UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional

Abordagens sobre Matemática Financeira em sala de aula

Francine Ferreira da Silva

PROFMAT

Rio Claro - SP
2022

Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Abordagens sobre Matemática Financeira em sala de aula

Francine Ferreira da Silva

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de Rio Claro.

Orientadora
Profa. Dra. Érika Capelato

Rio Claro - SP
2022

S586a

Silva, Francine Ferreira da
Abordagens sobre Matemática Financeira em sala de aula / Francine Ferreira da Silva. -- Rio Claro, 2022
48 p. : tabs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro
Orientadora: Erika Capelato

1. Progressão Aritmética. 2. Progressão Geométrica. 3. Juros. 4. Tabela SAC. 5. Tabela Price. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

TERMO DE APROVAÇÃO

Francine Ferreira da Silva

Abordagens sobre Matemática Financeira em sala de aula

Dissertação aprovada como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Érika Capelato
Orientadora

Profa. Dra. Ana Elisa Périco
Departamento de Economia - FCL UNESP

Prof. Dr. Thiago Melo
Departamento de Matemática - IGCE UNESP

Rio Claro, 20 de novembro de 2022

Aos meus filhos,
Guilherme, Gustavo e Murillo.

Agradecimentos

Desde que nascemos, nós aprendemos. Aprendemos a conhecer nossos familiares e pessoas que estão ao nosso redor, aprendemos a ouvir e a falar, aprendemos a andar, sorrir, chorar, enfim, todos os dias aprendemos algo, superamos algo e ensinamos algo. Muitas vezes não nos damos conta de tudo o que há ao nosso redor. Não percebemos todas as pessoas que torcem por nós e que nos ajudam a trilhar nosso caminho.

Muitas das nossas conquistas foram conseguidas com o apoio de muitos. Deus, familiares, amigos, professores...

O que seria de nós se não existisse Deus? O que seria de nós se não tivéssemos nossos familiares, Nossos professores e nossos amigos?

A cada dia que se inicia, a cada conquista, devemos agradecer.

Agradecer à Deus pela vida, pelas possibilidades e por toda a ajuda necessária para ultrapassar todos os obstáculos encontrados ao longo do curso.

Agradecer aos meus pais e irmãos pelo apoio, incentivo e compreensão.

Agradecer aos meus filhos que compreenderam minhas ausências enquanto eu me dedicava ao curso e a este trabalho.

Agradecer à minha minha orientadora pelo incentivo, ensinamentos e dedicação à orientação contribuindo, assim, para que este trabalho fosse realizado.

Aos professores do PROFMAT do IGCE-UNESP pelos ensinamentos que contribuíram para o meu crescimento pessoal, acadêmico e profissional.

E, à todos que de alguma forma, me incentivaram a persistir para que o curso fosse finalizado.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

Você nunca sabe a força que tem.
Até que sua única alternativa é ser forte.
Johnny Deep

Resumo

A Matemática Financeira é uma das formas de conectar a matemática vista como ciência abstrata pelos estudantes à vida cotidiana. Ela é ainda uma das possibilidades de formar um estudante crítico e apto para exercer sua cidadania. Buscando fortalecer o potencial da ciência matemática em contribuir com o desenvolvimento socioeconômico e a redução das desigualdades do país, trazemos para esta pesquisa a temática da Educação Financeira na sala de aula. Este trabalho tem três partes. Na primeira apresentamos alguns norteadores que acreditamos serem importantes quando se pretende introduzir o Ensino da Educação Financeira nas escolas. Estes norteadores são a matriz de referência de Letramento Financeiro utilizada pelo *Programme for International Student Assessment* (PISA) para avaliação do desempenho dos estudantes; as diretrizes da Estratégia Nacional de Educação Financeira para a sala de aula e a proposta do ensino-aprendizagem da Matemática Financeira a partir da Educação Matemática Crítica. Na segunda parte, apresentamos alguns tópicos de Matemática Financeira como juros, taxas equivalentes e proporcionais, descontos e sistemas de amortização. Finalmente, propomos duas atividades que podem contribuir com o Letramento Financeiro dos estudantes do Ensino Médio.

Palavras-chave: Letramento Financeiro, Matemática Financeira, Ensino Médio, Interdisciplinaridade.

Abstract

Financial Mathematics is one of the ways to connect mathematics seen as abstract science by students to everyday life. It is also one of the possibilities to form a critical student who is able to exercise his citizenship. Seeking to strengthen the potential of mathematical science to contribute to socioeconomic development and the reduction of inequalities in the country, we bring to this research the theme of Financial Education in the classroom. This work has three parts. In the first one, we present some guidelines that we believe to be important when one intends to introduce the teaching of Financial Education in Schools. These guidelines are the financial literacy reference matrix used by the Program for International Student Assessment (PISA) to assess student performance; the guidelines of the National Strategy for Financial Education for the classroom and the proposal for teaching and learning financial mathematics based on critical mathematics education. In the second part, we present some topics of financial mathematics such as interest, equivalent and proportional rates, discounts and amortization systems. Finally, we propose two activities that can contribute to the financial literacy of high school students.

Keywords: Financial Literacy, Financial Mathematics, High school, interdisciplinary.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

1 Introdução

Em 2010 pelo Decreto Presidencial n^o 7.393 foi criada a Estratégia Nacional de Educação Financeira (ENEF). O objetivo desta política pública é "promover a educação financeira e previdenciária e contribuir para o fortalecimento da cidadania, a eficiência e solidez do sistema financeiro nacional e a tomada de decisões conscientes por parte dos consumidores" (Brasil, 2010).

Sua implementação propunha um conjunto de orientações e diretrizes para a criação de programas para três públicos alvo: crianças, jovens e adultos. Tais orientações e diretrizes podem ser consultadas no Plano Diretor e nos seus anexos (cf. ENEF, 2010a e ENEF, 2010b). Atualmente este decreto foi substituído pelo Decreto n^o 10.393 de 9 de junho de 2020, o qual atualiza a finalidade da ENEF em "promover a educação financeira, securitária, previdenciária e fiscal no País". Além disso, este novo decreto institui o Fórum Brasileiro de Educação Financeira (FBEF) responsável pela governança das ações. O Banco Central do Brasil (BCB) possui um perfil chamado Cidadania Financeira[1] que traz, entre outras coisas, informações sobre o andamento das ações da ENEF.

Uma breve linha do tempo dos dez anos de implantação da ENEF pode ser traçada com informações no site "vida e dinheiro"[2]: depois da criação da ENEF em 2010, nos anos 2011 e 2012 houve a aplicação de um projeto piloto de Educação Financeira no Ensino Médio em 900 escolas de cinco Estados; em 2013 inicia-se a disseminação da Educação Financeira nas Escolas do Ensino Médio; em 2014 inicia-se o Programa de Educação Financeira de adultos (mulheres beneficiárias do Programa Bolsa-Família e aposentados com renda até dois salários mínimos em situação de superendividamento); em 2015 houve a aplicação de um projeto piloto de Educação Financeira no Ensino Fundamental em 200 escolas; em 2016 o programa, Educação Financeira nas Escolas do Ensino Médio, atinge 3000 escolas; os anos 2017 e 2018 foram marcados pelo projeto transmídia (plataforma digital, TV e game). Houve parceria com a TV Escola, canal público do Ministério da Educação, lançamento de séries destinadas a jovens e educadores, games, material didático e cursos EaD disponibilizado gratuitamente em plataforma digital para professores do Ensino Fundamental e Médio. Além da implantação de quatro Polos de Educação Financeira (Tocantins, Minas Gerais, Rio Grande do Sul e Paraíba) que, por meio de acordos de cooperação técnica entre a Associação de Educação Financeira do Brasil (AEF-Brasil), as Secretarias de Educação e as Universidades Federais, criaram cursos de aperfeiçoamento e especialização em Educação Financeira para professores.

O leitor interessado em conhecer com detalhes o legado da ENEF nos últimos dez anos pode consultar a recente publicação de Forte (2020). O livro contém nove capítulos. No primeiro, explica-se a importância da Educação Financeira contextualizando o capita-

[1]bcb.gov.br/cidadaniafinanceira. Acesso em 12-10-2022.
[2]vidaedinheiro.gov.br. Acesso em 10 out. 2022

lismo, o aumento da globalização e como os conceitos sobre finanças são necessários nesse meio. No segundo, é mostrado o papel da Associação Financeira do Brasil (AEF-Brasil) na execução da ENEF. Neste capítulo é descrito as principais inciativas e programas criados para promover ações de Educação Financeira em todo o Brasil. O capítulo três traz a participação do setor privado e a importância das alianças multissetoriais para o desenvolvimento da ENEF. O quarto capítulo mostra a relação entre a Educação Financeira, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e o currículo. O quinto capítulo aborda a experiência do polo de Educação Financeira do Estado da Paraíba. O sexto capítulo mostra a trajetória da Educação Financeira nas escolas do Tocantins. O sétimo capítulo mostra a experiência de professores no Estado do Rio Grande do Sul. O oitavo capítulo mostra a experiência da formação de professores no estado de Minas Gerais. Finalmente, o capítulo nove traz dados sobre as pesquisas em Educação Financeira no país.

A definição de Educação Financeira adotada pelo Brasil no plano diretor da ENEF é a seguinte:

> Educação Financeira é o processo mediante o qual o indivíduo e as sociedades melhoram sua compreensão dos conceitos e dos produtos financeiros, de maneira que, com informação, formação e orientação claras, adquiram os valores e as competências necessários para se tornarem conscientes das oportunidades e dos riscos nele envolvidos e, então, façam escolhas bem informados, saibam onde procurar ajuda, adotem outras ações que melhorem o seu bem estar, contribuindo, assim, de modo consistente para a formação de indivíduos e sociedades responsáveis, comprometidos com o futuro. (ENEF, 2010a, p.20)

Esta definição foi dada pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) no primeiro livro com um grande estudo de Educação Financeira em nível internacional OECD (2005a). De acordo com o prefácio desta obra, pode-se dizer que o livro é resultado da primeira fase do Projeto de Educação Financeira criado pela OCDE em 2003.

Associada a esta definição, na literatura encontramos, frequentemente, o termo Letramento Financeiro. A definição que apresentaremos neste texto é a utilizada pelo Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA).

> Letramento Financeiro é o conhecimento e a compreensão de conceitos e riscos financeiros, bem como as habilidades e atitudes para aplicar esse conhecimento e essa compreensão, a fim de tomar decisões eficazes em uma variedade de contextos financeiros, melhorar o bem-estar financeiro dos indivíduos e da sociedade, e participar ativamente na vida econômica. (OCDE, 2014, apud INEP, p.24, 2020)

No Brasil, de acordo com a Pesquisa Nacional de Endividamento e Inadimplência do Consumidor (PEIC) realizada pela Confederação Nacional do Comércio de Bens, Serviços e Turismo (CNC)[3], em agosto de 2022 o percentual de famílias endividadas era de 79%,

[3] Disponível em: static.poder360.com.br/2022/09/endividamento-familias-dividas-cnc-5set2022.pdf. Acesso: 12-10-2022

uma alta de 6,1 pontos percentuais em relação a agosto do ano passado. A pesquisa revela ainda que o percentual de mulheres endividadas é superior ao percentual de homens; que o endividamento pela procura de crédito direto em carnês e cartão de lojas vem aumentando e que 10,8% das famílias brasileiras não terão como pagar suas dívidas.

Neste contexto, concordamos com Hofmann e Moro (2012) que destacam o papel da Educação Financeira como política pública capaz de "incrementar o Letramento Financeiro da população vulnerável, minimizando, em alguma medida, o risco a que esta está exposta" (Hofmann e Moro, p.48, 2012).

Outras pesquisas mostram que as pessoas formam hábitos, habilidade e comportamentos financeiros desde a infância e adolescência com seus pais e outros ao seu redor, indicando a importância da intervenção precoce para ajudar a adquirir comportamentos e atitudes benéficas (INEP, 2020 p. 18). Esta experiência financeira que as crianças e jovens têm com os adultos ao seu redor, tanto na transmissão de conhecimento teórico de assuntos financeiros, quanto nas atitudes e comportamentos diante de situações, é denominada de *socialização financeira* pela literatura.

Para Grohmann e Menkhoff (2015) a socialização financeira ocorre por diferentes canais como trabalho, escola e na família; no entanto, a família tem o maior impacto quando se trata deste processo.

Segundo INEP (2020), uma vez que nem todas as famílias estão igualmente equipadas para transmitir habilidades de letramento financeiro, as escolas estão bem posicionadas para proporcionar igualdade de oportunidade.

No entanto, mesmo com todos os esforços da ENEF, dados da OCDE (2020) apontam que, dentre os estudantes brasileiros que realizaram a avaliação de Letramento Financeiro do PISA no ano de 2018, 89,8% indicaram que têm informações sobre questões financeiras (isto é, sobre gastos, poupança, bancos ou investimentos) com seus pais, 80,6% indicaram a internet e apenas 46,2% indicaram os seus professores.

