UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
– PROFMAT

JORGE MATHEUS FERNANDES DE CAMARGO

O USO DOS RECURSOS DIGITAIS E DOS PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO COMO UMA ABORDAGEM INTERDISCIPLINAR NO ENSINO MÉDIO

DISSERTAÇÃO

CORNÉLIO PROCÓPIO

2022

JORGE MATHEUS FERNANDES DE CAMARGO

O USO DOS RECURSOS DIGITAIS E DOS PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO COMO UMA ABORDAGEM INTERDISCIPLINAR NO ENSINO MÉDIO

The Use of Digital Resources and Optimization Problemas as an Interdisciplinary Approach in High School

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Orientador: Alireza Mohebi Ashtiani, Dr.

Co-orientador: Thiago Pinguello de Andrade, Dr.

CORNÉLIO PROCÓPIO

2022

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Cornélio Procópio

JORGE MATHEUS FERNANDES DE CAMARGO

O USO DOS RECURSOS DIGITAIS E DOS PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO COMO UMA ABORDAGEM INTERDISCIPLINAR NO ENSINO MEDIO

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Matemática.

Data de aprovação: 16 de Setembro de 2022

Alireza Mohebi Ashtiani, - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Anderson Paiao Dos Santos, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Saeed Tafazolian, Doutorado - Universidade Estadual de Campinas (Unicamp)

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Deus, detentor de toda sabedoria e conhecimento, que me permitiu e deu condições para concluir essa jornada e realizar este sonho.

Ao meu orientador Prof. Dr. Alireza Mohebi Ashtiani por acreditar em mim e me mostrar o caminho. Pelo apoio e palavras de ânimo, compreensão e ensinamentos durante esse período, além da amizade e comprometimento.

À minha esposa Isabel, que sempre me apoiou durante o tempo em que me dediquei aos estudos. Também meu reconhecimento por todo amor, paciência, abdicações e incentivo!

Em especial também, a minha mãe Sônia, que sempre esteve orando por mim e me dando forças para continuar a trajetória!

À minha amiga de curso, Kátia, pelas inúmeras horas de estudo via meet, dando apoio, companheirismo, nos estudos para o ENQ e escrita deste trabalho, na torcida em cada etapa.

À direção e equipe pedagógica do Colégio Estadual Carolina Lupion, pelo apoio e me permitir realizar o estudo no local.

Aos alunos do Formação de Docentes que participaram da pesquisa, pelo empenho e dedicação durante todas as atividades realizadas.

Aos meus professores de Matemática do Ensino Médio, Adenilson e Carol, que sempre me incentivaram a seguir esta jornada, dando conselhos e prontos a me ajudar.

Aos professores do PROFMAT-UTFPR-Cornélio Procópio, pela dedicação que sempre tiveram com a turma durante todo este curso.

Aos membros da banca pela disposição de contribuir com este trabalho.

Meu agradecimento também aos meus colegas do PROFMAT-Cornélio Procópio, e em especial, meus amigos de carona que sempre estavam dispostos em tudo e caminhando sempre juntos!

Enfim, agradeço a todos que de alguma maneira contribuíram para realização deste trabalho. Pelas orações. Muito obrigado!

RESUMO

CAMARGO, Jorge Matheus Fernandes de. O USO DOS RECURSOS DIGITAIS E DOS PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO COMO UMA ABORDAGEM INTERDISCIPLINAR NO ENSINO MÉDIO. 148 f. Dissertação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2022.

Um dos conceitos matemáticos mais importantes e indispensáveis que tem um papel central não só para matemática como para toda ciência é o conceito de função. As funções são presentes na descrição e estudo de grande parte dos fenômenos naturais quando o objetivo é avaliar quantitativamente os mesmos. Diante desta realidade, o conceito deve ocupar um lugar de destaque no Ensino Médio, porém, a grande maioria dos estudantes apresenta uma certa dificuldade na compreensão deste conceito, e isso é um grande desafio para os professores de matemática do Ensino Médio. Diante disso, surge a necessidade de buscar novas metodologias de ensino, por intermédio dos recursos digitais e a interdisciplinaridade, já que as metodologias tradicionais de ensino não conseguem mais manter os alunos motivados e concentrados o tempo todo. Neste trabalho, propomos uma abordagem integrada, entre funções e problemas de otimização, que combina a interdisciplinaridade com a metodologia ativa. Os resultados mostram que a abordagem interdisciplinar proposta pode ajudar significativamente os alunos do Ensino Médio a entenderem a importância do conceito de funções, deixando de ser algo abstrato e sem relevância.

Palavras-chave: Funções. Interdisciplinaridade. Problemas de Otimização. Situações-Problema. Recursos Digitais. Ensino Médio

ABSTRACT

CAMARGO, Jorge Matheus Fernandes de. THE USE OF DIGITAL RESOURCES AND OPTIMIZATION PROBLEMS AS AN INTERDISCIPLINARY APPROACH IN HIGH SCHOOL. 148 f. Dissertação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2022.

One of the most important and indispensable mathematical concepts that plays a central role, not only for mathematics, but for all science as well, is the concept of function. Functions are present in the description and study of most natural phenomena when the objective is to evaluate them quantitatively. Faced with this reality, this concept should occupy a place of prominence in High School, but, the vast majority of students have some difficulty in understanding the concept, and, this is a a great challenge for high school mathematics teachers. Due to that, the necessity of seeking new teaching methods arises, through approaches that combine digital resources with interdisciplinarity, since traditional teaching methods can't keep students motivated and focused all of the time. In this work, we propose an integrated approach, between functions and optimization problems, which combines interdisciplinarity with active learning. The results show that the proposed interdisciplinary approach can significantly help high school students to understand the importance of the concept of functions, being no longer something abstract and irrelevant.

Keywords: Functions. Interdisciplinary. Optimization Problems. Problem Situations. Digital Resources. High School

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 2.1 – Função como uma máquina (próprio autor). 24
FIGURA 2.2 – Diagrama de uma função $f : A \to B$ (próprio autor). 25
FIGURA 2.3 – Diagrama de uma relação de A para B (próprio autor). 26
FIGURA 2.4 – Diagrama de uma relação de A para B (próprio autor). 26
FIGURA 2.5 – Diagrama da relação do Exemplo 2.5 (próprio autor). 27
FIGURA 2.6 – Exemplo do diagrama de uma função constante $f : A \to B$ (próprio autor). 27
FIGURA 2.7 – Exemplo do diagrama de uma função identidade $f : A \to A$ (próprio autor). 27
FIGURA 2.8 – Gráfico da função $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ (próprio autor). 30
FIGURA 2.9 – Gráfico de uma relação que não representa uma função (próprio autor). 31
FIGURA 2.10– Exemplo de gráfico de uma função par e uma função ímpar (próprio autor). 31
FIGURA 2.11– Funções crescente e decrescente (próprio autor). 32
FIGURA 2.12– Os gráficos de uma função e da sua inversa (próprio autor). 33
FIGURA 2.13– Valor pago pelas unidades consumidoras de Londrina - COPEL (autor próprio). 34
FIGURA 2.14– Coeficiente angular da função afim $f(x) = ax + b$ (próprio autor). 37
FIGURA 2.15– Função quadrática como parábola (póprio autor). 39
FIGURA 2.16– O gráfico da função quadrática $f(x) = x^2 - 4x + 3$ (próprio autor). 40
FIGURA 2.17– Construção de uma caixa sem tampa (próprio autor). 40
FIGURA 3.1 – Pierre de Fermat (1607–1665). 42
FIGURA 3.2 – Isaac Newton (1643–1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716). . 43
FIGURA 3.3 – Reta tangente t e retas secantes à curva $y = f(x)$ no ponto $P(a, f(a))$. . 44
FIGURA 3.4 – A inclinação da reta secante que passa pelos pontos $P(a, f(a))$ e $Q(x, f(x))$. 45
FIGURA 3.5 – A reta $y = 6x + 4$ é tangente à cruva $f(x) = -x^2 + 10x$ no ponto P (próprio autor). 47
FIGURA 3.6 – O movimento retilíneo de um carro (próprio autor). 47
FIGURA 3.7 – O deslocamento de um carro no intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ (próprio autor). 48
FIGURA 3.8 – Construção de uma caixa sem tampa (próprio autor). 57
FIGURA 3.9 – Caixas com 1 m^3 de volume (próprio autor). 58
FIGURA 3.10– Silo com o menor custo de produção (próprio autor). 58
FIGURA 3.11– Área de parada e descanso para os caminhoneiros (próprio autor). 59
FIGURA 3.12– Os mínimos e máximos locais e globais (próprio autor). 61
FIGURA 3.13– Os gráficos de $f(x) = x^2$ e $f(x) = x^3$ (próprio autor). 61
FIGURA 3.14– Os gráficos de duas funções descontínuas (próprio autor). 62
FIGURA 3.15– A demonstração geométrica do Teorema de Fermat (próprio autor). . . . 62
FIGURA 3.16– O gráfico de $f(x) = |x|$ (próprio autor). 63
FIGURA 3.17– O Teste da Primeira Derivada (próprio autor). 64
FIGURA 3.18– O gráfico de $V(x) = 4x^3 - 120x^2 + 800x,\ 0 \leq x \leq 10$ (próprio autor). . 66
FIGURA 3.19– A caixa com as dimensões ótimas da situação–problame a 1 (próprio autor). 66
FIGURA 3.20– O gráfico de $A(x) = 2x^2 + \frac{4}{x},\ x > 0$ (próprio autor). 67

FIGURA 3.21– A caixa com as dimensões ótimas da situação–problema 2 (próprio autor). . . . 68
FIGURA 3.22– O gráfico de $A(r) = 2\pi r^2 + \frac{16.000}{r},\ r > 0$ (próprio autor). . . . 69
FIGURA 3.23– O silo com o menor custo de construção da situação–problema 3 (próprio autor). . . . 69
FIGURA 3.24– O gráfico de $A(x) = -x^2 + 200x,\ 0 < x < 200$ (próprio autor). . . . 70
FIGURA 3.25– A área de lazer da situação–problema 4 (próprio autor). . . . 71
FIGURA 3.26– A área de descanso da situação–problema 5 (próprio autor). . . . 71
FIGURA 3.27– O gráfico de $A(x) = x + \frac{22.500}{x},\ x > 0$ (próprio autor). . . . 72
FIGURA 3.28– O gráfico de $P(x) = -8x^2 + 3.200x - 80.000,\ \ 0 \leq x \leq 250$ (próprio autor). . . . 73
FIGURA 4.1 – O primeiro contato com o ambiente do GeoGebra (próprio autor). . . . 75
FIGURA 4.2 – Ambiente do GeoGebra (próprio autor). . . . 75
FIGURA 4.3 – Ambiente do GeoGebra (próprio autor). . . . 76
FIGURA 4.4 – Gráfico de $f(x) = 2x + 1$ no GeoGebra (próprio autor). . . . 76
FIGURA 4.5 – Inserção de um texto no ambiente do GeoGebra (próprio autor). . . . 77
FIGURA 4.6 – Inserção de uma imagem no ambiente do GeoGebra (próprio autor). . . . 77
FIGURA 4.7 – Configurações de uma função no ambiente do GeoGebra (próprio autor). 78
FIGURA 4.8 – Configurações de uma curva no ambiente do GeoGebra (próprio autor). 78
FIGURA 4.9 – Inserção de um rótulo no ambiente do GeoGebra (próprio autor). . . . 79
FIGURA 4.10– O campo “Ferramentas Básicas” no ambiente do GeoGebra (próprio autor). . . . 80
FIGURA 4.11– As ferramentas básicas “ponto”, “raízes” e “otimização” no ambiente do GeoGebra (próprio autor). . . . 80
FIGURA 4.12– A posição e opções da configuração geral no ambiente do GeoGebra (próprio autor). . . . 81
FIGURA 4.13– Inserção de malhas nos gráficos no ambiente do GeoGebra (próprio autor). . . . 81
FIGURA 4.14– Formatação dos eixos coordenados no ambiente do GeoGebra (próprio autor). . . . 82
FIGURA 4.15– Existência de um teclado virtual no ambiente do GeoGebra (próprio autor). . . . 82
FIGURA 4.16– Próprio Autor 83
FIGURA 4.17– Próprio Autor 84
FIGURA 4.18– Próprio Autor 84
FIGURA 4.19– Próprio Autor 85
FIGURA 5.1 – Avaliação Diagnóstica - Primeiro Encontro 88
FIGURA 5.2 – Realização da Avaliação Diagnóstica 89
FIGURA 5.3 – Slide da aula sobre funções. Próprio autor 90
FIGURA 5.4 – Exemplo de conta de energia elétrica 91
FIGURA 5.5 – Problemas das laranjas 92
FIGURA 5.6 – Construção da caixa de maior volume 93
FIGURA 5.7 – Caixa com maior volume 94
FIGURA 5.8 – Caixa com maior volume 95
FIGURA 5.9 – Problema envolvendo palitos 96
FIGURA 5.10– O gráfico de $A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2.000}{r},\ r > 0$ (próprio autor). . . . 98
FIGURA 5.11– Silo envolvendo feijão 99
FIGURA 5.12– Problema da área de descanso 99

FIGURA 5.13– Próprio autor 100
FIGURA 5.14– Questão 4. Próprio autor 101
FIGURA 5.15– Questão 5. Próprio autor 102
FIGURA 5.16– Questão 6. Próprio autor 102
FIGURA 5.17– Próprio autor 103
FIGURA 5.18– Próprio autor 104
FIGURA 5.19– Próprio autor 104
FIGURA 5.20– Próprio autor 105
FIGURA 5.21– Próprio autor 105
FIGURA 5.22– Próprio autor 105
FIGURA 5.23– Próprio autor 106
FIGURA 5.24– Questão 10. Próprio autor 106
FIGURA 5.25– Gráfico das questões 12 e 15. Próprio autor 107
FIGURA 5.26– Gráfico das questões 13 e 14. Próprio autor 108
FIGURA 5.27– Gráfico da questão 16. Próprio autor 108
FIGURA 5.28– Gráfico da questão 17. Próprio autor 109
FIGURA 5.29– Gráfico da questão 18. Próprio autor 109
FIGURA 5.30– Gráficos das questões específicas. Próprio autor 111
FIGURA 5.31– Gráfico da questão 30. Próprio autor 111
FIGURA 5.32– Slides utilizados no segundo encontro. Próprio autor 113
FIGURA 5.33– Alunos analisando a conta de energia elétrica. Próprio autor 114
FIGURA 5.34– Discussão de como construir a caixa. Próprio autor 115
FIGURA 5.35– Construção da caixa. Próprio autor 116
FIGURA 5.36– Montando a caixa. Próprio autor 116
FIGURA 5.37– Próprio autor 117
FIGURA 5.38– Alunos observando os resultados no GeoGebra. Próprio autor 118
FIGURA 5.39– Plano de fundo no GeoGebra. Próprio autor 119
FIGURA 5.40– Caixas de maior volume. Próprio autor 119
FIGURA 5.41– Próprio autor 120
FIGURA 5.42– Próprio autor 121
FIGURA 5.43– Próprio autor 121
FIGURA 5.44– Silo envolvendo feijão 122
FIGURA 5.45– Próprio autor 123
FIGURA 5.46– Próprio autor 124
FIGURA 5.47– Próprio autor 124
FIGURA 5.48– Próprio autor 125
FIGURA 5.49– Próprio autor 125
FIGURA 5.50– Próprio autor 126
FIGURA 5.51– Próprio autor 126
FIGURA 5.52– Próprio autor 127
FIGURA 5.53– Próprio autor 127
FIGURA 5.54– Próprio autor 128
FIGURA 5.55– Próprio autor 128
FIGURA 5.56– Próprio autor 129
FIGURA 5.57– Próprio autor 129
FIGURA 5.58– Próprio autor 130
FIGURA 5.59– Próprio autor 131
FIGURA 5.60– Próprio autor 132

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO ... 11
1.1 OBJETIVO ... 16
1.1.1 Objetivos Gerais ... 16
1.1.2 Objetivos Específicos ... 16
1.2 JUSTIFICATIVA ... 17
1.3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA ... 18
1.4 RESULTADOS ESPERADOS ... 19
2 FUNÇÕES ... 21
2.1 INTRODUÇÃO ... 21
2.2 FUNÇÕES: DEFINIÇÕES E EXEMPLOS ... 23
2.2.1 Conjuntos ... 23
2.2.2 Definição de Função ... 24
2.2.3 Gráfico de uma Função ... 29
2.2.4 Funções Elementares Reais ... 33
2.2.4.1 Função Afim e Linear ... 33
2.2.5 Função Quadrática ... 37
3 NOÇÕES DE DERIVADAS E PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO ... 42
3.1 A HISTÓRIA DA DERIVADA ... 42
3.2 RETA TANGENTE: A INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA DERIVADA ... 44
3.3 VELOCIDADE INSTANTÂNEA: A INTERPRETAÇÃO FÍSICA DA DERIVADA 47
3.4 DERIVADA DE UMA FUNÇÃO ... 49
3.4.1 Derivada de Funções Elementares e Regras Básicas da Derivada ... 50
3.5 PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO: APLICAÇÕES ... 55
3.5.1 Mínimos e Máximos ... 60
4 UMA INTRODUÇÃO AO GEOGEBRA ... 74
5 APLICAÇÃO DOS PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO COMO UMA ABORDAGEM INTERDISCIPLINAR ... 87
5.1 INTRODUÇÃO ... 87
5.2 PRIMEIRO ENCONTRO – QUESTIONÁRIO INICIAL (20/04/2022) ... 88
5.3 SEGUNDO ENCONTRO (25/04/2022) ... 89
5.3.1 A COPEL e a Função Afim ... 91
5.3.2 O problema das laranjas ... 91
5.3.3 Função Quadrática ... 92
5.3.4 Função Cúbica ... 93
5.4 TERCEIRO ENCONTRO (26/04/2022) ... 94
5.5 QUARTO ENCONTRO (02/05/2022) ... 96
5.5.1 Maior área com palitos ... 96
5.5.2 Volume do silo ... 97
5.6 QUINTO ENCONTRO (03/05/2022) ... 99
5.7 SEXTO ENCONTRO – QUESTIONÁRIO FINAL (09/05/2022) ... 100
5.8 ANÁLISE DOS RESULTADOS ... 100

5.8.1 PRIMEIRO ENCONTRO - QUESTIONÁRIO INICIAL (ANEXO I) 100
5.9 SEGUNDO ENCONTRO 112
5.9.1 TERCEIRO ENCONTRO 115
5.9.2 QUARTO ENCONTRO 120
5.9.3 QUINTO ENCONTRO 122
5.9.4 SEXTO ENCONTRO 123
6 CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS 133
REFERÊNCIAS 135
Apêndice A – QUESTIONÁRIO 1 137
Apêndice B – QUESTIONÁRIO 2 143

1 INTRODUÇÃO

A matemática, por definição, é a ciência das quantidades e das formas, possui uma linguagem própria e que durante vários séculos vem fazendo parte da história da humanidade, estando em tudo ao nosso redor, em cada detalhe do dia a dia e em diversas situações. No entanto, no decorrer de todo este tempo, estudar e aprender matemática tem sido um grande desafio; tanto pelas mais diversas áreas que ela abrange quanto pela complexidade das mesmas, criando assim, diversos obstáculos quanto a sua aprendizagem.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1997), a matemática é ”componente importante na construção da cidadania, na medida em que a sociedade se utiliza, cada vez mais, de conhecimentos científicos e recursos tecnológicos, dos quais os cidadãos devem se apropriar”. Logo, podemos ver o quanto a matemática é importante para a formação de uma pessoa e ainda, segundo as Diretrizes Curriculares da Rede Pública de Educação Básica do Estado do Paraná de Matemática,

> A aprendizagem da Matemática consiste em criar estratégias que possibilitam ao aluno atribuir sentido e construir significado às ideias matemáticas de modo a tornar-se capaz de estabelecer relações, justificar, analisar, discutir e criar. Desse modo, supera o ensino baseado apenas em desenvolver habilidades, como calcular e resolver problemas ou fixar conceitos pela memorização ou listas de exercícios. (PARANÁ, 2008)

Existem muitos conceitos da matemática que dispensam uma formulação teórica complexa para que o estudante o compreenda. Porém, foi a partir do estudo de muitas pessoas e em muitas épocas que diversos conceitos mais complexos da matemática se desenvolveram (ZUFFI; PACCA, 2002), sendo que os estudantes possuem um repertório de explicações para fenômenos e conceitos que são diferentes daqueles que se ensina na escola (SCHROEDER, 2007). Um desses conceitos mais complexos é o de funções.

Segundo as orientações curriculares para o ensino médio de 2006:

> O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática (BRASIL, 2006).

E, de acordo com (ZUFFI; PACCA, 2002):

> Embora se possa ter uma concepção espontânea de variação e de associação entre duas grandezas, a caracterização das propriedades específicas das relações que são também funções matemáticas só foi possível num processo histórico longo e delicado, que culminou com as definições de Dirichlet e Bourbaki para funções. Essas possibilitaram um alto nível de abstração desse conceito, ampliando-o para conjuntos de objetos matemáticos antes pouco imagináveis.

É fato que função é um dos conceitos matemáticos fundamentais e indispensáveis que tem um papel central não só para matemática como para toda ciência. Ela está presente na descrição e estudo de grande parte dos fenômenos naturais quando o objetivo é avaliar quantitativamente os mesmos. O conceito de função não se limita apenas às aplicações simples e triviais, como por exemplo, a temperatura de uma camada de metal, o potencial elétrico em um dado ponto, a variação de preço de um produto ao longo do tempo, a distância percorrida em relação ao tempo, mas também às aplicações abstratas que não são tão triviais.

Diante desta realidade, o conceito de função deve ocupar um lugar de destaque no ensino médio uma vez que ele reflete de forma muito clara a dicotomia entre o prático e o teórico (ZUFFI; PACCA, 2002). Porém, a grande maioria dos estudantes apresenta uma certa dificuldade no estudo do conceito de função. Segundo (BRITO; ALMEIDA, 2005):

> Uma dificuldade, comumente enfrentada por professores de matemática, consiste em tornar compreensíveis conceitos que foram sendo construídos ao longo de muitos anos e cuja sistematização atual os distância da linguagem empregada pela maioria das pessoas em seu cotidiano.

Por exemplo, no caso do conceito de função (assim como a matemática em geral), os estudantes demonstram um grande desinteresse alegando a dificuldade e a complexidade do conceito, além de considerarem que a mesma não possui aplicações práticas no cotidiano, construindo assim uma barreira que os afastam do conhecimento profundo do conceito de função (e também da matemática"") e um sentimento de frustração.

Deve-se levar em consideração, que em muitas dessas dificuldades no entendimento e desenvolvimento de conceitos matemáticos estão relacionados às questões muitas vezes elementares, que se tornam obstáculos para o acompanhamento dos conteúdos propostos por parte dos estudantes, não obtendo assim bons resultados. Portanto, o grande desinteresse que atualmente os estudantes apresentam é devido a esse distanciamento entre conteúdo e a experiência, e segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino médio (BRASIL, 2000) "A integração dos diferentes conhecimentos pode criar as condições necessárias para uma aprendizagem motivadora".

Conforme (PACHECO; ANDREIS, 2018), “essas dificuldades podem ser oriundas de questões metodológicas inadequadas, professores mal qualificados, de uma infraestrutura escolar insuficiente e/ou relacionadas a alunos que apresentam bloqueios decorrentes de experiências negativas”, e ainda, tais impressões são originadas do primeiro contato do aluno com a matéria nas séries iniciais, além da falta de incentivo em estudar por parte dos pais ou responsáveis e a própria falta de disciplina para estudar. E, diante deste cenário, atrair a atenção e interesse dos alunos pelas aulas de matemática tem sido desafiador.

Pensando em todas essas situações, a matemática do ensino médio deve proporcionar ao aluno, uma visão de mundo contextualizada e de total aplicabilidade e que o beneficie em sua vida cotidiana, despertando assim, seu interesse pela disciplina. E ainda, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais:

> Os objetivos do ensino médio em cada área do conhecimento devem envolver, de forma combinada, o desenvolvimento de conhecimentos práticos, contextualizados, que respondam às necessidades da vida contemporânea, e o desenvolvimento de conhecimentos mais amplos e abstratos, que correspondam a uma cultura geral e a uma visão de mundo (BRASIL, 2000).

Diante dessa nova realidade, surge a necessidade de buscar novas metodologias de ensino e que o torne mais significativo, aproximando-se do estudante e de seu dia a dia, a fim de levá-lo a questionar, analisar, compreender e justificar determinadas soluções e contribuindo assim para a sua formação como aluno e cidadão.

Dentro dessas novas metodologias, observa-se a resolução de problemas, que vem a fim de dinamizar as aulas e como uma poderosa ferramenta de aprendizagem, não tendo uma única forma de se chegar aos resultados pretendidos, mas sim, de maneira instigante a buscar diferentes estratégias e caminhos para a solução dos problemas propostos. De acordo com (LUPINACCI; BOTIN, 2004):

> A resolução de problemas é um método eficaz para desenvolver o raciocínio e motivar os alunos para o estudo da Matemática. O processo de ensino e aprendizagem pode ser desenvolvido através de desafios, problemas interessantes que possam ser explorados e não apenas resolvidos.

Logo, como foi abordado por (LUPINACCI; BOTIN, 2004), o processo de ensino e aprendizagem deve estar atrelado a situações que estimulem os alunos a pensar e querer resolver, isto é, que sejam interessantes e não o simples resolver, desenvolvendo no estudante um pensamento crítico e de maneira criativa e reflexiva. Assim, surge a proposta de trazer os problemas de otimização para resolver determinados problemas no ensino médio. É notório que, a mesma é abordada de forma mais avançada no ensino superior e em determinados cursos de ciências exatas, dentro das disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, e posteriormente em disciplinas da área de Pesquisa Operacional para os alunos de Matemática Aplicada ou Engenharias. Através de situações-problemas envolvendo este tema, é possível trabalhar os mais diversos conceitos tais como o de funções lineares e não lineares, inequação de 1° grau ou de graus superiores, matrizes e sistemas lineares; além de toda abordagem envolvendo leitura e interpretação de gráficos.

O termo otimização, em geral, refere-se ao estudo de problemas nos quais se busca minimizar ou maximizar uma certa função, chamada de função objetivo, sujeito a um conjunto de restrições que limitam a escolha dos valores das variáveis de decisão do problema. Muitos problemas reais e práticos do nosso cotidiano podem ser reformulados e modelados de maneira muito conveniente como problemas de otimização. Esses problemas possuem uma vasta área de aplicação, como engenharia, economia, planejamento, transporte, tomada de decisão, logística, mineração de dados, informática entre outras. Por exemplo, quando alguém sai de casa para algum destino, sempre busca minimizar a distância, o tempo e/ou o custo.

Assim, o conceito de função pode ser abordado dentro do contexto de interdisciplinaridade uma vez que o uso das aplicações permite um trabalho interdisciplinar, consequentemente motivando os alunos nas disciplinas de matemática.

A interdisciplinaridade entrou no cenário educacional do Brasil a partir da Lei nº 5.692/71 e depois ganhou mais destaque com a nova Lei de Diretrizes e Bases da Educação Brasileira nº 9.394/96 e com os Parâmetros Curriculares Nacionais – Os PCNs. A aplicação de matemática em outras áreas de conhecimento é geralmente feita através de modelagem matemática, que é nada mais que representar uma situação por tabelas, gráficos, funções, fórmulas, figuras e outros termos matemáticos.

Para (SOUSA, 2010):

> A interdisciplinaridade como abordagem para pesquisa e ensino busca a interação entre uma, duas ou mais disciplinas ou áreas do conhecimento humano, num processo que abrange desde uma simples comunicação de ideias até a integração de finalidades, objetivos, conceitos e conteúdos.

Por exemplo, a função exponencial é uma das funções mais importantes que aparece muito frequentemente nas aplicações da matemática. Muitos problemas reais, como os problemas de crescimento/decrescimento populacional ou fenômenos naturais, os problemas financeiros do juro composto, os problemas de resfriamento na física, os problemas de decaimento radioativo na química entre outros, podem ser modelados e simulados através de funções exponenciais.

Por outro lado, os sistemas e metodologias tradicionais de ensino e aprendizagem não conseguem mais manter os alunos motivados e concentrados o tempo todo, e isso é ainda desafio maior em aulas de matemática que exigem uma maior participação dos alunos nas discussões. Por isso, o professor, dentro de um sistema diferenciado, precisa se renovar, se remodelar constantemente e adotar metodologias em que os alunos se envolvam mais ativamente com o aprendizado, fazendo com que as aulas sejam mais produtivas. Isso pode ser feito através de combinações de conceitos, técnicas, ferramentas, como por exemplo, o uso da metodologia ativa.

Neste novo sistema, o professor precisa estar disposto a se renovar e acompanhar sempre as novas tecnologias e buscar métodos inovadores de ensino que melhor se adaptam à realidade dos seus alunos. O uso dos recursos digitais vem ganhando força nos últimos anos, principalmente com o início da pandemia de COVID19. Um destes recursos digitais é o *GeoGebra* que é um software de livre acesso para *Android*, *Windows*, *Mac*, *iOS*, *Chromebook* e *Linux*. O GeoGebra pode ser utilizado por professores de matemática para explorar a álgebra e a geometria, assim deixando as aulas mais motivadoras e atraentes.

Desse modo, esta dissertação tem como objetivo realizar um estudo pensando em desenvolver diversos problemas que envolvam a otimização e que se apoiam também nos recursos digitais (metodologia ativa) como ferramenta de solução, e que de maneira contextualizada pode chamar a atenção dos alunos de maneira dinâmica.

Ao longo deste trabalho, propomos uma abordagem interdisciplinar que apresenta os problemas simples de otimização. Em seguida, resolvemos os problemas apresentados através de fórmulas básicas, desigualdades, derivada de funções elementares (e outros conteúdos estão na grade do ensino médio), além dos recursos digitais que são a realidade atual desses estudantes, para auxiliar no ensino desses conteúdos.

Deve-se levar em conta que trazer tais problemas, pode aprimorar seu processo de aprendizagem em matemática e confirmar a sua aplicabilidade, pois a interdisciplinaridade segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais, vem para somar e manter o diálogo entre os conhecimentos de forma a complementá-los, questioná-los ou até mesmo negá-los:

> A partir do problema gerador do projeto, que pode ser um experimento, um plano de ação para intervir na realidade ou uma atividade, são identificados os conceitos de cada disciplina que podem contribuir para descrevê-lo, explicá-lo e prever soluções. Dessa forma, o projeto é interdisciplinar na sua concepção, execução e avaliação, e os conceitos utilizados podem ser formalizados, sistematizados e registrados no âmbito das disciplinas que contribuem para o seu desenvolvimento (BRASIL, 2000).

Acredita-se que os resultados deste projeto podem servir como uma referência inicial para os professores de matemática e outras áreas do ensino médio, consequentemente, permitindo-os trabalhar com a interdisciplinaridade combinada com a metodologia ativa.

1.1 OBJETIVO

O presente trabalho propõe uma abordagem integrada entre funções e situações-problemas em que envolvem problemas de otimização nas aulas de matemática do ensino médio.

1.1.1 OBJETIVOS GERAIS

O objetivo geral deste projeto de pesquisa é propor uma abordagem interdisciplinar de funções e problemas de otimização, que combina a interdisciplinaridade com a metodologia ativa, de tal forma que proporcione aos professores de matemática do ensino médio uma metodologia que lhes sirva de um material didático na construção de uma sequência didática inovadora no desenvolvimento do conceito de função de modo a despertar o interesse dos estudantes em aprender matemática, deixando as aulas de matemática mais interessantes e motivadoras, e, fazendo com que os estudantes se sintam protagonistas no processo de aprendizagem.

1.1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Alguns dos objetivos específicos pretendidos com a proposta desta pesquisa são:

- Propor e desenvolver uma metodologia para o estudo de funções.
- Realizar um estudo com foco em uma abordagem interdisciplinar que emprega os problemas de otimização para abordar o conceito de função, evitando que os estudantes construam tal conceito de maneira fragmentada.
- Analisar a importância da modelagem matemática na solução dos problemas cotidianos dos estudantes.
- Realizar um estudo com foco nos métodos algébricos (teoria) compreensíveis e abordáveis aos estudantes do ensino médio para resolver os problemas reais modelados como problemas de otimização.
- Fazer uso de metodologia ativa (recursos digitais) que serve de auxílio para o desenvolvimento de uma boa situação de aprendizagem em aulas de matemática.

- Aplicar e analisar a abordagem proposta nas turmas de matemática do Colégio Estadual Carolina Lupion EFMN, localizado na Rua Jorge Barros, 1095, Centro, Carlópolis – PR.

1.2 JUSTIFICATIVA

O conceito de função é um conceito indispensável quando o objetivo é avaliar quantitativamente muitos fenômenos naturais. No ensino médio, por sua vez, o conceito de função é tratado e alguns tipos de funções elementares são apresentadas e estudadas superficialmente ao longo deste período, porém falta uma abordagem diferenciada que integre a abstração e a aplicação deste conceito em um mesmo grau de relevância pois com isso nada se perde no processo de ensino.

Segundo as orientações curriculares para o ensino médio de 2006:

> O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática (BRASIL, 2006).

Uma grande dificuldade que os professores de matemática enfrentam quando o assunto é função é que este conceito não é um conceito que se limita apenas às aplicações simples e triviais e muitas vezes o aluno precisa conhecer outros conceitos de matemática ou até de outras disciplinas como pré-requisitos, tratando assim, também, a interdisciplinaridade entre matemática e outras áreas como por exemplo física e química. Sem esta interdisciplinaridade haverá fragmentação e deficiência do conhecimento de modo que o aluno não será capaz de construir um conhecimento compartimentado e esta interdisciplinaridade faz com que o aluno saiba que não existe ciência isolada.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais:

> A interdisciplinaridade deve ser compreendida a partir de uma abordagem relacional, em que se propõe que, por meio da prática escolar, sejam estabelecidas interconexões e passagens entre os conhecimentos através de relações de complementaridade, convergência ou divergência (BRASIL, 2000).

O desenvolvimento deste trabalho é aprender de maneira diferente e dinâmica o conceito de função, pois se ouve muitos alunos a falar ”’quando que vou utilizar isso em minha vida” ou ”para que estudar determinado conteúdo”, e através destes questionamentos, pretendemos fazer uma abordagem de maneira sistemática de tais conteúdos com o auxílio de uma metodologia que combina a interdisciplinaridade com a metodologia ativa, o uso dos recursos digitais neste caso.

Ao longo dos últimos anos, foram realizados vários estudos que abordam o conceito de função, porém poucos desses trabalhos combinam a interdisciplinaridade com a metodologia ativa que será o ponto forte desta pesquisa. Pois, além de tentarmos mostrar para os estudantes a importância da matemática, em particular, o conceito de função, a metodologia a ser utilizada ao longo deste trabalho tem como foco despertar o interesse do aluno nos conteúdos chaves do ensino médio de matemática, dando-os uma aplicabilidade real através da modelagem matemática dos problemas cotidianos por meio de problemas de otimização.

As razões que levam para o desenvolvimento deste trabalho é o aprofundamento no estudo de alguns conteúdos do ensino médio de forma ousada e utilizando uma metodologia diversificada uma vez que se observa que atualmente o ensino de matemática é realizado de maneira ultrapassada, sem nenhuma conexão com a realidade dos estudantes. Vale destacar pontos como o desenvolvimento das capacidades de comunicar e resolver problemas e tais tornam-se ferramentas que, no cotidiano do aluno fará toda a diferença.

1.3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Para o desenvolvimento deste trabalho, será tomado como referencial teórico a contribuição de autores, que analisam e propõem uma metodologia diversificada no ensino da matemática através da otimização, em especial, alunos do ensino médio, que justificam o melhor entendimento dos conteúdos de matemática do ensino médio pelos estudantes, intermediados através da modelagem e aplicação dos conceitos de otimização.

Neves (2019) acredita na possibilidade de estabelecer uma ponte entre o processo de ensino escolar com situações próxima da realidade do aluno, através da aplicação da otimização em problemas de transporte, exigindo do mesmo a otimização como objetivo e permitindo assim o desenvolvimento de competências a fim de solucionar problemas matemáticos relevantes ao ensino médio. Destaca ainda, que através do método gráfico há a aproximação do aluno com a utilização das equações e inequações lineares.

Neto (2014) parte do seguinte questionamento: Como o uso da programação linear poderá auxiliar o ensino da geometria analítica no ensino médio? Para tanto, apresenta o histórico do ensino da geometria no Brasil e suas consequências, a pesquisa operacional e a otimização trabalhada com duas ou três variáveis de forma contextualizada.

O trabalho de (ALMEIDA, 2013) visa auxiliar o professor na introdução da otimização no ensino médio, abordando a mesma por programação linear e resolução de problemas a fim de que o aluno se familiarize com o conceito. Almeida usa a modelagem matemática no contexto de produção de garrafas para iniciar os conceitos de otimização. Já Rocha (2019) descreve a resolução de problemas como um método de ensino que coloca o aluno diante de questionamentos que possibilitem o exercício e desenvolvimento da autonomia na vida cotidiana, no entanto, destaca alguns métodos algébricos na resolução de problemas de otimização também, através da determinação do valor ”ótimo” que as desigualdades entre as médias proporcionam e a análise de funções.

Melo (2012), por sua vez, apresenta os conceitos de problemas de otimização explorando suas aplicações e como ferramenta para a resolução de problemas. Destaca algumas atividades em sequências de aulas ressaltando que o assunto abordado no ensino médio é bem oportuno e apropriado aos alunos do ensino médio, devido ao apresentar uma matemática mais contextualizada e mais aplicada.

1.4 RESULTADOS ESPERADOS

Esperamos que este trabalho e a metodologia proposta para aulas de matemática do ensino médio, além de servir na construção de uma sequência didática inovadora, despertem maior interesse dos estudantes no estudo de matemática de uma forma mais natural, dando-lhes sentido e vontade em aprendê-la. Esperamos também que a interdisciplinaridade através da modelagem matemática dos problemas cotidianos por meio de problemas de otimização torne as aulas de matemática mais interessantes e motivadoras.

Também, esperamos que o recurso digital (*GeoGebra*) a ser utilizado ao longo desta dissertação seja uma excelente ferramenta de metodologia ativa de aprendizagem para envolver mais os estudantes nas aulas de matemática, tornando as aulas mais efetivas, e consequentemente, gerar uma formação integral, pois a geração atual exige um sistema de ensino mais moderno e que o modelo atual, a metodologia tradicional de ensino, baseado na leitura de textos, na resolução de problemas teóricos através de aplicação de teoria e nas avaliações tradicionais por meio de provas não capta mais a atenção dos estudantes atuais, uma vez que parece que no modelo tradicional de ensino falta um desenvolvimento de conhecimento interdisciplinar.

Esta dissertação está organizada em seis capítulos: no Capítulo 1 fez-se uma introdução geral à dissertação, os objetivos (gerais e específicos) e as justificativas foram apresentados. No Capítulo 2 será apresentada uma breve revisão do conceito de função e das principais funções reais de uma variável, entre outros. No Capítulo 3 serão apresentados o conceito da derivada, os principais resultados relacionados à derivada de uma função e situações-problemas por meio de uma abordagem interdisciplinar que envolve a otimização. Na sequência, no Capítulo 4, é apresentada, de forma resumida, a interface e os principais recursos do *software GeoGebra* como um recurso digital como um apoio ao processo de aprendizagem. No Capítulo 5, são apresentados a metodologia utilizada e os experimentos realizados para atender os propósitos deste trabalho. As atividades realizadas em 06 (seis) encontros de 02 (duas) horas e meia cada um com os alunos da faixa etária de 15 a 18 do ensino médio do Colégio Estadual Carolina Lupion EFMN, localizado em Carlópolis, Paraná, são relatados. E, o último capítulo apresenta as considerações finais.

2 FUNÇÕES

2.1 INTRODUÇÃO

O conceito de função é um dos mais importantes temas da matemática. Surgindo de forma intuitiva e no decorrer do tempo com a ideia de correspondência, foi sendo aprimorada até chegar no que conhecemos hoje. Faz parte do nosso cotidiano em inúmeras situações, dando suporte à resolução de diversos problemas. Nascendo com o processo de contagem, que por consequência é muito antiga, a ideia de função está intimamente ligada a fazer associações entre objetos e animais, criando assim uma relação biunívoca, que expressa o conceito de função atualmente. Como mencionado, a ideia é antiga, porém o conceito formal é recente e foi ganhando forma com o surgimento do Cálculo e da definição de conjuntos.

De acordo com Ponte (1990):

> A origem da noção de função confunde-se com os primórdios do Cálculo Infinitesimal. Ela surgia de forma um tanto confusa nos "fluentes" e "fluxões" de Newton (1642-1727). Este autor também usou o termo "relatas quantitas" para designar variável dependente e "genita" para designar uma quantidade obtida a partir de outras por intermédio das quatro operações matemáticas fundamentais.

Assim, percebe-se que a definição de função, ainda que de modo primitivo, começa a ganhar o formato que temos hoje com os escritos de Newton (1642 – 1727) e também Leibniz (1646 – 1716) que foi o pioneiro em utilizar os termos "função", "constante", "variável" e "parâmetro". Vale ressaltar, que vários matemáticos contribuíram para o desenvolvimento e resultados que hoje são apresentados, e que tais conhecimentos não foram surgindo por acaso, mas como ferramentas indispensáveis para os estudos dos fenômenos naturais, modelagem matemática e análise de dados. Contudo, a formalização do conceito de função foi dada com a incrementação da linguagem dos conjuntos e que segundo Ponte (1990):

> Finalmente, com o desenvolvimento da teoria dos conjuntos, iniciada por Cantor (1845-1918), a noção de função acabaria por ser estendida já no século XX de forma

> a incluir tudo o que fosse a incluir correspondências arbitrárias entre quaisquer conjuntos, numéricos ou não.

São diversas as situações em que o conceito de função está presente no cotidiano e nas diversas áreas do conhecimento. Por exemplo, os juros pagos sobre um determinado investimento dependem do tempo que o dinheiro permanece investido; o salário de uma pessoa pode depender do número de horas trabalhadas; a área de um círculo depende do seu raio; a distância percorrida por um móvel pode depender do tempo decorrido, a partir de um ponto inicial entre outros exemplos. Assim, torna-se indispensável aprender funções.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1999):

> Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática.

Neste contexto, é fundamental que o estudante do ensino médio saiba a relevância do estudo de funções e compreenda o conceito que permeia quase todas as áreas da matemática e de outras ciências, para que assim, possa interpretar informações, ler e construir gráficos de diversas situações do cotidiano a fim de que possa ter uma visão integradora à sua volta e não ver o estudo de funções como algo isolado, sem qualquer relação com a realidade, cheio de abstrações que acaba por fim considerando inútil.

É importante notar que mesmo diante da importância do estudo de funções no ensino médio, existem vários fatores que impedem o processo de ensino aprendizagem deste tema, fazendo com que se torne algo desestimulante por parte dos estudantes e atrapalhem seu rendimento. Tais fatores, muitas vezes, são a forma com que o conteúdo é abordado e sem nenhuma conexão com a realidade, e esta falta de sentido nos conteúdos torna-os ainda mais difíceis do que realmente são, sem falar na falta de dinamismo e métodos eficazes em prender a atenção dos alunos em querer aprender e compreender o assunto dado.

Como foi comentado anteriormente, umas das grandes dificuldades que os professores de matemática enfrentam quando o assunto é função é que este conceito não é um conceito que se limita apenas às aplicações simples e triviais e muitas vezes o aluno precisa conhecer outros conceitos de matemática ou até de outras disciplinas como pré-requisitos, tratando assim, também, a interdisciplinaridade entre matemática e outras áreas como por exemplo física e química. Sem esta interdisciplinaridade haverá fragmentação e deficiência do conhecimento de modo que o aluno não será capaz de construir um conhecimento compartimentado e esta interdisciplinaridade faz com que o aluno saiba que não existe ciência isolada.

