém seu centro. A Figura 17 mostra uma geodésica no hiperboloide.

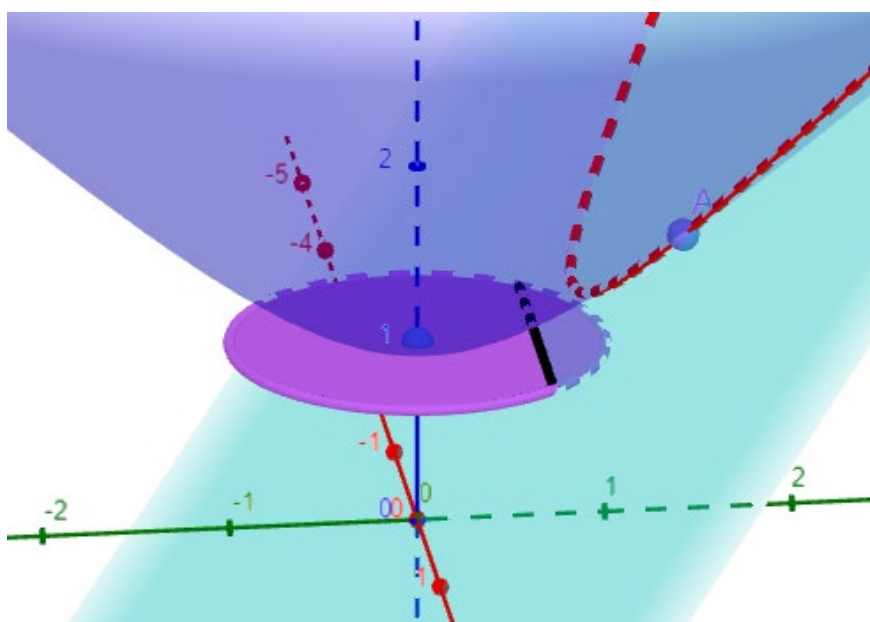
Figura 17: Geodésica no hiperboloide.



Fonte: Elaborada pelo autor em 2022.

A Figura 18 apresenta uma reta sobre um hiperboloide e a interpretação de Klein para tal reta projetada no disco de Klein.

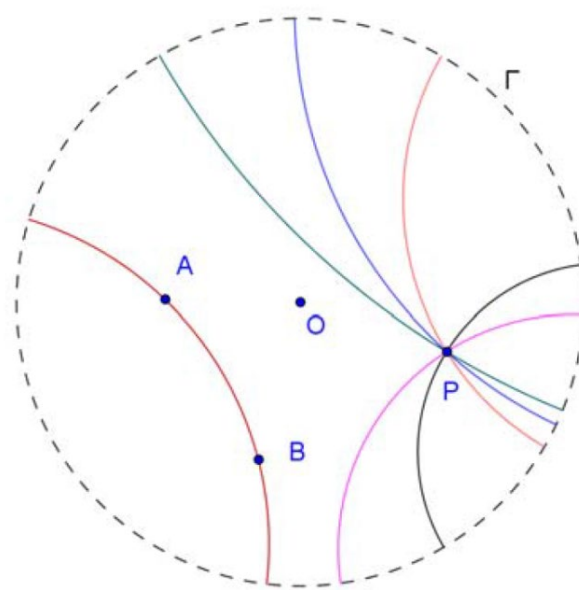
Figura 18: Projeção de uma reta hiperbólica sobre o hiperboloide no disco de Klein.



Fonte: Elaborada pelo autor em 2022.

Outro importante modelo para o plano hiperbólico foi dado pelo matemático francês Jules Henri Poincaré (1854-1912) e, assim como o modelo de Beltrami-Klein, o plano hiperbólico de Poincaré também é representado pelos pontos interiores a um círculo euclidiano, mas as retas são definidas de maneira diferente. No disco de Poincaré, as retas hiperbólicas serão representadas por arcos de circunferências ortogonais ao disco¹, sem considerar os pontos de intersecção, apenas os pontos interiores, e qualquer corda que passe pelo centro do disco também representa uma reta. Na Figura 19 observa-se mais uma representação do postulado das paralelas da Geometria Hiperbólica, na qual a reta AB é paralela à todas as retas passando por P.

Figura 19: Disco de Poincaré para o plano hiperbólico.

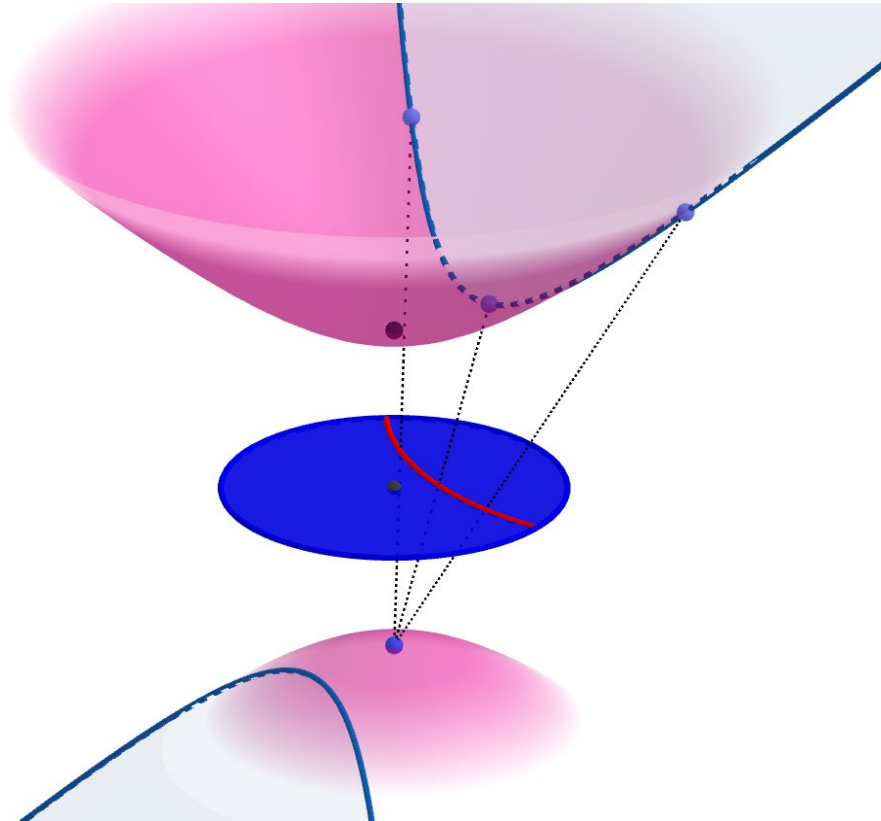


Fonte: Lovis e Franco (2012).

Na Figura 20 verifica-se a interpretação de Poincaré para reta no plano hiperbólico projetada no disco de Poincaré.

¹ Duas circunferências são ortogonais se os segmentos que ligam o ponto de intersecção ao centro de cada uma delas são perpendiculares.

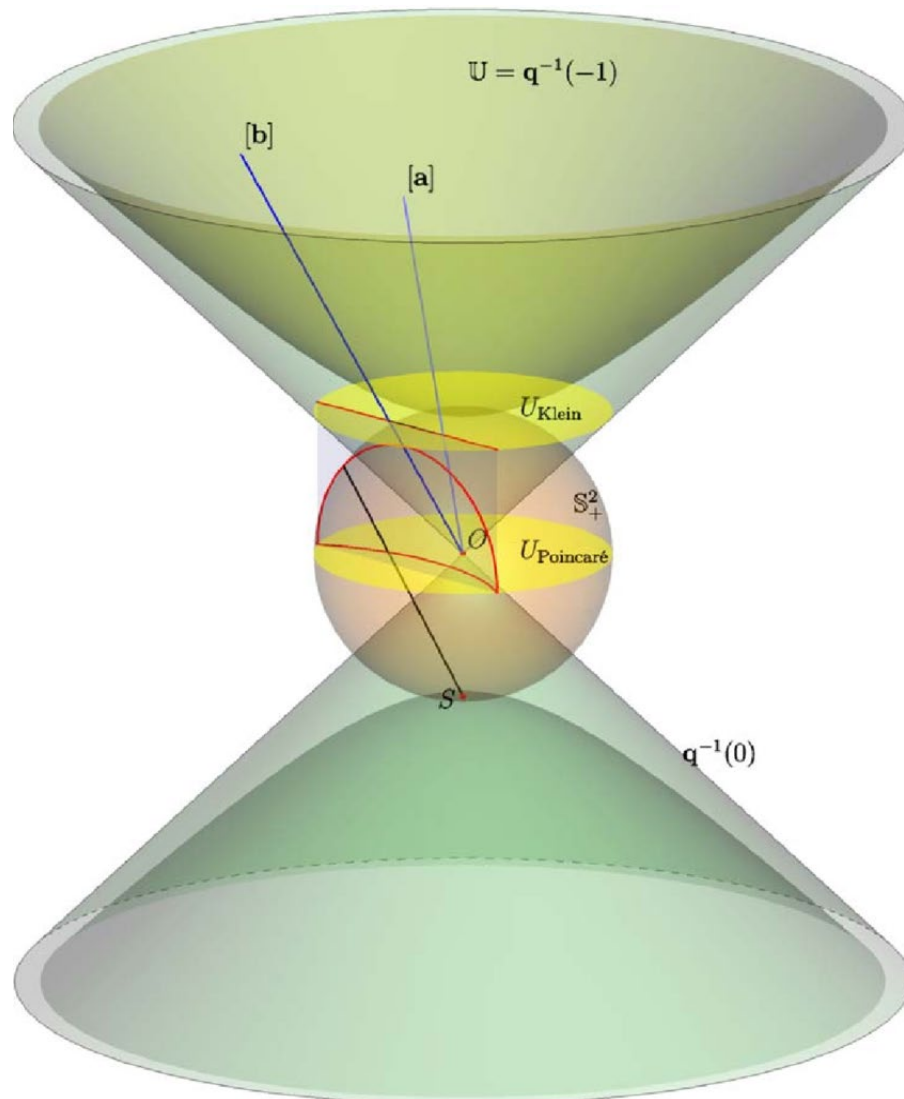
Figura 20: Projeção de uma reta hiperbólica no disco de Poincaré.



Fonte: Elaborada pelo autor em 2022.

Na Figura 21 temos uma comparação entre as duas interpretações, que diferenciam-se, basicamente, pela posição escolhida para o disco que representará o plano e também pela forma de realizar a projeção das retas.

Figura 21: Comparação entre a interpretação de Klein e Poincaré.



Fonte: Chalmoviansky (2011).

Devido à dificuldade em relacionar a Geometria Hiperbólica com o dia a dia dos alunos do ensino básico, e também à difícil visualização do plano hiperbólico, não propomos atividades para este tópico.

4. A GEOMETRIA ELÍPTICA

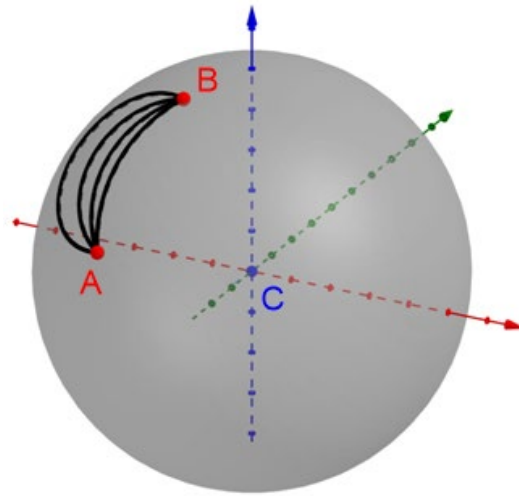
Considerada pela primeira vez na aula inaugural pronunciada em 1851 pelo matemático alemão Georg Bernhard Riemann (1826-1866), na ocasião de sua admissão como professor adjunto na Universidade de Göttingen (Coutinho, 2001), a Geometria Elíptica surge como resposta natural às possibilidades abertas por Bolyai e Lobachevsky e sua Geometria Hiperbólica.

Na geometria de Riemann, segundo Coutinho (2001), deve-se abandonar a noção de "estar entre" e a reta não é mais infinita como na Geometria Euclidiana, mas sim ilimitada. Além dessas diferenças, o Postulado de Riemann para Geometria Elíptica afirma que: quaisquer duas retas têm um ponto em comum.

O modelo mais simples que nos permite vivenciar a Geometria Elíptica é a superfície esférica, e tratamos então de um caso particular, denominada de Geometria Esférica, na qual a mesma definição de ponto da Geometria Euclidiana é aplicada, mas o conceito de reta é um pouco diferente.

No plano Euclidiano, a menor distância entre dois pontos, A e B, é o comprimento do segmento de reta determinado por eles e, utilizando o mesmo raciocínio numa superfície esférica λ de centro C, um segmento de reta é a menor curva contida na superfície esférica determinado por dois pontos distintos. No entanto, é fácil perceber que existem muitas possibilidades de curvas ligando dois pontos, conforme a Figura 22.

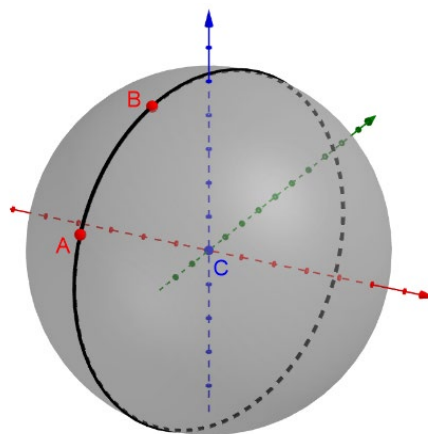
Figura 22: Arcos ligando dois pontos na superfície esférica.



Fonte: Elaborada pelo autor em 2021.

Após alguma análise, é possível definir que o menor arco possível sobre a superfície da esfera ligando os pontos A e B é um arco da circunferência com centro no ponto C, centro da esfera, ou seja, é um arco do círculo máximo da esfera que passa pelos pontos A e B, conforme mostra a Figura 23.

Figura 23: Círculo máximo da esfera.

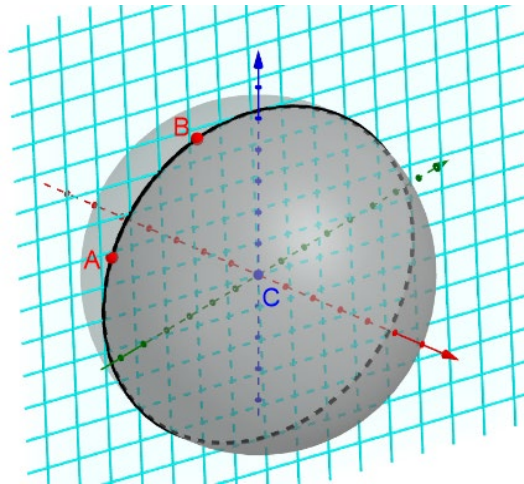


Fonte: Elaborada pelo autor em 2021.

Na Geometria Esférica as retas são os círculos máximos, ou seja, círculos com mesmo raio e centro que a esfera, que são o resultado da intersecção da esfera com um plano que contém o seu centro, conforme ilustra a Figura 24. A menor distância

entre dois pontos numa superfície curva é chamada de geodésica, assim, as retas da Geometria Esférica são as geodésicas desta superfície.

Figura 24: Círculo máximo gerado pela intersecção da esfera com um plano que contém seu centro.

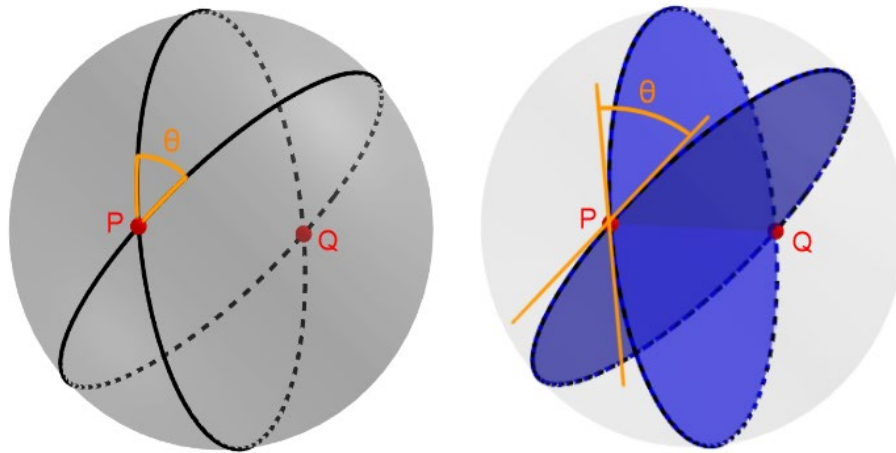


Fonte: Elaborada pelo autor em 2021.

Definido o conceito de reta, é fácil entender o postulado de Riemann, uma vez que, sobre a superfície esférica, quaisquer dois círculos máximos se intersectam não só em um, mas em dois pontos, e assim, na Geometria Esférica não existirão retas paralelas e nem retas não secantes, pois quaisquer duas retas sempre se intersectam,

Traçando duas retas sobre a esfera, seus pontos de intersecção são chamados de antípodas, pontos P e Q na Figura 25, que são considerados pontos idênticos, e o ângulo entre essas retas será definido como o ângulo entre os planos que dão origem a cada uma delas, o ângulo diédrico da geometria espacial.

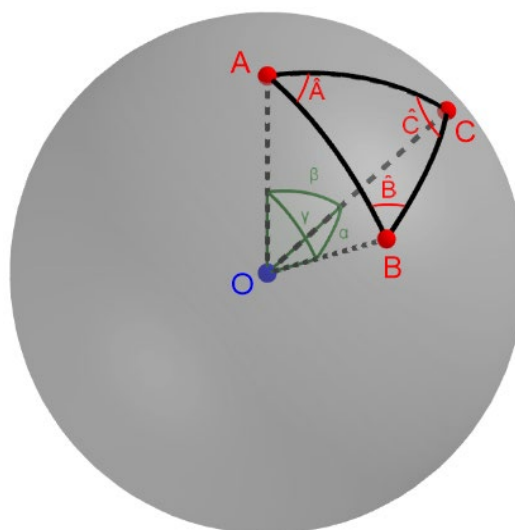
Figura 25: Pontos antípodas e ângulo formado por duas retas na superfície esférica.



Fonte: Elaborada pelo autor 2021.

Ao tomarmos três pontos distintos não pertencentes ao mesmo círculo máximo sobre a superfície esférica, a figura formada pelas geodésicas que unem esses pontos dois a dois é chamada de triângulo esférico. Na Figura 26 temos o triângulo esférico ABC traçado sobre a esfera de centro O, no qual os lados AB, AC e BC têm a medida, em graus ou em radianos, do ângulo formado por eles com vértice no centro da esfera, medindo, respectivamente, γ , β e α . Os ângulos internos do triângulo ABC, denotados por \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} , são os ângulos entre os círculos máximos que contém seus lados.

Figura 26: Triângulo esférico.

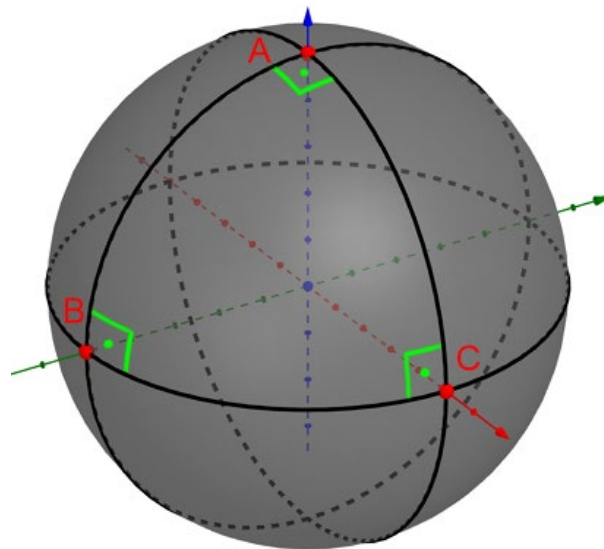


Fonte: Elaborada pelo autor em 2021.

Além de não existirem paralelas, existem outras diferenças entre a Geometria Elíptica e a Euclidiana e, talvez, o ponto mais interessante a ser tratado com alunos do Ensino Médio refira-se à soma dos ângulos internos de um triângulo.

Tomemos o triângulo esférico ABC formado pelos grandes círculos contidos nos planos xOy , xOz e yOz , de um sistema cartesiano com origem no ponto O, centro da esfera, conforme a Figura 27.

Figura 27: Triângulo esférico com três ângulos retos.



Fonte: Elaborada pelo autor em 2021.

Utilizando o referencial, é fácil verificar que não só os lados do triângulo medem 90° , como também cada um de seus ângulos internos, perfazendo assim uma soma de 270° .