No Brasil a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) norteia os currículos e as propostas pedagógicas de todas as escolas públicas e privadas de Educação Infantil, Ensino Fundamental e Médio. Neste documento podemos ler:

> Por fim, cabe aos sistemas e redes de ensino, assim como às escolas, em suas respectivas esferas de autonomia e competência, incorporar aos currículos e às propostas pedagógicas a abordagem de temas contemporâneos que afetam a vida humana em escala local, regional e global, preferencialmente de forma transversal e integradora. Entre esses temas, destacam-se: [...] vida familiar e social, educação para o consumo, Educação Financeira e fiscal, trabalho [...]. Na BNCC, essas temáticas são contempladas em habilidades dos componentes curriculares, cabendo aos sistemas de ensino e escolas, de acordo com suas especificidades, tratá-las de forma contextualizada. (MEC, 2018, p. 19-20)

Desta forma, observamos que a BNCC considera a Educação Financeira para a formação integral dos estudantes brasileiros. No que diz respeito à Matemática para o Ensino Fundamental (Anos Finais), a Base prevê dentro da unidade temática "Números" o estudo de conceitos básicos de economia e finanças: "podem ser discutidos assuntos como taxas de juros, inflação, aplicações financeiras (rentabilidade e liquidez de um investimento) e impostos" (MEC, p. 269, 2018). Os projetos citados pela Base são interdisciplinares construindo, ainda segundo o documento, excelentes contextos para as aplicações dos conceitos da Matemática Financeira. No que se refere ao Ensino Médio a Base cita a importância da compreensão do sistema monetário contemporâneo nacional e mundial. As competências sugeridas estão na área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Como bem posto em Hofmann e Moro (2012) "dentre as múltiplas formas de manifestação da Matemática na atividade humana, talvez a mais recorrente seja a atividade econômica. É nela que as operações matemáticas encontram amplo espaço de aplicação, sendo imprescindíveis à prática de trocas mercantis. Talvez por isso os problemas de caráter financeiro e econômico protagonizem, em muitos livros, a contextualização textual dos problemas matemáticos numa função semiótica"(Hofmann e Moro, p. 47, 2012).

Assim, entendemos que a disciplina de Matemática torna-se protagonista no papel de Letramento Financeiro na escola, seja para resolução de problemas matemáticos no contexto financeiro, seja para articular projetos interdisciplinares.

Com uma pesquisa no banco de dissertações do PROFMAT observamos que no momento há 6.626 trabalhos. Através de uma busca usando os termos "Educação Financeira", "Matemática Financeira" e "Educação Financeira e Matemática Financeira", encontramos: 82, 119 e 2 dissertações, respectivamente[4]. Assim, a soma das dissertações nesta temática correspondem a aproximadamente 3,06% de todas as dissertações do banco.

Entendemos que o material gerado pelo PROFMAT é reflexo de uma rede complexa de experiências para determinação da temática a ser estudada. Mas a presença da Educação Financeira dentre os registros das dissertações mostra que há esforços em gerar discussão acerca deste importante desdobramento da Educação Matemática.

É no bojo dessa discussão que o presente trabalho tem por objetivo discutir como a Matemática Financeira pode contribuir na alfabetização financeira dos estudantes da Educação Básica. Para alcançar este objetivo pretende-se: (i) apresentar alguns norteadores para o ensino da Educação Financeira (Capítulo 2); (ii) apresentar algumas abordagens da Matemática Financeira (Capítulo 3) e (iii) propor algumas atividades para os estudantes do Ensino Médio que permita discutir a Matemática Financeira contextualizada com situações cotidianas na esfera da Educação Financeira (Capítulo 4).

[4]Números retirados do site do PROFMAT: https://profmat-sbm.org.br/. Acesso em 13-10-2022.

2 O Ensino da Educação Financeira

Neste capítulo, apresentamos três pontos que consideramos importantes quando pensamos no ensino da Educação Financeira, tanto na sala de aula da disciplina de matemática, como em projetos escolares interdisciplinares.

O primeiro ponto refere-se a avaliação do Letramento Financeiro. No Brasil, até onde conhecemos, a única avaliação de larga escala é a realizada pelo PISA. O PISA avaliou o Letramento Financeiro nos anos 2012, 2015, 2018 e prepara-se para avaliar os estudantes no ano de 2022. Mais do que conhecer os resultados desta avaliação, destacamos neste texto a importância do professor da Educação Básica conhecer a matriz de referência utilizada pelo PISA nesta avaliação. É nesta matriz que se apresenta os conteúdos e competências que serão avaliados; assim, ter este conhecimento pode contribuir no processo de ensino da Educação Financeira.

O segundo ponto que apresentamos neste capítulo são as diretrizes para a Educação Financeira nas escolas propostas pela ENEF. Estas diretrizes desencadearam a produção dos materiais disponíveis a nível nacional, tanto para o Ensino Fundamental como para o Ensino Médio.

Finalmente, apresentamos algumas reflexões de como a Matemática Financeira, abordada a partir da concepção da Educação Matemática Crítica, pode contribuir para construção do Letramento Financeiro dos estudantes.

2.1 Avaliação de Letramento Financeiro

O Programa internacional de Avaliação dos Estudantes (PISA), é pioneiro na internacional de Letramento Financeiro. O PISA é uma avaliação comparativa que oferece informações sobre o desempenho de estudantes com faixa etária de 15 anos, vinculando dados sobre seus *backgrounds* e suas atitudes em relação à aprendizagem, e também aos principais fatores que moldam sua aprendizagem, dentro e fora da escola.

Os resultados do PISA permitem que cada país avalie os conhecimentos e as habilidades de seus estudantes em comparação com os de outros países, aprenda com as políticas e práticas aplicadas em outros lugares e formule suas políticas e programas educacionais visando à melhora da qualidade e da equidade dos resultados de aprendizagem.

O Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP) é o órgão responsável pelo planejamento e a operacionalização da avaliacção no país, o que envolve representar o Brasil perante a OCDE, coordenar a tradução dos instrumentos de avaliação, coordenar a aplicação desses instrumentos nas escolas amostradas e a coleta das respostas dos participantes, coordenar a codificação dessas respostas, analisar os resultados e elaborar o relatório nacional.

O Pisa avalia três domínios: leitura, matemática e ciências, em todas as edições ou ciclos. A cada edição, é avaliado um domínio principal, o que significa que os estudantes respondem a um maior número de itens no teste dessa área do conhecimento e que os questionários se concentram na coleta de informações relacionadas à aprendizagem nesse domínio. A pesquisa também avalia domínios chamados inovadores, como Resolução de Problemas, Letramento Financeiro e Competência Global.

De acordo com OCDE (2020), na última avaliação do PISA, realizada em 2018, cerca de 85% dos estudantes, em média nos países/economias da OCDE, alcançaram pelo menos o nível 2 de proficiência em letramento financeiro. No nível 2 os estudantes conseguem aplicar seu conhecimento em produtos e termos financeiros comumente usados em situações que são relevantes para eles e podem reconhecer o valor de um orçamento simples. No entanto, em cinco países parceiros, mais de um em cada três alunos não atingiu o nível 2 de proficiência, o Brasil está entre estes países, com 43,6% dos estudantes abaixo deste nível e apenas 1,9% no nível 5, o nível de melhor proficiência estabelecido pelo PISA. Cerca de 10,5% dos estudantes, em média nos países/economias da OCDE, alcançaram o nível 5.

Este resultado apresentado pelo Brasil reforça a necessidade de olharmos para a matriz de referência que o PISA utiliza para fazer a avaliação de Letramento Financeiro. A matriz de referência é o documento balizador, tanto na elaboração das questões de uma avaliação, quanto para a interpretação pedagógica das escalas de proficiência. Ele contém as temáticas e as habilidades/competências que serão avaliadas. Desta forma, entendemos que ele torna-se um documento de relevância aos professores da Educação Básica na elaboração de suas atividades pedagógicas.

Como o PISA avalia os jovens de 15 anos, a matriz de referência aplica-se ao Ensino Médio. De forma geral, o PISA considera 04 temáticas na matriz de referência: dinheiro e transações, planejamento e gerenciamento financeiro, risco e retorno e cenário financeiro. A seguir apresentamos os descritos para cada tema (cf. INEP, p. 29-36 2020).

- **Dinheiro e transações**. Nesta temática as competências avaliadas indicam que o estudante esteja ciente das diferentes formas e propósitos do dinheiro e sinta-se confiante e capaz de lidar e monitorar transações.

- **Planejamento e gerenciamento financeiro**. Nesta temática as competências avaliadas indicam que o estudante seja capaz de monitorar e controlar receitas e despesas. Além disso, seja capaz de utilizar rendimentos e outros recursos disponíveis a curto e longo prazo para melhorar o bem-estar financeiro.

- **Risco e retorno**. Nesta temática as competências avaliadas indicam que o estudante seja capaz de identificam os riscos que têm maior probabilidade de afetar seriamente uma pessoa em particular, caso um incidente ocorra; identificar e administrar riscos e recompensas associados a eventos da vida ou da economia; reconhecer que certos produtos financeiros (incluindo seguros) e processos (como poupar) podem ser utilizados para administrar e compensar vários riscos (dependendo das diferentes necessidades e circunstâncias); compreender o risco inerente a certos produtos de crédito e investimento, tais como o risco de perda de capital, a variabilidade dos rendimentos e as implicações das taxas de juros variáveis no pagamento dos empréstimos; compreender os benefícios de planos de contingência e de diversificação para limitar o risco ao capital pessoal; compreender os benefícios de planos de contingência e de diversificação, bem como os perigos da inadimplência no pagamento de contas ou empréstimos; conhecer e ser cautelosos quanto aos riscos e benefícios associados aos substitutos dos produtos financeiros e compreender que novos produtos financeiros podem ter riscos e benefícios desconhecidos (tais como produtos de pagamento em dispositivos móveis e crédito on-line)

- **Cenário financeiro**. Nesta temática as competências avaliadas indicam que o estudante seja capaz de reconhecer o papel da regulação e da proteção do consumidor; conhecer direitos e deveres e ser capaz de aplicar esse conhecimento; conhecer e compreender o ambiente financeiro; conhecer os riscos financeiros e implicações de compartilhar dados financeiros pessoais; compreender os riscos financeiros da falta de proteção de dados; conhecer e compreender o impacto (a curto e longo prazo) das suas próprias decisões financeiras sobre si mesmos, sobre os outros e sobre o ambiente e conhecer a influência de fatores econômicos e externos.

A matriz de referência de Letramento Financeiro do PISA indica que "certas competências matemáticas, tais como o senso numérico, a familiaridade com múltiplas representações dos números e as habilidades de cálculo mental, de estimativa e de avaliação da plausibilidade dos resultados são intrínsecas a alguns aspectos do letramento financeiro" (INEP, p. 52 2020). Desta forma, a matriz deixa claro a interseção entre os os conteúdos de matemática e de Letramento Financeiro na avaliação. A Figura 2.1, disponível em INEP (2020) mostra os conteúdos avaliados em Matemática e em Letramento. Além disso, vemos o conteúdo na interseção das duas.

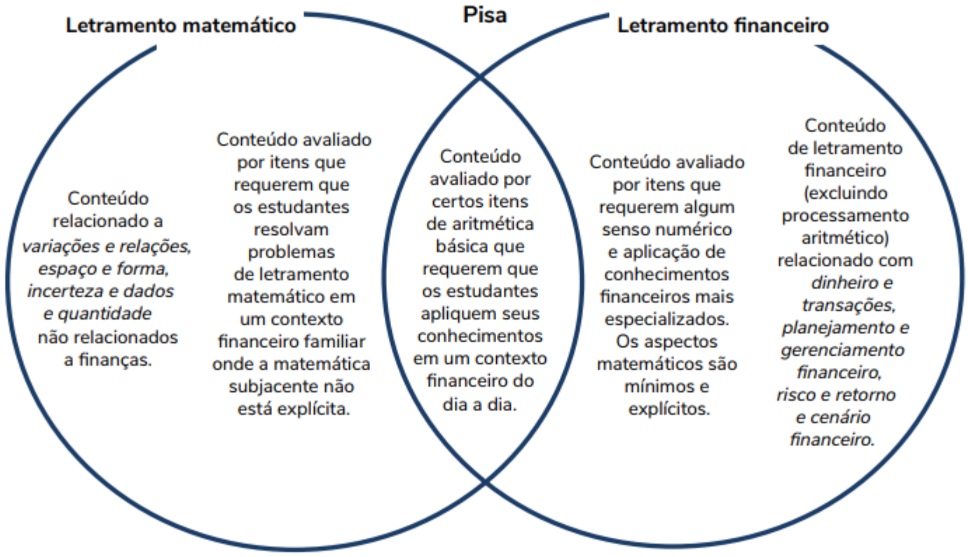

Figura 2.1: Relação entre o conteúdo de Letramento Financeiro e o de Letramento Matemático no país.