2.2 FUNÇÕES: DEFINIÇÕES E EXEMPLOS

Nesta seção abordaremos algumas noções básicas sobre funções. Neste primeiro momento, vamos retomar alguns conceitos e propriedades elementares atrelados ao conceito de função.

2.2.1 CONJUNTOS

O conceito de função está relacionado com a ideia de conjuntos, aliás todos os conceitos matemáticos podem ser expressos através da linguagem dos conjuntos. Um conjunto é formado por objetos que chamamos de elementos. Dado um conjunto A e um objeto a podemos dizer se ele pertence ao conjunto A, denotado por $a \in A$, ou que a não pertence ao conjunto A, denotado por $a \notin A$. Nota-se então que os elementos apresentam certas propriedades ou condições que façam com que pertençam ou não a um determinado conjunto como, por exemplo, o conjunto A formado pelos números naturais ímpares menores do que 10.

Vale ressaltar que através da linguagem dos conjuntos, fica muito mais fácil representar diversas operações matemáticas que ganham vantagem pelo rápido e exato manuseio, além das simplicidades em aplicar as propriedades e condições dadas. Podemos representar um conjunto através da enumeração, das propriedades que formam o conjunto ou em diagramas. Entre vários conjuntos podemos definir uma série de operações como união, intersecção, diferença e complementar.

A partir da relação de inclusão, chegamos a igualdade de conjuntos. Dizemos que A e B são conjuntos iguais, quando todos os elementos de A são também elementos de B, ou seja, $A \subset B$ e todos os elementos de B são elementos de A, satisfazendo que $B \subset A$, logo $A = B$. E, a partir do conceito de par ordenado definimos o produto cartesiano entre dois conjuntos: dados dois conjuntos não vazios A e B, chamamos de relação de A em B o subconjunto P do produto cartesiano $A \times B$, ou seja, $P = \{(x,y)\ :\ x \in A \text{ e } y \in B\}$ é um conjunto de pares ordenados do tipo (x,y), com $x \in A$ e $y \in B$.

2.2.2 DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO

Sejam A e B conjuntos não vazios, temos que uma função f de A em B, denotada por $f : A \to B$, definida como uma regra que associa a cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y = f(x) \in B$. O conjunto A é chamado de **domínio de f** e denotado por $Dom(f)$ e B de **contradomínio** de f. A **imagem** de f, denotada por $Im(f)$, é o conjunto dado pelos elementos $y \in B$, tais que $y = f(x)$ para algum $x \in A$. Nota-se que função é um caso particular de uma relação entre dois conjuntos. É interessante destacar que uma função pode ser analogamente comparada como uma máquina, pois para cada valor de x que estiver no domínio da função f, que entrar na máquina, ser denominado *input*, a máquina através de certa regra ou lei produzirá um *output* $f(x)$.

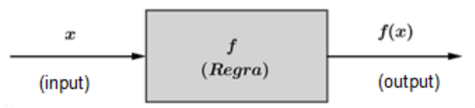


Figura 2.1: Função como uma máquina (próprio autor).

Existem em nosso cotidiano inúmeras situações que nos remetem a pensar em funções, quer seja exemplos numéricos ou apenas lógicos e que podem ser trabalhados em sala de aula, a fim de possibilitar a melhor compreensão dos estudantes na definição de função. A seguir apresentamos alguns exemplos simples de funções que podem ser compreendidas facilmente por estudantes de ensino médio.

Exemplo 2.1 *Sejam A o conjunto de triângulos do plano cartesiano e B o conjunto das circunferências desse mesmo plano. A regra que associa a cada triângulo com a circunferência inscrita ao mesmo define uma função $f : A \to B$.*

Exemplo 2.2 *Considere S o conjunto de todos os estados da região sul e C o conjunto das cidades dessa região. Em cada estado há somente uma capital, logo é possível estabelecer uma relação f tal que $f : S \to C$, uma função que associa a cada estado $s \in S$ a sua capital $f(x) \in C$.*

Exemplo 2.3 *Suponha A o conjunto que representa o tempo decorrido de um movimento realizado por um móvel que partindo de um dado ponto, percorre com velocidade constante uma trajetória dada e B o conjunto que representa a distância percorrida pelo móvel. Sabendo que a cada instante o móvel terá percorrido uma única distância, é possível estabelecer uma* *regra que associa à cada instante do movimento uma distância percorrida como uma função* $f : A \to B$.

Exemplo 2.4 *Seja* $\mathbb{N}$ *o conjunto dos números naturais. A regra que associa a cada número natural* $n \in \mathbb{N}$ *ao seu sucessor* $n+1$*, é uma função* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$*, sendo* $f(n) = n+1$.

Temos várias formas para representar uma função $f : A \to B$, são elas: diagrama de flechas (setas), tabela, gráfico e expressão algébrica, sendo as últimas duas as formas mais utilizadas. O diagrama de flechas é uma forma muito simples de representar uma função. Pela definição de uma função, permite-se que um ou mais elementos de B não recebam setas ou que um ou mais elementos de B recebam mais de uma seta. Temos então, uma condição para que uma relação f de A em B seja uma função. De fato, um diagrama de flechas de um conjunto A para um outro conjunto B representa uma função quando de cada elemento no conjunto A saia uma única flecha em direção a um único elemento no segundo conjunto, o conjunto B.

A Figura 2.2 ilustra uma função uma vez que todo elemento no conjunto A tem uma única imagem no conjunto B. Neste exemplo, os elementos $1, 2 \in A$ têm a mesma imagem, $a \in B$, e o elemento $3 \in A$ tem $c \in B$ como imagem. Podemos escrever então que $f(1) = f(2) = a$ e $f(3) = c$. Os elementos $b, d \in B$ não são imagens de nenhum elemento de A.

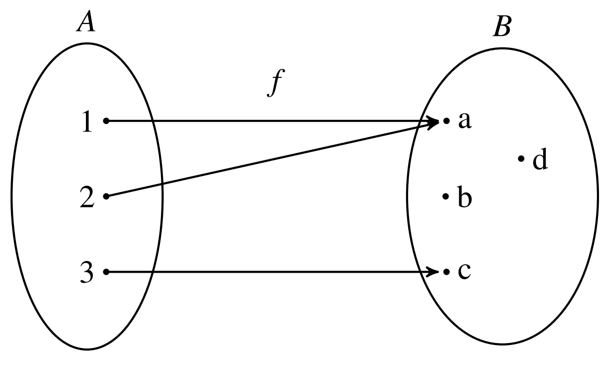


Figura 2.2: Diagrama de uma função $f : A \to B$ **(próprio autor).**

O diagrama da relação representada pela Figura 2.3 não representa uma função pois não há nenhuma seta partindo do elemento $2 \in A$, uma vez que é necessário que todo elemento $x \in A$ sirva como ponto de partida para um elemento de B. Na Figura 2.4, por sua vez, temos outra situação que não representa uma função: do elemento $1 \in A$ parte mais de uma seta, pois é necessário que cada elemento do conjunto A possua uma única imagem em B.

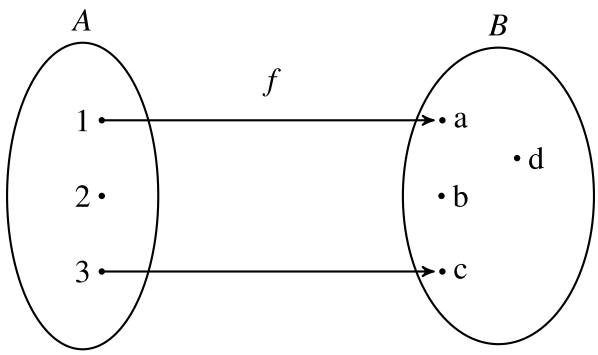


Figura 2.3: Diagrama de uma relação de A **para** B **(próprio autor).**

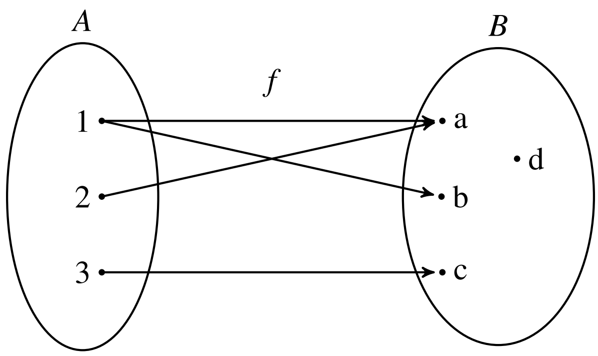


Figura 2.4: Diagrama de uma relação de A **para** B **(próprio autor).**

Resumidamente, através da representação por diagramas é possível verificar se a relação entre dois conjuntos, A e B, por exemplo é uma função, verificando se não há duas ou mais flechas que partem do mesmo elemento do domínio ou se não sobram elementos do domínio.

Exemplo 2.5 *Dados os conjuntos* $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ *e* $B = \{-1, 1, 7\}$ *e a relação entre A e B dada através de* $f(x) = 2x^2 - 1$*, com* $x \in A$ *e* $y \in B$*.*

Primeiramente, a relação é dada por meio de uma expressão (fórmula) matemática, $y = 2x^2 - 1$. Notamos que as imagens de -1, 0, 1 e 2 são dadas por 1, -1, 1 e 7, respectivamente, uma vez que $f(-1) = 2(-1)^2 - 1 = 1$, $f(0) = 2(0)^2 - 1 = -1$, $f(1) = 2(1)^2 - 1 = 1$ e $f(2) = 2(2)^2 - 1 = 7$. Assim, o diagrama da relação é representado na Figura 2.5. Observamos que o diagrama representa uma função.

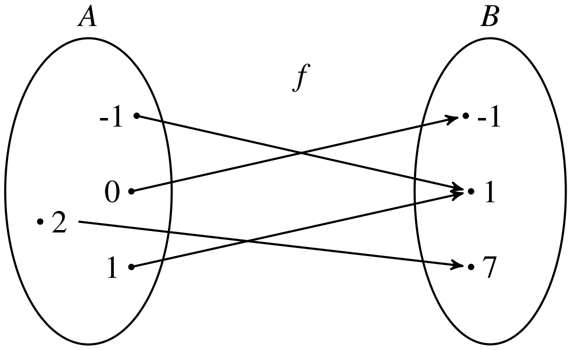


Figura 2.5: Diagrama da relação do Exemplo 2.5 (próprio autor).

Definição 2.6 *Sejam A e B conjuntos não vazios e um elemento $c \in A$, a função $f : A \to B$ tal que $f(x) = c$ para todo $x \in A$ é denominada* ***função constante*** *(Figura 2.6).*

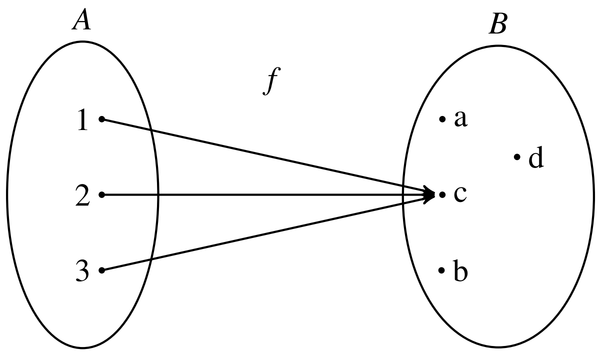


Figura 2.6: Exemplo do diagrama de uma função constante $f : A \to B$ (próprio autor).

Definição 2.7 *Dado um conjunto não vazio A, a função $f : A \to A$ para todo $x \in A$, denotada por Id_x é chamada de* ***função identidade*** *(Figura 2.7).*

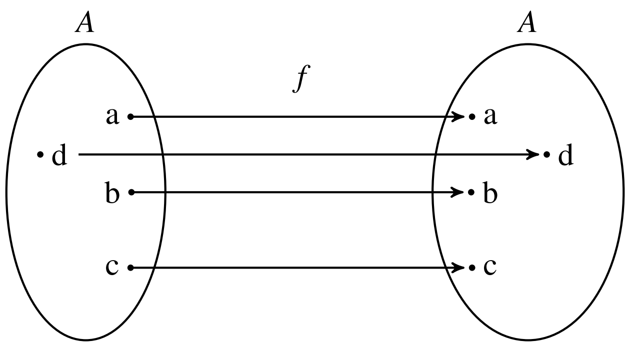


Figura 2.7: Exemplo do diagrama de uma função identidade $f : A \to A$ (próprio autor).

Cabe destacar que nem sempre a quantidade de elementos do domínio de uma função é igual com a quantidade de elementos do contradomínio. E há casos, em que a imagem não é igual ao contradomínio, isso se justifica pelo fato de que mais elementos do domínio estejam associados a uma mesma imagem. Assim, surgem novos conceitos sobre funções, como a ideia de função injetora, função sobrejetora e função bijetora.

Definição 2.8 *Sejam A e B conjuntos não vazios. Uma função $f : A \to B$ é dita injetora se, para todo $y \in B$, existir no máximo um $x \in A$ tal que $f(x) = y$, isto é, se x e y são tais que $x = y$ logo temos que $f(x) = f(y)$. Equivalentemente, uma função $f : A \to B$ se diz injetora quando elementos diferentes no conjunto A tenham imagens diferentes no conjunto B, ou seja, se $x \neq y$, então $f(x) \neq f(y)$.*

Definição 2.9 *Sejam A e B conjuntos não vazios. Dizemos que uma função é sobrejetora se $f : A \to B$ se sua imagem de f for todo o conjunto B, ou seja, o conjunto imagem é o próprio contradomínio. Também defini-se que se para todo $y \in B$, existir pelo menos um $x \in A$ tal que $y = f(x)$ existe uma sobrejeção.*

Definição 2.10 *Sejam A e B conjuntos não vazios. Uma função $f : A \to B$ é dita bijetora se for simultaneamente injetora e sobrejetora.*

Vale ressaltar que na função bijetora todos os elementos diferentes do domínio têm imagens diferentes além do conjunto imagem ser todo o contradomínio da função. A bijeção, em outras palavras, estabelece uma correspondência biunívoca entre A e B e a partir disso, dizemos que dois conjuntos A e B têm o mesmo número cardinal (número de elementos) quando se pode definir uma correspondência biunívoca $f : A \to B$, o que implica dizer que são equivalentes numericamente. Sobre a quantidade de elementos de um conjunto A, podemos definir o cardinal de conjunto, sendo representado por $n(A)$, $|A|$, $card(A)$ ou $\#A$. Se A e B são equipotentes, então $\#A = \#B$. O conjunto vazio então pode ser expresso através do seu cardinal, $\#\varnothing = 0$, já que não possui nenhum elemento. Se por exemplo $A = \{11, 15, 19, 23, 27, 31\}$, podemos afirmar que o conjunto A é um conjunto finito e que o cardinal de A é 6, simbolicamente representado como $\#A = 6$. Dois conjuntos quando têm o mesmo número de elementos são chamados de equipotentes. Parece estranho, mas os conjuntos $\mathbb{N}$ e $2\mathbb{N}$ (o conjunto de todos os números naturais pares) são equipotentes, pois a função $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$ dada por $f(n) = 2n$ satisfaz as condições de uma função bijetora. Ora, se $A = \{1, 2\}$ e $B = \{2, 3, 5\}$, é evidente que não pode existir uma correspondência biunívoca $f : A \to B$, pois A e B não tem o mesmo número cardinal. Agora, $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 4, 6, 8\}$, podemos definir uma lei que relaciona ambos os conjuntos formando uma correspondência biunívoca definida por $f : A \rightarrow B$ e sendo $f(x) = 2x$. Logo, temos $f(1) = 2$, $f(2) = 4$, $f(3) = 6$ e $f(4) = 8$.

Além das apresentadas até o momento, há outras classificações de conjuntos e definições de funções. Podemos tratar dos conjuntos através da ideia de cardinalidade. Assim, podemos falar de conjuntos finitos e infinitos. Conjuntos finitos são aquele que possuem um número finito de elementos, por exemplo, o conjunto de todos os professores de matemática de uma escola é um conjunto finito. Um conjunto infinito é aquele que não é finito, ou seja, que possui um número infinito de elementos. Podemos citar como exemplo, o conjunto dos números naturais que possui infinitos elementos.

2.2.3 GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO

Outra maneira de representar uma função é através de gráficos. A leitura e interpretação de gráficos é essencial para inúmeras situações do mundo em que vivemos, e na maioria das vezes é possível construir gráficos sabendo a lei de formação (função) que o representa ou por dados dispostos em tabelas. Assim, a sua compreensão é muito importante para o desenvolvimento cognitivo do estudante do ensino médio nas mais variadas áreas do conhecimento.

O gráfico de uma função ilustra cada elemento do domínio de uma função associado a um elemento do contradomínio, criando pares ordenados que pertencem ao produto cartesiano dos conjuntos dados. Cabe destacar que a vantagem de se representar uma função usando gráficos é perceber o seu comportamento e suas características tais como seus pontos de máximos e mínimos, crescimentos e decrescimentos, raízes e com isso através de certas análises prever determinadas situações.

Já vimos a definição do produto de cartesiano $A \times B$ entre os conjuntos A e B . Dada uma função $f : A \rightarrow B$, o gráfico de f é um subconjunto do produto cartesiano $A \times B$, definido por

$$G = \{(x,y) \in A \times B \ ; \ y = f(x)\}.$$

Para $A = B = \mathbb{R}$, o produto $A \times B$ é na verdade o plano cartesiano de coordenadas xOy, no qual os eixos Ox chamado de eixo das abscissas e o eixo Oy, chamado de eixo das ordenadas, e além disso, cada ponto do plano em questão apresenta um par ordenado, representado por (x,y). Vale lembrar que dependendo da natureza da função, o gráfico pode ser uma curva contínua no plano ou um conjunto de vários pontos do plano. A Figura 2.8 representa a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$, cujo gráfico é uma curva contínua. Pelo gráfico da Figura 2.8 observa-se que $f(0,5) = 1,125$, ou seja, a imagem de $x = 0,5$ é $1,125$, equivalentemente, o ponto $x = 0,5$ tem a altura $y = 1,125$. Na linguagem de diagrama de flechas, do elemente $x = 0,5$ no primeiro conjunto, $\mathbb{R}$, sairá uma única flecha em direção ao elemento $y = 1,125$ no segundo conjunto, $\mathbb{R}$. Observa-se que $f(0,5) = (0,5)^3 - 2(0,5)^2 - (0,5) + 2 = 1,125$.

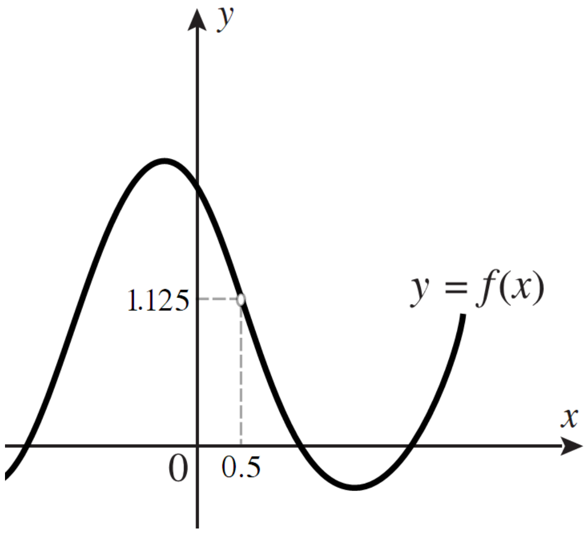


Figura 2.8: Gráfico da função $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ (próprio autor).

Note que dentro do intervalo dado, a curva representa uma função pois para todo elemento no domínio, $\mathbb{R}$, temos um único elemento correspondente no contradomínio, $\mathbb{R}$. Vale destacar que, uma curva contínua ou um conjunto de pontos discretos, de um plano num sistema cartesiano de coordenadas pode ser interpretado como uma função. Para tanto, graficamente, podemos verificar através de um teste chamado de **teste da reta vertical**. O teste diz que um gráfico representa uma função quando nenhuma reta vertical intercepte o gráfico em mais que um ponto. Agora, se alguma reta vertical intercepta o gráfico em mais de uma ponto, então a curva não representa uma função, pois um mesmo elemento do domínio está associado a mais que um elemento do seu contradomínio, causando uma ambiguidade.

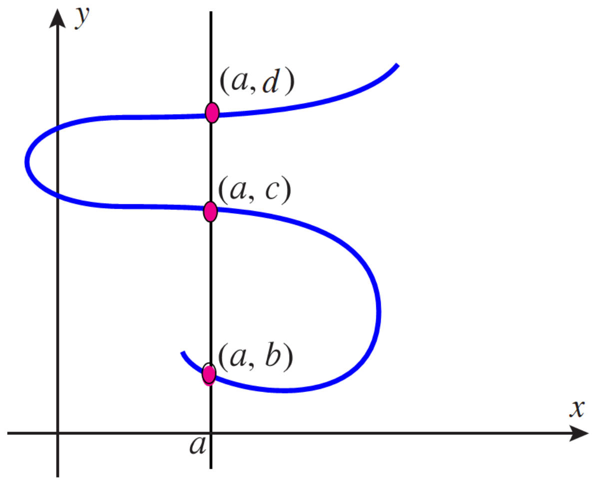


Figura 2.9: Gráfico de uma relação que não representa uma função (próprio autor).

Observamos que o gráfico da Figura 2.9 não representa uma função pois existe pelo menos uma reta vertical que intercepta o gráfico em mais que um ponto. A reta vertical $x = a$ intercepta a curva em três pontos (a,b), (a,c) e (a,d).

Com relação a paridade das funções, podemos classificá-las como função par e função ímpar.

Definição 2.11 *Sejam A e B subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$. A função $f : A \to B$ se diz par quando $f(x) = f(-x)$ para todo elemento $x \in Dom(f)$. Por outro lado, a função $f : A \to B$ se diz ímpar quando $f(x) = -f(-x)$ para todo elemento $x \in Dom(f)$.*

Pela definição, em uma função par os elementos simétricos possuem a mesma imagem, ou seja, o gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo dos y. Analogamente, uma função é ímpar quando o seu gráfico é simétirco em relação à origem. A Figura 2.10 ilustra os gráficos de duas funções, uma par (esquerda) e outra ímpar (direita).

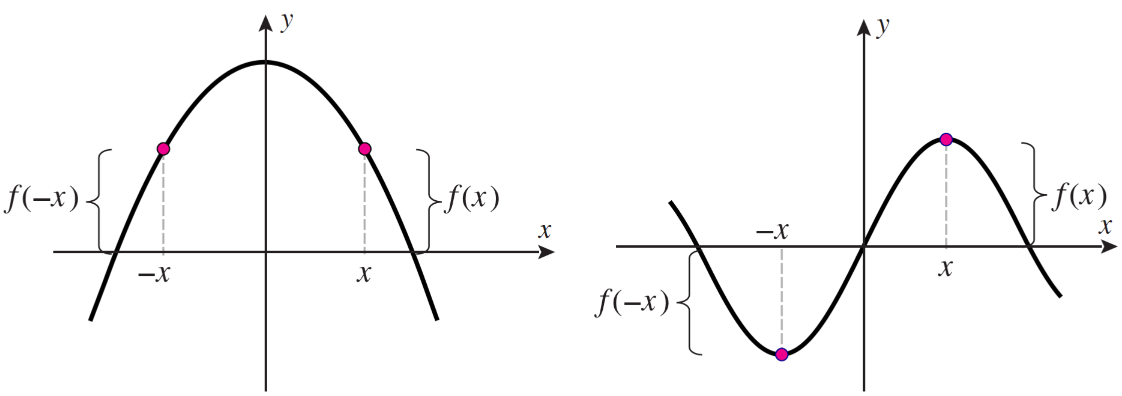


Figura 2.10: Exemplo de gráfico de uma função par e uma função ímpar (próprio autor).

É importante destacar que uma função pode ser par, ímpar, nem par nem ímpar e ou tanto par quanto ímpar. Além disso, podemos ver que qualquer função pode ser reescrita como soma de duas funções, uma par e outra ímpar. Um exemplo simples de uma função par é a função $f(x) = x^2$ e de uma função ímpar $f(x) = x^3$.

Existe outros resultados interessantes que envolvem o conceito de função, dentre elas, observamos a ideia de função crescente e função decrescente, tais fundamentos tratam-se da monotonicidade de uma função. Podemos imaginar uma função crescente, como uma função cujo gráfico está sempre crescendo ao longo do eixo dos x, e uma função decrescente quando o gráfico está sempre decrescendo ao longo do eixo dos x. Matematicamente falando, uma função f se diz crescente em um intervalo $I \subset Dom(f)$ se $f(x_1) < f(x_2)$ sempre que $x_1 < x_2$ para quaisquer $x_1, x_2 \in I$. Por outro lado, f se diz decrescente em um intervalo $I \subset Dom(f)$ se $f(x_1) > f(x_2)$ sempre que $x_1 < x_2$ para quaisquer $x_1, x_2 \in I$. A Figura 2.11 apresenta duas funções, uma crescente e outra decrescente. Uma função pode ser crescente em algumas partes do seu domínio e decrescente em outras partes.

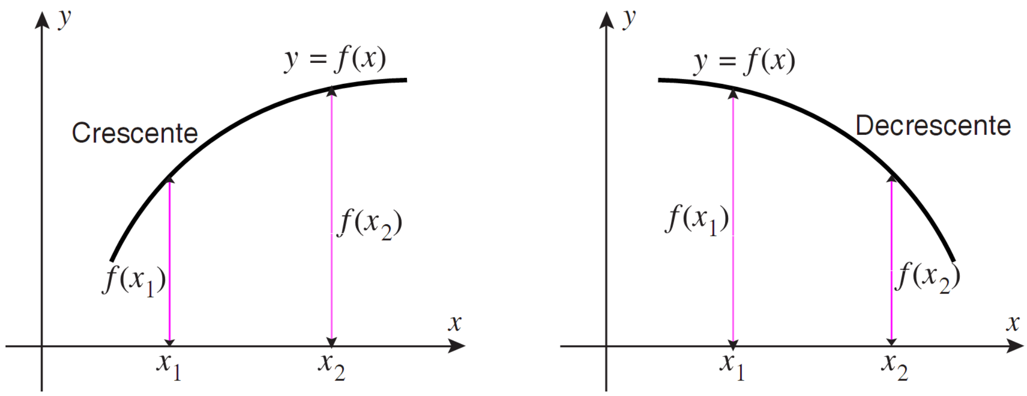


Figura 2.11: Funções crescente e decrescente (próprio autor).

As funções crescentes e decrescentes são bastante interessantes pois são funções injetoras uma vez que elementos diferentes têm imagens diferentes. Vimos que por definição, uma função é bijetora quando ela for injetora e sobrejetora ao mesmo tempo. Quando uma função $f : A \to B$ é bijetora, para ela existe uma outra função, de B para A, que desfaz o que f faz. Esta função é chamada de função inversa de f, denotada por $f^{-1} : B \to A$. Portanto, se $y = f(x)$, logo $x = f^{-1}(y)$. Também, é interessante ressaltar que as funções crescentes e decrescentes são exemplos de funções inversíveis.

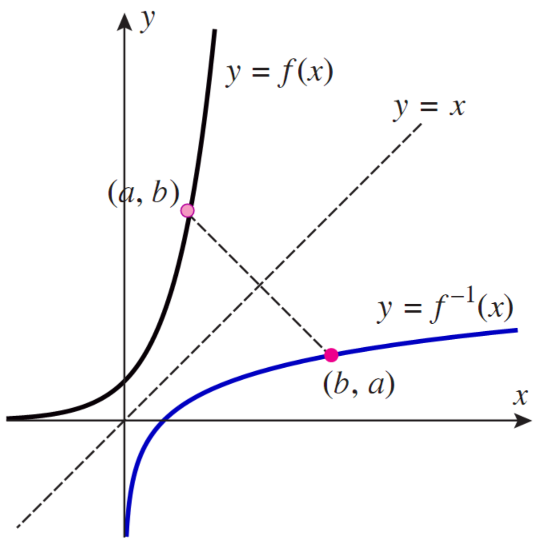


Figura 2.12: Os gráficos de uma função e da sua inversa (próprio autor).

Uma função que tem inversa é chamada de inversível. É claro que se f tem inversa, então, $Dom(f) = Im(f^{-1})$, $Im(f) = Dom(f^{-1})$, e além disso, já que de $y = f(x)$ temos $x = f^{-1}(y)$, podemos concluir que para obter o gráfico de f^{-1} basta refletir o gráfico de f em torno da reta $y = x$ (Figura 2.12). Matematicamente, para obter a inversa de uma função $y = f(x)$, primeiramente, tentamos isolar x. Se não conseguirmos isolar x de maneira única, a função não tem inversa, caso contrário, há inversa e para encontrar a inversa basta trocar x por y e y por x. Por exemplo, se $y = x^2$, já que $x = \pm\sqrt{y}$ a inversa de $f(x) = x^2$ não existe uma vez que não foi possível isolar x de maneira única. Ora, se $y = x^3 + 1$, podemos concluir que $x = \sqrt[3]{y-1}$. Como é possível isolar x de maneira única, concluímos que a inversa de $f(x) = x^3 + 1$ existe e é dada por $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$, apenas trocando x por y e y por x na última equação. Neste mesmo exemplo, podemos ver que $f(1) = 2$ e $f^{-1}(2) = 1$, uma desfazendo outra.

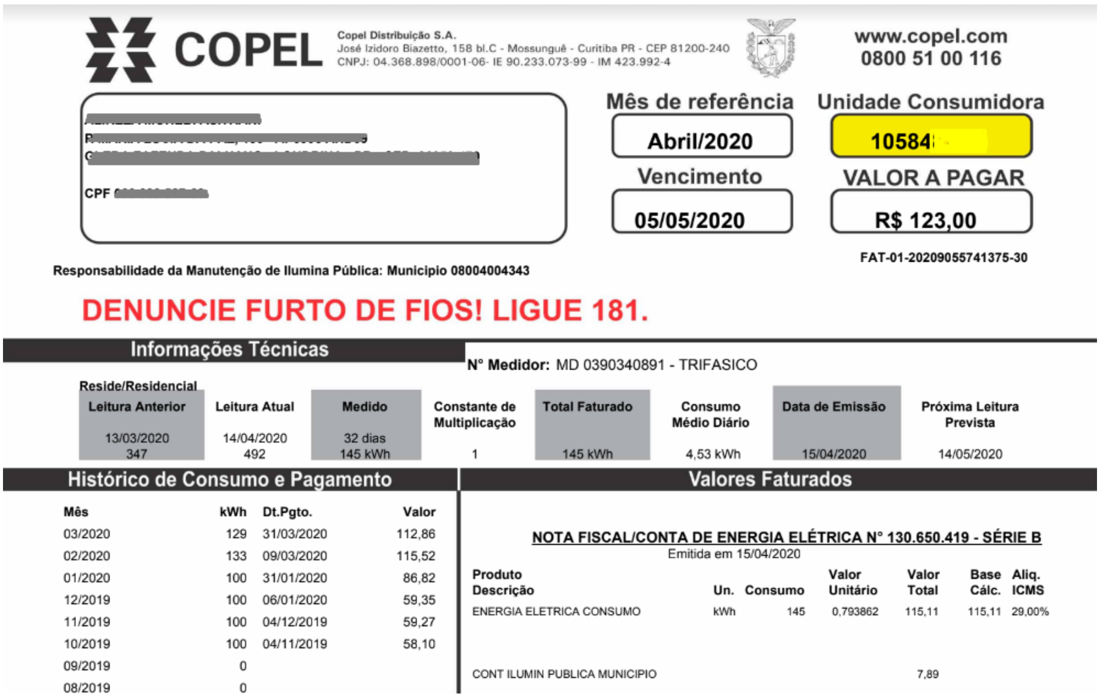
2.2.4 FUNÇÕES ELEMENTARES REAIS

Uma função $f : A \to B$ é chamada de função real quando o seu contradomínio está contido no conjunto de todos os números reais, ou seja, quando $B \subseteq \mathbb{R}$. Na sequência, consideramos funções do tipo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Nesta seção faremos uma simples revisão dessas funções elementares reais.

2.2.4.1 FUNÇÃO AFIM E LINEAR

Muitos problemas reais, além dos problemas simples do nosso cotidiano, podem ser modelados de forma bastante conveniente por meio de funções reais. Estas funções, nem sempre são complexas.

Exemplo 2.12 *Em abril de 2020, a COPEL (Companhia Paranaense de Energia) cobrou das unidades consumidoras da cidade de Londrina uma taxa fixa de* $7,89$ *reais como a taxa da iluminação pública, além de* $0,793862$ *reais para cada KWh de energia elétrica consumida (Figura 2.13). Observamos que, sendo x a energia consumida (em KWh), o valor pago pelas unidades é dado por uma função do tipo* $f(x) = 0,793862x + 7,89$*. Concluímos então que para a unidade consumidora da Figura 2.13 onde o consumo de energia foi de* 145 *KWh, o valor pago pelo consumo é dado por* $f(145) = 0,793862(145) + 7,89 = 123,00$ *reais.*



COPEL
Copel Distribuição S.A.
José Izidoro Biazetto, 158 bl.C - Mossunguê - Curitiba PR - CEP 81200-240
CNPJ: 04.368.898/0001-06- IE 90.233.073-99 - IM 423.992-4

www.copel.com
0800 51 00 116

[redacted]

CPF [redacted]

Mês de referência: Abril/2020
Unidade Consumidora: 10584
Vencimento: 05/05/2020
VALOR A PAGAR: R$ 123,00

FAT-01-20209055741375-30

Responsabilidade da Manutenção de Ilumina Pública: Municipio 08004004343

DENUNCIE FURTO DE FIOS! LIGUE 181.

Informações Técnicas

N° Medidor: MD 0390340891 - TRIFASICO

Reside/Residencial

Leitura Anterior	Leitura Atual	Medido	Constante de Multiplicação	Total Faturado	Consumo Médio Diário	Data de Emissão	Próxima Leitura Prevista
13/03/2020 347	14/04/2020 492	32 dias 145 kWh	1	145 kWh	4,53 kWh	15/04/2020	14/05/2020

Histórico de Consumo e Pagamento

Mês	kWh	Dt.Pgto.	Valor
03/2020	129	31/03/2020	112,86
02/2020	133	09/03/2020	115,52
01/2020	100	31/01/2020	86,82
12/2019	100	06/01/2020	59,35
11/2019	100	04/12/2019	59,27
10/2019	100	04/11/2019	58,10
09/2019	0		
08/2019	0		

Valores Faturados

NOTA FISCAL/CONTA DE ENERGIA ELÉTRICA N° 130.650.419 - SÉRIE B
Emitida em 15/04/2020

Produto Descrição	Un.	Consumo	Valor Unitário	Valor Total	Base Cálc.	Aliq. ICMS
ENERGIA ELETRICA CONSUMO	kWh	145	0,793862	115,11	115,11	29,00%
CONT ILUMIN PUBLICA MUNICIPIO				7,89		

Figura 2.13: Valor pago pelas unidades consumidoras de Londrina - COPEL (autor próprio).

Definição 2.13 *Uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *chama-se* ***afim*** *quando existem* $a, b \in \mathbb{R}$ *tais que* $f(x) = ax + b$ *para todo x real e* $a \neq 0$.

Temos que a é taxa de variação da função, assim se $a > 0$ a função é crescente e se $a < 0$ a função é decrescente. O coeficiente b é chamado de coeficiente linear, determina o ponto onde a reta corta o eixo y. A partir disso, observamos casos particulares de funções afim como a **função identidade**, $f(x) = x$, **função constante**, $f(x) = b$ e a **função linear**, $f(x) = ax$. Graficamente, a função identidade é a reta $y = x$, a função constante é uma reta horizontal e a função linear $f(x) = ax$ é uma reta que passa pela origem e que tem a inclinação igual a a. O valor pago para um taxista ou o valor da fatura de uma conta da luz, o volume d'água em uma caixa com um certo vazamento todos seguem modelo de uma função afim. O valor pago para cinco quilos de banana em um supermercado, o valor pago para abastecer um carro em um posto de combustível, a distância percorrida por um motorista que dirige a uma velocidade constante ao longo de tempo seguem o modelo de uma função linear. Ainda sobre a função linear, é notório citar que a função linear é tida como o modelo matemático para os problemas de proporcionalidade. Segundo Lima (2013) "a grandeza y é diretamente proporcional à grandeza x quando existe um número a (chamado de *constante de proporcionalidade*) tal que $y = ax$ para todo valor de x". Ainda, a proporcionalidade nos remete, na prática, a situações de maneira explícita como por exemplo, se um quilo de maçã custa a reais então x quilos custam $f(x) = ax$ reais.

Exemplo 2.14 *O preço a pagar por uma corrida de táxi é dado por uma função afim $f : x \to ax+b$, onde x é a distância percorrida (usualmente medida em quilômetros), o valor inicial b é a chamada bandeirada e o coeficiente a é o preço de cada quilômetro rodado. (LIMA, 2013)*

Proposição 2.15 *O gráfico de uma função afim é uma reta.*

Seja a função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax+b$. Considere três pontos dados: $A = (x_1, ax_1+b)$, $B = (x_2, ax_2+b)$ e $C = (x_3, ax_3+b)$, supondo $x_1 < x_2 < x_3$. Sejam $d(A,B)$ a distância entre os pontos A e B, $d(B,C)$ a distância entre os pontos B e C e $d(A,C)$ a distância entre os pontos A e C, temos

$$\begin{aligned}
d(A,C) &= \sqrt{(x_3-x_1)^2 + a^2(x_3-x_1)^2} \\
&= (x_3-x_1)\sqrt{1+a^2} \\
&= (x_3-x_2+x_2-x_1)\sqrt{1+a^2} \\
&= (x_3-x_2)\sqrt{1+a^2} + (x_2-x_1)\sqrt{1+a^2} \\
&= \sqrt{(x_3-x_2)^2 + a^2(x_3-x_2)^2} + \sqrt{(x_2-x_1)^2 + a^2(x_2-x_1)^2} \\
&= d(B,C) + d(A,B),
\end{aligned}$$

assim os pontos A, B e C pertencem à mesma reta e, concluímos que o gráfico de uma função afim é uma reta.

São muitas as aplicações da função afim no cotidiano e nas mais diversas áreas do conhecimento. Na Física, temos algumas definições importantes que utilizam a função afim, em especial, a função linear.

Exemplo 2.16 *O Princípio Fundamental da Dinâmica (Segunda Lei de Newton) diz que a resultante das forças que agem em um corpo é proporcional ao produto da massa pela aceleração* *por ele adquirida. Assim, a expressão matemática que representa esse conceito é $F = ma$.*

Já que o gráfico de uma função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = ax + b$, é uma reta podemos concluir que as funções afins são injetoras. Seja $y_0 \in \mathbb{R}$ qualquer elemento no contradomínio de f. Simplesmente, podemos ver que a imagem de $x_0 = \frac{y_0 - b}{a}$ é y_0, ou seja, $f(x_0) = y_0$, concluindo também que as funções afins são sobrejetoras, consequentemente, são bijetoras. As funções afins, por serem bijetoras, têm inversa e a inversa também é afim, dada por $f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$. É interessante notarmos que se a função afim for crescente, a sua inversa também será, e se for decrescente, a sua inversa também será decrescente, uma vez que a e $\frac{1}{a}$ têm o mesmo sinal. Esse fato é verdadeiro para qualquer função, ou seja, a inversa de uma função crescente é uma função crescente e a inversa de uma função decrescente é uma função decrescente.

Sejam $(x_1, f(x_1))$ e $(x_1, f(x_1))$ dois pontos distintos quaisquer que pertencem ao gráfico da função afim $y = ax + b$, ou seja, $f(x_1) = ax_1 + b$ e $f(x_2) = ax_2 + b$. Podemos ver então que

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Assim, podemos concluir que tendo dois pontos distintos quaisquer do gráfico de uma função afim podemos obter os coeficientes da função, os valores de a e b. Além disso, na Figura 2.14 observamos que a razão que representa o valor de a é na verdade a tangente do menor o ângulo α que a curva da função afim faz com o eixo dos x, uma vez que no triângulo retângulo ΔABC, essa razão é a divisão do cateto oposto por cateto adjacente.

Vale ressaltar ainda que essa razão é também chamada de taxa de variação de f no intervalo $[x_1, x_2]$. É claro que a função afim $f(x) = ax + b$ é crescente quando a sua taxa de variação é positiva, $a > 0$, e é decrescente quando a sua taxa de variação é negativa, ou seja, $a < 0$.

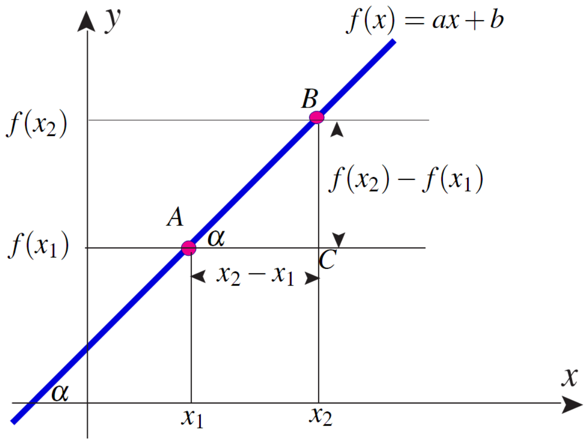


Figura 2.14: Coeficiente angular da função afim $f(x) = ax + b$ (próprio autor).

2.2.5 FUNÇÃO QUADRÁTICA

Definição 2.17 *Uma função quadrática é uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$, para todo $x \in \mathbb{R}$, onde a,b e c são números reais e $a \neq 0$. O discriminante Δ da função f é o discriminante trinômio de segundo grau $ax^2 + bx + c$, isto é, $\Delta = b^2 - 4ac$.*

É simples verificarmos que tendo três pontos distintos (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3) não-colineares no plano cartesiano, com $x_1 \neq x_2 \neq x_3$, existe uma única função quadrática (polinômio de grau 2) que passa por estes três pontos ao mesmo tempo (LIMA, 2013). Este polinômio é chamado de polinômio interpolador. Existem vários métodos que encontrarm o polinômio interpolador, como, por exemplo, método de sistema linear, método de Lagrange, método de Newton, método de Newton-Gregory, entre outros.

De acordo com Lima (2013) problemas que utilizam equações do segundo grau estão entre os mais antigos da Matemática, há escritos que datam quase quatro mil anos envolvendo descobrir dois números conhecendo sua soma s e seu produto p. Assim, os números procurados são as raízes da equação do segundo grau $x^2 - sx + p = 0$. Ao analisar o problema em termos geométricos, é evidente que se trata em determinar os lados de um retângulo conhecendo o semi-perímetro s e a área p. Assim, se um dos números é x, o outro é s–x e seu produto é $p = x(s - x) = sx$–x^2. Logo, $x^2 - sx + p = 0$.

A respeito da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ é possível representá-la através de sua forma canônica. Note que a função quadrática tem a forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, assim

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a\Big(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}\Big) \\ &= a\Big(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\Big) \\ &= a\Big[\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\Big] \\ &= a\Big[\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\Big]. \end{aligned}$$

A expressão

$$f(x) = a\Big[\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\Big],$$

é conhecida como a *forma canônica* da função quadrática. Simplificando temos, $f(x) = a(x - h)^2 + k$, sendo $h, k \in \mathbb{R}$ tais que $h = \frac{-b}{2a}$ e $k = \frac{-\Delta}{4a}$. Ainda, o valor $b^2 - 4ac$, denotado por Δ, é chamado de *discriminante*.

A partir da forma canônica podemos encontrar as raízes de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ onde $a \neq 0$. De fato, $f(x) = 0$ se e somente se

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2},$$

consequentemente

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

se $\Delta \geq 0$. Se $\Delta = 0$, a equação tem duas raízes iguais a $x = -\frac{b}{2a}$. Ora, se $\Delta < 0$, a equação não tem raízes reais. Simplesmente, podemos ver que a soma das raízes é dada por $-\frac{b}{a}$, enquanto o produto é dado por $\frac{c}{a}$. É interessante observar que a média aritmética das raízes é dada por $-\frac{b}{2a}$, ou seja, as raízes são equidistantes da reta $x = -\frac{b}{2a}$. Além disso, podemos concluir que a função assume os mesmos valores nos pontos que são equidistantes da reta $x = -\frac{b}{2a}$, ou seja, o gráfico de uma função quadrática é simétrico em relação à reta $x = -\frac{b}{2a}$.