Sendo independente do Postulado das Paralelas, a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico não é constante, o máximo que se pode afirmar a respeito dessa soma é expresso por,

$$180^\circ < \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < 540^\circ \quad (2)$$

E em relação às medidas dos lados, é possível estabelecer a relação (2), lembrando que nenhum dos lados pode medir mais do que 180° ,

$$180^\circ < \hat{a} + \hat{b} + \hat{c} < 360^\circ \quad (3)$$

Conforme Coutinho (2001), de tais características decorrem uma classificação para os triângulos esféricos diferente daquela feita para os triângulos planos, sendo, quanto aos ângulos,

- retângulo: triângulo com um ângulo reto;
- birretângulo: triângulo com dois ângulos retos; e
- trirretângulo: triângulo com três ângulos retos.

E quanto as medidas dos lados,

- retilátero: triângulo com um lado medindo 90° ;
- birretilátero: triângulo com dois lados medindo 90° ; e
- trirretilátero: triângulo com três lados medindo 90° .

Ressaltando que se um triângulo esférico é trirretângulo, será também trirretilátero, valendo também o contrário, um triângulo trirretilátero será também trirretângulo.

4.1. Atividades propostas

As atividades sugeridas a seguir têm como objetivo a discussão das características e propriedades da superfície esférica, a determinação da menor distância entre dois pontos sobre tal superfície, além de levar os alunos à descoberta de relações e fórmulas que possam ser aplicadas para o cálculo da distância entre pontos sobre a esfera. Deseja-se também promover a discussão de características relevantes em triângulos e quadriláteros esféricos.

Outras atividades e discussões podem ser encontradas em Santana (2013) e também em Medeiros (2017)

4.1.1. Atividade 1: A reta na superfície esférica

Objetivo específico: Verificar empiricamente que a menor distância entre dois pontos sobre a superfície esférica é percorrida sobre um arco de grande círculo, ou geodésica, da esfera.

Objetivos gerais: Recordar o cálculo do comprimento de uma circunferência e de um arco de circunferência, além de determinar uma fórmula para calcular distâncias sobre a superfície esférica dados o ângulo do arco e o raio da esfera.

Tempo estimado: 50 minutos

Para esta primeira atividade, recomendamos dividir os alunos em grupos de no máximo 5 integrantes, para possibilitar a discussão proposta.

Descrição da atividade:

- I. Introduzir a problemática a partir do texto abaixo:

Recordando da época das grandes navegações, o relato histórico conta que Pedro Álvares Cabral partiu de Lisboa em Portugal e chegou ao Brasil na região de Porto Seguro, na Bahia. Utilizando uma fita métrica maleável e a escala do globo terrestre utilizado, cada grupo deve determinar a distância aproximada entre as cidades de Salvador, na Bahia, e Lisboa, em Portugal. (Utilizamos Salvador pois normalmente encontramos apenas as capitais indicadas no globo terrestre)
- II. Considerando que a distância real é de aproximadamente 6.500 km, comparar os resultados dos grupos. Espera-se que todos tenham chegado em valores próximos ao real para, em seguida, discutir se o trajeto é uma linha reta, como na Geometria Euclidiana, é capaz de representar o caminho percorrido, e definir que tipo de percurso foi traçado.
- III. Após a discussão, é esperado que todos tenham percebido que o trajeto é na verdade um arco de circunferência;
- IV. Agora com a sala toda, comparando os trajetos, será possível perceber que todos seguiram a mesma direção, com os arquipélagos de Cabo Verde e Canárias, na Costa da África, podendo servir como referência, uma vez que todos devem ter passado em meio às ilhas, conforme a Figura 28, em que foi utilizado um globo com escala de 1 : 46.500.000, chegando a uma distância de 6.500 km, passando em meio às ilhas desses arquipélagos.

Figura 28: Distância entre Salvador e Lisboa medida no globo terrestre.



Fonte: Elaborado pelo autor em 2021.

- V. Continuando o trajeto com a fita métrica até completar uma volta no globo, é possível determinar o comprimento da circunferência sobre a qual o percurso foi traçado e então calcular seu raio, que deve coincidir com o raio do globo utilizado;
- VI. Após a discussão desse resultado, todos devem perceber que estavam se deslocando sobre um círculo máximo do globo utilizado, e que essa é a menor distância entre dois pontos numa superfície esférica.

Sugestões para o Professor: Talvez seja necessário recordar com os alunos os conceitos de meridianos, aproveitando os conhecimentos adquiridos principalmente em Geografia, e também o conceito de secções planas em esferas, em que, mais uma vez, os conhecimentos geográficos de paralelos serão muito importantes. Caso não exista a disponibilidade de globos terrestres, a atividade pode ser feita com bolas de isopor ou, até mesmo, com bolas esportivas, lembrando que nesses casos, a determinação dos pontos de interesse deve ser feita de forma que se possa comparar os resultados obtidos pelos alunos.

4.1.2. Atividade 2: Ângulos num triângulo esférico

Objetivo específico: Construir o conceito de ângulo entre retas na Geometria Esférica e criar uma ideia empírica do intervalo possível para a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico.

Objetivos gerais: Revisar o valor da soma dos ângulos internos de um triângulo euclidiano, inclusive uma proposta de justificativa, recordando assim dos ângulos formados num feixe de paralelas cortado por uma transversal.

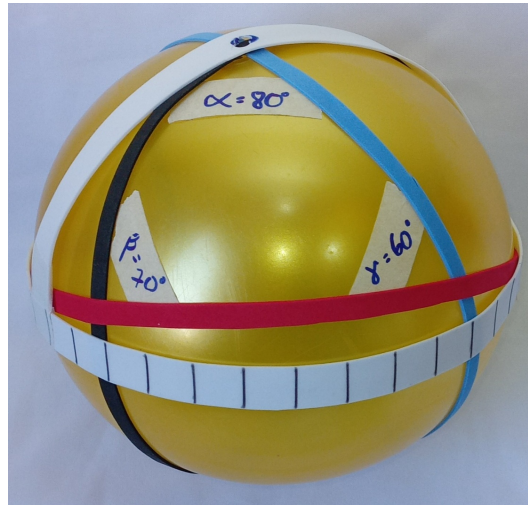
Tempo estimado: 50 minutos

Para esta atividade, recomendamos dividir os alunos em grupos de no máximo 5 integrantes, para possibilitar a discussão proposta.

Descrição da atividade:

- I. Utilizando uma tira de EVA ou acetato com o mesmo comprimento de um círculo máximo da esfera utilizada, fazer marcações equidistantes para criar uma escala de medição e, em seguida, colar suas extremidades criando uma circunferência graduada ao redor do globo. Na Figura 29 foram feitas 36 marcações, cada uma delas correspondendo portanto, a uma abertura de 10° .
- II. Com mais uma tira, criar uma alça para que a circunferência com a escala fique sempre na altura do centro da esfera e possa ser retirada e recolocada com facilidade, conforme a Figura 29. É interessante fixar as extremidades da alça em pontos diametralmente opostos e alinhados com as marcações da escala, para auxiliar na utilização do transferidor.
- III. Utilizando barbante ou tiras de EVA, criar três retas sobre a esfera, formando desse modo um triângulo esférico. Na Figura 29 temos um triângulo formado pelas retas preta, azul e vermelha, com destaque para os ângulos formados entre elas. Vale lembrar que uma reta é um círculo máximo da superfície, dessa forma todas as circunferências devem estar o máximo possível centradas com a esfera.

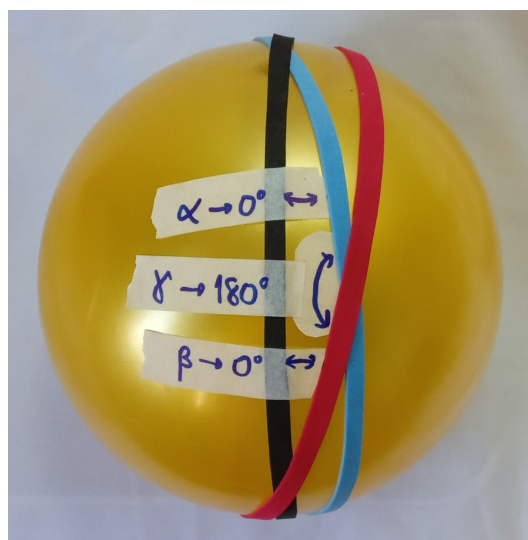
Figura 29: Transferidor esférico e triângulo esférico.



Fonte: Elaborada pelo autor em 2022.

- IV. Utilizar o transferidor para medir os ângulos internos do triângulo, registrando os resultados e efetuar a soma;
- V. Cada grupo deve deslocar as retas visando criar o triângulo com os menores ângulos possíveis, registrando os resultados e efetuando a soma. Na Figura 30, ao reduzirmos os ângulos alfa e beta, fazendo com que ambos se aproximem de 0° , obrigatoriamente temos o ângulo gama se aproximando cada vez mais de 180° , perfazendo assim uma soma de 180° , que é o valor mínimo para a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico;

Figura 30: Triângulo esférico com os menores ângulos possíveis.



Fonte: Elaborada pelo autor em 2022.

- VI. Com o mesmo procedimento do item anterior, deslocar as retas visando criar o triângulo com os maiores ângulos possíveis, registrando os resultados e efetuando a soma. Na Figura 31, aumentamos O ângulo alfa para 180° , mantendo os valores de beta e gama.

Figura 31: Triângulo esférico com um ângulo de 180° .



Fonte: Elaborada pelo autor em 2022.

- VII. É possível agora aumentar beta e gama até valores muito próximos de 180° , conforme a Figura 32, chegando a um triângulo que tende a ter os três ângulos rasos, perfazendo assim uma soma de 540° , que é o valor máximo para a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico;

Figura 32: Triângulo esférico com os maiores ângulos possíveis.



Fonte: Elaborada pelo autor em 2022.

- VIII. É esperado que todos os grupos cheguem à mesma conclusão, que a menor soma possível tende a 180° e a maior a 540° ;
- IX. A partir dos resultados, numa discussão com toda a sala, é possível chegar à conclusão esperada dos valores possíveis para a soma dos ângulos internos num triângulo esférico.

Sugestões para o Professor: É interessante que cada grupo realize vários testes e consigam criar uma metodologia para alteração dos triângulos, esse procedimento é de extrema importância não apenas na Matemática como para qualquer área científica.

4.1.3. Atividade 3: O problema do urso

Objetivo específico: Explorar os conceitos de deslocamento sobre a superfície esférica e a soma dos ângulos de um triângulo esférico.

Objetivos gerais: Permitir que os alunos elaborem hipóteses e realizem testes para resolver o problema proposto.

Tempo estimado: 50 minutos

Para esta primeira atividade, recomendamos dividir os alunos em grupos de no máximo 5 integrantes, para possibilitar a discussão proposta.

Descrição da atividade:

- I. Expor a situação problema descrita abaixo:
Considere a seguinte situação: Num belo sábado, José sai de sua casa para realizar sua caminhada matinal e faz o seguinte percurso: anda 10 km na direção sul, em seguida muda de direção e anda 10 km na direção leste e, por fim, muda novamente de direção e anda mais 10 km na direção norte, retornando assim para sua casa, onde, para sua surpresa, encontra um grande urso no portão. Pergunta-se: Qual era a cor do urso?;
- II. Solicitar que todos façam inicialmente uma representação do trajeto percorrido por José numa folha de papel;
- III. Considerando que todos chegaram a conclusão de que o problema não faz sentido, uma vez que, na folha, ele não retornaria para casa, questionar se, sendo José um habitante do planeta Terra, a folha seria o melhor modelo para representar a situação;
- IV. Recortar o trajeto desenhado na folha, numa faixa de aproximadamente 0,5 cm e solicitar aos alunos que o coloque sobre o globo em posições diferentes, utilizando os meridianos e paralelos como referência para as direções, conforme representado na Figura 33, e verifiquem como o caminho muda quando iniciamos em partes diferentes do globo.

Figura 33: Percurso do problema do urso no globo terrestre.



Fonte: Elaborada pelo autor em 2022.

- V. É esperado que os alunos percebam que o urso só poderia ser branco, pois José tem que morar no polo norte, conforme ilustrado na Figura 34, e trata-se de um urso polar.

Figura 34: Solução do problema do urso no globo terrestre.



Fonte: Elaborada pelo autor em 2022.

Sugestões para o Professor: É interessante permitir que os alunos explorem as possibilidades de caminhos sobre o globo terrestre para chegarem sozinhos à conclusão de que o único ponto de partida que permitiria a José voltar para casa após percorrer o caminho descrito seria o polo norte. Trata-se de uma atividade que pode gerar discussões muito interessantes, além de hipóteses que podem ser refutadas pelos próprios alunos.

5. A GEOMETRIA DE MINKOWSKI

Hermann Minkowski (1864-1909) foi um Matemático alemão que se dedicou principalmente à Teoria dos Números, foi professor de Albert Einstein (1979-1955) no Instituto Politécnico de Zurique, e lecionou, entre outras instituições, no Departamento de Matemática da Universidade de Göttingen, onde trabalhou com seu amigo, o também alemão, David Hilbert (1862-1943), considerado um dos maiores matemáticos do século XX.

Por volta de 1907, Minkowski contribuiu com o desenvolvimento da Teoria da Relatividade desenvolvendo uma geometria quadridimensional² que facilitou o entendimento da Teoria da Relatividade Restrita, também conhecida como Teoria da Relatividade Especial, lançada por Albert Einstein em 1905, baseada nos trabalhos de Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928) e Jules Henri Poincaré (1854-1912), dentre outros. Essa geometria ficou conhecida desde então como a Geometria de Minkowski ou Espaço-Tempo de Minkowski, e foi fundamental para a formulação da Teoria da Relatividade Geral em 1915, também por Albert Einstein (SILVA, 2017).

Antes de adentrar ao espaço-tempo de Minkowski, é importante reforçar alguns conceitos do modelo de espaço-tempo de Galileu, no qual se desenvolve a mecânica newtoniana, e uma breve discussão sobre a Teoria da Relatividade Especial, com o intuito de lançar as bases para o entendimento das características e da importância da Geometria de Minkowski.

5.1. O Espaço -Tempo de Galileu

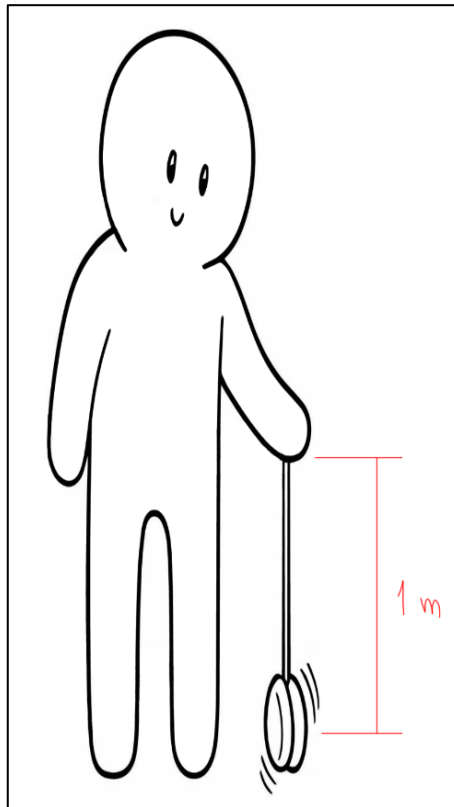
Galileu Galilei (1564-1642) é consagrado como um dos principais representantes do período conhecido como Revolução Científica, no século XVII, e dedicou sua vida ao estudo da astronomia, física e engenharia, dando diversas contribuições originais nessas áreas.

Imaginemos a seguinte situação: você está sentado no banco de um parque enquanto observa uma criança brincando com um ioiô e, sabendo que o cordão do brinquedo tem 1 metro de comprimento, você cronometra o tempo necessário para

² O modelo de Minkowski para a geometria da relatividade possui um eixo espacial que representa as três dimensões do espaço, e um eixo temporal, que representa o tempo como mais uma dimensão do espaço, daí uma geometria quadridimensional. A Figura 63 apresenta uma visualização desse modelo.

que seja completado um ciclo de descida e subida da roldana, conforme a Figura 35, chegando ao valor de 2 segundos, sendo fácil concluir que o brinquedo se movimentou com velocidade de 1 m/s.

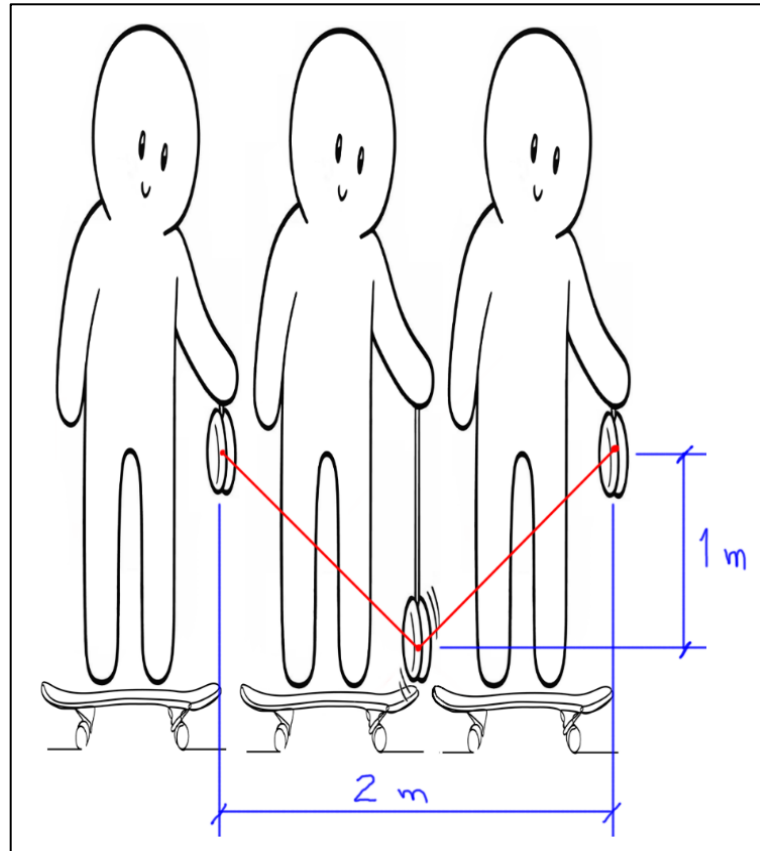
Figura 35: Menino brincando com um ioiô.



Fonte: Elaborada pelo autor em 2022.

Suponhamos agora que esse mesmo menino, ainda brincando com seu ioiô exatamente da mesma maneira, aplicando exatamente a mesma força e garantindo o mesmo impulso no movimento de descida e subida, sobe em seu skate e começa a se deslocar, também à velocidade de 1 m/s. O movimento que você registra agora seria um pouco diferente, pois, além do movimento vertical, há um movimento horizontal, conforme representado na Figura 36.

Figura 36: Menino brincando com um ioiô sobre um skate em movimento.



Fonte: Elaborada pelo autor em 2022.

Enquanto, do ponto de vista do menino, a trajetória do brinquedo é exatamente a mesma, conforme a Figura 35, para você, a trajetória passou a ser inclinada, conforme a Figura 36.

Apesar da diferença nas trajetórias, os observadores devem concordar com alguns aspectos do movimento, como por exemplo, o tempo de percurso do ioiô não depende do referencial adotado, enquanto outros aspectos apresentam valores relativos a esse referencial, como por exemplo, a velocidade.

Galileu, então, postulou um princípio básico afirmando que quaisquer dois observadores movendo-se com velocidades constantes um em relação ao outro, em quaisquer direção e sentido, obterão os mesmos resultados físicos para todos os experimentos mecânicos realizados. Usando uma experiência de pensamento para expressar essa ideia em um famoso trecho de uma de suas obras mais célebres, o

Diálogos Sobre dois Novos Sistemas de Mundo, Ptolomaico e Copernicano, ele pede para imaginarmos a seguinte situação:

"Salviati — [...] Fechai-vos com algum amigo no maior compartimento existente sob a coberta de algum grande navio, e fazei que aí existam moscas, borboletas e semelhantes animaizinhos voadores; seja também colocado aí um grande recipiente com água, contendo pequenos peixes; suspenda-se ainda um balde, que gota a gota verse água em outro recipiente de boca estreita, que esteja colocado por baixo: e estando em repouso o navio, observai diligentemente como aqueles animaizinhos voadores com igual velocidade vão para todas as partes do ambiente; verse-ão os peixes nadar indiferentemente para todos os lados; as gotas cadentes entrarem todas no vaso posto embaixo; e vós, lançando alguma coisa para o amigo, não a deveis lançar com mais força para esta que para aquela parte, quando as distâncias sejam iguais; e saltando, como se diz, com os pés juntos, transportaríeis espaços iguais para todas as partes. Assegurai-vos de ter diligentemente todas estas coisas, ainda que não exista dúvida alguma de que enquanto o navio esteja parado as coisas devem acontecer assim, e fazei mover o navio com quanta velocidade desejardes; porque (sempre que o movimento seja uniforme e não flutuante de cá para lá) não reconhecereis uma mínima mudança em todos os mencionados efeitos, nem de nenhum deles podereis compreender se o navio caminha ou está parado: saltando, percorreríeis no tablado os mesmos espaços que antes, nem daríeis saltos maiores para a popa que para a proa, por que o navio se move velocissimamente, ainda que, no tempo durante o qual estejais no ar, o tablado subjacente deslize para a parte contrária ao vosso salto; e jogando alguma coisa ao companheiro, não será necessário atirá-la com mais força para alcançá-lo, se ele estiver para a proa e vós para a popa, que se estivésseis colocados ao contrário; e as gotas continuarão a cair como antes no recipiente inferior, sem que nenhuma caia em direção a popa, ainda que, enquanto a gota está no ar, o navio navegue muitos palmos; os peixes na sua água nadarão sem maior esforço tanto para a parte precedente quanto para a parte subsequente do vaso, e com a mesma facilidade chegarão ao alimento colocado em qualquer lugar da borda do recipiente; e finalmente as borboletas e as moscas continuarão seus voos indiferentemente para todas as partes, e nunca acontecerá que se concentrem na parte endereçada para a popa, como se estivessem cansadas de acompanhar o curso veloz do navio, do qual seriam separadas por manterem-se no ar por longo tempo; e se queimando alguma lágrima de incenso produzísseis um pouco de fumaça, veríeis que ela se eleva para o alto como uma pequena nuvem e aí se mantém, movendo-se indiferentemente não mais para esta que para aquela parte. E a razão de toda esta correspondência de efeitos é ser o movimento do navio comum a todas as coisas contidas nele e também no ar, razão pela qual sugeri que se estivesse sob a coberta do navio; porque, quando se estivesse na coberta e ao ar livre que não segue o curso do navio, ver-se-iam diferenças mais ou menos notáveis em algum dos efeitos

mencionados: e não existe dúvida de que a fumaça ficaria para trás, como o próprio ar; [...]