Complementa-se na matriz de referência de Letramento Financeiro do PISA que "estudantes letrados financeiramente devem ter alguma proficiência básica em Leitura para serem capazes de ler documentos financeiros e compreender termos financeiros apropriados" (INEP, p. 53, 2020). Além disso, "várias outras habilidades são relevantes para o Letramento Financeiro, incluindo resolução de problemas, pensamento crítico, reflexão e antecipação" (INEP, p. 54, 2020).

Estas habilidades somadas com o senso de ética, integridade e responsabilidade social, que o documento se refere como habilidades importantes do século 21, são os pontos que os professores devem considerar quando se pensa no ensino da Educação Financeira.

2.2 Diretrizes para a Educação Financeira nas escolas

Nos anexos do Plano Diretor da Estratégia Nacional de Educação Financeira (ENEF) podems encontrar diretrizes que orientam a promoção do ensino da Educação Financeira no ambiente escolar (cf. ENEF, 2010b). Estas diretrizes sugerem que a Educação Financeira seja estudada na dimensão espacial e temporal.

Na dimensão espacial, os conceitos da Educação Financeira se pautam no impacto das ações sobre o contexto social. Ela compreende os níveis individual, local, regional, nacional e global. Na dimensão temporal, os conceitos são abordados com base na noção de que o passado, presente e futuro se conectam numa cadeia que permite perceber o presente não somente como fruto das decisões tomadas no passado, mas como o tempo em que as decisões tomadas podem afetar o futuro. A Figura 2.2, disponível em ENEF (2010b), mostra como se relacionam os níveis de dimensão espacial entre si e com a dimensão temporal que os atravessa.

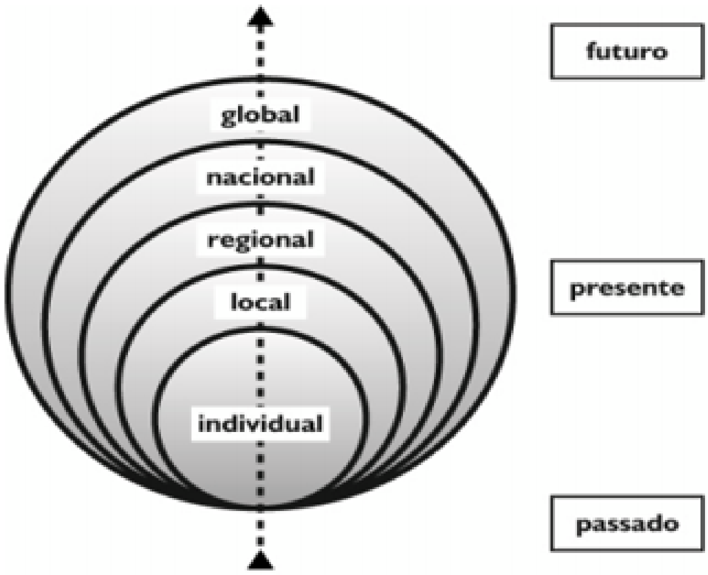

Figura 2.2: Dimensões espacial e temporal da educação financeira.

Na dimensão espacial, a ENEF (2010b) traz os seguintes propósitos para a Educação Financeira nas escolas: formar para a cidadania; educar para consumir e poupar de modo ético, consciente e responsável; oferecer conceitos e ferramentas para a tomada de decisão autônoma baseada em mudança de atitudes e formar disseminadores.

Já a dimensão temporal a ENEF (2010b) destaca: ensinar a planejar a curto, médio e longo prazos; desenvolver a cultura da prevenção e proporcionar a possibilidade de mudança da condição atual.

De forma geral, é determinado pela ENEF sete objetivos para a Educação Financeira na sala de aula. Quatro objetivos na dimensão espacial (OB1, OB2, OB3 e OB4) e três na dimensão temporal (OB5, OB6 e OB7). Estes objetivos podem ser encontrados em CONEF (2013). A seguir listamos cada um deles:

1. OB1: formar para a cidadania;

2. OB2: ensinar a consumir e a poupar de modo ético, consciente e responsável;

3. OB3: oferecer conceitos e ferramentas para a tomada de decisão autônoma baseada em mudança de atitude;
4. OB4: formar multiplicadores;
5. OB5: ensinar a planejar em curto, médio e longo prazos;
6. OB6: desenvolver a cultura da prevenção e
7. OB7: proporcionar a possibilidade de mudança na condição atual.

A estes objetivos conecta-se uma competência a ser desenvolvida no estudante. A Figura 2.3, disponível em CONEF (2013), apresenta um quadro que mostra as competências conectadas aos objetivos espaciais e temporais.

	OBJETIVOS		COMPETÊNCIAS	
OBJETIVOS ESPACIAIS	OB1	Formar para a cidadania	C01	Debater direitos e deveres
	OB2	Ensinar a consumir e a poupar de modo ético, consciente e responsável	C02	Tomar decisões financeiras social e ambientalmente responsáveis
			C03	Harmonizar desejos e necessidades no planejamento financeiro do projeto de vida
	OB3	Oferecer conceitos e ferramentas para tomada de decisão autônoma baseada em mudança de atitude	C04	Ler e interpretar textos específicos de Educação Financeira
			C05	Ler criticamente textos publicitários
			C06	Tomar decisões financeiras autônomas de acordo com suas reais necessidades
	OB4	Formar multiplicadores	C07	Atuar como multiplicador
OBJETIVOS TEMPORAIS	OB5	Ensinar a planejar em curto, médio e longo prazos	C08	Elaborar planejamento financeiro
	OB6	Desenvolver a cultura da prevenção	C09	Analisar alternativas de prevenção em longo prazo
	OB7	Proporcionar a possibilidade de mudança da condição atual	C10	Analisar alternativas para superar dificuldades econômicas

Figura 2.3: Relação entre objetivos espaciais e temporais e competências.

No objetivo “formar para a cidadania” é colocado que “ser cidadão é ser responsavelmente ativo na sociedade, protagonizando a construção da democracia.” (CONEF, p. 3, 2013). Neste objetivo a Educação Financeira é identificada como componente desta formação.

No objetivo “ensinar a consumir e a poupar de modo ético, consciente e responsável”. Aqui há a indicação de uma discussão do consumo equilibrado com a poupança, como ação responsável. Além disso, discute-se como ampliar a longevidade dos produtos adquirido para, por exemplo, diminuir a quantidade de lixo e a prática da doação. Outro ponto importante é discutir a produção dos bens, ou seja, se as empresas que os produzem são socioambientalmente comprometidas.

O objetivo "Oferecer conceitos e ferramentas para a tomada de decisão autônoma baseada em mudança de atitude" refere-se ao conhecimento da linguagem financeira e ao posicionamento frente às publicidades utilizadas para vender produtos e serviços financeiros.

O objetivo "formar multiplicadores" tem como propósito a formação crítica dos jovens para que eles possam ajudar suas famílias em boas práticas financeiras.

O objetivo "ensinar a planejar em curto, médio e longo prazos" tem o propósito de discutir a responsabilidade existente entre as ações do presente e as consequências do futuro. Para isso, neste objetivo os alunos são incentivados a planejar, ou seja, estabelecer um critério de prioridades para se atingir um determinado propósito por ele estabelecido.

No objetivo "desenvolver a cultura da prevenção" estão propostas discussões sobre situações adversas e inesperadas que podem demandar o uso de uma quantia de dinheiro não prevista. Assim, propõem-se discutir as seguintes ações: evitar desperdícios, guardar dinheiro, fazer seguros diversos ou investimentos ou dispor de planos de previdência (pública ou privada).

Finalmente, o objetivo "proporcionar a possibilidade de mudança na condição atual" é entendido como a possibilidade do indivíduo (ou da família) aprimorar sua condição socioeconômica. Neste objetivo deve-se apontar que os "conhecimentos e as competências oferecidos pela Educação Financeira ajudam a superar e evitar dificuldades econômicas mais graves, podendo auxiliar o indivíduo a rever suas atitudes e sair da condição de endividamento" (CONEF, p.5, 2013).

De acordo com estes objetivos estabelecidos pela ENEF o Comitê Nacional de Educação Financeira (CONEF) organizou alguns livros, tanto para o Ensino Fundamental, quanto para o Ensino Médio, os quais foram publicados pelo MEC. Ao todo são 03 livros para o Ensino Médio, 05 livros para os anos iniciais do Ensino Fundamental e 04 livros para os Anos Finais. Este material está disponível para no *site* vidaedinheiro.gov.br.

Acreditamos que conhecer este material pode ajudar o professor na proposição de atividades na sala de aula que contribua para o Letramento Financeiro dos estudantes.

2.3 Matemática Financeira e Educação Matemática Crítica

Nesta seção, vamos trazer algumas reflexões de educadores matemáticos para tratar das contribuições da matemática para o Letramento Financeiro dos estudantes. Mais especificamente, vamos nos referir ao processo de ensino-aprendizagem da Matemática Financeira.

Diversos autores contribuem para a definição de "Matemática Financeira". Em livros acadêmicos, como o de Assaf Neto (2012), podemos entrar, por exemplo, a seguinte definição: "A Matemática Financeira trata, em essência, do estudo do valor do dinheiro ao longo do tempo. O seu objetivo básico é o de efetuar análises e comparações dos vários fluxos de entrada e saída de dinheiro de caixa verificados em diferentes momentos" (Neto, p. 1, 2012).

Em Grando e Schneider (2010) podemos encontrar um texto que apresenta diversas difinições e, com isto, os autores apresentam um histórico sobre a origem da Matemática Financeira. De forma geral, historicamente, ela esteve muito ligada ao conceito e ao significado de comércio. Isto se revela, por exemplo, na origem da aritmética que, segundo os autores "foi a precursora nos cálculos dos problemas nas relações comerciais de vários povos, evoluindo mais tarde para o uso da álgebra (fórmulas ou modelos matemáticos) e teve a sua contribuição importante na forma como hoje são resolvidas as questões da matemática comercial e financeira" (Grando e Schneider, p.51, 2010).

Um ponto que merece destaque quando queremos conectar a Matemática Financeira ao Letramento Financeiro é a Educação Matemática Crítica. Escrever sobre este assunto requer um estudo aprofundado da Educação Matemática, o que não é o escopo deste trabalho. Segundo Ole Skovsmosen, na década de 1980, surge o movimento da Educação Matemática Crítica que se ocupa, sobretudo com aspectos políticos da Educação Matemática. Em seu livro "Educação Matemática Crítica: Uma Questão de Democracia" o autor escreve:

> [...] as questões econômicas por trás das fórmulas matemáticas e os problemas matemáticos, devem ter significado para o aluno e estarem relacionados a processos importantes da sociedade. Assim, o aluno tem um comprometimento social e político, pois identifica o que de fato é relevante no seu meio cultural (Ole Skovsmose, 2008, apud Lima e Sá, p.35, 2010)

Assim, dentro do referencial teórico da Educação Matemática Crítica podemos dizer que a Matemática Financeira contribui para o Letramento Financeiro. Isto se dá, acreditamos, pela infinitas possibilidades de modelagem matemática e contextualização de problemas. Este pensamento está de acordo com Jacobini e Wodewotzki (2006) que discutem que o crescimento político dos estudantes está diretamente relacionado com projetos de modelagem no contexto da Educação Matemática Crítica.

Na literatura podemo encontrar o livro Sá (2011) onde o autor apresenta propostas para estudar conceitos da Matemática Financeira sob a perspectiva da Educação Matemática Crítica.

A breve discussão desta seção tem a intenção de discutir o papel da Matemática Financeira na sala de aula. Este deve ir além da instrumentalização matemática, ou seja, deve considerar o poder de problematização para contribuir com a formação crítica do estudante tornando-o um agente transformador de sua realidade.

3 Matemática Financeira

Neste capítulo vamos abordar alguns tópicos da matemática financeira que podem ser estudados no Ensino Médio: Progressão aritmética, progressão geométrica, juros, fórmula fundamental de equivalência de capitais, taxas proporcionais, série uniforme, descontos e sistemas de amortização SAC e PRICE.

Vamos começar o capítulo tratando das progressões, pois as aplicações mais comuns delas é a Matemática Financeira.

Os conceitos, teoremas, exemplos e figuras deste capítulo foram retirados de Lima et al (2006).

3.1 Progressões Aritméticas

Em muitas situações do dia a dia encontramos grandezas que sofrem variações iguais em intervalos de tempo iguais. Isto ocorre, por exemplo, na produção em escala.

Se uma fábrica produziu 400 veículos em janeiro e aumenta, mensalmente, sua produção em 30 veículos, podemos determinar, por exemplo, sua produção para o mês de julho, veja a Tabela 3.1:

Mês	Produção mensal
Janeiro	400
Fevereiro	430
Março	460
Abril	490
Maio	520
Junho	550
Julho	580

Tabela 3.1: Produção mensal de automóvel

Poderíamos ter determinado a produção para o mês de julho a partir do seguinte raciocínio: Se a produção aumenta 30 veículos por mês, em 6 meses aumentará $6 \times 30 = 180$ veículos. Assim, em julho a fábrica produzirá $400 + 180 = 580$ veículos

A sequência $(400, 430, 460, 490, 520, 550, 580, \dots)$ é um exemplo de progressão aritmética. O aumento constante de cada termo para o termo seguinte é chamado de *razão de progressão*. A razão dessa progressão é igual a 30. Portanto, pode-se definir:

Definição 3.1. Uma *progressão aritmética* é uma sequência na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante. Essa diferença constante é chamada de *razão* da progressão e é representada pela letra r.