Explorando ainda mais a forma canônica, notamos que se $a > 0$, o menor valor de uma função quadrática é atingido no ponto $x = -\frac{b}{2a}$, que é chamado de ponto mínimo. O valor mínimo da função neste ponto é simplesmente dado por $f(-\frac{b}{a}) = \frac{4ac - b^2}{4a}$, logo $Im(f) = [\frac{4ac - b^2}{4a}, +\infty)$. Por outro lado, se $a < 0$, no ponto $x = -\frac{b}{2a}$, chamado de ponto máximo, a função toma o seu maior valor, assim $Im(f) = (-\infty, \frac{4ac-b^2}{4a}]$.

A partir dessa discussão, considerando $a = \frac{1}{p}$ onde $p \in \mathbb{R}$ se $a > 0$, temos então

$$y - \frac{b^2-4ac}{4a} = \frac{1}{4p}\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2,$$

que se for definirmos $(x_0, y_0) = (-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$, então

$$y - y_0 = \frac{1}{4p}(x - x_0)^2.$$

Se $a < 0$, seguindo o mesmo procedimento, porém considerando $a = -\frac{1}{p}$, temos $y - y_0 = -\frac{1}{p}(x - x_0)^2$. Assim, podemos concluir que o gráfico de qualquer função quadrática é uma parábola cujo eixo focal é paralelo ao eixo dos y. Se $a > 0$, a parábola é côncava para cima, e se $a < 0$, a concavidade é para baixo (Figura 2.15).

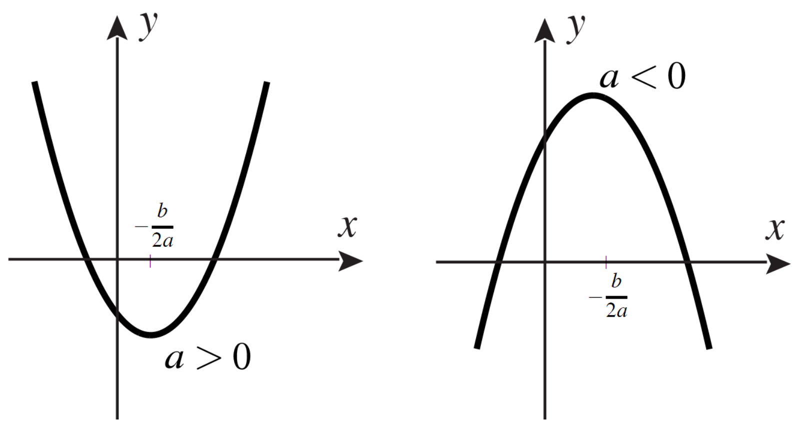


Figura 2.15: Função quadrática como parábola (póprio autor).

Da Figura 2.15 observamos que se $a > 0$, a função quadrática é decrescente no intervalo $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ e crescente no intervalo $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$. Por outro lado, se $a < 0$, a função quadrática é crescente no intervalo $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ e decrescente no intervalo $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$.

O gráfico de uma função quadrática é uma parábola.

Exemplo 2.18 *Seja a função quadrática $f(x) = x^2 - 4x + 3$. O gráfico da função é uma parábola com concavidade para cima, pois $a > 0$, sendo $a = 1$. Tem seu ponto de mínimo em $(2, -1)$ e raízes $x_1 = 1$ e $x_2 = 3$, podendo ser obtidas por soma e produto já que $ax^2 + sx + p$, sendo $s = 1 + 3$ e $p = 1 \cdot 3$. Ainda, temos que $c = 3$, onde a parábola intersepta o eixo y (Figura 2.16).*

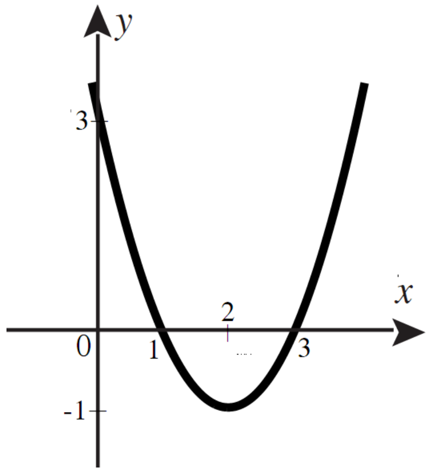


Figura 2.16: O gráfico da função quadrática $f(x) = x^2 - 4x + 3$ (próprio autor).

Vale destacar que as funções afins, lineares e quadráticas pertencem à classe de funções polinomiais. Na verdade, as funções afins e lineares são funções polinomiais de grau 1, enquanto as quadráticas são funções polinomiais de grau 2.

Definição 2.19 *Uma função polinomial de grau n é uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, onde a_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ são números reais e $a_n \neq 0$.*

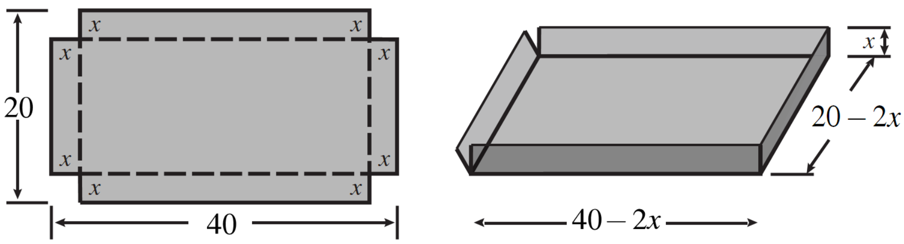


Figura 2.17: Construção de uma caixa sem tampa (próprio autor).

Além das funções afins, lineares e quadráticas, uma outra função elementar que frequentemente surge nas aplicações e no nosso cotidiano é a função cúbica. Na verdade, uma função cúbica é uma função polinomial de grau 3. Por exemplo, vamos supor que queremos construir uma caixa sem tampa com o maior volume, a partir de um pedaço de papelão de 40 por 20 centímetros. Fazendo cortes quadrados de $x \times x$ nos quatro cantos e dobrar os lados será construída a caixa. Na Figura 2.17, observa-se que o volume da caixa resultante é dado por

$$\begin{aligned} V(x) &= (40-2x)(20-2x)x, \\ &= 4x^3 - 120x^2 + 800x, \end{aligned}$$

que uma função polinomial de grau 3, ou seja, uma função cúbica.

Encerramos aqui a nossa discussão sobre o conceito de função, acreditamos que foi suficiente para o desenvolvimento da metodologia a ser apresentada ao longo deste trabalho. Para maiores detalhes, o leitor interessado pode buscar mais informações em Lima (2013).

3 NOÇÕES DE DERIVADAS E PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

3.1 A HISTÓRIA DA DERIVADA

A derivada, a ideia principal do cálculo diferencial e integral, o coração da matemática moderna, é a primeira parte da análise matemática que está intimamente relacionada ao problema da taxa de variação (instantânea) de uma função. O conceito da derivada tem origem geométrica e vem do problema de encontrar a reta tangente em um ponto de uma curva. O conceito só foi estabelecido no início do século XVII, ou seja, antes que o matemático francês Pierre de Fermat determinasse os extremos de algumas funções especiais. Fermat descobriu que as retas tangentes, nos pontos onde a curva assume seus máximos ou mínimos são tangentes horizontais. Ao tentar resolver este problema, Fermat descobriu algumas ideias preliminares do conceito da derivada.

Figura 3.1: Pierre de Fermat (1607–1665).

À primeira vista, parecia não haver relação entre o problema de encontrar a área sob um curva e o problema de determinar a reta tangente à curva em um ponto, mas a primeira pessoa que descobriu que esses dois conceitos, aparentemente distantes um do outro, e que na verdade têm uma relação relativamente próxima, foi Isaac Barrow, professor de Isaac Newton. O conceito de derivada em sua forma atual foi desenvolvido independentemente por Newton em 1666 e por Gottfried Leibniz alguns anos depois. Esses dois, novamente e de forma independente, apresentaram a segunda parte da análise matemática, ou seja, cálculo integral. Newton estudou a derivada, do ponto de vista cinemático e físico (física teórica), e a utilizou para encontrar a velocidade instantânea. Mas Leibniz, do ponto de vista geométrico, usou a derivada para obter o coeficiente do ângulo da reta tangente a uma curva. Cada um usou símbolos separados para representar a derivada. Os estudos de Newton e Leibniz foram baseados nos importantes trabalhos feitos por matemáticos que os precederam, incluindo Pierre de Fermat, Isaac Barrow, René Descartes, Christian Huygens, Blaise Pascal e John Wallis. Muitos símbolos desenvolvidos por Leibniz ainda são usados até hoje.

Figura 3.2: Isaac Newton (1643–1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716).

O desenvolvimento do cálculo diferencial e integral em tempos posteriores deve muito a Augustin Louis Cauchy, Bernhard Riemann e aos irmãos Bernoulli, Jacob e Johann. Guillaume de L'Hôpital, um matemático francês, publicou o primeiro livro sobre análise matemática em 1696 chamado de "Analyze des Infiniment Petits pour l'Intelligence des Lignes Courbes", que era na verdade um resumo das lições ministradas por Johann Bernoulli para ele. O livro contém a conhecida Regra de L'Hôpital que usa a derivada para remover as indeterminações matemáticas que surgem no cálculo do limite, que na verdade pertence a Johann Bernoulli.

Sharafuddin Toosi, um matemático e astrônomo persa da Idade do Ouro Islâmica, foi o primeiro a descobrir a derivada de polinômios de terceiro grau. Em seu livro "Treatise on equations", desenvolveu conceitos como a derivada e os máximos e mínimos de uma função. Mas, o avanço do cálculo diferencial e integral se deve muito a Isaac Newton e Gottfried Leibniz. O principal trabalho deles foi o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) que estabelece uma relação entre os conceitos de derivada e integral. Talvez possamos dizer que o o teorema mais lindo e mais aplicado do cálculo diferencial e integral é o TFC que é nada mais que um método super poderoso de resolver as integrais definidas sem precisar usar a definição de uma integral definida como o limite de uma soma de Riemann. Desde o século XVII muitos matemáticos têm estudado e desenvolvido o conceito de derivada. No século XIX, outros matemáticos, incluindo Augustin Louis Cauchy, Bernhardt Riemann e Karl Weierstrass, concluíram pesquisas neste campo. No mesmo período, a derivada foi estendida para o espaço euclidiano e o plano complexo.

3.2 RETA TANGENTE: A INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA DERIVADA

Sejam $y = f(x)$ uma curva qualquer e $P(a, f(a))$ um ponto que pertence à curva. Não há uma definição padrão para reta tangente, mas podemos dizer que uma reta t é tangente à curva $y = f(x)$ no ponto P quando a curva e a reta têm a mesma direção nesse ponto. Na Figura 3.3, a reta t é tangente à curva $y = f(x)$ em ponto P, enquanto as demais retas que passam nos pontos P e Q não são tangentes. Essas retas são chamadas de retas secantes.

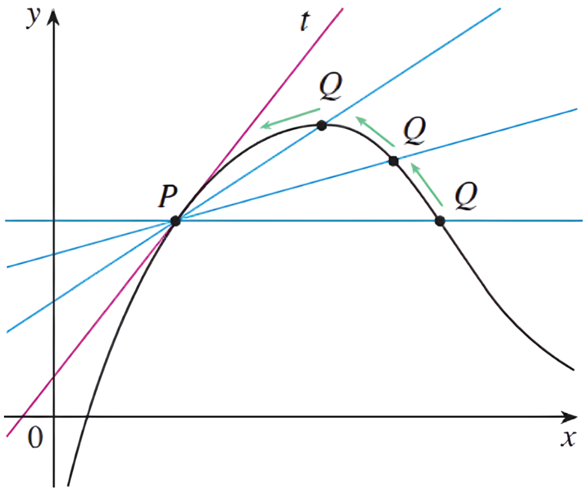


Figura 3.3: Reta tangente t e retas secantes à curva $y = f(x)$ no ponto $P(a, f(a))$.

Na Figura 3.3, observa-se que, a medida em que, ao longo da curva de $y = f(x)$, o ponto Q se aproxima do ponto P, a sequência das retas secantes se aproxima da reta tangente t. Essa é a ideia central de encontrar a inclinação da reta tangente t à curva $y = f(x)$ no ponto P. Seja $Q(x, f(x))$ um ponto qualquer da curva $y = f(x)$ tal que $P \neq Q$. Sabe-se que a inclinação da reta (secante) que passa pelos pontos P e Q é dada por $m_{PQ} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, onde Δx e a variação de x, dada por $x - a$ (Figura 3.4), enquanto Δy é a variação correspondente de y, dada por $f(x) - f(a)$. Deste modo,

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

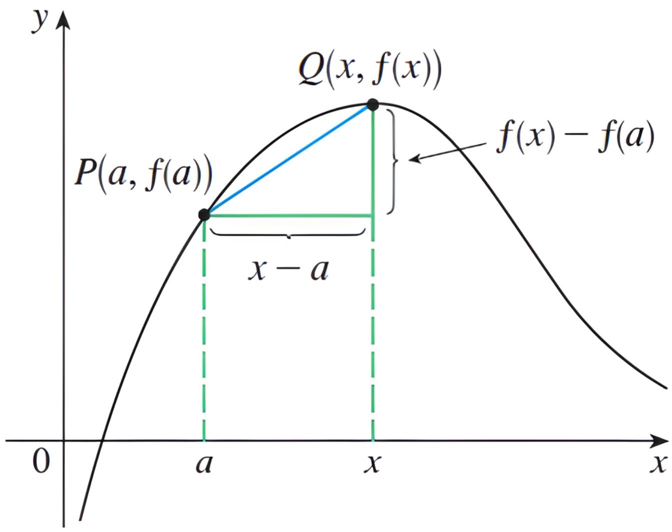


Figura 3.4: A inclinação da reta secante que passa pelos pontos $P(a, f(a))$ **e** $Q(x, f(x))$**.**

O quociente $= \frac{\Delta y}{\Delta x}$ é chamado de taxa média de variação de y em relação a x no intervalo $[a, x]$, ou a variação da reta secante PQ. Diminuindo cada vez mais o intervalo $[a, x]$, ou seja, fazendo com que o ponto Q se aproxime cada vez mais do ponto P, e encontrar essa média de variação de y em relação a x teremos a taxa instantânea de variação de y em relação a x em $x = a$, interpretada como a inclinação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $P(a, f(a))$, denotada por m_t. Simbolicamente escrevemos:

$$m_t = \lim_{Q \to P} m_{PQ},$$

ou, equivalentemente,

$$m_t = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

na qual o lado direito dessa expressão é a definição da derivada da função $f(x)$ no ponto $x = a$, denotada por $f'(a)$. Portanto, geometricamente, a derivada de uma função $f(x)$ no ponto $x = a$, $f'(a)$, é a inclinação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $P(a, f(a))$.

Exemplo 3.1 (uma atividade para sala de aula) *Encontre a inclinação da reta tangente à curva* $f(x) = -x^2 + 10x$ *no ponto* $P(2, 16)$.

Como $m_t = \lim_{Q \to P} m_{PQ}$, geramos a sequência das inclinações das retas secantes que se aproximam da reta tangente. Para isso, usamos os pontos que se aproximam de P, tanto pela esquerda do ponto Q (Tabela 3.1) quanto pela direita desse ponto (Tabela 3.2).

Da última coluna das Tabelas 3.1 e 3.2 observa-se que tanto pela direita quanto pela esquerda os valores do quociente $m_{PQ} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ tendem a ficar cada vez mais próximos do número

Tabela 3.1: As inclinações das retas secantes quando Q se aproxima de P pela esquerda.

x	$f(x)$	$f(a)$	$f(x)-f(a)$	$x-a$	$m_{PQ}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$
0	0	16	–16	–2	8
0,5	4,75	16	–11,25	–1,5	7,5
0,8	7,36	16	–8,64	–1,2	7,2
1	9	16	–7	–1	7
1,5	12,75	16	–3,25	–0,5	6,5
1,8	14,76	16	–1,24	–0,2	6,2
1,9	15,39	16	–0,61	–0,1	6,1
1,99	15,9399	16	–0,0601	–0,01	6,01
1,999	15,993999	16	–0,006001	–0,001	6,001
1,9999	15,99939999	16	–0,00060001	–0,0001	6,0001

Tabela 3.2: As inclinações das retas secantes quando Q se aproxima de P pela direita.

x	$f(x)$	$f(a)$	$f(x)-f(a)$	$x-a$	$m_{PQ}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$
5	25	16	9	3	3
4	24	16	8	2	4
3	21	16	5	1	5
2,5	18,75	16	2,75	0,5	5,5
2,3	17,71	16	1,71	0,3	5,7
2,2	17,16	16	1,16	0,2	5,8
2,1	16,59	16	0,59	0,1	5,9
2,01	16,0599	16	0,0599	0,01	5,99
2,001	16,005999	16	0,005999	0,001	5,999
2,0001	16,00059999	16	0,00059999	0,0001	5,9999

6 à medida que x tende ao número 2 (por qualquer lado de 2), mas $x \neq 2$. Simbolicamente escrevemos $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=6$. Assim, concluímos que a inclinação da reta tangente é igual a 6. Vale ressaltar que em situações em que a última coluna dessas tabelas não representam o mesmo comportamento, ou seja, quando os valores não se aproximam de um mesmo valor, dizemos que a derivada $f'(a)$ não existe, consequentemente, não há reta tangente à curva no ponto $P(a, f(a))$.

Agora, tendo a inclinação, a reta tangente à curva $f(x)=-x^2+10x$ no ponto $P(2,16)$ é dada por (Figura 3.5):

$$y-16=6(x-2),$$

ou ainda,

$$y=6x+4.$$

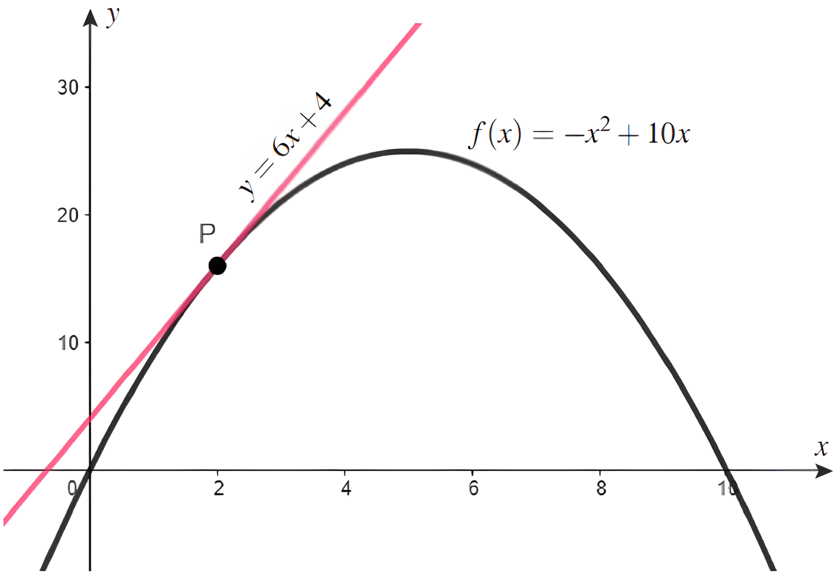


Figura 3.5: A reta $y = 6x + 4$ é tangente à cruva $f(x) = -x^2 + 10x$ no ponto P (próprio autor).

3.3 VELOCIDADE INSTANTÂNEA: A INTERPRETAÇÃO FÍSICA DA DERIVADA

Como citamos anteriormente, Newton estudou o conceito derivada, do ponto de vista cinemático e físico (física teórica). O estudo de movimento é um dos temas importantes do cálculo diferencial e integral onde o objetivo é descrever o movimento de um objeto. Um objeto em movimento tem velocidade escalar, direção e sentido. Estes três juntos, constituem o que se denomina a velocidade do objeto. O caso mais simples de um movimento é o retilíneo, ou seja, o movimento ao longo de uma reta (unidimensional). Alguns exemplos deste tipo de movimento são a queda livre de um objeto de uma altura, jogar uma bola para cima e de forma vertical e o movimento de um carro em uma rodovia reta (Figura 3.6).

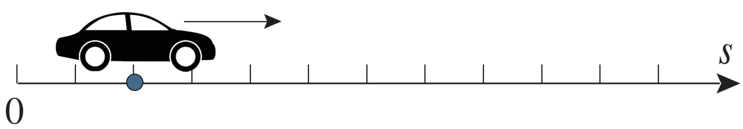


Figura 3.6: O movimento retilíneo de um carro (próprio autor).

Para pode estudar o movimento retilíneo do objeto consideramos a reta orientada com a origem em 0. Sendo assim, a posição do objeto, s, em um instante t é o ponto em que o objeto se encontra nesta reta, ou seja, $s = f(t)$, uma função em t. Se no instante t_1 o objeto estiver na posição s_1 e no instante t_2 na posição s_2, o deslocamento total do objeto é dado por $\Delta s = s_2 - s_1$. Quando o deslocamento ocorre no sentido positivo, então $\Delta s > 0$, caso contrário, $\Delta s < 0$. Neste caso, a velocidade média do objeto é dada por

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1},$$

onde $\Delta t = t_2 - t_1$ é o tempo decorrido da posição s_1 até a posição s_2.

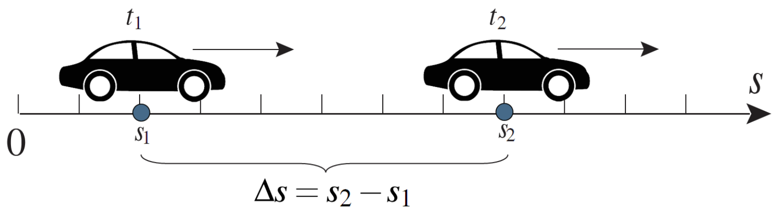


Figura 3.7: O deslocamento de um carro no intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ (próprio autor).

Por exemplo, se às 00h00min um carro sai da cidade A em direção a cidade B distantes de 400 km, e chega ao seu destino às 05h00min da manhã, a velocidade média desse carro é de $v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{400}{5} = 80km/h$. É claro que ao longo do percurso, nem sempre a velocidade era de $80km/h$. Em alguns momentos o carro teve uma velocidade maior que 80 km/h e em outros uma velocidade menor que $80km/h$. Em outras palavras, a velocidade média não é o valor exato da velocidade do carro em cada instante t. A velocidade de um objeto em cada momento t é chamada de velocidade instantânea, v. Essa velocidade, ao longo do percurso, pode ser maior ou menor que a velocidade média. Para obter a velocidade instantânea basta trabalhar com intervalos muito pequenos e calcular a velocidade média nesses intervalos. Ou seja, quando Δt diminui o bastante suficiente, a velocidade média se aproxima cada vez mais da velocidade instantânea. Podemos então escrever

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

que o lado direito é a derivada da função de deslocamento.

Se ao longo do percurso, o carro sempre tiver a velocidade constante igual a $80km/h$, e se inicialmente e no instante $t = 0$ estiver na posição 0, a função de deslocamento é dada por $s = f(t) = 80t$ $(t > 0)$. Porém, se no instante $t = 0$ estiver em outra posição, digamos s_0, neste caso a função de deslocamento é dada por $s = f(t) = 80t + s_0$ $(t > 0)$. Nestas duas situações, a velocidade média e instantânea coincidem. Agora, suponha que temos a função que representa a posição de um carro, $s = f(t)$, e queremos encontrar a velocidade em um dado instante $t > 0$.

Exemplo 3.2 (uma atividade para sala de aula) *A posição de um carro é dada por $s = f(t) = t^3 + 2t$. Encontre a velocidade do carro no instante $t = 2$.*

Antes de tentarmos obter a velocidade instantânea no instante $t = 2$, vamos encontrar a velocidade média no intervalo de tempo $[2,5]$. A velocidade média, neste intervalo, é dada por:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\left(5^3 + 2(5)\right) - \left(2^3 + 2(2)\right)}{5-2} = 41\ km/h.$$

Agora, para obter a velocidade instantânea no instante $t = 2$, basta encontrar a velocidade média em um intervalo suficientemente pequeno que contenha 2. A Tabela 3.3 mostra que a velocidade instantânea do carro no instante $t = 2$ é de $14km/h$.

Tabela 3.3: A velocidade instantânea do carro no instante $t = 2$.

intervalo	h (tamanho do intervalo)	$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$
[2, 5]	3	$\frac{123}{3} = 41$
[2, 4]	2	$\frac{60}{2} = 30$
[2, 3]	1	$\frac{21}{1} = 21$
[2, 2,5]	0,5	$\frac{8{,}625}{0{,}5} = 17,25$
[2, 2,1]	0,1	$\frac{1{,}461}{0{,}1} = 14,61$
[2, 2,01]	0,01	$\frac{0{,}140601}{0{,}01} = 14,0601$
[2, 2,001]	0,001	$\frac{0{,}014006001}{0{,}001} = 14,006001$
[2, 2,0001]	0,0001	$\frac{0{,}001400060001}{0{,}0001} = 14,00060001$

Observamos que o quociente $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ é dado por $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$, logo,

$$v = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h},$$

é a forma alternativa da derivada para obter a velocidade instantânea no instante $t = 2$. Em geral, podemos substituir por $t = a$ quando o objetivo é encontrar a velocidade instantânea no instante $t = a$.. Vale destacar que conhecendo a derivada de funções, teremos uma forma mais simples e mais prática para obter a velocidade instantânea (e a inclinação da reta tangente e outras taxas de variações) em vez que gerar uma tabela de valores com muitas casas decimais.

3.4 DERIVADA DE UMA FUNÇÃO

Nas seções anteriores, vimos que que a inclinação da reta tangente em um ponto $P(a, f(a))$ da curva $y = f(x)$ e a velocidade instantânea de um objeto no instante $t = a$ cuja posição é dada por $s = f(t)$, ambas como derivada de uma função, são dadas por:

$$m_t = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

e
$$v = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$
respectivamente. Na verdade, essas expressões representam a derivada da função f no ponto a, e simplesmente são denotadas por $f'(a)$, e lê-se a derivada de f em a. Se em vez de um ponto específico a, considerarmos um ponto qualquer x, temos a seguinte expressão para encontrar a derivada da função f:
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Podemos ver que $f'(a)$ é um valor que pode representar a velocidade de um objeto, a inclinação da reta tangente ou qualquer outra taxa de varação instantânea, enquanto $f'(x)$ é uma função em x que é conhecida como a derivada de $f(x)$. Portanto, para obter a inclinação da reta tangente ou a velocidade instantânea, $f'(a)$, basta encontrar a derivada de $f(x)$, $f'(x)$, e nela substituir x por a, ou seja, $f'(a) = f'(x) \mid_{x=a}$. Vale ressaltar que uma função f é chamada de derivável ou diferenciável em a, se $f'(a)$ existir. Dependendo da natureza da função, ela pode ser ou não derivável em um ponto a. E, se $f'(a)$ não existir, no ponto $(a, f(a))$ não há nenhuma reta tangente à curva $y = f(x)$. Por exemplo, se houver um buraco ou uma quinta no ponto $(a, f(a))$, a derivada neste ponto não existe.

3.4.1 DERIVADA DE FUNÇÕES ELEMENTARES E REGRAS BÁSICAS DA DERIVADA

No Capítulo 2, conhecemos o conceito de função, além das funções elementares, como, por exemplo, afins, lineares, constantes, quadráticas (e cúbicas), as quais fazem parte do nosso cotidiano e que frequentemente surgem em inúmeras situações do nosso dia a dia. Nesta seção, apresentamos a derivada das funções elementares e algumas regras básicas da derivada.

• **Função Constante:**

Uma função constante é dada por $f(x) = c$, onde $c \in \mathbb{R}$ é uma constante real. Graficamente, uma função constante é uma reta horizontal (sem inclinação) que passa pelo ponto c no eixo dos y. Já que a curva não tem inclinação, podemos esperar que derivada dela seja zero, ou seja, $f'(x) = 0$.

Por definição, a derivada de $f(x)$ é dada por:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 0 \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois tanto pelos valores maiores quanto pelos valores menores que zero, as sequências geradas por $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ só terão elemento zero, logo $f'(x) = 0$. Consequentemente, em qualquer ponto da curva de $f(x)$, a reta tangente tem a inclinação igual a zero, ou seja, é horizontal e coincide com a curva de $y = f(x)$.

• Função Afim e Linear:

Uma função afim é dada por $f(x) = ax+b$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ são constantes reais e que $a \neq 0$. Graficamente, o gráfico uma função afim é uma reta com a inclinação a, portanto, podemos esperar que $f'(x) = a$. A derivada de $f(x)$ é dada por:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\big(a(x+h)+b\big)-\big(ax+b\big)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{ah}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} a \\ &= a, \end{aligned}$$

concluindo, da mesma forma, que a derivada da função afim $f(x) = ax+b$ é dada por $f'(x) = a$. Como um caso particular, a derivada da função $f(x) = ax$ é também dada por $f'(x) = a$.

• Função Quadrática:

Uma função quadrática é dada por $f(x) = ax^2+bx+c$, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ são constantes reais e que $a \neq 0$. O gráfico uma função quadrática é uma parábola, com concavidade para cima se $a > 0$ e concavidade para baixo se $a < 0$. A derivada de $f(x)$ é dada por:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\big(a(x+h)^2+b(x+h)+c\big)-\big(ax^2+bx+c\big)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{2axh+ah^2+bh}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} 2ax+ah+b \end{aligned}$$

mas, na expressão $2ax+ah+b$, o termo $2ax+b$ é independente de h, logo na sequência gerada para valores de h que se aproximam de zero, sempre aparece como parte fixa e a outra parte, ah, se aproxima de zero. Consequentemente, $\lim_{h\to 0} 2ax+ah+b = 2ax+b$, portanto,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \vdots \\ &= \lim_{h \to 0} 2ax+ah+b \\ &= 2ax+b, \end{aligned}$$

concluindo ainda que $f'(x) = 2ax+b$. Já que $f'(x) = 0$ no ponto $x = -\frac{b}{2a}$, neste ponto a reta tangente é horizontal.

• **Função Cúbica:**

Uma função cúbica é dada por $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$, onde $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ são constantes reais e que $a \neq 0$. A derivada de $f(x)$ é dada por:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\big(a(x+h)^3+b(x+h)^2+c(x+h)+d\big)-\big(ax^3+bx^2+cx+d\big)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{3ax^2h+3axh^2+ah^3+2bxh+bh^2+ch}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} 3ax^2+3axh+ah^2+2bx+bh+c \\ &= \lim_{h \to 0} 3ax^2+2bx+c+h(3ax+ah+b) \end{aligned}$$

onde o termo $3ax^2+2bx+c$ é independe de h, logo na sequência gerada para valores de h que se aproximam de zero, sempre aparece como parte fixa e a outra parte, $h(3ax+ah+b)$, se aproxima de zero uma vez que por h se aproximar de zero. Sendo assim, $f'(x) = 3ax^2+2bx+c$. Dependendo do valor de $\Delta = (2b)^2-4(3a)(c)$, podemos ter ou não retas tangentes horizontais à curva de $y = f(x)$.

• **Função Polinomial de Grau n:**

Em geral, podemos simplesmente mostrar que se $f(x) = ax^n$, a derivada é dada por $f'(x) = anx^{n-1}$, e além disso, a derivada da soma de duas (ou mais) funções é soma das derivadas. Assim, concluímos que a derivada de uma função polinomial de grau n, $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, é dada por $f'(x) = na_nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + 2a_2x + a_1$.

• **Derivada da Soma de Duas Funções:**

Sejam f e g duas funções reais quaisquer e $h(x) = f(x) + g(x)$, a soma destas duas funções. Por definição, a derivada de h é dada por:

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{h(x+h) - h(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\big(f(x+h) + g(x+h)\big) - \big(f(x) + g(x)\big)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\big(f(x+h) - f(x)\big) + \big(g(x+h) - g(x)\big)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= f'(x) + g'(x)
\end{aligned}$$

ou seja, a derivada da soma de duas funções é a soma das derivadas dessas duas funções.

• **Derivada da Diferença de duas Funções:**

Sejam f e g duas funções quaisquer e $h(x) = f(x) - g(x)$, a diferença destas duas funções. Por definição, a derivada de $h(x)$ é dada por:

$$
\begin{aligned}
h'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{h(x+h)-h(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\big(f(x+h)-g(x+h)\big)-\big(f(x)-g(x)\big)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\big(f(x+h)-f(x)\big)-\big(g(x+h)-g(x)\big)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= f'(x)-g'(x),
\end{aligned}
$$

concluindo então que a derivada da diferença de duas funções é a diferença das derivadas dessas duas funções.

• Derivada do Produto de duas Funções:

Sejam f e g duas funções reais quaisquer e $h(x) = f(x)\cdot g(x)$, o produto destas duas funções. Por definição, a derivada de h é dada por:

$$
\begin{aligned}
h'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{h(x+h)-h(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\big(f(x+h)\cdot g(x+h)\big)-\big(f(x)\cdot g(x)\big)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x)+g(x+h)\cdot f(x)-g(x+h)\cdot f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)\big(f(x+h)-f(x)\big)+f(x)\big(g(x+h)-g(x)\big)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} g(x+h)\cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} f(x)\cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}, \\
&= g(x)\cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + f(x)\cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= g(x)\cdot f'(x)+f(x)\cdot g'(x)
\end{aligned}
$$

isto é, $\big(f(x)\cdot g(x)\big)' = g(x)\cdot f'(x)+f(x)\cdot g'(x)$.

• Derivada da Divisão de Duas Funções:

Sejam f e g duas funções reais quaisquer e $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, a divisão destas duas funções. Tem-se $f(x) = h(x)\cdot g(x)$ e logo

$$f'(x) = g(x)\cdot h'(x)+h(x)\cdot g'(x),$$

ou ainda,

$$g(x) \cdot h'(x) = f'(x) - h(x) \cdot g'(x).$$

Mas, de $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, temos então que

$$g(x) \cdot \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = f'(x) - \frac{f(x)}{g(x)} \cdot g'(x),$$

equivalentemente,

$$g(x) \cdot \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = f'(x) - \frac{f(x) \cdot g'(x)}{g(x)}.$$

Dividindo a expressão anterior por $g(x)$ tem-se

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2},$$

isto é

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}.$$

É importante salientar que todas as situações-problemas abordadas neste trabalho e na sala de aula podem ser modeladas por meio de funções polinomiais ou racionais, portanto, as funções e as regras básicas apresentadas nesta seção são suficientes.

3.5 PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO: APLICAÇÕES

Não há uma receita padrão para um ensino eficaz, mas o processo de ensino e aprendizagem deve estar atrelado a situações que estimulem os alunos a pensar e querer resolver, isto é, que sejam interessantes e não somente resolver, desenvolvendo no estudante um pensamento crítico e de maneira criativa e reflexiva, já que as metodologias tradicionais de ensino e aprendizagem não conseguem mais manter os alunos motivados e concentrados o tempo todo, e isso é ainda desafio maior em aulas de matemática que exigem uma participação maior dos alunos nas discussões. Por isso, o professor, dentro de um sistema diferenciado, precisa se renovar, se remodelar constantemente e adotar metodologias em que os alunos se envolvam mais ativamente com o aprendizado, fazendo com que as aulas sejam mais produtivas. Deste modo, o conceito de função pode ser abordado dentro do contexto de interdisciplinaridade uma vez que o uso das aplicações permite um trabalho interdisciplinar, consequentemente motivando os alunos na disciplina de matemática.

A interdisciplinaridade entrou no cenário educacional do Brasil a partir da Lei nº 5.692/71 e depois ganhou mais destaque com a nova Lei de Diretrizes e Bases da Educação

Brasileira nº 9.394/96 e com os Parâmetros Curriculares Nacionais – Os PCNs. A aplicação de matemática em outras áreas de conhecimento é geralmente feita através de modelagem matemática, que é nada mais que representar uma situação por tabelas, gráficos, funções, fórmulas, figuras e outros termos matemáticos. Para (SOUSA, 2010):

> A interdisciplinaridade como abordagem para pesquisa e ensino busca a interação entre uma, duas ou mais disciplinas ou áreas do conhecimento humano, num processo que abrange desde uma simples comunicação de ideias até a integração de finalidades, objetivos, conceitos e conteúdos.

Vivemos dias corridos e de constantes mudanças, que em geral, englobam todos as áreas de nossa vida, sejam sociais ou tecnológicas; buscamos resolver diversas situações do cotidiano de modo rápido e prático e nos adaptar a novos desafios sempre procurando o máximo de benefícios ou desempenho e em menor tempo, primando sempre pela qualidade de vida. Assim, de modo geral, é possível associar tais ideias ao conceito matemático de otimização.

É possível pensar em criar diversas situações-problemas que envolvem otimização para resolver determinados problemas no ensino médio, estudando os mais diversos conceitos tais como o de funções, e que se apoiam também nos recursos digitais (metodologia ativa) como ferramenta de solução, e que de maneira contextualizada pode chamar a atenção dos alunos de maneira dinâmica. Tais situações, devem ser abordados no ensino médio, para despertar no aluno, sua criticidade e o modo a pensar matematicamente. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, os objetivos do Ensino Médio em cada área do conhecimento devem envolver, de forma combinada, o desenvolvimento de conhecimentos práticos, contextualizados, que respondam às necessidades da vida contemporânea, e o desenvolvimento de conhecimentos mais amplos e abstratos, que correspondam a uma cultura geral e a uma visão de mundo (BRASIL, 1997). Dentro desse contexto, surgem inúmeras situações que podem ser trabalhadas dentro de sala de aula que nos apresentem a otimização como recurso para possibilitar alcançar novos horizontes e assim obter bons resultados quanto ao processo de aprendizagem matemática, possibilitando assim, aplicar a linguagem matemática de modo real e contextualizado desmitificando a abstração matemática como inútil e sem vida.

O termo otimização, em geral, refere-se ao estudo de problemas nos quais se busca minimizar ou maximizar uma certa função, chamada de função objetivo, sujeito a um conjunto de restrições que limitam a escolha dos valores das variáveis de decisão do problema. Muitos problemas reais e práticos do nosso cotidiano podem ser reformulados e modelados de maneira muito conveniente como problemas de otimização. Propondo tais situações-problemas, por meio de uma abordagem interdisciplinar, pode aprimorar seu processo de aprendizagem, pois segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais, vem para somar e manter o diálogo entre os conhecimentos de forma a complementá-los, questioná-los ou até mesmo negá-los.

Vale destacar, que no Ensino Médio, trabalha-se com a ideia de pontos máximos e mínimos em funções quadráticas, porém muitas vezes, é vista de maneira robotizada e sequer justificada através de exemplos práticos. Assim, cabe ao estudante, a memorização de resultados relacionados a leitura de gráficos de modo isolado e fórmulas prontas. Existem diversos problemas de otimização interessantes para serem trabalhados no contexto do ensino médio, dinamizando as aulas e despertando interessante por parte dos discentes sobre o assunto estudado e as ferramentas abordadas.

Vale ressaltar que muitos destes problemas utilizam-se da derivada ou conceitos mais avançados de matemática e uma saída pertinente, neste caso, será analisar o problema de modo geométrico ou o uso de ferramentas computacionais, dentre os quais podemos citar as calculadoras, software como o GeoGebra, tabelas eletrônicas a fim de alcançarmos os objetivos propostos e a solução do problema em questão. A seguir, apresentamos algumas situações-problemas.

Situação–Problema 1 — Caixa com o Maior Volume: A partir de uma chapa de alumínio de 40 por 20 centímetros, a mãe da Fernanda, quer construir uma caixa sem tampa e com o maior volume para guardar os brinquedos da Fernanda. Encontre as dimensões da caixa com o maior volume (Figura 3.8).

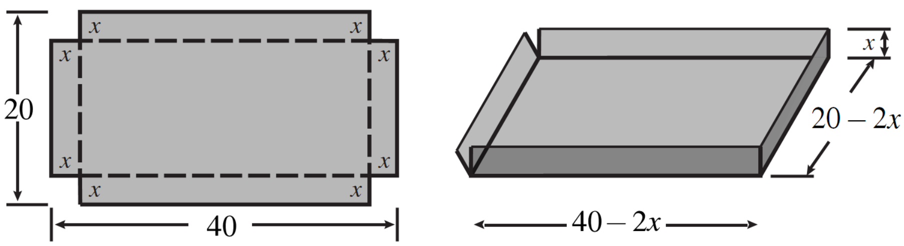


Figura 3.8: Construção de uma caixa sem tampa (próprio autor).

Situação–Problema 2 — Caixa com o Menor Custo: A partir de uma chapa de alumínio queremos construir uma caixa, com base quadrada, de 1 m^3 com o menor custo possível. Encontre as dimensões da caixa. A Figura 3.9 ilustra três das infinitas possibilidades de caixas com 1 m^3 de volume (sem se preocupar neste momento se a base é quadrada ou não).

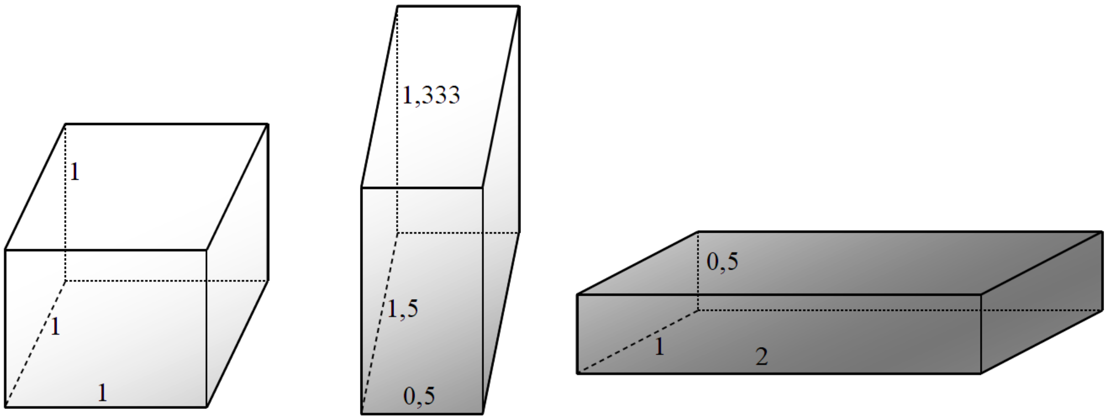


Figura 3.9: Caixas com 1 m^3 de volume (próprio autor).

Situação–Problema 3 — Silo com o Menor Custo: Uma empresa de montagem de estruturas de armazenagem de produtos agrícolas recebeu o pedido de montagem de um silo cilindríco para um criador de gado de 8.000 m^3 (Figura 3.10). A empresa, para aumentar o seu lucro, precisa minimizar o custo do metal utilizado para produzir o silo. Quais dimensões do silo que tem o menor custo de produção?

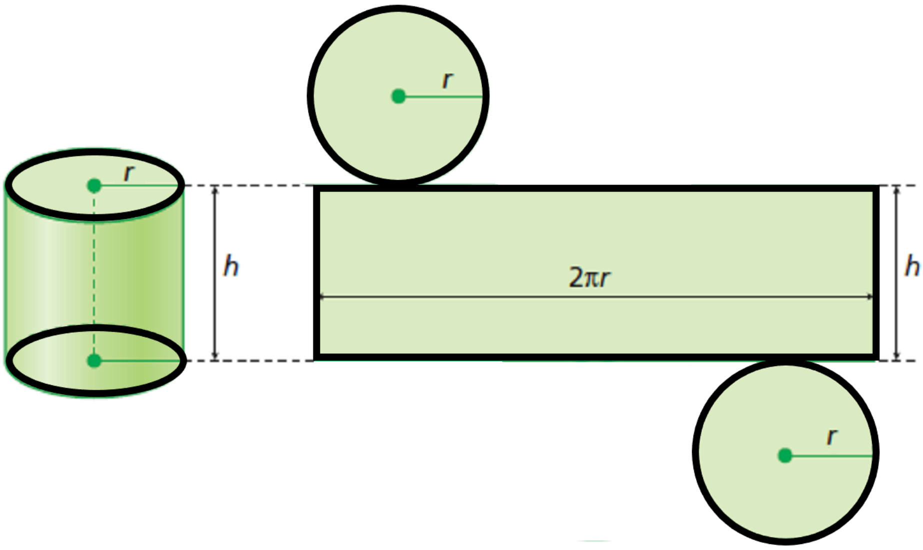


Figura 3.10: Silo com o menor custo de produção (próprio autor).