[...] Sagredo — Estas observações, ainda que navegando não me tenha deliberadamente ocorrido fazê-las, todavia estou mais que certo que acontecerão da maneira relatada: e como confirmação disso, lembro-me que, estando no meu camarote, encontrei-me por centenas de vezes perguntando se o navio caminhava ou estava parado e, algumas vezes, fantasiando, acreditava que ele seguisse numa direção, enquanto o movimento era na direção contrária. Portanto, até aqui estou satisfeito e persuadido da nulidade do valor de todas as experiências efetuadas para provar mais a parte negativa que a afirmativa da rotação da Terra. [...]” (GALILEI, 2011)

5.2. A mecânica newtoniana

Isaac Newton (1643-1727) foi um dos principais responsáveis pela formulação das leis da mecânica clássica, da óptica geométrica e da gravitação universal, além do grande papel no desenvolvimento das bases do cálculo diferencial e integral.

Em sua famosa obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (Princípios Matemáticos da Filosofia Natural), Newton enuncia três princípios básicos para explicar o movimento dos corpos, que ficaram conhecidos como as três leis de Newton. São eles:

1ª Lei: Todo corpo continua em seu estado de repouso ou de movimento uniforme em uma linha reta, a menos que seja forçado a mudar aquele estado por forças aplicadas sobre ele (NEWTON, 1999).

Também conhecida como princípio da inércia, afirma que um corpo em repouso permanecerá em repouso, e um corpo em movimento retilíneo uniforme permanecerá nesse estado, a menos que uma força externa aja sobre ele. Newton considera esses movimentos em relação ao que ele assume como existente, o espaço absoluto, ou também em relação a qualquer corpo que se mova uniformemente, sem rotação, a esse espaço absoluto. No século XIX esses corpos foram denominados referenciais inerciais e o espaço absoluto em si foi identificado como um pressuposto metafísico e colocado sob suspeita por muitos (DISALLE, 2020).

2ª Lei: A mudança de movimento é proporcional à força motora imprimida, e é produzida na direção da linha reta na qual aquela força é aplicada (NEWTON, 1999).

Também conhecida como princípio fundamental da dinâmica, pode ser interpretada modernamente como: a força resultante em um corpo é igual à taxa temporal de variação de seu momento linear em um sistema de referência linear. No caso de corpos com massa constante, a segunda lei resulta na famosa expressão muito difundida no ensino médio,

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a},$$

na qual \vec{F} é a força resultante no corpo, m é a massa e \vec{a} é a aceleração resultante, ou seja, a força resultante em um corpo produz uma aceleração diretamente proporcional a ela.

3ª Lei: A toda ação há sempre uma reação oposta e de igual intensidade: as ações mútuas de dois corpos um sobre o outro são sempre iguais e dirigidas em sentidos opostos (NEWTON, 1999).

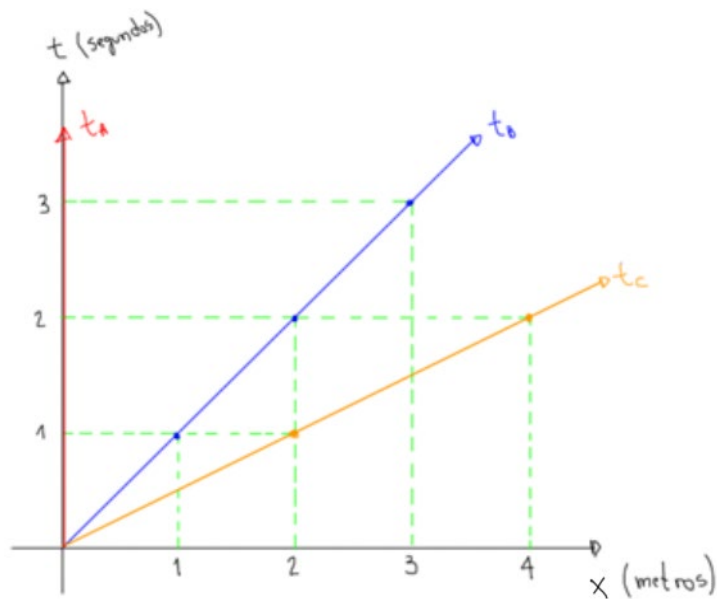
Também chamada de princípio da ação e reação, afirma que a força representa a interação física entre dois corpos distintos. Se um corpo exerce uma força em outro, este segundo exercerá também uma força no primeiro, com a mesma magnitude e direção, porém no sentido oposto.

Para auxiliar o entendimento do movimento de corpos, Newton reintroduziu o conceito de referencial inercial já desenvolvido por Galileu, embora esta denominação tenha surgido no século XIX e ele assumisse a existência de um referencial absoluto, afirmando que todo corpo que se move com velocidade constante em relação a um referencial dito em repouso pode ser usado para descrever o movimento de qualquer outro corpo em relação ao referencial considerado inicialmente.

Vamos analisar a seguinte situação: um observador A está parado à beira de uma estrada na origem de um referencial $S(x;t)$, no qual adotamos coordenadas cartesianas, embora utilizaremos apenas o eixo x nas discussões que seguem. O observador A avista um carro B aproximando-se com velocidade de 1 m/s. No exato momento em que o carro passa pelo observador A, um helicóptero C passa voando por eles na mesma direção e sentido do carro, porém com velocidade de 2 m/s também em relação ao observador A. Podemos representar o tempo decorrido no

deslocamento de cada elemento por meio do diagrama da Figura 37. Apesar de parecer estranho representar o tempo no eixo das ordenadas e o deslocamento no eixo das abscissas, vamos fazê-lo propositalmente, com o intuito de preparar o leitor para a construção do espaço-tempo de Minkowski, embora ainda estejamos no contexto da física newtoniana.

Figura 37: Posições dos corpos A, B e C em relação ao referencial (x, t) considerado em repouso.



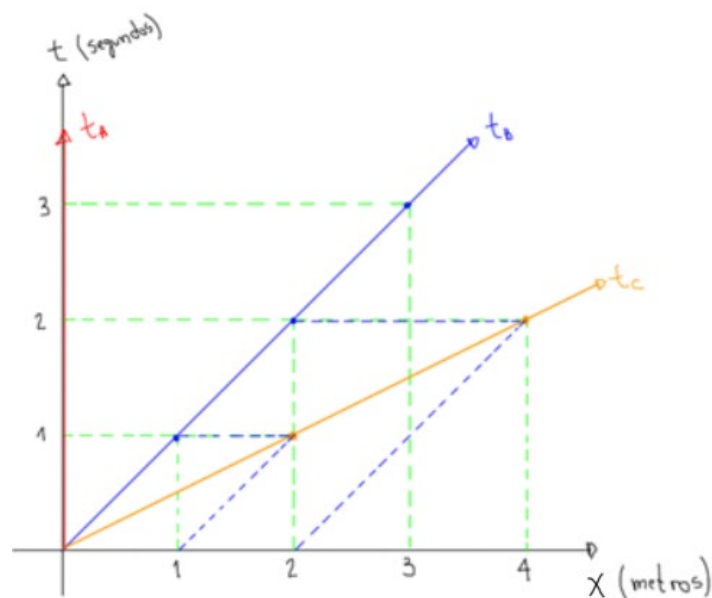
Fonte: Elaborado pelo autor em 2021.

Vale ressaltar que o observador A, apesar de estar parado, ainda se desloca no tempo, daí o eixo t_A sobreposto ao eixo t do referencial S indicando sua posição no decorrer do tempo, ao passo que a variação das coordenadas x em função do tempo do carro B e do helicóptero C, que se movem em relação ao observador A, são representados pelos eixos t_B e t_C , respectivamente. Note que cada observador carrega consigo seus próprios relógios e fazem suas próprias medidas de tempo, embora ainda estejamos na física newtoniana e o tempo seja considerado absoluto, fluindo uniformemente para todos. Ainda assim, como preparação para apresentarmos o espaço-tempo de Minkowski a seguir, consideremos cada observador A, B, C, etc, com seu próprio eixo dos tempos.

Em relação a A, o helicóptero estará a dois metros de distância após um segundo, quatro metros após dois segundos e assim por diante, porém, em relação ao carro

B, o helicóptero terá se distanciado apenas um metro após o primeiro segundo, dois metros após dois segundos e assim por diante. Para marcarmos as coordenadas espaciais de um referencial que tem o carro B em repouso na sua origem, devemos identificar a intersecção entre uma paralela ao eixo t_B e o eixo x , resultando no diagrama da Figura 38.

Figura 38: Coordenadas do helicóptero C em relação aos referenciais A e B.



Fonte: Elaborado pelo autor em 2021.

Enquanto as coordenadas temporais coincidem nos referenciais A e B para um ponto no diagrama, uma vez que $t = t_A = t_B$, as coordenadas espaciais do helicóptero C, em relação aos observadores A e B, diferem em função da velocidade relativa de cada um dos referenciais. Assim, denotando por x_A e x_B as coordenadas do helicóptero C nos referenciais fixos nos observadores A e B, respectivamente, temos $x = x_A \neq x_B$.

Chamamos de **evento** a todo acontecimento físico que pode ser medido em termos das coordenadas x e t por todos os observadores, e associamos cada ponto do diagrama a um evento específico. Para estabelecer uma relação entre as coordenadas de um evento nos diferentes sistemas de referência, podemos observar que a diferença medida entre x_A e x_B de um determinado evento é dependente da velocidade relativa do helicóptero em relação a cada referencial e do

tempo decorrido após o encontro na origem, uma vez que a diferença entre os valores aumenta com o passar do tempo, assim podemos definir uma função que associa a cada ponto $(x_A; t)$ um ponto $(x_B; t)$ para a posição do helicóptero em cada um dos referenciais da forma,

$$x_B = x_A - vt,$$

na qual x_A é a coordenada espacial do helicóptero em relação ao referencial do observador A, x_B é a coordenada espacial do helicóptero em relação ao referencial do observador B, v é a velocidade relativa entre os observadores A e B e t é o tempo decorrido a partir da origem dos sistemas.

Assim, após um segundo, quando a coordenada do helicóptero C em relação à x_A é 2 metros, obtemos em x_B ,

$$x_B = 2 - 1 \cdot 1 = 1.$$

Após dois segundos, quando a coordenada em x_A é 4 metros, obtemos em x_B ,

$$x_B = 4 - 1 \cdot 2 = 2.$$

Tais transformações de coordenadas são chamadas de transformações de Galileu, utilizadas para converter coordenadas espaciais para diferentes referenciais que se movem com velocidades relativas constantes um em relação ao outro, e essas transformações garantem que as leis da mecânica newtoniana são as mesmas em todos os referenciais inerciais, salvo alguns ajustes quando os eixos cartesianos apresentam outra configuração ou a velocidade relativa se dá em outras direções.

Um aspecto importante a ser mencionado é que, a despeito da possibilidade de se usar qualquer referencial para a descrição do movimento dos corpos para se desenvolver a mecânica, alguns referenciais são mais adequados pela maior simplicidade com que as leis físicas são expressas: os referenciais inerciais. Além disso, Newton menciona a existência do espaço e do tempo absolutos, que seriam independentes entre si e de qualquer observador, uma concepção metafísica inacessível a observadores, pois estes seriam capazes apenas de determinar tempos e posições relativas (NEWTON, 1999). No entanto, um traço importante da

concepção de tempo absoluto se manifesta nas medições dos referenciais da mecânica pré-relativista: os intervalos de tempo entre pares de eventos não dependem dos observadores e do espaçamento entre tais eventos.

5.3. As transformações de Galileu e a velocidade da luz

No século XIX surgiu, principalmente com os trabalhos de Faraday, Maxwell, Hertz, Lorentz e outros, uma abordagem que descreveu os fenômenos eletromagnéticos por meio de campos que transmitiam, através de um suposto Éter, interações eletromagnéticas entre cargas e correntes elétricas.

Tais campos obedeciam equações diferenciais que, inicialmente, foram apresentadas por Maxwell, mas que foram modificadas e aprimoradas por seus seguidores. Já no trabalho de Maxwell, as equações previam uma propagação ondulatória da luz em relação ao suposto Éter, com velocidade de aproximadamente $2,99792 \cdot 10^8$ m/s, o qual, por conveniência, adotaremos como $c = 3 \cdot 10^8$ m/s, pouco maior do que o valor já obtido experimentalmente pelo cientista dinamarquês Ole Christensen Römer (1644-1710) cerca de 200 anos antes (AZEVEDO; JÚNIOR, 2020). Apenas para conseguirmos visualizar melhor esta quantidade, fazendo uma simples conversão obtendo $3 \cdot 10^5$ km/s ou então $1,08 \cdot 10^9$ km/h, ou seja, mais de 1 bilhão de quilômetros por hora, o suficiente para viajar da Terra à Lua em pouco mais de 1 segundo.

Apesar dos estudos de Maxwell e de outros cientistas corresponderem aos resultados experimentais sobre a propagação da luz e o eletromagnetismo, ainda restavam algumas questões, como por exemplo:

- a qual referencial estaria associada tal velocidade? Segundo a física clássica e a relatividade de Galileu, a velocidade depende do referencial adotado, porém, as soluções encontradas não levavam em consideração referencial algum, as equações de onda do eletromagnetismo formuladas em relação ao suposto meio eletromagnético, o Éter, o que sugeria a possibilidade de se encontrar experimentalmente a velocidade dos demais corpos em relação a esse meio, no entanto, tal determinação experimental nunca ocorreu.

- levando-se em conta o Princípio da Relatividade de Galileu, a mecânica parecia funcionar bem em qualquer referencial inercial, porém o eletromagnetismo parecia uma teoria cujas equações teriam uma forma específica apenas para o Éter. Isso despertava a necessidade de solucionar essa incompatibilidade modificando uma das teorias, ou ambas.

Determinar experimentalmente a velocidade da luz e dos demais corpos em relação ao Éter Eletromagnético passa, então, a ser importante, e muitas tentativas infrutíferas ou ambíguas foram propostas no século XIX e XX. Juntamente com essas diversas investigações experimentais, também surgem no século XIX e início do século XX diversas propostas teóricas para se superar esse conflito entre a mecânica e o eletromagnetismo. A Teoria da Relatividade Especial pode ser entendida historicamente nesse contexto, inclusive o título do artigo de Einstein de 1905 faz menção a esse contexto: *Sobre a Eletrodinâmica dos Corpos em Movimento*.

Dentre os vários experimentos para determinar o movimento do Éter em relação à Terra, destacam-se os realizados na década de 1880 pelos cientistas norte-americanos Albert Abraham Michelson (1852-1931) e Edward Williams Morley (1838-1923), que conseguiram resultados de grande impacto entre os que investigavam o Éter utilizando um equipamento que ficou conhecido como interferômetro de Michelson-Morley.

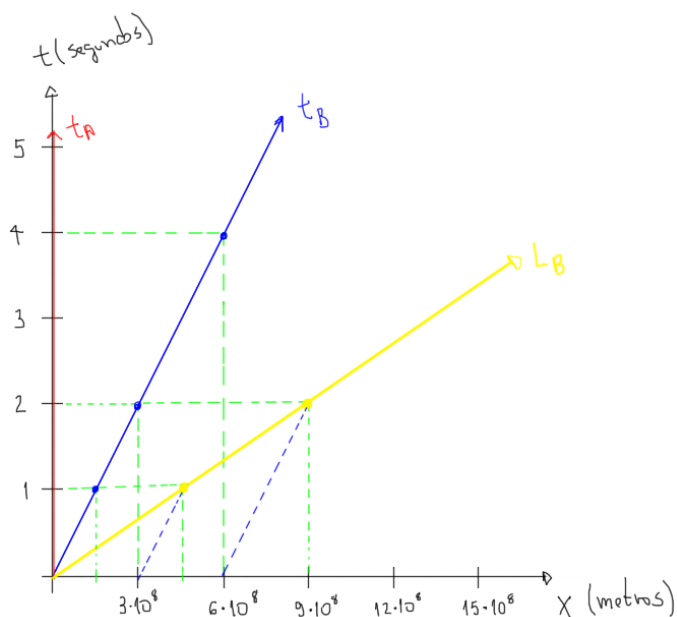
O experimento de Michelson-Morley consistiu em lançar feixes de luz ortogonais entre si com o objetivo de se medir o movimento de translação da Terra em relação ao Éter, após se detectar diferenças nos tempos de trajeto a partir de uma suposta diferença da velocidade de cada feixe de luz, ortogonal e paralelo, em relação ao movimento da Terra. Não se detectou diferença, a velocidade da luz foi exatamente a mesma nos dois sentidos. Mesmo após muitas repetições e modificações nos aparatos utilizados, os resultados continuaram os mesmos, a velocidade da luz permanecia constante, não importando o sentido do movimento de sua fonte em relação ao suposto Éter.

Ao longo do século XIX várias teorias diferentes para o Éter surgiram. Elas podiam diferir muito com respeito às hipóteses que se faziam a respeito das suas

propriedades, tais como o tipo de elasticidade e a forma com que ele interagia com a matéria comum. Por exemplo, havia suposições desde aquelas em que o Éter atravessava a matéria comum sem que essa oferecesse obstrução, até aquelas nas quais a matéria comum atuaria promovendo graus variados de arrasto de Éter no seu entorno. O experimento de Michelson-Morley ofereceu evidência para um Éter que não se movia em relação à Terra nas suas proximidades, o que fez com que esses pesquisadores tentassem reproduzir o experimento em altitudes diferentes em um esforço para começarem a detectar o movimento do Éter. As tentativas não obtiveram sucesso na detecção.

Com o advento da Teoria da Relatividade a velocidade da luz é considerada como $c = 3 \cdot 10^8$ m/s para qualquer observador e independente do estado de movimento da fonte que a emite. No entanto, imaginemos uma situação semelhante àquela discutida anteriormente, ainda no contexto da física pré-relativista: um observador A, que será a origem do nosso referencial, está parado à beira de uma estrada e avista um carro B, aproximando-se com uma velocidade de $1,5 \cdot 10^8$ m/s, equivalente à metade da velocidade da luz. No momento em que o carro passa pelo observador, este lança um feixe de luz L_B , que é representado com o diagrama da Figura 39.

Figura 39: Velocidade da luz emitida pelo carro B em relação ao referencial A.

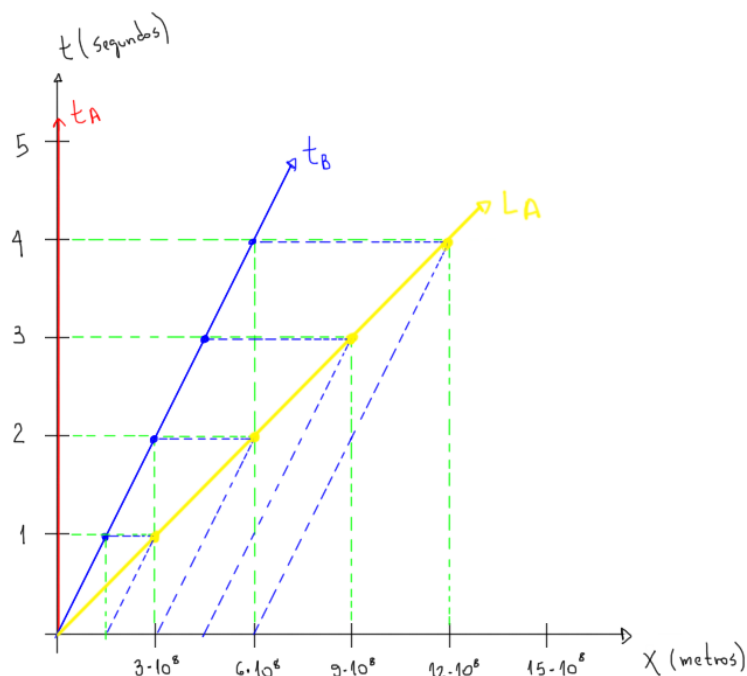


Fonte: Elaborada pelo autor em 2021.