Exemplo 3.2. As sequências $(5, 8, 11, \dots)$ e $(7, 5, 3, 1, \dots)$ são progressões aritméticas cujas razões valem, respectivamente 3 e -2.

Em uma progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, \dots)$, para avançar um termo basta adicionar a razão; para avançar dois termos, basta adicionar duas vezes a razão e, assim sucessivamente. Assim, por exemplo $a_{13} = a_5 + 8 \cdot r$, pois ao passar de a_5 para a_{13}, avançamos 8 termos; $a_{12} = a_7 + 5 \cdot r$, pois avançamos 5 termos ao passarmos de a_7 para a_{12}; $a_4 = a_{17} - 13 \cdot r$ pois retrocedemos treze termos ao passar de a_{17} para a_4 e, de modo geral, $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$ pois, ao passar de a_1 para a_n avançamos $(n-1)$ termos.

Exemplo 3.3. Em uma progressão aritmética, o quinto termo vale 30 e o vigésimo vale 50. Quanto vale o oitavo termo dessa progressão?
Solução: $a_{20} = a_5 + 15 \cdot r$, pois ao passar do quinto termo para o vigésimo, avançamos 15 termos. Logo, $50 = 30 + 15 \cdot r$ e $r = \dfrac{4}{3}$. Analogamente, $a_8 = a_5 + 3 \cdot r = 30 + 3 \cdot \dfrac{4}{3} = 34$. O oitavo termo vale 34.

Exemplo 3.4. Qual é a razão da progressão aritmética que se obtém inserindo 10 termos entre os números 3 e 25?
Solução: Temos $a_1 = 3$ e $a_{12} = 25$, como $a_{12} = a_1 + 12 \cdot r \to 25 = 3 + 11 \cdot r \to r = 2$.

Exemplo 3.5. O cometa Halley visita a Terra a cada 76 anos. Sua última passagem por aqui foi em 1986. Quantas vezes ele visitou a Terra desde o nascimento de Cristo? Em que ano foi sua primeira passagem na era cristã?
Solução: Os anos de passagem do cometa Halley foram 1986, 1910, 1834, ... e formam uma progressão aritmética de razão -76. O termo de ordem n dessa progressão é $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$, isto é, $a_n = 1986 - 76 \cdot (n-1) = 2062 - 76 \cdot n$. Temos que $a_n > 0$ quando $n < \dfrac{2062}{76} = 27, 13, \dots$. Portanto, os termos positivos desta progressão são os 27 primeiros, $a_1, a_2, \dots, a_{27}$. Logo, ele visitou 27 vezes a era cristã e sua primeira passagem na era cristã foi no ano $a_{27} = 2062 - 76 \cdot 27 = 10$.

Em uma progressão aritmética de termos inteiros e razão não nula, todos os termos dão o mesmo resto quando divididos pelo módulo da razão. Como 1986 dividido por 76 dá resto 10, todos os anos em que o cometa por aqui passou dão resto 10 quando divididos por 76. A primeira visita ocorreu entre os anos 1 e 76, inclusive. Entre esses anos, o único que dividido por 76 dá resto 10 é o ano 10. Para descobrir a ordem desse termo, usamos $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$, isto é, $10 = 1986 - 76 \cdot (n-1)$. Daí,

$$n = \frac{2052}{76} = 27.$$

Muitas vezes é conveniente enumerar os termos de uma progressão aritmética a partir de zero, conforme mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 3.6. O preço de um carro novo é de R\$15.000,00 e diminui de R\$1.000,00 a cada ano de uso. Qual será o preço com 4 anos de uso?
Solução: Chamando o preço com n anos de uso de a_n, temos $a_0 = 15.000$ e queremos calcular a_4. Como a desvalorização anual é constante, (a_n) é uma progressão aritmética. Logo, $a_4 = a_0 + 4 \cdot r = 15.000 + 4 \cdot (-1.000) = 11.000$. O preço será de R\$11.000.

Exemplo 3.7. Em uma progressão aritmética, o termo geral é dado por um polinômio em n, $a_n = a_1 + (n-1)r = rn + (a_1 - r)$. Se $r \neq 0$, ou seja, se a progressão não for estacionária (constante) este polinômio é de grau 1. Se $r = 0$, isto é, se a progressão for estacionária, este polinômio é de grau menor que 1. Por este motivo as progressões aritméticas de razão $r \neq 0$ são chamadas de progressão aritméticas de primeira ordem. Reciprocamente, se em uma sequência o termo de ordem n for dado por um polinômio em n, de grau menor ou igual a 1, ela será um progressão aritmética. Com efeito, se $x_n = an + b$, (x_n) é a progressão na qual $a = r$ e $b = a_1 - r$, ou seja, $r = a$ e $a_1 = a + b$

3.1.1 Fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética

Quando o matemático Carl F. Gauss (1777-1855) tinha sete anos de idade ele somou os inteiros de 1 até 100 fazendo:

$$1 + 100, 2 + 99, 3 + 98, \dots, 100 + 1.$$

Assim, ele obteve 50 somas iguais a 101. Assim, o grande matemático, com sua pequena idade, concluiu que

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 100 = 50 \times 101 = 5.050.$$

Esta é a ideia para demonstrar o seguinte resultado:

Teorema 3.8. *A soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética* $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ *é dada por:*

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}.$$

Demonstração. Temos $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$ e, escrevendo a soma de trás para frente, temos $S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1$. Daí:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Observe que, ao passar de um parênteses para o seguinte, a primeira parcela aumenta de r e a segunda parcela diminui de r, o que não altera a soma. Portanto, todos os parênteses são iguais ao primeiro, $(a_1 + a_n)$. Como são n parênteses, temos:

$$2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n \text{ e } S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}.$$

□

Exemplo 3.9. Qual é o valor da soma dos 20 primeiros termos da progressão aritmética 2, 6, 10, . . . ?
Solução: $a_{20} = a_1 + 19 \cdot r = 2 + 19 \cdot 4 = 78$ e

$$S_{20} = \frac{(2 + 78) \cdot 20}{2} = 800.$$

Exemplo 3.10. A soma dos n primeiros inteiros positivos é

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1}{2}.$$

3.2 Progressões Geométricas

Podemos motivar o estudo de progressões geométricas a partir dos seguintes problemas:

Exemplo 3.11. Uma pessoa, começando com R$64,00 faz seis apostas consecutivas, em cada uma das quais arrisca perder ou ganhar a metade do que possui na ocasião. Se ela ganha três e perde três dessas apostas, pode-se afirmar que ela:

(a) ganha dinheiro.

(b) não ganha nem perde dinheiro.

(c) perde R$27,00.

(d) perde R$37,00.

(e) ganha ou perde dinheiro, dependendo da ordem em que ocorreram suas vitórias e derrotas.

Solução: Neste problema devemos pensar assim: Cada vez que ganha o capital aumenta $\frac{1}{2}$ (ou seja, 50%) e passa a valer $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ do que valia; cada vez que perde, o capital diminui $\frac{1}{2}$ (ou seja, 50%) e passa a valer $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ do que valia. Pensando assim, fica claro que se a pessoa vence as três primeiras apostas e perde as três últimas, a evolução do seu capital se dá de acordo com o esquema:

$$64 \longrightarrow 64 \cdot \frac{3}{2} \longrightarrow 64 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \longrightarrow 64 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \longrightarrow 64 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \longrightarrow$$
$$\longrightarrow 64 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \longrightarrow 64 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

Ela termina com $64 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 27$ reais. Além disso, fica claro também que se as vitórias e derrotas ocorressem em outra ordem, isso apenas mudaria a ordem dos fatores, sem alterar o produto, e a pessoa também terminaria com R$27.

Se ela começou com R$64,00 e terminou com R$27,00 ela perdeu R$37,00. A resposta correta é a (d).

Exemplo 3.12. A população de um país hoje é igual a P_0 e cresce 2% ao ano. Qual será a população deste país daqui a n anos?
Solução: Se a população cresce 2% ao ano, em cada ano a população é de 102% da população do ano anterior. Portanto, a cada ano que passa, a população sofre uma multiplicação por 102% = 1,02. Depois de n anos a população será $P_0 \cdot 1,02^n$

Exemplo 3.13. A torcida de um certo clube é hoje P_0 e decresce 5% ao ano. Qual será a torcida desse clube daqui n anos?
Solução: Se a torcida decresce 5% ao ano, em cada ano a torcida é 95% da torcida do ano anterior. Portanto, a cada ano que passa, a torcida sofre uma multiplicação por 95% = 0,95. Depois de n anos a torcida será $P_0 \cdot 0,95^n$.

Destes exemplos podemos extrair a seguinte ideia: se uma grandeza tem taxa de crescimento igual a i, cada novo valor da grandeza é igual a $(1 + i)$ vezes o valor anterior.

Progressões geométricas são sequências nas quais a taxa de crescimento i de cada termo para o seguinte é sempre a mesma.

Exemplo 3.14. A sequência (1000, 800, 640, 512, ...) é um exemplo de uma progressão geométrica. Aqui, cada termo é 80% do termo anterior. A taxa de crescimento de cada termo para o seguinte é de -20%.

Então, em uma progressão geométrica cada termo é igual ao anterior multiplicado por $1+i$, onde i é a taxa de crescimento dos termos. Chamamos $1+i$ de razão da progressão e representamos a razão por q. Assim, podemos definir:

Definição 3.15. Uma *progressão geométrica* é uma sequência na qual é constante o quociente da divisão de cada termo pelo termo anterior. Esse quociente constante é chamado de razão da progressão e é representado pela letra q. A razão q de uma progressão geométrica é simplesmente o valor de $1+i$, onde i é a taxa de crescimento constante de cada termo para o seguinte.

Exemplo 3.16. As sequências $(2, 6, 18, 54, \dots)$ e $(128, 32, 8, 2, \dots)$ são progressões geométricas cujas razões valem respectivamente $q_1 = 3$ e $q_2 = \frac{1}{4}$. Suas taxas de crescimento são respectivamente $i_1 = 2 = 200\%$ e $i_2 = -\frac{3}{4} = -75\%$, pois $q = 1 + i$.

Exemplo 3.17. Em uma progressão geométrica $(a_1, a_2, a_3, \dots)$, para avançar um termo basta multiplicar pela razão; para avançar dois termos, basta multiplicar duas vezes pela razão, e assim por diante.

Por exemplo, $a_{13} = a_5 \cdot q^8$, pois avançamos oito termos ao passar de a_5 para a_{13}; $a_{12} = a_7 \cdot q^5$, pois avançamos cinco termos ao passar de a_7 para a_{12}; $a_4 = \frac{a_{17}}{q^{13}}$, pois ao passar de a_7 para a_4 retrocedemos treze termos; de modo geral, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ pois, ao passar de a_1 para a_n avançamos $n-1$ termos.

Em muitos casos é mais natural numerar os termos a partir de zero. Neste caso, $a_n = a_0 q^n$, pois avançamos n termos ao passar de a_0 para a_n.

Exemplo 3.18. Em uma progressão geométrica, o quinto termo vale 5 e o oitavo termo vale 135. Quanto vale o sétimo termo dessa progressão?

Solução: $a_8 = a_5 \cdot q^3$, pois ao passar do quinto termo para o oitavo, avançamos três termos. Logo, $135 = 5 \cdot q^3$ e $q = 3$. Analogamente, $a_7 = a_5 \cdot q^2 = 5 \cdot 3^2 = 45$. O sétimo termo vale 45.

3.2.1 Fórmula das Taxas Equivalentes

Um resultado importante é a fórmula que relaciona taxas de crescimento referidas a períodos de tempos diversos:

Teorema 3.19. *Se I é a taxa de crescimento de uma grandeza relativa ao período de tempo T e i é a taxa de crescimento relativa ao período t, e se $T = n \cdot t$, então $1 + I = (1+i)^n$.*

Demonstração. Seja G_0 o valor inicial da grandeza. Após um período de tempo T, o valor da grandeza será $G_0 \cdot (1+I)^1$. Como um período de tempo T equivale a n períodos de tempo iguais a t, o valor da grandeza será também igual a $G_0 \cdot (1+i)^n$. Logo, $G_0 \cdot (1+I)^1 = G_0 \cdot (1+i)^n$ e $1 + I = (1+i)^n$. □

Exemplo 3.20. Se a população de um país cresce 2% ao ano, quanto crescerá em 25 anos?

Solução: Temos $i = 2\% = 0,02$ e $n = 25$. Daí, $1+I = (1+i)^n = (1+0,02)^{25} \cong 1,6406$ e $I \cong 0,6406 = 64,06\%$. Crescerá aproximadamente $64,06\%$.