Situação–Problema 4 — Área de Lazer: Um fazendeiro tem 400 metros de um tipo de tela alambrado e pretende separar uma região retangular da sua fazenda para construir uma área de lazer. Quais devem ser as dimensões da maior área que ele pode separar da sua fazenda?

Esse problema pode ser reformulado de outra forma: encontrar dois números positivos cuja soma é 200 e cujo produto é o máximo possível.

Situação–Problema 5 — Área de Descanso para os Caminhoneiros: Uma concessionária que cuida de uma das rodovias brasileiras quer construir ao lado da rodovia uma área retangular de parada e descanso para os caminhoneiros. A área precisa ter 11.250 m^2 para poder atender o fluxo, e além disso, os três lados precisam ser cercados por tela alambrado (Figura 3.11). Quais devem ser as dimensões da área para que o custo com tela seja o menor possível?

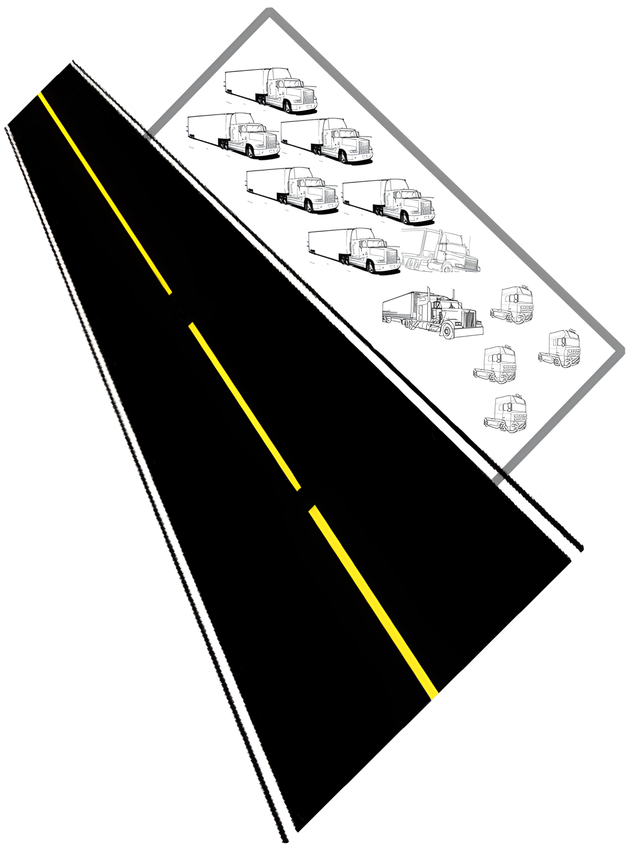


Figura 3.11: Área de parada e descanso para os caminhoneiros (próprio autor).

Situação–Problema 6 — Problema de Palitos: Com 24 palitos de fósforo queremos criar uma região retângular com a maior área. Quais dimensões da região?

Situação–Problema 7 — Problema de Aluguel: Um hotel tem 250 apartamentos que podem ser reservados. Se x unidades deste hotel forem reservados, o lucro mensal é dado por $P(x) = -8x^2 + 3.200x - 80.000,\ 0 \leq x \leq 250$. Se você fosse o administrador deste hotel, quantos apartamentos deixaria para reservas para ter o maior lucro mensal?

Situação–Problema 8 — Problema de Produção: O custo semanal de produção de x unidades de um doce caseiro feito por uma senhora é dado por $C(x) = -0,09x^2 + 350x + 500$, $0 \leq x \leq 100$. Qual custo da produção de 301^o doce? Qual taxa de variação de custo na hora de produzir o 300^o doce?

3.5.1 MÍNIMOS E MÁXIMOS

Nas seções anteriores vimos que as interpretações da derivada. Vimos, por exemplo, que a derivada de uma função $y = f(x)$ em um ponto x_0 (que pertence à curva desta função) representa a inclinação da reta tangente t à curva de $y = f(x)$ no ponto $(x_0, f(x_0))$. Essa informação nos ajuda na hora de esboçar o gráfico de $y = f(x)$. Por exemplo, para encontrar os pontos onde as retas tangentes são horizontais basta encontrar os pontos que zeram a derivada, pois uma reta horizontal tem a inclinação igual a zero. Além disso, outra informação interessante é que a partir da derivada podemos encontrar os intervalos em que a curva de $y = f(x)$ está acima ou abaixo das retas tangentes.

Em todos os problemas de otimização, o objetivo é maximizar ou minimizar uma função, chamada de função objetivo. Em outras palavras, precisamos encontrar os pontos em que a função atinge o seu máximo ou mínimo, chamados de pontos máximos ou mínimos (extremos, em geral). Os valores que a função toma nestes pontos são chamados de valores máximos ou mínimos. Temos as seguintes definições:

Definição 3.3 *Sejam $D \subset \mathbb{R}$ um conjunto e $f : D \to \mathbb{R}$ uma função real. Um ponto $x_0 \in D$ se diz um ponto máximo local para f se $f(x_0) > f(x)$ para todo $x \in D$.*

Definição 3.4 *Sejam $D \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto e $f : D \to \mathbb{R}$ uma função real. Um ponto $x_0 \in D$ se diz um ponto mínimo local para f se $f(x_0) < f(x)$ para todo $x \in D$.*

Definição 3.5 *Sejam $D \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto e $f : D \to \mathbb{R}$ uma função real. Um ponto $x_0 \in D$ se diz um ponto máximo global para f se $f(x_0) > f(x)$ para todo $x \in D$.*

Definição 3.6 *Sejam $D \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto e $f : D \to \mathbb{R}$ uma função real. Um ponto $x_0 \in D$ se diz um ponto mínimo global para f se $f(x_0) < f(x)$ para todo $x \in D$.*

Na função da Figura 3.12, os pontos A e C são pontos de máximos, sendo que A é o máximo global enquanto C é local. Da mesma forma, os pontos B e E são pontos mínimos,

B local e E global. Observamos que um extremo global é sempre um extremo local, porém a recíproca não é verdadeira.

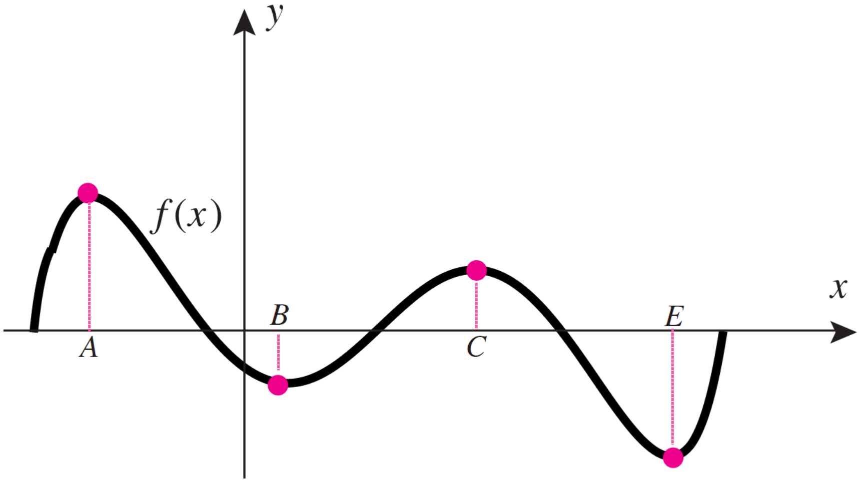


Figura 3.12: Os mínimos e máximos locais e globais (próprio autor).

Dependendo do intervalo escolhido, uma função pode ter pontos extremos ou não. Por exemplo, se $f(x) = x^2 + 2$, já que $x^2 + 2 \geq 2$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $f(0) = 2$, podemos concluir que $x_0 = 0$ é o mínimo global de f e $f(0) = 2$ é o valor mínimo de f em $\mathbb{R}$. Por outro lado, se $f(x) = x^3 + 2$, a função f não tem nem mínimo e nem máximo em $\mathbb{R}$ (Figura 3.13).

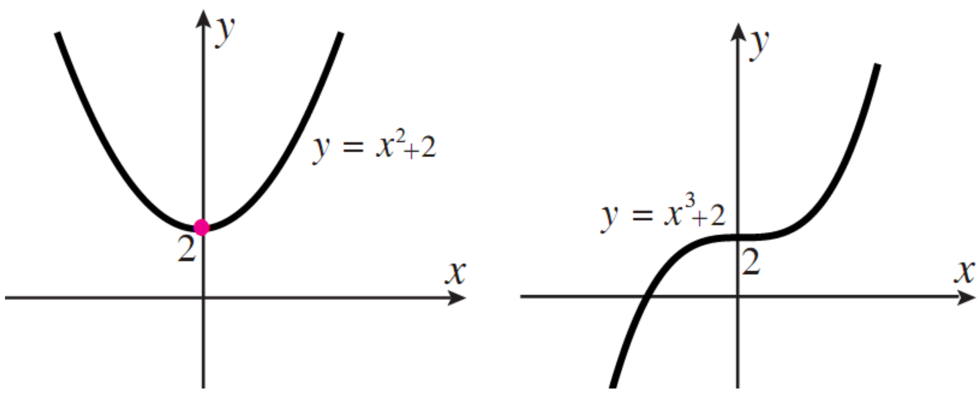


Figura 3.13: Os gráficos de $f(x) = x^2$ e $f(x) = x^3$ (próprio autor).

Geometricamente, uma função $f(x)$ se diz contínua em um intervalo I, quando o gráfico de f não tem buracos e não se quebra em nenhum ponto deste intervalo. Assim, o gráfico pode ser desenhado sem levantar o lápis do caderno. As funções da Figura 3.13 ambas são contínuas em $\mathbb{R}$, enquanto as funções da Figura 3.14 são ambas descontínuas.

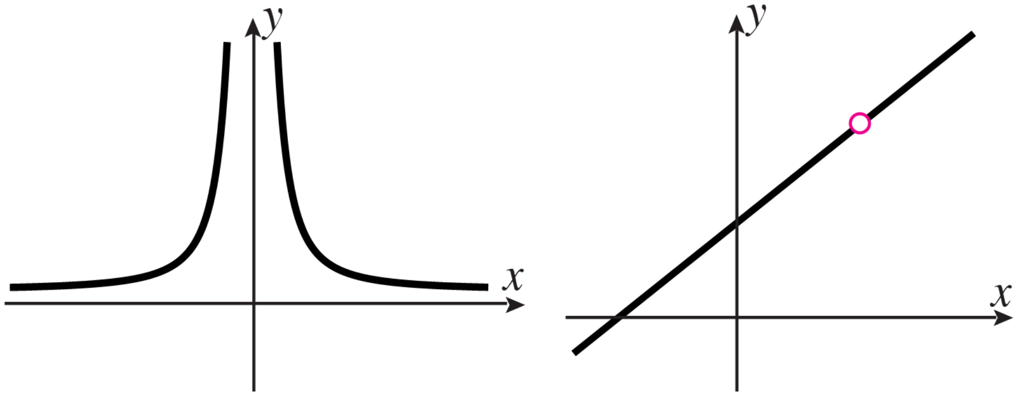


Figura 3.14: Os gráficos de duas funções descontínuas (próprio autor).

As funções contínuas são extremamente importantes. Podemos ver que se a função f tiver derivada em algum ponto x_0, neste ponto ela é contínua. Consequentemente, se f é descontínua em x_0, então neste ponto não há derivada, ou seja, $f'(x_0)$ não existe, e portanto não existe reta tangente à curva de f. Além disso, se f é uma função contínua em um intervalo fechado $[a,b]$, então f assume pelo menos um valor máximo global e um valor mínimo global, ou seja, f tem pelo menos um ponto máximo global e um ponto mínimo global. Este resultado é conhecido como o **Teorema do Valor Extremo** (STEWART, 2013).

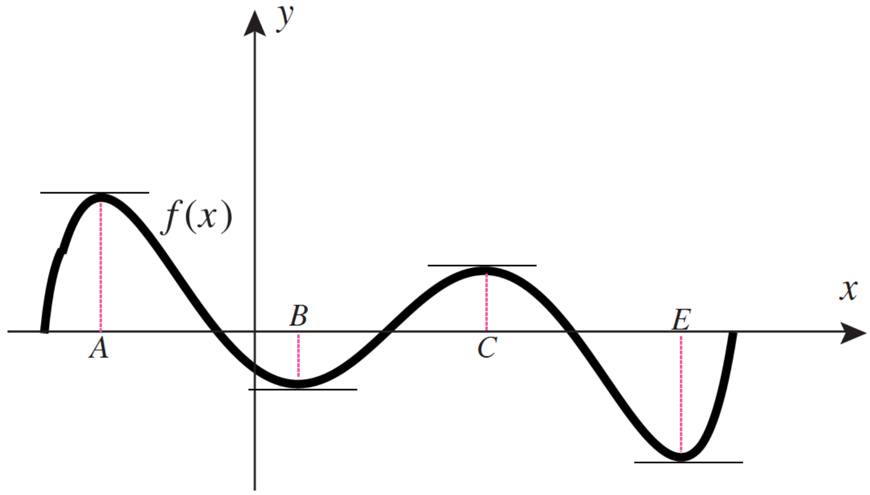


Figura 3.15: A demonstração geométrica do Teorema de Fermat (próprio autor).

Na Figura 3.15 podemos observar que nos pontos extremos A, B, C e E, as retas tangentes à curva de f são todas horizontais, ou seja, são retas sem inclinação. Consequentemente, a derivada de f nestes pontos zera. Assim, temos o conhecido **Teorema de Fermat** que diz:

Teorema 3.7 (Teorema de Fermat) *Se uma função f tiver um máximo ou mínimo (local ou global) em um ponto x_0 e se $f'(x_0)$ existir, então $f'(x_0) = 0$.*

Para uma demonstração deste teorema, o leitor interessado, pode consultar (STEWART, 2013). Se $f'(x_0) = 0$, nem necessariamente significa que x_0 é um ponto mínimo ou máximo. Por exemplo, vimos que a função $f(x) = x^3 + 2$ não possui pontos mínimos máximos e mínimos, enquanto $f'(0) = 0$. Além disso, vale destacar que a existência da derivada no ponto x_0 é essencial. A Figura 3.16 representa o gráfico da função f dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0, \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Esta função é chamada de **função módulo**, e, é denotada por $f(x) = |x|$. O ponto $x_0 = 0$ é um mínimo global para $f(x) = |x|$, mas, neste ponto, a função não tem derivada, ou seja, $f'(0)$ não existe uma vez que neste ponto o gráfico representa uma quina. Podemos ver que para todos os valores maiores que zero, a reta tangente à curva de f existe e tem a inclinação igual a 1, e, para os valores menores que zero, também há reta tangente e todas essas retas tem a inclinação igual a -1. É muito simples, através da definição da derivada, mostrar que $f'(0)$ não existe, mas neste trabalho, por estar voltado para o ensino médio, não pretendemos entrar muito em detalhes. Alguém pode dizer que o eixo das abscissas é tangente à curva de $f(x) = |x|$ na origem, porém isso não é verdade, uma vez que a reta $y = 0$ (o eixo dos x) e a curva de $f(x)$ não têm a mesma direção na origem (quem tiver interesse pode consultar Stewart (2013) para uma discussão mais detalhada).

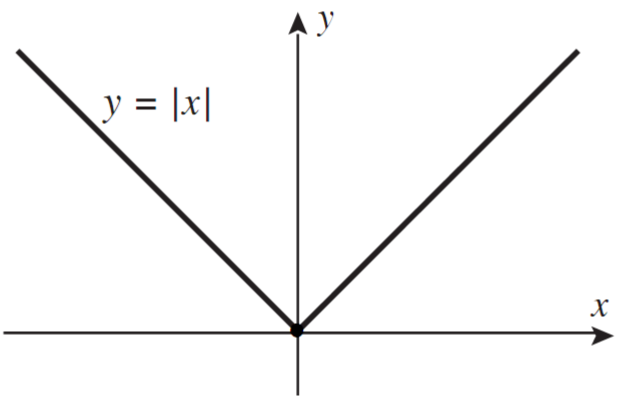


Figura 3.16: O gráfico de $f(x) = |x|$ (próprio autor).

Há, então, duas situações interessantes para um ponto x_0, são elas $f'(x_0) = 0$ e $f'(x_0)$ não existir. Combinando essa discussão com o Teorema de Fermat, podemos concluir que para encontrar os pontos extremos de uma função f, precisamos analisar os pontos do domínio de f em que a derivada não existe ou que a derivada existe e é igual a zero. Esses pontos são chamados de **pontos críticos**. Assim, podemos reformular o Teorema de Fermat e dizer que se uma função f tiver máximo ou mínimo (local ou global) em um ponto $x_0 \in Dom(f)$, então o ponto x_0 é um ponto crítico de f.

Vimos que o Teorema do Valor Extremo garante que uma função contínua f em um intervalo fechado $[a,b]$ possui pontos máximos e mínimos (globais). O Teorema de Fermat, por sua vez, diz que se f tiver máximo ou mínimo em um ponto $x_0 \in Dom(f)$, então o ponto x_0 é um ponto crítico de f. Portanto, para encontrar os pontos máximos e mínimos globais de uma função contínua f em um intervalo fechado $[a,b]$ basta analisar as extremidades do intervalo e os pontos críticos de f em (a,b). Desta forma, os pontos que oferecem o maior valor de f são os pontos máximos globais e os pontos que oferecem o menor valor de f são os pontos mínimos globais. Tal fato nos dá um procedimento para encontrar os pontos mínimos e máximos de uma função contínua em um intervalo fechado.

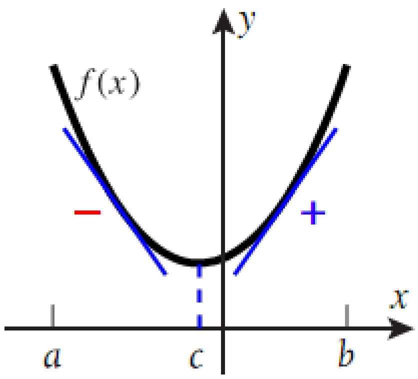


Figura 3.17: O Teste da Primeira Derivada (próprio autor).

Em certas situações não temos um intervalo fechado, ou simplesmente, não temos um intervalo. Nestas situações precisamos de um mecanismo um pouco diferente para determinar os pontos mínimos ou máximos de uma função. A função da Figura 3.17 é decrescente no intervalo $[a,c)$ e crescente no intervalo $(c,b]$. Podemos ver que no primeiro intervalo, todas as retas tangentes à curva $y = f(x)$, têm inclinações nagativas e no segundo intervalo inclinações positivas. Já que a inclinação de uma reta tangente a uma curva $y = f(x)$ em um ponto x_0 é na verdade $f'(x_0)$, podemos concluir que se $f'(x) < 0$ em todos os pontos x de um intervalo, neste intervalo a função é decrescente. Por outro lado, se $f'(x) > 0$ em todos os pontos x de um intervalo, então neste intervalo a função é crescente. A partir desta discussão temos o seguinte teorema.

Teorema 3.8 (Teste da Primeira Derivada) *Seja f uma função contínua que tem exatamente um único ponto crítico x_0 em um intervalo (a,b):*

Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a,c)$ e $f'(x) > 0$ para todo $x \in (c,b)$, a função f tem um mínimo no ponto x_0;

Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a,c)$ e $f'(x) < 0$ para todo $x \in (c,b)$, a função f tem um máximo no ponto x_0;

Se $f'(x)$ tem o mesmo sinal em ambos intervalos (a,c) e $c,b)$, ou seja, f' não troca de sinal, o ponto x_0 não é nem mínimo e nem máximo de f.

A seguir, utilizando os procedimentos propostos, resolvemos algumas situações-problemas propostas anteriormente.

Exemplo 3.9 (Situação–Problema 1 — Caixa com o Maior Volume) *A partir de uma chapa de alumínio de* 40 *por* 20 *centímetros, a mãe da Fernanda, quer construir uma caixa sem tampa e com o maior volume para guardar os brinquedos da Fernanda. Encontre as dimensões da caixa com o maior volume.*

Na Figura 3.8 podemos ver que caso sejam feitos cortes $x \times x$ nos quatro cantos da chapa, o volume da caixa (sem tampa) é dado por:

$$\begin{aligned} V(x) &= (40-2x)(20-2x)x, \qquad 0 \leq x \leq 10, \\ &= 4x^3 - 120x^2 + 800x,, \qquad 0 \leq x \leq 10. \end{aligned}$$

A função volume, $V(x)$, é uma função polinomial, e portanto contínua (Figura 3.18). Além disso, o intervalo $0 \leq x \leq 10$ é fechado. Logo, precisamos analisar as extremidades e os pontos críticos de V em $(0,10)$. Podemos ver que a derivada de V é dada por:

$$P'(x) = 12x^2 - 240x + 800.$$

Daí, $V'(x) = 0$ se, e somente se, $x = 10 + \frac{10}{\sqrt{3}}$ ou $x = 10 + \frac{10}{\sqrt{3}}$. Porém, $x = 10 + \frac{10}{\sqrt{3}}$ não pertence ao intervalo $[0,10]$, logo, a função V tem um único ponto crítico $x = 10 - \frac{10}{\sqrt{3}} \approx 4,23$ no intervalo $(0,10)$ uma vez que a derivada sempre existe. Assim, precisamos analisar os três pontos $0, 10$ e $10 - \frac{10}{\sqrt{3}}$. Calculando os valores que V toma nestes pontos temos:

$$P(0) = 0, \qquad P(10) = 0, \qquad P(10 - \frac{10}{\sqrt{3}}) = 1.539,60,$$

e podemos concluir que para ter uma caixa com o maior volume basta fazer cortes $4,23 \times 4,23$ nos quatro cantos. Com este corte, o volume (máximo) é dado por $1.539,60$. Na Figura 3.18

podemos ver que o gráfico de V atinge o seu topo no ponto $x \approx 4,23$ e neste ponto, a altura máxima (volume máximo) é aproximadamente igual a $1.539\ m^3$.

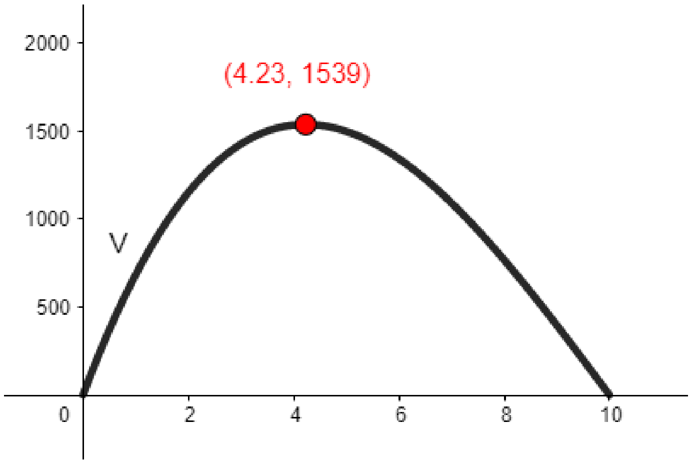


Figura 3.18: O gráfico de $V(x) = 4x^3 - 120x^2 + 800x,\ 0 \leq x \leq 10$ **(próprio autor).**

Com $x = 4,23$, a caixa com as dimensões ótimas tem $31,54m$, $11,54m$ e $4,23m$ como comprimento, largura e altura, respectivamente, conforme a Figura 3.19.

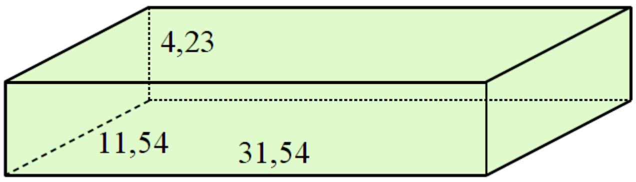


Figura 3.19: A caixa com as dimensões ótimas da situação–problame a 1 (próprio autor).

Exemplo 3.10 (Situação–Problema 2 — Caixa com o Menor Custo) *A partir de uma chapa de alumínio queremos construir uma caixa, com base quadrada, de 1* m^3 *com o menor custo possível. Encontre as dimensões da caixa.*

As três caixas apresentadas na Figura 3.9 têm $1\ m^3$ de volume. Além destas três, temos infinitas outras escolhas. O objetivo é usar o menor material possível para construir a caixa, ou seja, queremos minimizar a soma das áreas da base, tampa e laterais. Já que queremos que a base seja quadrada, considerando as dimensões da caixa x, x e y, a função que representa a área total é dada por:

$$A = 2x^2 + 4xy.$$

Por outro lado, $V = 1$, ou seja, $x^2y = 1$, daí $y = \frac{1}{x^2}$. Assim, podemos reescrever a função A apenas em termo de x:

$$\begin{aligned} A(x) &= 2x^2 + 4x\frac{1}{x^2}, \quad x > 0 \\ &= 2x^2 + \frac{4}{x}, \quad x > 0. \end{aligned}$$

Como o intervalo $(0, +\infty)$ não é fechado, não podemos usar o procedimento anterior, uma vez que as extremidades não fazem parte. Nesta situação, encontramos apenas os pontos críticos, ou seja, os pontos onde a derivada não existe e os pontos onde a derivada zera. Derivando a função A temos:

$$A'(x) = 4x - \frac{4}{x^2}.$$

Podemos ver que $A'(0)$ não existe, mas como $0 \notin Dom(A)$, logo, este ponto é descartado. Por outro lado, $A'(x) = 0$ se, e somente se, $x = 1$. Assim, concluímos que o único ponto crítico é $x = 1$. Precisamos mostrar que $x = 1$ minimiza mesmo A. Usando o Teste da Primeira Derivada podemos ver que a derivada, A', para valores menores que 1 é negativa e para os valores maiores que 1 é positiva (por exemplo, $A'(0,5) = -14 < 0$ e $A'(2) = 7 > 0$). Portanto, a função A, para valores menores que 1 é decrescente e para os valores maiores que 1 é crescente, indicando a existência de um fundo (mínimo) no ponto $x = 1$. Na Figura 3.20 podemos ver também que o gráfico de A atinge o seu menor valor no ponto $x = 1$, e neste ponto, a altura mínima, que representa o material total utilizada, é igual a 6 m^2 .

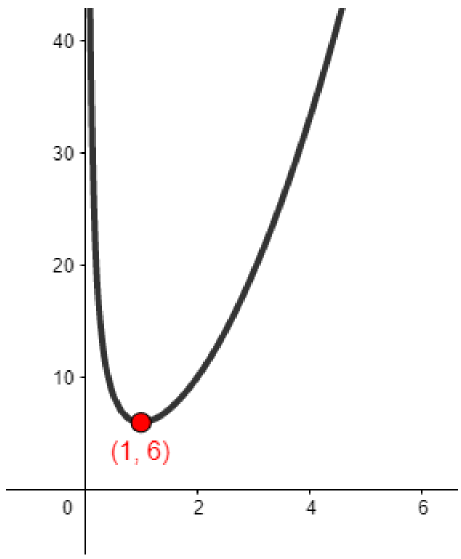


Figura 3.20: O gráfico de $A(x) = 2x^2 + \frac{4}{x}$**,** $x > 0$ **(próprio autor).**

Assim, concluímos que as dimensões da caixa ótima são iguais a 1 (Figura 3.21).

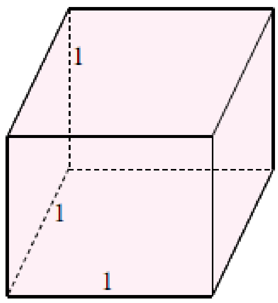


Figura 3.21: A caixa com as dimensões ótimas da situação–problema 2 (próprio autor).

Exemplo 3.11 (Situação–Problema 3 — Silo com o Menor Custo) *Uma empresa de montagem de estruturas de armazenagem de produtos agrícolas recebeu o pedido de montagem de um silo cilíndrico para um criador de gado de 8.000 m^3. A empresa, para aumentar o seu lucro, precisa minimizar o custo do metal utilizado para produzir o silo. Quais dimensões do silo que tem o menor custo de produção?*

As situações-problemas 2 e 3 têm o mesmo objetivo, e da forma análoga, podemos resolver a situação-problema 3. Podemos construir infinitos silos cilíndricos com o volume igual 8.000 m^3, mas o objetivo é construir um com o menor custo, ou seja, basta novamente, minimizar o material utilizado. Em outras palavras, precisamos minimizar a área total do silo (base, tampa e lateral). Na Figura 3.10, é claro que a área total é dada por:

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

onde r é o raio da base e h a altura do silo. Mas, já que o volume do silo é 8.000 m^3, ou seja, $\pi r^2 h = 8.000$, temos então que $h = \frac{8.000}{\pi r^2}$. A partir desta informação,

$$\begin{aligned} A(r) &= 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{8.000}{\pi r^2}, \quad r > 0, \\ &= 2\pi r^2 + \frac{16.000}{r}, \quad r > 0, \end{aligned}$$

uma função apenas em r. Novamente, precisamos encontrar os pontos críticos de $A(r)$ e analisá-los. Derivando A em r, temos então:

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{16.000}{r^2}.$$

A derivada para $r = 0$ não existe, porém $0 \notin Dom(A)$, logo, este ponto é descartado. Podemos ver que $A'(r) = 0$ se, e somente se, $r = \sqrt[3]{\frac{4000}{\pi}} \approx 10,8385$. Logo, o único ponto crítico de A é $r \approx 10,8385$. Usando o Teste da Primeira Derivada podemos ver que a derivada, A', para valores menores que $10,8385$ é negativa e para os valores maiores que $10,8385$ é positiva (por exemplo, $A'(10) \approx -34,34 < 0$ e $A'(11) \approx 5,99 > 0$). Portanto, a função A, para valores menores que $10,8385$ é decrescente e para os valores maiores que $10,8385$ é crescente. Logo, $r = 10,8385$ minimiza $A(r)$. Na Figura 3.22 podemos ver também que o gráfico de A atinge o seu mínimo valor no ponto $r = 10,8385$, e neste ponto, o material total utilizado para construir o silo é igual a $2214,32\ m^2$.

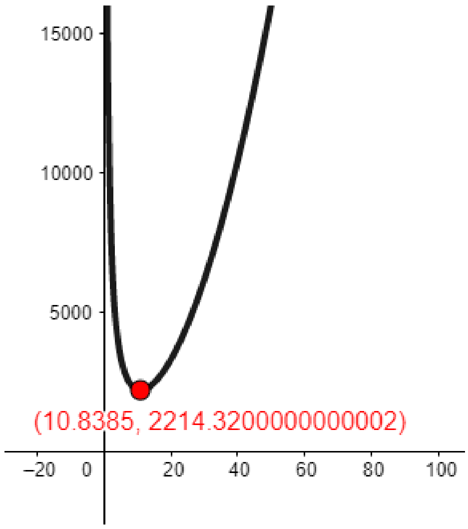


Figura 3.22: O gráfico de $A(r) = 2\pi r^2 + \frac{16.000}{r}$, $r > 0$ **(próprio autor).**

Já que $r \approx 10,8385$, a altura do silo com o menor custo de construção é igual $h \approx 21,6771$ (Figura 3.23).

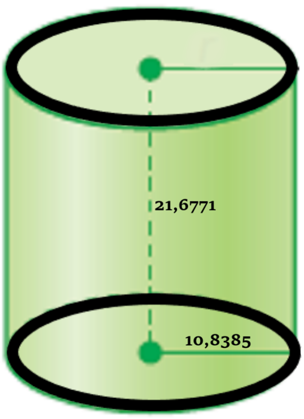


Figura 3.23: O silo com o menor custo de construção da situação–problema 3 (próprio autor).

Exemplo 3.12 (Situação–Problema 4 — Área de Lazer) *Um fazendeiro tem 400 metros de um tipo de tela alambrado e pretende separar uma região retangular da sua fazenda para* *construir uma área de lazer. Quais dimensões da maior área que ele pode separar da sua fazenda.*

A área de uma região retangular com comprimento igual a x e largura igual a y é dada por $A = xy$. Mas, já que o fazendeiro tem 400 metros de tela alambrado, $2x+2y = 400$, ou ainda, $x+y = 200$. Portanto, o objetivo é encontrar dois números positivos cuja soma é 200 e cujo produto é o máximo possível. De $x+y = 200$ temos $y = 200-x$, e assim, $A(x) = x(200-x)$. Deste modo, queremos maximizar a seguinte função:

$$A(x) = -x^2+200x, \quad 0 < x < 200.$$

A derivada de A, é dada por:

$$A'(x) = -2x+200,$$

que sempre existe, e além disso, é igual a zero se, e somente se, $x = 100$. Portanto, o único ponto crítico é $x = 100$. Analisando a derivada para valores maiores e menores que 100, podemos concluir que $x = 100$ minimiza A, pois $A'(50) = 100 > 0$ e $A'(150) = -100 < 0$, e pelo Teste da Primeira Derivada, a função A faz um topo (máximo) no ponto $x = 100$ (Figura 3.24)

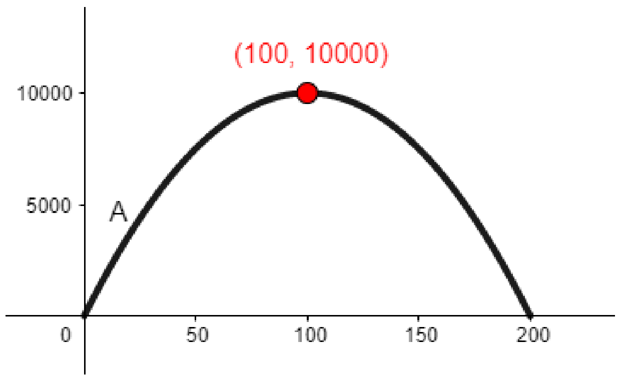


Figura 3.24: O gráfico de $A(x) = -x^2+200x$**,** $0 < x < 200$ **(próprio autor).**

Daí, $y = 200-100 = 100$. Logo, a maior região retangular que o fazendo pode separar da sua fazenda com 400 metros de tela alambrada é uma região quadrada de 100×100. Sendo assim, a área da região é igual a 10.000 m^2 (Figura 3.25).

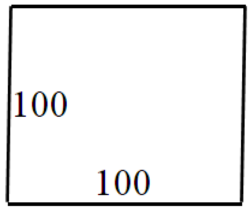


Figura 3.25: A área de lazer da situação–problema 4 (próprio autor).

Exemplo 3.13 (Situação–Problema 5 — Área de Descanso para os Caminhoneiros) *Uma concessionária que cuida de uma das rodovias brasileiras quer construir ao lado da rodovia uma área retangular de parada e descanso para os caminhoneiros. A área precisa ter 11.250 m^2 para poder atender o fluxo, e além disso, os três lados precisam ser cercados por tela alambrado. Quais dimensões da área para que o custo com tela seja o menor possível?*

As situações-problemas 4 e 5 também têm o mesmo objetivo, e de forma análoga, podemos resolver a situação-problema 5. Na Figura 3.26 podemos ver que a $xy = 11.250$ e a tela alambrada utilizada para cercar a região de descanso tem comprimento igual $x+2y$ uma vez que o lado voltado para rodovia não precisa ser cercado.

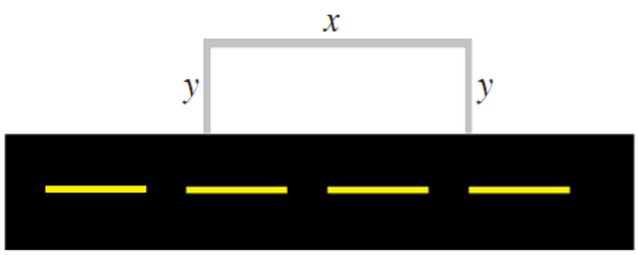


Figura 3.26: A área de descanso da situação–problema 5 (próprio autor).

De $xy = 11.250$ temos então que $y = \frac{11.250}{x}$. Sendo assim, o comprimento de tela necessária é dado por:

$$\begin{aligned} P(x) &= x + 2\frac{11.250}{x} \\ &= x + \frac{22.500}{x}, \qquad x > 0, \end{aligned}$$

que é uma função em x. Derivando esta função temos $P'(x) = 1 - \frac{22.500}{x^2}$. A derivada, P' não existe se $x = 0$, mas o ponto $x = 0$ não pertence ao domínio de P, logo, é descartado. Agora, $P'(x) = 0$ se, e somente se, $x = 150$. Acreditamos que $x = 150$ minimiza a função $P(x)$. Para verificar este fato usamos o Teste da Primeira Derivada. Podemos ver que para os valores menores que 150 a derivada, P' é negativa e para os valores maiores que 150 ela é positiva. Por exemplo, $P'(100) = -1,25 < 0$ e $P'(200) = 0,44 > 0$, indicando que a função P é decrescente para $x = 150$ e crescente logo depois deste ponto. Assim, a função faz um fundo (mínimo) no ponto $x = 150$. A Figura 3.27 ilustra essa situação. Observamos que no ponto $x = 150$, a função tem a menor altura, ou seja, o comprimento da tela utilizada, 150 metros, é o menor possível. Desta forma, $y = 75$ metros.

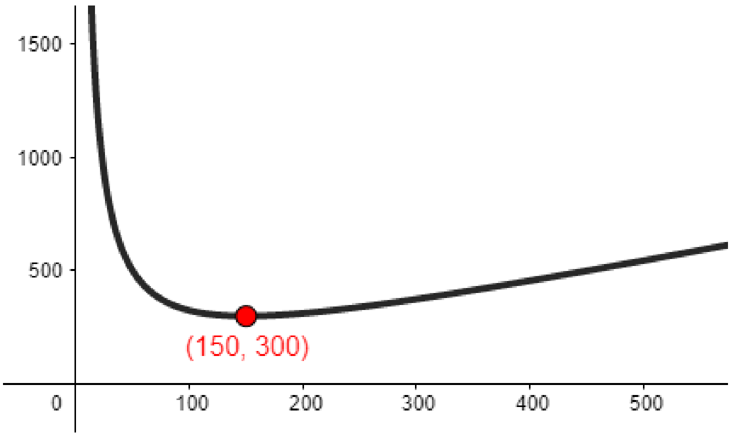


Figura 3.27: O gráfico de $A(x) = x + \frac{22.500}{x}$, $x > 0$ **(próprio autor).**

Exemplo 3.14 (Situação–Problema 7 — Problema de Aluguel) *Um hotel tem 250 apartamentos que podem ser sendo reservados. Se x unidades deste hotel forem reservados, o lucro mensal é dado por* $P(x) = -8x^2 + 3.200x - 80.000$, $0 \leq x \leq 250$. *Se você fosse o administrador deste hotel, quantos apartamentos deixaria para reservas para ter se o maior lucro mensal?*

A função lucro mensal, $P(x)$, é uma função polinomial, consequentemente, é contínua (Figura 3.28). Além disso, o intervalo $0 \leq x \leq 250$ é fechado. Logo, precisamos analisar as extremidades e os pontos críticos de P no intervalo $(0,250)$. Podemos ver que a derivada de P é dada por:

$$P'(x) = -16x + 3200.$$

Logo, $P'(x) = 0$ se, e somente se, $x = 200$. Este ponto é o único ponto crítico de P uma vez que $P'(x)$ sempre existe já que é também polinomial. Sendo assim, precisamos analisar os três pontos $0,250$ e 200. Calculando os valores que a função assume nestes pontos temos:

$$P(0) = -80.000, \qquad P(250) = 220.000, \qquad P(200) = 240.000,$$

podendo então concluir que o administrador precisa reservar 200 apartamentos para ter o maior lucro que será de 240.000 reais. Na Figura 3.28 podemos ver também que o gráfico de P atinge o seu valor máximo no ponto $x = 200$, e neste ponto, a altura máxima, ou seja, o lucro máximo, é igual a 240.000.

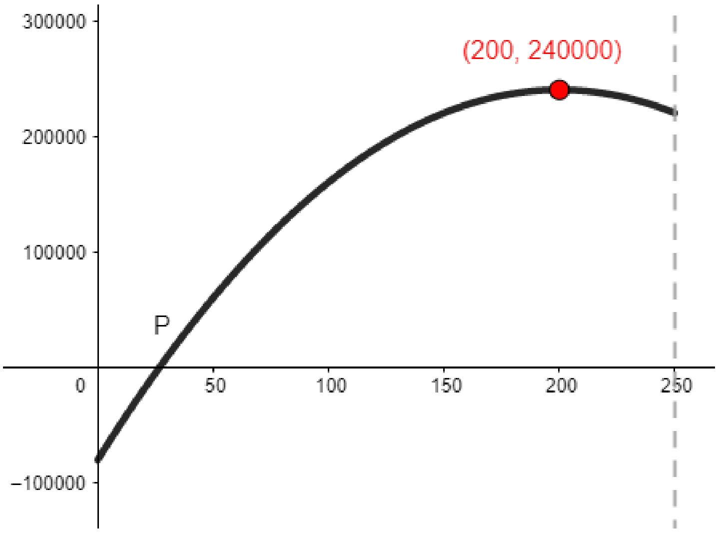


Figura 3.28: O gráfico de $P(x) = -8x^2 + 3.200x - 80.000,\ \ 0 \leq x \leq 250$ **(próprio autor).**

Neste capítulo, foi apresentado o conceito da derivada como a inclinação da reta tangente, a velocidade de um objeto ou a taxa de variação instantânea. Na sequência, foram apresentadas a definição formal da derivada, o cálculo das derivadas de funções elementares e as propriedades básicas da derivada. Como aplicações da derivada, mostramos como a partir do conceito da derivada, podemos encontrar os pontos mínimos e máximos (extremos) de uma função, os pontos em que a função tem fundos e topos, respectivamente.

Neste contexto, alguns problemas de otimização foram apresentados e tratados como de grande aplicabilidade em diversas situações cotidianas, em que o principal objetivo é encontrar o ponto extremo de uma função, como uma ferramenta de grande valia para o professor no ensino de matemática, procurando situações-problemas comuns do cotidiano para descrever e apontar modelos matemáticos. Diversas situações-problemas foram anunciadas e resolvidas, tanto geometricamente quanto através do conceito da derivada. Parte dessas situações-problemas foi abordada como experimentos práticos e didáticos interdisciplinares (de baixo custo) em sala de aula. Os resultados, as análises e as discussões dos resultados serão apresentados no Capítulo 5.

4 UMA INTRODUÇÃO AO GEOGEBRA

O software GeoGebra é um programa gratuito que combina os conceitos de geometria e álgebra, de modo dinâmico, permitindo uma boa visualização e exploração entre os elementos matemáticos de forma didática e interativa pelos estudantes. Foi criado por Markus Hohenwarter em 2001, como sua tese de doutorado, nos Estados Unidos, e desde então tem sido uma importante ferramenta de auxílio dos professores em sala de aula, que atualmente tem versões em diversos idiomas, dentre eles o português.

É interessante notar o nome "GeoGebra" é uma aglutinação das palavras geometria e álgebra, pois para toda forma algébrica existe uma correspondência gráfica visível, remetendo a ideia inicial de matemática dinâmica. Também, por ser um software gratuito e de fácil acesso,"o GeoGebra vem ao encontro de novas estratégias de ensino e de conteúdos de geometria, álgebra, cálculo e estatística, permitindo aos professores e alunos a possibilidade de explorar, conjecturar, investigar tais conteúdos na construção do conhecimento matemático" (BORBA et al., 2016)

É possível baixar o software GeoGebra nos mais diversos dispositivos, correspondendo aos sistemas operacionais, quer seja Windows ou Linux, computadores ou dispositivos móveis. Para baixar o programa basta acessar o site: https://www.geogebra.org/download ou ainda, fazer uso da versão online, que apresenta as mesmas funcionalidades e praticidades. Neste trabalho, fizemos o uso do modo online.