De acordo com a forma com que a composição de velocidades é feita na física pré-relativista, o observador A veria o feixe de luz emitido pelo carro deslocando-se com velocidade de $4,5 \cdot 10^8$ m/s, uma vez que a velocidade da luz e do carro seriam somadas no referencial do observador A, que está em repouso.

Da mesma forma, no momento em que o carro passa pela origem do referencial, se fosse A que emitisse um feixe de luz L_A , podemos analisar a velocidade desse feixe a partir do diagrama da Figura 40.

Figura 40: Velocidade da luz emitida pelo observador A em relação ao referencial B.



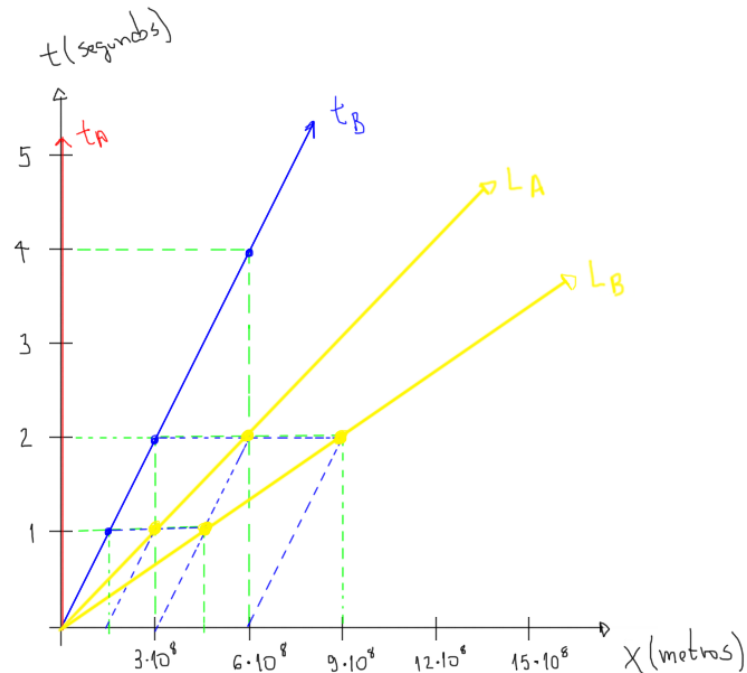
Fonte: Elaborada pelo autor em 2021.

Dessa vez o carro B veria o feixe de luz emitido pelo observador A, que está em repouso, deslocando-se com velocidade de $1,5 \cdot 10^8$ m/s, uma vez que a luz demora 1 segundo para se distanciar $1,5 \cdot 10^8$ metros dele. Neste caso, de acordo com as regras da composição de velocidades da física pré-relativista, as velocidades seriam subtraídas.

Tanto no caso da Figura 39 como da Figura 40, as interpretações fazem todo sentido do ponto de vista da física clássica, para o caso especial em que a luz tenha velocidade c em relação à fonte, seguindo as transformações de Galileu que se

aplicam com perfeição em situações cotidianas. Sobrepondo os dois diagramas teríamos a situação representada na Figura 41.

Figura 41: Velocidade da luz emitida pelo observador A e pelo carro B.



Fonte: Elaborada pelo autor em 2021.

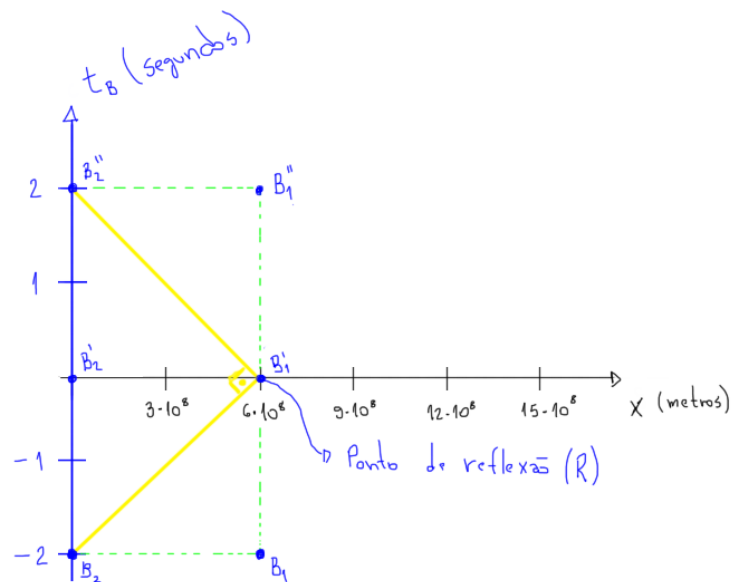
Apesar de, intuitivamente, a representação das velocidades dos feixes de luz emitidos pelo observador em repouso e pelo carro em movimento fazerem sentido, não é o que observamos na natureza. É um pressuposto da Teoria da Relatividade que a luz se move com a mesma velocidade, $c = 3 \cdot 10^8$ m/s, em qualquer referencial e, sendo uma teoria confirmada por inúmeros experimentos, tal diagrama não poderia ser considerado como uma boa representação do universo, uma vez que considera dois feixes de luz movendo-se com velocidades diferentes dependendo do emissor.

Seria necessário repensar as condições iniciais assumidas na física clássica, quando espaço e tempo foram definidos como entidades absolutas, ou seja, que independem do observador. Por exemplo, no dia a dia assumimos que dois relógios sincronizados permanecerão sincronizados, não importando a velocidade com que um se mova em relação ao outro, a medida do comprimento de um corpo será a mesma para qualquer um que a observe, independente da velocidade com que se

mova, mas tais certezas, que estão corretas para situações do cotidiano, parecem não funcionar quando nos deslocamos com velocidades muito grandes, comparáveis com a da luz.

Para resolver tal inconsistência, seria necessário rever a interpretação das relações de espaço e tempo quando nos deslocamos com velocidades próximas à da luz. Vamos considerar a mesma situação anterior: um observador A, que será a origem do nosso referencial, está parado à beira de uma estrada quando avista, desta vez, dois carros B_1 e B_2 , aproximando-se com uma velocidade de $1,5 \cdot 10^8$ m/s, equivalente à metade da velocidade da luz, e B_2 estabelece que B_1 está exatamente $6 \cdot 10^8$ metros a sua frente. Digamos que, 2 segundos antes do segundo carro, B_2 , passar pela origem onde está o observador A, ele lança um feixe de luz que será refletido na traseira do primeiro carro, B_1 , e retornará para B_2 . Se analisarmos esse acontecimento do ponto de vista de B_2 , teremos um diagrama como na Figura 42.

Figura 42: Luz emitida pelo carro B_2 e refletida por B_1 , de acordo com o referencial de B_2 .



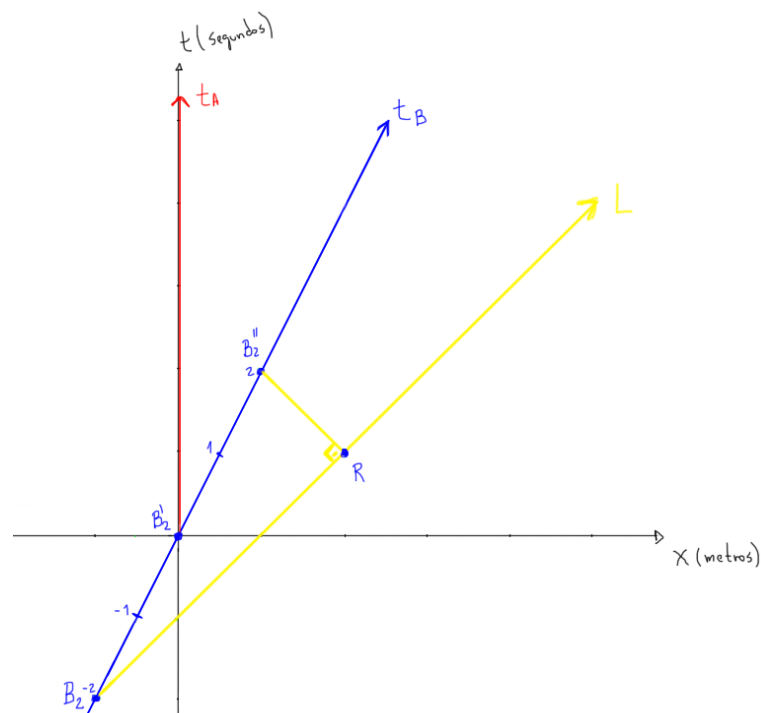
Fonte: Elaborada pelo autor em 2021.

Como os dois carros estão viajando com a mesma velocidade, a distância entre eles será sempre de $6 \cdot 10^8$ metros no referencial de B_2 e, como a luz viaja com velocidade de $3 \cdot 10^8$ m/s em relação a qualquer referencial, ela levará 2 segundos

para atingir o carro B_1 mais a frente, exatamente sobre o eixo espacial do referencial de B_2 , e mais 2 segundos para retornar até a fonte.

Pela escolha da escala dos eixos do nosso sistema referencial, todo feixe de luz deve deslocar-se com inclinação de 45° , assim, o trajeto do feixe de luz descrito na situação anterior, agora conforme visto pelo observador A que está em repouso na origem do referencial, é representado pelo diagrama da Figura 43. Vale ressaltar que omitimos propositalmente a escala dos eixos do referencial A, tendo em vista que, por hora, estamos interessados apenas em analisar o que seria percebido por ele e não realizar uma comparação entre as medições de tempo e espaço realizadas por ambos.

Figura 43: Luz emitida pelo carro B_2 e refletida por B_1 , de acordo com o referencial de A.

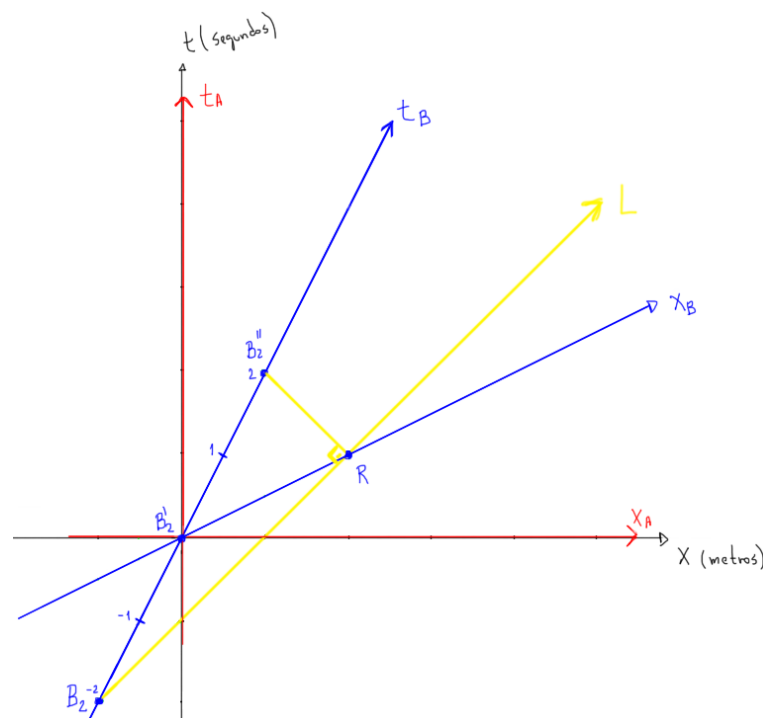


Fonte: Elaborada pelo autor em 2021.

Para o referencial do observador A, o feixe de luz emitido 2 segundos, de acordo com B, antes do encontro na origem com o carro B_2 , seguirá o mesmo trajeto a 45° , e como ele deve retornar também a 45° até o carro B_2 , 2 segundos após a passagem pela origem, o ponto de reflexão R não estará sobre o eixo espacial do referencial de A. Todavia, R deve estar sobre o eixo espacial do referencial do carro

B_2 . Dessa forma, podemos imaginar que o eixo espacial desses observadores não é o mesmo, assim como ocorre com o eixo dos tempos para referenciais que se movam um em relação ao outro. Na Figura 44 temos uma representação dos dois sistemas de referência sobrepostos, considerando que o eixo espacial do referencial do observador B deve passar pela origem e pelo ponto R de reflexão da luz, conforme a descrição anterior.

Figura 44: Referenciais do observador A e do carro B_2 sobrepostos.



Fonte: Elaborada pelo autor em 2021.

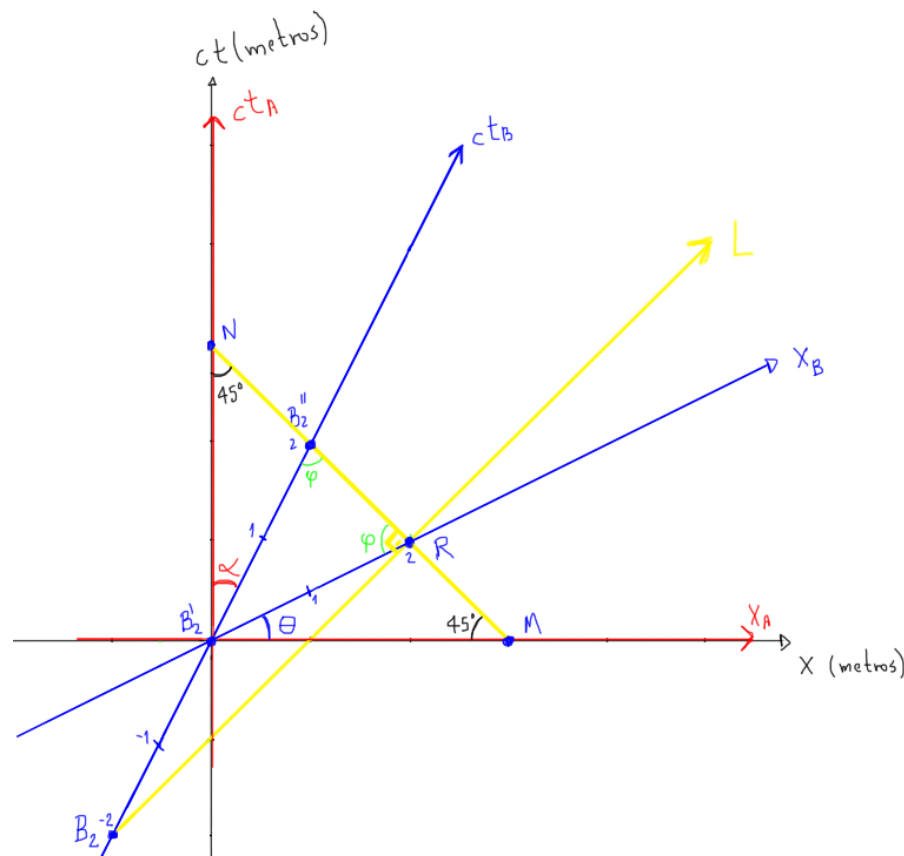
A partir da Figura 44, é possível concluir que 1 segundo tem tamanhos diferentes para observadores que se movem com grandes velocidades um em relação ao outro, o mesmo acontecendo com 1 metro. Esta é a ideia da teoria da relatividade restrita, na qual tempo e espaço dependem da velocidade relativa dos observadores.

Para determinar o quanto o eixo espacial x_B se desloca em relação a x_A , devemos começar percebendo que tempo e espaço são medidos em grandezas diferentes, o que dificulta o estabelecimento de uma relação entre essas entidades. Utilizando a velocidade da luz como grandeza absoluta, uma vez que é a mesma para qualquer observador, podemos converter unidades de tempo em unidades de espaço e vice-

versa, assim, 1 segundo é o equivalente a $3 \cdot 10^8$ metros, ou seja, é a distância percorrida pela luz em 1 segundo, ou então, podemos dizer que $3 \cdot 10^8$ metros é o equivalente a 1 segundo, ou seja, é o tempo que a luz demora para percorrer $3 \cdot 10^8$ metros.

Convertendo o eixo t do nosso sistema de referência para ct (velocidade da luz vezes o tempo), teremos um referencial com o eixo espacial x em metros e o eixo temporal ct também em metros, podemos chamar de metro-luz, que é o quanto a luz se desloca por unidade de tempo, o que nos permite analisar muito facilmente o deslocamento do eixo x_B analisando a Figura 45.

Figura 45: Deslocamento do eixo x_B .



Fonte: Elaborada pelo autor em 2021.

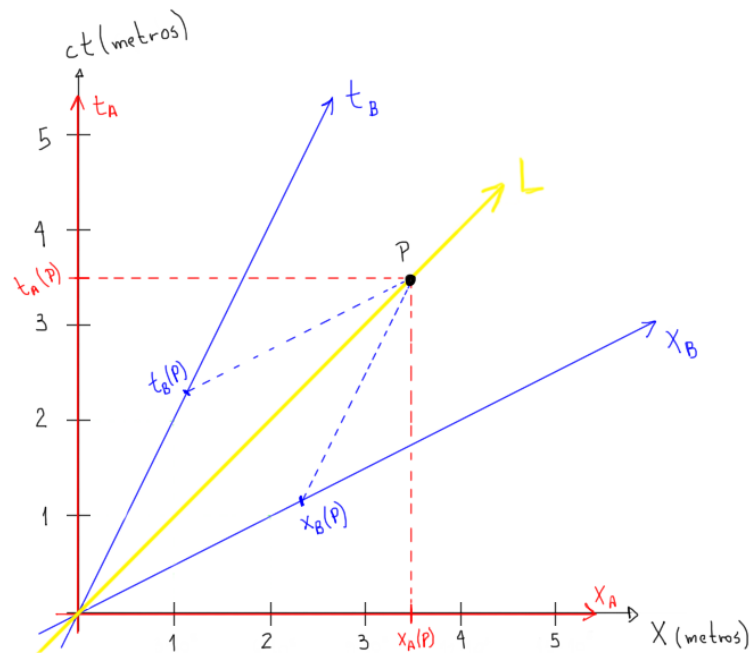
O triângulo $B_2' B_2'' R$ é isósceles, uma vez que $B_2' B_2'' = B_2' R$ (pois a luz foi refletida $6 \cdot 10^8$ metros a frente do carro B_2 e levou 2 segundos para retornar, graças à conversão do eixo t para ct, 2 segundos são equivalentes a $6 \cdot 10^8$ metros), assim,

$m(\widehat{B'_2 B''_2 R}) = m(\widehat{B'_2 \widehat{R} B''_2})$. Prolongando o seguimento que representa o retorno do feixe de luz do ponto de reflexão R para B''_2 temos, pelo caso AA, os triângulos semelhantes $B'_2 RM$ e $B'_2 B''_2 N$. Nessas condições concluímos que $\alpha = \theta$, ou seja, o deslocamento do eixo x_B em relação a x é o mesmo do eixo ct_B em relação a ct , e também que $\text{tg } \alpha = v/c$, em que v é a velocidade relativa entre os dois referenciais.

5.4. As transformações Lorentz

Historicamente, as discrepâncias entre o Eletromagnetismo, que parecia exigir um meio especial nos quais suas leis e equações seriam válidas, e a Mecânica, que era igualmente válida em todos os referenciais inerciais, geraram intenso debate e uma sucessão de teorias para o Éter, para o Eletromagnetismo e para a Mecânica. Os experimentos de resultado nulo para a detecção do movimento do Éter, como os de Michelson-Morley, e a descoberta do elétron contribuíram para as últimas teorias do Éter antecedentes à Teoria da Relatividade, elaboradas por Lorentz e Poincaré. A Teoria da Relatividade não assumia a existência do Éter como hipótese e, nela, a velocidade da luz é a mesma para qualquer referencial adotado, a existência do Éter até poderia ser questionada sem produzir nenhum efeito para seu corpo teórico, e as transformações de Galileu não seriam mais suficientes para conversão de coordenadas, uma vez que elas violariam a hipótese da constância da velocidade da luz para observadores inerciais. Para um referencial que se move com metade da velocidade da luz como no exemplo anterior, o tempo necessário para que um feixe de luz atinja um ponto P seria essencialmente diferente daquele medido no referencial dito em repouso, conforme a Figura 46, e tal diferença não se origina no movimento relativo dos referenciais, e sim nas consequências desse movimento.

Figura 46: Coordenadas de um ponto segundo os referenciais do observador A e do carro B₂.



Fonte: Elaborada pelo autor em 2021.

Na tentativa de explicar o resultado do experimento de Michelson-Morley, o físico irlandês George Francis FitzGerald (1851-1901) afirmou que, de alguma maneira, o suporte que ficava na direção do movimento da Terra sofria um encurtamento, assim, o percurso dos feixes de luz nas diferentes direções tinham comprimentos diferentes, ou seja, as dimensões de um corpo que viaja através do espaço tendem a diminuir ao longo da direção para a qual o corpo viaja (EINSTEIN; LORENTZ; MINKOWSKI, 2014).