Exemplo 3.21. Uma bomba de vácuo retira, em cada sucção, 2% do gás existente em certo recipiente. Depois de 50 sucções, quanto restará do gás inicialmente existente?

Solução: Temos $i = -2\% = -0,02$ e $n = 50$. Daí, $1 + I = (1 + i)^{50} = (1 - 0,02)^{50} \cong 0,3642$ e $I \cong 0,6358 = -63,58\%$. A quantidade de gás diminuirá aproximadamente $63,58\%$. Restarão aproximadamente $36,42\%$ do gás inicialmente existente.

3.2.2 Fórmula da soma dos n primeiros termos de uma Progressão Geométrica

Teorema 3.22. *A soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica* (a_n)*, de razão* $q \neq 1$*, é* $S_n = a_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q}$.

Demonstração. Seja a soma $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Multiplicando S_n por q, obtemos:

$$q \cdot S_n = a_2 + a_3 + \cdots + a_{n+1}.$$

Subtraindo, $S_n - q \cdot S_n = a_1 - a_{n+1}$, isto é, $S_n \cdot (1 - q) = a_1 - a_1 \cdot q^n$ e, finalmente

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}.$$

□

Exemplo 3.23. Um tabuleiro de xadrez é composto por 64 casas distribuídas em oito colunas (verticais) e oito linhas (horizontais), as casas são alternadamente escuras e claras. Diz a lenda que e o inventor do xadrez pediu como recompensa um grão de trigo pela primeira casa, dois grãos pela segunda, quatro pela terceira e assim por diante, sempre dobrando a quantidade a cada nova casa. Como o tabuleiro de xadrez tem 64 casas, o número de grãos pedido pelo inventor do jogo é a soma dos 64 primeiros termos da progressão geométrica 1, 2, 4,... O valor dessa soma é:

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} = 1 \frac{1-2^{64}}{1-2} = 2^{64} - 1 = 18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 615.$$

Nas progressões geométricas em que $|q| < 1$, a soma dos n primeiros termos tem um limite finito quando $n \to \infty$. Como nesse caso $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ temos

$$\lim_{n\to\infty} S_n = a_1 \frac{1-0}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}.$$

Exemplo 3.24. O limite da soma $0,3 + 0,03 + 0,003 + \ldots$ quando o número de parcelas tende a infinito é igual a

$$\frac{0,3}{1-0,1} = \frac{1}{3}.$$

O resultado é intuitivo pois somando um número muito grande de termos da progressão encontraremos aproximadamente a dízima periódica $0,33333 \cdots = \frac{1}{3}$.

Nas próximas subseções, utilizando o que vimos de progressões, vamos introduzir os conceitos de juros simples (associado à progressão aritmética) e o de juros composto (associado à progressão geométrica).

3.3 Conceito básico: Juros

A operação básica da matemática financeira é a operação de empréstimo. Se o indivíduo X dispõe de um capital C (chamado de *principal*) e empresta-o a um indivíduo Y por um certo período de tempo quando recebe o seu capital C de volta, este vem acrescido de uma remuneração J (que é cobrada pelo empréstimo de dinheiro). Essa remuneração é chamada *juro*. A soma $C + J$ é chamada *montante* e será representado por M. A razão $i = \dfrac{J}{C}$ é a taxa de crescimento do capital, será sempre referida ao período da operação e chamada de *taxa de juros*.

Exemplo 3.25. Lúcia tomou um empréstimo de R$ 100,00. Dois meses após, pagou R$ 140,00. Os juros pagos por Lúcia são de R$ 40,00 e a taxa de juros é de $\dfrac{40}{100} = 0,40 = 40\%$ ao bimestre. O principal, que é a dívida inicial de Lúcia, é igual a R$ 100,00; o montante, que é a divida na época do pagamento, é de R$ 140,00.

3.3.1 Juros Simples

Nesta subseção vamos utilizar o texto de Sá (2011) para abordar os conceitos e exemplos.

Os *juros simples* se caracterizam pelo fato de que o valor que é acrescido ao valor inicial C_0 a cada período é sempre constante e determinado por $i \cdot C_0$. Desta forma, fica caracterizada na sequência dos montantes obtidos, uma progressão aritmética, de razão igual a $i \cdot C_0$.

Se i é a taxa de juros simples (ou taxa de crescimento aritmético) ao fina.de n períodos, teremos um acréscimo de $C \cdot i \cdot n$. Assim, o montante final será representado por

$$M = C + C \cdot in = C \cdot (1 + n \cdot i). \tag{3.1}$$

Exemplo 3.26. Qual o montante final de uma aplicação de R$ 5.000,00 a juros simples contratados a 1,5% ao mês, por 10 meses?
Solução: Utilizando a representação (3.1) temos

$$M = 5000 \cdot (1 + 10 \times 0,015) = 5000 \cdot 1,15 = 5750.$$

Podemos fazer algumas observações neste exemplo. A primeira observação é a de que como se trata de juros simples, o ganho fixo mensal é igual a $J = 5.000 \cdot 0,015 = 75$ reais. Multiplicando este ganho pelo número de meses ($10 \times 75 = 750$ reais de juros). Logo, o montante será igual a

$$M = 5000 + 750 = 5750$$

A segunda observação é que usando as remunerações obtidas em cada mês, podemos montar a seguinte progressão aritmética (5000, 5075, 5150, 5225, 5300, 5375, 5450, 5525, 5600, 5675, 5750, ...). Podemos ver que o termo $a_0 = 5000$ e o termo $a_{10} = 5750$.

Exemplo 3.27. Qual a taxa mensal de juros simples que, em uma aplicação por 8 meses, elevou um capital de R% 3000,00 a R% 3780,00?
Solução: De (3.1) temos

$$3000 \cdot (1 + 8i) = 3780$$

$$1 + 8i = \frac{3780}{3000}$$

$$8i = 1,26 - 1$$
$$i = \frac{0,26}{8} = 0,0325$$

ou ainda 3,25% ao mês.

3.3.2 Juros Compostos

Vamos considerar o seguinte exemplo para ilustrar:

Exemplo 3.28. Manuel tomou um empréstimo de $R\$100,00$, a juros de taxa 10% ao mês. Após um mês, a dívida de Manuel será acrescida de $0,10 \cdot 100 = 10$ reais de juros (pois $J = i \cdot C$), passando a 110 reais. Se Manuel e seu credor concordarem em adiar a liquidação da dívida por mais um mês, mantida a mesma taxa de juros, o empréstimo será quitado, dois meses depois de contraído, por 121 reais, pois os juros relativos ao segundo mês serão de $0,10 \cdot 110 = 11$. Esses juros assim calculados são chamados de *juros compostos*. Mais precisamente, no regime de juros compostos, os juros em cada período são calculados, conforme é natural, sobre a dívida do início desse período.

As pessoas menos educadas matematicamente têm tendência a achar que juros de 10% ao mês dão em dois meses, juros de 20%. Note que juros de 10% ao mês dão em dois meses juros de 21%.

Teorema 3.29. *No regime de juros compostos de taxa i, um principal C_0 transforma-se, depois de n períodos, em um montante $M = C_0(1+i)^n$.*

Demonstração. Basta observar que os valores do capital crescem a uma taxa constante i e, portanto, formam uma progressão geométrica de razão $1+i$. □

De fato, ao final de um período o valor corrigido pela taxa i é de $C_1 = C_0 + C_0 \cdot i = C_0(1+i)$. No próximo período teremos $C_1 + C_1 \cdot i = C_0(1+i)(1+i) = C_0(1+i)^2$, e assim sucessivamente obtemos no período n o montante

$$M = C_0(1+i)^n. \tag{3.2}$$

Exemplo 3.30. Um capital de R\$ 5000,00 é aplicado a juros compostos durante 4 anos à taxa de 20% ao ano. Vamos calcular os juros e o montante para cada período.
Solução: Os juros do 1º ano são: $5.000 \cdot (0,20) = 1.000$, e o montante após 1 ano é $5.000 + 1.000 = 6.000$. Os juros do 2º ano são: $6.000 \cdot (0,20) = 1200$, e o montante após 2 anos é $6000 + 1200 = 7.200$. Os juros do 3º ano são: $7.200 \cdot (0,20) = 1.440$, e o montante após 3 anos é $7200 + 1440 = 8.640$. Os juros do 4º ano são: $8.640 \cdot (0,20) = 1.728$, e o montante após 4 anos é $M = 8.640 + 1.728 = 10.368$.

Exemplo 3.31. Pedro investe R\$150,00 a juros de 12% ao mês. Qual será o montante de Pedro três meses depois?
Solução Usando (3.2) temos

$$M = C_0 \cdot (1+i)^3 = 150 \cdot (1+0,12)^3 = 210,74.$$

É importante perceber que o valor de uma quantia depende da época à qual ela está referida. Se conseguirmos fazer com que o dinheiro renda 10% ao mês, ou seja, se o dinheiro vale 10% ao mês, é indiferente pagar agora $R\$100,00$ ou pagar $R\$110,00$ daqui a um mês. É mais vantajoso pagar $R\$105,00$ daqui a um mês do que pagar $R\$100,00$ agora. É mais vantajoso pagar $R\$100,00$ agora do que pagar $R\$120,00$ daqui a um mês.

Assim, na Matemática Financeira os problemas ocupam-se em deslocar quantias no tempo.

3.4 Fórmula Fundamental de Equivalência de Capitais

Outro modo de ler a equação (3.2) é que uma quantia hoje igual a C_0, depois de n períodos irá se transformar em uma quantia igual a $C_0(1+i)^n$. Isto é, uma quantia que no valor atual é A, equivalerá no futuro, depois de n períodos de tempo, a $F = A(1+i)^n$. Assim temos o que os livros chamam de *fórmula da equivalência de capitais*:

Para obter o valor futuro, basta multiplicar o valor atual por $(1+i)^n$*. Para obter o valor atual, basta dividir o valor futuro por* $(1+i)^n$*.*

O exemplo abaixo é considerado um resumo de todos os problemas da Matemática Financeira.

Exemplo 3.32. Pedro tomou um empréstimo de 300 reais, a juros de 15% ao mês. Dois meses após, Pedro pagou 150 reais e, um mês após esse pagamento, Pedro liquidou seu débito. Qual o valor desse último pagamento?
Solução: Os esquemas de pagamento abaixo (ver Figura 3.1) são equivalentes.

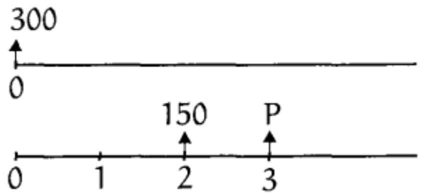

Figura 3.1: Esquema de Pagamento.

Logo, 300 reais, na data 0, têm o mesmo valor de 150 reais dois meses após, mais um pagamento igual a P, na data 3.

Igualando os valores, na mesma época (0, por exemplo), dos pagamentos nos dois esquemas, obtemos:

$$300 = \frac{150}{(1+0,15)^2} + \frac{P}{(1+0,15)^3}$$

Daí, $P = 283,76$. O último pagamento foi de $R\$283,76$.

Exemplo 3.33. Pedro tem duas opções de pagamento na compra de um televisor:

(i) três prestações mensais de R$160,00 cada

(ii) sete prestações mensais de R$70,00 cada.

Em ambos os casos, a primeira prestação é paga no ato da compra. Se o dinheiro vale 2% ao mês para Pedro, qual a melhor opção que Pedro possui?
Solução: Para comparar, determinaremos o valor dos dois conjuntos de pagamentos na mesma época, por exemplo na época 2. Os esquemas de pagamentos são mostrados na Figura 3.2.

$$a = 160 \cdot (1+0,02)^2 + 160 \cdot (1+0,02) + 160 = 489,66$$

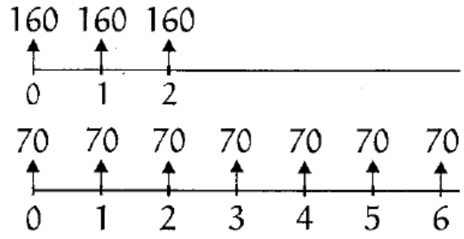

Figura 3.2: Opções de pagamentos.

$$b = 70 \cdot (1+0,02)^2 + 70 \cdot (1+0,02) + 70 + \frac{70}{1+0,02}$$
$$+ \frac{70}{(1+0,02)^2} + \frac{70}{(1+0,02)^3} + \frac{70}{(1+0,02)^4} = 480,77$$

Pedro deve preferir o pagamento em seis prestações. É absurdo que muitas pessoas razoavelmente instruídas achem que o primeiro esquema é melhor pois o total pago é de R\$480, 00 ao passo que no segundo esquema o total pago é de $R\$490,00$.

Exemplo 3.34. Pedro tem três opções de pagamento na compra de vestuário.

(i) à vista, com 30% de desconto.

(ii) em duas prestações mensais iguais, sem desconto, vencendo a primeira um mês após a compra.