Vale ressaltar, da importância do uso de tecnologias e das facilidades que podem proporcionar, ampliando os horizontes e deixando as aulas mais atrativas e como consequência ganhando a atenção do estudante.

Segundo Borba et al. (2016),

> A aplicação deste software como uma ferramenta auxiliar representa uma metodologia importante para o ensino aprendizagem de matemática, pois os alunos mostraram uma melhor compreensão e interpretação diante do conceito matemático estudado. (BORBA et al., 2016)

Ainda, segundo Neto et al. (2020), o GeoGebra proporciona de forma dinâmica a visualização de expressões algébricas, fazendo com que o aluno consiga associar os conceitos algébricos com os geométricos com mais facilidade, e reforçando que "o GeoGebra não é focado na resolução das expressões algébricas, mais sim em sua representação gráfica" (NETO et al., 2020)

Abordaremos nesse capítulo, um pouco das funcionalidades do GeoGebra na sua versão online, dando ênfase principalmente nos recursos para maior compreensão dos problemas de otimização que serão tratados no próximo capítulo dessa dissertação. É possível acessar a versão online usando qualquer navegador através do link: https://www.geogebra.org/ e clicando na função iniciar calculadora:

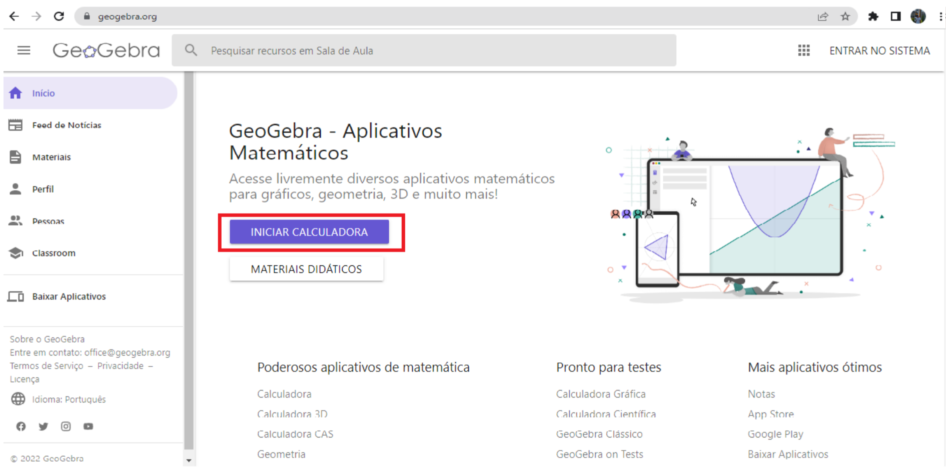


Figura 4.1: O primeiro contato com o ambiente do GeoGebra (próprio autor).

Ao realizar os primeiros procedimentos, temos a interface inicial, com diversos recursos prontos a serem explorados.

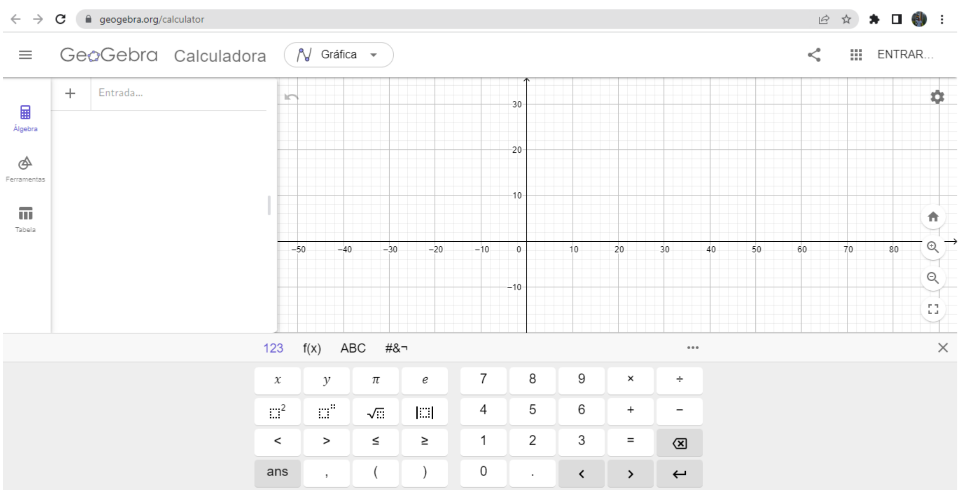


Figura 4.2: Ambiente do GeoGebra (próprio autor).

É interessante observar que no canto superior esquerdo existem algumas funções interessantes que são: álgebra, ferramentas e tabela. Na primeira opção, é possível inserir uma expressão, um texto, uma imagem ou ainda obter ajuda.

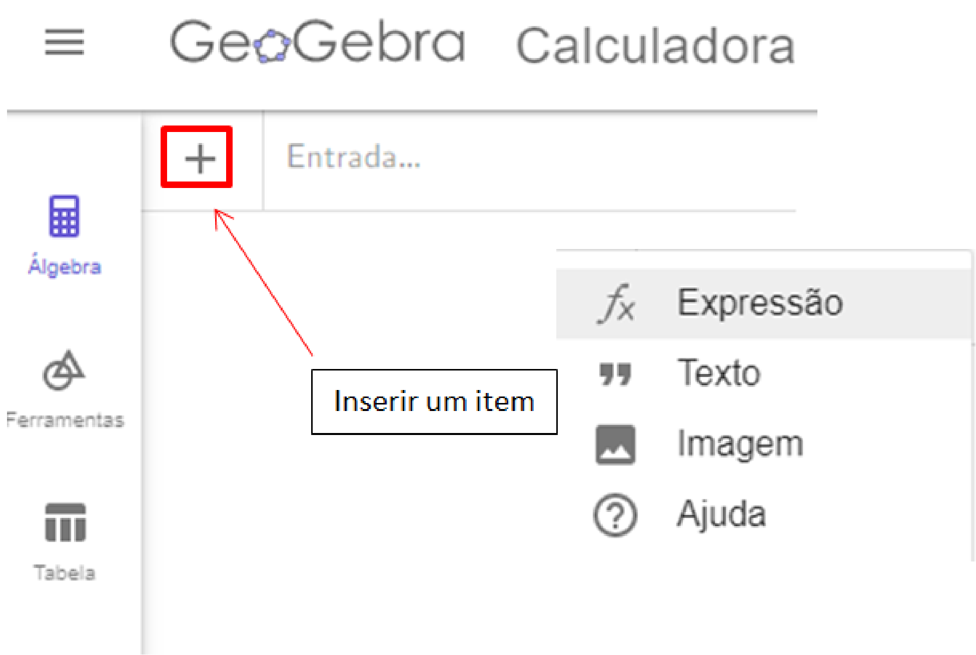


Figura 4.3: Ambiente do GeoGebra (próprio autor).

Como exemplo, inserimos a função $f(x) = 2x + 1$ e ao inserir o item "expressão", no campo entrada, obtemos o gráfico da função, como ilustra a figura abaixo:

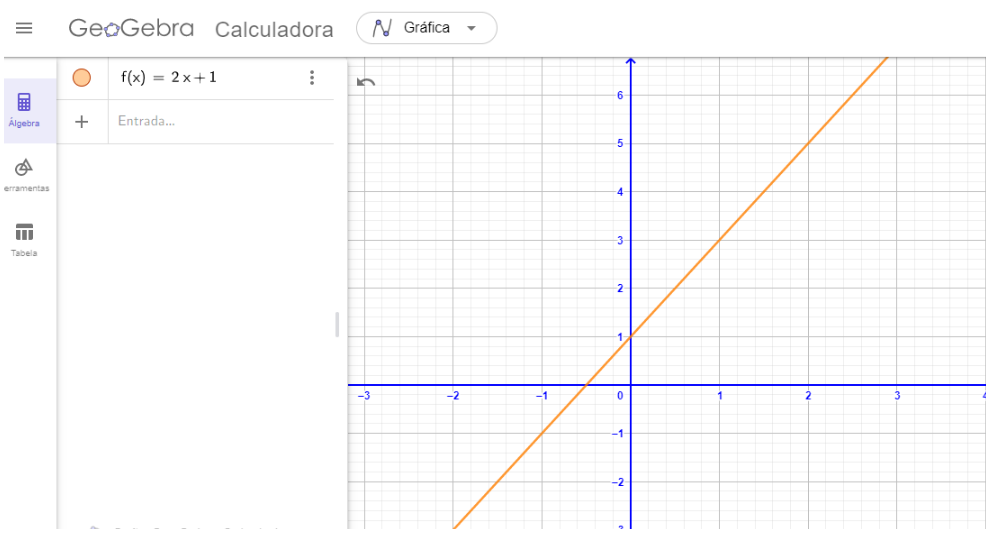


Figura 4.4: Gráfico de $f(x) = 2x + 1$ no GeoGebra (próprio autor).

Na opção "texto", podemos inserir uma palavra, expressão ou comentários pertinentes para melhor compreensão das ideias expressas no gráfico.

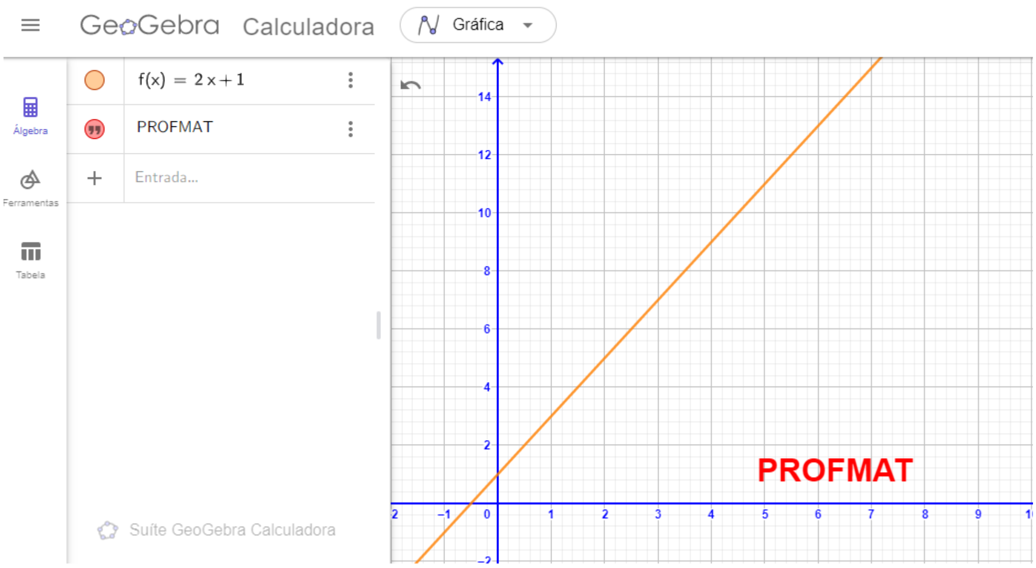


Figura 4.5: Inserção de um texto no ambiente do GeoGebra (próprio autor).

Já quando optamos por inserir uma imagem, abre-se uma janela para a escolha do arquivo que comumente está salvo no dispositivo. Inserimos como exemplo, o logo do PROFMAT junto ao gráfico da função e ao texto digitado.

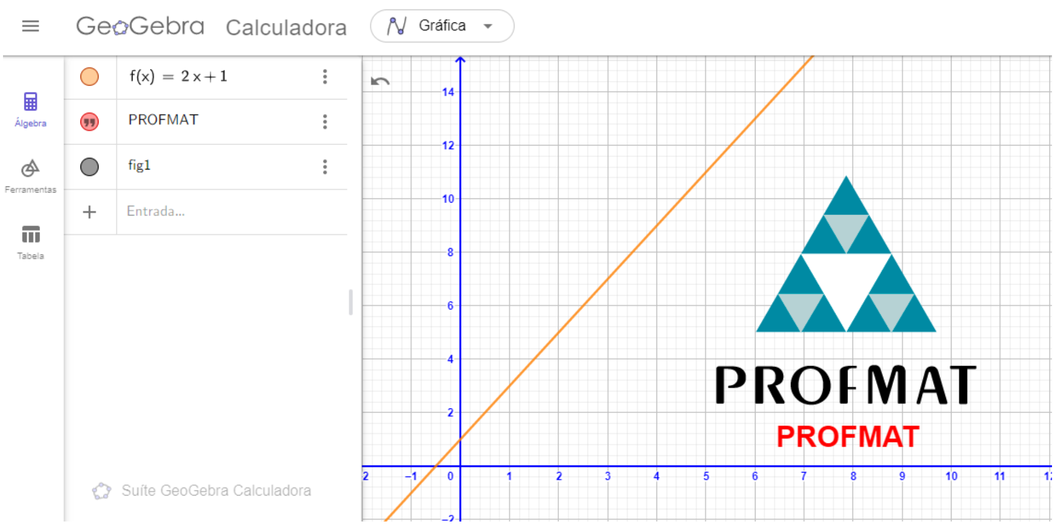


Figura 4.6: Inserção de uma imagem no ambiente do GeoGebra (próprio autor).

Cabe salientar que em todas essas opções, existe ainda um menu para formatar cada um desses itens. Como exemplo, temos que ao clicar em cima da função, podemos deixá-la conforme o que queremos apresentar, abrindo um novo campo com novas alternativas, como mostramos na Figura 4.7.

Podemos mudar também o formato do gráfico da função, usando linha contínua, tracejada, pontilhada e mudar a sua espessura para maior ou menor. (Figura 4.8).

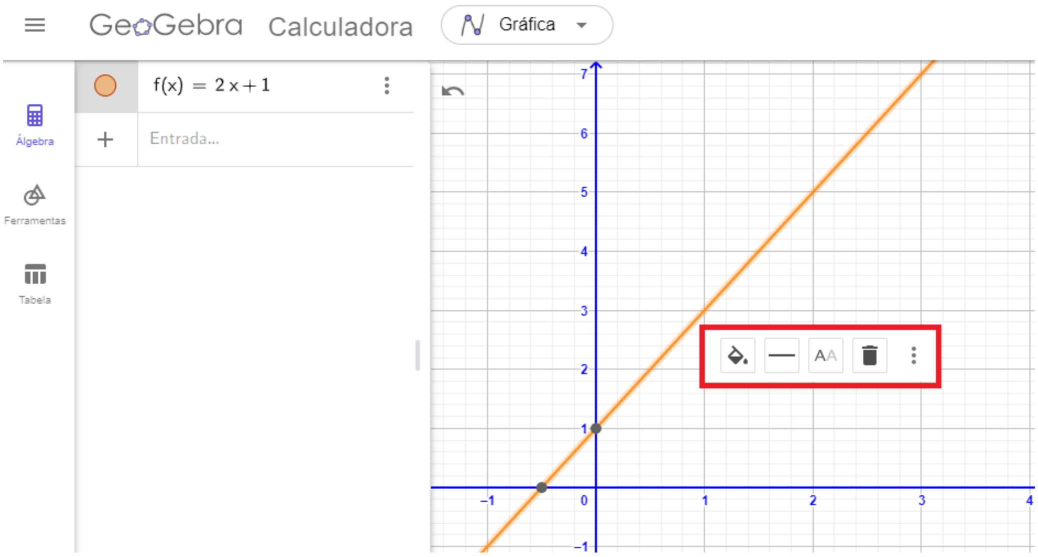


Figura 4.7: Configurações de uma função no ambiente do GeoGebra (próprio autor).

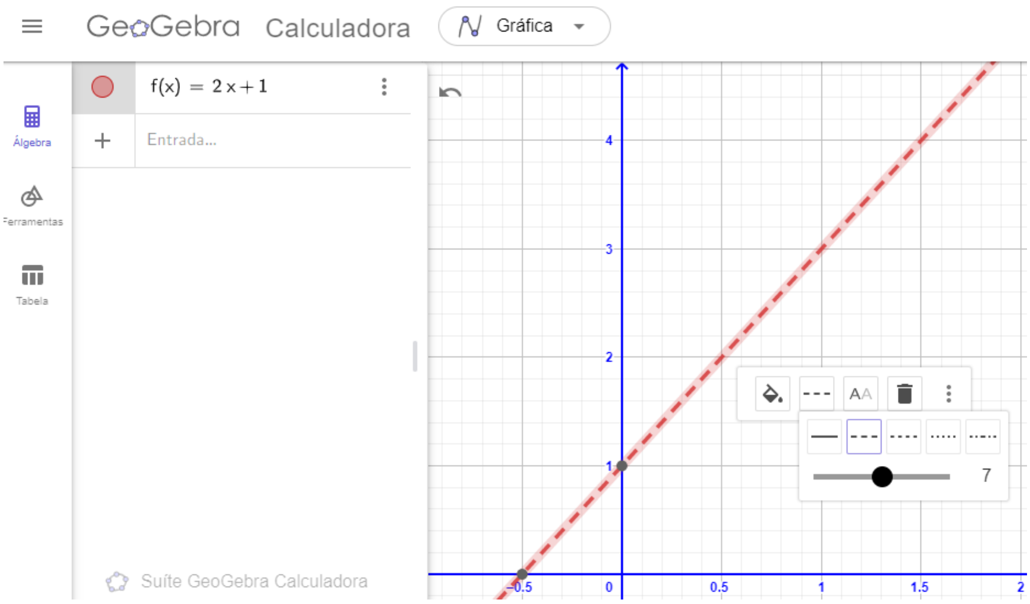


Figura 4.8: Configurações de uma curva no ambiente do GeoGebra (próprio autor).

O próximo item deste menu é adicionar o rótulo da função, isto é, o nome da função, que optamos neste caso, em chamar de FUNÇÃO AFIM; e ao clicar em exibir rótulo, o nome aparece em destaque junto a função, próximo ao eixo horizontal e ao clicar em exibir valor, dá-se ênfase a função em questão (Figura 4.9).

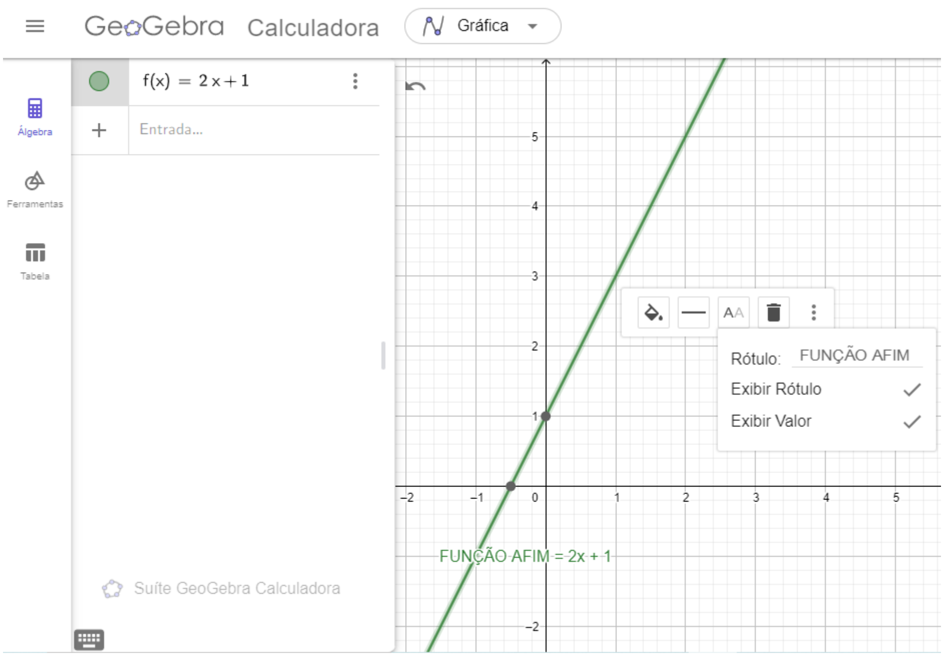


Figura 4.9: Inserção de um rótulo no ambiente do GeoGebra (próprio autor).

Temos ainda, as mais diversas funcionalidades do software GeoGebra em “Ferramentas”, das quais elencamos aqui algumas delas para fins didáticos e que contribuirão para a melhor realização das atividades por parte dos estudantes, ao manipular o aplicativo para otimizar as funções dos problemas a serem trabalhados. Dentre as diversas funções do campo “Ferramentas” temos, por exemplo, ferramentas básicas, editar, mídia, medições, pontos, construções, retas, polígonos, círculos, cônicas, transformar e outras funções. Iremos destacar três dessas funcionalidades. Em ferramentas básicas, temos:

Nesta seção, temos esses recursos interessantes a serem comentados. O primeiro é o item “ponto”, onde marcamos no plano cartesiano quaisquer pontos bastando clicar no local que for necessário, para gerar um ponto. Os outros dois itens que merecem destaque na lista são as “raízes” e “otimização”. As raízes, são os pontos em que a função zera e a otimização, quando selecionado, permite-nos a visualização de pontos de máximos e mínimos (Figura 4.11).

Também há a opção de configuração geral, localizado na parte superior direita da tela inicial do GeoGebra Calculadora. Ao clicar há diversas opções, tais como: exibir eixos, exibir malha, ajustar à malha, limpar todos os rastros, ampliar para enquadrar e configurações (Figura

Figura 4.10: O campo “Ferramentas Básicas” no ambiente do GeoGebra (próprio autor).

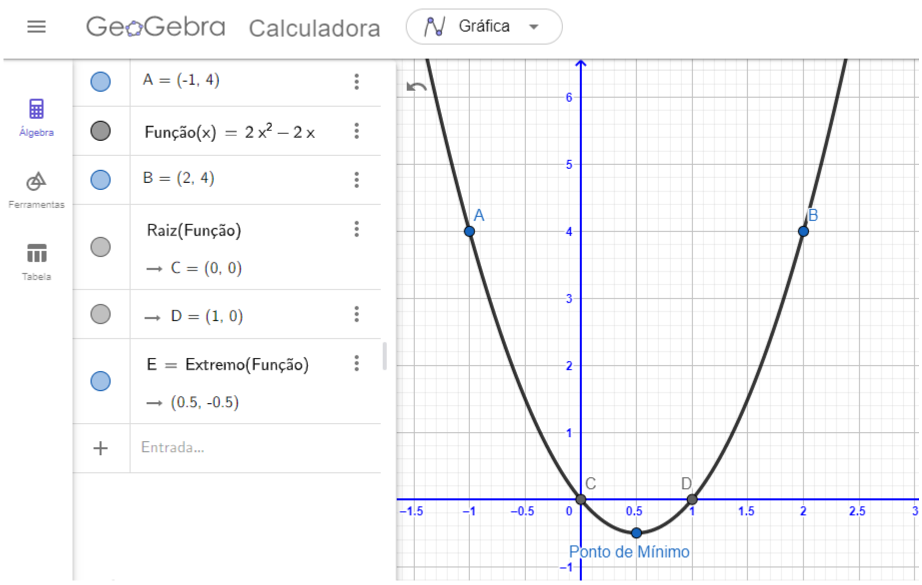


Figura 4.11: As ferramentas básicas “ponto”, “raízes” e “otimização” no ambiente do GeoGebra (próprio autor).

4.12).

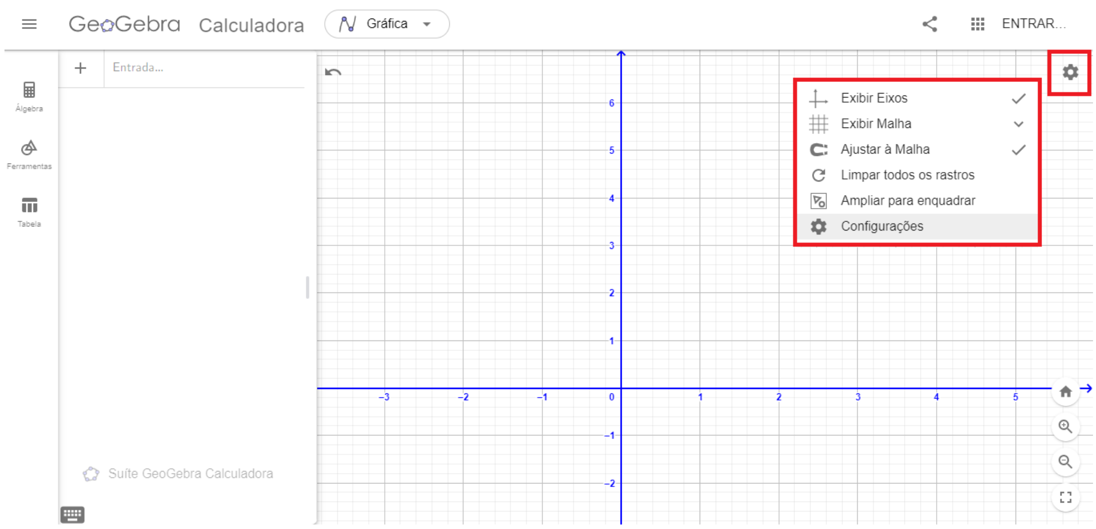


Figura 4.12: A posição e opções da configuração geral no ambiente do GeoGebra (próprio autor).

Ao selecionar o item "Exibir Malha" temos alguns tipos de malhas, além da malha quadriculada, como a malha isométrica e polar (Figura 4.13).

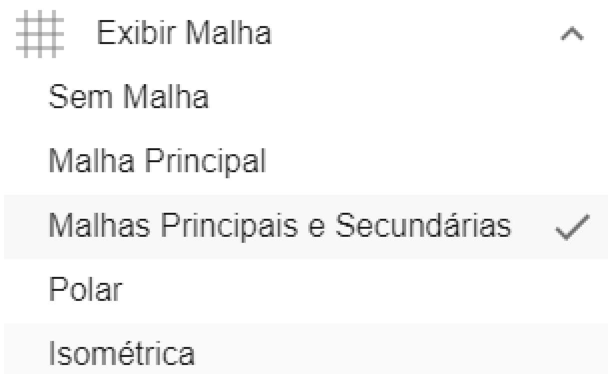


Figura 4.13: Inserção de malhas nos gráficos no ambiente do GeoGebra (próprio autor).

Nas configurações, temos a possibilidade de formatar os eixos coordenados (descrevendo o rótulo, cor, estilo) bem como organizar as dimensões dos eixos, escolher o plano de fundo da malha, as direções dos eixos, a exibição dos números (Figura 4.14).

Além dos recursos mostrados, o GeoGebra dispõe de teclado próprio, podendo o usuário optar por usá-lo ou o teclado do computador ou dispositivo móvel. Tal teclado do GeoGebra concentra alguns recursos de fácil acesso. (Figura 4.15).

E ao clicar no item destacado abaixo (Figura 4.16), abre-se uma lista de funções, operações e comandos que é possível utilizar como ferramentas de apoio ao que se deseja obter

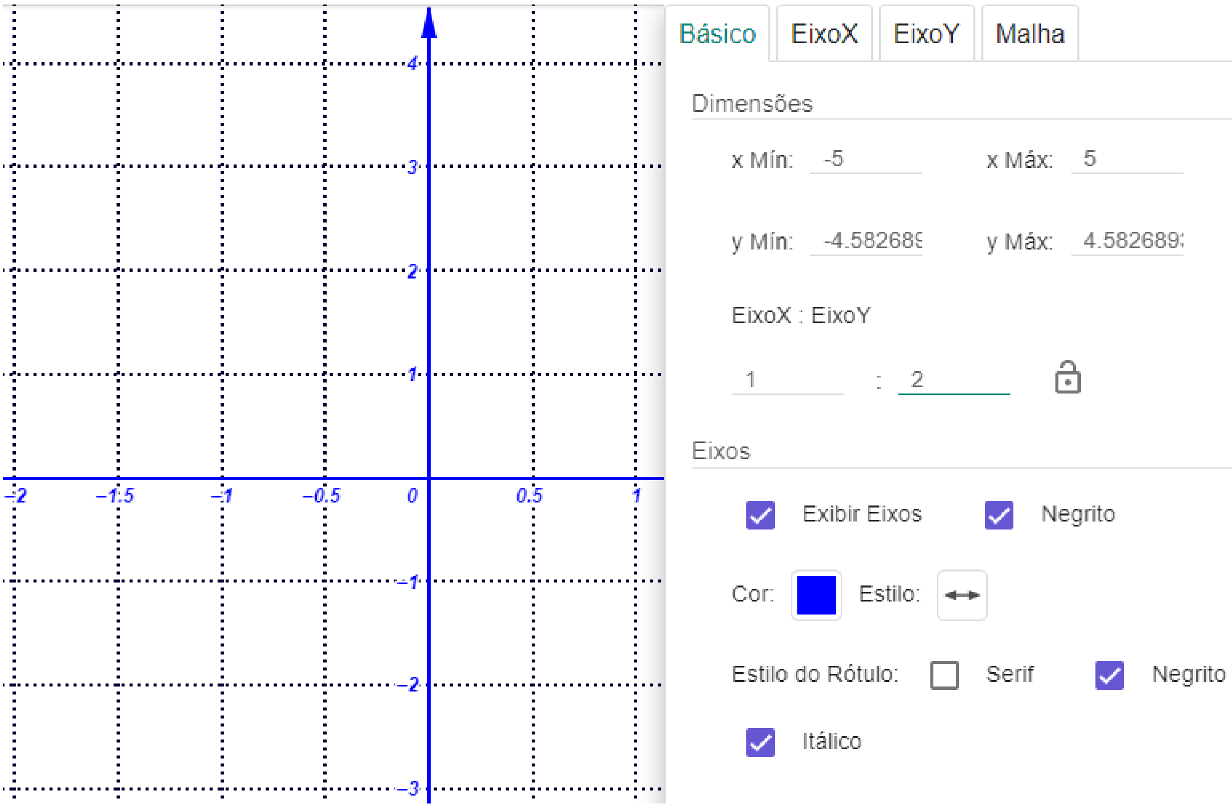


Figura 4.14: Formatação dos eixos coordenados no ambiente do GeoGebra (próprio autor).

Figura 4.15: Existência de um teclado virtual no ambiente do GeoGebra (próprio autor).

utilizando o programa. Além de símbolos matemáticos, o teclado conta com o alfabeto grego, comumente usado em expressões para formular diversas situações.

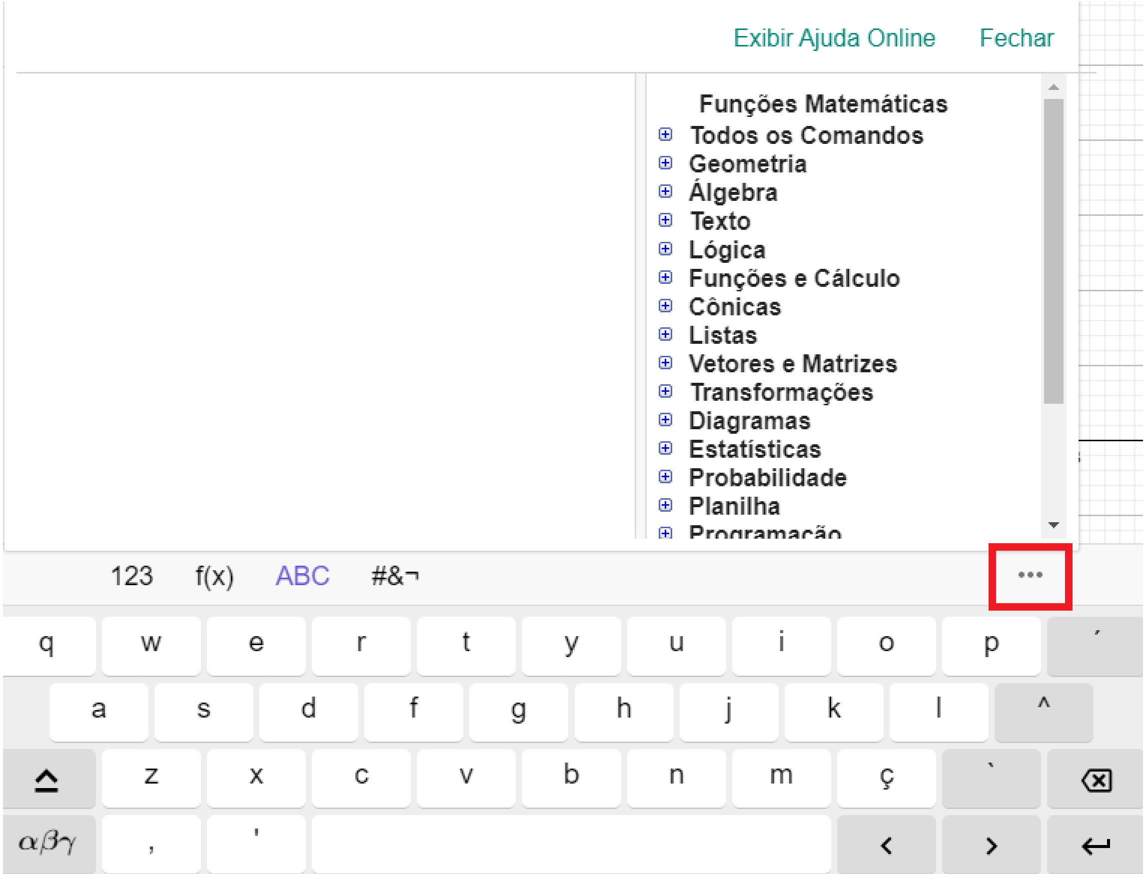


Figura 4.16: Próprio Autor

Existe uma vasta gama de funções que podem ser exploradas de forma online no site do software GeoGebra. Tomando como base as características e os principais aspectos da Calculadora, são oferecidas e estão a disposição outros formatos do programa, que permitem outros desenvolvimentos e formas de trabalho, como por exemplo, objetos de estudos na terceira dimensão, gráficos em 3D, animações e quebra-cabeças relacionados a teoremas matemáticos e desafios lógicos.

Dos tipos de calculadoras disponíveis, usamos a calculadora gráfica, pois a ênfase dessa pesquisa consiste em trabalhar com a análise de funções.

Após a manipulação dos dados matemáticos e a exploração dos recursos do software, é possível salvar os trabalhos realizados, bem como compartilhá-los ou imprimí-los de modo que o resultado final das expressões algébricas juntamente com suas respectivas representações gráficas e demais dados adicionais podem ser utilizados como recursos em outras situações.

Dentre as diversas funções do software, é possível notar a sua importância e o mo-

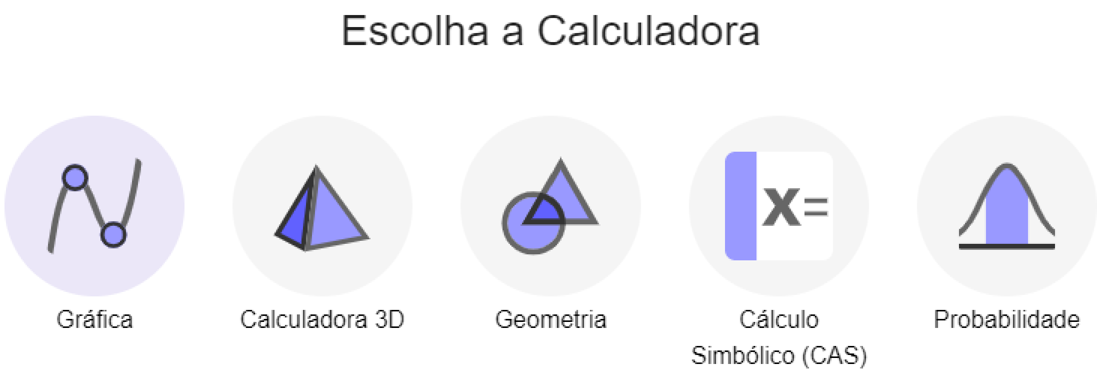


Figura 4.17: Próprio Autor

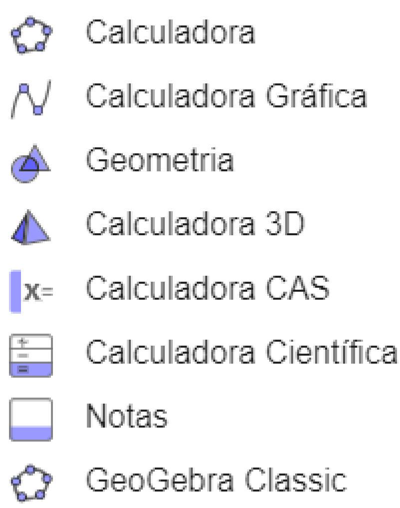


Figura 4.18: Próprio Autor

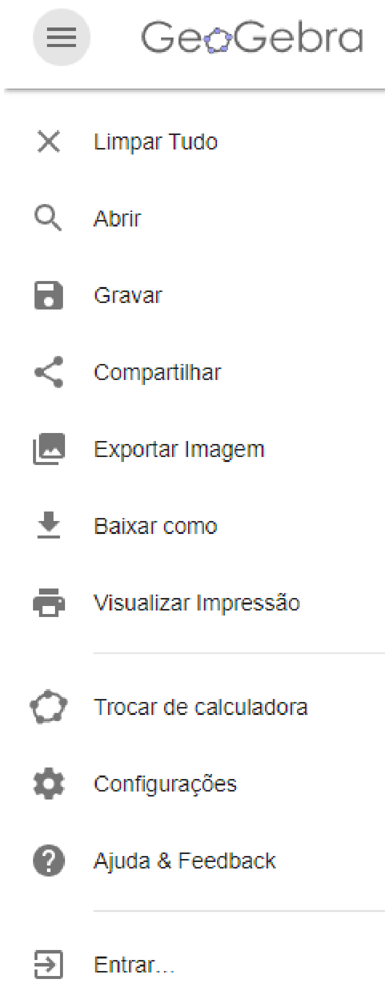


Figura 4.19: Próprio Autor

tivo pelo qual tem ganhado espaço nas salas de aulas nos últimos anos, pois é um excelente recurso didático capaz de despertar no estudante interesse pelo novo e assim a busca de novos horizontes, além de dinamizar conceitos e contextos com a sua aplicação.

5 APLICAÇÃO DOS PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO COMO UMA ABORDAGEM INTERDISCIPLINAR

5.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo descreve o passo a passo das atividades realizadas com os estudantes do 3° ano, Formação de docentes, do Colégio Estadual Carolina Lupion EFMN, em que foram trabalhados os conceitos de função através de materiais confeccionados para a sua melhor visualização e com aplicação direta aos problemas de otimização.

Como já citado anteriormente, a motivação de trazer os problemas práticos de otimização se deve ao fato de proporcionar ao estudante um aprendizado mais sólido com relação ao tema de funções, que muitas vezes é abordado de modo abstrato e sem qualquer relação aparente com a realidade do aluno.

Após o recrutamento dos discentes, foi observado e respeitado todos os parâmetros do comitê de Ética da UTFPR, em que foi entregue aos participantes os Termos de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) e o Termo de Assentimento Livre e Esclarecido (TALE). Vale observar também, que a aplicação das atividades foram realizadas em contraturno dos alunos, no colégio, no período da manhã, seguindo o cronograma descrito pelo TCLE.

Ainda a aplicação, foi dividida em seis encontros presenciais, sendo que nesse processo foram realizadas duas avaliações diagnósticas, que se encontram no anexo deste trabalho, sendo uma no primeiro encontro e outra no último encontro, contendo questões de múltipla escolha e discursivas sobre o tema, para analisar e entender a opinião dos alunos sobre o objeto de estudo em questão.

O objetivo dos questionários é observar a melhora no aprendizado dos estudantes e se eles ficaram estimulados a querer saber mais; e se, a pesquisa impactou os alunos e sua compreensão sobre o conceito de função e sua aplicabilidade.

Descreveremos as atividades realizadas pelos estudantes em cada um dos encontros e em paralelo, os resultados obtidos que valem a pena dar atenção em cada momento, a fim de elucidar cada etapa da atividade.

5.2 PRIMEIRO ENCONTRO – QUESTIONÁRIO INICIAL (20/04/2022)

O primeiro encontro com os estudantes ocorreu no dia 20 de abril de 2022, nas dependências do colégio, em uma das salas de aulas teóricas às 7h30 da manhã. Neste encontro tivemos que a participação de 27 estudantes.

Após acolhimento de todos em sala, foi comentado o propósito inicial desse projeto; e abordei a importância de se fazer uma graduação e seguir para programas de mestrado e doutorado, já que todos os presentes eram alunos do 3° ano, tudo de modo rápido, incentivando-os a estarem presentes nos próximos encontros, pois estavam receosos pelo fato de ser uma atividade de matemática e não conseguirem realizar as propostas.

Figura 5.1: Avaliação Diagnóstica - Primeiro Encontro

Assim, após a fala inicial, foi entregue o questionário inicial (Anexo I) para que pudessem responder de modo individual e anônimo, deixando-os sempre a vontade, caso não soubessem responder alguma questão. Vale ressaltar, que optamos por chamar este primeiro momento de questionário e não de avaliação (diagnóstica), pois poderia impactar negativamente os estudantes de modo a pensarem que seriam avaliados, enquanto que o objetivo central é observar sua familiariedade com o tema e seus pareceres a respeito da área em estudo.

Figura 5.2: Realização da Avaliação Diagnóstica

Após alguns instantes, como modo de deixá-los ainda mais tranquilos e respondessem com atenção, para melhor análise dos dados, cada um ganhou um chocolate (bombom) a fim de quebrar aquele “ar” de prova ou “tensão” por se tratar de matemática.

A medida que foram terminando o questionário, foram sendo dispensados, observando que a maioria utilizou o tempo máximo de 2h30, devido a tentativa de resolver as situações problemas apresentadas no anexo.

5.3 SEGUNDO ENCONTRO (25/04/2022)

O segundo encontro consiste em analisar os conhecimentos prévios dos estudantes sobre funções, observando o que lembram sobre o assunto e qual a importância que dão ao tema, e através desses parâmetros desenvolver o conceito de função e a classificação de cada função, retomando a ideia de conjuntos, sejam eles numéricos ou não, definindo assim domínio e imagem.

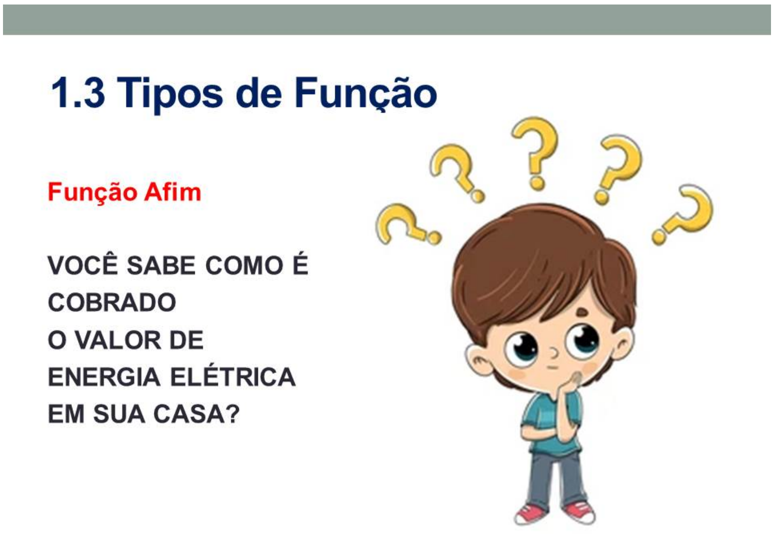
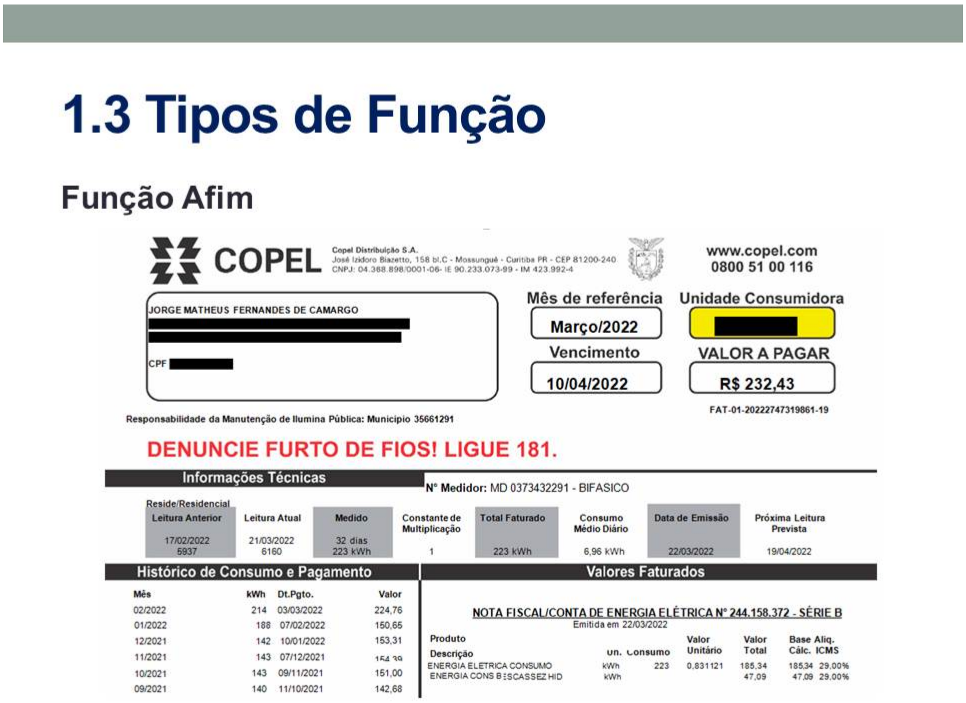


Figura 5.3: Slide da aula sobre funções. Próprio autor

A aula deve ser ministrada, em sala teórica, de modo a despertar o interesse nos estudantes e a medida que as definições vão sendo retomadas, em especial de função afim, linear, quadrática e cúbica, trazer um rol de perguntas sobre funções.