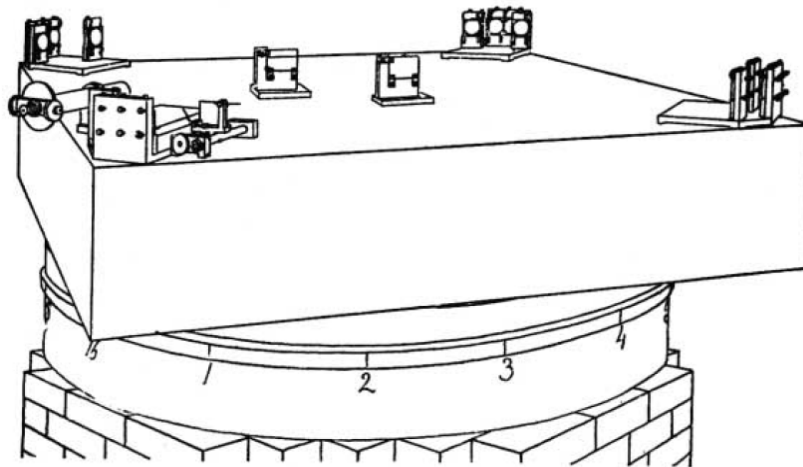
Por parecer uma explicação estranha, lembrando que espaço era considerado uma grandeza absoluta, a justificativa de FitzGerald não recebeu muita atenção dos cientistas da época até que o matemático holandês Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928), tentando encontrar uma transformação de coordenadas que conciliasse as equações do eletromagnetismo com a mecânica clássica, analisando os resultados do experimento de Michelson e Morley, desenvolveu de maneira puramente algébrica uma transformação capaz de converter coordenadas de um referencial para outro que fizesse com que, ao menos em uma certa aproximação, as equações do eletromagnetismo tivessem a mesma forma nos referenciais em movimento uniforme através do Éter (TAYLOR; WHEELER, 1992). Essa transformação de

coordenadas, inicialmente, compatibilizaria o eletromagnetismo com a Mecânica se tais referenciais pudessem ser identificados com os referenciais inerciais e as medidas envolvidas fossem tomadas em aproximações até primeira ordem de v/c (v era a velocidade relativa entre o referencial em consideração e o Éter). O resultado nulo do experimento de Michelson e Morley ocorreu dentro de $(v/c)^2$, fora da aproximação estabelecida pelas transformações de Lorentz na época (Lorentz e Poincaré fariam uso de uma transformação de coordenadas exata somente em 1904). Então Lorentz lança mão da hipótese análoga à da contração-dilatação dos comprimentos de FitzGerald de forma *ad hoc*³ para adequar o eletromagnetismo ao resultado nulo do experimento de Michelson-Morley, mas justificando-a com um resultado obtido de suas transformações, que previam que forças eletromagnéticas atuantes em um corpo seriam alteradas na direção do movimento deste em relação ao Éter e promoveriam uma mudança na coesão interna da matéria, alterando seu comprimento de forma específica a produzir o efeito nulo do experimento.

O experimento de Michelson-Morley consistiu em dividir um feixe de luz fazendo com que uma das partes percorresse um caminho paralelo ao movimento da Terra, enquanto a outra viajaria perpendicularmente a ele, ambos retornando ao ponto de divisão e sendo direcionados para um anteparo, onde poderia ser analisado o tipo de interferência, típica de fenômenos ondulatórios, produzida pelos feixes após percorrerem caminhos em sentidos diferentes. Na Figura 47 tem-se a representação do aparato utilizado, conforme consta no artigo publicado por Michelson e Morley em 1887, e na Figura 48, uma representação do funcionamento da experiência.

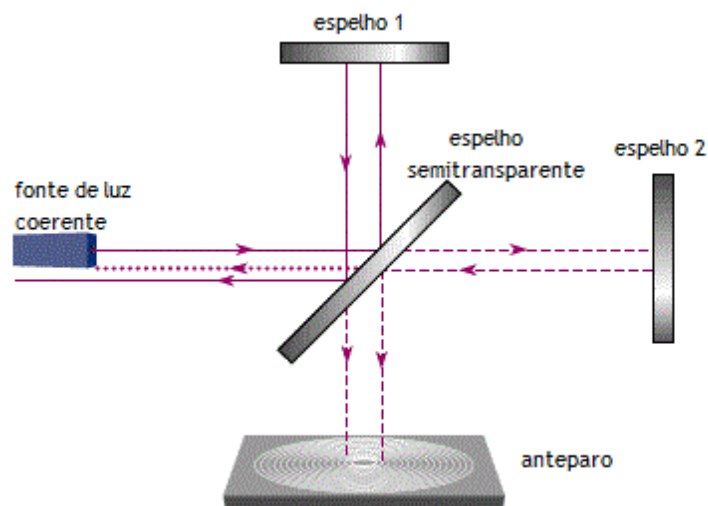
³ Expressão latina cuja tradução literal é "para isto" ou "para esta finalidade". Geralmente se refere a uma solução especificamente elaborada para um problema ou fim preciso e, por tanto, não generalizável e nem utilizável para outros propósitos.

Figura 47: Interferômetro de Michelson e Morley.



Fonte: Michelson e Morley (1887, p.337).

Figura 48: Esquema de funcionamento do interferômetro de Michelson e Morley.



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Interfer%C3%B4metro_de_Michelson#/media/Ficheiro:Interferometrodemich.gif.

Se considerarmos que o feixe refletido no espelho 2 viaja no sentido do movimento da Terra, sua velocidade seria dada, no referencial do Éter, por $c + v$ num dos trajetos e $c - v$ no outro, sendo c a velocidade da luz no referencial do meio material e v a velocidade do movimento terrestre no referencial do Éter. Assim, tomando L como a distância percorrida em cada parte do trajeto, o tempo t_2 , necessário para o percursos de ida e volta, do espelho divisor até o espelho 2 e de volta para o divisor, é dado por,

$$t_2 = \frac{L}{c+v} + \frac{L}{c-v} = \frac{2 \cdot L \cdot c}{c^2 - v^2},$$

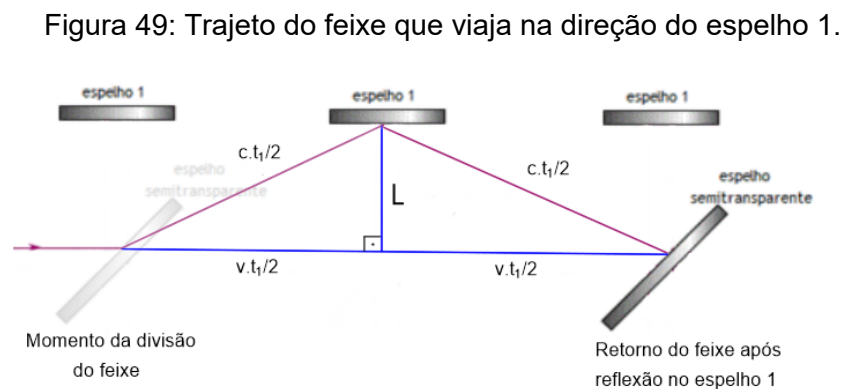
e, fatorando o termo c^2 obtemos,

$$t_2 = \frac{2L}{c} \cdot \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Fazendo $\frac{v}{c} = \beta$, a fração da velocidade da luz imprimida pela Terra em seu movimento orbital, obtemos a igualdade,

$$t_2 = \frac{2L}{c} \cdot \frac{1}{1 - \beta^2}. \quad (4)$$

Para o feixe que viaja no sentido do espelho 1, ou seja, perpendicularmente ao movimento terrestre, seu trajeto seria representado como na Figura 49, uma vez todo o interferômetro se move a distância de $v \cdot t_1$, sendo v a velocidade do movimento da Terra e t_1 o intervalo de tempo entre a divisão do feixe no espelho semitransparente e seu retorno após a reflexão no espelho 1.



Fonte: Adaptado de https://pt.wikipedia.org/wiki/Interfer%C3%B4metro_de_Michelson#/media/Ficheiro:Interferometroemic.gif.

A partir da Figura 49, podemos relacionar seus elementos aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo de hipotenusa $c \cdot t_1/2$, obtendo, assim, a igualdade,

$$t_1 = \frac{2L}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (5)$$

A diferença de tempo Δt entre os percursos, paralelo e perpendicular ao movimento terrestre, é calculado fazendo (4) - (5), obtendo,

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2L}{c} \cdot \left(\frac{1}{1-\beta^2} - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = \frac{2L}{c} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta^2} \right). \quad (6)$$

Considerando a velocidade de translação da Terra, o comprimento de onda da fonte de luz utilizada e o comprimento do percurso do feixe no aparato utilizado, Michelson e Morley esperavam encontrar uma interferência quase que totalmente destrutiva, com uma distância de aproximadamente 0,4 milímetros entre as franjas de interferência, muito acima da precisão calculada do aparato, que foi de 0,01 milímetro. A interferência esperada não se confirmou, sendo encontradas diferenças não superiores a 0,02 milímetro, atribuídas a possíveis erros de observação.

Na tentativa de explicar os resultados encontrados a partir de sua hipótese de contração-dilatação, Lorentz afirma que,

Se admitirmos que o braço colocado segundo a direção do movimento da Terra é mais curto do que o outro, sendo $L \cdot \frac{v^2}{2c^2}$ a diferença de comprimentos, e, ao mesmo tempo, que a translação tem a influência prevista pela teoria de Fresnel, então o resultado da experiência de Michelson fica completamente explicado. Ter-se-ia assim que postular que o movimento de um corpo sólido através do éter em repouso, por exemplo o de uma vara de latão, ou o do suporte de pedra utilizada na segunda experiência, tem sobre as suas dimensões uma influência que varia com a orientação do corpo em relação à direção do movimento. Se, por exemplo, as dimensões paralelas à direção do movimento forem alteradas na relação de 1 para $1 + \delta$ e as dimensões perpendiculares à mesma direção o forem na relação de 1 para $1 + \varepsilon$, deverá ser

$$\varepsilon - \delta = \frac{v^2}{2c^2}$$

o valor de uma das grandezas δ ou ε ficaria, assim, indeterminado: tanto poderia ser $\varepsilon = 0$, $\delta = -\frac{v^2}{2c^2}$ como $\varepsilon = \frac{v^2}{2c^2}$, $\delta = 0$, como ainda $\varepsilon = \frac{v^2}{4c^2}$ e $\delta = -\frac{v^2}{4c^2}$ (EINSTEIN; LORENTZ; MINKOWSKI, 2014, p.8).

Admitindo que a hipótese pudesse parecer surpreendente, Lorentz justifica que, assim como as forças de atração e repulsão entre partículas com carga, as interações entre duas moléculas ou átomos, que também se transmitem através do Éter, sofreriam alterações quando estas fossem colocadas em movimento.

Se assim for, é extremamente provável que a translação produza na interação de duas moléculas ou átomos uma alteração semelhante à que produz nas atrações ou repulsões entre partículas com carga. Ora, como a forma e dimensões de um corpo sólido são, em última instância, condicionadas pela intensidade das ações moleculares, não poderá então deixar de se verificar também uma alteração nas dimensões (EINSTEIN; LORENTZ; MINKOWSKI, 2014, p.8).

Nessa época as transformações usadas por Lorentz ainda eram aproximadas e este não foi capaz de identificar a contração de FitzGerald embutida nelas. Quem primeiro notou essa propriedade foi Larmor, que também já estava fazendo uso desse tipo de transformação em suas teorias sobre o Éter (LARMOR, 1900), assim como muitos outros, conforme History of Lorentz transformations (2022)

Apenas como forma de simplificar o raciocínio, considere um corpo se movendo com velocidade constante apenas na direção do eixo x, assim, as coordenadas em y e z se manterão inalteradas. Tomemos dois referenciais, S e S', de coordenadas (x, y, z, t) e (x', y', z', t'), respectivamente, e suponha que S' se move com velocidade constante v em relação à S na direção do eixo x positivo. Nessas condições, as transformações, já na forma exata, são:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \end{cases}, \quad (7)$$

com o termo $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ denominado de fator de Lorentz.

É fácil notar a grande semelhança entre as equações da transformação de Lorentz com as equações da transformação de Galileu, porém existem duas diferenças fundamentais: o fator γ , que depende da fração da velocidade da luz com que os referenciais se deslocam, e o fato de que as coordenadas temporais e espaciais são codependentes, ou seja, intervalos de tempo e espaço entre eventos são relativos ao referencial em que são medidos (uma outra quantidade, o intervalo espaço-temporal, esta absoluta, emergirá com os trabalhos de Minkowski).

Além da semelhança entre as equações, vale destacar que, se os referenciais se deslocam com velocidades muito menores do que a velocidade da luz, ou seja, se $v \ll c$, então o termo $\frac{v^2}{c^2}$ terá um valor extremamente pequeno, ou seja, $\frac{v^2}{c^2} \rightarrow 0$, e portanto, teremos $\gamma \rightarrow 1$, além do termo $\frac{vx}{c^2} \rightarrow 0$. Dessa forma, para velocidades muito menores do que a da luz, as equações da transformação de Lorentz levam às equações da transformação de Galileu,

$$\begin{cases} x' = 1(x - vt) = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = 1(t - 0) = t \end{cases}$$

Fica claro que, para velocidades do nosso cotidiano, os efeitos previstos pela transformação de Lorentz são desprezíveis, enquanto que, para velocidades muito elevadas, comparáveis à velocidade da luz, conceitos que tratamos com trivialidade sofrem alterações. Entre exemplos típicos, amplamente apresentados nos inúmeros livros didáticos, mas também na literatura avançada, estão:

- O paradoxo dos relógios: também conhecido como paradoxo dos gêmeos; não se trata de alguma inconsistência na Teoria da Relatividade Restrita, o nome paradoxo se origina nas características pouco intuitivas na perspectiva das antigas concepções de espaço e tempo absolutos; o fenômeno trata de dois relógios idênticos e inicialmente sincronizados que seguem percursos distintos, a

partir de um evento A, até que são reaproximados novamente em um evento B. A Teoria da Relatividade prevê a perda de sincronia dos dois relógios e permite, conhecendo-se o percurso e a rapidez de cada relógio, calcular essa defasagem;

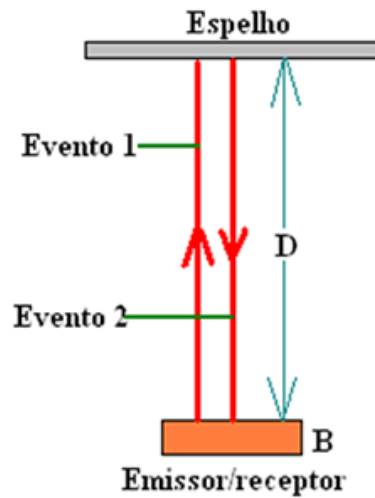
- A dilatação do intervalo de tempo: dois eventos A e B que ocorrem no mesmo local em um determinado referencial, mas cujos relógios medem um intervalo de tempo Δt apresentarão uma medida maior $\Delta t'$ se feita por relógios de outros referenciais em movimento relativo com o anterior;
- Contração do comprimento: uma haste apresenta um comprimento menor quando esta é medida por um referencial em relação ao qual ela se move do que se ela for medida num referencial no qual ela está em repouso, e a contração da medida se dá na direção do movimento (essa é a contração de Lorentz-FitzGerald reinterpretada no contexto da Teoria da Relatividade como um efeito cinemático e não dinâmico).

Além desses, existem outros efeitos associados à matéria e radiação, como o Efeito Doppler, a relatividade da energia e do momento linear de um ponto material a partir de referenciais distintos, etc. Todos esses fenômenos ou efeitos de medida encontram descrição clara e de significado geométrico usando uma abordagem geometrizada para a Teoria da Relatividade, inaugurada por Minkowski.

Apesar de tempo e espaço serem relativos, uma grandeza associada a pares de eventos é invariante para todos os observadores, ela é chamada de intervalo espaço-temporal, que analisamos considerando um relógio luz com funcionamento semelhante a um iô-iô, este último ilustrado na Figura 35.

Consideremos uma fonte que emite um pulso luminoso verticalmente, que é refletido por um espelho e retorna para um receptor posicionado juntamente com a fonte, em que cada unidade de tempo é determinada pelo trajeto de subida e descida do feixe luminoso, conforme esquematizado na Figura 50.

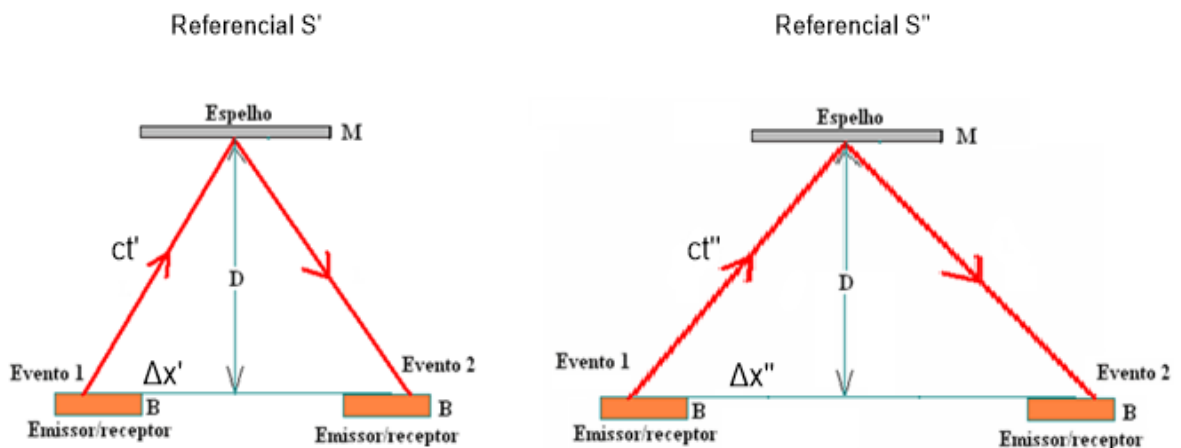
Figura 50: Relógio de luz.



Fonte: <https://www.preparaenem.com/fisica/dilatacao-do-tempo.htm>.

Se dois observadores, S' e S'' , se deslocam em relação ao relógio com velocidades distintas v' e v'' , respectivamente, cada um veria o feixe de luz viajando em trajetórias distintas e, considerando $v' < v''$, esses trajetos seriam percebidos conforme a Figura 51.

Figura 51: Trajeto de um pulso emitido por um Relógio de luz visto por referenciais que se movem um em relação ao outro.



Fonte: Adaptado de <https://www.preparaenem.com/fisica/dilatacao-do-tempo.htm>.

Durante o trajeto de ida do pulso de luz dentro do Relógio, os referenciais S' e S'' se deslocaram em relação ao Relógio $\Delta x' = v' \cdot \Delta t'$ e $\Delta x'' = v'' \cdot \Delta t''$, respectivamente, e, aplicando o Teorema de Pitágoras em ambas as situações obtemos,

$$(c\Delta t')^2 = D^2 + (\Delta x')^2,$$

e,

$$(c\Delta t'')^2 = D^2 + (\Delta x'')^2.$$

Das quais obtemos,

$$(c\Delta t')^2 - D^2 - (\Delta x')^2 = 0,$$

e,

$$(c\Delta t'')^2 - D^2 - (\Delta x'')^2 = 0.$$

que são quantidades invariantes nos dois referenciais ou até, pode-se dizer, para um pulso de luz iniciando seu trajeto em um evento A e finalizando em um evento B, deslocando-se por um tempo Δt nas três dimensões Δx , Δy e Δz em um referencial S e $\Delta t'$, $\Delta x'$, $\Delta y'$ e $\Delta z'$ em um referencial S', o mesmo resultado 0 é válido para as quantidades

$$(c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 \text{ e } (c\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2,$$

denominadas intervalo espaço-temporal (s^2) entre os eventos A e B, o invariante relativístico no espaço-tempo. Essa quantidade, que conecta eventos por meio de um pulso luminoso, apresenta o valor 0, porém, para outros pares de eventos que não estão relacionados dessa forma, o valor pode ser positivo ou negativo. Nesse trabalho, para simplificar, consideramos pares de eventos separados nos eixos x e x' apenas, e as dimensões em y e z geralmente não aparecem nas fórmulas, sem prejuízo para o entendimento dos elementos essenciais da Teoria da Relatividade na abordagem do Minkowski. Sendo assim, o intervalo espaço-temporal (s^2) fica expresso, simplificadaamente, por:

$$s^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2. \quad (8)$$

Vale ressaltar a semelhança da equação (8) com o teorema de Pitágoras aplicado na Geometria Euclidiana. No entanto, o intervalo espaço-temporal é obtido a partir da diferença e não da soma de dois quadrados, e tal invariante é uma característica importante no desenvolvimento do modelo de Minkowski.