(iii) em três prestações mensais iguais, sem desconto, vencendo a primeira no ato da compra.

Qual a melhor opção para Pedro, se o dinheiro vale, para ele, 25% ao mês?
Solução Fixando o preço do bem em 30, sabendo que temos 30% de desconto à vista e, 30% de 30 equivale à 21, temos os três esquemas abaixo (ver Figura 3.3):

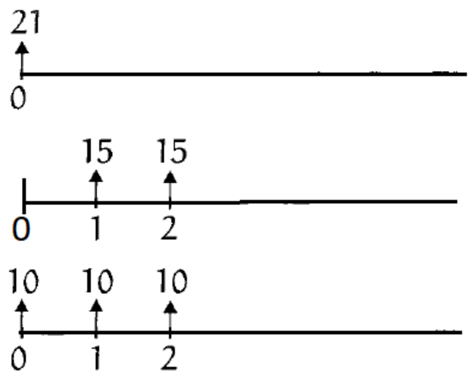

Figura 3.3: Alternativas para pagamento.

Comparando os valores, por exemplo, na época 0, obtemos:

$$a = 21$$

$$b = \frac{15}{1+0,25} + \frac{15}{(1+0,25)^2} = 21,6$$

$$c = 10 + \frac{10}{1+0,25} + \frac{10}{(1+0,25)^2} = 24,4$$

A melhor alternativa é a primeira e a pior é a última.

Exemplo 3.35. Uma loja oferece duas opções de pagamento:

(i) à vista, com 30% de desconto.

(ii) duas prestações mensais iguais, sem desconto, a primeira prestação sendo paga no ato da compra.

Qual a taxa mensal dos juros embutidos nas vendas a prazo?

Solução: Fixando o valor do bem em 100, sabemos que para o valor à vista temos um desconto de 30%, logo o valor para pagamento à vista é 70, temos os esquemas de pagamento na Figura 3.4:

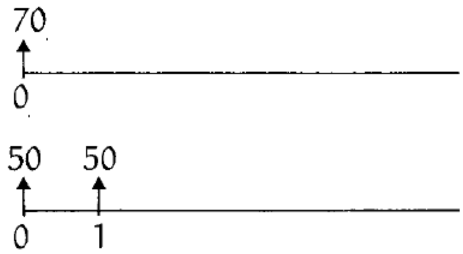

Figura 3.4: Esquema de Pagamento.

Igualando os valores, por exemplo, na época 0 (a data usada nessas comparações é chamada de data focal), obtemos: $70 = 50 + \frac{50}{1+i}$. Daí, $i = 1,5 = 150\%$. A loja cobra 150% ao mês nas vendas a prazo.

3.5 Taxas Proporcionais

Na subseção 3.2.1 apresentamos o conceito de taxas equivalentes. Ou seja, se a taxa de juros relativa a um determinado período de tempo é igual a i, a taxa de juros relativamente a n períodos de tempo é I tal que $(1 + I) = (1 + i)^n$.

Exemplo 3.36. A taxa anual de juros equivalente a 12% ao mês é I tal que $1 + I = (1 + 0,12)^{12}$. Logo, $I \cong 2,90 = 290\%$ ao ano.

Um erro muito comum é achar que 12% ao mês equivalem a juros anuais de $12 \times 12\% = 144\%$ ao ano. Taxas como 12% ao mês e 144% ao ano são chamadas de *taxas proporcionais*, pois a razão entre elas é igual à razão dos períodos aos quais elas se referem.

Taxas proporcionais não são equivalentes, ou seja a tradução da expressão "144% ao ano, com capitalização mensal" é "12% ao mês" (ou seja, a taxa mensal que lhe é proporcional). As pessoas que desconhecem a matemática financeira podem pensar que os juros sejam realmente de 144% ao ano, mas isso não é verdade. Os juros são de 290% ao ano (como vimos no Exemplo 3.36). A taxa de 144% ao ano é chamada de *taxa nominal* e a taxa de 290% ao ano é chamada de *taxa efetiva*.

Exemplo 3.37. “24% ao ano com capitalização semestral” significa “12% ao semestre”; “1% ao mês com capitalização trimestral” significa “3% ao trimestre” e “6% ao ano com capitalização mensal” significa “$0,5\%$ ao mês”.

Exemplo 3.38. Verônica investe seu dinheiro a juros de 6% ao ano com capitalização mensal. Qual a taxa anual de juros à qual está investido o capital de Verônica?
Solução: O dinheiro de Verônica está investido a juros de taxa $i = \frac{6}{12} = 0,5\%$ ao mês. A taxa anual equivalente é I tal que $1 + I = (1 + i)^{12}$. Daí, $I = 0,0617 = 6,17\%$ ao ano. A taxa de 6% ao ano é nominal e a taxa de $6,17\%$ ao ano é efetiva.

3.6 Série (ou anuidade) uniforme

Um conjunto de quantias (chamadas usualmente de pagamentos ou termos), referidas a épocas diversas, é chamada de série, ou de anuidade ou, ainda, renda. Se esses pagamentos forem iguais e igualmente espaçados no tempo, a série é dita uniforme.

Teorema 3.39. *O valor de uma série uniforme de n pagamentos iguais a P, um tempo antes do primeiro pagamento, sendo i a taxa de juros é igual a*

$$A = P \cdot \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}.$$

Demonstração. A Figura 3.5 mostra a série uniforme de n pagamentos iguais a P.

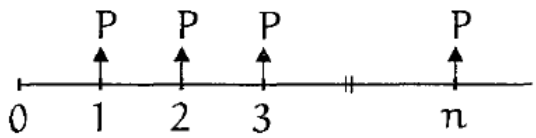

Figura 3.5: Série Uniforme de n pagamentos

O valor da série na época 0 é:

$$A = \frac{P}{1+i} + \frac{P}{(1+i)^2} + \frac{P}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{P}{(1+i)^n},$$

que é a soma nos n termos de uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{1+i}$. Do Teorema 3.22 temos:

$$a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = A = \frac{P}{1+i} \cdot \frac{1 - (\frac{1}{1+i})^n}{1 - \frac{1}{1+i}} = P \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

□

O corolário seguinte trata do valor de uma renda perpétua. Rendas perpétuas aparecem em locações. Quando se aluga um bem, cede-se a posse do mesmo em troca de um aluguel, digamos, mensal. Então o conjunto dos alugueis constitui uma renda perpétua ou perpetuidade.

Corolário 3.40. *O valor de uma perpetuidade de termos iguais a P, um tempo antes do primeiro pagamento é, sendo i a taxa de juros, igual a $\frac{P}{i}$.*

Demonstração. Basta fazer n tender a infinito no teorema anterior. □

Exemplo 3.41. Um bem, cujo preço à vista é R\$120, 00, é vendido em 8 prestações mensais iguais, a primeira sendo paga um mês após a compra. Se os juros são de 8% ao mês, determine o valor das prestações.
Solução: A Figura 3.6 mostra as prestações no valor P. Observe que a primeira prestação é paga um mês após a compra. As prestações deste tipo são ditas postecipadas.

Igualando os valores na época 0 (essa é a escolha natural da data de comparação: um tempo antes do primeiro termo da série), obtemos:

$$120 = P \cdot \frac{1-(1+0,08)^{-8}}{0,08}$$

$$P = 120 \cdot \frac{0,08}{1-(1+0,08)^{-8}} = 20,88.$$

As prestações são de R\$20,88.

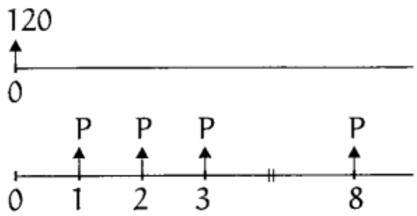

Figura 3.6: Pagamentos postecipados.

Exemplo 3.42. Um bem, cujo preço à vista é R\$120, 00, é vendido em 6 prestações mensais iguais, antecipadas (isto é, a primeira é paga no ato da compra). Se os juros são de 10% ao mês, determine o valor das prestações.

Solução: A Figura 3.7 mostra as prestações iguais a P começando no ato da compra.

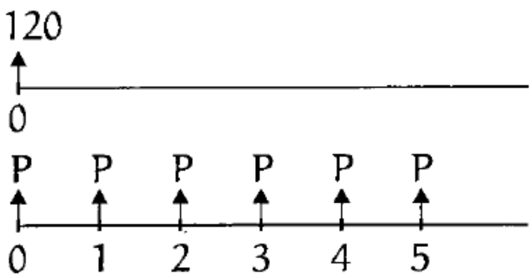

Figura 3.7: Pagamento no ato da compra.

Igualando os valores na época −1 (essa escolha, que pode parecer exótica, é muito conveniente pois dispomos de uma fórmula que calcula diretamente o valor da série nessa época, ou seja, uma etapa antes do primeiro pagamento), obtemos:

$$\frac{120}{1+0,1} = P \cdot \frac{1-(1+0,1)^{-6}}{0,1}$$

$$P \cong 25,05.$$

As prestações são de R\$25,05.

Exemplo 3.43. Se o dinheiro vale 1% ao mês, por quanto deve ser alugado um imóvel que vale 40.000 reais?
Solução: Quando alugamos um imóvel cedemos a posse dele em troca de uma renda perpétua cujos termos são iguais ao valor do aluguel. Então o valor do imóvel deve ser igual ao valor do conjunto infinito de aluguéis. De acordo com o Corolário 3.40 temos

$$40.000 = \frac{P}{i} = \frac{P}{0,01}$$

$$P = 40.000 \times 0,01 = 400.$$

Logo, o valor mensal do aluguel é R\$400.

Exemplo 3.44. Helena tem duas alternativas para obter uma copiadora:

(a) Alugá-la por 35 reais ao ano. Nesse caso, o locador se responsabiliza pelas despesas de manutenção.

(b) Comprá-la por 150 reais. Nesse caso, já que a vida econômica da copiadora é de 5 anos, Helena venderá a copiadora após 5 anos. O valor residual da copiadora após 5 anos é de 20 reais. As despesas de manutenção são de responsabilidade de Helena e são de 5 reais por ano, nos dois primeiros anos e de 8 reais por ano, no anos seguintes. Se o dinheiro vale 7% ao ano, qual a melhor opção?

Solução: Vamos tomar receitas como positivas e despesas como negativas. A Figura 3.8 mostra, de acordo com a segunda alternativa, o fluxo de caixa de Helena. Vamos

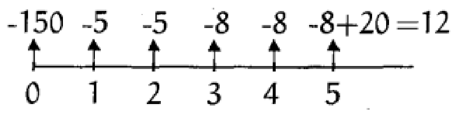

Figura 3.8: Fluxo de caixa

determinar o fluxo uniforme equivalente (ver Figura 3.9).

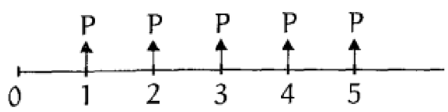

Figura 3.9: Fluxo de caixa uniforme

Igualando os valores na época 0, obtemos

$$-150 - \frac{5}{1,07} - \frac{5}{1,07^2} - \frac{8}{1,07^3} - \frac{8}{1,07^4} + \frac{12}{1,07^5} = P \cdot \frac{1 - 1,07^{-5}}{0,07}$$

Daí, $P = -39,78$. Comprar a copiadora é equivalente a ter um custo anual de 39,78 reais. Como o aluguel corresponde a um custo anual de 35 reais, a melhor alternativa para Helena é alugar.

3.7 Descontos

Quando um banco empresta dinheiro (crédito pessoal ou desconto de duplicatas), o tomador do empréstimo emite uma nota promissória, que é um papel no qual o tomador se compromete a pagar o banco, em uma data fixada, uma certa quantia, que é chamada *valor de face da promissória.*

O banco então desconta a promissória para o cliente, isto é, recebe a promissória de valor de face F e entrega ao cliente uma quantia A (menor que F, naturalmente). A diferença $F - A$ é chamada de *desconto.*

Os bancos efetuam o desconto de acordo com a fórmula

$$A = F(1 - d \cdot t) \tag{3.3}$$

onde d é uma taxa fixada pelo banco e chamada de taxa de desconto bancário (ou taxa de desconto simples por fora) e t é o prazo da operação, medido na unidade de tempo a que se refere a taxa.

Exemplo 3.45. Pedro desconta uma promissória de valor 100, com vencimento em 60 dias, em um banco cuja taxa de desconto é de 12% ao mês.

(a) Quanto Pedro receberá?

(b) Qual a taxa mensal de juros que Pedro está pagando?

Solução: Como o tempo da taxa de desconto bancário refere-se a mês, usa-se 2 meses para representar o vencimento em 60 dias. Da equação (3.3) temos

$$A = 100(1 - 0,12 \cdot 2) = 76.$$

Logo, Pedro receberá agora 76, para pagar 100 em 60 dias.

Se i é a taxa mensal de juros à qual cresce a dívida de Pedro, temos

$$100 = 76(1 + i)^2.$$

Daí, $i = 0,1471 = 14,71\%$. Observe que anunciar a taxa de desconto e não a taxa de juros é um modo sutil de fazer crer que Pedro está pagando juros menores do que os que realmente lhe está sendo cobrado.