Trabalhar exemplos práticos sobre funções, tais como exemplo de função afim, onde pode-se trabalhar com a conta de luz de nossas casas, e para melhor visualização dos estudantes, dar um modelo de talão para cada estudante observar como é feito o cálculo do valor a ser cobrado, e por meio de algumas perguntas instigá-los a pensar no assunto e levá-los a perceber da importância das funções no nosso cotidiano.

5.3.1 A COPEL E A FUNÇÃO AFIM



1.3 Tipos de Função

Função Afim

COPEL

Copel Distribuição S.A.
José Izidoro Biazetto, 158 bl.C - Mossunguê - Curitiba PR - CEP 81200-240
CNPJ: 04.368.898/0001-06- IE 90.233.073-99 - IM 423.992-4

www.copel.com
0800 51 00 116

JORGE MATHEUS FERNANDES DE CAMARGO
[redacted]
CPF [redacted]

Mês de referência: Março/2022
Unidade Consumidora: [redacted]
Vencimento: 10/04/2022
VALOR A PAGAR: R$ 232,43

FAT-01-20222747319861-19

Responsabilidade da Manutenção de Ilumina Pública: Municipio 35661291

DENUNCIE FURTO DE FIOS! LIGUE 181.

Informações Técnicas

N° Medidor: MD 0373432291 - BIFASICO

Reside/Residencial

Leitura Anterior	Leitura Atual	Medido	Constante de Multiplicação	Total Faturado	Consumo Médio Diário	Data de Emissão	Próxima Leitura Prevista
17/02/2022 5937	21/03/2022 6160	32 dias 223 kWh	1	223 kWh	6,96 kWh	22/03/2022	19/04/2022

Histórico de Consumo e Pagamento

Mês	kWh	Dt.Pgto.	Valor
02/2022	214	03/03/2022	224,76
01/2022	188	07/02/2022	150,65
12/2021	142	10/01/2022	153,31
11/2021	143	07/12/2021	154,39
10/2021	143	09/11/2021	151,00
09/2021	140	11/10/2021	142,68

Valores Faturados

NOTA FISCAL/CONTA DE ENERGIA ELÉTRICA N° 244.158.372 - SÉRIE B
Emitida em 22/03/2022

Produto Descrição	Un.	Consumo	Valor Unitário	Valor Total	Base Cálc.	Aliq. ICMS
ENERGIA ELETRICA CONSUMO	kWh	223	0,831121	185,34	185,34	29,00%
ENERGIA CONS B ESCASSEZ HID	kWh			47,09	47,09	29,00%

Figura 5.4: Exemplo de conta de energia elétrica

a) Qual foi o consumo neste mês?

b) Qual é o valor pago por kWh consumido?

c) Há algum valor adicional, além do valor de kWh consumido?

d) Escreva uma função, que representa o valor da fatura de energia elétrica.

e) Qual será o valor a ser pago, se o consumo for de 156 kWh?

E, se for 265 kWh?

f) Consulte o consumo na fatura dada e verifique se o valor a pagar está correto.

5.3.2 O PROBLEMA DAS LARANJAS

Após construir a ideia de função afim, observar a função linear, que também está a nossa volta, como no exemplo da pesagem de frutas e legumes de uma quitanda, em que o princípio que gera o preço a ser pago, é o da função linear.

Figura 5.5: Problemas das laranjas

a) Quanto custa 1 kg de laranja?

b) Quanto pagará uma pessoa por 4 kg de laranja? E se pegar 4 kg e meio?

c) Escreva uma função que representa o preço a pagar em função da quantidade adquirida.

5.3.3 FUNÇÃO QUADRÁTICA

Retomar conceitos da função quadrática, através de um exemplo do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

(ENEM / 2021) Uma empresa de chocolates consultou o gerente de produção e verificou que existem cinco tipos diferentes de barras de chocolate que podem ser produzidas, com os seguintes preços no mercado:

- Barra I: R$ 2,00;
- Barra II: R$ 3,50;
- Barra III: R$ 4,00;
- Barra IV: R$ 7,00;
- Barra V: R$ 8,00.

Analisando as tendências do mercado, que incluem a quantidade vendida e a procura pelos consumidores, o gerente de vendas da empresa verificou que o lucro L com a venda de barras de chocolate é expresso pela função

$L(x) = -x^2 + 14x - 45,$

em que x representa o preço da barra de chocolate.

A empresa decide investir na fabricação da barra de chocolate cujo preço praticado no mercado renderá o maior lucro

Nessas condições, a empresa deverá investir na produção da barra

a) I

b) II

c) III

d) IV

e) V

5.3.4 FUNÇÃO CÚBICA

Concluindo a aula com alguns princípios da função cúbica, onde é interessante chamar a atenção do estudante para participar da próxima aula, na qual será aplicado na prática os cálculos para a construção de uma caixa com maior volume através de uma chapa retangular.

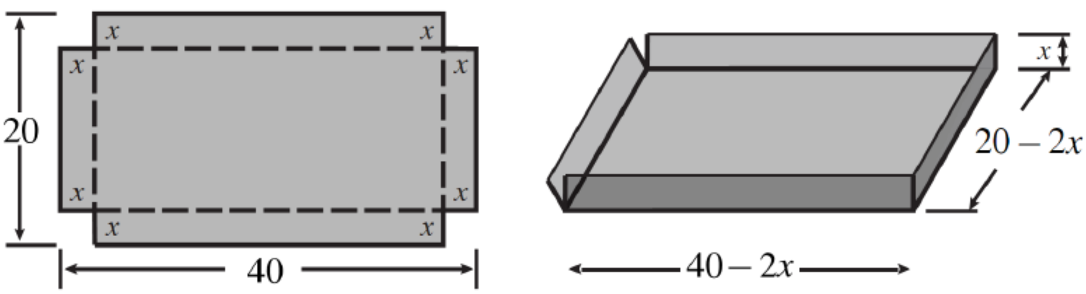


Figura 5.6: Construção da caixa de maior volume

(EXEMPLO DE FUNÇÃO CÚBICA)Temos uma chapa de alumínio de 40 por 20 metros e que queremos construir uma caixa sem tampa superior que ela tenha o maior volume. Encontre as dimensões dessa caixa.

5.4 TERCEIRO ENCONTRO (26/04/2022)

O terceiro encontro com os estudantes é marcado no laboratório de informática, no qual o objetivo principal é a construção de caixas sem tampa de maior volume a partir de chapas retangulares.

Iniciando a aula, através de um problema envolvendo o tema, imaginando que trabalhamos em uma empresa, e todos os presentes são engenheiros responsáveis na fabricação de uma caixa que apresentasse maior volume, sabendo que terão que recortar os cantos da chapa para poder moldar a caixa, tendo como material disponível para construção uma chapa.

Então, segue que a proposta baseia-se em duas etapas: a primeira consiste em dividir os estudantes em grupos e deixá-los pensar na construção da caixa, conversando entre eles e sem a interferência do professor responsável, e por fim a segunda etapa consiste em executar a construção das caixas.

A caixa modelo de maior volume segue representada na figura a seguir.

Figura 5.7: Caixa com maior volume

Em seguida, os participantes apresentam algumas informações do projeto executado por eles.

1. Quais são as dimensões da chapa para a criação da caixa?
2. Qual é a medida dos lados dos quadrados recortados dos cantos da chapa?
3. Qual é a medida dos lados da caixa criada pelo grupo?

4. Qual é o volume da caixa?

5. A caixa criada pelo grupo apresenta maior volume?

6. Removendo quadrados de lado x dos quatro cantos da chapa e dobrando as abas resultantes, escreva uma função para representar o volume da caixa.

Com todas as etapas realizadas, o professor orienta e apresenta a caixa de maior volume, explicando como obtê-la e os cálculos envolvidos, e estando no laboratório de informática, apresentar aos estudantes o GeoGebra online, ensinando-os algumas funcionalidades para observar os pontos de máximo da função encontrada por eles através dos recortes da caixa.

Na segunda etapa, por sua vez, é dada uma nova chapa aos alunos e agora, usando os conhecimentos aplicados na construção da primeira caixa, levando em consideração a experiência da tentativa anterior, construir a nova caixa com maior volume, usando o software GeoGebra para obter os dados com mais facilidade.

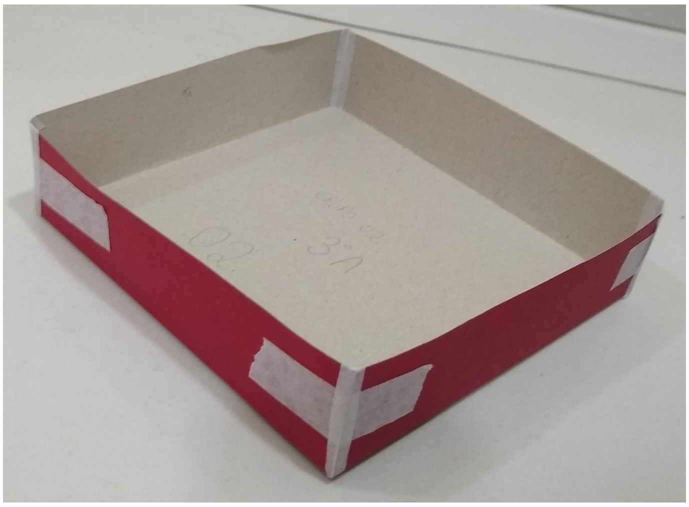


Figura 5.8: Caixa com maior volume

Novamente, é interessante anotar os dados obtidos pelos alunos para serem trabalhados alguns conceitos importantes e verificar se obtiveram êxito nos resultados.

1. Quais são as dimensões da chapa para a criação da caixa?

2. Qual é a medida dos lados dos quadrados recortados dos cantos da chapa?

3. Qual é a medida dos lados da caixa criada pelo grupo?

4. Qual é o volume da caixa?

5. A caixa criada pelo grupo apresenta maior volume?

6. Removendo quadrados de lado x dos quatro cantos da chapa e dobrando as abas resultantes. Escreva uma função para representar o volume da caixa.

5.5 QUARTO ENCONTRO (02/05/2022)

5.5.1 MAIOR ÁREA COM PALITOS

No quarto encontro, deve-se trabalhar o seguinte problema: Suponha que temos 24 palitos de fósforo e queremos criar um retângulo com a maior área sem quebrar os palitos. Qual a área desse retângulo?

Com a exposição do problema, é dado aos grupos 24 palitos de fósforos e alguns quadradinhos coloridos representando unidades de área, assim eles devem discutir qual o retângulo de maior área que podem formar, e para verificar a área preenchem com os quadrados coloridos.

A ideia inicial é que os estudantes cheguem no seguinte resultado:

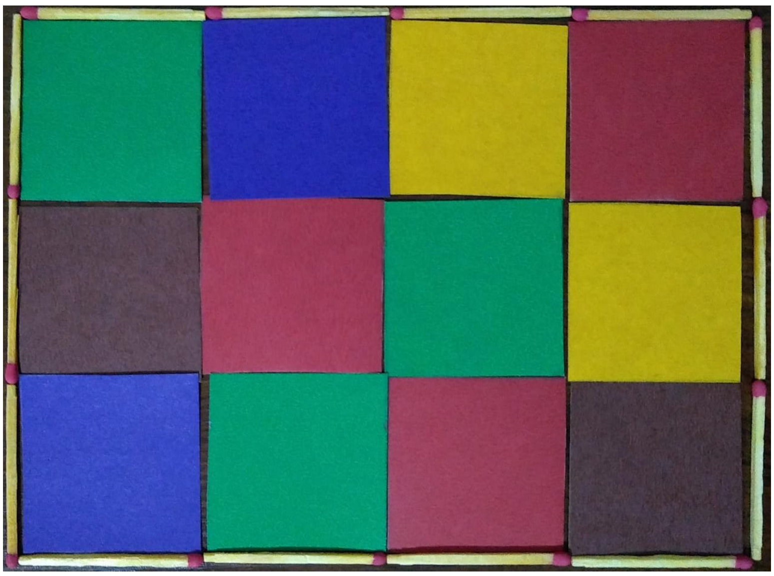


Figura 5.9: Problema envolvendo palitos

Com os possíveis retângulos formados, devem responder os questionamentos:

1. Qual é a medida dos lados do retângulo encontrado pelo grupo?

2. Qual é a área do retângulo construído?

3. O retângulo criado com 24 palitos de fosfóro apresenta área máxima?

Até o momento, podem surgir diversos questionamentos e com o auxílio do professor, resolver o problema de modo a usar o GeoGebra através da construção de retângulo com palitos observando a ideia de perímetro e área, modelando-os e plotando no software a fim de achar o ponto de máximo da função.

5.5.2 VOLUME DO SILO

Aqui o problema consiste na construção de um silo com maior volume e com o menor custo, que por consequência possui área mínima, com a seguinte situação: Uma empresa de montagem de estruturas de armazenagem de grãos recebeu o pedido de montagem de um silo cilíndrico para o armazenamento de certo produto. A empresa, para aumentar o seu lucro, precisa minimizar o custo do metal utilizado para produzir o silo. Quais dimensões do silo que tem o menor custo de produção?

Para a realização da atividade, faremos a analogia em construir um silo de papel cartão, imaginando ser 1 kg de feijão a quantidade máxima, e de modo comparativo, considerando 1 kg que equivale 1000 m^3 e assim o silo deveria ter tal capacidade de armazenamento. Quais as dimensões do silo para minimizar os custos com material, ou seja, qual é a menor área utilizada para a construção do silo?

Como citado no Capítulo 3, podemos construir infinitos silos cilíndricos com o mesmo volume, mas o objetivo é minimizar a área total do silo (base, tampa e lateral).

Tendo a área,

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh,$$

onde r é o raio da base e h a altura do silo. Mas, já que o volume do silo é 1.000 m^3, ou seja, $\pi r^2 h = 1.000$, temos então que $h = \frac{1000}{\pi r^2}$. Assim,

$$\begin{aligned} A(r) &= 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{1.000}{\pi r^2}, \\ &= 2\pi r^2 + \frac{2.000}{r}, \end{aligned}$$

uma função apenas em r.

Logo, precisamos encontrar os pontos críticos de $A(r)$ e analisá-los. Ao escrever a função encontrada no GeoGebra, obtemos:

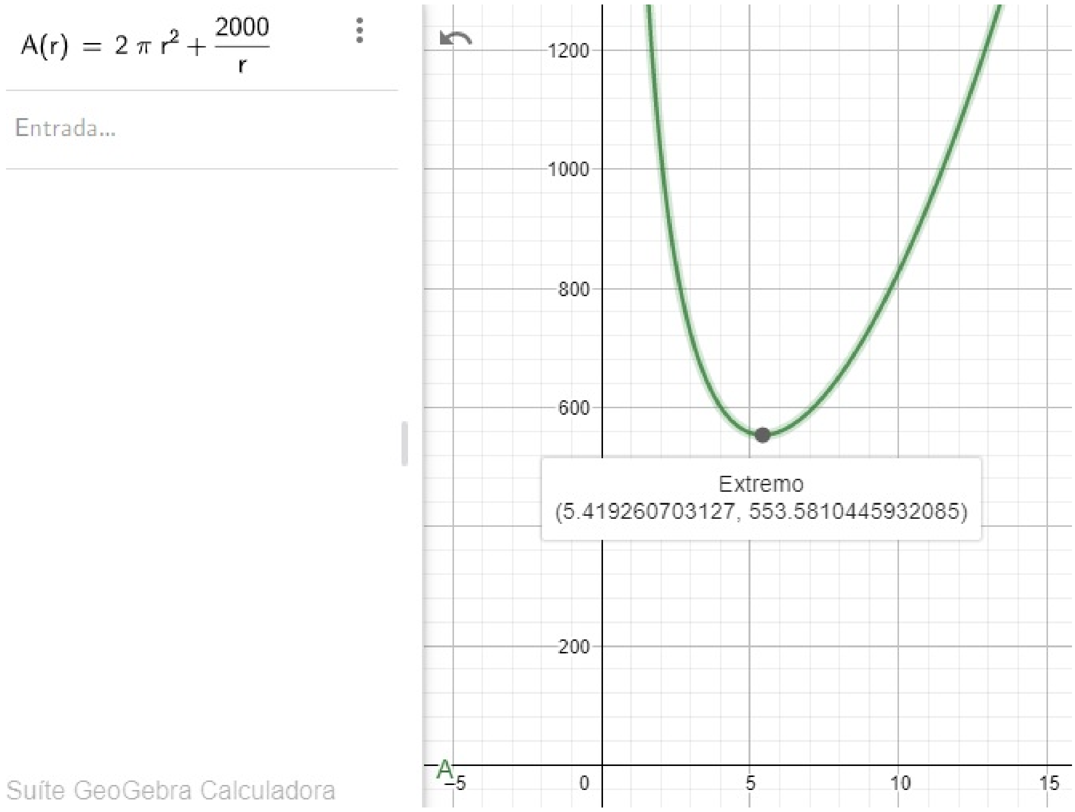


Figura 5.10: O gráfico de $A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2.000}{r}$, $r > 0$ (próprio autor).

Observamos que o gráfico de A atinge o seu menor valor no ponto $r = 5,4192$, e neste ponto, o material total utilizado para construir o silo é igual a $553,58\ m^2$.

Já que $r \approx 5,4192$, a altura do silo com o menor custo de construção é igual $h \approx 10,8387$.

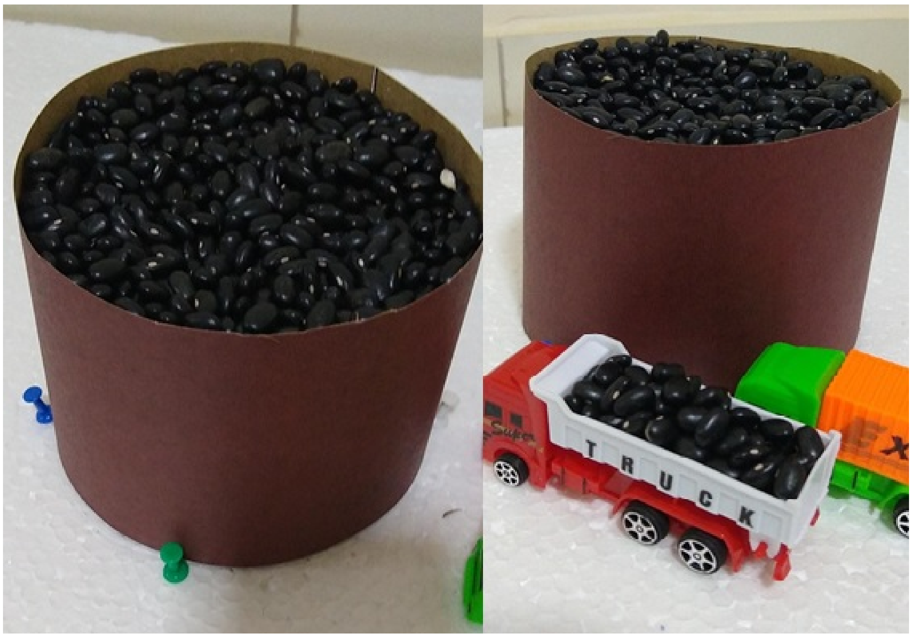


Figura 5.11: Silo envolvendo feijão

5.6 QUINTO ENCONTRO (03/05/2022)

Para o desenvolvimento desta aula, temos a seguinte situação problema:

O Departamento de Estradas de Rodagem de uma região, dispõe de 600 metros de tela (alambrado) e projeta construir uma área retangular de descanso para caminhões e veículos pequenos com a maior área. Qual é a medida dos lados e a área desse ponto de parada?

Cada estudante deve imaginar como utilizar os recursos dados a eles: um pedaço de barbante, representando a tela (alambrado) e os alfinetes, a fim de construir, no isopor um retângulo com maior área, sabendo que um dos lados é o acesso a estrada.

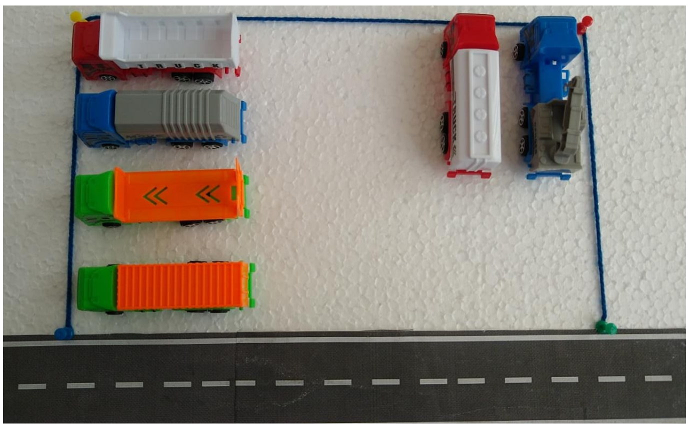


Figura 5.12: Problema da área de descanso

5.7 SEXTO ENCONTRO – QUESTIONÁRIO FINAL (09/05/2022)

No último encontro, entregamos aos alunos o questionário final, a fim de observar os resultados das atividades realizadas e se houve um aprendizado efetivo.

5.8 ANÁLISE DOS RESULTADOS

5.8.1 PRIMEIRO ENCONTRO - QUESTIONÁRIO INICIAL (ANEXO I)

Iremos analisar alguns resultados obtidos, de modo geral, conforme o questionário respondido pelos 27 estudantes:

Questão 1: Você gosta de matemática?

Questão 2: Você considera as aulas de matemática agradáveis?

Questão 3: Você considera as aulas tradicionais de matemática motivadoras?

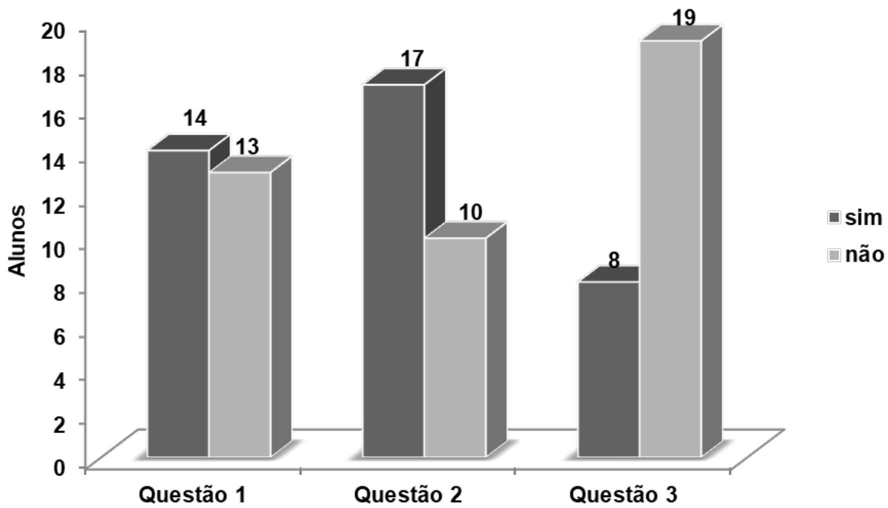


Figura 5.13: Próprio autor

É notório observar que parte significativa dos estudantes não consideram as aulas tradicionais de matemática motivadoras, mesmo que o questionário foi aplicado de forma anônima, acreditamos que alguns alunos tentaram suavizar os resultados ao dizer que ”gostavam”das aulas tradicionais e de modo geral de matemática e considerar as aulas agradáveis. Daí, percebemos que o ensino de matemática tradicional, não motiva os estudantes e cria uma barreira afastando os estudantes da área das exatas, além de criar aquele sentimento de frustação ao se lembrar da matemática e assuntos relacionados a ela.

Questão 4: O que te levou a participar destas atividades?

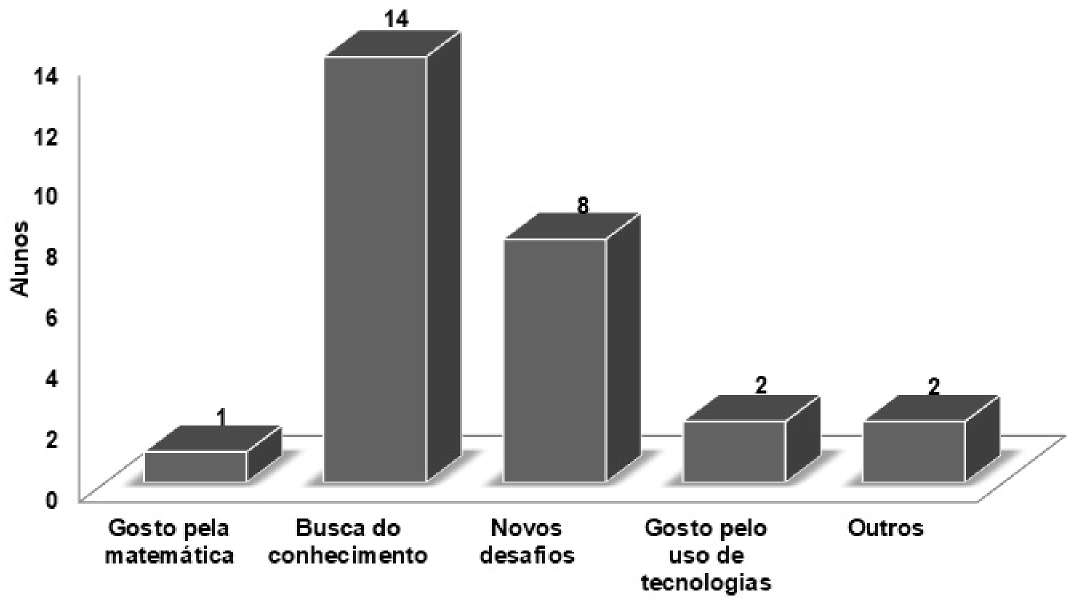


Figura 5.14: Questão 4. Próprio autor

Aos estudantes que assinalaram a opção "outros", justificaram que a participação deles no projeto era para "ajudar o professor". Através dos resultados da pesquisa, é interesssante observar que o estudante está disposto a aprender matemática, pois busca pelo conhecimento e novos desafios, porém é evidente que a metodologia tradicional tem criado uma barreira entre a matemática e a sua aprendizagem, pela forma com que os conteúdos são transmitidos.

Questão 5: Você tem interesse por assuntos relacionados a matemática? Se sim, quais?

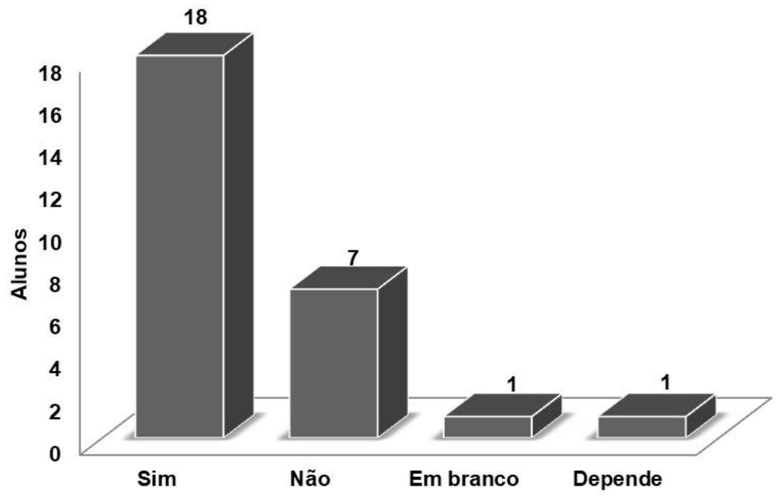


Figura 5.15: Questão 5. Próprio autor

Dentre os assuntos relacionados a matemática, que os estudantes destacaram estão: área e volume, matemática financeira, frações, equações, regra de três, porcentagem, estatística, e com relação à resposta “depende” está relacionada ao fato do estudante alegar que dependendo do assunto da aula, causa-lhe interesse por matemática.

Questão 6: Você acha que os conteúdos de matemática aprendidos em sala de aula fazem parte do seu cotidiano?

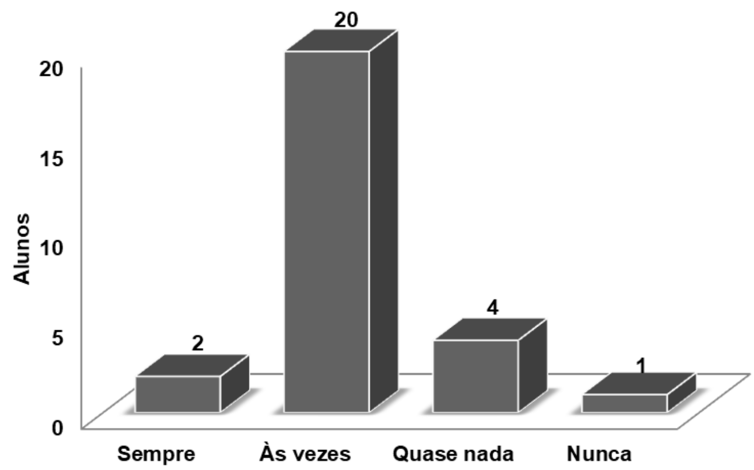


Figura 5.16: Questão 6. Próprio autor

É interessante observar que a maioria dos estudantes respondeu que ”às vezes”ou ”quase nada”do que é aprendido em sala de aula, com relação a matemática, tem aplicação prática, mostrando que o ensino sem contexto e sem aplicabilidade nos traz uma matemática vazia e sem sentido, daí o papel das metodologias ativas para elucidar a importância dos temas estudados e na formação do aluno.

Questão 7: Você considera importante o estudo da geometria?

Questão 8: Sobre o conceito de função, você considera útil?

Questão 9: Sobre o conceito de função, você já teve algum problema do seu dia a dia modelado por uma função?

Questão 11: Você acha que deve haver mudanças na forma do ensino de matemática e como os conteúdos são apresentados hoje em sala de aula?

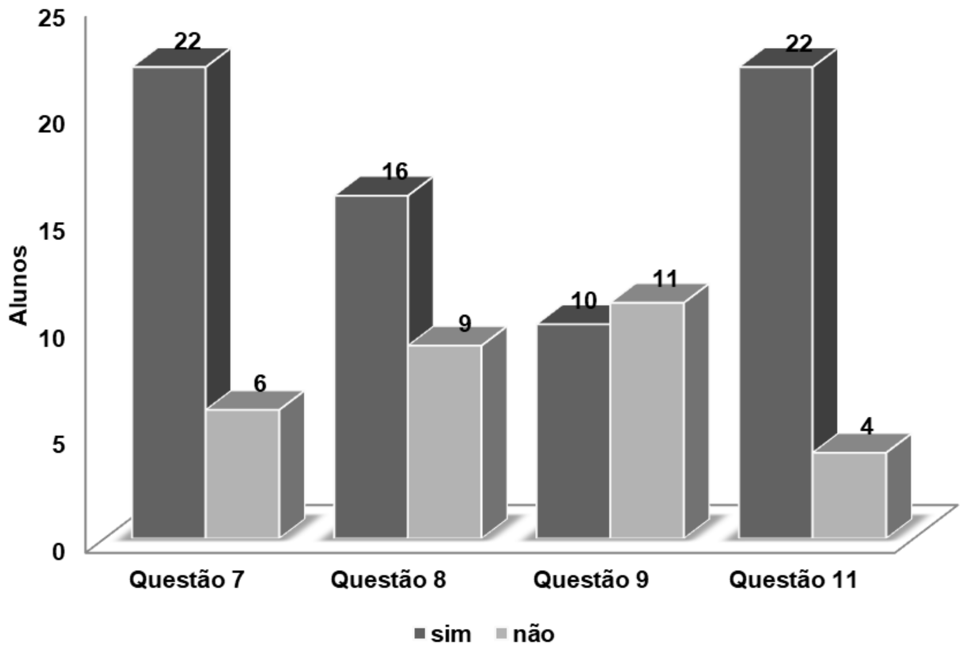
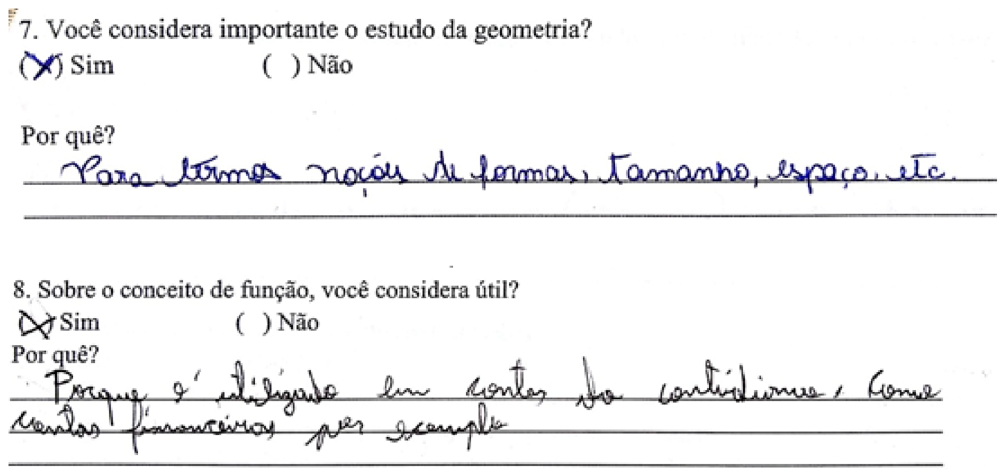


Figura 5.17: Próprio autor

Ainda quando perguntamos o motivo do aluno considerar ser importante ou não o estudo da geometria e de funções, encontramos algumas respostas:



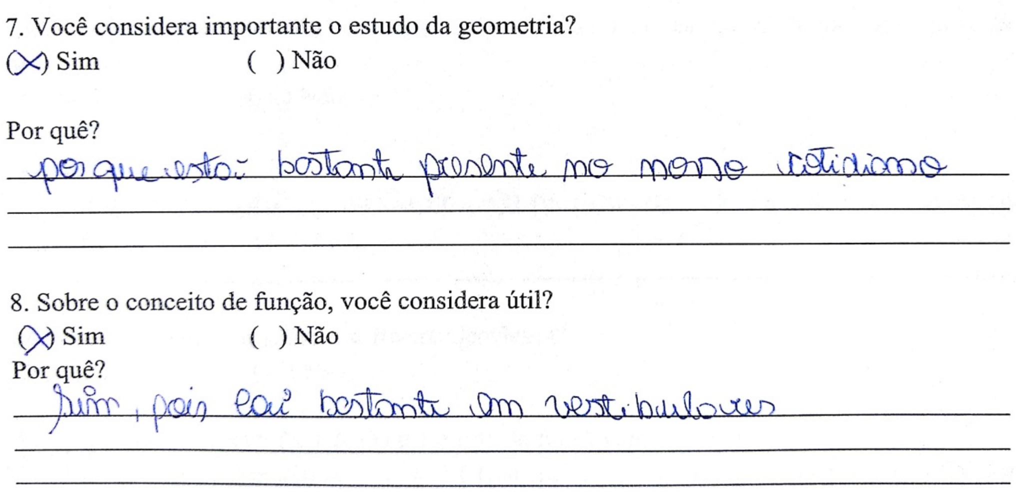
7. Você considera importante o estudo da geometria?
(X) Sim ( ) Não

Por quê?
Para termos noção de formas, tamanho, espaço, etc.

8. Sobre o conceito de função, você considera útil?
(X) Sim ( ) Não
Por quê?
Porque é utilizado em contas do cotidiano, como contas financeiras por exemplo

Figura 5.18: Próprio autor

Temos aqueles que consideraram ser importante para passar em vestibulares:



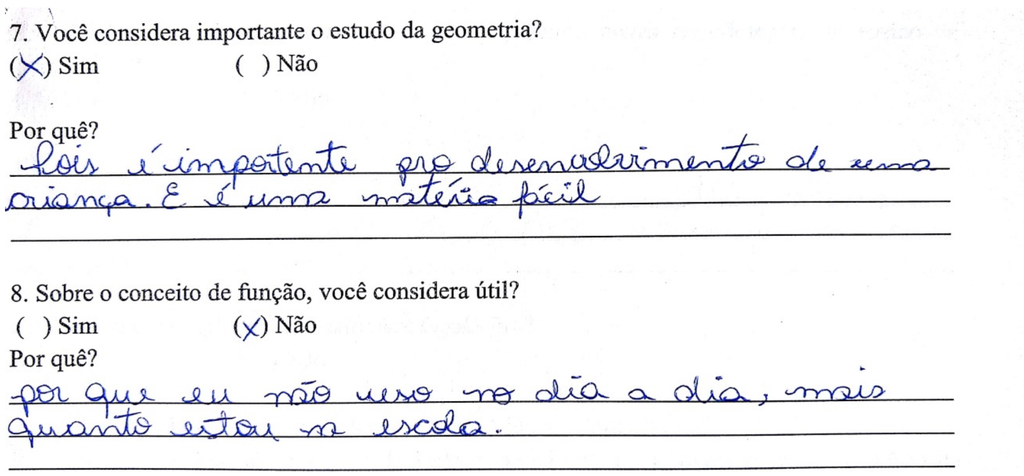
7. Você considera importante o estudo da geometria?
(X) Sim ( ) Não

Por quê?
porque estão bastante presente no nosso cotidiano

8. Sobre o conceito de função, você considera útil?
(X) Sim ( ) Não
Por quê?
Sim, pois cai bastante em vestibulares

Figura 5.19: Próprio autor

Alguns dizem não enxergar no dia a dia, a utilização da ideia de função e da geometria fora do ambiente escolar:


7. Você considera importante o estudo da geometria?

(X) Sim ( ) Não

Por quê?

Pois é importante pro desenvolvimento de uma criança. E é uma matéria fácil

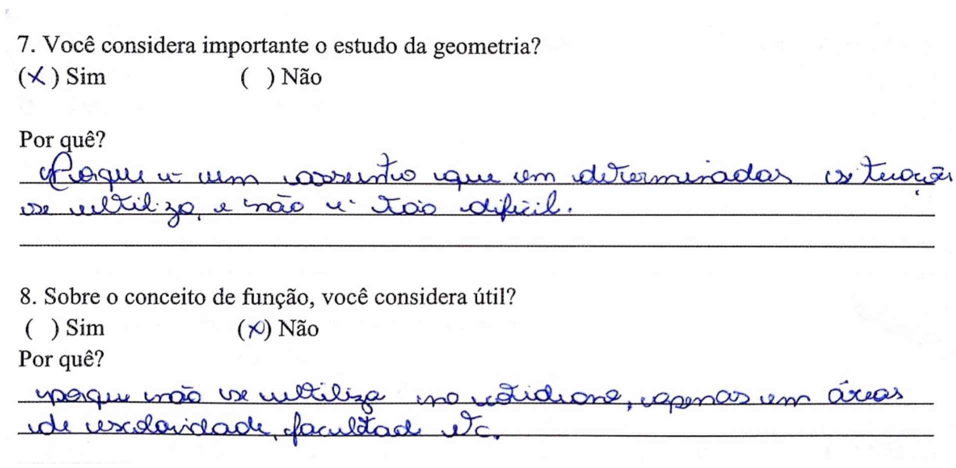
8. Sobre o conceito de função, você considera útil?

( ) Sim (X) Não

Por quê?

por que eu não uso no dia a dia, mais quanto estou na escola.

Figura 5.20: Próprio autor


7. Você considera importante o estudo da geometria?

(X) Sim ( ) Não

Por quê?

Porque é um assunto que em determinadas situações se utiliza, e não é tão difícil.

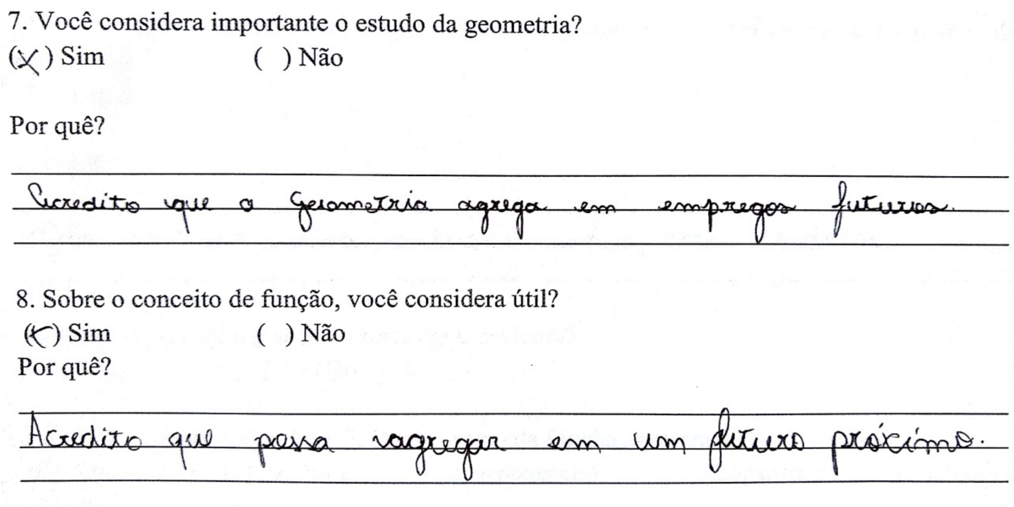
8. Sobre o conceito de função, você considera útil?

( ) Sim (X) Não

Por quê?

porque não se utiliza no cotidiano, apenas em áreas de escolaridade, faculdade etc.

Figura 5.21: Próprio autor


7. Você considera importante o estudo da geometria?

(X) Sim ( ) Não

Por quê?

Acredito que a Geometria agrega em empregos futuros.

8. Sobre o conceito de função, você considera útil?

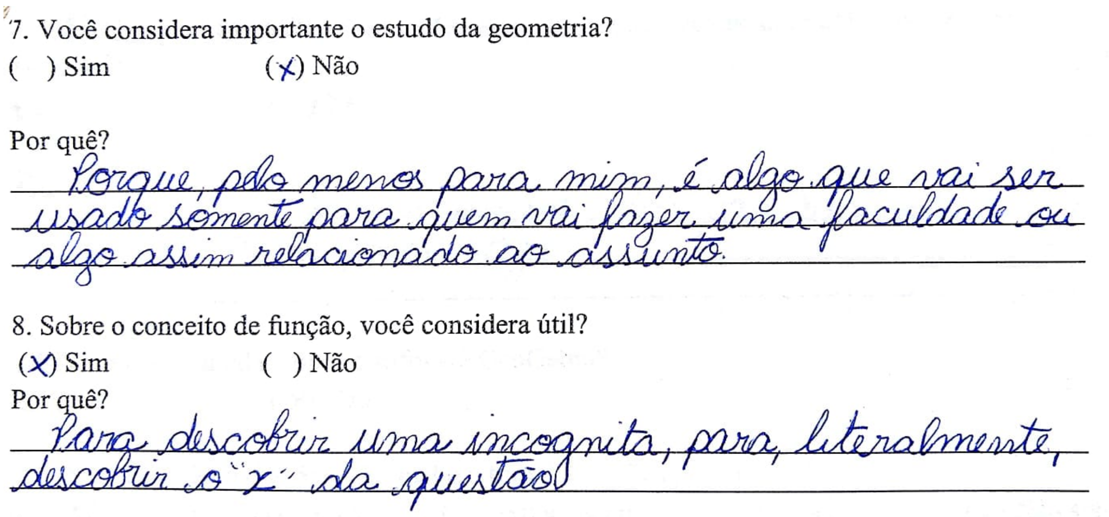
(X) Sim ( ) Não

Por quê?