5.5. O espaço-tempo de Minkowski

A Geometria de Minkowski trata um espaço geométrico que pode ser mapeado por quatro coordenadas, uma temporal e as 3 demais, espaciais. Os pares de pontos desse espaço geométrico são relacionados entre si pelo valor do intervalo espaço-temporal associado a eles, uma quantidade cujo valor independe do sistema de coordenadas escolhido. Segundo as palavras de Minkowski temos,

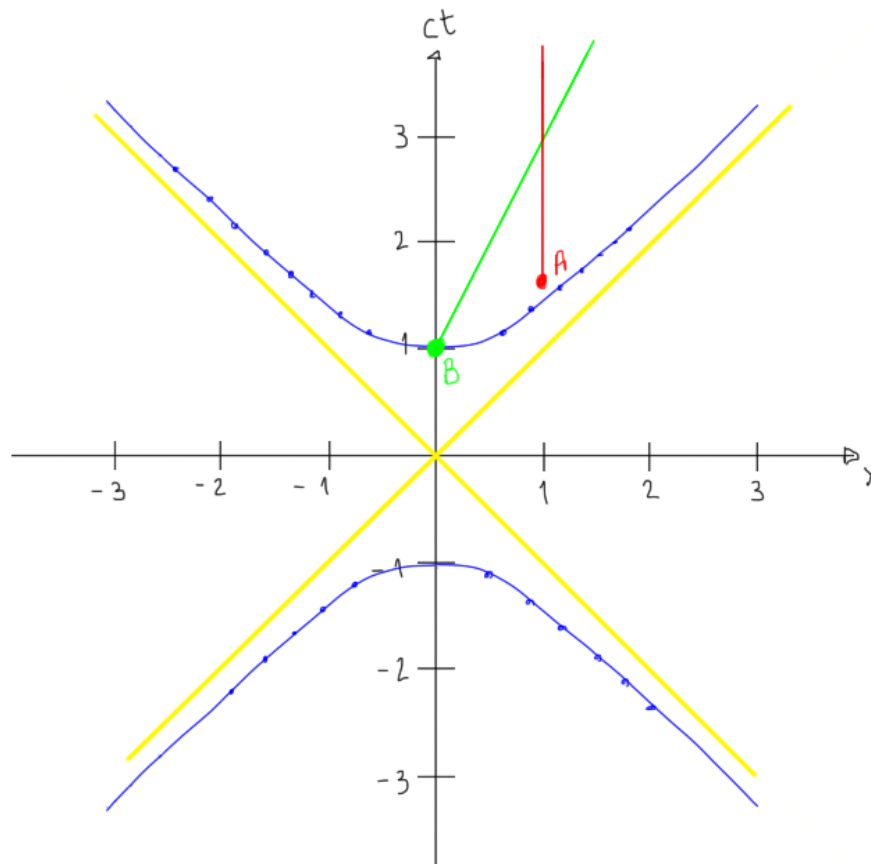
Vamos procurar apresentar graficamente a questão. Sejam x, y, z coordenadas retangulares para o espaço, e t o tempo. Lugares e tempos nunca se apresentam à nossa observação senão unidos entre si. Nunca se observa um lugar sem ser num determinado instante, nem um instante sem ser num determinado lugar. Mas continuarei a respeitar o dogma de que o espaço e o tempo têm significado independente (EINSTEIN; LORENTZ; MINKOWSKI, 2014, p.94).

Seja, então, um ponto no espaço num determinado instante e, para simplificar a situação, consideramos apenas o eixo espacial x e o eixo temporal ct , e tomamos, como exemplo, o lugar geométrico dos pontos (ct, x) cujo intervalo temporal entre ele e a origem, $(0, 0)$, valha 1:

$$c^2(t - 0)^2 - (x - 0)^2 = 1 \quad (9)$$

Temos então a representação de uma hipérbole que define todos os pontos do espaço-tempo cujo intervalo espaço-temporal seja igual a 1 ($s^2 = 1$), conforme a Figura 52.

Figura 52: Pontos do espaço-tempo com $s^2 = 1$.



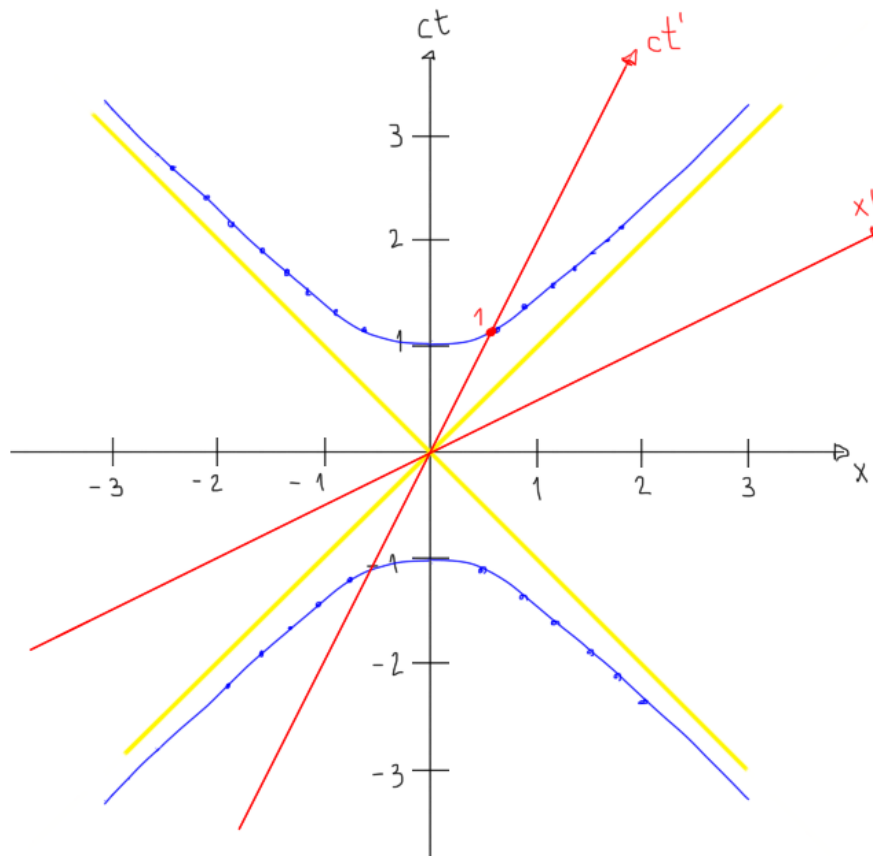
Fonte: Elaborada pelo autor em 2021.

Vale ressaltar que, multiplicando o eixo dos tempos pela velocidade da luz, temos ambos os eixos na mesma escala, em metros, o que nos permite representar o trajeto de qualquer feixe de luz como as bissetrizes dos quadrantes do referencial escolhido, sendo essas as assíntotas da hipérbole representada. As linhas que representam a posição de um corpo em diferentes instantes chamamos de linha de universo ou linha de mundo daquele corpo, dessa forma, as bissetrizes dos quadrantes (linhas amarelas) representam a linha de mundo de um pulso de luz emitido na origem do referencial escolhido, enquanto a linha vermelha representa a linha de mundo do corpo A, em repouso nesse referencial, e a linha verde é a linha de mundo de um corpo B que se move com metade da velocidade da luz no referencial cujos eixos estão representados na Figura 52.

Ao representarmos dois referenciais S e S', sendo S representado pelos eixos ct e x como na Figura 52, e S' com velocidade v em relação a S, de forma que as origens

coincidam no instante $t = t' = 0$, a hipérbole referente à Equação (9) determinará em ambos os referenciais, os pontos sobre os eixos temporais correspondentes a uma unidade de tempo, conforme a Figura 53.

Figura 53: Pontos com $s^2 = 1$ em S e S'.

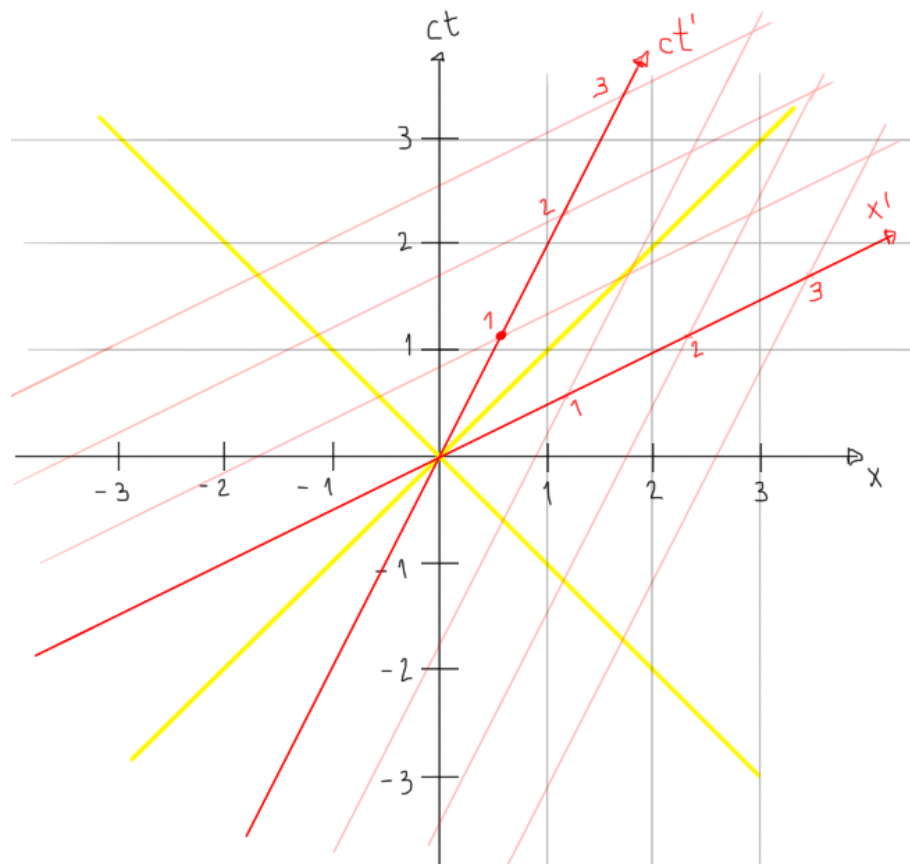


Fonte: Elaborada pelo autor em 2021.

As hipérbolas que representam o lugar geométrico dos pontos pertencentes a um mesmo intervalo espaço-temporal são o que possibilitam a relação entre as escalas dos eixos de cada um dos referenciais. Dois eixos temporais de referenciais distintos que têm a origem no ponto central da hipérbole, interceptam-na em pontos distintos a um mesmo intervalo de tempo a partir da origem.

Como os eixos espaciais e temporais estão na mesma escala e unidades em metros, é possível agora determinar, sobre ambos os referenciais, a grade que nos permitirá estabelecer a relação entre as coordenadas de determinado ponto do espaço-tempo em cada um deles, conforme a Figura 54.

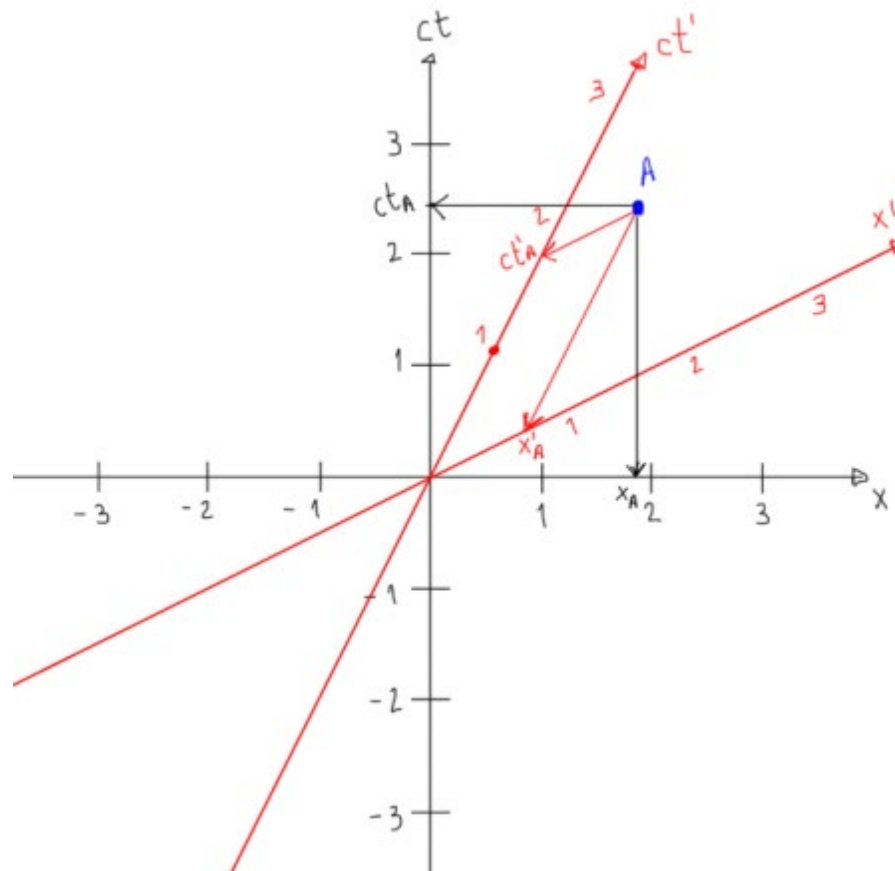
Figura 54: Malha de dois referenciais no diagrama de Minkowski.



Fonte: Elaborada pelo autor em 2021.

Dado um evento qualquer A num diagrama de espaço-tempo, suas coordenadas são obtidas traçando, a partir de A, linhas paralelas a cada um dos eixos respectivos a cada um dos observadores, conforme indicado na Figura 55.

Figura 55: Coordenadas de um ponto num diagrama de espaço-tempo com dois referenciais em movimento relativo.

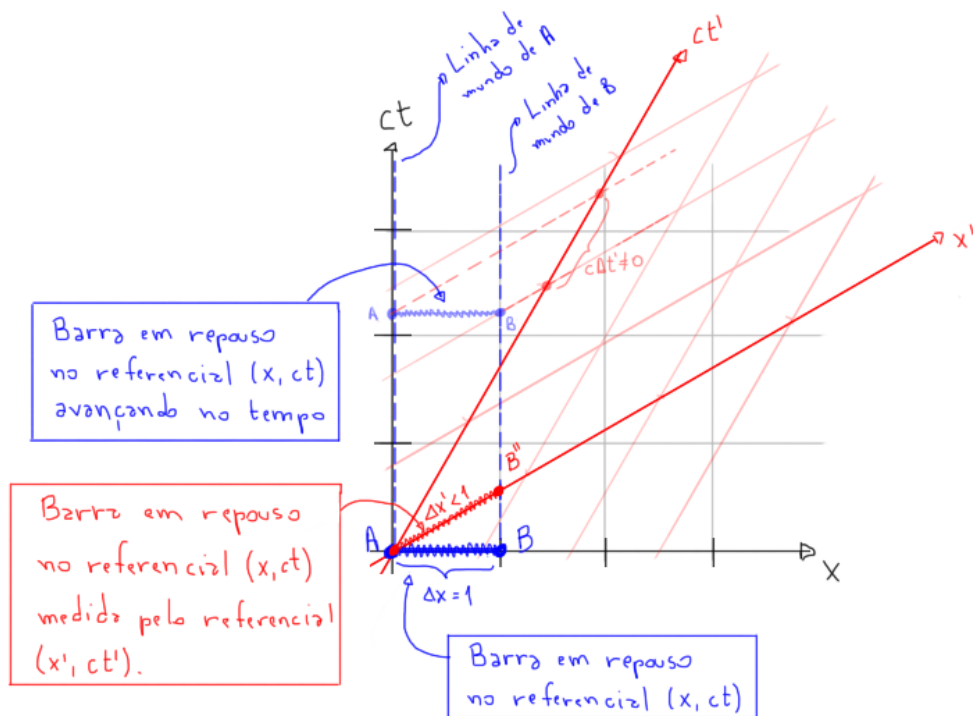


Fonte: Elaborada pelo autor em 2021.

A partir do diagrama de espaço-tempo de Minkowski é possível observar os efeitos da contração espacial e a dilatação temporal, uma vez que o mesmo evento apresenta coordenadas de menor valor para o observador com maior velocidade de deslocamento.

Considere uma barra com 1 metro de comprimento em repouso em relação ao referencial S e alinhada com o eixo x , com extremidades $A(0, 0)$ e $B(1, 0)$, com as linhas de mundo de suas extremidades conforme ilustrado na Figura 56.

Figura 56: Contração de comprimentos no diagrama de Minkowski.

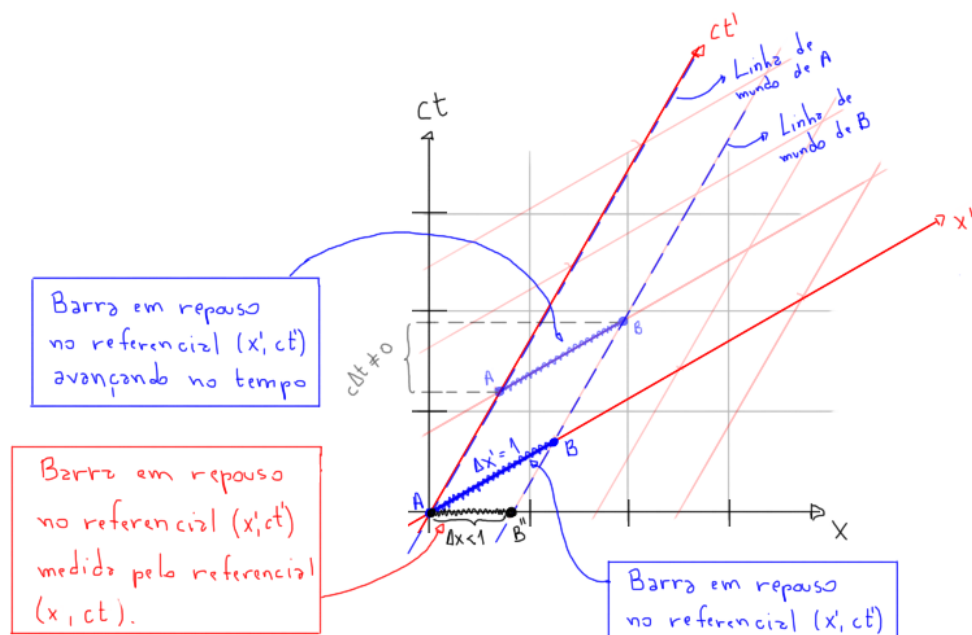


Fonte: Elaborado pelo autor em 2021.

Como a barra está parada em relação a S , os dois extremos são marcados ao mesmo tempo, correspondendo ao comprimento próprio da barra, $\Delta x = 1$, o que não ocorre para o referencial S' , no qual cada extremidade será marcada em um outro par de eventos que são simultâneos no referencial S' . Então a contração do comprimento prevista pela transformação de Lorentz se faz visível no diagrama do espaço-tempo de Minkowski, uma vez que $\Delta x' < 1$.

Tomemos agora a mesma barra com 1 metro de comprimento, agora estacionária em S' , alinhada com o eixo x' , com extremidades $A(0, 0)$ e $B(1, 0)$, e suas respectivas linhas de mundo conforme a Figura 57.

Figura 57: Contração de comprimentos no diagrama de Minkowski



Fonte: O autor (2021)

Temos então o comprimento próprio da barra medido em S' , uma vez que é nesse referencial que a barra está estacionária. Assim o comprimento próprio é $\Delta x' = 1$, o que não ocorre no referencial S , onde cada extremidade é marcada num instante diferente. Por esse motivo o referencial S percebe a barra contraída, com comprimento menor do que 1 metro.

Um fato muito importante que deve ser ressaltado é que, uma medida de comprimento se dá pela determinação da separação espacial entre dois eventos nas extremidades do corpo, simultâneos no referencial que faz a medida (como A e B na Figura 57). Outro referencial em movimento relativo com respeito ao primeiro apresenta outros eventos diferentes como simultâneos (observe A e B'' na Figura 57). Neste caso, a medida de comprimento do mesmo corpo extenso resulta em valor diferente, porém é possível relacionar as duas medidas, que dependem da velocidade relativa entre os referenciais.

No espaço-tempo de Galileu, no qual tempo e espaço são grandezas absolutas, dois eventos que são simultâneos num referencial dito estacionário também o serão em qualquer outro referencial que se mova com velocidade constante em relação ao primeiro, conceito que deixa de ser válido na Teoria da Relatividade Restrita, em

que, para um par de eventos, só é possível encontrar um referencial no qual eles sejam simultâneos.