3.8 Sistemas usuais de amortização: SAC e PRICE

Quando se paga parceladamente um débito, cada pagamento efetuado tem dupla finalidade. Uma parte do pagamento quita os juros e outra parte amortiza (abate) a dívida.

Exemplo 3.46. Pedro tomou um empréstimo de 100, a juros mensais de taxa 10%. Quitou-o em três meses, pagando a cada mês os juros devidos e amortizando 30% da dívida no primeiro mês e 30% e 40% nos dois meses seguintes.

Na Tabela 3.2, A_k, J_k, P_k e D_k são, respectivamente, a parcela de amortização, a parcela de juros, a prestação e o estado da dívida (isto é, o valor da dívida após o pagamento da prestação) na época k.

Para facilitar a compreensão, olhe cada linha na ordem A_k, D_k, J_k e P_k.

k	P_k	A_k	J_k	D_k
0	-	-	-	100
1	40	30	10	70
2	37	30	7	40
3	44	40	4	-

Tabela 3.2: Planilha

Os sistemas usuais de amortização são SAC (Sistema de Amortização Constante) e PRICE.

O que difere esses sistemas usuais é que o SAC tem como característica a amortização constante com parcelas decrescentes, já, a PRICE, tem parcelas constantes com amortização crescente.

A seguir apresentamos algumas situações para exemplificas estes dois sistemas.

Exemplo 3.47. Uma dívida de 100 é paga, com juros de 15% ao mês, em 5 meses, pelo SAC. Faça a planilha de amortização.

Solução Como as amortizações são iguais, cada amortização será de $\frac{1}{5}$ dívida inicial, ou seja, $A_k = 20$.

A planilha é, portanto dada pela Tabela 3.3 :

k	P_k	A_k	J_k	D_k
0	-	-	-	100
1	35	20	15	80
2	32	20	12	60
3	29	20	9	40
4	26	20	6	20
5	23	20	3	-

Tabela 3.3: Planilha

Para facilitar a compreensão, olhe cada linha na ordem A_k, D_k, J_k e P_k.

Teorema 3.48. *No SAC, sendo n o número de pagamentos e i a taxa de juros, temos:*

$$A_k = \frac{D_0}{n}, \qquad D_k = \frac{n-k}{n} D_0 \qquad J_k = i \cdot D_{k-1}, \qquad P_k = A_k + J_k.$$

Demonstração. Se a dívida D_0 é amortizada em n partes iguais, cada parte é igual a:

$$A_k = \frac{D_0}{n}.$$

O estado da dívida após k amortizações será:

$$D_k = D_0 - k \cdot \frac{D_0}{n} = \frac{n-k}{n} \cdot D_0.$$

As duas últimas fórmulas são óbvias. □

Exemplo 3.49. Uma dívida de 150 é paga, em 4 meses, pelo sistema PRICE, com juros de 8% ao mês. Faça a planilha de amortização.

Solução: No sistema PRICE, as prestações são constantes. Pelo Teorema 3.39 cada prestação vale

$$P = D_0 \cdot \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} = 150 \cdot \frac{0,08}{1-(1,08)^{-4}} = 45,29.$$

A Tabela (3.5) mostra a planilha completa. Para mais fácil compreensão, olhe cada linha

k	P_k	A_k	J_k	D_k
0	-	-	-	150
1	45,29	33,29	12	116,71
2	45,29	35,95	9,34	80,76
3	45,29	38,83	6,46	41,93
4	45,29	41,93	3,35	-

Tabela 3.4: Planilha

na ordem P_k , J_k, A_k e D_k .

Teorema 3.50. *No sistema PRICE de amortização, sendo n o número de pagamentos e i a taxa de juros, temos:*

$$P_k = D_0 \cdot \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$D_k = D_0 \cdot \frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{1-(1+i)^{-n}.}$$

$$J_k = i \cdot D_{k-1} \qquad A_k = P_k - J_k$$

Demonstração. A primeira fórmula é simplesmente o Teorema 3.39 e as duas últimas fórmulas são óbvias. Quanto à segunda fórmula, observe que D_k é a dívida que será liquidada, postecipadamente, por $n-k$ pagamentos sucessivos iguais a P_k. Portanto, novamente pela Teorema 3.39, temos

$$D_k = P_k \cdot \frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{i}.$$

Substituindo o valor de P_k, obteremos a segunda fórmula. □

Exemplo 3.51. Em um mês cuja inflação foi de 25%, Paulo Jorge investiu seu capital a juros de 30% ao mês. Evidentemente, isso não significa que Paulo Jorge tenha aumentado o seu poder de compra em 30%, pois, embora a quantidade de reais de Paulo Jorge tenha crescido 30%, o valor do real sofreu uma redução. Dizemos nesse caso que 30% ao mês é a taxa nominal de juros mensais de Paulo Jorge.

Suponhamos que, no início do referido mês, o capital C de Paulo Jorge pudesse comprar x artigos de preço unitário igual a p. No fim do mês, o capital passou a ser $1,3C$ e o preço unitário passou a ser $1,25p$. Logo, Paulo Jorge poderá agora comprar

$$\frac{1,3C}{1,25p} = 1,04x \text{ artigos.}$$

O poder de compra de Paulo Jorge aumentou de 4% nesse mês.

Essa taxa de 4% ao mês, à qual cresceu o poder de compra de Paulo Jorge, é chamada de taxa real de juros.

n	0	1	2	3	4	...
C_n	100	110	120	130	140	...

Tabela 3.5: Evolução do juros simples

Exemplo 3.52. Em algumas situações (prazos pequenos, juros de mora) são usados juros simples e não juros compostos. No regime de juros simples, os juros em cada época são calculados sobre o principal e não sobre o montante da época anterior. Por exemplo, um principal igual a 100, a juros simples de 10% ao mês evolui de acordo com a tabela abaixo:

Não há dificuldade em calcular juros simples pois a taxa incide sempre sobre o capital inicial. No nosso exemplo, os juros são sempre de 10% de 100, ou seja, de 10.

É claro então que, $C = C_0 + n_i \cdot C_0$ o que faz com que os valores de C, formem uma progressão aritmética.

Olhando para os gráficos da Figura 3.10 da evolução de um mesmo principal C_0 a juros de taxa i, a juros simples e a juros compostos, observamos que o montante a juros compostos é superior ao montante a juros simples, exceto se o prazo for menor que 1. É por isso que juros simples só são utilizados em cobranças de juros em prazos inferiores ao prazo ao qual se refere a taxa de juros combinada.

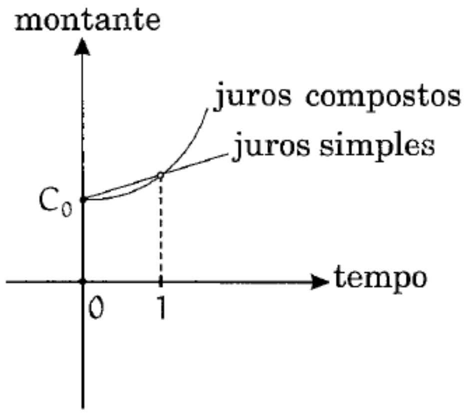

Figura 3.10: Comparação gráfica entre juros simples e juros compostos

4 Abordagens para a sala de aula

Neste capítulo, vamos propor duas atividades para o Ensino da Matemática Financeira no Ensino Médio. Elas podem ser trabalhadas com o uso do computador utilizando, por exemplo, a planilha eletrônica do *Excel*.

4.1 Proposta 1: Organizando as finanças

A seguir, apresentamos uma atividade que tem o objetivo de discutir o planejamento e gestão financeira. Este é um dos conteúdos citados na matriz de referência do PISA que discutimos no Capítulo 2 deste texto. Além disso, procurou-se desenhar a atividade num contexto atual e trazer algumas perguntas para discussão de assuntos que contribuam com a formação ampla do cidadão. Finalmente, a Matemática Financeira foi central para tomada de decisão.

Finanças familiar: Esta história retrata a situação financeira da família de Mariana, uma jovem de 15 anos que adora utilizar o computador para jogar, assistir vídeos e escrever suas poesias. Durante a pandemia da Covid-19, por causa da suspensão das aulas presenciais, ela começou a observar de forma mais constante a rotina de sua família.

Das observações que Mariana fez na rotina de sua família, a que mais lhe chamou a atenção foi que os pais tinham uma caixa de papelão guardada no canto do armário e dentro desta caixa havia uma grande quantidade de papeis. Nela estava todos os boletos que a família recebia para pagar o consumo mensal de água, energia, internet, aluguel e seguro do carro. Também, estão nesta caixa, os comprovantes de pagamento das compras feitas no mercado e nos postos de gasolina.

A facilidade de utilização de Mariana do computador motivou a jovem a lançar numa planilha eletrônica do Excel tudo que continha nesta caixa de forma organizada. Este foi o hábito de Mariana durante toda a pandemia. Seus pais adoraram esta nova rotina, pois conseguiram liberar espaço no armário desfazendo-se da caixa e dos papeis. O mais interessante foi que, ao sistematizar os papeis, Mariana pode concluir, fazendo uma média dos valores gastos em cada categoria. Veja os valores médios mensais gastos pela família durante os últimos dois anos:

- Gasto médio mensal com água: 150 reais.
- Gasto médio mensal com energia: 200 reais.
- Gasto médio mensal com internet: 120 reais.
- Gasto médio mensal com aluguel: 1200 reais.

- Gasto médio mensal com supermercado: 2000 reais.
- Gasto médio mensal com combustível: 500 reais.
- Gasto médio mensal com seguro do carro: 200 reais.

Pergunta 1: Você sabe como Mariana calculou o gasto médio mensal de sua família em cada uma das categorias?

O hábito que Mariana adquiriu em ajudar a sistematizar as contas financeiras de sua família se estendeu além do período da pandemia da Covid-19, ou seja, Mariana continuou a ajudar sua família na organização financeira e passou a conversar mais sobre a importância desta organização com seus pais e amigos.

Pergunta 2: O que é organização financeira para você? Quais os benefícios que ela pode trazer para a família ou para o indivíduo?

Voltando à história de Mariana, em fevereiro de 2022, a família teve um gasto imprevisto pois a geladeira da família deixou de funcionar. Para pagar o valor de 1000 reais para este conserto a família usou o cartão crédito. O pagamento deste valor do cartão deverá ser feito em março de 2022.

Como a família não tem o hábito de usar o cartão de crédito, Mariana, em sua planilha de organização financeira da família, criou uma categoria para despesas que viessem geradas pelos imprevistos do dia a dia. Esta iniciativa foi muito importante, pois um novo imprevisto aconteceu novamente em março de 2022. Desta vez foi uma doença inesperada de Mariana que fez a família gastar 130 reais na farmácia.

Veja na Figura 4.1 a organização financeira das despesas mensais previstas para o mês de março que Mariana fez usando a planilha eletrônica do Excel.

DESPESAS MENSAIS - MARÇO DE 2022

Salário Mensal	
Maria	3000
Carlos	3500
Total	**6500**

Despesas fixas	
Água	150
Energia	200
Internet	120
Aluguel	1200
Supermercado	2000
Combustível	500
Seguro do carro	200
Total	**4370**

Despesas Variáveis	
Farmácia	130
Cartão de crédito	1000
Total	**1130**

Resumo Mensal	
Recebimentos	6500
Despesas	5500
Diferença	**1000**

Figura 4.1: Gastos da família em Março de 2022

Observe que na planilha constam os salários de seus pais, Maria e Carlos. No total, o salário deles soma 6500 reais. Também, observamos os custos totais fixos e os variáveis. Além disso, percebe-se que depois de todos os pagamentos sobrou para a família o valor de 1000 reais.

Como Mariana acumulou uma certa experiência nos assuntos financeiros, sabe da importância de aplicar uma parte do dinheiro que se tem a fim de fazer uma reserva.

Pergunta 3: Quais os benefícios de aplicar uma parte do dinheiro que se recebe mensalmente?

Retornando à história. Mariana conversou com os pais que decidiram aplicar o valor de 1000 reais por 6 meses. Para isso, eles encontraram as seguintes opções:

- **Opção 1**: Aplicação em poupança no banco *Aplique Bem* com taxa mensal de $0,7\%$ ao mês para aplicações durante 6 meses;
- **Opção 2**: Aplicação no fundo de investimento *Invista Aqui* com taxa bimestral de $0,9\%$.

Qual a melhor opção para a família?

Opção 1: Para a aplicação em poupança no banco *Aplique Bem*, temos um período de 6 meses, à taxa de juros de $0,7\%$ ao mês para um valor de aplicação de 1000 reais. Desse modo, usando a planilha do Excel podemo realizar os cálculos, conforme é mostrado da Figura 4.2.