Acredito que possa agregar em um futuro próximo.

Figura 5.22: Próprio autor

A função ser simplesmente para encontrar o valor de "x"


7. Você considera importante o estudo da geometria?
( ) Sim (X) Não

Por quê?
Porque, pelo menos para mim, é algo que vai ser usado somente para quem vai fazer uma faculdade ou algo assim relacionado ao assunto.

8. Sobre o conceito de função, você considera útil?
(X) Sim ( ) Não
Por quê?
Para descobrir uma incognita, para, literalmente, descobrir o "x" da questão

Figura 5.23: Próprio autor

Questão 10: Quais os recursos seus professores de matemática normalmente usam em sala de aula?

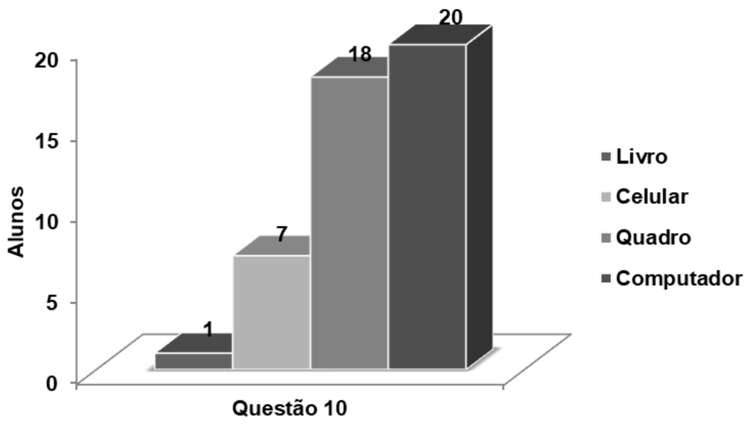


Figura 5.24: Questão 10. Próprio autor

Vale destacar que o uso do computador, não significa que o professor está utilizando em sua aula uma metodologia ativa, pois o professor pode estar usando o computador como forma de apresentar os conteúdos da aula, para não ter que passá-los no quadro, por exemplo, não configurando assim, como uma metodologia baseada em recursos digitais e que venha despertar o interesse dos estudantes.

Questão 12: Você acredita que se o professor mostrar as aplicações de matemática no seu dia a dia te faria gostar mais de matemática e ser mais motivado em aprender os conteúdos de matemática?

Questão 15: Você acha que poderia aprender mais utilizando novas metodologias no ensino da matemática?

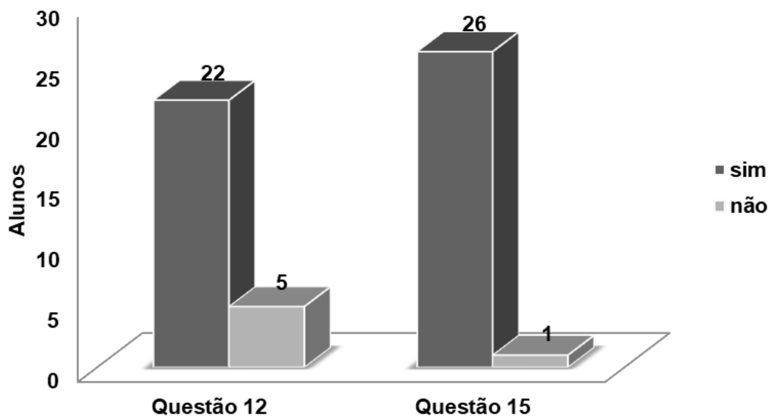


Figura 5.25: Gráfico das questões 12 e 15. Próprio autor

Este resultado, mostra a importância de se aplicar novas metodologias, pois os estudantes estão abertos a encarar o novo, de novo diferenciada tais como interdisciplinaridade, recursos digitais, metodologias ativas. Sabemos que nem sempre é possível preparar aulas com esse enfoque, por diversos motivos, porém a tentativa de se trabalhar dessa forma, pode melhorar o aprendizado e gosto pela matemática.

Questão 13: Você considera interessante o uso de uma nova metodologia para o ensino da matemática?

Questão 14: Você acha que será mais fácil o entendimento sobre função utilizando o auxílio das tecnologias?

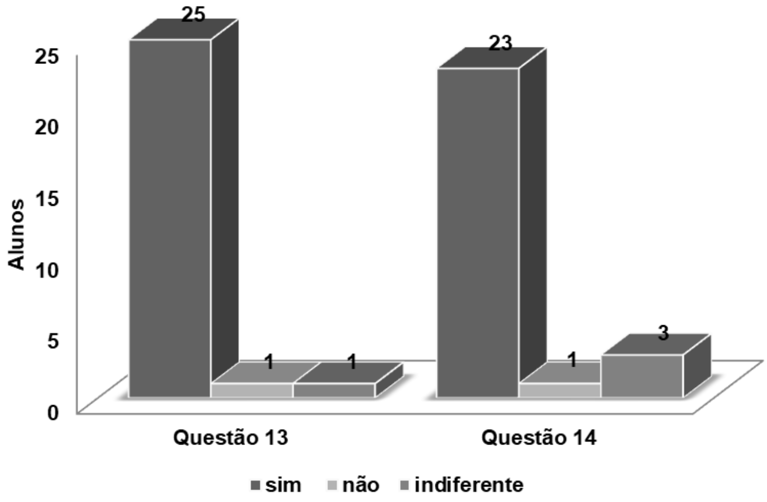


Figura 5.26: Gráfico das questões 13 e 14. Próprio autor

Questão 16: Você já ouviu falar sobre o software GeoGebra?

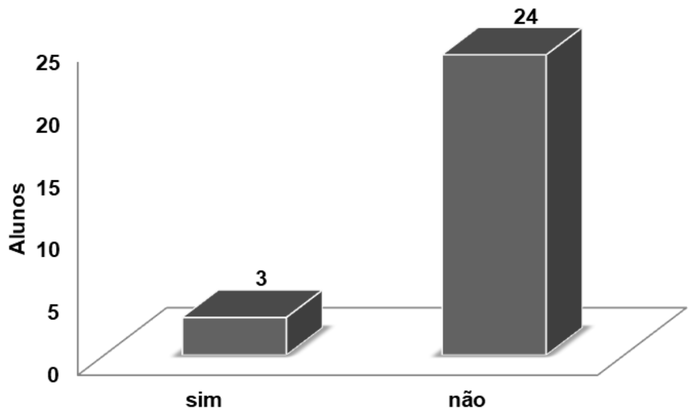


Figura 5.27: Gráfico da questão 16. Próprio autor

Questão 17: Seja a função $f(x) = 5x + 6$. Qual é o tipo da função apresentada?

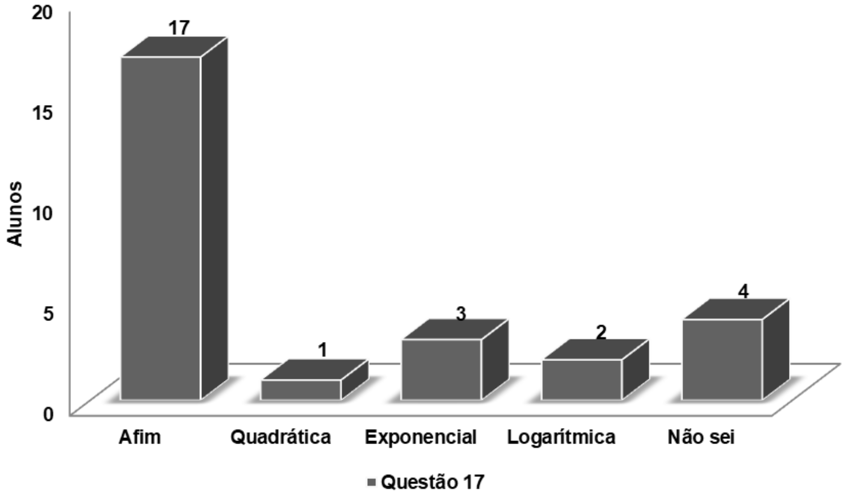


Figura 5.28: Gráfico da questão 17. Próprio autor

Questão 18: Seja $f(x) = 2x–4$. Qual é o valor de $f(0)$?

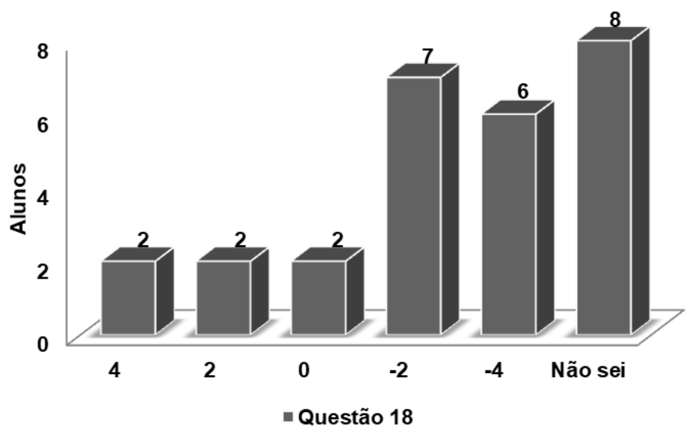


Figura 5.29: Gráfico da questão 18. Próprio autor

Observamos aqui que mesmo que grande parte dos estudantes saibam identificar o tipo de função da situação problema proposta, neste caso afim, não conseguem ter a noção de como resolver o problema, pois quando apresentamos uma função afim para encontrar uma imagem para determinado valor não conseguem responder e logo, encontrar a solução do problema. Mostrando assim, a falha no sistema e que de certa forma não os estimulou a aprender o básico sobre funções, e dessa forma interpretá-las.

Questão 19: Suponha que a Companhia Paranaense de Energia (COPEL) cobra de cada unidade consumidora uma taxa fixa de iluminação pública no valor de $R\$9,11$ além de $R\$0,84$

para cada kWh de energia consumida. Você consegue enxergar uma relação entre o valor pago e o consumo da energia elétrica?

Questão 21: No problema da questão anterior, você consegue enxergar uma aplicação de matemática no seu dia a dia?

Questão 23: A partir do exemplo anterior, consegue imaginar uma situação real de forma similar ao problema anterior?

Questão 24: O pai do João tem 140 metros de tela (alambrado) e no sítio dele quer construir um curral com a maior área. Você consegue enxergar uma aplicação de matemática, principalmente do conceito de função nesse problema?

Questão 25: Você tem ideia de como resolver o problema da questão 24?

Questão 26: A mãe da Fernanda, tem uma chapa de madeira retangular 100 cm por 80 cm. A partir dessa chapa quer construir a maior caixa sem tampa, para poder guardar os brinquedo da Fernanda. Você consegue enxergar uma situação-problema?

Questão 27: Você tem ideia de como resolver o problema anterior?

Questão 28: O avô do Julio é um produtor de soja. Ele acredita que no primerio dia do mês setembro cada saco de soja custará $R\$200,00$. Ao longo de setembro, o preço de saco de soja cai a uma taxa de $R\$2,00$ por dia. No primeiro dia de setembro, o avô do Julio tem 100 sacos disponíveis no campo e estima que a plantação aumenta a uma taxa de 3 sacos por dia ao longo do mês. O avô do Julio quer saber da data que tem que realizar a colheira para ter a maior receita. Você consegue enxergar uma situação-problema?

Questão 29: Você tem ideia de como resolver o problema anterior?

Cabe notar que apesar de alguns estudantes, marcarem a opção de como resolver as situações de modelagens propostas, não apresentaram justificativas de como solucioná-los.

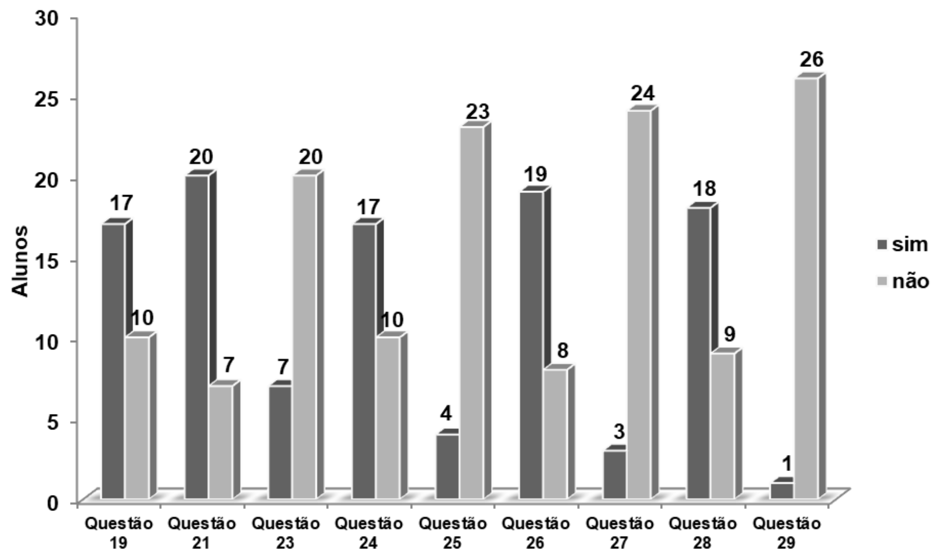


Figura 5.30: Gráficos das questões específicas. Próprio autor

Questão 30: Situações-problemas apresentadas nas questões 22, 24, 26 e 28 são chamados de problemas de otimização, onde maximizamos ou minimizamos uma grandeza. Você acredita que os problemas apresentados são interessantes e que podem despertar o seu interesse em aulas de matemática vendo as aplicações reais de matemática no nosso cotidiano?

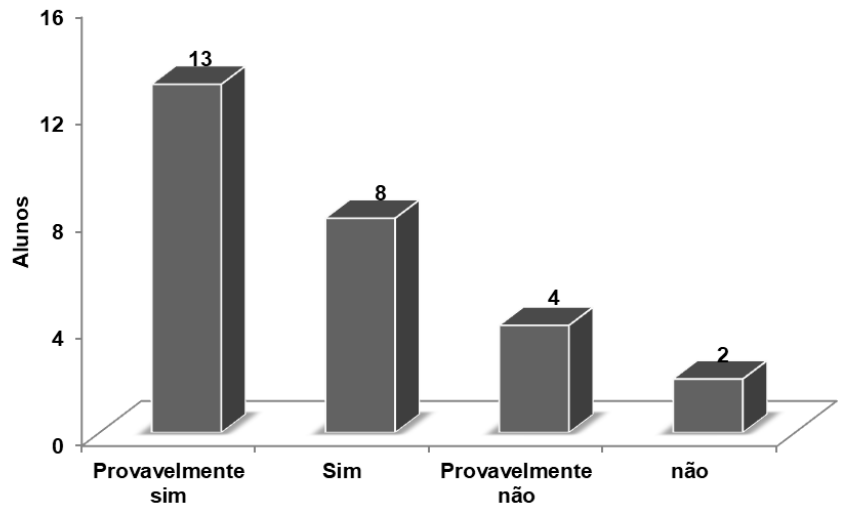


Figura 5.31: Gráfico da questão 30. Próprio autor

5.9 SEGUNDO ENCONTRO

Analisando as respostas dos estudantes, foi planejado o segundo encontro para abordar e revisar temas que foram elencados pontos de dificuldades dos alunos envolvendo a ideia de funções e geometria. Com o intuito de dar o embasamento necessário para o estudo de funções, relembrando os conceitos, através de slides intuitivos a fim de construir o conhecimento dos estudantes a partir do que eles lembram e conhecem.

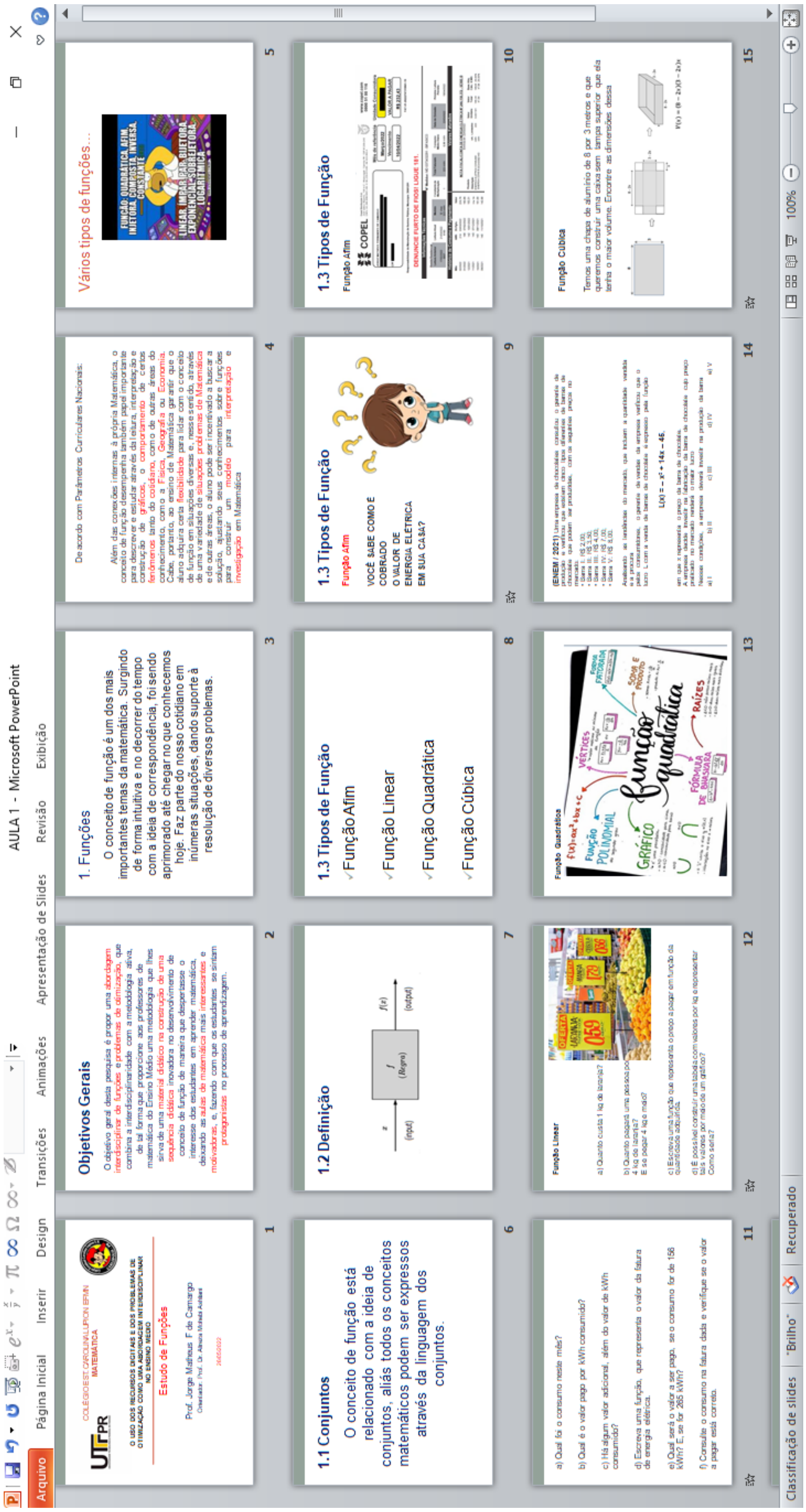


Figura 5.32: Slides utilizados no segundo encontro. Próprio autor

Começamos com conjuntos, reforçando que a ideia que pode ser abrangente e representa objetos em comum, valores numéricos semelhantes, dados diversos que apresentam certas características que os fazem pertencer ao mesmo grupo.

Quanto as funções, relembramos o que seriam as funções, as suas classificações e em especial, afim e linear, elucidando os exemplos da conta de luz de nossas casas, em que o princípio de cobrança está na função afim e que numa quitanda o valor a ser pago pela pesagem de certos alimentos está diretamente ligado ao valor do quilograma, criando assim a correspondência por função linear.

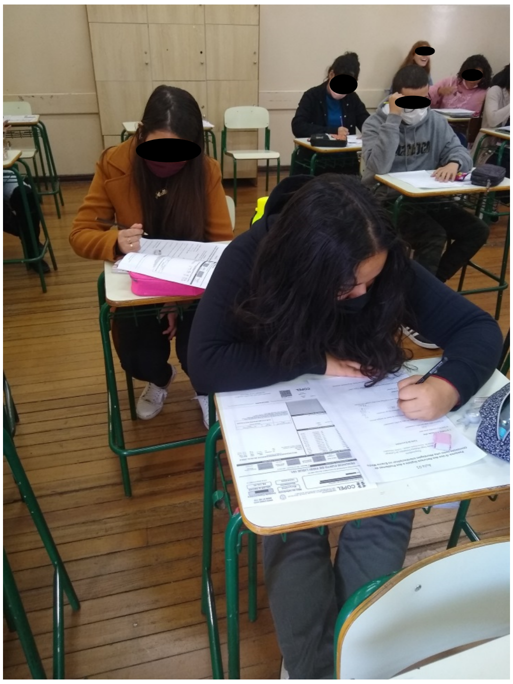


Figura 5.33: Alunos analisando a conta de energia elétrica. Próprio autor

Para deixar a aula mais dinâmica e que os estudantes se sentissem a vontade de estar na pesquisa, cada um ganhou bombons e comiam enquanto resolviam as atividades propostas.

Nas atividades, apresentaram dificuldades em operações com vírgula (números decimais) e principalmente na divisão, não lembravam do algorítmo de resolução e perceberam dificuldades em partes elementares. Assim, aproveitamos a oportunidade e fizemos uma revisão sobre o assunto para que pudessem dar andamento nas questões propostas da aula.

E, para concluir a aula, foi apresentado a função quadrática numa questão do Exame Naciona do Ensino Médio (ENEM), retomando a ideia de potências e operações.

Por fim, apresentamos de modo ligeiro a função cúbica através de um protótipo para a construção de uma caixa, e que no encontro seguindo, todos seriam desafiados a construirem, em grupo, uma caixa de maior volume, tendo uma chapa somente e que como engenheiros de produção deveriam obter a melhor solução para o problema, instigando-os a participar do próximo encontro.

5.9.1 TERCEIRO ENCONTRO

Comçamos o terceiro encontro, dividindo a classe em grupos, onde cada grupo seria uma equipe de engenheiros de determinada empresa, que tem como principal produtos embalagens e que precisaria construir uma caixa com certo tamanho de chapa, e que esta caixa deveria apresentar um maor volume.

Figura 5.34: Discussão de como construir a caixa. Próprio autor

Após pensarem e discutirem em grupos, sem a interferência do docente responsável, os grupos entitulados de engenheiros de produção começaram a construir usando o senso comum e sem quaisquer recursos matemáticos e digitais.

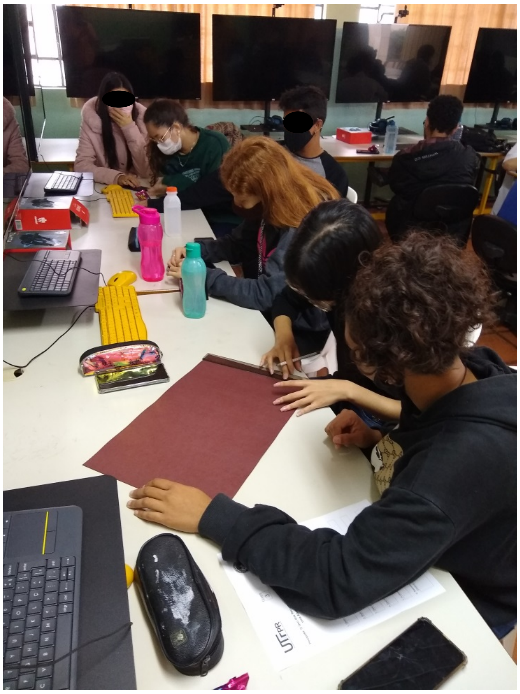


Figura 5.35: Construção da caixa. Próprio autor

Com apenas régua, tesoura e fita crepe, os estudantes montaram suas caixas cortando os cantos da caixa, de modo a dobrá-la e formar uma caixa sem tampa.

Figura 5.36: Montando a caixa. Próprio autor

Alguns dos resultados, foram obtidos como mostra a imagem a seguir:

Figura 5.37: Próprio autor

No segundo momento da aula, os alunos puderam notar onde erraram na construção das suas caixas, onde algumas ficaram mais altas que outras, e que deveriam ter cortado os cantos com quadrados menores ou maiores.

Na sequência, cada grupo apresentou suas medidas e qual o volume das caixas construídas por eles. Após as apresentações, foi revelado a solução que obtem o volume ótimo, ou seja, a solução ótima, construída a expressão matemática em função dos cantos recortados e após a apresentação do gráfico das mesmas no software GeoGebra, em que os estudantes puderam apreciar os resultados obtidos e como analisar o gráfico.

Ainda, foi entregue aos mesmos grupos, uma nova chapa em que tiveram que construir uma caixa de maior volume com o material que tinham, dessa vez, usando os recursos corretos, medindo a chapa, obtendo a função que descreveria a melhor solução e a plotagem dos resultados para a obtenção do ponto de máximo para a solução do problema.

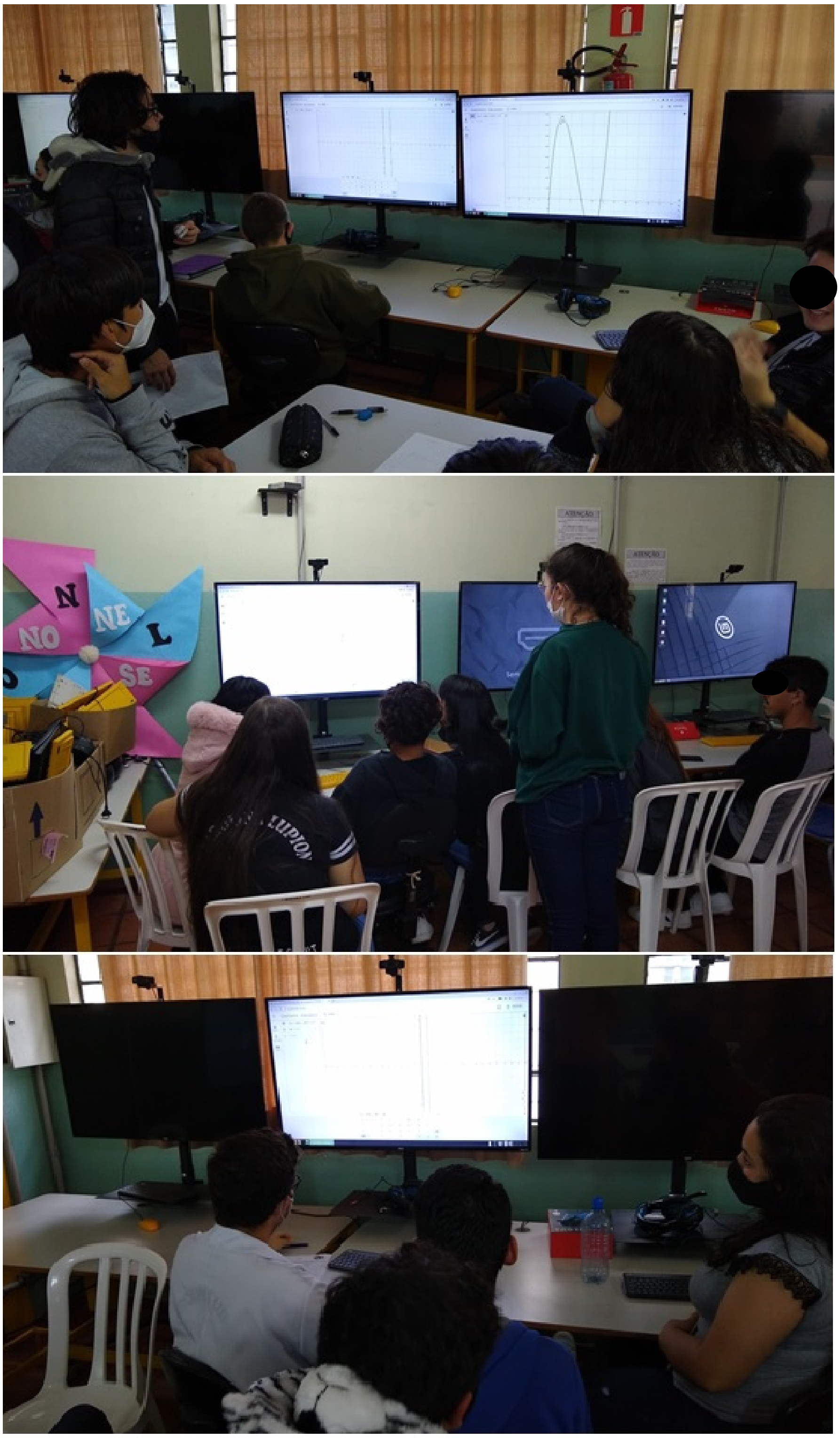


Figura 5.38: Alunos observando os resultados no GeoGebra. Próprio autor

Ao se familizarem com o programa, alguns até colocaram plano de fundo e configuram o gráfico com linhas tracejadas, conforme queriam para melhorar a aparência dos resultados.

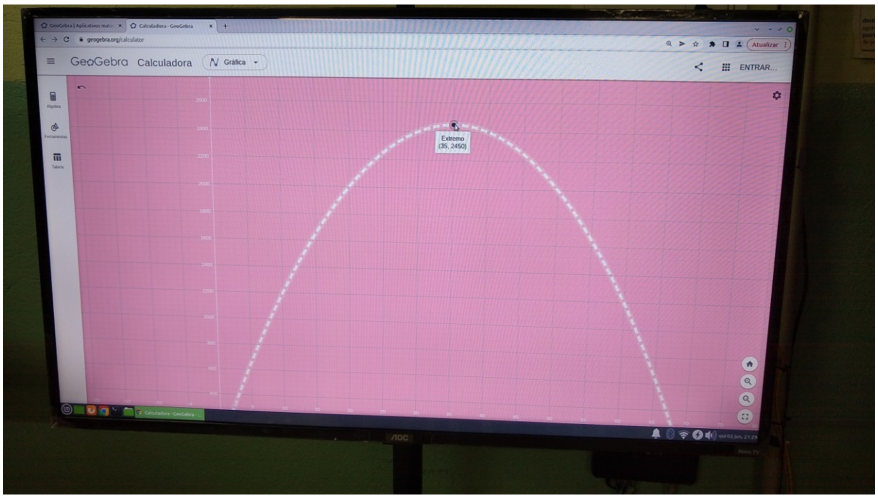


Figura 5.39: Plano de fundo no GeoGebra. Próprio autor

Assim, cada grupo chegou na solução ótima, e usando os recursos matemáticos e digitais necessários.

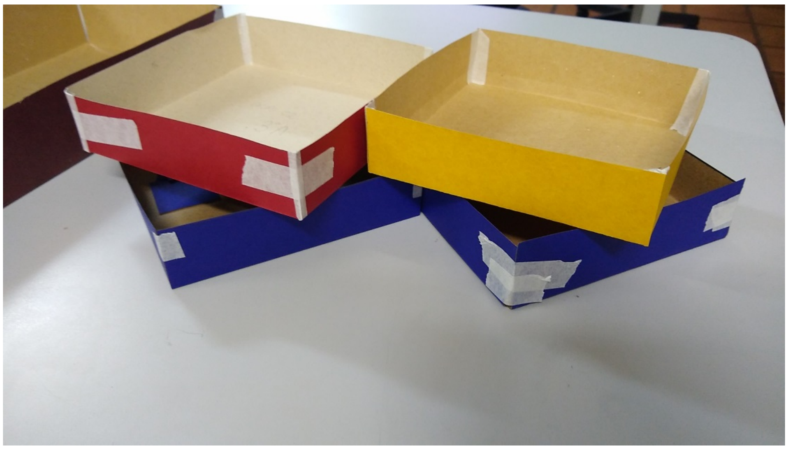


Figura 5.40: Caixas de maior volume. Próprio autor

É interessante destacar que dessa aula surgiram questionamentos importantes e que não poderiam deixar de serem comentados, como por exemplo, os estudantes, grande maioria, não lembravam o que era o volume e nem perímetro; não lembravam o conceito e nem como calcular o volume de uma caixa como a que foi construída, daí fomos conversando e chegando ao acordo. Mesma situação ocorreu com o perímetro, e assim, ao descobrirem usaram da informação para calcular o volume das suas respectivas caixas, a medida que ia construindo.

5.9.2 QUARTO ENCONTRO

No quarto encontro, tinhamos um grupo entrosado e animado para resolver as situações propostas, e já com pensamento mais alinhado e aberto a discutir os resultados matemáticos, advindos dos encontro anterior.

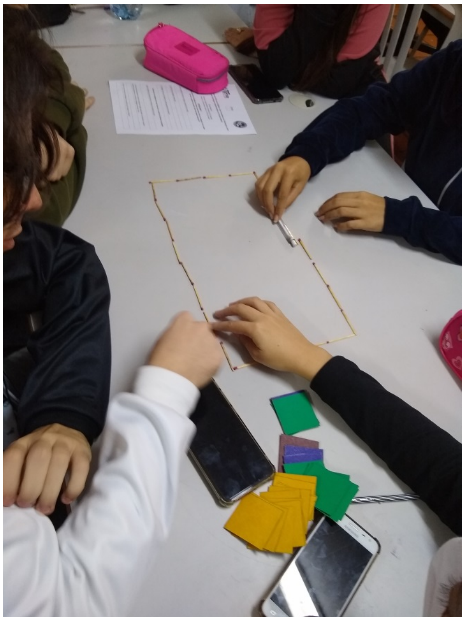


Figura 5.41: Próprio autor

Alguns pontos nos chamou a atenção na realização da atividade da construção de retângulos com palitos de fósforos, dentre eles está no fato de que ao perceberem que a maior área era de um quadrado, surge o questionamento: o quadrado é um retângulo? Ficam espantados ao descobrirem que o quadrado é um caso especial de retângulos, e que todo quadrado é um retângulo mas nem todo retângulo é um quadrado, foi o ápice da aula. Foi muito interessante a reação dos estudantes e o envolvimento com tais questões de geometria, além de lembrarem conceitos de perímetro, área de tais figuras.

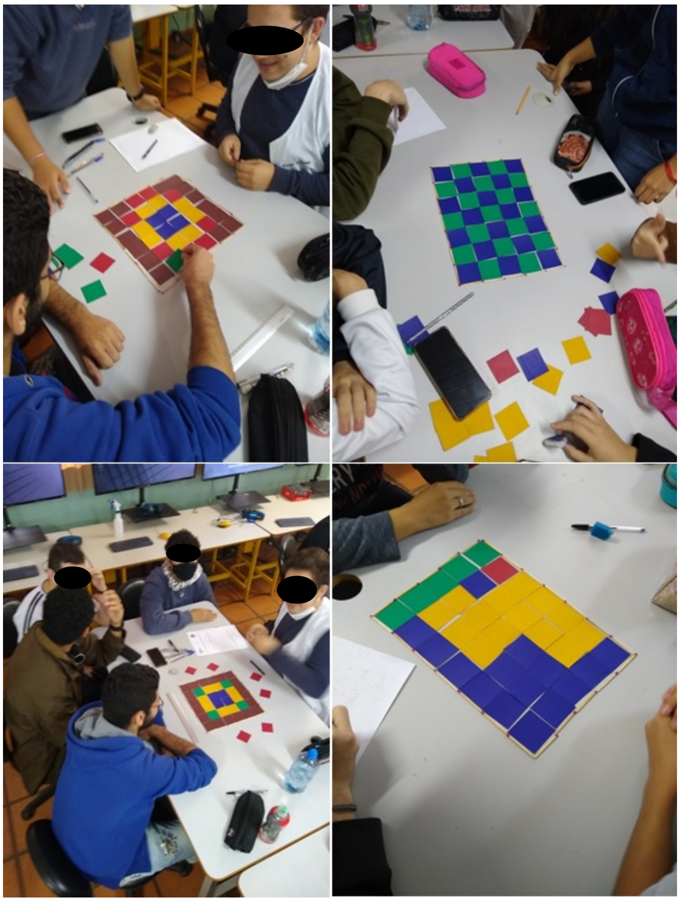


Figura 5.42: Próprio autor

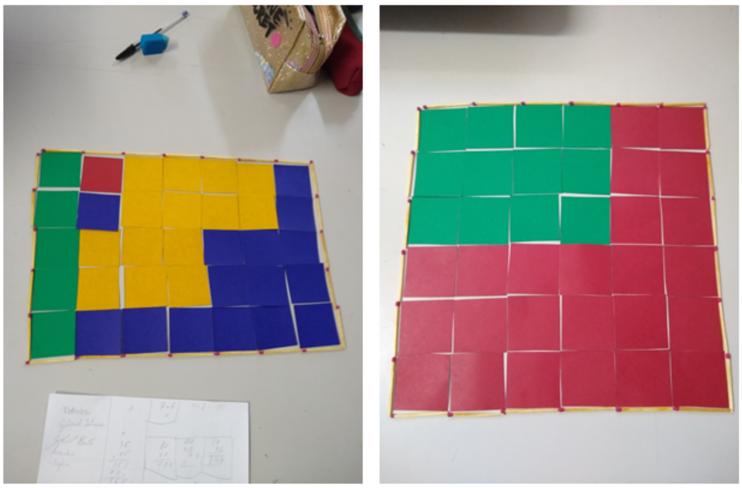


Figura 5.43: Próprio autor

Já com atividade do silo, notamos que os estudantes, não estavam muito familiarizados em trabalhar com o número π, deixando os resultados em função do mesmo, valendo o mesmo raciocínio em relembrar os cálculos de área e volume das figuras planas e também do cilindro para a construção do silo.

Figura 5.44: Silo envolvendo feijão

5.9.3 QUINTO ENCONTRO

Nesse encontro, observamos o entrosamento dos tentar resolver, de primeiro momento, sem terem nenhuma dica do professor, porém com o embasamento dos resultados anteriores, começaram a esboçar resultados e tentar chegar ao valor ótimo. Podemos destacar aqui, o que mais chamou a atenção é a familiaridade que os estudantes chegaram em trabalhar com o GeoGebra e analisar os resultados para obter a melhor solução.

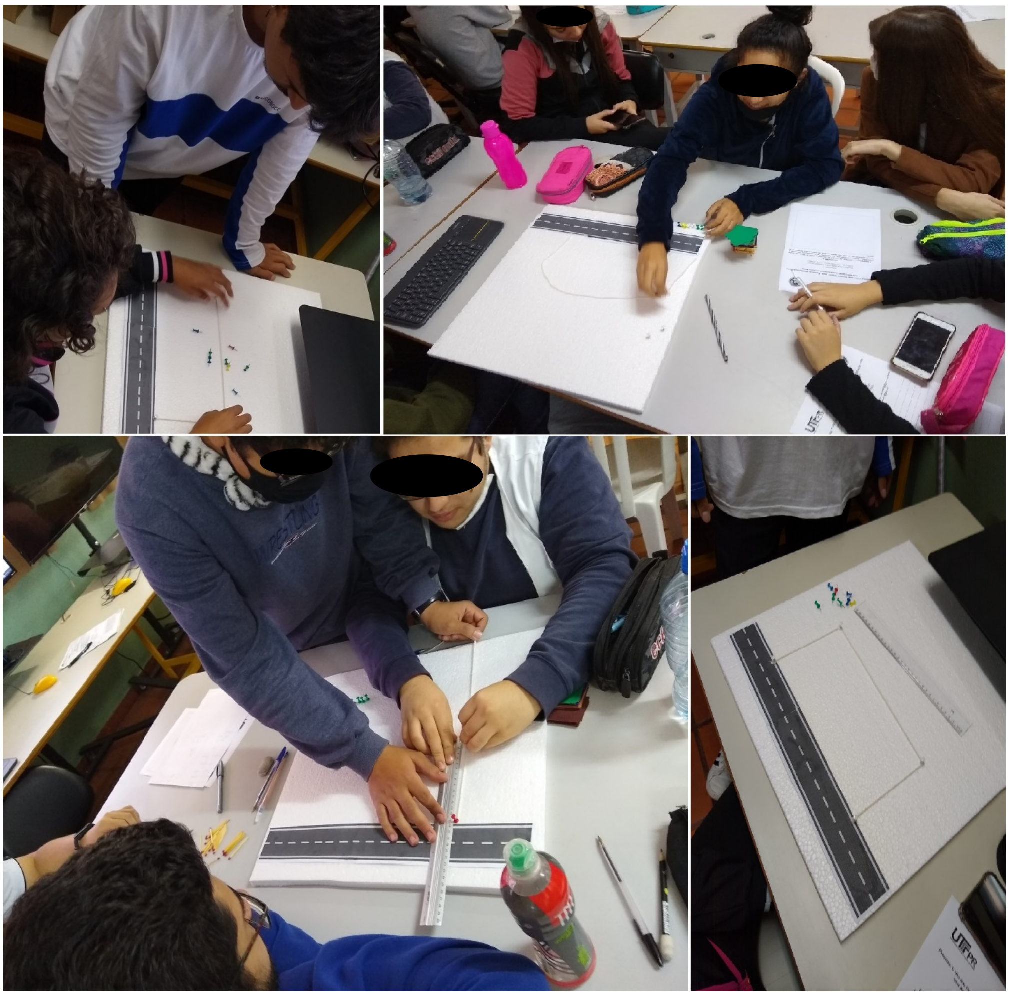


Figura 5.45: Próprio autor

Cabe destacar, o trabalho em conjunto realizado pelos estudantes, pois tiveram a oportunidade de aprender com o outro e discutir resultados e chegar a um consenso e desenvolver as habilidades de comunição e interação com os colegas.

5.9.4 SEXTO ENCONTRO

Questão 1: Qual seria sua avaliação final sobre o uso dos recursos digitais e dos problemas de otimização como ferramentas para o ensino do conceito de função?

Questão 6: O que você achou sobre o uso do software GeoGebra como metodologia ativa?

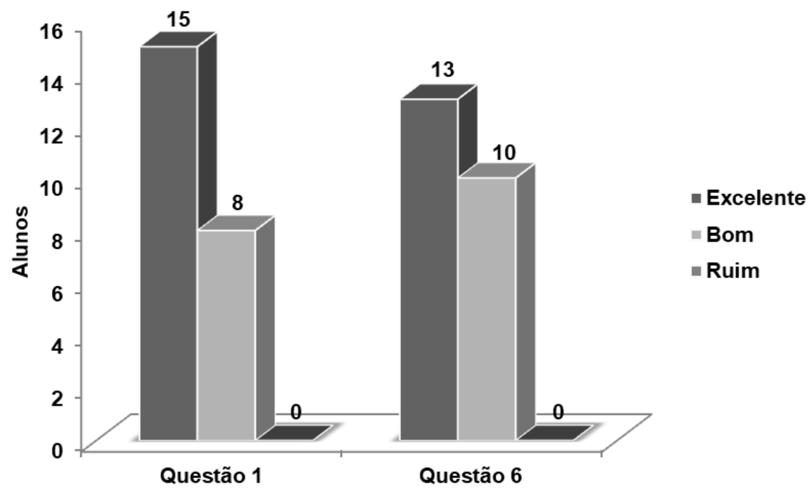
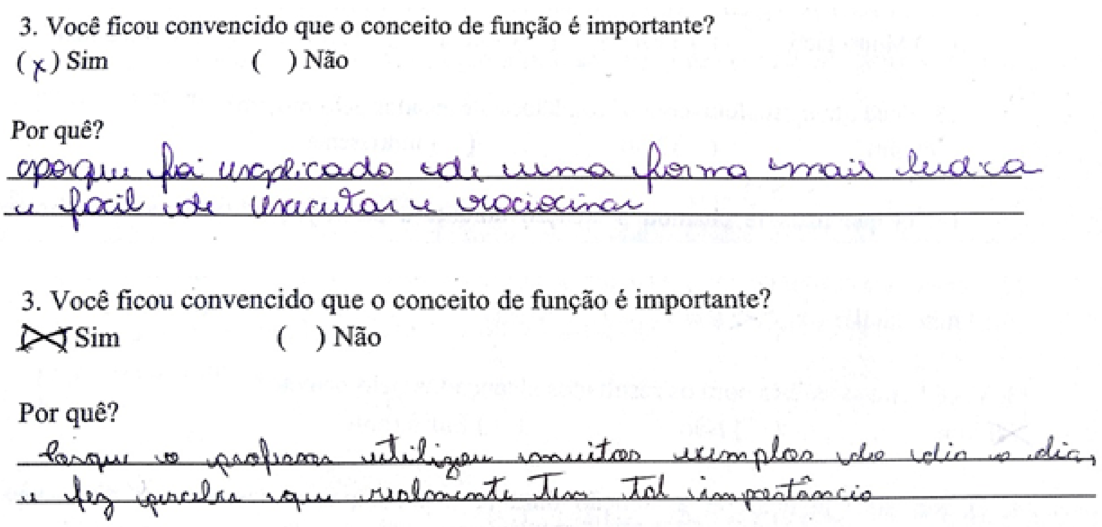


Figura 5.46: Próprio autor

Questão 2: Você aprendeu mais utilizando este novo modo de ensinar?