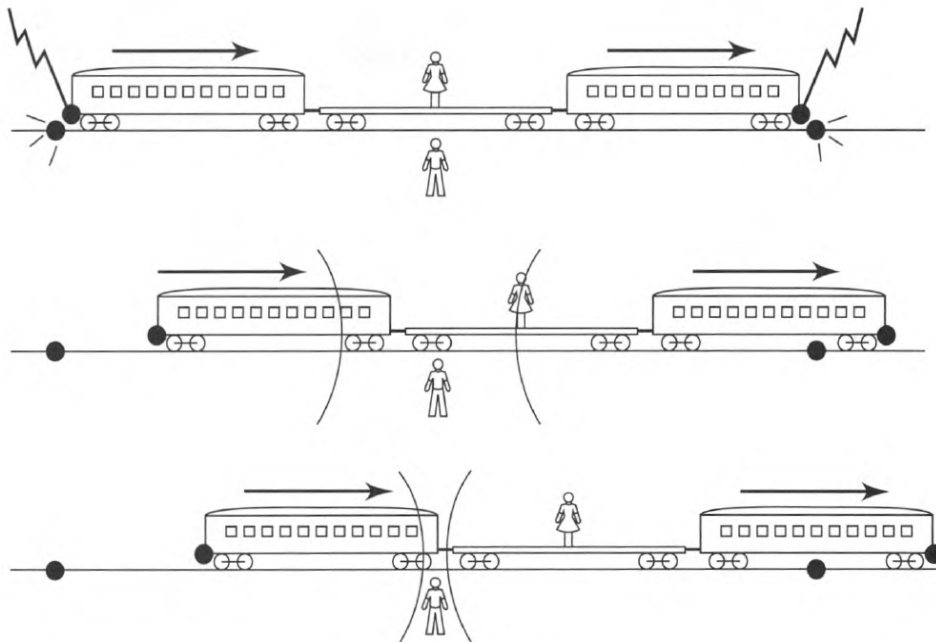
Façamos um exemplo no qual analisamos os efeitos relativísticos aplicando a transformação de Lorentz, o conceito de intervalo espaço-temporal e o diagrama de Minkowski.

Tomemos dois observadores, um na origem do referencial S, que assumimos estar em repouso à beira de uma plataforma de trens, e outro na origem do referencial S' sobre o ponto médio de um vagão, que se move com velocidade de $2,4 \cdot 10^8$ m/s, em cujas extremidades foram instalados dispositivos explosivos que, ao serem disparados, emitem um pulso luminoso no mesmo instante em que produzem uma marca no chão abaixo do trem. Assumimos que o instante $t = 0$ corresponde ao exato momento em que as origens dos referenciais coincidem, ou seja, um único evento é marcado como origem para ambos os referenciais, para o qual as coordenadas serão $t = x = 0$ e $t' = x' = 0$.

No instante $t = 1 \cdot 10^{-6}$ segundos, o observador em S recebe dois sinais luminosos, um vindo da sua direita e outro da sua esquerda, provenientes da detonação das cargas na extremidade direita D e esquerda E do vagão. Ele também verifica que as marcas geradas pelos explosivos estão nas coordenadas $x_D = + 300$ metros e $x_E = - 300$ metros e, sabendo que a velocidade da luz é $c = 3 \cdot 10^8$ m/s, determina que ambos os pulsos foram emitidos em $t_D = t_E = 0$ segundos.

Para o observador que se move com o trem, os pulsos chegam em momentos diferentes, uma vez que eles foram emitidos em pontos equidistantes da origem de seu referencial e ele se move ao encontro do pulso da direita e no mesmo sentido do pulso da esquerda, conforme ilustra a Figura 58.

Figura 58: Feixes de luz emitidos das extremidades de uma composição de trens observado do referencial do solo.



Fonte: Taylor e Wheeler (1992).

Se não levarmos em conta os efeitos relativísticos da dilatação temporal e contração espacial, a perda de simultaneidade entre os observadores passa a ser apenas aparente, ocorrendo apenas um atraso na recepção dos sinais. Mas o fato é que os efeitos relativísticos são reais, já foram detectados experimentalmente, e não podemos desconsiderá-los em situações com velocidades tão grandes conforme a utilizada no exemplo.

Para conseguirmos uma visualização clara da situação, vamos caracterizar os eventos D e E de acordo com os referenciais S e S', utilizando a transformação de Lorentz.

Em S temos,

$$D: (x_D = + 300 ; t_D = 0)$$

$$E: (x_E = - 300; t_E = 0),$$

e utilizando a transformação de Lorentz determinamos os valores de t'_D , t'_E , x'_D e x'_E medidos pelo observador em S'. Iniciando pela determinação do fator γ , obtemos,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(2,4 \cdot 10^8)^2}{(3,0 \cdot 10^8)^2}}} = \frac{5}{3}$$

Utilizando a transformação de Lorentz temos,

$$x'_D = \gamma(x_D - vt_D) = \frac{5}{3}(300 - 2,4 \cdot 10^8 \cdot 0) = 500,$$

$$x'_E = \gamma(x_E + vt_E) = \frac{5}{3}(-300 - 2,4 \cdot 10^8 \cdot 0) = -500,$$

$$t'_D = \gamma\left(t_D - \frac{vx_D}{c^2}\right) = \frac{5}{3}\left(0 - \frac{2,4 \cdot 10^8 \cdot 300}{(3,0 \cdot 10^8)^2}\right) = -\frac{4}{3} \cdot 10^{-6},$$

$$t'_E = \gamma\left(t_E - \frac{vx_E}{c^2}\right) = \frac{5}{3}\left(0 - \frac{2,4 \cdot 10^8 \cdot (-300)}{(3,0 \cdot 10^8)^2}\right) = \frac{4}{3} \cdot 10^{-6}.$$

A partir dos cálculos, verificamos que, enquanto para o observador em S a emissão dos sinais foi simultânea, para o observador em S' cada sinal foi emitido num instante diferente, e também com coordenadas diferentes das medidas pelo observador em S, e como o trem está estacionário em relação a S', seu comprimento próprio deve ser $\Delta x' = 1000$ metros, que é contraído para S devido à grande velocidade de deslocamento relativo.

Considerando as coordenadas espaço-temporais de ambos os eventos, verificamos que a transformação de Lorentz é consistente com a invariância do intervalo espaço-temporal. Em S, o valor de s^2 é dado por,

$$s^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = (0)^2 - 600^2 = -3,6 \cdot 10^5,$$

e, em S', temos s'^2 igual a,

$$s'^2 = (c\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 = (800)^2 - (1000)^2 = -3,6 \cdot 10^5,$$

mostrando que a transformação de Lorentz é consistente com a invariância do intervalo espaço-temporal.

Representando os eventos D e E no diagrama do espaço-tempo de Minkowski é possível visualizar a posição de cada acontecimento para os dois observadores, porém, como estamos utilizando o eixo temporal ct e ct' , devemos converter os valores de t'_D e t'_E em ct'_D e ct'_E .

Obtendo em S,

$$D: (x_D ; ct_D) = (+ 300 ; 0),$$

$$E: (x_E ; ct_E) = (- 300 ; 0),$$

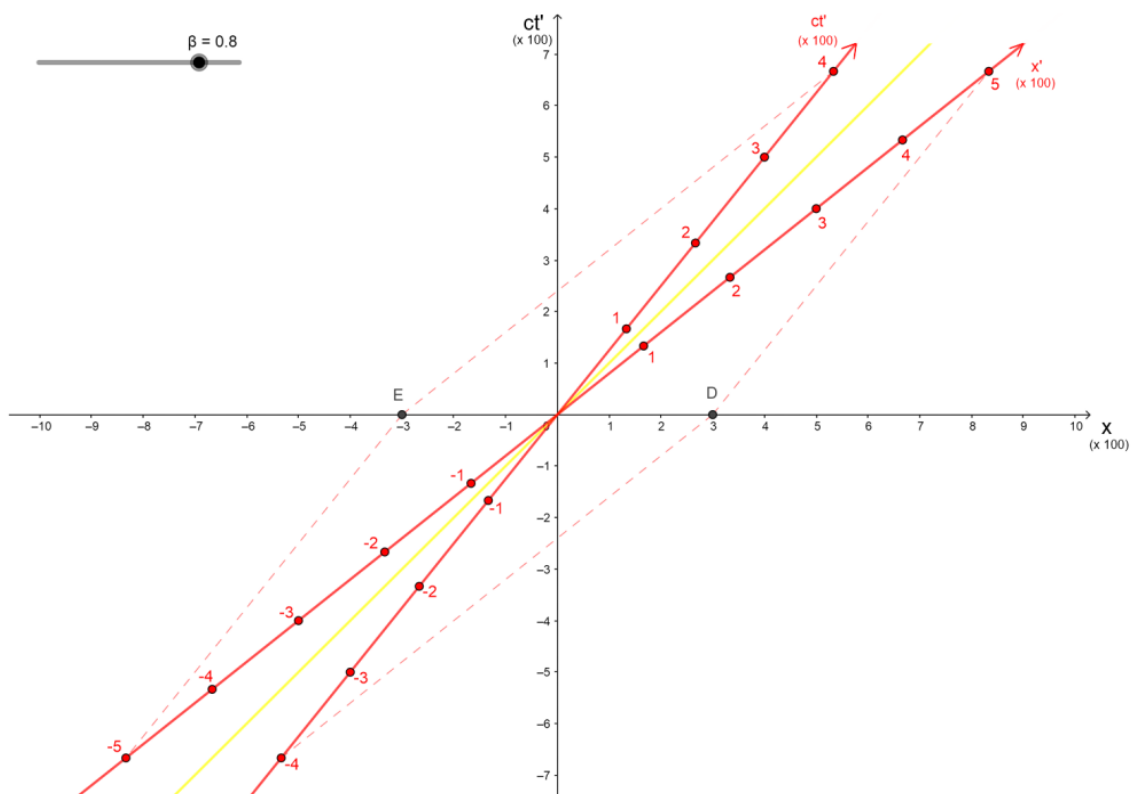
e em S',

$$D: (x'_D ; ct'_D) = (+ 500 ; - 400),$$

$$E: (x'_E ; ct'_E) = (- 500 ; + 400).$$

Além dessa conversão, utilizamos uma escala de 1 : 100 nos eixos coordenados para facilitar a representação no diagrama de Minkowski, resultando na Figura 59.

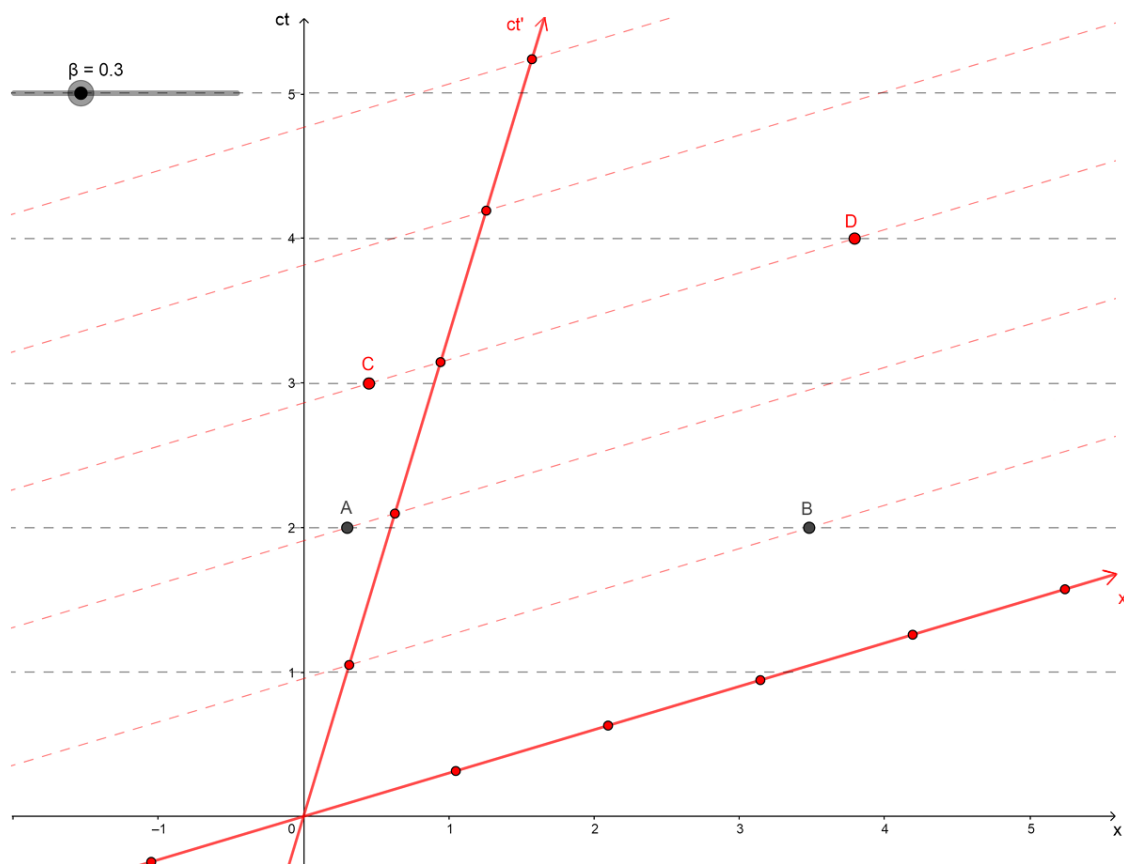
Figura 59: Representação do exemplo do trem no diagrama de Minkowski.



Fonte: Elaborado pelo autor em 2021.

Analisando a representação do exemplo no diagrama de Minkowski, é fácil perceber que dois eventos simultâneos num determinado referencial nunca o serão em outro que se mova com velocidade constante em relação ao primeiro. Na Figura 60 estão representadas as linhas de simultaneidade de dois referenciais, o referencial S, considerado estacionário, e o referencial S', que se move com velocidade de $0,3c$ em relação a S, cujas origens coincidem em $t = t' = 0$.

Figura 60: Linhas de simultaneidade no diagrama de Minkowski.

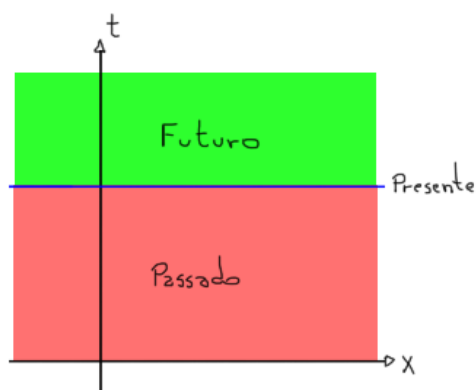


Fonte: Elaborado pelo autor em 2021.

Na Figura 60 temos os pontos A e B simultâneos em S, com $t_A = t_B = 2$, e não simultâneos em S', uma vez que $t'_A = 2$ e $t'_B = 1$. Da mesma forma, os pontos C e D são simultâneos em S', com $t'_C = t'_D = 3$, e não simultâneos em S, uma vez que $t_C = 3$ e $t_D = 4$.

Até a criação da Teoria da Relatividade Restrita, falava-se de um passado, um presente e um futuro comum e universal para todos os corpos do universo, conforme ilustrado na Figura 61.

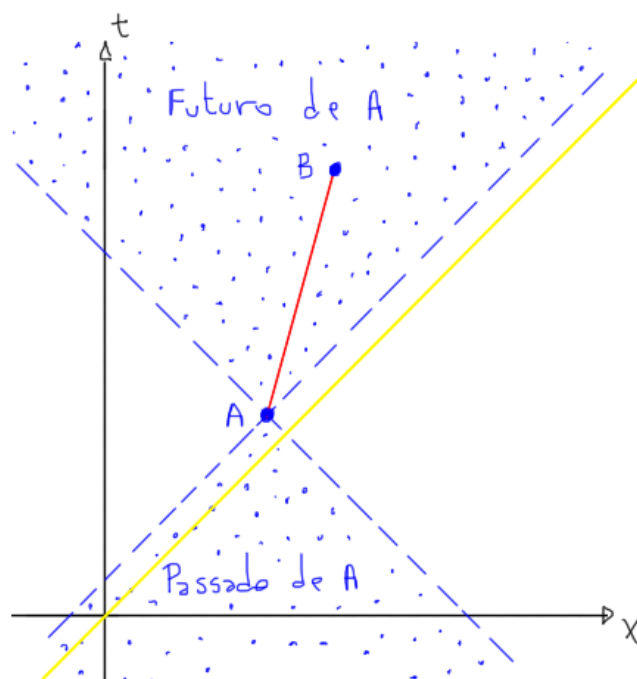
Figura 61: Passado, presente e futuro não relativista.



Fonte: Elaborado pelo autor em 2022.

O fato da velocidade da luz ser uma constante e, além de tudo, uma limitante, uma vez que nenhum corpo massivo pode viajar a uma velocidade maior do que c , cada corpo passa a ter um passado, um presente e um futuro, delimitados pelas linhas de mundo de um feixe de luz emitido a partir de sua posição no diagrama de Minkowski. Assim, os possíveis passados e possíveis futuros para um ponto A se deslocando pelo espaço-tempo ficam delimitados conforme a Figura 62.

Figura 62: Passados e futuros possíveis para um ponto A no diagrama do espaço-tempo de Minkowski.

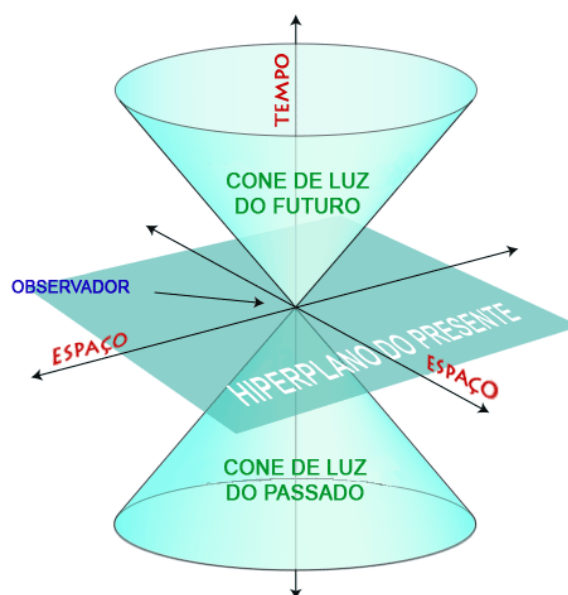


Fonte: Elaborado pelo autor em 2022.

Os pontos acima de A, na região denominada Futuro de A, são aqueles que podem ser alcançados ou influenciados por A, associamos aos eventos que podem ser alterados a partir da posição A do espaço-tempo. Da mesma forma, os pontos situados abaixo de A, na região denominada Passado de A, são os únicos que podem ter influenciado no comportamento de um corpo na posição A, estabelecendo assim as relações de causa e efeito em todo o espaço-tempo.

Ao expressarmos tais regiões com duas dimensões espaciais e uma temporal, temos o passado e o futuro de um corpo num certo ponto do espaço-tempo representado por dois cones, com vértices nesse ponto e eixos alinhados com o eixo temporal, ou seja, na vertical, conforme a Figura 63.

Figura 63: Cones de luz no espaço-tempo de Minkowski.



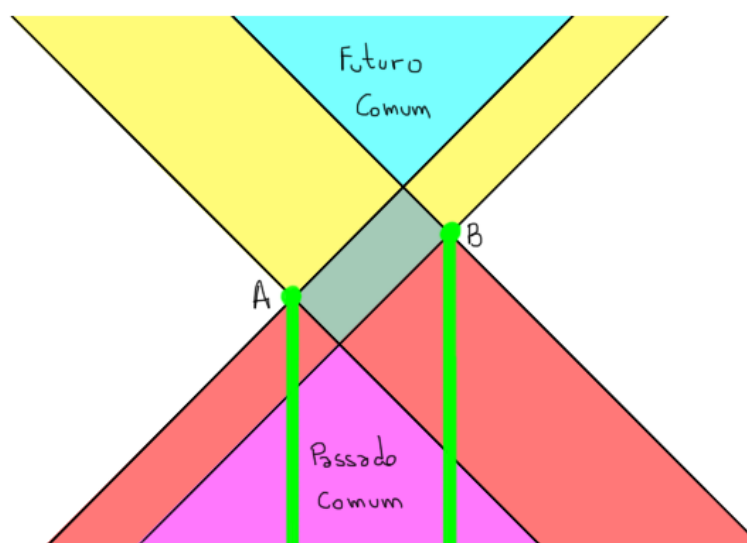
Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Cone-de-luz.png>.

Por causa dessa representação, as regiões que delimitam o passado e o futuro de um ponto no espaço-tempo são chamadas de cones de luz, deixando todos os pontos fora desses cones inacessíveis àquele ponto, no sentido de não ser possível uma influência causal entre eles.

O hiperplano do presente (plano de simultaneidade) não é absoluto, ele é dependente da linha de mundo do observador, representado pelo seu eixo dos tempos que passa dentro dos cones; um outro observador passando pelo mesmo evento no vértice que tenha outra linha de mundo terá associado a ele outro hiperplano de simultaneidade. No caso dos eventos associados com as regiões internas, externas e contidas nos cones, esses sim são absolutos, isto é, estarão presentes nestas mesma regiões, independentemente dos observadores possíveis presentes nesta mesma região do espaço-tempo.

Na Figura 64 temos dois eventos A e B com seus respectivos cones de luz em que, ao invés de um passado e futuro comum para todos os eventos do universo, temos regiões de intersecção entre os cones de passado e futuro de cada evento.

Figura 64: Passado e futuro comuns a dois eventos no espaço-tempo.