	A	B	C
1	**Período**	**Fórmula**	**Valor no período**
2	0	-	1000
3	1	=1000*(1+0,007)^A3	1007
4	2	=1000*(1+0,007)^A4	1014,049
5	3	=1000*(1+0,007)^A5	1021,147343
6	4	=1000*(1+0,007)^A6	1028,295374
7	5	=1000*(1+0,007)^A7	1035,493442
8	6	=1000*(1+0,007)^A8	1042,741896

Figura 4.2: Aplicação no Banco *Aplique Bem*

Opção 2: Para a aplicação no fundo de investimento *Invista Aqui*, temos um período de 3 bimestres que é equivalente à 6 meses e uma taxa de juros de $0,9\%$ ao bimestre. Desse modo, usando outra planilha do Excel, realizamos os cálculos mostrados na Figura 4.3.

	A	B	C
1	**Período**	**Fórmula**	**Valor no período**
2	0	-	1000
3	1	=1000*(1+0,009)^A3	1009
4	2	=1000*(1+0,009)^A4	1018,081
5	3	=1000*(1+0,009)^A5	1027,243729

Figura 4.3: Aplicação no Fundo de Investimento *Invista Aqui*

Analisando as duas possíveis aplicações, conseguimos constatar que a melhor aplicação é em poupança no banco *Aplique Bem*, ou seja a opção 1.

4.2 Proposta 2: Análise de Empréstimo

A seguir, apresentamos uma atividade que tem o objetivo de discutir a temática dinheiro e transações. Este é um dos conteúdos citados na matriz de referência do PISA que discutimos no Capítulo 2 deste texto. Nesta proposta, sugerimos a análise do sistema SAC e PRICE discutidos no Capítulo 3.

Inicialmente listamos algumas perguntas que podem ser utilizadas para introduzir esta atividade e fomentar discussões entre os jovens e o professor.

Pergunta 1: O que é mercado de crédito?
Pergunta 2: Quais pessoas podem tomar um empréstimo?
Pergunta 3: Você já ouviu falar de empréstimo *fintech on-line*?

Preciso de um empréstimo: Maria decidiu ampliar sua renda. Além de seu trabalho em um escritório, ela considerou suas habilidades para confeitaria e decidiu começar a fazer bolos e doces para festas. Para isso, precisa de um forno profissional e alguns materiais para equipar sua cozinha. Com os cálculos feitos, ela concluiu que precisa de 10.000 reais para fazer estas compras. Para isso, ela precisa fazer um empréstimo deste valor. As propostas que os bancos ofereceram foram as seguintes:

- **Proposta 1**: O *Banco Pague Pouco* sugeriu empréstimo de R$10.000, 00 a juros de 5% ao mês, no sistema PRICE, a ser pago, mensalmente, durante 10 meses.

- **Proposta 2**: O *Banco Seu Amigo* sugeriu empréstimo de R$10.000, 00 a juros de 5% ao mês, no sistema SAC, a ser pago, mensalmente, durante 10 meses.

Para decidir, Maria fez os cálculos para analisar o valor da parcela e os juros cobrados em cada banco.

- **Proposta 1**: Análise do empréstimo usando a Tabela PRICE.

$$D_k = P_k \cdot \frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{i}$$

$$10000 = P_k \cdot \frac{1-(1+0,05)^{-(10-0)}}{0,05}$$

$$500 = P_k \cdot (1-(1,05)^{-10})$$

$$P_k = \frac{500}{1-(1,05)^{-10}}$$

$$P_k = \frac{500}{0,3859} = 1295,05$$

Agora, já com o preço de cada parcela, elaboramos uma planilha para acompanhar, de forma detalhada em cada período a situação da dívida. Veja as Figuras 4.4 e 4.5. Na primeira, vemos a planilha do Excel com a indicação das fórmulas inseridas e, na segunda, a planilha com os resultados obtidos.

	A	B	C	D	E
1	**k**	**P_k**	**J_k**	**A_k**	**D_k**
2	0	-	-	-	10000
3	1	1295,05	=E2*0,05	=B3-C3	=E2-D3
4	2	1295,05	=E3*0,05	=B4-C4	=E3-D4
5	3	1295,05	=E4*0,05	=B5-C5	=E4-D5
6	4	1295,05	=E5*0,05	=B6-C6	=E5-D6
7	5	1295,05	=E2*0,05	=B7-C7	=E6-D7
8	6	1295,05	=E3*0,05	=B8-C8	=E7-D8
9	7	1295,05	=E4*0,05	=B9-C9	=E8-D9
10	8	1295,05	=E5*0,05	=B10-C10	=E9-D10
11	9	1295,05	=E2*0,05	=B11-C11	=E10-D11
12	10	1295,05	=E3*0,05	=B12-C12	-
13	**Totais**	**=SOMA(B3:B12)**	**=SOMA(C3:C12)**	**=SOMA(D3:D12)**	**-**

Figura 4.4: Tabela PRICE - Fórmulas na planilha do Excel

	A	B	C	D	E
1	**k**	**P_k**	**J_k**	**A_k**	**D_k**
2	0	-	-	-	10000
3	1	1295,05	500,00	795,05	9204,95
4	2	1295,05	460,25	834,80	8370,15
5	3	1295,05	418,51	876,54	7493,60
6	4	1295,05	374,68	920,37	6573,24
7	5	1295,05	328,66	966,39	5606,85
8	6	1295,05	280,34	1014,71	4592,14
9	7	1295,05	229,61	1065,44	3526,70
10	8	1295,05	176,33	1118,72	2407,98
11	9	1295,05	120,40	1174,65	1233,33
12	10	1295,05	61,67	1233,38	-
13	**Totais**	**12950,50**	**2950,45**	**10000,05**	**-**

Figura 4.5: Tabela Price - Cálculos

- **Proposta 2**: Análise do empréstimo usando o sistema SAC.

  Como no, sistema SAC a amortização é constante, dividimos o valor total da dívida pelo período de duração da mesma, logo:

$$A_k = \frac{D_0}{k}$$

$$A_k = \frac{10000}{10} = 1000$$

  Veja as Figuras 4.6 e 4.7. Na primeira vemos a planilha do Excel com a indicação das fórmulas inseridas e, na segunda, a planilha com os resultados obtidos.

Analisando os resultados, Maria optou pela proposta 2, pois os juros cobrados são menores.

	A	B	C	D	E
1	**k**	**P_k**	**J_k**	**A_k**	**D_k**
2	0	-	-	-	10000
3	1	=C3+D3	=E2*0,05	1000	=E2-D3
4	2	=C4+D4	=E3*0,05	1000	=E3-D4
5	3	=C5+D5	=E4*0,05	1000	=E4-D5
6	4	=C6+D6	=E5*0,05	1000	=E5-D6
7	5	=C7+D7	=E6*0,05	1000	=E6-D7
8	6	=C8+D8	=E7*0,05	1000	=E7-D8
9	7	=C9+D9	=E8*0,05	1000	=E8-D9
10	8	=C10+D10	=E9*0,05	1000	=E9-D10
11	9	=C11+D11	=E10*0,05	1000	=E10-D11
12	10	=C12+D12	=E11*0,05	1000	-
13	**Totais**	**=SOMA(B3:B12)**	**=SOMA(C3:C12)**	**=SOMA(D3:D12)**	**-**

Figura 4.6: Tabela SAC - Fórmulas no editor de planilhas

	A	B	C	D	E
1	**k**	**P_k**	**J_k**	**A_k**	**D_k**
2	0	-	-	-	10000
3	1	1500,00	500,00	1000,00	9000,00
4	2	1450,00	450,00	1000,00	8000,00
5	3	1400,00	400,00	1000,00	7000,00
6	4	1350,00	350,00	1000,00	6000,00
7	5	1300,00	300,00	1000,00	5000,00
8	6	1250,00	250,00	1000,00	4000,00
9	7	1200,00	200,00	1000,00	3000,00
10	8	1150,00	150,00	1000,00	2000,00
11	9	1100,00	100,00	1000,00	1000,00
12	10	1050,00	50,00	1000,00	-
13	**Totais**	**12750,00**	**2750,00**	**10000,00**	**-**

Figura 4.7: Tabela SAC - Cálculos

5 Conclusão

A BNCC nos traz diretrizes acerca das Habilidades e Aprendizagens Essenciais que a Educação Básica deve promover, estimular e direcionar a todos os estudantes no ramo do desenvolvimento intelectual, pessoal e profissional. Integrados à BNCC, temos os Temas Contemporâneos Transversais onde a Educação Financeira está incluída.

Dentro da sala de aula, os estudantes precisam ser estimulados e conscientizados sobre a importância das escolhas financeiras e orçamentárias, visto que, estas escolhas impactam em todas as esferas da vida. O estudante precisa ser estimulado a refletir sobre a sociedade de consumo imposta e sobre a utilização consciente e ética do dinheiro. Além disso, precisa ser letrado financeiramente para conhecer, compreender e ser crítico ao analisar taxas, prazos, tipos de empréstimos, entre outras situações financeiras decorrentes do dia a dia. Para isso, o papel da escola, é fundamental.

A integração da Matemática Financeira com a Educação Financeira deve ocorrer de forma natural para o professor de matemática. Para isso, é preciso que haja mais investimento na formação continuada do professor. Esta formação permitirá ao professor sentir-se preparado para a abordagem desta temática na sala de aula.

O letramento Financeiro é um direito dos estudantes e as escolas precisam de apoio para proporcionar aos seus alunos esta competência.

Quando abordamos a Educação Financeira nas escolas, ela deixa de ser restrita à sala de aula, rompem-se os muros e atingem às famílias. De forma inicial, os estudantes replicam conceitos desenvolvidos em sala aos seus familiares construindo, aos poucos, uma conscientização capaz de minimizar as desigualdades socioeconômicas.

Referências

[1] BRASIL. Casa Civil. *Decreto no 7.397, de 22 de dezembro de 2010*. 2010. Disponível em: planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2007-2010/2010/decreto/d7397.htm. Acesso em: 10 de out. 2022.

[2] ENEF. ESTRATÉGIA NACIONAL DE EDUCAÇÃO FINANCEIRA. *Plano Diretor*. 2010a. Disponível em: vidaedinheiro.gov.br/wp-content/uploads/2017/08/Plano-Diretor-ENEF-Estrategia-Nacional-de-Educacao-Financeira.pdf. Acesso em: 10 de out. 2022.

[3] ENEF. ESTRATÉGIA NACIONAL DE EDUCAÇÃO FINANCEIRA. *Anexos ao Plano Diretor*. 2010b. Disponível em: vidaedinheiro.gov.br/wp-content/uploads/2017/08/Plano-Diretor-ENEF-anexos-ATUALIZADO_compressed.pdf. Acesso em: 10 de out. 2022.

[4] FORTE, C. M. J. *Estratégia Nacional de Educação Financeira (ENEF): em busca de um Brasil melhor*. [S.l.]: São Paulo, Riemma Editora, 2020. v. 1.

[5] OECD. *Improving Financial Literacy: Analysis of Issues and Policies*. [S.l.]: Paris, France: OECD Publishing, 2005a.

[6] INEP. *PISA 2021: matriz de referência de análise e de avaliação de letramento financeiro*. [S.l.]: Brasília, DF, 2020.

[7] HOFMANN, R. M.; MORO, M. L. F. Educação matemática e educação financeira: perspectivas para a enef. *Zetetiké*, v. 20, n. 2, p. 37–54, 2012.

[8] GROHMANN, A.; MENKHOFF, L. School, parents, and financial literacy shape future financial behavior. *DIW Economic Bulletin*, Berlin: Deutsches Institut für Wirtschaftsforschung (DIW), v. 5, n. 30/31, p. 407–412, 2015.

[9] OECD. *PISA 2018 Results: Are Students Smart about Money?* [S.l.]: Paris, France: OECD Publishing, 2020. IV.

[10] MEC. Ministério da Educação. *BNCC - Base Nacional Comum Curricular*. 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em: 14 de agosto 2022.

[11] CONEF. *Educação Financeira nas escolas: Ensino Médio: livro do professor*. [S.l.]: Comitê Nacional de Educação Financeira (CONEF). Brasília, 2013. v. 1.

[12] NETO, A. A. Matemática financeira e suas aplicações. São Paulo. Editora Atlas, 2012.

[13] GRANDO, N. I.; SCHNEIDER, I. J. Matemática financeira: alguns elementos históricos e contemporâneos. *Zetetiké*, v. 18, n. 1, 2010.

[14] LIMA, C. B.; SÁ, I. P. de. Matemática financeira no ensino fundamental. *Revista Eletrônica TECCEN*, v. 3, n. 1, p. 34–43, 2006.

[15] JACOBINI, O. R.; WODEWOTZKI, M. L. L. Uma reflexão sobre a modelagem matemática no contexto da educação matemática crítica. *Boletim de Educação Matemática*, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, v. 19, n. 25, p. 1–16, 2006.

[16] Sá, I. P. de. *Matemática Financeira para educadores críticos*. [S.l.]: Editora Ciência Moderna, 2011.

[17] LIMA, E. L. et al. *A matemática do ensino médio*. [S.l.]: SBM, 1997. v. 6.