Questão 3: Você ficou convencido que o conceito de função é importante?



3. Você ficou convencido que o conceito de função é importante?
(x) Sim ( ) Não

Por quê?
porque foi explicado de uma forma mais ludica e facil de executar e raciocinar

3. Você ficou convencido que o conceito de função é importante?
(X) Sim ( ) Não

Por quê?
Porque o professor utilizou muitos exemplos do dia a dia, e fez perceber que realmente tem tal importância

Figura 5.47: Próprio autor

Questão 4: Sobre o conceito de função, você acredita que muitos problemas do seu dia a dia podem ser modelados por uma função?

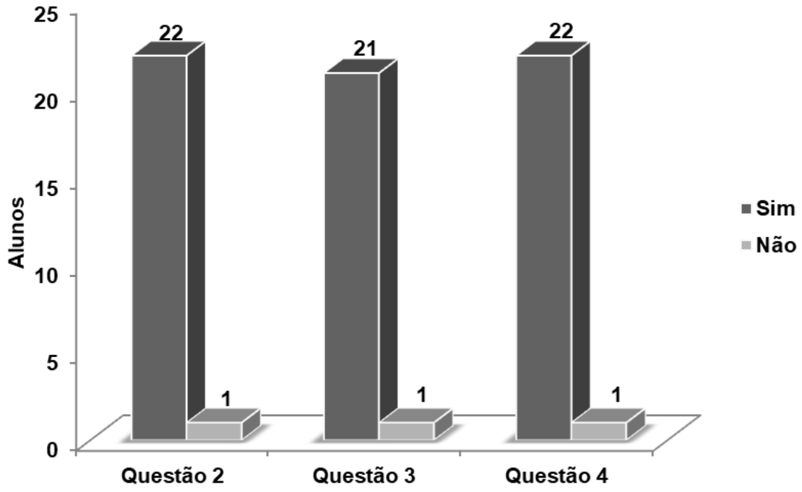


Figura 5.48: Próprio autor

Questão 5: Você acha que os conteúdos de matemática aprendidos em sala de aula fazem parte do seu cotidiano?

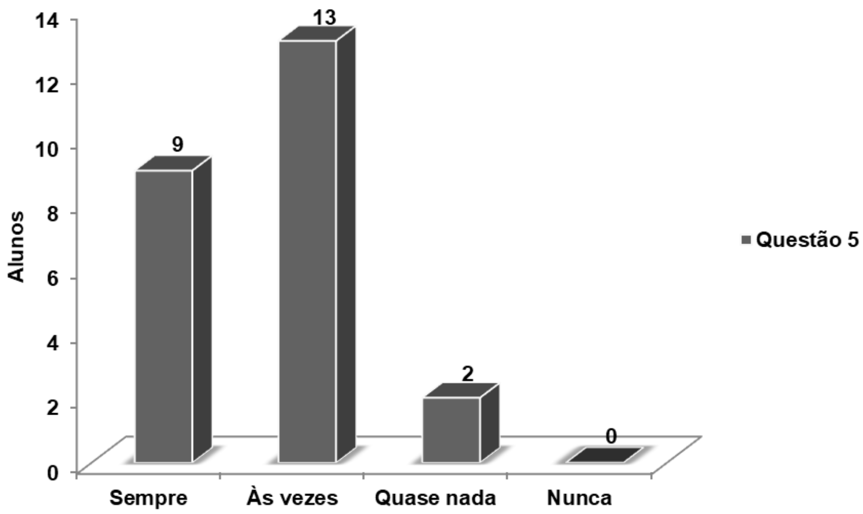


Figura 5.49: Próprio autor

Questão 8: Você considera interessante o uso de uma nova metodologia para o ensino da matemática?

Questão 9: Você acha que será mais fácil o entendimento sobre função utilizando o auxílio das tecnologias?

Questão 13: Você ficou satisfeito com os resultados alcançados pelo projeto?

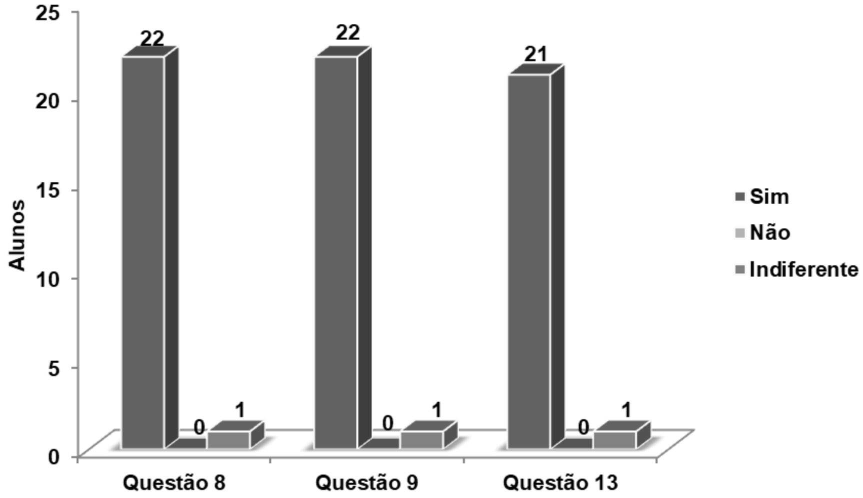


Figura 5.50: Próprio autor

Questão 7: Ainda sobre o uso do GeoGebra, você acha que o software deixa as aulas de matemática mais motivadoras?

Questão 10: Você acha que poderia aprender mais utilizando novas metodologias no ensino da matemática?

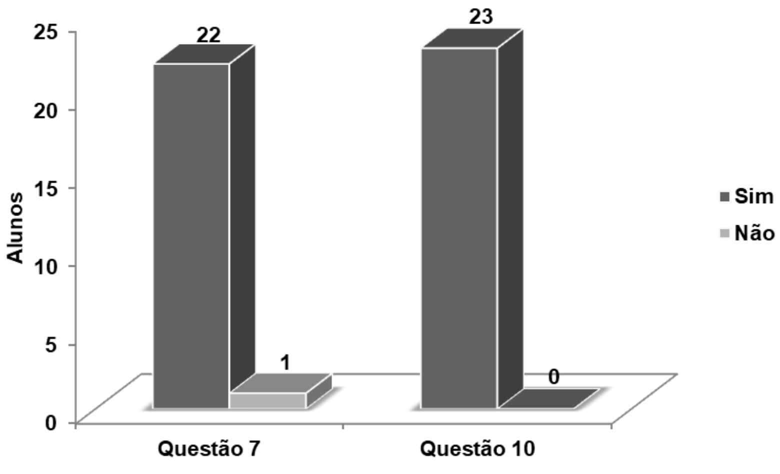
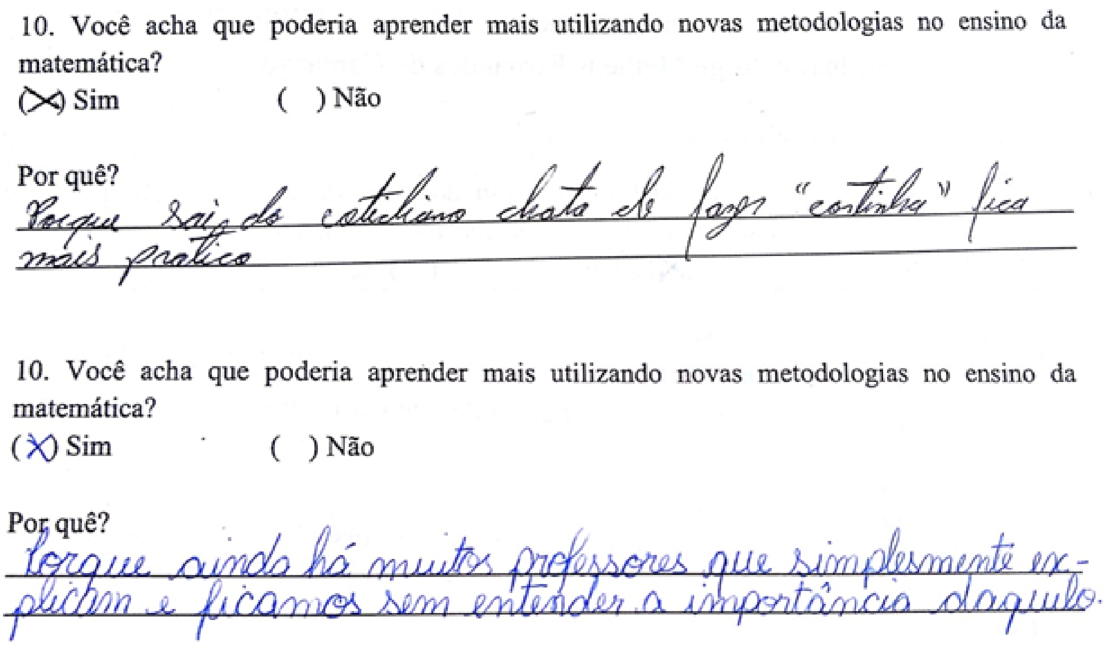


Figura 5.51: Próprio autor


10. Você acha que poderia aprender mais utilizando novas metodologias no ensino da matemática?

(X) Sim ( ) Não

Por quê? Porque sai do cotidiano chato de fazer "continha" fica mais pratico

10. Você acha que poderia aprender mais utilizando novas metodologias no ensino da matemática?

(X) Sim ( ) Não

Por quê? Porque ainda há muitos professores que simplesmente ex-plicam e ficamos sem entender a importância daquilo.

Figura 5.52: Próprio autor

Questão 11: Depois desta pesquisa, como está seu interesse em buscar novos conhecimentos?

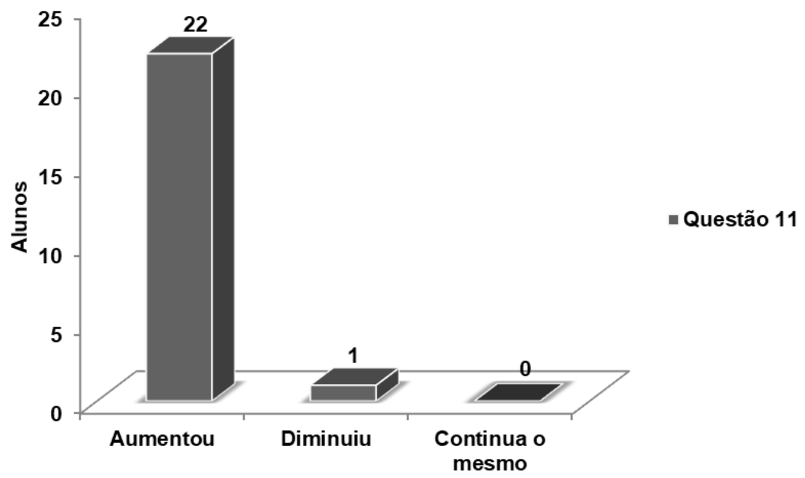


Figura 5.53: Próprio autor

Questão 12: Caracterize o grau de complexidade da atividade desenvolvida ao longo do projeto

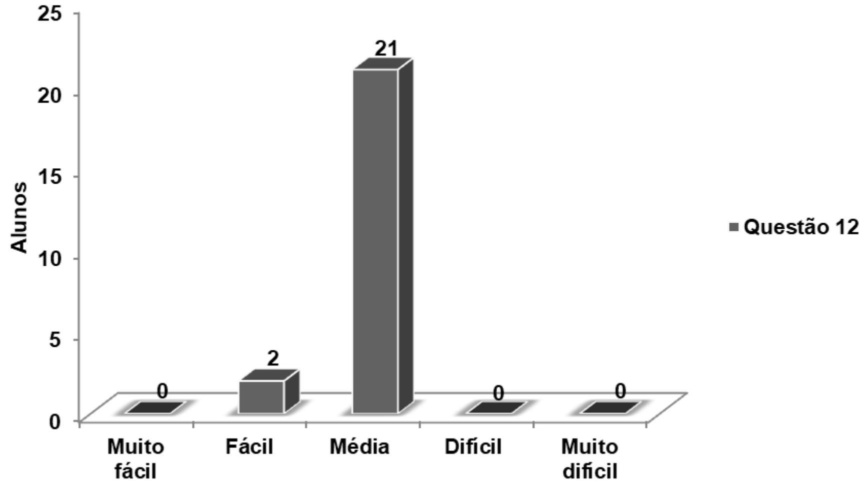


Figura 5.54: Próprio autor

Questão 14: O que mais te chamou a atenção durante a participação das aulas e realização das atividades?

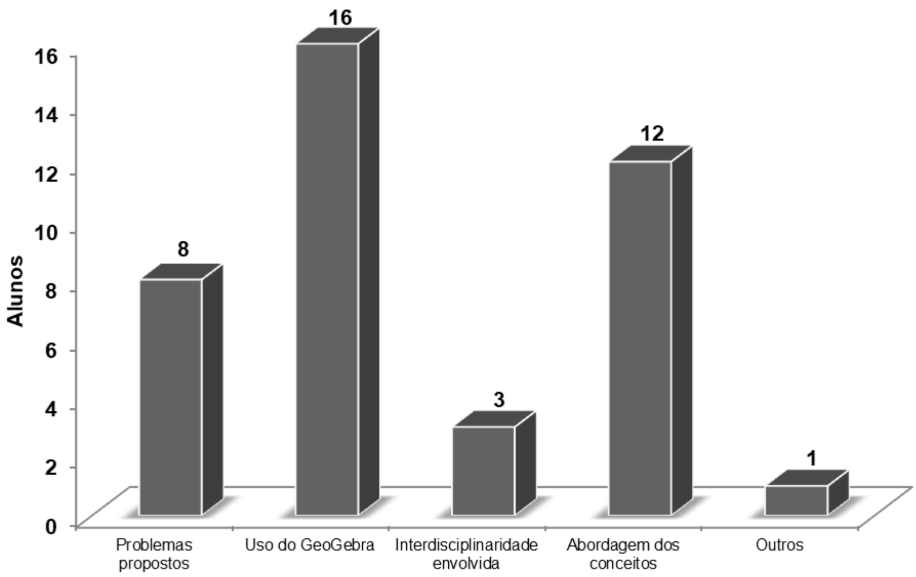


Figura 5.55: Próprio autor

Questão 15: Como você avalia o projeto que foi desenvolvido?

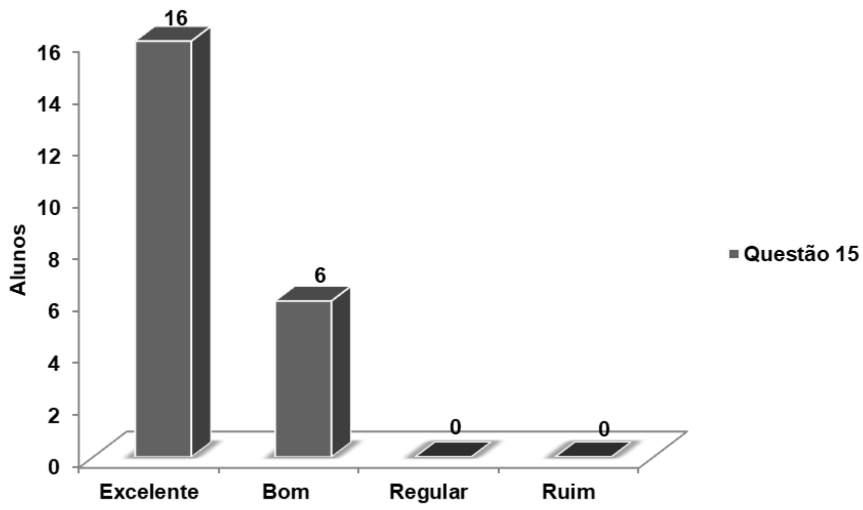


Figura 5.56: Próprio autor

Questão 16: O que achou dos trabalhos realizados em equipe?

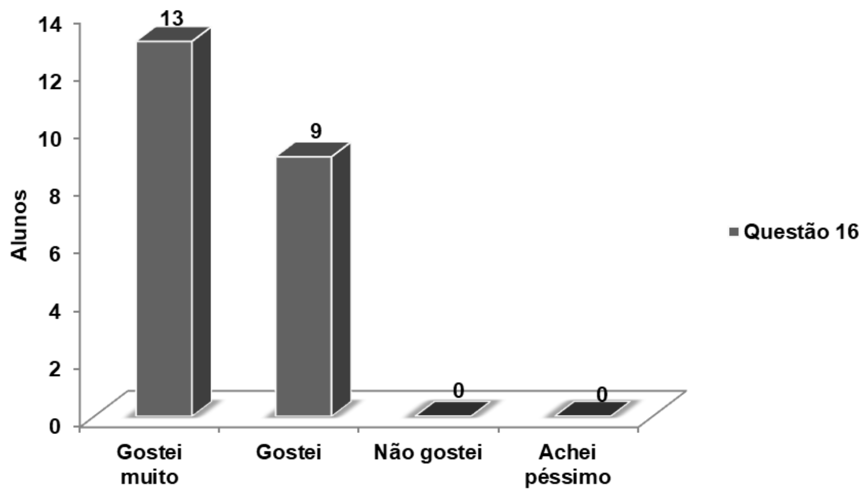
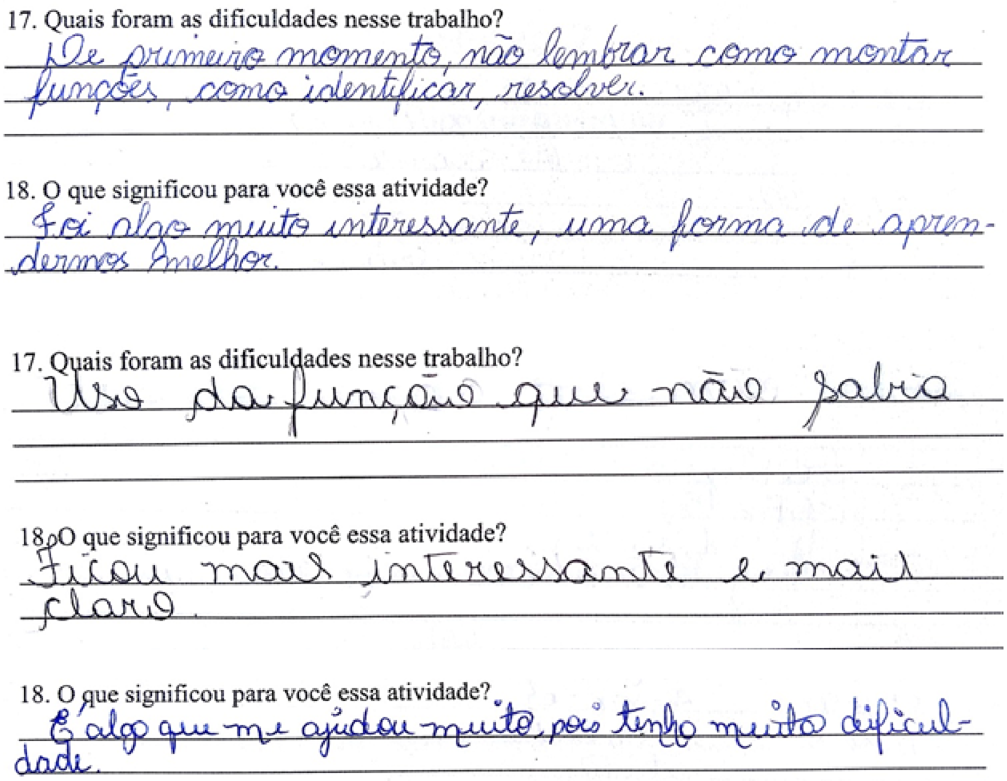


Figura 5.57: Próprio autor

Questão 17: Quais foram as dificuldades nesse trabalho?

Questão 18: O que significou para você essa atividade?



17. Quais foram as dificuldades nesse trabalho?
De primeiro momento, não lembrar como montar funções, como identificar, resolver.

18. O que significou para você essa atividade?
Foi algo muito interessante, uma forma de aprendermos melhor.

17. Quais foram as dificuldades nesse trabalho?
Uso da função que não sabia

18. O que significou para você essa atividade?
Ficou mais interessante e mais claro.

18. O que significou para você essa atividade?
É algo que me ajudou muito, pois tenho muita dificuldade.

Figura 5.58: Próprio autor

Questão 19: Suponha que a Companhia Paranaense de Energia (COPEL) cobra de cada unidade consumidora uma taxa fixa de iluminação pública no valor de $R\$9,40$ além de $R\$0,80$ para cada kWh de energia consumida. Você consegue enxergar uma relação entre o valor pago e o consumo da energia elétrica?

Questão 21: Neste mesmo exemplo, consegue enxergar uma aplicação de matemática (conceito de função) no seu dia a dia?

Questão 23: A partir do exemplo anterior, consegue imaginar uma situação real de forma similar ao problema anterior.

Questão 24: O pai do João tem 100 metros de tela (alambrado) e no sítio dele quer construir um curral com a maior área. Você consegue enxergar uma aplicação de matemática, principalmente do conceito de função nesse problema?

Questão 25: Você tem ideia de como resolver o problema anterior?

Questão 26: A mãe da Fernanda, tem uma chapa de madeira retangular 40 cm por 25 cm. A partir dessa chapa quer construir a maior caixa sem tampa, para poder guardar os brinquedos da Fernanda. Você consegue enxergar uma situação-problema?

Questão 27: Você tem ideia de como resolver o problema anterior?

Questão 28: O Departamento de Estradas de Rodagem de uma região, dispõe de 140 metros de tela (alambrado) e projeta construir uma área retangular de descanso para caminhões e veículos pequenos com a maior área. Qual é a medida dos lados e a área desse ponto de parada?

Questão 29: Você tem ideia de como resolver o problema anterior?

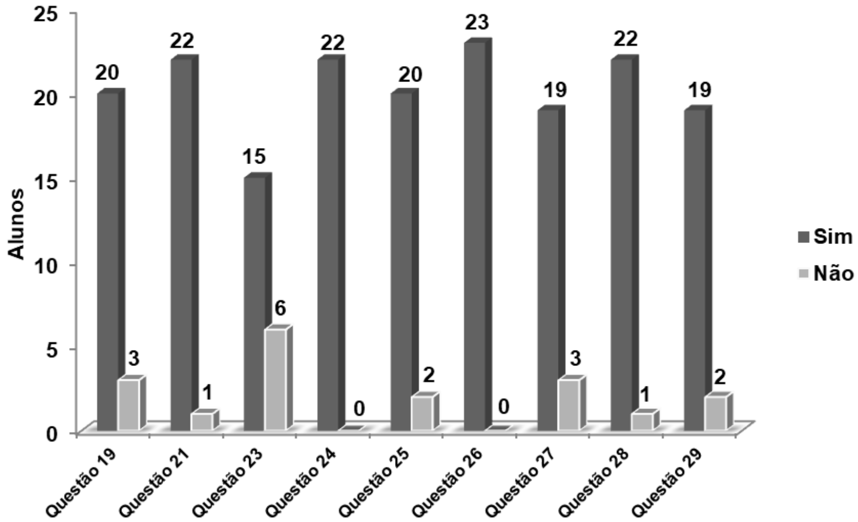


Figura 5.59: Próprio autor

Questão 30: Situações-problemas apresentadas nas questões 22, 24, 26 e 28 são chamados de problemas de otimização, onde maximizamos ou minimizamos uma grandeza. Você acredita que os problemas aprsentados são interessantes e que podem despertar o seu interesse em aulas de matemática vendo as aplicações reais de matemática no nosso cotidiano?

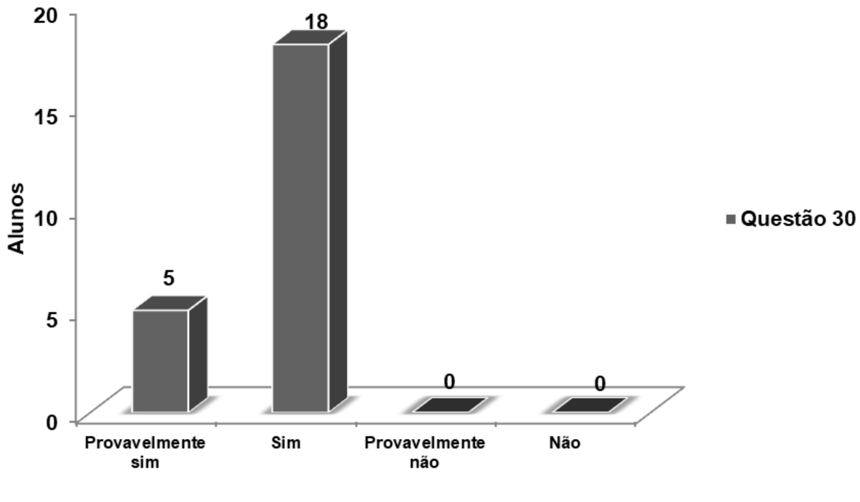


Figura 5.60: Próprio autor

6 CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Um dos grandes desafios da educação atualmente é buscar novas metodologias mediante as aulas tradicionais que muitas vezes permeiam as salas de aulas das escolas, fazendo então com que a tecnologia seja encarada como algo ruim e que veio para dispersar os estudantes.

Contudo, a utilização dessas novas abordagens, chamadas de metodologias ativas e os recursos digitais vem ganhando espaço nas salas de aulas, mudando a visão dos alunos e até mesmo dos professores, que passam a enxergar a matemática de outra maneira, modelando o cotidiano do estudante e revelando a sua importância para a vida e formação como cidadão.

Assim, em meio as dificuldades observadas pelos estudantes na área de matemática, este trabalho pode contemplar de modo diferente, uma nova abordagem no estudo de funções relacionando-as com problemas de otimização e modelagem matemática, mostrando na prática situações em que o uso de funções e os recursos digitais estão interligados e facilitam nosso cotidiano, fazendo uso do software GeoGebra e materiais manipuláveis, que objetivam uma aprendizagem significativa e ao mesmo tempo acessível a todos os estudantes e professores que desejam trabalhar com tais recursos.

Cabe notar, que é um tema importantíssimo na área de matemática e que apresenta inúmeras situações que são descritas por meio de funções e que o pensamento matemático se faz presente no dia a dia do aluno, mesmo que de forma implícita, e que, quando tratado na escola, é um dos temas mais rejeitados e incompreendidos, como mostrou a pesquisa, pois grande parte dos entrevistados não faziam ideia de como usar a função no cotidiano e de sua real aplicação.

Para tanto, algumas encontros foram realizados para o desenvolvimento do projeto e também avalições diagnósticas, uma no início e outra no término dos trabalhos, para poder analisar a eficácia das aulas experimentais realizadas, bem como o olhar de cada um, sobre a ideia apresentada. Podemos então, considerar que na segunda avaliação (Anexo II) houve uma melhora significativa nos resultados, além de que foi visível o progresso no entendimento dos estudantes com relação aos conceitos trabalhados que outrora, não sabiam identificar ou achavam “impossíveis” de aprender, além da participação e envolvimento dos estudantes com o grupo, trabalhando de modo colaborativo, e observando a matemática, sendo agora, um protagonista dos trabalhos realizados e não somente um expectador e um sujeito passivo obtendo resultados sem entender o real motivo das soluções.

Portanto, podemos concluir que unir os recursos digitais, em especial, o software GeoGebra com problemas de modelagem matemática envolvendo otimização de funções em situações práticas, desperta o interesse dos estudantes bem como melhora seu desempenho e participação nas aulas, compreendo os conceitos e fazendo a diferença, além de ser algo inovador, que deixa as aulas mais divertidas e prazerosas.

Assim, as atividades propostas nesse trabalho podem ser desenvolvidas por outros docentes que almejam trabalhar o conceito de função de modo a atrair a atenção de seus alunos e obter bons resultados, fazendo a diferença num ambiente onde infelizmente, apesar do mundo tecnológico que nos rodeia, ainda boa parte das aulas são realizadas são somente de forma tradicional, sem estimular os estudantes a enfrentar o novo e descobrir novos caminhos.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, R. C. **O Teorema Fundamental da Programação Linear e Modelagem Matemática no Ensino Médio**. São João del-Rei: [s.n.], 2013.

BORBA, M. d. C.; SILVA, R. S.; GADANIDIS, G. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento**. 1. ed. Belo Horizonte: [s.n.], 2016.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais - Matemática**. Brasília, 1997. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>. Acesso em: 28 de fevereiro de 2022.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais, Ensino Médio. Matemática**. Brasília, 1999. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 12 de março de 2022.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio**. Brasília, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf>. Acesso em: 02 de março de 2022.

BRASIL. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**. [S.l.]: Brasília, 2006. Acesso em: 02 de março de 2022.

BRITO, D. S.; ALMEIDA, L. M. W. O conceito de função em situações de modelagem matemática. **ZETETIKÉ – CEMPEM**, Universidade Estadual de Campinas – FE, n. 23, p. 63–86, 2005.

LIMA, E. L. **Números e Funções Reais**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

LUPINACCI, M.; BOTIN, M. Resolução de problemas no ensino da matemática. **Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática**, Sociedade Brasileira de Educação Matemática, p. 1–5, 2004.

MELO, J. N. B. **Uma Proposta de Ensino e Aprendizagem de Programação Linear no Ensino Médio**. Porto Alegre: [s.n.], 2012.

NETO, A. L. S. **Programação Linear e a Geometria Analítica**. Catalão: [s.n.], 2014.

NETO, W. C. B. et al. Sistema inteligente para o ensino-aprendizagem de expressões algébricas. **Revista Brasileira de Informática na Educação**, Instituto Federal de Santa Catarina, n. 28, p. 359–388, 2020.

NEVES, A. N. S. **Programação Linear: Problema de Transporte Aplicado no Ensino Médio**. Maranhlão: [s.n.], 2019.

PACHECO, M. B.; ANDREIS, G. S. L. Causas das dificuldades de aprendizagem em matemática: Percepção de professores e estudantes do 3º ano do ensino médio. **Revista Principia – João Pessoa**, n. 38, p. 105–119, 2018.

PARANÁ. **Diretrizes Curriculares da Rede Pública de Educação do Estado do Paraná**. 1. ed. Curitiba: [s.n.], 2008.

PONTE, J. P. O conceito de função no currículo de matemática. **Portugal: APM**, Revista Educação e Matemática, n. 15, p. 3–9, 1990.

ROCHA, A. M. **Problemas de Otimização Envolvendo a Matemática do Ensino Médio**. Goiânia: [s.n.], 2019.

SCHROEDER, E. Conceitos espontâneos e conceitos científicos:: O processo da construção conceitual em vygotsky. **Atos de Pesquisa em Educação**, n. 2, p. 293–318, 2007.

SOUSA, E. V. d. Objetos de aprendizagem no ensino de matemática e física: uma propostaiinterdisciplinar. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2010.

STEWART, J. **Cálculo – Vol 1**. 7. ed. São Paulo: [s.n.], 2013.

ZUFFI, E. M.; PACCA, J. L. d. A. O conceito de função e sua linguagem para os professores de matemática e de ciências. **Ciência & Educação (Bauru)**, SciELO Brasil, n. 1, p. 1–12, 2002.

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO 1

Ministério da Educação
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
UTFPR - CAMPUS CORNELIO PROCOPIO
PROFMAT-CP

O Uso dos Recursos Digitais e dos Problemas de Otimização como uma Abordagem Interdisciplinar no Ensino Médio

Professor Dr. Alireza Mohebi Ashtiani – UTFPR (Orientador)
Professor Jorge Matheus Fernandes de Camargo

1.Você gosta de matemática, em geral?

( ) Sim

( ) Não

2.Você considera as aulas de matemática agradáveis?

( ) Sim

( ) Não

3.Você considera as aulas tradicionais de matemática motivadoras?

( ) Sim

( ) Não

4.O que te levou a participar neste projeto de pesquisa?

( ) Gosto pela matemática

( ) Busca do conhecimento

( ) Novos desafios

( ) Gosto pelo uso das tecnologias

( ) Outros. Quais?

5.Você tem interesse por assuntos relacionados a matemática? Se sim, quais?

6. Você acha que os conteúdos de matemática aprendidos em sala de aula fazem parte do seu cotidiano?

( ) Sempre

( ) Às vezes

( ) Quase nada

( ) Nunca

7. Você considera importante o estudo da geometria?

( ) Sim

( ) Não

Por quê?

8. Sobre o conceito de função, você considera útil?

( ) Sim

( ) Não

9. Sobre o conceito de função, você já teve algum problema do seu dia a dia modelado por uma função?

( ) Sim

( ) Não

10. Quais os recursos seus professores de matemática normalmente usam em sala de aula?

( ) Livro didático

( ) Celular

( ) Quadro

( ) Computador

11. Você acha que deve haver mudanças na forma do ensino de matemática e como os conteúdos são apresentados hoje em sala de aula?

( ) Sim

( ) Não

Se sim, quais mudanças você consideraria importante?

12. Você acredita que se o professor mostrar as aplicações de matemática no seu dia a dia te faria gostar mais de matemática e ser mais motivado em aprender os conteúdos de matemática?

( ) Sim

( ) Não

13. Você considera interessante o uso de uma nova metodologia para o ensino da matemática?

( ) Sim

( ) Não

( ) Indiferente

14. Você acha que será mais fácil o entendimento sobre função utilizando o auxílio das tecnologias?

( ) Sim

( ) Não

( ) Indiferente

15. Você acha que poderia aprender mais utilizando novas metodologias no ensino da matemática?

( ) Sim

( ) Não

16. Você já ouviu falar sobre o software GeoGebra?

( ) Sim

( ) Não

17. Seja a função $f(x) = 5x + 6$. Qual é o tipo da função apresentada?

( ) Afim

( ) Quadrática

( ) Exponencial

( ) Logarítmica

( ) Não sei

18.Seja $f(x) = 2x–4$. Qual é o valor de $f(0)$?

( ) 4

( ) 2

( ) 0

( ) – 2

( ) – 4

( ) Não sei.

19.Suponha que a Companhia Paranaense de Energia (COPEL) cobra de cada unidade consumidora uma taxa fixa de iluminação pública no valor de R$ 9,11 além de R$ 0,84 para cada kWh de energia consumida. Você consegue enxergar uma relação entre o valor pago e o consumo da energia elétrica?

( ) Sim

( ) Não

20.No exemplo anterior, se uma casa for consumir 109 kWh, quantos reais deve pagar para a energia consumida?

( ) R$ 992,99

( ) R$ 91,56

( ) R$ 100,67

( ) Não sei

21.Neste mesmo exemplo, consegue enxergar uma aplicação de matemática (conceito de função) no seu dia a dia?

( ) Sim

( ) Não

22.Suponha que temos 14 palitos de fósforo de 1,0 *cm* cada. Queremos criar um retângulo com a maior área sem quebrar os palitos. Qual área desse retângulo?

( ) 7

( ) 14

( ) 12

( ) 20

( ) Não sei.

23. A partir do exemplo anterior, consegue imaginar uma situação real de forma similar ao problema anterior.

    ( ) Sim

    ( ) Não

    Se sim, descreva a situação-problema

24. O pai do João tem 140 metros de tela (alambrado) e no sítio dele quer construir um curral com a maior área. Você consegue enxergar uma aplicação de matemática, principalmente do conceito de função nesse problema?

    ( ) Sim

    ( ) Não

25. Você tem ideia de como resolver o problema anterior?

    ( ) Sim

    ( ) Não

    Se sim, como

26. A mãe da Fernanda, tem uma chapa de madeira retangular 100 cm por 80 cm. A partir dessa chapa quer construir a maior caixa sem tampa, para poder guardar os brinquedo da Fernanda. Você consegue enxergar uma situação-problema?

    ( ) Sim

    ( ) Não

27. Você tem ideia de como resolver o problema anterior?

    ( ) Sim

    ( ) Não

    Se sim, como

28. O avô do Júlio é um produtor de soja. Ele acredita que no primerio dia do mês setembro cada saco de soja custará R$ 200,00. Ao longo de setembro, o preço de saco de soja cai a uma taxa de R$ 2,00 por dia. No primeiro dia de setembro, o avô do Julio tem 100 sacos disponíveis no campo e estima que a plantação aumenta a uma taxa de 3 sacos por dia ao longo do mês. O avô do Julio quer saber da data que tem que realizar a colheira para ter a maior receita. Você consegue enxergar uma situação-problema?

    ( ) Sim

( ) Não

29. Você tem ideia de como resolver o problema anterior?

( ) Sim

( ) Não

Se sim, como

30. Situações-problemas apresentadas nas questões 22, 24, 26 e 28 são chamados de problemas de otimização, onde maximizamos ou minimizamos uma grandeza. Você acredita que os problemas apresentados são interessantes e que podem despertar o seu interesse em aulas de matemática vendo as aplicações reais de matemática no nosso cotidiano?

( ) Provavelmente sim

( ) sim

( ) Provavelmente não

( ) Não

APÊNDICE B – QUESTIONÁRIO 2

Ministério da Educação
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
UTFPR - CAMPUS CORNELIO PROCOPIO
PROFMAT-CP

O Uso dos Recursos Digitais e dos Problemas de Otimização como uma Abordagem Interdisciplinar no Ensino Médio

Professor Dr. Alireza Mohebi Ashtiani – UTFPR (Orientador)
Professor Jorge Matheus Fernandes de Camargo

1. Qual seria sua avaliação final sobre o uso dos recursos digitais e dos problemas de otimização como ferramentas para o ensino do conceito de função?

   ( ) Excelente

   ( ) Bom

   ( ) Ruim

2. Você aprendeu mais utilizando este novo modo de ensinar?

   ( ) Sim

   ( ) Não

   ( ) Indiferente

3. Você ficou convencido que o conceito de função é importante?

   ( ) Sim

   ( ) Não

4. Sobre o conceito de função, você acredita que muitos problemas do seu dia a dia podem ser modelados por uma função?

   ( ) Sim

   ( ) Não

5. Você acha que os conteúdos de matemática aprendidos em sala de aula fazem parte do seu cotidiano?

   ( ) Sempre

   ( ) Às vezes

   ( ) Quase nada

   ( ) Nunca

6. O que você achou sobre o uso do software GeoGebra como metodologia ativa?

   ( ) Excelente

   ( ) Bom

   ( ) Ruim

7. Ainda sobre o uso do GeoGebra, você acha que o software deixa as aulas de matemática mais motivadoras?

   ( ) Sim

   ( ) Não

   Por quê?

8. Você considera interessante o uso de uma nova metodologia para o ensino da matemática?

   ( ) Sim

   ( ) Não

   ( ) Indiferente

9. Você acha que será mais fácil o entendimento sobre função utilizando o auxílio das tecnologias?

   ( ) Sim

   ( ) Não

   ( ) Indiferente

10. Você acha que poderia aprender mais utilizando novas metodologias no ensino da matemática?

    ( ) Sim

    ( ) Não

11. Depois desta pesquisa, como está seu interesse em buscar novos conhecimentos?

    ( ) Aumentou

    ( ) Diminuiu

    ( ) Continua o mesmo

12. Caracterize o grau de complexidade da atividade desenvolvida ao longo do projeto

    ( ) Muito fácil

    ( ) Fácil

    ( ) Média

    ( ) Difícil

    ( ) Muito difícil

13. Você ficou satisfeito com os resultados alcançados pelo projeto?

    ( ) Sim

    ( ) Não

    ( ) Indiferente

14. O que mais te chamou a atenção durante a participação das aulas e realização das atividades?

    ( ) Problemas propostos

    ( ) Uso do GeoGebra

    ( ) A interdisciplinaridade envolvida

    ( ) A abordagem dos conceitos

    ( ) Outros:

15. Como você avalia o projeto que foi desenvolvido?

    ( ) Excelente

    ( ) Bom

    ( ) Regular

    ( ) Ruim

16. O que achou dos trabalhos realizados em equipe?

    ( ) Gostei muito

    ( ) Gostei

    ( ) Não gostei

    ( ) Achei péssimo

17. Quais foram as dificuldades nesse trabalho?

18. O que significou para você essa atividade?

19. Suponha que a Companhia Paranaense de Energia (COPEL) cobra de cada unidade consumidora uma taxa fixa de iluminação pública no valor de R$ 9,40 além de R$ 0,80 para cada kWh de energia consumida. Você consegue enxergar uma relação entre o valor pago e o consumo da energia elétrica?

    ( ) Sim

    ( ) Não

20. No exemplo anterior, se uma casa for consumir 109 kWh, quantos reais deve pagar para a energia consumida?

    ( ) R$ 992,99

    ( ) R$ 91,56

    ( ) R$ 96,60

    ( ) Não sei

21. Neste mesmo exemplo, consegue enxergar uma aplicação de matemática (conceito de função) no seu dia a dia?

    ( ) Sim

    ( ) Não

22. Suponha que temos 20 palitos de fósforo. Queremos criar um retângulo com a maior área sem quebrar os palitos. Qual área desse retângulo?

    ( ) 7

    ( ) 16

    ( ) 20

    ( ) 25

( ) Não sei.

23. A partir do exemplo anterior, consegue imaginar uma situação real de forma similar ao problema anterior.

( ) Sim

( ) Não

Se sim, descreva a situação-problema

24. O pai do João tem 100 metros de tela (alambrado) e no sítio dele quer construir um curral com a maior área. Você consegue enxergar uma aplicação de matemática, principalmente do conceito de função nesse problema?

( ) Sim

( ) Não

25. Você tem ideia de como resolver o problema anterior?

( ) Sim

( ) Não

Se sim, como

26. A mãe da Fernanda, tem uma chapa de madeira retangular 40 cm por 25 cm. A partir dessa chapa quer construir a maior caixa sem tampa, para poder guardar os brinquedos da Fernanda. Você consegue enxergar uma situação-problema?

( ) Sim

( ) Não

27. Você tem ideia de como resolver o problema anterior?

( ) Sim

( ) Não

Se sim, como

28. O Departamento de Estradas de Rodagem de uma região, dispõe de 140 metros de tela (alambrado) e projeta construir uma área retangular de descanso para caminhões e veículos pequenos com a maior área. Qual é a medida dos lados e a área desse ponto de parada? Você consegue enxergar uma situação-problema?

( ) Sim

( ) Não

29. Você tem ideia de como resolver o problema anterior?

( ) Sim

( ) Não

Se sim, como

30. Situações-problemas apresentadas nas questões 22, 24, 26 e 28 são chamados de problemas de otimização, onde maximizamos ou minimizamos uma grandeza. Você acredita que os problemas apresentados são interessantes e que podem despertar o seu interesse em aulas de matemática vendo as aplicações reais de matemática no nosso cotidiano?

( ) Provavelmente sim

( ) sim

( ) Provavelmente não

( ) Não