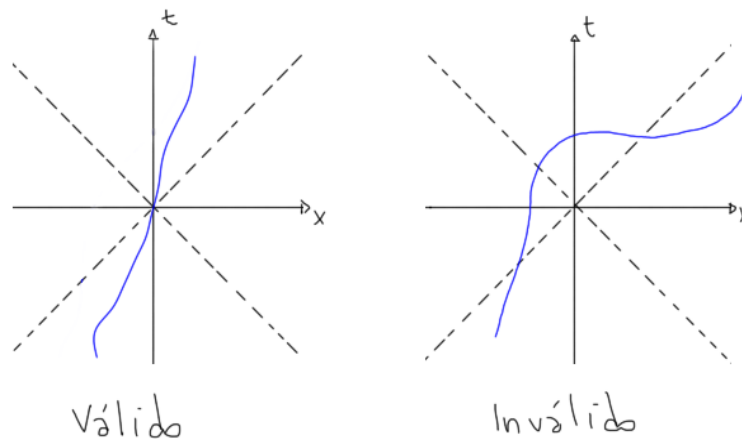


Fonte: Elaborado pelo autor em 2022.

O presente do evento A não tem qualquer efeito no evento B, uma vez que para isso, A teria que ser capaz de transmitir informação ou qualquer tipo de influência à B a uma velocidade maior do que a da luz, o que seria impossível. Todavia, é possível que esses eventos tenham recebido influência de eventos de seus passados, ou de um único evento de seu passado comum, e também que voltem a fazê-lo na região de seus futuros.

Até o momento tratamos apenas de referenciais inerciais, ou seja, observadores que se movem com velocidade constante no espaço-tempo, com linhas de mundo determinadas por segmentos de reta, mas podemos considerar um observador não inercial, em movimento acelerado, alterando constantemente sua direção no espaço-tempo, conforme ilustra a Figura 65 à esquerda.

Figura 65: Linha de mundo de um referencial não inercial.



Fonte: Elaborado pelo autor em 2022.

Vale observar que cada evento carrega consigo seu cone de luz, podendo definir a qualquer momento os eventos futuros que podem influenciar causalmente ou não. De qualquer maneira, sua trajetória nunca poderá ultrapassar a velocidade da luz, como ilustra a Figura 65 à direita, devendo sempre manter-se dentro de seu cone de luz.

Partindo dos trabalhos de diversos cientistas do final do século XIX, Albert Einstein foi capaz de formalizar os postulados da Teoria da Relatividade Especial e deduzir algebricamente as leis que conciliariam a relatividade de referenciais inerciais com os fenômenos observados no campo do eletromagnetismo, mas foi Hermann Minkowski que percebeu a importância de unir geometricamente as três dimensões espaciais e a temporal num espaço-tempo quadridimensional, permitindo que as transformações relativísticas fossem visualizadas num diagrama de espaço-tempo, promovendo a união indissolúvel do espaço e do tempo e dando contribuições inovadoras para a teoria, como por exemplo, incluir nela a interação eletromagnética entre corpos com carga elétrica fazendo uso de um formalismo tensorial.

Como o próprio Minkowski anunciou, as noções de espaço e tempo deveriam dar lugar a algo maior, o espaço-tempo.

Meus Senhores: As considerações sobre espaço e tempo que desejo expor-vos brotaram do terreno da física experimental. Aí reside a sua força. Sua tendência é radical. Daqui em diante os conceitos de espaço e de tempo, considerados como autônomos, vão desvanecer-se como sombras e somente se reconhecerá existência independente a uma espécie de união entre os dois. (EINSTEIN; LORENTZ; MINKOWSKI, 2014, p.93).

A princípio, o próprio Einstein não deu muita importância às inovações realizadas por Minkowski e outros, chegando a declarar que tal conceito seria desnecessário.

Assim começou a enorme simplificação formal da relatividade restrita. Inicialmente, Einstein não ficou impressionado e considerou as transcrições de sua teoria na forma tensorial como 'überflüssige Gelehrsamkeit' (erudição supérflua)*. *Einstein disse isso a V. Bargmann, a quem agradeço por me ter relatado. (PAIS, 2005, p.152).

No entanto, foi apenas após adotar os conceitos geométricos desenvolvidos por Minkowski que ele conseguiu expandir a teoria inicial e formular os postulados para a Teoria da Relatividade Geral publicada em 1915, que, numa descrição simplista, generaliza as leis da Teoria da Relatividade Especial e as Leis da Gravitação Universal de Newton.

No entanto, em 1912 ele adotou métodos tensoriais e em 1916 reconheceu sua dívida para com Minkowski por ter facilitado muito a transição da relatividade especial para a geral. (PAIS, 2005, p.152).

Passagens como esta mostram a importância do papel desempenhado por Minkowski e outros cientistas no desenvolvimento da Teoria da Relatividade.

5.6. Atividades propostas

As atividades sugeridas a seguir têm como objetivo principal despertar a curiosidade e estimular discussões, principalmente a respeito dos conceitos de dilatação temporal e contração espacial, possibilitando que os alunos reflitam sobre o assunto e argumentem a respeito de sua aceitação ou não. É importante lembrar que tais conceitos são plenamente aceitos, mostrando-se capazes de modelar a realidade,

no entanto, não são ideias simples de aceitar, e são muito interessantes para despertar a curiosidade e trabalhar a argumentação com os alunos.

As Atividades 1 e 2 foram baseadas em Fagundes (2009), no qual é possível encontrar mais exemplos e exercícios, além de uma leitura interessante e instrutiva no âmbito da Teoria da Relatividade Restrita e uma introdução às ideias da Relatividade Geral.

5.6.1. Atividade 1: A contração espacial

Objetivo específico: Explicar a detecção da partícula elementar múon na superfície da Terra utilizando-se dos conceito de espaço do ponto de vista relativista.

Objetivos gerais: Aplicar as transformações de Lorentz ao trajeto dos múons a fim de explicar sua presença na superfície terrestre.

Tempo estimado: 50 minutos

Para esta primeira atividade, recomendamos dividir os alunos em grupos de no máximo 5 integrantes, para possibilitar a discussão proposta.

Descrição da atividade:

- I. Introduzir a problemática a partir do texto abaixo:

O múon é uma partícula elementar que surge a partir da colisão dos raios cósmicos com a atmosfera da Terra numa altitude de cerca de 15 km. A partir de testes laboratoriais, a vida média do múon é de apenas 2,2 microssegundos ($2,2 \mu\text{s} = 2,2 \cdot 10^{-6} \text{ s}$) medido num referencial no qual ele está em repouso, quando então decai em três partículas, um elétron, um neutrino do múon e um antineutrino do elétron. Apesar da grande altitude e do curto tempo de existência, esta partícula é detectada chegando à superfície da Terra em laboratórios ao nível do mar.
- II. Sendo a velocidade do múon próxima de $0,99903c$, determine o fator de Lorentz γ utilizando a expressão $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$.

- III. Utilizando a relação de contração de comprimentos $L_0 = \gamma \cdot L$, derivada das transformações de Lorentz, na qual L_0 é o comprimento de um objeto no referencial no qual ele encontra-se em repouso, e L é o comprimento do mesmo objeto em relação ao referencial no qual ele está em movimento, determine o comprimento do percurso na atmosfera, que é de 15 km no referencial da Terra, de acordo com o referencial do múon;
- IV. De acordo com os dados fornecidos pelo texto e os valores calculados, é possível iniciar uma discussão quanto à validade da detecção dos múons na superfície terrestre, o que pode levar os alunos à diversas conclusões que devem ser exploradas;

Sugestões para o Professor: É importante deixar claro para os alunos que os resultados da contração de comprimentos só serão visíveis com velocidades da ordem da velocidade da luz, talvez seja interessante realizar os cálculos com velocidades cotidianas, de um avião ou um jato por exemplo, para mostrar-lhes que as contrações seriam insignificantes.

5.6.2. Atividade 2: A dilatação temporal

Objetivo específico: Explicar a detecção da partícula elementar múon na superfície da Terra utilizando-se dos conceitos de tempo do ponto de vista relativista.

Objetivos gerais: Aplicar as transformações de Lorentz ao trajeto dos múons a fim de explicar sua presença na superfície terrestre.

Tempo estimado: 50 minutos

Para esta atividade, recomendamos dividir os alunos em grupos de no máximo 5 integrantes, para possibilitar a discussão proposta.

Descrição da atividade:

- I. Considerando a velocidade do múon e a espessura da atmosfera fornecidos na Atividade 1, determinar o intervalo de tempo Δt necessário para a viagem do múon da atmosfera até a superfície, para um observador terrestre;

- II. Utilizando a relação da dilatação temporal $\Delta t_0 = \frac{\Delta t}{\gamma}$, derivada das transformações de Lorentz, na qual Δt_0 é o intervalo de tempo medido por um relógio que viaja juntamente com um corpo em movimento, e Δt é o intervalo de tempo medido por um relógio num referencial tomado como em repouso, no qual o movimento está sendo observado;
- III. De acordo com os dados fornecidos pelo texto e os valores calculados, é possível iniciar uma discussão quanto à validade da detecção dos múons na superfície terrestre, o que pode levar os alunos à diversas conclusões que devem ser exploradas;

Sugestões para o Professor: Assim como na Atividade 1, pode ser interessante realizar os cálculos com velocidades cotidianas para deixar claro que o efeito da dilatação temporal torna-se perceptível apenas para velocidades de ordens de grandeza próximas à da luz.

5.6.3. Atividade 3: A garagem de ônibus

Objetivo específico: Permitir que os alunos utilizem as bases da Teoria da Relatividade Restrita para determinar a solução de uma situação hipotética.

Objetivos gerais: Aplicar as transformações de Lorentz às dimensões de um corpo que viaja com velocidades próximas à da luz.

Tempo estimado: 30 minutos

Esta atividade pode ser realizada individualmente ou em grupos, e os resultados devem ser compartilhados, comparados e discutidos.

Descrição da atividade:

- I. Tendo como base as atividades anteriores, cada aluno ou grupo deve determinar a velocidade necessária a que se deve acelerar um ônibus de 10 metros de comprimento para que o mesmo caiba numa garagem de 5 metros;
- II. Após a finalização dos cálculos e discussão dos resultados, é possível utilizar a animação disponível em Hwang e Wee (2020) para mostrar a simulação da contração de Lorentz.

Sugestões para o Professor: Esta atividade deve servir mais para discussão e troca de pontos de vista do que para os cálculos efetivamente. É importante lembrar que os conceitos de contração espacial e dilatação temporal podem não ter sido completamente aceitos pelos estudantes, pontos de vista diferentes devem ser respeitados, mesmo que eles não consigam argumentar para defender seus pontos de vista. Neste caso o importante é o processo, o pensamento desenvolvido e a troca de ideias.

5.6.4. Atividade 4: O Paradoxo dos Gêmeos

Objetivo específico: Permitir que os alunos utilizem o intervalo de espaço-tempo invariante para determinar a solução de uma situação hipotética.

Objetivos gerais: Explorar as características geométricas do espaço-tempo.

Tempo estimado: 120 minutos

Esta atividade pode ser realizada individualmente ou em grupos, e os resultados devem ser compartilhados, comparados e discutidos.

Descrição da atividade:

- I. Cada aluno ou grupo deve utilizar um diagrama de Minkowski no qual um sistema de coordenadas de um referencial inercial está previamente representado com os eixos ct e x e devem familiarizar-se com ele, por exemplo explorando a atribuição de coordenadas a eventos distribuídos no diagrama;
- II. Discutir como o percurso de um ponto material se apresenta no diagrama calculando a velocidade para um exemplo em que o corpo está em movimento uniforme ou de um pulso de luz nesse referencial;
- III. Cada aluno ou grupo deve marcar no diagrama duas sequências de eventos que tem o mesmo evento de início e o mesmo evento de término, correspondente a viagens através do espaço tempo na forma de versões simplificadas como linhas poligonais;
- IV. Cada aluno ou grupo, deve calcular o tempo próprio de cada trecho percorrido pelos dois corpos e determinar o tempo de trajeto de cada viagem;
- V. Após a finalização dos cálculos e discussão dos resultados, é possível verificar que os tempos de duração de viagens diferentes são, em geral, diferentes.

Sugestões para o Professor: É importante lembrar que o conceito intervalo apresenta resultados iguais se forem utilizados outros sistemas de coordenadas, portanto, os resultados apresentados são referentes aos percursos dos viajantes no espaço-tempo e aos tempos próprios e não aos observadores ou referenciais.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho teve o objetivo de apresentar os conceitos iniciais das geometrias não euclidianas possibilitando a exploração de tais conceitos no ensino básico, em particular no Ensino Médio.

Inicialmente foi apresentada a Geometria do Taxista que, por sua simplicidade e semelhança com os conceitos já conhecidos dos alunos, julgamos ser um ótimo ponto de partida para essa discussão. A nova métrica proposta deve ser capaz de instigar a curiosidade e as atividades propostas devem promover discussões que levem à formalização de conceitos por parte do alunos, abrindo o caminho para apresentação de novos temas e perspectivas.

As Geometrias Hiperbólica e Elíptica, a última em especial, promovem um trabalho interdisciplinar, pela possibilidade de resgatar conhecimentos referentes ao posicionamento global e dispositivos do cotidiano, como GPS (*Global Positioning System*), para explorar uma geometria do dia-a-dia comumente esquecida, capaz de levar os alunos a conclusões simples a respeito do seu mundo e, mais uma vez, estimulando seu poder de análise e resolução de problemas, mobilizando conhecimentos diferentes para um fim específico.

Por fim, apresentou-se os conceitos básicos da Teoria da relatividade Restrita que, apesar já terem ouvido falar no assunto, a grande maioria dos alunos do ensino básico consideram de grande complexidade, mesmo nunca tendo iniciado qualquer estudo a respeito. Acreditamos que é possível, mesmo que de maneira superficial, apresentar os conceitos básicos da teoria e mostrar aos estudantes que, mesmo uma teoria tida como complicada inicia com ideias compreensíveis para o seu nível escolar, é que o conhecimento de tais assuntos pode despertar suas mentes para um mundo científico extremamente fascinante. As bases apresentadas neste trabalho, bem como as atividades propostas, talvez não sejam capazes de convencer todos os alunos, afinal, tratam-se de ideias que nos obrigam a pensar de maneira diferente daquela a qual estamos habituados, no entanto acreditamos que é exatamente aí que mora sua principal importância, obrigar nossos alunos a questionarem o que lhes é exposto, enquanto se esforçam para entender algo novo.

Acreditamos que a importância das geometrias não euclidianas para as salas de aula do ensino básico está na sua capacidade de intrigar e instigar os alunos, assim como muitos outros temas, essas geometrias trazem ideias diferentes daquelas que usamos tradicionalmente, sendo possível explorar a curiosidade dos estudantes ao mesmo tempo que promovemos seu desenvolvimento intelectual e social, tendo nesses dois pontos o maior objetivo do ensino básico, a formação integral dos estudantes.

REFERÊNCIAS

AZEVEDO, Jacson Santos; MONTEIRO JÚNIOR, Francisco Nairon. Tratamento Histórico Presente em Livros Didáticos de Física Concernente à Velocidade da Luz. **História da Ciência e Ensino**: construindo interfaces, [S.L.], v. 21, p. 48-64, 6 jul. 2020. [Http://dx.doi.org/10.23925/2178-2911.2020v21p48-64](http://dx.doi.org/10.23925/2178-2911.2020v21p48-64).

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília, 2018.

CABRAL, Sabrina Alves Boldrini. **Desenvolvendo o pensamento argumentativo geométrico**: construindo práticas investigativas. 2017. 224 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática, Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2017.

CHALMOVIANSKY, Pavel. Basic facts on hyperbolic geometry and its applications. **G - Slovenský Časopis Pre Geometriu A Grafiku**. Bratislava, p. 5-18. jan. 2011.

COUTINHO, Lázaro. **Convite às geometrias não-euclidianas**. 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2001.

CROWELL, Benjamin. **Newtonian Physics**. 2.3 Fullerton, Ca: Light And Matter, 2006.

DISALLE, Robert. **Stanford Encyclopedia of Philosophy**: space and time: inertial frames. Stanford: Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2020. Edward N. Zalta (ed.). Disponível em: <https://plato.stanford.edu/archives/win2020/entries/spacetime-iframes/>. Acesso em: 25 set. 2022.

EINSTEIN, Albert. **The meaning of relativity**. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2014. pages cm ISBN 9780691164083 (paper).

EINSTEIN, Albert; LORENTZ, Hendrik Antoon; MINKOWSKI, Hermann. **Textos fundamentais da física moderna I: o princípio da relatividade**. 6. ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2014. 301 p. Tradução de: Mário José Saraiva. ISBN 9789723107234. Título original: Das Relativitätsprinzip.

FAGUNDES, Helio V.. **Teoria da Relatividade**: no nível matemático do ensino médio. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

FEYNMAN, Richard Phillips; LEIGHTON, Robert Benjamin; SANDS, Matthew Linzee. **The Feynman LECTURES ON PHYSICS**. 3. ed. New York, Ny: Basic Books, 2010.

GALILEI, Galileu. **Diálogo sobre os dois máximos sistemas do mundo ptolomaico e copernicano**. 3. ed. São Paulo: Editora 34, 2011. Tradução por: Pablo Rubén Mariconda.

GREENBERG, Marvin Jay. **Euclidean and non-euclidean geometries: development and history**. 4. ed. New York: W. H. Freeman And Company, 2008.

History of Lorentz transformations. In: WIKIPEDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikipedia Foundation, 2022. Disponível em: [https://en.wikipedia.org/wiki/History_of_Lorentz_transformations#Larmor_\(1897,_1900\)](https://en.wikipedia.org/wiki/History_of_Lorentz_transformations#Larmor_(1897,_1900)). Acesso em 25 set. 2022.

HWANG, Fu-Kwun; WEE, Loo Kang. **Relativity Length Lorentz Transformation**. 2020. Disponível em: https://iwant2study.org/lookangejss/06QuantumPhysics/ejss_model_relativity_LengthLorentzTransformation/relativity_LengthLorentzTransformation_Simulation.xhtml. Acesso em: 11 set. 2022.

KRAUSE, Eugene F.. **Taxicab Geometry: an adventure in non-euclidean geometry**. New York: Dover Publications, Inc., 1986.

LOBACHEVSKI, Nikolai Ivanovich. **Geometrical Researches on the Theory of Parallels**. 1914. Traduzido para o inglês por George Bruce Halsted, University Of Texas, Lasalle, 1891.

LOIOLA, Carlos Augusto Gomes. **Um Táxi para Euclides: uma geometria não euclidiana na educação básica**. 2014. 96 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Pós-Graduação em Matemática, Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.

LOIOLA, Carlos Augusto Gomes; COSTA, Chrsitine Sertã. AS CÔNICAS NA GEOMETRIA DO TÁXI. **Ciência e Natura**, [S.L.], v. 37, p. 179-191, 7 ago. 2015. Universidade Federal de Santa Maria. <http://dx.doi.org/10.5902/2179460x14596>.

LARMOR, Joseph. **AETHER AND MATTER: a development of the dynamical relations of the aether to material systems on the basis of the atomic constitution of matter including a discussion of the influence of the earth's motion on optical phenomena**. Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press, 1900.

LOVIS, Karla Aparecida; FRANCO, Valdeni Soliani. UTILIZANDO O GEOGEBRA PARA CONSTRUÇÃO DE MODELOS PLANOS PARA A GEOMETRIA HIPERBÓLICA, in **Conferencia Latinoamericana de Geogebra**, Montevideo, v. 1, n. 1, p. 110-116, nov. 2012. ISSN 2301-0185.

MEDEIROS, João Rohan Silva de. **GEOMETRIA ESFÉRICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA: uma proposta de intervenção curricular**. 2017. 74 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará, Belém, 2017.

MICHELSON, Albert Abraham; MORLEY, Edward Williams. Relative Motion of the earth and the luminiferous Ether. **The American Journal Of Science**. New Haven - Conn, p. 333-345. nov. 1887.

NEWTON, Isaac. **THE PRINCIPIA**: mathematical principles of natural philosophy. London, England: University Of California Press, 1999. A new translation by Bernard Cohen and Anne Whitman assisted by Julia Budenz.

PAIS, Abraham. **'Subtle is the Lord...'**: the science and the life of Albert Einstein. Hampshire, Inglaterra: Oxford University Press, 2005.

RESENDE, Giovani; MESQUITA, Maria da Glória B. F.. Principais dificuldades percebidas no processo ensino-aprendizagem de Matemática em escolas do município de Divinópolis (MG). **Educação Matemática Pesquisa**: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, São Paulo, v. 15, n. 1, Sem paginação, 02 maio 2013. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.p>

SANTANA, André Luiz Mendes. **Trabalhando com Geometria Não-Euclidiana, com ênfase para a Geometria do Globo Terrestre na Educação Básica**: proposta de novas atividades. 2013. 66 f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Departamento de Matemática, Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2013. Disponível em: <http://repositorio.ufba.br/ri/handle/ri/22718>. Acesso em: 13 jan. 2021.

SILVA, Jonas Diogo Pinheiro da. A estrutura erigida para a relatividade de Einstein: o espaço-tempo de Minkowski. **Revista Brasileira de Física Tecnológica Aplicada**, [S.L.], v. 4, n. 2, p. 63-75, 1 dez. 2017. Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). <http://dx.doi.org/10.3895/rbfta.v4n2.7155>.

TAYLOR, Edwin F.; WHEELER, John Archibald. **Spacetime Physics**. 2. ed. New York: W. H. Freeman And Co., 1992.